Notes du mont Royal
www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Bibliothèque de l'Université Claude Bernard Lyon 1

LES

QVINZE LIVRES DES ELEMENS D'EVCLIDE.

Traduicts de Latin en François:

Par D. HENRION *Mathematicien.*

SECONDE EDITION,

Reueuë, corrigée & augmentée.

SCD Lyon1
Mathématiques



A PARIS,
Chez IEAN ANTHOINE IOALLIN, dans la cour du Palais, entre les deux grandes portes, proche la barriere du Tresor.
M. DC. XXI.
Auec Priuilege du Roy.



A MESSIRE CHARLES DESCOVBLEAV, MARQVIS de Sourdy, & d'Alluie, Comte de la Chapelle Belloüin, Baron d'Auneau, & Mondoubleau; Seigneur de Ioüy, Montrichard, la tour d'Argy, & autres lieux: Conseiller du Roy en ses Conseils d'Estat & Priué; & Capitaine de cinquante hommes d'Armes d'ordonnances de sa Majesté.

MONSEIGNEVR,

Il y a quelques années que i'employay mes heures de loisir à la traduction des Elemens tant de la Geometrie d'Euclide, que des Spheriques de Theodose, en intention de les mettre au iour, esclairez de vostre illustre nom, m'assurãt que l'approbation que vous feriez d'icelles traductions leur seruiroit de touche, comme ces Elemens seruent de guide aux amateurs de la diuine Mathematique: car tout ainsi que ceux là trauailleroient en vain, qui voudroient paruenir au but d'vne vraye demonstration

par quelque voye contraire à celle desdicts Elemens; de mesme ceux aussi se monstreroient temeraires & ridicules, qui se voudroient ingerer de contrarier à ce que vous auriez approuué, veu qu'outre le solide iugement dont la nature vous a doué, & la grande cognoissance que vous auez, non seulement des choses concernant la milice, mais aussi en toutes les sciences liberales, & principalement en la Mathematique; vous auez esté si bien instruit és bonnes lettres, que vous pouuez voir & entendre les plus graues autheurs en leurs vrayes sources & langage naturel. Or suiuant ma premiere resolution, ie vous presentay ma traduction des Spheriques de Theodose, & non celle des Elemens d'Euclide, à raison qu'elle fut imprimée en mon absence; mais maintenant qu'elle est preste de voir le iour pour la deuxiesme fois, beaucoup mieux estoffée, & polie qu'en l'Edition precedente, ie la vous offre, Monseigneur, auec ceste asseurance que vous la receurez en vostre sauuegarde & protection, d'vn aussi gracieux visage & liberal accueil, que d'vne deuote humilité & respectueuse obeissance le sacrifice vous en est faict par

Vostre tres-humble & tres-obeissant seruiteur.

D. HENRION.

D. HENRION.

AV LECTEVR.



Il y a dix ou vnze ans, que voyant que personne n'auoit encore traduit en nostre langue, tous les Elemens de la Geometrie d'Euclide, le desir de seruir au public, m'excita d'entreprendre cette traduction: Mais comme ie me resoluois de la mettre au iour, ie fus preuenu de Monsieur Dounot: ce qui me diuertit pour lors d'effectuer mon dessein, me persuadant que ledit Sieur se seroit contenu dans les bornes d'vne iuste translation: Mais voyant en lisant ladite traduction, que ledit Dounot auoit alteré & changé le vray sens de l'Autheur en plusieurs endroicts, & mesme introduit de nouuelles demonstrations vicieuses & erronnées: cela fut cause que ie me proposay de reprendre mes premieres erres: & neantmoins i'vsay de quelque surseance, esperant que par vne seconde impression, ledit Dounot pourroit émander la premie-

re: Mais en l'année 1613. voyant qu'icelluy Dounot auoit fait faire ladite seconde impression, & en icelle corrigé peu de fautes, & mesmes qu'il y en auoit de nouuelles, cela me fit lors resoudre à mettre en lumiere cette mienne translation, pour le soulagement des François amateurs des disciplines Mathematiques: Elle fut donc imprimée en l'année 1614, mais si à la haste, que ie n'eus le loisir d'en mettre la coppie au net, ny mesme d'en voir aucune épreuue, m'estant fié de ce, à quelqu'vn qui s'en acquita si mal, que l'impression estant faite i'y trouuay tãt de fautes, que ie fus long temps en doute si ie la deuois aduoüer, & recognoistre l'ouurage pour mien, mais en fin ie le laissé aller au iour, m'estãt persuadé que les beneuolles Lecteurs excuseroient ces fautes, & suppléeroient aux manquemens qu'ils y trouueroient, iusques à ce que le temps me peut permettre d'en faire faire vne autre impression plus correcte. Ayant donc eu quelque loisir, ie me suis mis à reuoir, corriger, & augmenter en diuers lieux cette mienne traduction d'Euclide, & icelle fait mettre sous la presse; à l'impression de laquelle i'apporteray tel soing & diligence, que i'espere la garantir non seulement de toutes les fautes qui s'estoient glissées en la premiere impression, mais aussi l'exempter de beaucoup d'autres qui y pourroient de nouueau arriuer. Or voicy comme ie me suis comporté en cette traduction d'Euclide: Premierement ie me suis efforcé de rendre les demonstrations des Anciens, & principalement de Theon, lesquelles Proclus asseure estre d'Euclide,

quelquesfois plus briefues, autant que la matiere l'a peu permettre, ou pour le moins plus claires & intelligibles, retranchant où il y auoit de la superfluité, & éclarcissant où il y auoit trop de briefueté, suiuant en ce Commãdinus & Clauius: voire mesme en quelques endroicts où i'estimois les demonstrations de Theon trop longues & embroüillées, ie les ay totalement delaissées pour en prendre d'autres, non seulement plus briefues, mais aussi claires & intelligibles. Outre cela i'ay adiousté en diuers endroicts plusieurs Problemes & Theoremes vtils & dignes d'estre sceus, lesquels i'ay tiré de diuers bons Autheurs. D'auantage i'ay taſché d'éclaircir les plus obscures definitions d'Euclide, qui à faute d'estre bien prises, en ont fait chopper plusieurs, comme l'a tres-bien remarqué Clauius. Et d'autant que les doctes Commandinus, Stheuin & Dibuadius ont estimé que le dixiéme liure de ces Elemens (lequel est tenu par plusieurs fort difficile) seroit rendu beaucoup plus clair & intelligible y ioignant les nombres, ie les ay adiousteZ aux endroicts plus difficils & obscurs, me seruant du trauail des susdits Autheurs. Finalement voyant que chacun n'entendoit pas les operations des nombres radicaux & sourds, comme estans éloignées de celles de l'Arithmetique vulgaire, lesquelles neantmoins sont necessaires pour l'intelligence de ces demonstrations numerales; en la premiere impression i'auois fait vn sommaire & abbregé de l'Algebre, lequel nous auons retranché en cette-cy, à cause qu'il grossissoit par trop ce volume, &

auſsi qu'il eſtoit inutile à beaucoup : Neantmoins afin de contenter ceux qui le deſireront voir, nous auons ioinct ce ſommaire d'Algebre, auec pluſieurs autres traictez de Mathematiques, recueillis en vn volume intitulé, Collection Mathematique, *lequel a eſté depuis peu mis en lumiere à mon grand regret, attendu qu'entre tous ces diuers traictez, il y en a trois qui ont eſté imprimés à mon deſceu, ſur quelques coppies tirées d'aucuns de mes diſciples, auſsi bien que certaines leçons d'Horologeographie qu'on a miſe à la fin d'vn autre traicté de ce meſme ſubiect, fait par vn nommé P. de Floutrieres. Voila donc mon trauail ; reçois-le (amy Lecteur) attendant que ie te puiſſe bailler le ſecond volume de mes memoires Mathematiques, & quelques autres œuures de plus grande eſtude que cette traduction.*

Maintenant parce que ces Elemens d'Euclide ſeruent d'entrée à toutes les autres diſciplines Mathematiques, i'ay eſtimé qu'il ſeroit bon auparauant que nous venions à les interpreter, de reciter ſuccintement, (comme ont fait Commandin & Clauius) d'où les diſciplines Mathematiques ont pris leur nom : quelle eſt leur diuiſion : par qui elles ont eſté premierement inuentées : & qui ſont ceux par qui elles ont eſté depuis augmentées : combien grande eſt leur excellence, & vtilité, & telles autres choſes qui conuiennent à noſtre ſubiect.

Pourquoy les disciplines Mathematiques ont esté ainsi appellées.

Les disciplines Mathematiques, toutes lesquelles ont la quãtité pour leur object, ont pris leur nõ de la diction Grecque μαθημα ou bien μαθησις, qui signifie discipline, ou doctrine, dont on apporte deux principales raisons. La premiere est que les Pythagoriens, & Platoniciens, estimans que les ames raisonnables estoient contenuës en vn nombre certain & determiné, & qu'elles passoient d'vn corps en vn autre (ce que toutesfois la foy Chrestienne enseigne clairement estre faux) témoignent que ces disciplines Mathematiques ont eu ce nom, pource que principalement par icelles, nous acquerons le ressouuenir & la reminiscence de cette science, de laquelle nostre ame (comme ils estimoient faussement) estoit informée & instruite auparauant qu'elle fust entrée dans le corps. Mais les autres estiment que ces arts Mathematiques obtiennent le nom de science & de doctrine par dessus tous les autres, d'autant que seuls ils retiennent le moyen, & la raison de la science: Car ils procedẽt touſiours de certains principes cogneus auparauant, pour faire les demonstrations des conclusions; qui est le propre deuoir de la doctrine ou discipline; ce que ne font pas toutes les autres disciplines: car bien souuent elles amenent pour confirmer ce qu'elles veulent mõstrer, les choses qui n'ont pas esté assez expliquées ny demõstrées auparauant.

Diuision des disciplines Mathematiques.

Les Pythagoriens, lesquels ont esté suiuis presque

de tous les Mathematiciens, & de plusieurs Philosophes, ont diuisé toutes les disciplines Mathematiques en quatre parties, sçauoir Arithmetique, Musique, Geometrie, & Astronomie: Car puis que toute quantité, qui est leur object, est ou discrete, sous laquelle tous les nõbres sõt cõpris, ou continuë, sous laquelle sont compriſes toutes les grandeurs, & que l'vne & l'autre partie est considerée, tant selon soy, qu'en comparaison d'vne autre; il leur a semblé raisonnable d'instituer les quatre parties susdites, lesquelles considerassent l'vne & l'autre quantité, selon la double consideration susdite. C'est pourquoy l'Arithmetique traicte de la quantité discrete selon soy, recherchant & expliquant soigneusement toutes les proprietez & passions des nombres. La Musique traicte de la mesme quantité discrete, ou bien d'vn nõbre cõparé auec vn autre, entend qu'elle cõsidere les accords des sons & harmonies. La Geometrie dispute de la magnitude ou quãtité cõtinuë, aussi selon soy, comme elle est immobile. Et finablement l'Astronomie considere la grandeur, comme elle est mobile, tels que sont les corps celestes, ainsi qu'ils sont meuz d'vn continuel mouuement. Or à ces quatre sciences Mathematiques, desquelles l'Arithmetique, & la Geometrie sont appellées pures; mais la Musique, & l'Astronomie mixte: toutes les autres traictant en quelque maniere que ce soit de la quantité, telle qu'est la Perspectiue, la Geographie, & autres semblables, peuuent estre reduites, voire facilement, comme à leurs sources, desquelles elles dépendent.

Quelques anciens Geometres diuisent les disciplines Mathematiques d'vne autre maniere: car ils disent qu'aucunes d'icelles consistent seulement és

choſes intellectibles ſeparées de toutes matieres, & aucunes és choſes ſenſibles, de telle ſorte qu'elles touchent la matiere ſubjecte aux ſens : du premier genre, ils eſtabliſſent deux premieres & principales ſciences, l'Arithmetique, & la Geometrie : Mais au dernier genre, ils en conſtituẽt ſix, Aſtrologie, Optique, Geodeſie, Canonique, ou Muſique, Suputatrice & Mechanique. Ils diſent que l'Aſtrologie, eſt vne ſcience qui diſcoure des mouuemens du monde: des magnitudes, figures, & illuminations des corps celeſtes ; & de leurs diſtances à la terre, & d'autres choſes ſemblables : Et derechef de ceſte ſcience, ils en conſtituent trois parties : La Gnomonique, laquelle s'exerce en la dimenſion des heures, par la poſition des Gnomons : La Metheoroſcopique, laquelle enſeigne la difference des éleuations ; trouue les diſtances des Aſtres, & enſeigne pluſieurs autres & diuers Theoremes Aſtrologiques : Et la Dioptrique, laquelle diſcerne par inſtrumens Dioptriques les diſtances des planettes, & autres eſtoilles. Ils diſent que l'Optique eſt engendrée de la Geometrie, pource qu'elle ſe ſert de rayons viſuels, comme de lignes & d'angles qui ſont conſtituez d'iceux rayons : Or elle eſt diuiſée en trois parties : en l'Optique, qui eſt le nom general, Catoptrique, & Scenographie, ou comme quelques-vns aiment mieux Sciagraphie. L'Optique ou perſpectiue, rend la cauſe des apparences, leſquelles ont de couſtume ſe preſenter à nous, autrement qu'elles ne ſont, à cauſe des diuerſes ſcituations, & diſtances des choſes qui tombent ſous la veuë, comme de la coincidance de paralleles, & de l'aſpect des quarrez, comme ſi c'eſtoient cercles : La Catoptrique ou ſpeculaire vniuerſelle, a diuerſes refractions pour ſon object : Et la Sciagra-

phie, ou Deſignatrice des ombres, monſtre par quelle maniere ſe peut faire, que les choſes qui paroiſſent és images, ſemblent plaiſantes & non difformes, pour les diſtances & hauteurs des choſes deſignées. Ils appellent Geodæſie la ſcience, laquelle meſure les choſes qui conſiſtent en quantité, comme les tas & monceaux des choſes materielles, ainſi que les Cones; & les puits, comme les Cylindres: Ce qu'elle fait, non pas par lignes droictes intellectuelles, comme de la Geometrie, mais ſeulement par les ſenſuelles. Cette Geodæſie, comme la Geometrie eſt diuiſée en la partie qui meſure les plans; & en celle qui meſure les ſolides. Or quelques-vns, entre leſquels eſt Pediaſimus, comme rapporte Clauius au commencement du ſixiéme liure de ſa Geometrie practique, diſent que Geodæſie n'eſt que cette partie de Geometrie, laquelle enſeigne à partir ou diuiſer les ſuperficies: comme s'il falloit partir vn champ ou piece de terre, ou autre ſuperficie entre diuerſes perſonnes, cela ſeroit proprement appellé Geodæſie. Ces anciens là appellent Canonique ou Muſique, la ſcience qui conſidere les raiſons apparentes des accords des sõs, & qui ſe ſert par tout de l'aide des sẽs, & laquelle cõme dit Platon, sẽble auoir preferé les oreilles à l'entẽdement. La Supputatrice quãt à eux, eſt la meſme que ce que nous appellõs Arithmetique practique: Car elle conſidere les nõbres, non pas és choſes intellectuelles, mais cõme és choſes ſẽſuelles. Et finalemẽt la Mechanique, laquelle cõſiſte en la cognoiſſance des choſes ſenſuelles & conjoinctes à la matiere, ils la diuiſent en pluſieurs manieres: Car il y en a vne qui eſt effectrice des inſtrumens de guerre, tels que l'on dit qu'Archimede en auoit conſtruit, pour faire reſiſtance à ceux qui auoient aſſiegé tant

par mer que par terre la ville de Syracuſe. Il y en a vne autre qui eſt effectrice de choſes du tout admirables: Car elle enſeigne à conſtruire certains inſtrumens, qui par le moyen des vents, ou de l'eau, feignent la voix de quelconques animaux, tels que Cteſibe & Heron en ont fabriqué: & d'autres qui par diuers moyens imitent les cõuolutions & mouuemens des choſes animées, tels qu'Archimede, Architas Tarentin, & autres en ont conſtruit. Il y en a vne autre qui eſt la cognoiſſance des equilibres, & des choſes appellées centropõderantes. Et finalemẽt il y en a vne qui eſt appellée effectrice des Spheres, à l'imitation des circõuolutions celeſtes, telle qu'Archimede en a auſſi fabriqué: Et pour dire en vn mot, toute ſcience eſt mechanique, laquelle a la force de mouuoir la matiere. Or voila comme les Anciens diuiſoient les diſciplines Mathematiques.

Les inuenteurs des diſciplines Mathematiques.

Les hiſtoires teſmoignent, que toutes les diſciplines Mathematiques ont tiré leur origine de diuers Autheurs, voire meſme que chacunes de ces ſciences n'ont pas acquis vne perfection dés le commencement, mais qu'elles ont procedé peu à peu des choſes imparfaictes aux choſes plus parfaictes: Car on croit que les premiers inuenteurs de l'Arith. ont eſté les Pheniciens, à cauſe de leurs traffics & commerces frequens: laquelle depuis Pythagoras, & ſes ſucceſſeurs, & les Egyptiens, Grecs, & Arabes ont augmentee merueilleuſement, & eſclaircie de diuers Problemes & Theoremes. Quant à la Muſique pluſieurs hiſtoriens ont laiſſé par eſcrit, qu'elle a eſté premierement inuentee par Mercure, laquelle

depuis il communiqua & apprit à Orphee Muſicien fort eſtimé, & Orphee à Thamyre & à Linus; & Linus à Hercules: & ainſi par ſucceſſion continuelle d'autres Muſiciens excellens, de temps en temps elle eſt paruenuë iuſqu'à nous. Mais la Geometrie, ſelon Procle a eſté trouuee par les Egyptiens, & a tiré ſon origine du meſurage des terres labourables: car comme l'inondation du fleuue du Nil confondoit & gaſtoit les bornes des terres, tellement que chacun ne pouuoit pas recognoiſtre l'eſtenduë des ſiennes, cela excita les Egyptiens d'appliquer leurs eſprits à la maniere de meſurer les terres, afin que par ce moyen on rendiſt à chacun le ſien: Laquelle maniere de meſurer les terres, encore que pour lors elle fut fort rude, & mechanique, ſi eſt-ce toutesfois que de là elle print ſon nom de Geometrie, qui ſignifie autant que l'art de meſurer la terre. Or peu à peu la Geometrie commença à eſtre plus polie, & non contente de ſes limites, elle ſ'appliqua auſſi à meſurer les corps celeſtes, & enſeigna les principes de l'Aſtronomie, de l'Optique, & de pluſieurs autres diſciplines qui dependent d'icelle, comme des racines. L'on dit que Thales Mileſien la transfera d'Egypte en Grece, & depuis pluſieurs Philoſophes & renommez Mathematiciens l'ont enrichie & embellie de pluſieurs demonſtrations: entre leſquels ceux-cy ſont les principaux des anciens, Pythagoras, Anaxagoras, Clazomenien, Hippocrates de Chios, Platon, Oenopides, Zenodore, Briton, Antiphon, Theodorus, Theæterus, Ariſtarchus, Eratoſthenes, Architas Tarentin, Euclide, Serenus, Hypſicles Alexandrin, Archimede Syracuſien, Appolonius Pergæus, Theodoſe Tripolitain, Mileus Romain, Menelaus, Theon Alexan-

drin, Ptolomee, Eutocius Aſcalonite, Pappus, Proclus, & pluſieurs autres innombrables, leſquels il ſeroit long de rapporter. Finalement, pluſieurs eſtiment que l'Aſtronomie a eſté premierement inuentée par Atlas, d'où ils veulent que la fable a tiré ſon origine, que de ſes eſpaules il auoit ſouſtenu le ciel, à cauſe de l'excellente cognoiſſance qu'il auoit de l'Aſtronomie. Les autres eſtimẽt que par longue obſeruation les Chaldéens ont inuẽté la ſcience des aſtres. D'autres ſont les Egyptiens les premiers inuenteurs de ceſte ſcience. Les autres les Aſſyriens. Et finalement les autres eſtiment que ceſte gloire & loüange doit eſtre deferee aux Babyloniens. Or en ceſte ſciẽce, comme elle eſt tres-excellente, auſſi y a-il eu pluſieurs Autheurs excellents qui y ont trauaillé, leſquels nous ne rapporterons icy pour briefueté. Ces quatre principales diſciplines Mathematiques ayans eſté inuentées, toutes autres qui traictent de la quantité en quelque ſorte que ce ſoit, ont eſté facilement deriuées d'icelles, tout ainſi que petits ruiſſeaux d'vne fontaine.

L'excellence des ſciences Mathematiques.

D'autant que les diſciplines Mathematiques traictent des choſes, leſquelles ſont conſiderées ſans aucune matiere ſenſible, encore qu'elles ne ſoient naturellement ſans matiere, il eſt euident qu'elles tiennent le milieu entre la Metaphiſique, & la ſcience naturelle, ſi nous cõſiderons leur ſuject, comme Procle le prouue fort bien. Car le ſuject de la Metaphyſique eſt ſeparé de toute matiere, tant intellectuelle que ſenſuelle: mais le ſuject de la Phyſique eſt conioinct à la matiere ſenſible, d'où vient

que puis que le ſuject des diſciplines Mathematiques eſt conſideré hors de toute matiere ſenſuelle, mais non hors de toute matiere intelligible: il eſt euident qu'il eſt moyen entre ces deux-là. Mais ſ'il faut eſtimer l'excellence d'vne ſcience par la certitude des demonſtrations deſquelles elle vſe, ſans doute les diſciplines Mathematiques tiennent le premier lieu entre toutes: Car elles demonſtrent toutes choſes deſquelles elles entreprennent la diſpute, par des raiſons tres-fermes, & les confirment de telle ſorte, qu'elles engendrent veritablement vne ſcience en l'eſprit de ſes auditeurs, & oſte tous les doutes: ce qu'à peine pouuons-nous attribuer aux autres ſciences, veu qu'en icelles ſouuent l'entendement eſt en ſuſpend & en incertitude par la multitude des opinions, & diuerſité des aduis ſur la verité des concluſions: ce que teſmoignent ouuertement tant de ſectes des Peripateticiens, (afin que ie laiſſe tous les autres Philoſophes à part) leſquelles ayant pris leur origine d'Ariſtote, comme les ruiſſeaux de leur ſource ou fontaine, ſont tellement en diſcord, & entr'elles, & quelquesfois auec leur autheur meſme Ariſtote, qu'on ignore tout a fait ce que veut dire Ariſtote: d'où vient qu'vne partie ſuit les interpretes Grecs, comme guides & conducteurs, les autres les Latins, les autres les Arabes, les autres les Nominaux, & les autres les Philoſophes qu'ils appellẽt Reaux, (tous leſquels ſe vantent d'eſtre Peripateticiens) laquelle diuerſité ie n'eſtime pas que perſonne ignote combien eſt eſloignée des demonſtrations Mathematiques. Car les theoremes d'Euclide, & des autres Mathematiciens retiennent auiourd'huy la meſme pureté de la verité, la certitude des choſes, la force & fermeté des de-

monſtrations qu'elles ont eu par tant de ſiecles precedens. A cecy ſe rapporte ce que Platon dit en ſon dialogue du ſouuerain bien, que ceſte ſçience là eſt la plus digne, & la plus excellente, laquelle eſt la plus amatrice de ſincerité & verité. Veu donc que les diſciplines Math. deſirent, ayment, & cultiuent ſi ſoigneuſement la verité, que non ſeulement elles n'admettent rien qui ſoit faux, mais meſme rien qui ſoit ſeulement probable, ny rien qu'elle ne confirme & fortifie par demonſtrations tres-certaines, il n'y a point de doute qu'il ne leur faille bailler le premier lieu entre toutes les autres ſciences.

Diuerſes vtilitez des diſciplines Mathematiques.

Les diſciplines Mathematiques ne doiuent pas eſtre ſeulement eſtimées vtiles, mais auſſi fort neceſſaires, tant pour apprendre les autres arts parfaictement, que pour bien inſtituer & gouuerner la choſe publique : Car comme enſeigne fort bien Proclus, il n'y a point d'entrée à la Metaphyſique, ſi ce n'eſt par les Mathematiques. Car ſi des choſes ſenſibles, leſquelles le Phyſicien conſidere, nous voulons eſleuer noſtre entendement ſans aucun milieu, aux choſes du tout ſeparées de la matiere ſenſible, leſquelles le Metaphyſicien conſidere, nous nous aueuglons nous-meſmes, tout ainſi qu'il arriue à celuy qui de quelque lieu tenebreux, où il a eſté long temps, vient tout ſoudain paroiſtre en vne grande lumiere. C'eſt pourquoy auparauant que l'entendemẽt monte, des choſes Phyſiques qui ſont conioinctes à la matiere ſubiecte aux ſens, aux choſes Metaphyſiques qui en ſont ſeparées, il eſt neceſſaire de peur d'eſtre eſbloüy de leur clarté, qu'il

soit premierement accoustumé aux choses où il n'eschet pas vne si grande abstraction, telles qu'elles sont considerées par les Mathematiciens, afin qu'il les puisse plus facilement comprendre. C'est pourquoy Platon asseure que les Mathematiques esleuent l'esprit, & le subtilisent, pour la contemplation des choses diuines. Or combien ces disciplines apportent d'vtilitez pour bien entendre les sainctes Escritures, Sainct Augustin, sainct Hieroſme, & autres Docteurs nous l'apprennent, en disant qu'il y a beaucoup de choses, qui ne sont pas entenduës de plusieurs par l'ignorãce des nombres, pource qu'elles ont esté couchees dans l'Escriture mystiquemẽt. Ces mesmes Docteurs disent que la Geographie, & la Geometrie sont grandement vtiles aux Theologiens. Et Sainct Basile est grandement loüé par Gregoire Nazianzene, de ce qu'il estoit fort bien versé en l'Astrologie, Geometrie, en la cognoissance des nombres, & autres sciences des Mathemat. Pareillement elles ne seruent pas peu pour acquerir parfaictement la Philosophie naturelle, Morale, la Dialectique, & autres semblables, comme l'enseigne fort bien Proclus. I'adiouste que presque tous les volumes des anciens Philosophes, & nommément d'Aristote & de Platon, lesquels à bon droict sont proposez pour guide, pour bien & sainement philosopher, & presque de tous les Interpretes tant Grecs que Latins, sont remplis d'exemples Mathematiques, pour ceste raison principalemẽt, afin que les choses qui semblent estre enueloppees de grandes difficultez fussent renduës plus intelligibles par ces exemples plus clairs, lesquels on ne sera point capable d'entendre, si on est du tout destitué de la cognoissance des Mathematiques; d'où vient qu'an-

ciennement la frequentation du college de Platon estoit interdicte à ceux qui n'estoient pas bien versez és disciplines Mathemat. C'est pourquoy en son Timee, il appelle les Mathematiques le chemin de toutes vrayes eruditions: voire mesme il dit en son Philebe, que toutes les disciplines sont viles & abiectes sans les Mathemat. Ie pourrois rapporter icy plusieurs autres tels tesmoignages, tant de Platon, qu'autres Philosophes excellēts, lesquels ie delaisse pour venir aux choses plus cogneuës, voire mesme des plus ignorans. Car qui est celuy qui ne sçait l'vtilité & necessité de l'Arithmetique, non seulement à ceux qui s'employent au commerce, mais presque à toutes sortes de personnes? Qui ne void l'vtilité de la Geometrie; puis que c'est elle qui conduit l'Architecte en la structure des maisons & autres bastimens: l'Ingenieur en la construction des forteresses, en l'inuention des machines, tant offensiues, que deffensiues: puis que c'est elle (dis-ie) qui monstre à mesurer les longueurs, largeurs, hauteurs & profondeurs; la diuision des terres, à prendre, & representer le plan des villes, ou autres lieux: à faire la Carte des Prouinces ou Royaumes; à diuiser & compasser en vn champ les espaces pour camper vne armée; à celuy qui veut ranger des hommes en bataille, selon quelle figure ou forme, il doit ranger son armée, afin de faire paroistre le nombre de ses hommes plus grand ou moindre qu'il n'est? Bref, qui ne void combien l'Astrologie est vtile, puis que c'est elle qui enseigne la distinction des temps & des saisons? Et qui est-ce qui peut sans l'aide de la Geometrie & Astrologie, courir les mers, aller és contrées lointaines, voir le nouueau monde, & en rapporter tant de richesses que nous auons

de ces quartiers là? Et comment l'Hystorien rapportera-il la scituation des climats, les grandeurs, diametres, & circuits des villes, sans l'aide de la Geometrie & Astronomie? Que dirons-nous plus? la cognoissance des nombres ne fust-elle pas tresvtile à Iosephe, Sacrificateur des Iuifs, lors qu'à la prise de la ville de Iotapate, par Vespasien chef de l'armée Romaine, ceste cognoissance & subtilité des nombres luy sauua la vie? La mesme vtilité apporta la cognoissance de l'Astrologie à Christophle Colomb, grand Admiral de l'Occean Occidental, sous Dom Fernand, Roy de Castille, premier explorateur du nouueau monde: Car estant paruenu pres de l'Isle qu'on nomme Iamayque, & là perdu deux Carauelles que le Roy luy auoit baillée, tellement qu'il estoit sans vaisseau, les habitans d'icelle Isle ne luy voulurent par prieres, force, ou autrement deliurer aucun viure, dont luy & sa compagnie estoient en grande necessité, & par ce moyen lesdits habitans esperoient les pouuoir tous vaincre & saccager: Mais ledit Colomb cognoissant par l'Astrogie qu'vne nuict prochaine, il se feroit vne grande Eclypse de Lune, il dit à quelques-vns des habitans, que s'il ne luy vendoient des viures, & à sa compagnie, que dans peu de temps ils mourroient tous par pestes, & effusion de sang; & pour tesmoignage que cela aduiendroit ainsi, ils verroient en vn tel iour, & à vne telle heure qu'il leur nomma, la Lune toute sanglante: Ce qu'estant aduenu ainsi, lesdits habitans ignorans l'Astrologie, adiousterent foy aux menaces dudit Colomb, & luy demandant pardon, luy apporterent tout ce qu'il demandoit, & le prierent qu'il les mit en la bonne grace de la Lune. Nous adiousterons encore icy, que Hieron

Roy

Roy de Syracuſe, ayãt fait bãtir vne nauire pour enuoyer à Ptolomée Roy d'egypte, d'vne telle grãdeur, que tous les Syracuſiens enſemble ne la pouuoient remuer de ſa place. Vn ſeul Archimede par le moyen de la Geometrie, fiſt que le Roy ſeul, ſans aucune peine la remua de ſon lieu, dont le Roy & tous les Syracuſiens furent grandement émerueillez. Qui eſt donc celuy qui ne doiue deſirer les diſciplines Mathematiques ſur toutes les autres ſciences, puis qu'elles ſont non ſeulement agreables, mais auſſi tres-vtiles & neceſſaires à la vie humaine?

Recommandation d'Euclide, & de la Geometrie.

Les Autheurs ne ſont pas bien d'accord, qui a eſté Euclide, qui a compoſé ces Elemens, & en quel temps il a flory. Car pluſieurs penſent que ç'a eſté vn Philoſophe de la ville de Megare, diſciple de Socrates, qui inſtitua la ſecte appellée par luy Megarique. Mais ſi nous croyons Proclus, Autheur excellent, & autres anciens, noſtre Euclide a eſté depuis celuy de Megare, & a flory au temps de Ptolomée premier, lequel commença à regner en Egypte apres la mort d'Alexandre, la 115. Olimpiade, & l'an 319. auparauant la natiuité de noſtre Seigneur, comme le rapporte Iean Lucide: Ce qui eſt plus vray ſemblable, d'autant que Diogenes Laërtius rapportant tous les œuures d'Euclide Megarien, il ne fait aucune mention de cét admirable volume des Elemens Geometriques, par lequel noſtre Euclide s'eſt acquis vne renommée & gloire immortelle. C'eſt pourquoy noſtre Euclide tres-ſubtil Geometrien, eſt bien autre que ce Megarien là; d'autant qu'eſtant tres-bien verſé en la doctrine des Academiques, il

applicqua son esprit aux Mathematiques, esquelles il se rendit si excellent, que par le commun consentement de tous, il a obtenu le premier lieu entre les Mathematiciens. Or il a écrit plusieurs volumes concernant les Mathematiques, esquels paroist sa grande diligence, & admirable doctrine, tels que sont ses Optique, Catoptrique, Musique, Phenomenes, & le liure des Donnez; l'œuure des diuisions, que nous estimons estre ce petit liure tressubtil des diuisions des superficies, attribué à Machamet Bagdedin, qui depuis peu a esté mis en lumiere par la diligence de Iean Dée, & de Federic Commandin. Pareillement il a écrit les Elemés Coniques, comme dit Proclus, lesquels toutesfois ne sont pas encore paruenus jusques à nous, & autres petits traictez semblables. Mais principalement il a tissu ce volume des Elemens Geometriques, qui par le consentement de tous, ne sera iamais assez loüé, auec vn ordre si admirable, & l'a remply d'vne si grande erudition, qu'il n'y en a pas vn de tous ceux qui ont écrit de semblables Elemens, (car comme dit Proclus, il y en a plusieurs qui en ont composé) qui l'ait égalé, tant s'en faut qu'il y en ait quelqu'vn qui l'ait surpassé, auquel volume comme il a fait paroistre la grande subtilité de son esprit, ainsi il n'a pas estimé qu'il fallut mettre au jour toutes les choses qui touchent la Geometrie, mais seulement les choses qui luy ont semblé vtiles & necessaires pour tous, lesquelles il a confirmées & fortifiées d'argumens & raisons tres-fermes & tres-solides. Or l'on peut recognoistre clairement, tant des choses que nous auons déja representées, que de ce que nous dirons encore presentement, combien est grande l'vtilité & excellence de ces

Elemens Geometriques d'Euclide, & conſequemment de toute la Geometrie. Ces Elemens ſont ainſi appellez, d'autant que nous ne pouuons ſans cela entreprendre aucunes œuures Mathematiques, tant s'en faut que nous en puiſſions retirer aucun fruict: Car tous les Autheurs des Mathematiques, comme Archimede, Appolonius Pergeus, Theodoſe &c. ſe ſeruent en leurs demonſtrations de ces Elemens d'Euclide, comme de principes certains, & deſquels les demonſtrations eſtoient déja il y auoit long temps recogneuës & tenuës pour conſtantes & aſſeurées de tout le monde. Parquoy il eſt neceſſaire que celuy qui deſire ſçauoir, & ſe rendre familiere quelconque partie des Mathematiques, apprenne auparauant ces Elemens Geometriques. Car d'iceux Elemens, comme d'vne fontaine plantureuſe, eſt produite la dimenſion des latitudes, longitudes, altitudes & profondeurs: la diuiſion des terres, montagnes, & iſles: l'obſeruation des aſtres du ciel, qui ſe fait par les inſtrumens: la compoſition des horologes ſcioteriques: la force des machines: la raiſon des pois: & cette diuerſité d'apparences qu'on voit és miroirs, és peintures, és eaux, & en l'air diuerſemẽt illuminé. Par le moyen dis-je de ces Elemens, a eſté trouué le milieu & centre de toute cette machine du monde; & ont eſtez trouuez les poles, à l'entour deſquels il ſe tourne continuellement: & a eſté recherchée & trouuée la figure & quantité de toute la terre. Par la force de cette ſeule ſcience eſt monſtrée & demonſtrée la conuerſion de tout le ciel, & des aſtres: leur leuer & coucher: leur approchement & éloignement: leur aſcention & deſcention; la varieté du iour & de la nuict, & des temps en toute l'année, par toute la ſcituation des endroicts de la

terre. Pareillemẽt les conjõctiõs des Planettes, leurs oppositiõs, & diuers aſpects, sõt cogneus ſi facilemẽt que les Mathematiciens peuuent dire leurs lieux au ciel, & predire aſſeurémẽt les Eclypſes, ſoit de Soleil, ſoit de la Lune, auparauãt qu'elles aduiẽnẽt, pour ſi long temps qu'il leur plaiſt. Bref, par le moyen de la Geometrie, nous voyons tout ce grand œuure de Dieu perceptible aux yeux de noſtre entẽdement.

La diuiſion de Geometrie, & des Elemens d'Euclide.

La Geometrie eſt diuisée en la contemplation des plans, qui eſt appellée du mot general Geometrie; & en la doctrine des ſolides, laquelle les Mathematiciens appellent par vn nom propre & peculier la Stereometrie. Car la Geometrie vniuerſelle ſe propoſe ce but, qu'elle conſtituë ou les plans, ou les ſolides, ou bien eſtans conſtituez, elle les compare entr'eux, ou les diuiſe. Or noſtre Euclide voulant laiſſer vne parfaicte cognoiſſance en ces Elemens des choſes Geometriques, il traicte des plans aux ſix premiers liures; & aux cinq derniers, il diſpute fort ſubtilement des ſolides, & recherche leurs proprietez les plus excellentes. Et d'autant que toutes les choſes Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers, qui ont de couſtume d'eſtre appellez corps Platoniques, ne pouuoient eſtre traictez parfaictement ſans la cognoiſſance des lignes cõmenſurables, & incommenſur. Euclide afin de comprendre dans ces Elemens Geometriques, tous les enſeignemens requis pour l'intelligence, & dimẽſion des magnitudes, il a mis ſon dixiéme liure deuant ſa Stereometrie, auquel il diſcoure ſubtilement de ces ſortes de lignes là: Et qui plus eſt, Eu-

clide ſçachant que ce traicté des lignes commenſurables & incommenſurables ne ſe peut bien faire ſans la cognoiſſance des nombres; deuant le dixiéme liure, il traicte des paſſions ou proprietez des nombres, és trois liures qui le precedent. C'eſt pourquoy tout ce volume des Elemens Geometriques compris en quinze liures, (deſquels les treize premiers ſont attribuez de tous à Euclide ſans aucun contredit, mais les deux derniers ſont attribuez à Hypſicle Alexandrin) ſe pourra à bon droict diuiſer en quatre parties; tellement que la premiere partie contenuë és ſix premiers liures, traicte des plans: la ſeconde comprenant les trois liures ſuiuans recherche les paſſions des nombres: La troiſiéme partie, laquelle le dixiéme liure conſtituë ſeul, traicte des lignes commenſurables & incommenſurables. Et finalement la quatriéme partie contenuë aux cinq autres liures, comprend la ſciẽce des corps ou ſolides. La premiere partie ſe diuiſe derechef en trois: Car aux quatre premiers liures, il eſt traicté des plans abſolument, en recherchant leur égalité & inégalité; mais au cinquiéme liure, il eſt traicté en general des proportions des magnitudes: & au ſixiéme, ſont examinées les proportions des figures planes.

Que c'eſt que Probleme, Theoreme, propoſition, Lemme, Coroll. & Scholie, entre les Mathematiciens.

Toute demonſtration de Mathematiques, eſt diuiſée par les Anciens Autheurs, en Probleme & Theoreme. Ils appellent Probleme, cette demonſtration qui cõmande & enſeigne à conſtruire quelque choſe: Et Theoreme, la demonſtration laquel-

le recherche seulement, quelque passion ou proprieté d'vne ou plusieurs quantitez ensemble : Bref les Problemes enseignent à trouuer & construire quelque chose, & les Theoremes demonstrent les affections & proprietez des choses déja faites & construites : Et tant le Probleme que le Theoreme, sont appellez entre les Mathematiciens Proposition, d'autant que l'vn & l'autre nous propose quelque chose. Ils appellent Lemme, quelque Probleme ou Theoreme, lequel estant necessaire à leur demonstration, ils le prennent & prouuent auparauant que venir à leur dite demonstration principale, afin de la faire plus euidente & briefve. Mais ce que nous appellons Corollaire, est vne consequence que nous tirons de ce qui a esté demonstré en quelque proposition. Et finalement, ce qu'on nomme Scholie, est vne annotation qu'on fait seulement, comme en passant sur quelque proposition.

Des principes des Mathematiciens.

Veu que toute doctrine & discipline est engendrée d'vne cognoissance precedente, comme le témoigne Aristote, & demonstre ses conclusions de certains principes pris & concedez, & qu'il n'y a aucune science, selon le mesme Aristote, & autres Philosophes, qui demonstre ces principes ; les disciplines Mathematiques auront aussi leurs principes, desquels estans posez & concedez, elles confirment leurs Problemes & Theoremes. Or il y a entre les Mathematiciens trois genres de principes. Au premier sont mises les definitiõs, par lesquelles les mots & termes de l'art sont expliquez, de peur qu'en traictant de la science, s'estans trompez par l'ambiguité

des noms, ou par l'obscurité, nous ne tombions en des paralogismes. Le second genre comprend les petitions ou demandes, qui sont choses si claires & euidentes en cette science, qu'elles n'ont besoin d'aucune confirmation, mais requierent seulement le consentement de l'auditeur, afin qu'en faisant la demonstration, il n'y ait aucune hesitation ou difficulté. Au troisiéme genre sont referez les Axiomes, ou communes notions de l'esprit, autrement communes sentences, qui sont choses si manifestes & euidentes, que celuy qui entendra bien les termes, n'y pourra contrarier en façon quelconque. Or Euclide en ce volume des Elemens Geometriques, met deuant les demonstrations de ses conclusions, ces trois genres de principes, lesquels sont facilement entendus de tous, pour tirer d'iceux des Theoremes admirables, ausquels iamais personne ne consentiroit, s'ils n'estoient confirmez par raisons certaines & euidentes. Or voila tout ce que nous nous estions proposé de declarer sur le subiect de ces Elemens d'Euclide, & autres preambules ou prolegomenes, qu'on pourroit nommer en François Auant-propos. Nous viendrons donc maintenant à l'exposition des principes d'Euclide.

ELEMENT PREMIER.

DEFINITIONS.

1. Le poinct, est ce qui n'a aucune partie.

LEs Physiciens disent que le poinct est le moindre object de la veuë: & iceluy peut estre descrit auec ancre ou autre chose. Mais les Mathematiciens reiettant ceste definition, disent que le poinct est vn object de l'intellect si subtil qu'il ne peut estre diuisé en aucunes parties: Et iceluy ne se peut escrire, mais seulement entendre & imaginer: bien est vray que pour le representer à nos sens exterieurs, nous nous seruons du poinct Phisique. Le poinct n'a donc aucunes des dimensions geometriques; c'est à dire, qu'il n'a ny lon-

gueur, largeur, ny eſpoiſſeur, mais bien eſt-il principe d'icelles.

2. La ligne, eſt vne longueur ſans largeur.

Apres le poinct vient la ligne, qui n'eſt autre choſe que le flux ou coulement du poinct en longueur, laquelle n'aura aucune largeur, comme dit Euclide; puis que le poinct du coulement duquel elle eſt produite n'en a aucune; & par conſequent la ligne, qui eſt la premiere eſpece de quantité continuë a ſeulement vne dimenſion, ſçauoir eſt longueur: car n'ayant aucune largeur, elle ſera auſſi neceſſairement ſans eſpoiſſeur.

3. Les extremitez des lignes, ce ſont poincts.

Cecy eſt intelligible, puis que toutes lignes terminées commencent à vn poinct & acheuent auſſi à vn poinct: Car Euclide n'entend parler icy ny des lignes infinies, ny des circulaires, ny de toutes autres ſortes de lignes, auſquelles on ne peut aſſigner aucun terme ny extremité.

4. La ligne droicte, eſt celle qui eſt également compriſe entre ſes poincts.

Les Mathematiciens ont diuerſes ſortes de lignes; mais Euclide traicte icy que des deux plus ſimples, ſçauoir eſt de la droicte, & de la circulaire: en ceſte definition il parle de la droicte, laquelle eſt le plus court chemin d'vn poinct iuſques à l'autre: ou

comme dit Archimede, c'eſt la plus courte d'entre ſes extremitez.

5. Superficie, eſt ce qui a longueur & largeur tant ſeulement.

Apres la ligne, qui eſt la premiere eſpece de quantité continuë, & qui a vne ſeule dimenſion, Euclide definit la ſuperficie, qui eſt la ſeconde eſpece de quantité, & a deux dimenſions: ſçauoir eſt, longueur & largeur; & comme la ligne eſt produite par le flux ou coullement du poinct, ainſi la ligne ſe mouuant en trauers, produit la ſuperficie.

6. Les extremitez de la ſuperficie, ce ſont lignes.

Il faut icy entendre des ſuperficies bornées, & terminées par lignes droictes: car il y a bien pluſieurs ſuperficies encloſes d'vne ſeule ligne, comme de la circulaire, & autres, dont Euclide ne fait mention en ces Elemens cy: mais il n'en veut icy parler, non plus que de la ſuperficie ſpherique, qui circuit & enuironne vn corps entierement rond & ſpherique. Comme donc la ligne terminée commence à vn poinct, & finit à vn autre poinct, ainſi auſſi la ſuperficie terminée commence par vne ligne, & finit par vne ligne.

7. Superficie plane, eſt celle qui eſt également compriſe entre ſes lignes.

Ceſte definition de la ſuperficie plane ſe rapporte à celle de la ligne droicte: Car comme celle-cy eſt

la plus courte d'entre ſes extremitez, ainſi auſſi la ſuperficie plane eſt celle qui eſt la plus courte d'entre ſes limites ou extremitez, tellement qu'il n'y a aucun endroit d'icelle ſuperficie qui ſoit plus eſleué ou abbaiſſé que ſeſdites extremitez. Mais toutes ſuperficies eſquelles il y a des endroits les vns plus eſleuez que les autres, tellement qu'on n'y peut pas accommoder vne ligne droicte par tous les lieux & endroits d'icelles, telle qu'eſt la ſuperficie interieure d'vne voulte ou arcade, ou bien l'exterieure d'vn globe, ou d'vne colomne ronde, & auſſi d'vn cone, &c. ſont appellées ſuperficies courbes: & iceiles ſont de pluſieurs ſortes, c'eſt à ſçauoir conuexe, comme la ſuperficie exterieure d'vne ſphere, ou d'vne colomne ronde; & concaue, comme la ſuperficie interieure d'vne voulte ou arcade.

8. Angle plan, eſt l'inclination de deux lignes, l'vne à l'autre ſe touchant en vn plan non directement.

9. Que ſi les lignes comprenant l'angle ſont droictes, l'angle ſera appellé rectiligne.

Quand deux lignes conſtituées en quelque ſuperficie plane, concurrent en vn poinct d'icelle ſuperficie, & ne ſe rencontrent directement, alors l'inclination d'icelles deux lignes, ſ'appelle angle plan. Or tout angle plan eſt fait, ou de deux lignes droictes, & alors il ſe nomme rectiligne: ou de deux lignes courbes, & alors on l'appelle curuiligne: ou bien d'vne ligne droicte, & d'vne courbe, & alors il

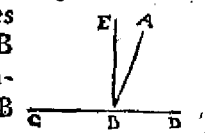
s'appelle angle mixte. Quelques Geometres (entre lesquels est Dounot,& pource auoit-il changé ceste definition de l'angle plan en la premiere impression de sa traduction d'Euclide) ont estimé qu'afin que deux lignes fassent angle,il estoit necessaire qu'estãs continuées du poinct de leur rencontre, elles s'entrecoupassent en iceluy,dont s'ensuiuroit que deux cercles s'entretouchant en vn plan, ou qu'vne ligne droicte touchant vn cercle ne feroit angle, ce qui est contre l'intention d'Euclide, ainsi qu'il appert, tant par ceste definition de l'angle plan, que 16. p.3. & comme l'a aussi bien demonstré Clauius sur la mesme proposition, où il refute Pelletier, qui disoit que la ligne droicte touchant le cercle, ne faisoit angle; c'est pourquoy ceux qui tiennẽt encore ceste opinion, se mocquent bien d'Euclide, de Clauius,& autres Geometres, qui disent qu'vne ligne droicte touchant vn cercle, fait vn angle contingent, ou d'attouchemẽt. Or la grandeur d'vn angle plan consiste en la seule inclination des lignes qui le constituent, & non en la longueur d'icelles lignes.

10. Quand vne ligne droicte tombant sur vne autre ligne droicte, fait les angles de part & d'autre esgaux entr'eux, les angles sont droicts; & la ligne tombante, est perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe.

11. Angle obtus, est celuy qui est plus grand qu'vn droict.

12. Mais l'aigu, eſt celuy qui eſt plus petit qu'vn droict.

Si vne ligne droicte tombant ſur vne autre ligne droicte, ne ſ'encline pas d'auantage d'vn coſté que de l'autre, mais fait égale inclination, & par conſequent deux angles égaux entr'eux, chacun d'iceux eſt appellé angle droict, & la ligne ainſi tombante, perpendiculaire à celle-là, ſur laquelle elle tombe. Mais quand ceſte ligne tombãte ſ'encline plus d'vn coſté que de l'autre, elle fait deux angles inégaux entr'eux, dont le plus grand eſt appellé obtus, & l'autre aigu. Or d'autant que quelquesfois en vn plan concurrent plus de deux lignes en vn meſme poinct, & par conſequent conſtituent pluſieurs angles, les Geometres ont accouſtumé (pour euiter confuſion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, deſquelles celle du milieu monſtre le poinct, auquel les lignes cõſtituent l'angle, & celles des extremes ſignifient les commencemens d'icelles lignes, qui font iceluy angle: Comme pour exemple en ceſte figure où les lignes A B & E B concurrent au poinct B de la ligne C D: & E B eſt autant inclinée vers C B qu'à D B, mais A B panche vers la partie D B. Pour donc exprimer ces angles, nous diſons que les deux C B E, & D B E ſont droicts, puis que la ligne E B tombant ſur C D ne panche d'vn coſté ny d'autre, comme fait A B; & par conſequent icelle E B eſt perpendiculaire à C D: Mais que l'angle A B C, qui eſt plus grand que le droict E B C, eſt obtus; & A B D, qui eſt moindre que le droict D B E, eſt aigu. Ce qu'on doit bien noter, afin de cognoiſtre facilement les



angles, dont sera fait mention és demonstrations suiuantes.

13. Terme, est l'extremité de quelque chose.

Ainsi les poincts sont termes ou extremitez des lignes; les lignes des superficies, & les superficies des corps.

14. Figure, est ce qui est compris d'vn, ou de plusieurs termes.

Toute quantité ayant termes, n'est pas dicte figure; ains seulement celles que les termes enuironnent: ainsi la ligne terminée par deux poincts, n'est pas dite figure: mais toutes superficies & solides, finis & limitez, sont nommez figures, pource qu'ils sont enuironnez d'vn seul, ou de plusieurs termes: d'vn seul, comme le cercle, l'Ellipse, & la sphere: de plusieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, la pyramide, &c.

15. Cercle est vne figure plane, contenuë par vne seule ligne qu'on appelle circonferencé; vers laquelle toutes les lignes droictes menees d'vn seul poinct de ceux qui sont en icelle figure, sont egales.

16. Et ce poinct là est appellé centre du cercle.

17. Diametre du cercle, eſt vne ligne droicte menée par le centre du cercle, & finiſſant de part & d'autre à la circonferẽce d'iceluy cercle, le diuiſe en deux egalement.

18. Demy cercle, eſt vne figure compriſe du diametre, & moitié de la circonference.

Toutes ces definitions ſont aiſées: car le cercle, ſa circonference, ſon centre, ſon diametre, & le demy cercle declarez en icelles definitions, ſont toutes choſes cognues, voire aux plus ignorans.

19. Portion ou ſegment de cercle, eſt vne figure compriſe d'vne ligne droicte, & de partie de la circonference.

Ceſte definition eſt repetée au troiſieſme liure, auquel lieu elle conuient mieux qu'en ceſtuy-cy.

20. Figure rectiligne, eſt celle qui eſt compriſe de lignes droictes.

21. Figure de trois coſtez, eſt celle qui eſt compriſe de trois lignes droictes.

23. Figu-

22. Figure de quatre coſtez ; eſt celle qui eſt compriſe de quatre lignes droictes.

23. Figures multilataires ou de pluſieurs coſtez, ſont celles qui ſont compriſes de plus de quatre lignes droictes.

Le nombre des figures rectilignes eſt infiny : Les Geometres les nomment, tantoſt par le nombre de leurs coſtez, tantoſt par le nombre de leurs angles.

24. Or des figures de trois coſtez, celle ſe nomme Triangle equilateral, qui a les trois coſtez egaux.

25. Triangle Iſoſcele, qui a deux coſtez egaux ſeulement.

26. Scalene, qui a les trois coſtez inegaux.

27. Encores des figures de trois coſtez, celle ſe nomme triangle rectangle qui a vn angle droict.

28. Ambligone, qui a vn angle obtus.

29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.

30. Mais des figures de quatre coſtez,

celle qui a les quatre costez egaux, & les quatre angles droicts s'appelle quarré.

31. Quarré long, qui a les quatre angles droicts, mais non pas tous les costez egaux.

32. Rhombe, qui a les quatre costez egaux, mais non pas les quatre angles droicts.

33. Rhomboide, qui a les angles, & aussi les costez opposez egaux entr'eux, sans estre equilateral, ny rectangle.

34. Toute autre figure de quatre costez, est appellee trapeze.

35. Lignes droictes paralleles, sont celles qui estant sur vn mesme plan, & prolongees de part & d'autre ne se rencontrent iamais.

Icy finissent les definitions du premier liure d'Euclide: Mais d'autant qu'en ce mesme liure est souuent parlé de parallelogramme, lequel Euclide n'a point defiy, nous adjousterons icy sa definition.

36. Parallelogramme, est vne figure

quadrilatere qui a les costez oppo-
sez parallels ou equidistans.

Telle figure est tousiours l'vne de ces quatre: Quarré, Quarré long, Rhombe, Rhomboide.

PETITIONS OV *demandes.*

1. D'vn poinct donné à vn autre poinct, mener vne ligne droicte.
2. Continuer infiniment vne ligne droicte donnee & terminee.
3. Descrire vn cercle de quelque centre & interual que ce soit.

Euclide ne se sert en ces Elemens cy que de deux sortes de lignes simples, sçauoir est de la droicte, & de la circulaire; la description desquelles estant fort facile, il demande qu'il luy soit permis de descrire, ou de s'imaginer des lignes droictes de telle longueur qu'il voudra: Pareillement des cercles de tel diametre qu'il voudra, sans qu'il soit contrainct de demonstrer que cela est possible.

COMMVNES SENTENCES.

1. Les choses egales à vne mesme, sont egales entr'elles.

2. Si à choſes egales, on adjouſte choſes egales, les touts ſont eſgaux.

3. Si de choſes egales, on oſte choſes egales, les reſtes ſont egaux.

4. Si à choſes inegales, on adjouſte choſes egales, les touts ſont inegaux.

5. Si de choſes inegales, on oſte choſes egales, les reſtes ſont inegaux.

6. Les choſes doubles d'vne autre ſont egales entr'elles.

7. Les choſes qui ſont moitiez d'vne meſme, ou de choſes egales, ſont egales entr'elles.

Eſt auſſi manifeſte que les choſes triples d'vne meſme, ou quadruples, ou quintuples, &c. ſont auſſi egales entr'elles. Pareillement que les choſes qui ſont tierces parties d'vne meſme, ou quart, &c. ſont auſſi egales entr'elles.

8. Les choſes qui conuiennent entr'elles, ſont egales entr'elles.

C'eſt à dire, que deux grandeurs ſeront egales, ſi eſtant poſees l'vne ſur l'autre, l'vne n'excede l'autre, mais toutes deux enſemble s'adjuſtent entr'elles: comme deux lignes droictes, ſeront dictes eſtre egales, ſi l'vne eſtant poſee ſur l'autre, celle qui eſt po-

fee dessus s'adjuste à toute l'autre, tellement qu'elle ne l'excede, ny ne soit excedee d'icelle. Ainsi aussi deux angles rectilignes seront egaux, quand le sommet de l'vn, estant posé sur le sommet de l'autre, l'vn n'excede l'autre, c'est à dire que les lignes de l'vn tombent sur celles de l'autre: car par ainsi les inclinations des lignes seront esgales. Ainsi aussi deux superficies seront egales, quand l'vne estant posée sur l'autre, elle ne l'excede, ny n'est excedee par icelle, mais s'adjustent totalement entr'elles. Or Dounot dit que conuenir, c'est auoir les extremitez sur les extremitez: ce qui n'est pas vray en toutes grandeurs; Car pour exemple, vne ligne droite peut bien auoir ses extremitez sur les extremitez d'vne ligne courbe, laquelle neantmoins ne luy sera egale. Ainsi aussi vne ligne courbe peut bien auoir ses extremitez sur les extremitez d'vne autre ligne courbe, laquelle ne luy sera pas pourtant egale. Or il est manifeste que de ceste axiome on peut bien conuertir & prendre pour principe, *que les lignes droictes egales conuiennent*. Pareillement, *que les angles rectilignes egaux conuiennent*. Semblablement, *Que les superficies planes egales & semblables conuiennent*: On peut bien encore tirer quelques autres conuerses de cet axiome: mais de le vouloir conuertir vniuersellement (comme quelques-vns) c'est se moquer, veu que si on trouue vne ligne courbe egale à vne droicte, elles ne conuiendront pas pourtant: & aussi, qu'à tout angle rectiligne, il s'en peut bailler vn curuiligne egal; lesquels neantmoins ne conuiendront iamais: voire mesme faire vn quarré egal à vn triangle, ou à quelconque autre figure rectiligne: lesquels pourtant ne peuuent iamais conuenir. Ce qu'a bien recogneu Dounot en cet endroit, & neantmoins il conuertit.

vniuerſellement ce principe au ſcholie de la 4. p. 1. concluant ainſi : *Car c'eſt vne neceſſité geometrique que les choſes egales conuiennent, & que celles qui conuiennent ſoient egales.*

9. Le tout eſt plus grand que ſa partie.

10. Tous les angles droicts ſont egaux entr'eux.

De ce principe, nous pouuons conuertir & prendre pour maxime, que tout angle rectiligne egal à vn angle droict, eſt auſſi droict.

11. Si vne ligne droicte tombant ſur deux autres lignes droictes, faict les angles interieurs d'vn meſme coſté plus petits que deux droicts ; icelles deux lignes eſtans continuees à l'infiny, ſe rencontreront du coſté où les angles ſont plus petits que deux droicts.

12. Deux lignes droictes n'enferment pas vn eſpace.

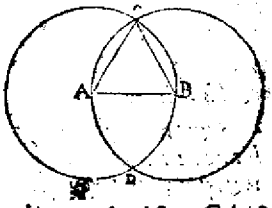
ELEMENT PREMIER.

PROBL. 1. PROP. I.

Sur vne ligne droicte donnee & terminee, descrire vn triangle equilateral.

SOIT la ligne droicte donnée AB, sur laquelle il faut faire vn triangle equilateral.

Du centre A, & de l'interualle de AB, soit descrit le cercle BCD: Item du centre B, & de l'interualle de la mesme AB, soit descrit vn autre cercle ACD, couppant le premier és poincts C & D, de l'vn desquels, sçauoir de C, soient menees les deux lignes droictes CA, & CB: Ie dis que le triangle ABC, constuit sur la ligne droicte donnee AB, est equilateral.

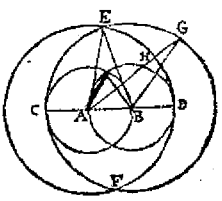


Car le costé AC, est egal au costé AB par la 15. defi. d'autant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circonference: & par la mesme raison, le

coſté BA eſt egal au coſté B C. Donc par la 1. com. ſent. les coſtez CA & CB ſeront egaux, eſtant chacun egal à AB: & partant le triangle A B C deſcrit ſur A B, eſt equilateral; qui eſt ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Quelques Interpretes ont icy enſeigné à deſcrire auſsi ſur vne ligne droicte donnee vn triangle Iſoſcelle, & vn Scalene, ce que nous ferons auſsi en ceſte maniere. Soit vne ligne droicte donnee AB, à l'entour de laquelle des centres A & B, ſoient eſcrits deux cercles, ainſi que deſſus. En apres ſoit prolongee icelle A B, de part & d'autre vers les circonferences iuſques en C & D: puis du centre A & interuale A D ſoit deſcrit le cercle DEF: Item du centre B, & interuale BC, le cercle CEF, couppant le premier és poincts E & F, de l'vn ou l'autre deſquels, qui eſt de E, ſoiēt menees aux poincts A & B, les deux lignes AE, EB: Ie dis que le triangle A E B, fait ſur la ligne donnee A B, eſt Iſoſcelle, qui eſt que les deux coſtez AE, E B, ſont egaux entr'eux, & plus grands que A B. Car d'autant que par la 15. def. A E, eſt egal à la ligne AD, & icelle A D eſt double de AB, d'autant que BA, DB ſont egales entr'elles; auſsi AE ſera double de A B. Derechef parce que B E eſt egal à BC, & icelle B C eſt double de AB, auſsi BE ſera double d'icelle AB. Veu donc que l'vn & l'autre coſté AE, BE eſt double de la meſme A B, ils ſeront egaux entr'eux par la 6. com. ſent. & partant plus grāds que la ligne AB. Donc le triangle AEB eſt Iſoſcelle. Maintenant ſi du poinct A, on tire la ligne droicte AG, à la circonference EGF, qui ne ſoit la meſme que AE ou AD, couppant la circonference EHD en H, & de



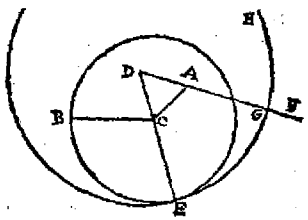
G on mene à B la ligne droicte G B, sera constitué le triangle A G B sur la ligne A B, lequel ie dis estre scalene. Car par la 15. deffinition, tant A H, A D que B C B C sont egales. Mais A D, B C sont doubles de A B; d'icelle seront aussi doubles A H, B G; & partant plus grandes qu'icelle A B. Veu donc que A G est plus grande que A H, ou que B G, le triangle A G B sera scalene.

PROB. 2. PROP. II.

D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte egale à vne ligne droicte donnée.

Soit le poinct donné A, & la ligne droicte donnée B C; & il faut du poinct A, mener vne ligne droicte egale à icelle donnée B C.

De l'vn ou l'autre extreme de la ligne donnée B C, sçauoir est de C, comme centre, & de l'interualle de C B, soit descrit le cercle B E: puis du poinct donné A, au centre C, soit menée la ligne droicte A C (sinon que le poinct A fut donné en la ligne B C) sur laquelle A C par la precedente proposition soit descrit le triangle equilateral A D C; & soit continué le costé D C, jusques à ce qu'il rencontre la circonference en E, mais le costé D A tant qu'on voudra en F. En apres du centre D, & de l'interualle de la ligne droicte D E, soit descrit le cercle E G H couppant la ligne D F:



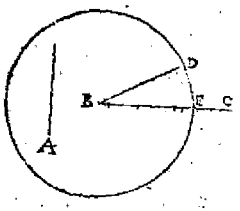
en G: Ie dis que la ligne AG qui eſt menée du poinct donné A, eſt egale à la ligne droicte donnée BC.

Car DG & DE ſont egales, d'autant qu'elles procedent de meſme centre vers vne meſme circonference, deſquelles ſi on oſte DA & DC qui ſont egales, eſtant DAC triangle equilateral; les reſtes CE & AG ſeront auſſi egales par la troiſiéme com. ſent. Mais CB eſt egale à CE, parce qu'elle procede de meſme centre vers meſme circonference. Donc AG ſera egale à CB, par ce que les choſes egales à vne ſont egales entr'elles. Nous auons donc du poinct donné A mené la ligne AG egale à la ligne droicte donnée BC. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 3. PROP. III.

Deux lignes droictes inegales eſtãs données, oſter de la plus grande, vne ligne droicte egale à la plus petite.

Soient les deux lignes inegales A & BC, deſquelles BC eſt la plus grande: & d'icelle il faut oſter vne ligne egale à A. A l'vn ou l'autre des extremes de la plus grande ligne BC, ſçauoir eſt au poinct B, ſoit poſée par la precedente prop. la ligne BD egale à la moindre A: puis du centre B, & de l'interualle BD ſoit deſcrit vn cercle couppant BC en E: Ie dis que la ligne BE eſt egale à A. Car d'autant que par la quinziéme deffinition, les lignes BD, BE ſont egales, & par la conſtruction BD eſt egale à



A, par la premiere commu. sent. BE sera aussi egale à A. Nous auons donc osté de BC, la ligne BE egale à A, ainsi qu'il falloit faire.

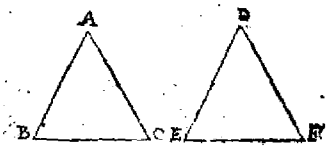
SCHOLIE.

Cette construction a esté retenuë par tous les Interpretes d'Euclide, excepté Dounot qui l'a changée: car à l'extreme de la moindre ligne, il en pose vne egale à la plus grande; quoy faisant il aduient que d'icelle plus grande ligne donnée, il n'en coupe pas vne egale à la moindre, comme est requis, ains seulement d'vne egale à icelle.

THEOREME 1. PROP. IIII.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien; & l'angle contenu d'iceux, egal à l'angle: la base sera egale à la base; & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien; & le triangle egal au triangle.

Soient les deux triangles ABC & DEF, desquels le costé AB soit egal au costé DE, & AC à DF, & l'angle A egal à l'angle D: Ie dis que la base BC sera egale à la base EF, & l'angle B egal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC egal au triangle DEF.



Qu'il ne soit ainsi : si on entend le poinct D estre posé sur le poinct A, & que D E tombe sur A B, aussi D F tombera sur A C; autrement l'angle A ne seroit pas egal à l'angle D. Et d'autant que les costez A B & A C sont egaux aux costez D E & D F, chacun au sien, ils conuiendront par la huictiéme commune sentence conuertie, & partant les extremitez E & F, tomberont sur les extremitez B & C. Ainsi les deux bases B C & E F conuiendront, & seront egales par la mesme huictiéme commune sentence. Et le triangle D E F conuiendra auec le triangle A B C, & l'angle B conuiendra auec l'angle E, & l'angle C auec l'angle F : partant egaux. Si donc deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

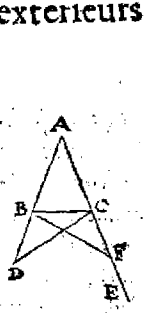
SCHOLIE.

Nous remarquerons vne fois pour toutes qu'Euclide n'entend parler en ces Elemens cy que des triangles rectilignes; car combien que cette proposition & plusieurs autres se puissent faire generale, estans veritables, tant au regard des triangles rectilignes que des spheriques, si est-ce toutesfois que cela n'aduient pas en toutes propositions, comme on peut voir en nostre traicté des triangles spheriques, c'est pourquoy nous estendrons toutes ces propositions seulement aux triangles rectilignes, encores qu'Euclide ne les specifie.

THEOR. 2. PROP. V.

Les triangles Isosceles, ont les angles sur la base egaux : & les costez egaux

estans continuez, les angles exterieurs sous la base sont egaux.



Soit le triangle Isoscele ABC: Ie dis que les angles ABC, & ACB, sur la base BC, sont egaux.

Qu'il ne soit ainsi. Soient prolongez AB & AC, costez egaux iusques en D & E: & soit fait AF egale à AD par la troisiéme proposition, & soient menées les lignes BF & CD. Les deux triangles ADC, & AFB, ayans l'angle A commun, ont les deux costez AD & AC egaux aux deux costez AF & AB, chacun au sien; & par la quatriéme proposition, la base BF sera egale à la base CD, & l'angle ABF egal à l'angle ACD, & l'angle D egal à l'angle F. Item les triangles DCB, & FBC, ayant l'angle D egal à l'angle F, & les deux costez DB, & DC egaux aux deux costez CF & FB: (car BF a esté prouué tantost egal à DC; & AD, AF estans egaux; & AB, AC aussi egaux; les restes BD, & CF serõt aussi egaux) par la quatriéme proposition la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien: sçauoir l'angle BCD, sera egal à l'angle CBF. Et qui des angles egaux ABF & ACD, oste les angles egaux CBF, & BCD; les demeurans ABC, & ACB, seront egaux.

Pour la seconde partie. Que les costez egaux AB & AC estans continuez, les angles exterieurs sous la base BC, sont egaux, sçauoir DBC à BCF, elle a esté suffisamment demonstrée, lors qu'on a prouué que les triangles DBC, & CFB, auoient leurs angles egaux, chacun au sien. Parquoy les triangles Isosceles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

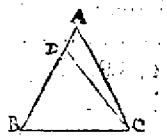
SCHOLIE.

Ceste proposition est aussi vraye és triangles equilateraux. Car les deux costez A B, A C du triangle A B C estans egaux entr'eux, ou l'autre costé C B, est pareillement egal à iceux, comme il aduiene au triangle equilateral; ou bien inegal, comme il arriue au triangle Isoscele; Il s'ensuit neccessairement, que les angles de dessus la base B C, sont egaux entr'eux, & ceux de dessous la mesme base aussi egaux entr'eux, comme il appert par la demonstration cy dessus.

THEOR. 3. PROP. VI.

Si vn triangle a deux angles egaux entr'eux; les costez soustendans iceux angles seront aussi egaux entr'eux.

Soit le triangle A B C, duquel les deux angles A B C, & A C B sur la base B C sont egaux: Ie dis que les deux costez A B & A C qui soustendent les angles egaux sont aussi egaux.



Autrement soit A B plus grãd que A C, s'il est possible: on en pourra donc retrancher vne partie egale à C par la troisiéme proposition: soit icelle B D egale à A C, & soit menée la ligne D C: ainsi les triangles D B C, & A C B, ont les deux costez B D & B C egaux aux deux costez A C, & C B, & l'angle B egal à l'angle A C B, & par la quatriéme proposition ils

seront egaux ; ce qui est impossible : car l'vn est partie de l'autre. Donc les costez A B, & A C n'estoient pas inegaux, ains egaux. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

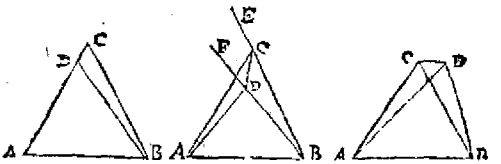
Il s'ensuit de cette proposition, que tout triangle equiangle, c'est à dire qui a tous les angles egaux, est equilateral: Car par ce qui a esté icy demonstré, les angles ABC, ACB estãs egaux, les deux costez AB, AC, seront pareillemẽt egaux: Mais si les deux angles A & B estoient encore egaux, aussi les costez CA, CB subtendans iceux angles, seroient aussi egaux: & partant tous les trois costez AB, AC, BC egaux entr'eux, puis que les choses egales à vne mesme, sont egales entr'elles.

THEOR. 4. PROP. VII.

Si des extremitez de quelque ligne droicte, on mene deux autres lignes droictes, se rencontrant à vn poinct ; des mesmes extremitez, on n'en pourra pas mener deux autres égales à icelles, chacune à la sienne, & de mesme part, se rencontrant à vn autre poinct.

Soit la ligne AB, des extremitez de laquelle soient menées les deux lignes droictes, A C & CB se rencontrant au poinct C : Ie dis que des mesmes extremitez A & B, de la mesme part que C, on ne peut mener deux autres lignes droictes egales à icelles

AC, BC, chacune à la sienne, qui se rencontrent à vn autre poinct que c ; c'est à dire que si de l'extremité A on mene la ligne AD egale à AC, & de l'extremité B, la ligne B D egale à B C, il ne peut estre que le poinct de rencontre D, soit autre que le poinct de rencontre C.



Car si faire se peut que le poinct de rencontre D tombe ailleurs qu'au poinct C : ou iceluy poinct D tombera sur l'vne ou l'autre des lignes AC, BC; ou dans le triangle A C B ; ou hors iceluy.

Premierement iceluy poinct de rencontre D, ne peut estre sur la ligne AC: car il faudroit que les deux lignes A D, & A C fussent egales entr'elles, sçauoir est la partie au tout: ce qui est absurde; partant la rencontre D, ne se fera point sur A C; ny sur B C, à cause de la mesme absurdité.

Soit donc iceluy poinct de rencontre D dans le triangle A B C: & apres auoir prolongé B C iusques en E, & B D iusques en F, soit menée C D. Puis que les deux lignes AC, & AD sont posées egales, le triangle A C D sera Isoscele, & par la cinquiéme proposition les deux angles A C D & A D C sur la base C D seront egaux. Mais l'angle A C D est moindre que l'angle D C E: (car il n'est que partie d'iceluy) donc l'angle A D C est aussi moindre que le mesme angle D C E; & par consequent l'angle C D F, qui n'est que partie d'iceluy A D C, sera beaucoup moindre que le mesme angle D C E. Derechef puis que les lignes B C, B D,

B D, sont posées egales, le triangle C D B doit estre Isosceles; & partant les angles C D F & D C E sous la base D C seront egaux par la cinquiéme proposition. Mais il a esté demonstré que l'angle C D F est beaucoup moindre que l'angle D C B: donc le mesme angle C D F est moindre que l'angle D C E, & aussi egal à iceluy: ce qui est absurde.

Soit donc finalement iceluy poinct de rencontre D, hors iceluy triangle A C B, comme en la 3. figure: apres auoir mené la ligne C D, il s'ensuiura que les deux triangles A D C & B C D seront Isosceles; & partant qu'ils auront les angles sur la base C D egaux: sçauoir est A C D à A D C, & B C D à B D C. Mais iceluy B D C est plus grand que A D C: donc aussi B C D est plus grand que A C D; c'est à dire la partie que le tout: ce qui est absurde. Le poinct de rencontre D ne tombera donc pas hors le triangle A B C, ny dedans iceluy, ny sur les lignes A C & B C: Il faut donc qu'iceluy poinct de rencontre D tombe au premier poinct de rencontre C: Parquoy si des extremitez de quelque ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonst.

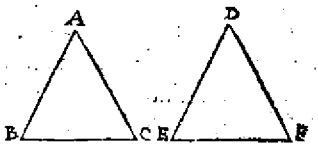
SCHOLIE.

Dounot a traduit ceste proposition ainsi. Si deux lignes droictes menées des extremitez d'vne autre ligne droicte se rencontrent en vn poinct, & des mesmes extremitez on en mene deux autres egales aux deux premieres, elles se rencontreront au mesme poinct, pourueu que chacune soit du costé de son egale. Ce qui est fort esloigné de l'intention d'Euclide: car il ne dit pas que les deux lignes se rencontreront (chose qui est euidemment fausse, veu qu'infinies lignes peuuent estre menées, comme dit est, lesquelles ne se rencontreront pas) mais bien que si elles se rencontrent, ce sera au mesme poinct que les premieres.

THEOR. 5. PROP. VIII.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base egale à la base; ils auront aussi l'angle egal, compris d'iceux costez egaux.

Soient deux triangles A B C, D E F, desquels le costé A B, est egal à D E; A C à D F, & la base B C à la base E F: Ie dis que les angles A & D compris d'iceux costez egaux, sont egaux.



Car puis que la base B C est egale à la base E F; si on entẽd icelles estre posées l'vne sur l'autre, elles cõuiendront tõbant le poinct E sur le poinct B; & F sur C: & par la 7. prop. les deux lignes E D & F D, qui sont egales à B A & C A, se rencõtreront au poinct A, & cõuiendront auec icelles lignes B A & C A: partant conuiendront aussi les angles A & D contenus d'icelles lignes; & par consequent seront egaux par la 8. comm. sent. Ce qu'il falloit demonstrer.

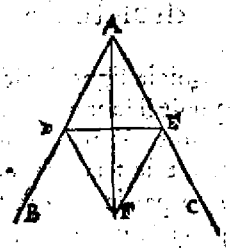
COROLLAIRE.

Puis que la base E F conuient auec la base B C, & les costez D E, D F conuiennent aussi auec les costez A B, A C; il s'ensuit que non seulement l'angle A est egal à l'angle D; mais qu'aussi l'angle E est egal à l'angle B, & l'angle F, egal à l'angle C, & tout le triangle egal à tout le triangle.

PROB. 4. PROP. IX.

Coupper en deux egalement vn angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné B A C, lequel il faut couppér en deux egalement; c'eſt à dire en deux angles egaux entr'eux.



Soit de A B & A C retranché deux parties egales A D & A E: & apres auoir mené la ligne D E, ſur icelle ſoit deſcrit le triangle equilateral D E F par la premiere prop. & ſoit menée la ligne A F: Ie dis que icelle ligne couppe l'angle B A C en deux egalement.

Car les lignes A D & A F du triangle D A F eſtans egales aux deux lignes A E & A F du triangle E A F, & la baſe D F egale à la baſe E F, (eſtant D F E triangle equilateral) par la 8. propoſition, l'angle D A F ſera egal à l'angle E A F: & partant l'angle B A C eſt couppé en deux egalement. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

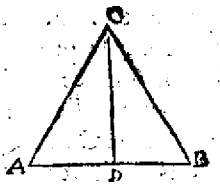
Nous auons enſeigné la pratique de ceſte propoſit. en noſtre Geometrie pratique Prob. 5. Or il appert par ce que deſſus qu'on peut auſſi couppér vn angle rectiligne en quatre parties egales, en huict, en ſeize, en trente-deux, & ainſi conſecutiuement, en procedant touſiours par augmentation double.

Car apres qu'vn angle rectiligne est couppé en deux egalement, si on diuise derechef chasque partie en deux egalement, on aura quatre angles egaux. Que si on coupe derechef chacun d'iceux en deux egalement, nous aurons huict angles egaux, & ainsi consequemment.

PROBL. 5. PROP. X.

Couppet en deux egalement vne ligne droicte donnée & terminée.

Soit la ligne droicte donnée & terminée A B : laquelle il faut couppet en deux egalement.



Soit sur icelle ligne construit le triangle equilateral A C B par la 1. propos. & par la precedente prop. soit l'angle C couppé en deux egalement par la ligne C D : Ie dis que C D couppe A B en deux egalement en D.

Car puis que les angles du poinct C sont egaux, & le triangle A C B est equilateral, les deux triangles A C D, & B C D, ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & les angles qu'ils comprennẽt aussi gaux; partant par la 4. prop. la base A D sera egale à la base D B. Donc A B est couppée en deux egalement en D. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

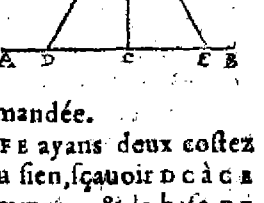
Nous auons enseigné la practique de cette proposition en nostre Geometrie practique Prob. 1. Or il appert par ce que dessus qu'on peut aussi couppet vne ligne droite finie en quatre

parties egales, en 8. en 16. en 32. &c. ainsi que nous auons dit en la precedente prop. de la diuision de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diuiser vne ligne droite terminée en tant de parties egales qu'on voudra, nous l'auons enseigné en nostre Geometrie pratique Prob. 7. & ce tant Geometriquement que mechaniquement auec le compas de proportion.

PROBL. 6. PROP. XI.

Sur vne ligne droicte donnée, & d'vn poinct en icelle, esleuer vne ligne droicte perpendiculaire.

Soit la ligne droicte donnée A B, & le poinct en icelle C: d'iceluy poinct il faut mener vne ligne perpendiculaire à icelle A B.



Soient du poinct C prinses les deux lignes egales CD & CE par la troisiéme proposition, & sur DE soit fait le triangle equilateral DFE, & de C à F soit menée la ligne C F: Ie dis qu'icelle CF est la ligne perpendiculaire demandée.

Car les triangles DFC & CFE ayans deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, sçauoir DC à CE par la construction, & CF commun, & la base DF egale à la base EF, à cause que le triangle DFE est equilateral; par la huictiéme propos. les angles au poinct C, contenus des costez egaux, seront egaux: & partant par la dixiéme deffinition, ils sont dits droicts, & la ligne CF perpendiculaire à AB, ainsi qu'il falloit faire.

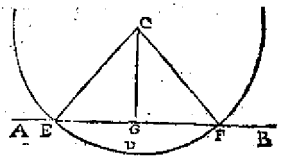
SCHOLIE.

La pratique, tant de cette proposition que de la suiuante est enseignée en nostre Geometrie pratique, Prob. 2. & 3. où l'apprenty trouuera soulagement à quelque doubte qui luy peuuent arriuer en la pratique de ceste proposition.

PROBL. 7. PROP. XII.

Abaisser vne ligne droicte perpendiculaire sur vne ligne droicte indeterminée, & d'vn poinct hors icelle.

Soit la ligne droicte donnée & interminée AB, & le poinct hors icelle C, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire sur AB.



Soit pris au delà de la ligne AB quelconque poinct D; puis du cẽtre C, & interualle CD, soit descrit le cercle EDF, couppant la ligne AB és poincts E & F; puis par la 10. prop. soit couppée EF en deux egalem. au poinct G, & soit menée la ligne CG, laquelle ie dis estre perpendiculaire à AB.

Car estans tirées les lignes droictes CE, CF; les deux costez EG & GC du triangle EGC, seront egaux aux deux costez FG, & GC du triangle FGC, vn chacun au sien, & la base CE est egale à la base CF, estans icelles tirées du centre C vers la circonference, & par la 8. prop. les angles du poinct G seront

egaux, & partãt par la 10. definit. ils seront droicts, & la ligne CG perpendicul. à AB. Ce qu'il falloit faire.

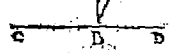
SCHOLIE.

Au lieu de prendre le poinct D, de l'autre costé de la ligne AB, Dounot dit qu'on le prenne à l'aduenture dans icelle AB, & que descriuant vn cercle du centre C & interualle CD, il couppera la ligne AB: ce qui n'est pas vniuersellement vray, car il est manifeste que si le poinct D estoit pris d'aduenture en G, le cercle ne couppe roit AB en deux endroits, comme il est necessaire, ains la toucheroit seulement: le poinct D ne doibt donc estre pris à l'aduenture dans la ligne AB, comme veut Dounot.

THEOR. 6. PROPOS. XIII.

Quand vne ligne droicte tombant sur vne ligne droicte fait angles; ou iceux seront deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.

Soit la ligne droicte AB, laquelle tombant sur vne autre ligne droicte CD, fait les angles CBA, & DBA: Ie dis que iceux sont deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.



Car ou icelle ligne AB est perpẽdiculaire à CD, ou elle ne l'est pas. Si elle est perpendiculaire, les deux angles sont droicts par la 10. deff. Si elle ne l'est pas, soit leuée la perpend. BE par la 11. prop. & les deux angles CBE & DBE seront droicts par la susdite definition: mais les deux angles CBA & DBA ensembles, occupent autant

d'eſpace qu'iceux angles droicts CBE, DBE, & conuiennent auec eux: Donc par la 8. commune ſentence CBA & DBA ſeront egaux à deux droicts. Parquoy ſi vne ligne droicte tombante ſur vne autre ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 7. PROP. XIV.

Si à l'extremité d'vne ligne droicte ſe rencontrent deux autres lignes droictes de part & d'autre d'icelle, faiſant deux angles egaux à deux droicts; icelles lignes ſe rencontreront directement.

Soit la ligne AB à l'extremité de laquelle B ſe rencontrent deux autres lignes droictes CB & DB, faiſant les deux angles ABC & ABD egaux à deux droicts: Ie dis que CB & DB ſe rencontrent directement, c'eſt à dire que CBD eſt vne ligne droicte.

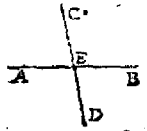


Autrement, ſi CBD n'eſt ligne droicte, ſoit continuée CB directement, tant qu'il ſera de beſoin: ce qui ſera adiouſté à CB directement, ou bien tombera au deſſous de BD, ou au deſſus: ſoit au deſſus, & ſoit CBE, ligne droicte; les deux angles ABC, & ABE, ſeront donc egaux à deux droicts par la 13. prop. Mais par l'hypoteſe les deux ABC & ABD ſont auſſi egaux à deux droits, & par la 10. com. sēt. tous les angles droicts ſont egaux entr'eux: donc par la premiere commune ſentence, ces deux angles ABC, & ABD ſeront egaux aux deux ABC, & ABE.

Parquoy ostant l'angle commun ABC, les restans ABD, & ABE, seront egaux, le tout à la partie; ce qui est impossible. Parquoy la ligne droicte CB, estant prolongee, elle ne tombera pas au dessus de BD: mais elle ne tombera pas aussi au dessoubs, car il aduiendroit tousiours la mesme absurdité: donc CB, & DB, se rencontroient directement. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 8. PROP. XV.

Si deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre, elles feront les angles opposez au sommet egaux.



Soient les deux lignes AB, & CD, se coupans l'vne l'autre au poinct E: Ie dis que les angles opposez au sommet AEC, & DEB, sont egaux.

Car d'autant que sur AB, tombe la ligne CE, les angles AEC, & BEC, sont egaux à deux droicts par la 13. proposition. Item pour la mesme raison CEB, & DEB, seront egaux à deux droicts: partant les deux AEC, & CEB, sont egaux aux deux CEB & DEB. Que si on oste le commun CEB, le demeurant AEC sera egal au demeurant DEB. Le mesme se peut dire des deux AED, & CEB. Parquoy si deux lignes droites se coupẽt l'vne l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

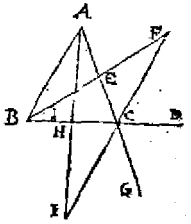
COROLLAIRE.

Il s'ensuis de ceste demonstration, que deux lignes droictes

s'entrecoupant, font au poinct de leur section quatre angles egaux à quatre angles droicts. Est aussi manifeste qu'estans constituez tant d'angles qu'on voudra à l'entour d'vn seul & mesme poinct, qu'ils seront seulement egaux à quatre angles droicts: car si de E on meine tant d'autres lignes qu'on voudra, elles diuiseront seulement les quatre angles constituez au poinct E, en plusieurs parties: toutes lesquelles prinses ensemble seront egales aux quatre angles d'iceluy poinct, c'est à dire à quatre droicts.

THEOR. 9. PROP. XVI.

Vn costé d'vn triangle estant prolongé, l'angle exterieur est plus grand que l'vn ou l'autre des opposez interieurement.



Soit le triangle ABC, duquel le costé BC soit continué iusques en D. Ie dis que l'angle exterieur ACD est plus grand que l'opposé interieur BAC, ou que ABC, autre opposé interieur.

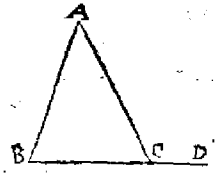
Qu'ainsi ne soit: Apres auoir couppé AC en deux egalemẽt en E, soit menée la ligne BE continuée iusques en F, & soient faites BE & EF egales, & soit menee FC. Les deux triangles AEB, & CEF, auront les deux costez AE & EB egaux aux deux costez CE & EF par la construction, & par la precedente proposition l'angle AEB est egal à l'angle CEF: donc par la quatrieſme proposition les bases AB, & FC seront egales, & les autres angles egaux, chacun au sien: & partãt l'angle BAE, sera egal à l'angle ECF,

qui n'eſt que partie de l'angle ACD, lequel pour ceſte raiſon ſera plus grand que l'oppoſé BAC. Que ſi le coſté AC eſt prolongé en G, & BC couppé en deux egalement en H, & on tire la ligne AHI, tellement que HI ſoit egale à AH, & ſoit menee CI: On demonſtrera par meſme raiſon que deſſus, que l'angle externe BCG, eſt plus grand que l'interne & oppoſé ABC. Mais par la propoſition precedente à iceluy BCG, eſt egal l'externe ACD: donc iceluy ACD, eſt auſſi plus grand que l'interne & oppoſé ABC. Parquoy en tout triangle vn coſté eſtant prolongé, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droicts, de quelle façon qu'ils ſoient pris.

Soit le triangle ABC: Ie dis que les deux angles B, & ACB, ſont plus petits que deux droicts: Item les deux B, & ACB: item les deux A, & B.

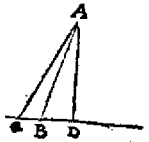


Car apres auoir continué le coſté BC, iuſques en D; Il eſt euident par la 16. propoſition que l'angle exterieur ACD, eſt plus grand que l'oppoſé interieur B. Mais les deux ACD, & BCA, ſont egaux à deux droicts, par la 13. prop. Partant ABC, & BCA, ſont plus petits que deux droicts. On demõſtrera pareillement que les angles A & ACB: Item les angles A & B, en prolongeant

vn autre costé, sont moindres que deux droicts. Parquoy tout triangle a deux angles plus petits que deux droicts, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste que d'vn mesme poinct on ne peut mener plus d'vne ligne perpendiculaire sur vne ligne droicte. Car si faire se peut, soient menees de A sur la ligne droicte BD, les deux perpendic. AD, AB. Donc au triangle ABD, *les deux angles internes* ABD, ADB, *seront egaux à deux droicts, puis qu'ils sont droicts. Ce qui est impossible: Car il a esté demonstré cy-dessus que deux angles d'vn triangle sont moindres que deux angles droicts.*



Il s'ensuit aussi de ceste prop. qu'en tout triangle, duquel vn angle est droict, ou obtus, que les autres sont aigus. Car puis qu'il a esté demonstré que deux angles quels qu'ils soient, sont moindres que deux droicts, il est neccessaire que s'il y en a vn droict ou obtus, celuy qu'on voudra des deux autres, soit aigu: car autrement en vn triangle seroient deux angles droicts, ou plus grands que deux droicts.

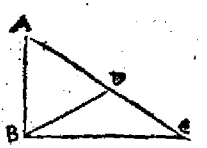
S'ensuit encore de ceste prop. que si vne ligne droicte, AB, *fait auec vne autre ligne droicte* CD, *angles inegaux, sçauoir est* ABD, *aigu, &* ABC, *obtus, & de quelconque poinct d'icelle* AB, *on tire vne perpendiculaire sur* CD, *comme* AD: *icelle perpendiculaire* AD, *tombera de la part de l'angle aigu* ABD. *Car qu'elle tombe, s'il est possible, du costé de l'angle obtus* ABC. *Donc au triangle* ABC, *les deux angles* ABC, ACB, *obtus & droict, sont plus grands que deux droicts: mais aussi moindres que deux droicts par ce-*

8e prop. ce qui eſt abſurde. La perpendiculaire tirée de A, ne tombera donc pas du coſté de l'angle obtus, & partant tombera du coſté de l'angle aigu.

Eſt encore manifeſte par ceſte prop. que tous les angles d'vn triangle equilateral, & les deux angles de deſſus la baſe d'vn triangle Iſoſcele, ſont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils ſoient, d'vn triangle equilateral, & les deux de deſſus la baſe d'vn Iſoſcele ſont egaux entr'eux par la 5. prop. & tant ces deux cy enſemble, que ces deux là, ſont moindres que deux droicts par ceſte propoſition, chacun d'iceux ſera moindre qu'vn droict, c'eſt à dire aigu: car s'il eſtoit droict ou obtus, tous les deux enſemble ſeroient, ou égaux à deux droicts, ou plus grands.

THEOR. 11. PROP. XVII.

De tout triangle, le plus grand coſté ſouſtient le plus grand angle.



Soit le triangle donné ABC, duquel le coſté AC eſt plus grand que le coſté AB. Ie dis que l'angle ABC, eſt plus grãd que l'angle ACB.

Qu'il ne ſoit ainſi: Puis que AC eſt plus grand que AB, ſoit d'iceluy retranché AD, egal à AB, & ſoit mené BD. Le triangle ABD, eſt Iſoſcele, & par la 5. prop. les deux angles ABD, & ADB, ſur la baſe BD, ſeront egaux. Or l'angle exterieur ADB, eſt plus grand que l'oppoſé interieur C, par la 16. propoſ. Mais ABC, eſtant plus grand que ABD, il ſera auſſi plus grand que ſon egal ADB: & à plus forte raiſon ABC, ſera plus grand que C. Par meſme

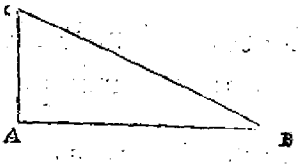
raison, si on pose le costé AC, plus grand que le costé BC; on demonstrera l'angle ABC estre plus grand que l'angle BAC, sçauoir est, si de CA on coupe vne ligne egale à CB, &c. Parquoy le plus grand costé de tout triangle, soustient le plus grad angle: Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il est donc manifeste par ceste demonstration que tous les trois angles d'vn triangle scalene sont inegaux.

THEOR. 12. PROPOS. XIX.

En tout triangle, le plus grand angle est soustenu du plus grand costé.



Soit le triangle ABC duquel l'angle A est plus grand que l'angle C. Ie dis que le costé BC qui soustient le plus grand angle A, est plus grand que le costé AB, qui soustient vn moindre angle C.

Autrement, il sera egal, ou plus petit. Il ne peut estre egal, d'autant que le triangle seroit Isoscele, & par la 5. prop. les deux angles A & C, seroient egaux contre l'hypothese. Il ne peut aussi estre plus petit, d'autant que par la 18. pro. l'angle A seroit plus petit que l'angle C, qui est aussi contre l'hypothese. Il sera donc plus grand. Par mesme raison on prouuera le costé BC, estre plus grand que le costé AC, si on pose l'angle A, estre plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grand angle est soustenu du plus grand costé: Ce qu'il falloit demonstrer.

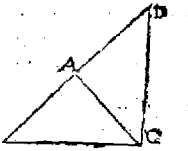
COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ceste proposition, que si de quelcõque poinct on tire sur vne ligne droicte tant d'autres lignes droites qu'on voudra, l'vne desquelles soit perpendiculaire, icelle perpendiculaire sera la plus petite de toutes, puis qu'elle sera tousiours opposée à vn angle aigu, & les autres à l'angle droict fait par icelle perpendiculaire.

THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle, deux costez de quelle façon qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisiesme.

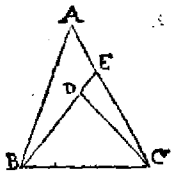
Soit le triangle ABC. Ie dis que deux costez d'iceluy, lesquels on voudra, sçauoir est AB, & AC, sont plus grands ensemble que le troisiesme BC.



Qu'il ne soit ainsi: apres auoir prolongé BA iusques en D; & faict AD egal à AC, soit menée la ligne DC. Le triangle DAC. sera Isoscele, & par la cinquiesme propos. les deux angles ADC & ACD sur la base DC, seront egaux. Mais DCB est plus grãd que DCA: aussi sera-il plus grand que son egal ADC: & partant par la 19. prop. BD sera plus grand costé que BC. Mais BD est egal aux deux costez AC & BA: donc iceux AC & BA seront plus grãds que BC. On demonstrera en la mesme maniere que deux autres costez sont plus grands que l'autre. Parquoy deux costez d'vn triangle pris en quelque sorte que ce soit, sont plus grands que l'autre: Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 14. PROP. *XXI.*

Si des extremitez d'vn costé de quelque triangle, on meine deux lignes droictes se rencontrans au dedans d'iceluy ; icelles seront plus petites que les deux autres costez du triangle, mais elles feront vn plus grand angle.



Soit le triangle ABC, & des extremitez du costé BC, soient menées interieurement deux lignes, BD, CD, se rencontrans au poinct D : Ie dis qu'icelles lignes sont plus petites que BA, & CA : Mais que l'angle D, est plus grand que l'angle A.

Qu'ainsi ne soit, soit continuée BD, iusques au poinct E. Donc par la 20. proposition les deux costez BA, & AE, du triangle BAE, seront plus grãds que le troisiesme BE. Que si à BA, & AE, plus grands que BE, on adiouste chose commune EC, les touts CE, EB seront touſiours plus petits que les touts CE, EA, AB, c'est à dire CA, AB. Pareillement les deux costez CE, & ED, du triangle CED, sont plus grands que le troisiesme CD, ausquels si on adiouste chose egale, sçauoir DB ; les touts CE, ED, DB, ou CE, EB seront touſiours plus grands que les touts CD, & DB. Mais il a esté demonstré que

CA,

CA, AB sont plus grands que CE, EB : donc CA, AB seront beaucoup plus grands que CD, BD. Ce qui estoit proposé en la premiere partie.

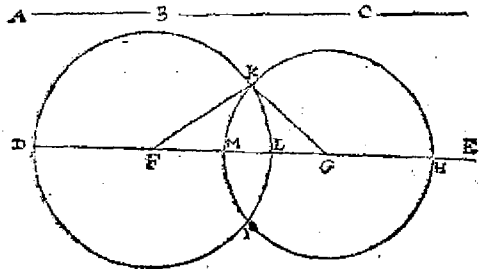
Pour la seconde partie, sçauoir que l'angle D est plus grand que l'angle A. D'autant qu'il est exterieur au triangle CED, il serà plus grand que son opposé interieurement CED par la 16. prop. Mais pour la mesme raison, iceluy angle CED est aussi plus grand que son opposé interieurement A : donc à plus forte raison D sera plus grand que A. Si dõc des extremitez d'vn costé de quelque triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROB. 8. PROP. XXII.

Faire vn triangle de trois lignes droictes, egales à trois autres donnees : mais il faut que deux d'icelles de quelle façon qu'elles soient prises, soient plus grãdes que l'autre : D'autant que de tout triangle, les deux costez de quelque façon qu'ils soiẽt pris, sont plus grands que l'autre.

Soient trois lignes donnees A, B & C, desquelles deux de quelle façon qu'elles soient prises sont plus grandes que la troisiesme : car autremẽt d'icelles on ne pourroit pas constituer vn triangle comme il appert de la 20 pr. en laquelle il a esté demonstré que de tout triãgle deux costez sont tousiours plus grands que l'autre. Il faut faire vn triangle d'icelles, ou de trois autres egales à icelles.

Soit prise vne ligne droicte, tant grande qu'il sera de besoin comme DE, de laquelle soit retranchee DF, egale à A; & puis du reste soit prise F G egale à B, & G H egale à C: & soit descrit vn cercle du centre F & interual FD: Item vn autre cercle du



centre G, & interual GH, coupant le premier cercle au poinct K, duquel soient menees les deux lignes KF, KG. Ie dis que les costez du triangle FKG sont egaux aux trois lignes données A, B, C.

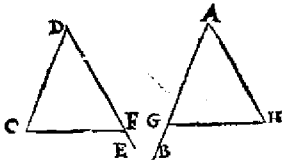
Car FD, FK estans egales par la deff. du cercle: item GK & GH; il est euident que les trois costez du triangle FKG, sont egaux aux trois lignes FD, FG, GH lesquelles estans egales aux dõnees, aussi les costez du triangle seront egaux aux lignes donnees. Nous auons donc fait vn triangle de trois lignes droictes, egales aux trois lignes droictes donnees A, B, C. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La practique tant de ce prob. que du suiuant, est enseignee en nostre Geometrie practique, Prob. 11. & 4.

PROBL. 9. PROP. XXIII.

Sur vne ligne droicte donnee, & à vn poinct donné en icelle, faire vn angle rectiligne egal à vn angle rectiligne donné.

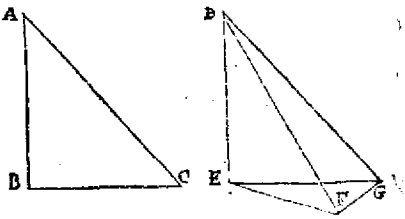


Soit la ligne donnee AB: & le poinct en icelle A, sur lequel il faut faire vn angle rectiligne egal à l'angle rectiligne dõné CDE. Ayant pris és lignes CD, DE quelcõques poincts C & F, soit menee la ligne CF: & sur AB soit construict par la prop. precedente le triangle AGH, ayant les trois costez egaux aux trois costez du triãgle CDF, sçauoir est les deux costez GA, HA, aux deux costez CD, FD, & la base GH à la base CF. Il est euident par la 8. prop. que l'angle A sera egal à l'angle D donné. Nous auons donc fait sur AB l'angle GAH egal à vn donné CDE, ainsi qu'il estoit requis.

THEOR. 15. PROP. XXIIII.

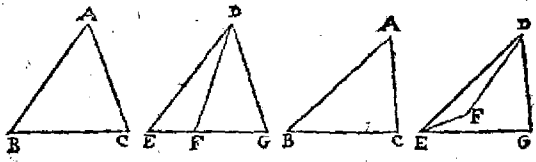
Si deux triangles ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle cõtenu d'iceux costez plus grand que l'angle, ils auront aussi la base plus grande que la base.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les deux costez AB, AC sont egaux aux deux costez DE, DF, chacun au sien: mais l'angle A est plus grand que l'angle EDF. Ie dis que la base BC est plus grande que la base EF.



Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne DE, & au poinct D, soit fait par la precedente prop. l'angle EDG egal à l'angle A; (& la ligne droicte DG tombera hors le triangle DEF, puisque l'angle EDF a esté posé moindre que l'angle A) & soit posee DG, egale à DF, c'est à dire à AC: Soit tiree puis apres la ligne EG, laquelle tombera ou au dessus de la ligne EF, ou sur icelle, ou au dessous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au dessus de EF, & soit tiree la ligne FG: D'autant que les deux costez AB, AC, sont egaux aux deux costez DE, DG, vn chacun au sien, & l'angle A egal à l'angle EDG par la construction: la base BC sera egale à la base EG, par la 4. prop. Et puis que les deux costez DF, DG, sont egaux entr'eux: les angles DFG, DGF seront aussi egaux entr'eux par la 5. prop. Mais l'angle DGF est plus grãd que l'angle EGF: donc aussi l'angle DFG sera plus grand que le mesme angle EGF: parquoy tout l'angle EFG sera beaucoup plus grand que le mesme angle EGF. Donc au triangle EFG, le costé EG sera plus grand que le costé EF par la 19. prop. Mais il a esté demonstré que EG est egale à BC: donc BC sera aussi plus grande que EF: Ce qui estoit proposé.

Maintenant que EG tombe sur icelle EF : d'autant



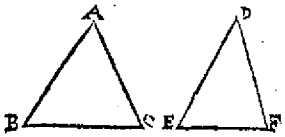
que comme dessus la base E G, sera egale à la base BC par la 4. prop. & EG est plus grande que EF par la 9. com. sent. aussi BC sera plus grande que EF : ce qui estoit proposé.

En troisiesme lieu, que E G tombe au dessous de EF. Il est euident que les deux lignes interieures DF, EF sont plus petites que les deux DG EG par la 21. prop. Mais par la construction DG est egale à DF: donc EG est plus grãde que EF par la 5. com. sent. Mais comme dessus par la 4. prop. EG est egale à BC : donc aussi icelle BC sera plus grande que EF. Si donc deux triangles ont deux costez egaux, &c. Ce qu'il fallait demonstrer.

THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base plus grande que la base; ils auront aussi l'angle contenu d'iceux costez egaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles A B C & D E F, desquels les deux costez A B & A C, sont egaux aux deux D E & D F, chacun au sien : Mais la base B C est plus grande que la base E F.



Ie dis que l'angle A est plus grand que l'angle D.

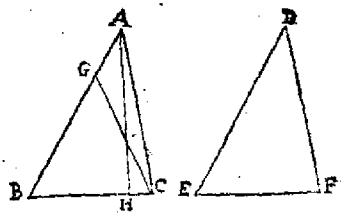
Autrement il sera égal, ou plus petit. Mais il ne peut estre egal : d'autant que par la 4. proposition, les bases B C & E F seroient egales contre l'hypothese. Pareillement il ne peut estre plus petit ; d'autant que par la vingt-quatriesme proposition la base B C seroit plus petite que la base E F ; & elle a esté posée plus grande. Parquoy l'angle A sera plus grand que l'angle D, puis qu'il ne peut estre egal, ny plus petit. Si donc deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEO. 17. PROP. *XXVI.*

Si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles, chacun au sien, & vn costé egal à vn costé, sçauoir est, ou celuy aux extremitez duquel sont les angles egaux, ou

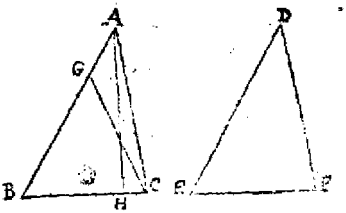
bien celuy qui ſouſtient l'vn d'iceux angles egaux : ils auront auſſi les autres coſtez egaux aux autres coſtez, chacun au ſien, & l'autre angle egal à l'autre angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, deſquels les angles B, & ACB, ſont egaux aux deux E, & F, chacun au ſien, & ſoit premierement le coſté BC, aux extremitez duquel ſont les angles B, & ACB, egal au coſté EF, aux extremitez duquel ſont les angles E & F. Ie dis que les deux autres coſtez AB, AC, ſont egaux aux deux autres coſtez DE, DF, chacun au ſien, ſçauoir eſt AB à DE, & AC à DF. Et l'autre angle BAC egal à l'autre angle D.



Car ſi AB n'eſt egal à DE, ſoit AB plus grand, duquel ſoit retranché BG egale à DE: puis ſoit tirée la ligne droicte CG. Donc puis que les coſtez BC, BG, ſont egaux aux coſtez EF, DE, chacun au ſien, & l'angle B egal à l'angle E, par la 4. prop. la baſe CG ſera egale à la baſe FD, & les autres angles egaux

aux autres angles, chacun au ſien, c'eſt à ſçauoir que l'angle B C G ſera egal à l'angle F, auquel eſt auſſi egal l'angle A C B par l'hypoteſe. Partant les deux angles ACB & GC B ſeroient egaux, la partie au tout : ce qui eſt abſurde. Donc le coſté A B n'eſtoit pas inegal au coſté DE, mais egal. Parquoy veu que les coſtez AB, BC ſont egaux aux coſtez DE, E F, chacun au ſien, & l'angle B egal à l'angle E ; la baſe AC ſera egale à la baſe DF, & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D, par la 4.e prop. de ce liure. Ce qui eſtoit propoſé.



Soient maintenant egaux deux autres coſtez, ſçauoir eſt AB à DE ſouſtendans angles egaux ACB & F. Ie dis derechef que les deux autres coſtez AC, BC ſont egaux aux deux autres coſtez DF, EF, chacun au ſien, c'eſt à dire AC à DF, & BC à EF : & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D. Car ſi le coſté BC n'eſt egal au coſté EF, ſoit le plus grand BC, duquel ſoit coupé BH egal à EF, puis tiré la ligne AH. Donc puis que les coſtez AB, B H ſont egaux aux coſtez DE, EF, vn chacun au ſien, & l'angle B eſt egal à l'angle E par l'hypotheſe, par la 4. prop. la baſe ſera egale à la baſe, & les autres angles egaux aux autres angles, c'eſt à ſçauoir, que l'angle A HB ſera egal à l'angle F. Mais par l'hypotheſe l'angle ACB eſt auſſi egal à l'angle F. Dõc l'angle AHB ſera auſſi egal à l'angle ACB, l'exterieur à ſon oppoſé interieur : ce qui eſt abſurde : car il eſt plus grand par

la 16. prop. Le costé BC n'estoit donc pas plus grand que le costé E F, ains egal. Parquoy les deux costez AB, BC, sont egaux aux deux costez DE, E F, chacun au sien, & par la 4. proposition, l'angle B estant egal à l'angle E, les bases A C, D F, seront egales, & les autres angles B A C & D aussi egaux. Parquoy si deux triangles ont deux angles egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par la demonstration de ceste proposition, que le triangle est aussi egal au triangle.

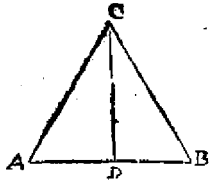
SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy deux theoremes assez vtils & necessaires en Geometrie: le premier est tel.

En vn triangle equilateral, ou Isoscele, estant menée vne ligne droicte de l'angle contenu des deux costez egaux, laquelle diuise en deux egalement, ou l'angle ou la base; elle sera perpendiculaire à la base: & si elle couppe l'angle en deux egalement, elle couppera aussi la base en deux egalement: Mais si elle couppe en deux egalement la base, elle couppera pareillement l'angle en deux egalement. Et au contraire estant tirée vne ligne droicte perpendiculaire à la base, elle diuisera en deux egalement, tant la base que l'angle.

Au triangle A B C soient deux costez egaux A C, B C, & la ligne droicte C D diuise premierement l'angle C en deux egalement. Ie dis qu'icelle ligne C D est perpendiculaire à la base A B, & la diuise en deux egalement. Car puis que les deux costez A C, C D, sont egaux aux deux costez B C, C D,

& les angles qu'ils contiennent auſsi egaux, par la quatriéme propoſition, les baſes A D, B D ſeront auſsi egales, & les angles au poinct D egaux, & partant droicts.



Que ſi la ligne droicte CD diuiſe en deux egalement la ligne A B: ie dis que la ligne droicte C D eſt perpendiculaire à la ligne A B, & que l'angle C eſt couppé en deux egalement. Car puis que les deux coſtez A D, DC, ſont egaux aux deux coſtez B D, D C, & la baſe A C egale à la baſe BC, par la 8. prop. les angles du poinct D ſeront egaux, & partant droicts, & la ligne C D perpendiculaire, & par le corol. de la 8. prop. les angles qui ſont en C ſeront auſsi egaux.

Maintenant ſoit la ligne droicte C D perpend. à A B: Ie dis qu'elle couppe auſsi la baſe B A, & l'angle C en deux egalement. Car par la 5. pro. les angles A & B ſeront egaux: parquoy puis que les deux angles A & D du triangle A C D, ſont egaux aux deux angles B & D, du triangle B C D, vn chacun au ſien, & le coſté C D oppoſé aux angles egaux A & B commun, par la 26. propoſ. les autres coſtez A D, BD, ſeront auſsi egaux, & les autres angles à C pareillement egaux. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Le ſecond Theoreme eſt tel.

Le triangle auquel vne ligne droicte tirée de l'vn des angles perpendiculaire à la baſe, diuiſe ou la baſe ou l'angle en deux egalement, a les deux coſtez comprenant iceluy angle egaux: Et ſi la baſe eſt diuiſée en deux egalement, l'angle ſera auſsi diuiſé en deux egalement: Mais ſi l'angle eſt diuiſé en deux egalemẽt, auſsi ſera la baſe diuiſée en deux egalemẽt.

Au meſme triangle A B C, ſoit C D perpendiculaire à la baſe A B, & la diuiſe en deux egalement. Ie dis que les coſtez A C & B C ſont egaux, & les angles à C auſsi egaux. Car puis

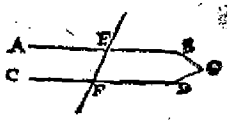
que les deux costez AD, DC, sont egaux aux deux costez BD, DC, & les angles qu'ils comprennent aussi egaux, sçauoir droicts, par la 4. propos. les bases AC, BC, & les angles aC seront pareillement egaux.

Maintenant que la perpendiculaire CD couppe en deux egalement l'angle C: ie dis que les costez AC, BC; & les lignes AD, BD sont egales: Car puis que les deux angles D, C du triangle ACD, sont egaux aux deux angles D, C du triangle BCD, & le costé CD est commun, par la 26. prop. les deux costez AC, BC, & les costez AD, BD, seront egaux: Ce qu'il fallost demonstrer.

THEOR. 18. PROP. *XXVII.*

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes fait les angles oppo-sez alternatiuement egaux; icelles deux lignes seront paralleles entre-elles.

Soient deux lignes droictes A B & C D, sur lesquelles tombant la ligne droicte E F fait les angles BEF, & E F C alternatiuemẽt egaux. Ie dis que A B & C D sont paralleles.



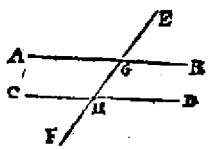
Car si elles ne sont paralleles, estans continuées, elles se rencontreront. Que si elles se rencontroient comme au poinct G, elles feroient vn triangle auec le costé E F, & l'angle exterieur C F E seroit plus grand que l'opposé interieur F E B, par la seiziéme proposition; ce

qui eſt contre l'hypotheſe. Donc les deux lignes AB, & C D ne ſe rencontreront iamais; & par la 25. deff. icelles lignes ſeront paralleles entr'elles. Parquoy ſi vne ligne droicte tombante ſur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO. 19. PROP. XXVIII.

Si vne ligne droicte tombant ſur deux lignes droictes, fait l'angle exterieur egal à ſon oppoſé interieur du meſme coſté; ou bien les deux interieurs de meſme coſté, egaux à deux droicts, icelles deux lignes ſeront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droictes A B & C D, ſur leſquelles tombant vne autre ligne droicte E F, elle fait l'angle exterieur E G A egal à G H C ſon oppoſé interieur de meſme coſté. Ie dis que A B & C D ſont paralleles entre-elles.



Car puis que l'angle GHC eſt poſé egal à l'angle E G A, auquel eſt auſſi egal l'angle B G H par la quinziéme propoſition, les angles alternes B G H, G H C, ſeront egaux par la premiere commune ſentence: partant les lignes A B, C D ſeront paralleles par la propoſit. precedente. Ce qui eſtoit propoſé.

Pour la ſeconde partie. Ie dis que ſi les deux an-

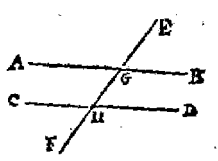
gles interieurs de meſme coſté AGH, & CHG ſont egaux à deux droicts, que auſſi AB & CD ſeront paralleles. Car par la treziéme propoſition, les deux angles GHC & GHD ſont egaux à deux droicts; partant auſſi egaux aux deux AGH & GHC. Que ſi d'iceux angles egaux, on oſte le commun GHC, les demeurans AGH & GHD ſe trouueront alternatiuement egaux, & par la vingt-ſeptiéme propoſition AB & CD ſeront paralleles. Si donc vne ligne droicte tombant ſur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 20. PROP. XXIX.

Si vne ligne droicte tombe ſur deux lignes droictes paralleles, elle fera les angles oppoſez alternatiuement egaux; & l'exterieur egal à ſon oppoſé interieur du meſme coſté: & les deux interieurs de meſme coſté egaux à deux droicts.

Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, (en la figure de la precedente propoſition) ſur leſquelles tombe la ligne droicte EF. Ie dis en premier lieu que les angles AGH & GHD oppoſez alternatiuemẽt ſont egaux. Autremẽt ſ'ils ne ſont egaux, l'vn ſera plus grand, ou plus petit que l'autre: Soit donc AGH plus petit s'il eſt poſſible, que GHD: & ſi à iceux angles inegaux on a adjouſté choſe

comm. sçauoir l'angle GHC, les deux AGH & GHC feront plus petits que les deux GHC & GHD, lesquels par la 13. propos. estans egaux à deux droicts, AGH & GHC seront plus petits que deux droicts, & par la penultiéme, com. sent. les deux lig. AB & CD ne sont point paralleles: ce qui est cõtre nostre hypothese. Dõc il falloit que l'ang. AGH fust egal à l'ang. GHD son alterne opposé.



Pour la seconde partie. Ie dis que l'angle exterieur EGB est egal à son opposé interieur de mesme costé GHD: ce qui est manifeste par ce qui a esté demonstré cy dessus, sçauoir que les angles AGH & GHD estoient egaux, estant aussi EGB egal à AGH par la 15. propos. & par la 1. com, sentence EGB & GHD seront egaux: estans tous deux egaux au mesme AGB.

Pour la troisiéme partie: ie dis que les deux interieurs de mesme costé AGH & GHC sont egaux à deux droicts: car s'il estoit autrement les lignes AB & CD ne seroient paralleles par la penultiéme commune sentence, contre l'hypothese. Si donc vne ligne droicte tombe sur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

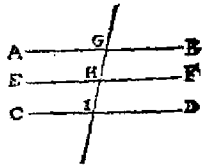
THEOR. 21. PROP. XXX.

Les lignes droictes paralleles à vne mesme ligne droicte, sont paralleles entr'elles.

Soient les lignes droictes AB, CD paralleles à vne mesme ligne droicte EF. Ie dis que AB & CD sont

paralleles entr'elles.

Car d'autant que toutes ces lignes AB, EF, CD, sont posées en vn mesme plan, soit tirée la ligne droicte GHI, qui les coupe toutes trois, sçauoir est AB en G; EF en H; & CD en I. Et puis que AB est posée parallele à EF, les angles alternes AGH, GHF, seront egaux entr'eux par la precedente propositon. Derechef, puis que CD est aussi posée parallele à la mesme EF; l'angle DIH sera aussi egal au mesme angle GHF, c'est à sçauoir l'interne à l'externe. Parquoy les angles AGH & DIH seront egaux entr'eux, lesquels estans alternes, les lignes AB & CD sont paralleles entr'elles, par la vingt-septiéme propositon. Parquoy les lignes droictes paralleles à vne mesme ligne droicte sont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit demonstrer.

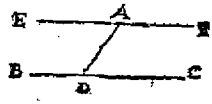


PROB. 10. PROP. XXXI.

D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte parallele à vne ligne droicte donnée.

Soit le poinct donné A, duquel faut mener vne ligne parallele à la donnée BC.

Soit menée la ligne AD faisãt auec BC l'ang. ADC, & sur



icelle AD, & au poinct A soit fait l'angle DAE egal à l'angle ADC. Ie dis que la ligne EA tirée tant qu'on voudra vers F, est parallele à BC. Car puis que par la construction les angles alternes ADC, DAE sont egaux, les lignes BC, FE seront paralleles entr'elles par la vingt-septiéme proposition. Nous auons donc d'vn poinct donné A, mené vne ligne droicte EF parallele à vne droicte donnée BC. Ce qu'il falloit faire.

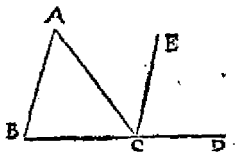
SCHOLIE.

Il est manifeste par ceste construction, que le poinct donné doibt estre tellement scitué hors la ligne donnée, qu'icelle estant continuée ne contienne auec iceluy. Quant à la practique de ceste proposition, nous l'auons enseignée en nos Memoires Mathematiques, Probl. 6. de la Geometrie practique.

THEOR. 22. PROP. *XXXII.*

En tout triangle, l'vn des costez estant prolongé, l'angle exterieur est egal aux deux opposez interieurs : & de chacun triangle les trois angles interieurs sont egaux à deux droicts.

Soit le triangle ABC, duquel le costé BC, soit prolongé jusques en D. Ie dis en premier lieu que l'angle exterieur ACD, est egal aux deux opposez interieurs A & B.



Qu'il

Qu'il ne soit ainsi: qu'on mene C E parallele à B A par la 31. prop. & d'autant que la ligne AC tombe sur les paralleles AB, EC, par la 29. pro. les angles BAC, & ACE, seront alternatiuement egaux: item l'exterieur E C D sera egal à son opposé interieur A B C. Partant il est manifeste que le total A C D, est egal aux deux A & B, opposez interieurement.

Pour la seconde partie, que les trois angles A, B & C interieurs du triangle A B C sont egaux à deux droicts, il est euident, estant A C D egal aux deux A & B. Mais ACD & ACB, sont ensemble egaux à deux droicts, par la 13. prop. Partant les trois angles interieurs AB & ACB, serõt aussi egaux à deux angl. droicts. Si donc de tout triangle, l'vn des costez est prolongé, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

De ceste proposition nous pouuons colliger à combien d'angles droicts sont egaux tous les angles internes de quelconque figure rectiligne: & ce par deux manieres, dont la premiere est telle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle est entre les figures rectilignes.

C'est à dire, que tous les angles de la premiere figure rectiligne sont egaux à deux fois vn droict, c'est à dire à deux droicts: Mais les angles de la seconde figure rectiligne, sont egaux à deux fois deux droicts, sçauoir est à quatre droicts: Mais ceux de la troisiéme figure, sont egaux à deux fois trois droicts, c'est à dire à six droicts; & ainsi des autres. Or le lieu qu'obtient chasque figure rectiligne entre les figures rectili-

gnes, est monstré par le nombre des costez, ou des angles, deux d'iceux ostez; d'autant que deux lignes droictes n'enferment pas vne superficie, & par consequent ne cõstituent vne figure: mais sont requises au moins trois lignes droictes pour construire vne figure rectiligne; d'où vient que le triangle est la premiere figure rectiligne; Car de ses costez, en estans ostez deux, reste vn: ainsi la figure ayant douze costez, ou douze angles, sera la dixiéme figure, puis que deux estans ostez de douze, restent dix: & ainsi faut-il iuger des autres. Parquoy puis que la figure contenuë de douze costez, est la dixiéme, elle aura aussi douze angles equiuallens à vingt angles droicts, c'est à sçauoir à deux fois dix angles droicts: Ainsi aussi tous les dix angles de la figure contenuë de dix costez, equiuallent à seize angles droicts, puis qu'icelle figure est la huictiéme en ordre entre les figures rectilignes. Or la raison de cecy est, que toute figure rectiligne se diuise en autant de triangles, qu'elle est quantiéme en ordre entre les figures, ou bien qu'elle a d'angles ou de costez, deux estans ostez: Car de quelconque angle d'vne figure, on peut tirer des lignes droictes à tous les angles opposez: mais aux deux plus prochains on n'en peut pas tirer. Parquoy la figure sera diuisée en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux estans ostez. Ainsi il est euident que le triangle ne se peut diuiser en autres triangles: mais le quadrangle se coupe en deux: le Pentagone en trois, &c. Veu donc que les angles d'iceux triangles constituent tous les angles de la figure proposée, & tous les angles de quelcõque triãgle sont egaux à deux droicts: il est manifeste



que tous les angles de quelconque figure rectiligne sont e-

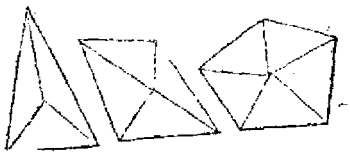
gaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'eſt le nombre des triangles eſquels elle ſe diuiſe, c'eſt à dire à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle figure eſt quantiéme en ordre entre les figures rectilignes. Ce qui eſt veu manifeſtement és figures cy deuant proposées.

Le ſecond moyen par lequel on ſçaura la valeur des angles de quelconque figure rectiligne, eſt ceſtuy-cy.

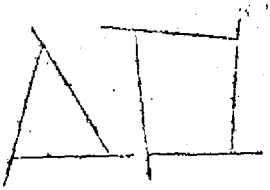
Tous les angles de quelconque figure rectiligne, ſont egaux à deux fois autant d'angles droicts, quatre eſtans oſtez, qu'il y a en icelles d'angles, ou de coſtez.

C'eſt à dire, que les angles de chaſque triangle ſont egaux à deux fois trois droicts, quatre oſtez, c'eſt à ſçauoir à deux droicts: Ainſi auſſi les angles de la figure de douze coſtez, vaudront deux fois douze angles droicts, moins quatre, ſçauoir eſt vingt angles droicts, &c. Or la demonſtration de cela eſt telle. Si de quelconque poinct pris dedans la figure on tire des lignes droictes à tous les angles, il y aura autant de triangles en ladite figure, qu'elle a d'angles ou de coſtez. Veu donc que les trois angles de chaſque triangle par la trente-deuxiéme prop. ſont egaux à deux droicts, tous les angles d'iceux triangles ſont egaux à deux fois autant de droicts qu'il y a de coſtez en la figure. Mais il eſt cuident que les angles des meſmes triangles qui ſont à l'entour du poinct pris dedans la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure proposée: & partant ſi on oſte ces angles là, les autres angles des triangles qui conſtituent ceux de la figure proposée, ſeront auſſi egaux à deux fois autant d'angles droicts, ceux d'alentour le poinct pris eſtans oſtez, qu'il y a de coſtez, ou d'angles à la figure. Mais

sons ces angles là d'alentour le poinct pris, sont seulement egaux à quatre droicts, ainsi que nous l'auons colligé de la quinziéme proposition. Parquoy les angles de quelconque figure rectiligne sont egaux à deux fois autant de droicts, quatre estans ostez, que ladite figure contient d'angles, ou de costez.



Or il appert de ce que dessus, que si chasque costé de quelconque figure rectiligne, est prolongé par ordre vers vne mesme part, tous les angles exteriores pris ensemble, seront egaux à quatre droicts. Car par la treziéme proposition, les angles interieurs pris auec les exterieurs, sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'il y a d'angles, ou de costez en la figure. Mais les angles interieurs sont egaux à deux fois autant de droicts, quatre ostez, que ladite figure a d'angles, comme nous auons monstré cy dessus parlant les exterieurs sont tousiours egaux à quatre droicts. Par exemple: En quelconque triangle, les angles interieurs & exterieurs ensemble, sont egaux à six droicts: comme il appert en ceste figure.



Mais par la trente-deuxiéme proposition, les internes seuls sont egaux à deux droicts. Donc les seuls exterieurs seront egaux à quatre droicts. En vn quadrangle, les angles exterieurs & les interieurs ensemble, sont egaux à huict droicts. Mais les interieurs seuls sont egaux à quatre droicts, comme nous auons demonstré: les exterieurs seuls seront donc aussi egaux

à quatre droicts. Toutes lesquelles choses peuuent estre veues és figures apposées cy deuant. Il y a la mesme raison en toutes autres figures qui ont tous leurs angles interieurs.

COROLLAIRE.

Il resulte de ceste trente-deuxiéme proposition, que les trois angles de quelconque triangle, pris ensemble, sont égaux aux trois angles de quelconque autre triangle pris ensemble: pource que tant ces trois là, que ces trois cy, sont egaux à deux droicts: D'où vient que si deux angles d'vn triangle sont egaux à deux angles d'vn autre triangle, le troisiéme de l'vn sera aussi egal au troisiéme de l'autre, & les triangles seront equiangles.

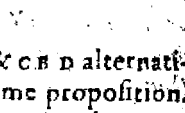
Il appert aussi que tout triangle Isoscele, duquel l'angle comprins par les costez egaux, est droict, à chacun des autres angles demy droicts. Car les deux restans ensemble sont vn droict, puis que par la trente-deuxiéme proposition, les trois sont egaux à deux droicts: & le troisiéme est posé droict. Parquoy puis que par la cinquiéme proposition les deux restans sont egaux entr'eux: chacun d'iceux sera demy droict. Mais si l'angle contenu des costez egaux estoit obtus, chacun des autres seroit moindre qu'vn demy droict. Car les deux restans ensemble seront moindre qu'vn droict, &c. Finalement si ledit angle estoit aigu, chacun des autres sera plus grand qu'vn demy droict. Pource que les deux restans ensemble, seront plus grand qu'vn droict, &c.

Il est pareillement manifeste, que chasque angle d'vn triangle equilateral, est les deux tierces parties d'vn droict, ou la tierce partie de deux droicts. Car deux angles droicts, auxquels sont egaux les trois angles d'vn triangle equilatéral, diuisez en trois angles egaux, sont les deux tierces parties d'vn droict.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droictes qui conjoignent deux lignes droictes egales & paralleles, & de meſme part, ſont auſſi egales & paralleles.

Soient deux lignes droictes A B, & C D, qui conjoignent de meſme part deux autres lignes A C & B D egales & paralleles. Ie dis que A B, & C D, ſont auſſi egales & paralleles.



Qu'il ne ſoit ainſi: ſoit menée la diagonalle B C. Icelle tombant ſur les deux paralleles A C, & B D, feta les angles A C B & C B D alternatiuement egaux par la vingt-neufiéme propoſition. Item A C, & B D eſtant egales, les deux triangles C A B & C B D, auront deux coſtez egaux à deux coſtez chacun au ſien, & les angles qu'ils comprennent auſſi egaux, & par la 4. prop. la baſe A B ſera egale à la baſe C D, & l'angle A B C ſera egal alternatiuement à l'angle D C B, & par la 27. prop. icelles lignes egales A B, & C D ſeront auſſi paralleles. Donc les lignes droictes qui conjoignent deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 24. PROP. XXXIV.

En tout parallelogramme, les coſtez, &

les angles oppoſez, ſont egaux entre-eux ; & la diagonalle le couppe en deux egalement.

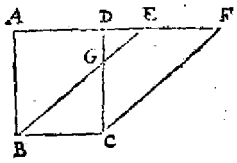
Soit le parallelogramme A B C D, en la figure de la propoſition precedente. Ie dis que le coſté A B eſt egal à ſon oppoſé C D ; & auſſi le coſté A C egal au coſté B D : Item que l'angle A eſt egal à ſon angle oppoſé D, & encore l'angle A B D egal à l'angle A C D : finalement qu'iceluy parallelogrãme A B C D, eſt coupé en deux egalement par la diagonalle B C.

Car puis que la figure quadrilataire A B C D eſt vn parallelogramme, le coſté A B ſera parallele au coſté C D, & A C à B D, & par la 29. propoſition, l'angle A B C ſera alternatiuement egal à B C D. Item l'angle A C B alternatiuement egal à l'angle C B D. Ainſi les deux triangles B A C, & D C B auront les angles A B C, & B C A, egaux aux angles B C D & C B D, chacun au ſien, & le coſté B C commun à tous les deux ſuſdits triangles : Et partant par la 26. prop. les autres coſtez A B & A C, ſeront egaux aux autres coſtez C D & B D, chacun au ſien, & l'autre angle A egal à l'angle D. Et ſi, il eſt euident que les deux angles du poinct B enſemble, ſeront egaux aux deux enſemble du poinct C. Encores par la 4. prop. les triangles A B C, & C D B ſeront egaux ; & partant le parallelogramme A B C D eſt couppé en deux egalement par la diagonalle B C. Donc en tout parallelogramme les coſtez & les angles, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 25. PROP. XXXV.

Les parallelogrammes conſtituez ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux.

Soient deux parallelogrammes ABCD, & BCEF, tous deux ſur meſme baſe BC, & entre meſmes paralleles AF, & BC. Ie dis qu'ils ſont egaux.

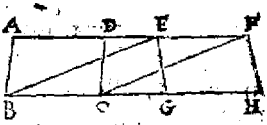


Car par la trente-quatriéme propoſition les coſtez oppoſez des parallelogrammes eſtans egaux, AD & BC ſeront egaux. Item BC, & EF; & partant AD, & EF egaux, auſquels ſi on adjouſte la ligne commune DE; AE ſera egale à DF. Item AB eſt egale à DC, leſquelles eſtans paralleles, l'angle exterieur CDE ſera egal à l'oppoſé interieur EAB: & par la quatriéme propoſition les triangles BAE, & CDF ſeront egaux: deſquels ſi on oſte le triangle commun GDE, les demeurans trapezes BADG, & CGEF, ſeront egaux: auſquels ſi on adiouſte le triangle commun BGC, le parallelogramme ABCD ſera egal au parallelogramme BCEF: Donc les parallelogrammes conſtituez ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux: Ce qui eſtoit à démonſtrer.

THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallelogrammes constituez sur baſes égales, & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux.

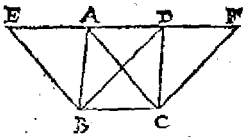
Soient les deux parallelogrãmes ABCD, & EFGH, ayans les baſes BC, & GH egales, & entre les meſmes paralleles AF, & BH. Ie dis qu'ils ſont egaux.



Qu'il ne ſoit ainſi: ſoient menees les deux lignes BE, CF; d'autant que BC eſt poſee egale à GH, & que par la 34. prop. la meſme GH eſt egale à ſon oppoſee EF; les deux lignes BC, EF, ſeront egales entr'elles par la 1. com. ſent. Mais elles ſont auſſi paralleles par l'hypotheſe: Dõc les lignes BE, CF, qui les conjoignent, ſeront auſſi egales & paralleles par la 33. prop. & par conſequẽt BEFC ſera vn parallelogramme conſtitué ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles que le parallelogram. ABCD, & par la 35. prop. ils ſeront egaux; & par la meſme prop. il ſera auſſi égal au parallelog. EFGH, eſtant ſur meſme baſe EF, auec iceluy, & entre meſmes parallel. AF, BH: Et par la 1. com. ſent. les parallelog. ABCD, & EFGH, ſeront egaux entr'eux. Donc les parallelogrammes conſtituez ſur baſes egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO. 27. PROP. XXXVII.

Les triangles constituez sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.



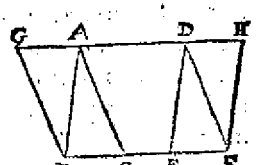
Soient deux triangles ABC, & BDC, tous deux constituez sur la mesme base BC, & entre mesmes paralleles EF, & BC. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux. Car si on meine BE parallele à CA, & CF parallele à BD, seront accõplis les parallelogr. AEBC, & BCFD, lesquels seront egaux par la 35. prop. Mais les triangles donnez ABC, & DBC, sont moitiez d'iceux parallelogrammes par la 34. prop. pource qu'ils sont couppez en deux, egalement par les diagonales AB, DC, donc aussi les triãgles ABC & DBC seront egaux, par la 7. com. sent. Parquoy les triangles constituez sur mesme base, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur bases egales, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, DEF, constituez sur

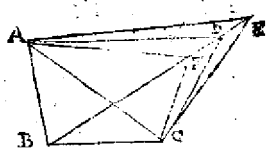
baſes egales BC, & EF, & entre meſmes paralleles GH, & BF. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.



Car apres auoir mené BG parallele à CA, & FH parallele à DE par la 31. prop. les deux parallelogram. ACBG, DEFH, eſtans conſtituez ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles, ſeront egaux par la 36. prop. auſſi egales ſeront leurs moitiez, ſçauoir les triangles propoſez ABC, & DEF par la 34. prop. eſtans les parallelogrammes coupez en deux egalement par les diagonales BA, & DF. Donc les triangles conſtituez ſur baſes egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

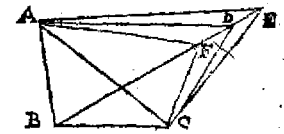
THEOR. 29. PROP. XXXIX.

Les triangles egaux conſtituez ſur meſme baſe, & de meſme part, ſont auſſi entre meſmes paralleles.



Soient deux triangles egaux ABC, & BCD conſtituez ſur meſme baſe BC, & de meſme part. Ie dis qu'ils ſont entre meſmes paralleles, c'eſt à dire que ſi on meine la ligne AD, elle ſera parallele à BC.

Autrement du poinct A, on en pourra mener vne autre qui sera parallele à B C (si A D ne l'est) par la 31. prop. Laquelle tombera, ou bien au dessus de A D, ou au dessous; qu'elle tombe premierement au dessus, & soit icelle A E, s'il est possible: & apres auoir continué B D iusques en E, & mené E C. Les deux triangles B A C, & B E C par la 37. prop. estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, seront egaux. Mais par l'hypothese B A C, & B D C sont aussi égaux; partant B E C, & B D C seroient aussi egaux, la partie au tout; donc A E parallele ne pouuoit tomber par dessus A D. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on pose la parallele A F au dessous de A D: car ayant mené C F, il s'ensuiura que les triangles B F C, & B D C sont egaux, ce qui ne peut estre: Donc du poinct A on ne menera point d'autre ligne que A D parallele à B C. Parquoy les triangles egaux constituez sur mesme base, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



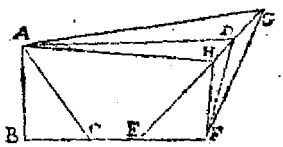
THEOR. 30. PROPOS. XL.

Les triangles egaux constituez sur bases egales, & de mesme part, sont aussi entre mesmes paralleles.

Soient deux triangles egaux A B C, & D E F, constituez sur bases egales B C, & E F, & de mesme

part. Ie dis qu'ils sont aussi entre mesmes paralleles; c'est à dire, que si on meine vne ligne droite de A en D, qu'icelle sera parallele à BF.

Autrement du poinct A on en pourra mener vne autre qui sera parallele à BF (si AD ne l'est) par la 31. prop. Laquelle tombera, ou au dessus de AD, ou au dessous. Soit donc premierement au dessus,



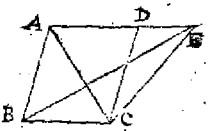
& soit icelle AG, s'il est possible. Les deux triangles BAC, & EGF seront egaux par la 38. prop. Mais par l'hypothese BAC, & EDF sont aussi egaux: partant EGF & EDF seront egaux par la 1. com. sent. la partie au tout, ce qui est impossible: Partant la parallele menee du poinct A ne tombera point au dessus de AD. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on la fait tomber au dessous, comme AH, car les triangles EHF, & EDF se trouueroient egaux: donc du poinct A ne pourra estre menee autre ligne que AD parallele à BF. Parquoy les triangles egaux constituez sur bases egales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 31. PROP. XLI.

Si vn parallelogramme, & vn triangle ont vne mesme base, & sont entre mesmes paralleles; le parallelogramme sera double du triangle.

Soit le parellelogramme ABCD sur la mesme

base B C, que le triangle B C E, & tous deux entre mesmes paralleles A E, & B C. Ie dis que le parallelogrãme est double du triangle.

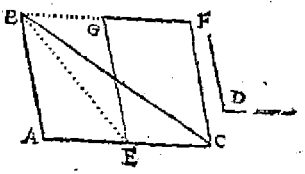


Car si on meine la diagonalle A C, le triangle A B C sera la moitié du parallelogramme A B C D par la 34. prop. lequel sera egal au triangle B E C par la 37. prop. partant le parallelogramme qui est double de l'vn, sera aussi double de l'autre. Si donc vn parallelogramme & vn triangle ont vne mesme base, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROB. II. PROP. XLII.

Faire vn parallelogramme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le triangle dõné A B C, auquel il faut faire vn parallelogramme egal, ayant vn angle egal à l'angle donné D.



Soit la base du triãgle A C couppee en deux egalement en E, & fait l'angle C E G egal à l'angle D par la 23. proposition. Puis par la 31. prop. soit menee de B, la ligne B F parallele à A C, laquelle couppe E G en G. Derechef de C soit menee C F parallele à E G, rencontrant B F en F: & sera consti-

tué vn parallelogramme EGFC, lequel ie dis estre egal au triangle donné ABC. Car estant tiree la ligne BE, iceluy parallelogramme EGFC sera double du triangle EBC par la prop. precedente, duquel est aussi double le triangle ABC iceluy estant egal aux deux ABE, EBC, qui sont egaux entr'eux par la 38. prop. le parallelogrãme EGFC, & le triangle ABC seront donc egaux entr'eux par la 6. com. sent. & puis qu'iceluy parallelogramme a l'angle CEG egal au donné D par la construction, nous auons construict vn parallelogramme egal à vn triangle donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Pelletier adiouste icy la conuerse de ceste proposition, qui est telle.

Faire vn triangle egal à vn parallelogramme donné, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

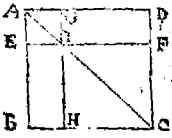
Et d'autant que nous auons enseigné ce probleme en nos memoires Mathematiques, Prob. 14. nous n'en ferons icy repetition.

THEOR. 32. PROBL. XLIII.

En tout parallelogramme, les supplements des parallelogrammes qui sont sur le diametre, sont egaux entr'eux.

Soit le parallelogramme ABCD, son diametre AC,

à l'entour duquel sont les parallelogrammes AEIG & IHCF. Ie dis que les parallelogrammes GIFD & EBHI, qu'on appelle supplements, sont egaux entr'eux.



Car d'autant que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC, sont egaux entr'eux : Item les triangles CIH, CFI aussi egaux; si on oste ceux-cy de ceux-là, resteront egaux les trapezes ABHI, ADFI. Mais par la 34. prop. sont aussi egaux les triangles AEI, AGI, partant si on les oste des trapezes, demeuretont egaux les supplements EBHI, GIFD : donc en tout parallelogramme les supplements, &c. Ce qui estoit à prouuer.

PROBL. 12 PROP. *XLIIII.*

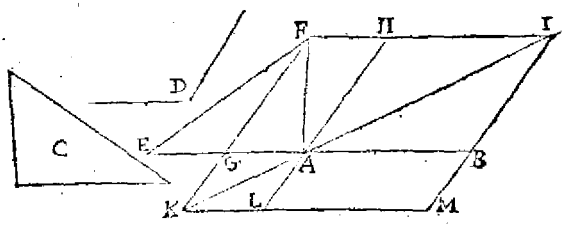
Sur vne ligne droicte donnee, descrire vn parallelogramme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, le triangle donné C, & l'angle rectiligne donné D. Il faut sur AB descrire vn parallelogramme egal au triangle C, & qui ait vn angle egal au donné D.

Soit prolongee la ligne donnee AB iusques en E, tellement que AE soit egale à quelconque des costez du triangle C, & soit acheué de construire par la 22. prop. le triangle AFE, ayant les costez egaux

aux

aux costez dudit triangle donné C, lequel luy sera



aussi egal par le corol. de la 8 prop. Soit maintenant construit par la 42. prop. le parallelogrãme AGFH, egal au triangle AFE, & ayant l'angle GAH egal au donné D : & apres auoir continué la ligne FH iusques en I, tellement que HI soit egale à AB, soit menee IA iusques à ce qu'elle rencontre FG prolongee en K : ce qui doit arriuer, n'estant IA parallele à FG, par la 11. com. sent. puis du poinct K, soit menee KM parallele à GB, iusques à ce qu'elle rencontre IB tiree en M : & finalement soit prolongee HA iusques à ce qu'elle rencontre KM en L. Ie dis que le parallelogramme ABML est le requis.

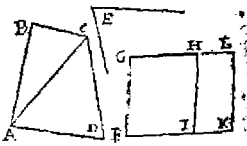
Car il est constitué sur la ligne droicte donnee AB, & à l'angle BAL egal à l'angle donné D, puis que par la 15. prop. il est egal à l'angle GAH, qui a esté fait egal à l'angle D : Finalement il est egal au triangle donné C, puis que par la 43. propos. il est egal au parallelogramme AHFG, lequel a esté faict egal au triangle AFE, ou C. Nous auons donc descrit sur la ligne donnée vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous auons enſeigné la praticque de ce Prob. en nos Memoires Mathem. Prob. 15. & le conuerſe d'iceluy au Probleme 16. C'eſt pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROB. 13. PROP. XLV.

Faire vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



Soit la figure rectiligne donnee ABCD, & l'angle donné E. Et il faut faire vn parallelogramme egal à icelle figure rectiligne ABCD, qui ait vn angle egal au donné E.

Soit reſoluë la figure rectiligne donnee en triangles, ſçauoir eſt menant la ligne AC: puis par la 42. prop. ſoit fait le parallelogramme F G H I egal au triangle A D C, ayant l'angle F egal à l'angle donné E. Item ſur H I ſoit fait le parallelogramme H I K L. egal au triangle A B C, ayant vn angle H I K egal au donné E: & ſera fait ce qui eſt requis. Car les deux parallelogrammes F H & I L ſont conſtruicts egaux à la figure rectiligne ABCD, & ont chacun vn angle egal à l'angle donné E; & ces deux parallelogr. enſemble en font vn ſeul. Car d'autant que chacun

des angles GFI, HIK eſt egal à l'angle donné E, ils le ſeront auſſi entr'eux : auſquels ſi on adjouſte l'angle commun FIH, les deux angles G F I, HIF, qui ſont egaux à deux droicts par la 29. prop. eſtant FH, parallelogramme ; ſeront egaux aux deux angles H I K, H I F, leſquels partant ſeront egaux à deux droicts, & par la 14. prop. les deux lignes FI, KI, ſe rencontreront directement. Pareillement les deux angles GHI, HLK eſtans egaux par la 34. pr. car ils ſont oppoſez à angles egaux GFI, HIK: Si à iceux on adjouſte l'angle commun I H L, par le meſme diſcours que cy-deſſus, les deux lignes G H & L H ſe rencontreront directement : ainſi F K & G L eſtans lignes droictes, & conjoignant de meſme part les egales & paralleles F G & K L ; elles ſeront auſſi egales & paralleles par la 33. prop. & partant FGLK ſera parallelog. ; lequel nous auons conſtruict egal à la figure rectiligne donnée ABCD, & faict l'angle F egal au donné E, ainſi qu'il eſtoit requis.

SCD Lyon 1 Mathematiques

SCHOLIE.

S'il y euſt eu dauantage de triangles en la figure donnee, il euſt fallu conſtruire ſur KL vn troiſieſme parall. logr. egal au troiſieſme triangle : puis ſur le coſté oppoſé à KL, vn autre parallelogramme egal au 4. triangle, & ainſi proceder de triangle en triangle iuſques à la fin. Et quant à la demonſtration, ceſera touſiours la meſme que deſſus, repetee autant de fois qu'il ſera de beſoin. Or Pelletier adiouſte icy vn Prob. tres-vtil, qui eſt, Qu'eſtans données deux figures rectilignes inegales, trouuer l'excez de la plus grande par deſſus la moindre. *Mais d'autant que nous l'auons enſeigné en ſuite de celuy cy deſſus, en noſtre Geometrie praticque, Prob. 18. nous n'en ferons icy repetition.*

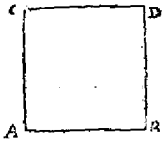
COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par les choſes dictes cy-deſſus, comme on deſcrira ſur vne ligne droicte donnee vn parallelogramme égal à vne figure rectiligne donnee, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné. Car pour exemple, ſi la ligne droicte FG euſt eſté donnee, nous euſsions par la precedente prop. deſcrit ſur icelle le parallelogramme FGHI; puis ſur la meſme ligne FG, ou pluſtoſt ſur vne egale à icelle HI, le parallelogramme HIKL; & ainſi conſecutiuement s'il y auoit dauantage de triangle en la figure rectiligne donnée.

PROBL. 14. PROP. XLVI.

Sur vne ligne droicte donnee, deſcrire vn quarré.

Soit la ligne droicte donnee AB, ſur laquelle il faut deſcrire vn quarré. Du poinct A, ſoit menee AC ligne perpendiculaire à AB par la 11. prop. laquelle ſoit faicte egale à AB, & apres auoir mené CD parallele à AB, & BD parallele à AC par 31. propoſ. ie dis que le quadrilatere ABDC eſt quarré.



Car d'autant que par la conſtruction il eſt parallelogramme: les coſtez, & les angles oppoſez ſont egaux par la 34. prop. parquoy le coſté AB eſt égal à CD, & AC à BD: mais AC eſtant egal à AB par la conſtruction; il eſt euident que les quatre coſtez ſont egaux entr'eux. Item l'angle A eſtant droict par la conſtruction, auſſi ſon oppoſé D ſera

droict. Et la ligne AC tombãt sur les deux lignes paralleles AB, CD, les deux angles interieurs A & C sont egaux à deux droicts par la 29 prop. Mais l'angle A est droict: donc l'angle C sera aussi droict: partant aussi droict son oppolé B: ainsi les quatre angles A, B, C, D, seront droicts: & par la def. du quarré, la figure AD sera quarree. Nous auons donc descrit vn quarré sur la ligne droicte donnée. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous auons enseigné la practique de ceste prop. en nostre Geometrie practique. Prob. 12.

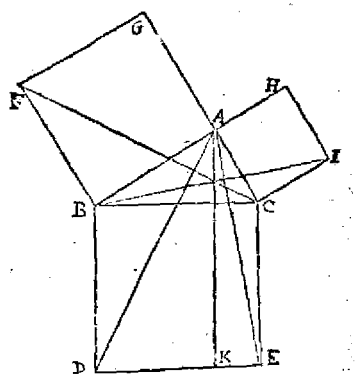
Proclus demonstre icy: Que les quarrez de lignes egales sont egaux: & que de quarrez egaux, les lignes sont egales. *Ce qui est aisé à prouuer par la superpositon d'vn quarré sur l'autre: Car les lignes estans egales si l'vne est posee dessus l'autre, elles conuiendront entr'elles; & les angles estans aussi egaux, c'est à sçauoir droicts, ils conuiendront pareillement entr'eux: & partant tout le quarré conuiendra à tout le quarré. Que si les quarrez sont egaux, ils conuiennent entr'eux, à cause de l'egalité des angles: Donc aussi les lignes; autrement vn quarré seroit plus grand que l'autre. Nous auons laissé la demonstration de Proclus qui est tres-longue, pour suiure celle-cy qui est breue & facile.*

THEO. 33. PROP. *XLVII.*

Aux triangles rectangles, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est egal aux deux quarrez des deux autres costez.

Soit le triangle rectangle A B C, sur les costez duquel soient descrits les trois quarrez B C D E, A B F G, A H I C. Ie dis que le quarré B C E D descrit sur le costé B C, qui soustient l'angle droict B A C, est egal aux deux quarrez A B F G & A C I H descrits sur les deux autres costez A B & A C.

Car soit menee la ligne A K parallele à B D, ou à C E, & tirees les lignes A D, A E, C F, B I. Et d'autant que par la definition du quarré, les 4. angles au poinct A sont droicts, les lignes droictes A B, A H se rencontreront directement, & ne feront qu'vne ligne droicte: Itē C A, A G par la 14. prop. Derechef puis que les angles A B F, C B D

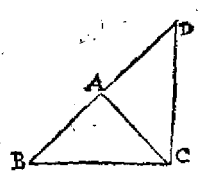


sont egaux, car ils sont droicts, si on leur adiouste le commun A B C, le total F B C sera egal au total A B D. Le triangle A B D a donc les deux costez A B, B D, egaux aux deux costez F B, B C du triangle C B F, chacun au sien, & les angles A B D, C B F contenus d'iceux costez, egaux, & par la 4. prop. les triangles A B D, C B F seront egaux. Mais le quarré A F est double du triangle F B C par la 41. prop. car ils sont sur mesme base B F, & entre mesmes parallelles B F, G C; il sera donc aussi double de son egal A B D: duquel le parallelog. B K est aussi double par

la meſme 41. prop. & par conſequent le quarré AF ſera egal au parallelog. B K : car les choſes doubles d'vne meſme ſont egales entr'elles. Par meſme diſcours on prouuera que le parallelog. CK eſt egal au quarré A I : partant les deux enſemble B K, & C K ſeront egaux aux deux quarrez enſemble AF, & AI. Donc le quarré BE qui eſt compoſé d'iceux parallelog. B K, CK ſera auſſi egal aux meſmes quarrez AF, A I : parquoy aux triangles rectangles, le quarré du coſté, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. *XLVIII.*

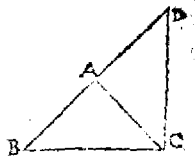
Si le quarré de l'vn des coſtez d'vn triangle, eſt egal aux quarrez des deux autres coſtez, le triangle ſera rectangle.



Soit le triangle donné A B C, & ſoit le quarré du coſté B C egal aux deux quarrez des deux autres coſtez B A, & A C. Ie dis que l'angle BAC eſt droict.

Car apres auoir mené AD perpendiculaire à A C, par la 11. prop. & faict A D egale à A B, ſoit menee CD. Le triangle C A D ſera rectangle, & par la 47. prop. le quarré de CD ſera egal aux deux quarrez de CA, & A D, leſquels ſont egaux aux quarrez de BA, & AC, eſtans leurs lignes egales;

& par la 1. com. sent. le quarré de B C sera egal au quarré de C D : partant la ligne C B egale à C D. Donc les triangles B A C, & C A D auront deux costez egaux à deux costez chascun au sien, & la base egale à la base, & par la 8. prop. l'angle B A C sera egal à l'angle droict C A D : partant il sera aussi droict. Si donc le quarré de l'vn des costez d'vn triangle est egal, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



Fin du premier Element.

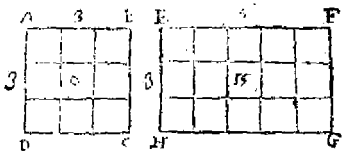
ELEMENT SECOND

DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, eſt dit eſtre cõpris des deux lignes droictes qui font l'angle droict.

IL a eſté dit en la 36. deff. 1. que c'eſt que parallelogramme, & qu'il y en a de quatre ſortes: mais maintenant il faut entendre qu'vn parallelogramme eſt dit rectangle, lors qu'il a tous les angles droicts, & par conſequent il y a ſeulement le quarré, comme ABCD, & le quarré-long comme EFGH, qui ſoient rectangles: car il n'y a que ces deux parallelogrammes qui ayent les ang. droicts.

Eſt icy à noter, qu'en tout parallelogramme ſi vn ſeul angle eſt dõné droict, il eſt neceſſaire que les trois autres ſoient auſſi droicts: comme ſi l'angle E du parallelogramme EFGH eſt droict: ie dis que les trois autres F, G, H, ſont auſſi droicts.



Car d'autant que les lignes EF, GH sont parallelles les angles internes E & H sont egaux à deux droicts par la 29. p. 1. Mais si l'angle E est droict par l'hypothese: l'angle H sera donc aussi droict: & par la 34. p. 1. leurs oppofez G & F seront aussi droicts. Parquoy Euclide dit tout parallelog. estre contenu sous deux lignes droictes, qui comprennent vn seul angle droict; tellement que le parallelog. rectangle EFGH, sera dict estre contenu sous les deux lignes droictes EF, EH: ou sous les deux EF, FG: ou sous FG, GH: ou finalement sous GH, HE: ainsi deux lignes expriment toute la magnitude d'vn parallelograme rectangle: sçauoir l'vne comme EF, ou HG, sa longueur, & l'autre comme EH, ou FG, sa largeur: & par le mouuement imaginaire de l'vne de ces deux lignes en l'autre, se faict iceluy parallelogramme. Car si l'esprit conçoit que la ligne EF, en allant en bas au long de la ligne EH, se meuue en trauers, tellement qu'elle face touſiours angle droict auec icelle EH, iuſques à ce que le poinct E paruienne au poinct H, & le poinct F, au poinct G: ſera deſcrit tout le parallelog. rectangle EFGH. Le meſme ſera faict, ſi on poſe EH ſe mouuoir en trauers, ſelon la ligne EF. D'où aduient que ſi EF eſt de 5. pieds, & l'autre coſté EH de trois: ſi on multiplie vn nombre par l'autre, ſera produit 15. pieds quarrez, pour l'aire ou contenu de tout le parallelogramme. Pareillement au rectangle ABCD, le coſté AB eſtant de 3. pieds, & le coſté AD auſſi de trois pieds: multipliant l'vn par l'autre, ſeront produits neuf pieds quarrez pour l'aire d'iceluy rectangle, comme monſtre la figure cy deſſus.

Et eſt icy à noter, qu'en ce ſecond liure, & és autres ſuiuans, Euclide appelle les parallelog. rectangles, ſimplement rectangles: ce que obſeruent auſſi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut touſiours entendre parallelogramme rectangle.

2. En tout parallelogramme, l'vn des parallelogramme descrits a l'entour du diametre, auec les deux supplemés, est appellé Gnomon.

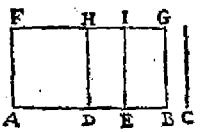
Au parallelogramme ABCD, (en la figure de la 4. proposition de ce liure) soit menée de la diagonale BC; & EF parallele à AC couppant la diagonale en I; & par iceluy poinct I soit menée GH *parallele à AB: & le parallelogramme sera diuisé en 4. parallelog. deux desquels* EG, *& HF sont dicts estre descrits à l'entour du diametre ou diagonale, mais les autres deux sont appellez supplemens. Or la figure composée d'iceux supplemens & de l'vn ou l'autre des parallelogrammes d'alentour la diagonale, sera dicte* Gnomon, *comme la figure FACDHI, ou* EDBAGI.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si de deux lignes droictes l'vne est couppée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle compris des deux toutes, est egal au rectangle de la non couppée, & d'vne chacune partie de celle qui est couppée.

Soient deux lignes AB & C, dont la premiere AB est coupée à l'aduanture en plusieurs parties, sçauoir est en AD, DE, EB. Ie dis que le rectangle compris des deux lignes AB, & C,

sera egal aux trois rectangles compris de la ligne C & d'vne chacune partie de A B.



Qu'il ne soit ainsi: Qu'on meine A F perpendiculaire à A B par la 11. propo. 1. laquelle soit faite egale à C, & du poinct F soit menée F G parallele à A B; & B G parallele à A F par la 31. prop. 1. Il est euident que le rectangle A G sera compris des deux lignes données A B & C, puis que A F est egale à C. Item soient menées les deux lignes D H, & E I paralleles à A F par la 31. prop. 1. Donc les trois parallelogrammes A H, D I, E G, seront rectangles compris des lignes A F, D H, E I, & des trois segmens A D, D E, E B, c'est à dire de la ligne C, & d'iceux trois segmens. Mais iceux trois parallelogrammes rectangles ensemble, conuiennent au rectangle A G, compris des lignes données: & par la 8. commune sent. ils luy sont egaux. Parquoy si de deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

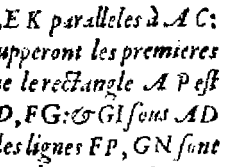
Ce qu'Euclide propose en lignes aux dix premiers Theoremes de ce second liure, nous l'auons appliqué & demonstré en nombres au Scholie de la 14. prop. 9.

Commandin demonstre icy deux autres Theoremes qui ensuiuent.

S'il y a deux lignes droictes, l'vne & l'autre desquelles soit couppée en tant de parties qu'on voudra; le rectangle compris d'icelles deux lignes, est egal aux rectangles contenus de chasque segment de l'vne, & d'vn chacun des segmens de l'autre.

Soient deux lignes droictes A B, A C contenant vn angle

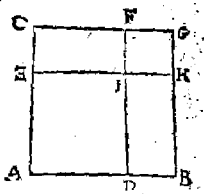
droict A: & A B soit couppée és poincts D & E, mais AC és poincts F & G. Ie dis que le rectangle contenu sous A B, AC, est egal aux rectangles compris de chasques parties A D, D E, E B & d'vn chacun segment A F, FG, GC, c'est à dire egal aux rectangles contenus de A D, AF; A D, FG; AD, GC: DE, AF, DE, FG; DE, GC: EB, AF; EB, FG; EB, GC. Car estãt accõply le rectangle A H, soient tirées DI, E K paralleles à A C: item FM, GL paralleles à A B, qui coupperont les premieres és poincts P, Q, N, O. Veu donc que le rectangle A P est contenu sous AD, AF: & FN sous AD, FG: & GI sous AD GC, (pource que par la 34. propoſit. 1. des lignes FP, GN sont egales à icelle A D.) Item que les rectangles D Q, P O, N K, sont contenus sous DE, AF: DE, FG: DE, GC: (car D P, PN, NI sont egales à icelles AF, FG, GC, & P Q, N O, à icelle DE, par la 34 propoſit. 1.) Et par meſme raison les rectangles EM, QL, OH, sont compris sous EB, AF: EB, FG: EB, GC. Il est evident que le rectangle contenu sous A B, AC, est egal aux rectangles compris sous chasques parties AD, DE, E B, & vn chacun des segmens A F, F G, G C: ce qui estoit proposé.



S'il y a deux lignes droictes couppées comme on voudra; le rectangle compris sous icelles, auec celuy compris sous vne partie de l'vne d'icelles lignes, & vne partie de l'autre, est egal aux rectangles contenus sous les lignes totales & les susdites parties reciproquement, auec le rectangle contenu des deux autres parties.

Soient deux lignes droictes AB, AC, faisant l'angle droict A, lesquelles soient couppées comme on voudra en D & E. Ie dis que le rectangle compris sous A B, A C, auec celuy compris sous les parties AD, EC, est egal aux rectangles con-

tenus sous AB, EC: AC, AD: DB, AE. Car ayant accomply le rectangle AG, *soit menée* DF *parallele à AC; & EH à AB, s'entrecoupp ans en I. Veu donc que le rectangle* AG *est egal aux rectangles* EG, *AI, DH: si on leur adiouste le commun rectangle* EF *: les rectangles AG, EF, qui sont compris sous les toutes AB, AC, & les parties AD, EC, seront egaux aux rectangles* EG, AF, *DH, compris sous AB, EC: AC, AD; DB, AE: ce qui estoit proposé.*



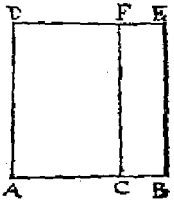
COROLLAIRE.

Par ce que dessus est manifeste que s'il y a deux lignes droictes, l'vne & l'autre desquelles soit couppée comme on voudra, le rectangle compris soubs icelles sera egal au rectang. cõpris soubs l'vne toralle, & vn segmen de l'autre, & aux deux rectangles contenus de l'autre segmen de ceste-cy, & d'vn chacun segmen de celle-là. Car le rectangle AG, *qui est compris des deux toutes AB, AC est egal au rectangle* EG, *contenu de la toute EH, c'est à dire AB, & du segmen EC, & aux deux rectang. AI, DH, compris de l'autre segmen AE, & des segmens AD, DB: Iceluy rectangle AG, est aussi egal aux trois rectangles AH,* EF, IG. *Pareillement aux trois* AF, DH, IG, *comme aussi aux trois autres* DG, AI, EF.

THEOR. 2. PROP. *11.*

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra : les rectangles compris

de la toute & d'vne chaſcune partie, ſont egaux au quarré de la toute.



Soit la ligne droicte AB, couppée en deux parties telles qu'on voudra au poinct C. Ie dis que le rectangle de la toute AB & de la partie AC, auec le rectangle de la toute AB, & de l'autre partie CB, ſont egaux au quarré de la toute AB.

Qu'il ne ſoit ainſi. Sur AB ſoit deſcrit le quarré AE; puis de C ſoit menée CF parallele à AD, laquelle CF ſera egale à icelle AD, c'eſt à dire à AB: car icelles AD, AB ſont egales par la def. du quarré. Il eſt donc euident que les deux rectangles AF, & CE, ſont compris de la toute AB, ou ſon egale CF, & des deux parties AC & CB; & ſi ils conuiennent auec le quarré AE, & par conſequent luy ſont egaux. Si donc vne ligne droicte eſt couppée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

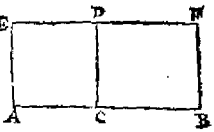
SCHOLIE.

Encore qu'en ce theoreme Euclide propoſe d'vne ligne diuiſée en deux parties ſeulement, ſi eſt-ce toutesfois qu'en la meſme maniere ſera demonſtré le meſme, ſi la ligne eſt diuiſée en tant de parties qu'on voudra. Sera auſſi demonſtré comme deſſus que ſi vne ligne droicte eſt couppée en tant de parties qu'on voudra: le quarré de la toute eſt egal aux rectangles contenus ſoubs chaſques ſegmens & vn chaſcun ſegment.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droicte est couppée comme on voudra; le rectangle compris de la toute, & de l'vne des parties, est egal au rectangle compris des parties, & au quarré d'icelle partie premierement prise.

Soit la ligne droicte A B couppée à l'aduenture au poinct C. Ie dis que le rectangle compris de la totale A B, & de l'vne ou l'autre partie, comme A C, est egal aux deux rectangles compris des deux parties A C, & C B, & au quarré de la partie A C, laquelle auoit esté premierement prise.

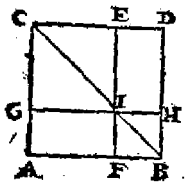


Qu'il ne soit ainsi: Sur la partie A C soit fait le quarré A D par la 46. prop. 1. Item soit menée B F parallele à C D par la 31. p. 1. rencontrant E D, prolongée en F. Il est donc euident que A D est le quarré de A C; & C F le rectangle de A C & C B; (car C D est egal à A C par la definition du quarré) & A F le rectangle de A B & A C, partie sur laquelle a esté fait le quarré. Or le quarré A D, & le rectangle C F ensemble, conuiennent auec le rectangle A F; & par consequent egaux à iceluy. Si donc vne ligne droicte est couppée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR.

THEO. 4. PROP. IIII.

Si vne ligne droicte eſt coupee comme on voudra; le quarré de la toute eſt egal aux deux quarrez des deux parties, & à deux fois le rectangle d'icelles parties.



Soit la ligne donnee AB, coupee comme on voudra au poinct F. Ie dis que les deux quarrez deſcrits ſur les parties AF & FB, auec deux fois le rectangle d'icelles AF & FB, ſont egaux au quarré de la totalle AB.

Qu'ainſi ne ſoit. Sur la ligne totale AB ſoit deſcrit le quarré AD; & apres auoir mené la diagonalle BC: & du poinct F, la ligne droicte FE parallele à AC, couppant la diagonalle BC en I, & derechef par iceluy poinct I ſoit menee GH parallele à AB, le tout par la 31. pr. 1. ie dis premierement que HF, & EG ſont quarrez.

Car deſia il apert qu'ils ſont parallelogrammes, eſtans deſcrits entre lignes paralleles. Item puis que AD eſt quarré, les deux coſtez AB & AC ſeront egaux, & le triangle ABC eſt Iſoſcele. & par la 5. pr. 1. les deux angles ſur la baſe BC, ſçauoir eſt ABC & ACB ſeront egaux. Pareillement la ligne BC tombant ſur les deux paralleles AC & FE fera l'angle exterieur FIB egal à l'oppoſé interieur ACB par la 29. propoſ. 1. lequel eſtant egal à ABC par

la 1. com. sent. ABC & FIB seront egaux, & par la 6. pr. 1. les deux costez BF & FI seront egaux: & par la 34. prop. 1. le parallelogramme HF, aura les quatre costez egaux: & partant il sera quarré; car l'angle FBH estant droict, les trois autres seront aussi droicts, comme nous auons demonstré à la 1. def. de ce liure. Par mesme discours on monstrera GE estre aussi quarré. Maintenant d'autant que AI & ID sont descrits entre lignes paralleles, & les angles A & D sont droicts, il appert qu'ils sont parallelogrammes rectangles, & egaux entr'eux par la 43. propos. 1. & sont compris des deux parties AF, FB, estant EI egale à AF, & HI, IF à FB par la 34. prop. 1. & def. du quarré. Partant AI & ID sont deux fois le rectangle de AF & FB, lesquels auec les deux quarrez FH & GE conuiennent auec le quarré total AD, & par la 8. comm. sent. ils luy seront egaux. Si donc vne ligne droicte est couppee comme on voudra, le quarré de la toute est egal, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par ce que dessus, que les parallelogrammes descrits à l'entour de la diagonalle d'vn quarré, sont quarrez. Et aussi que la diagonalle coupe en deux egalement les angles du quarré.

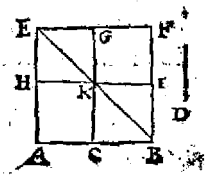
SCHOLIE.

Clauius demonstre en ce lieu le theoreme suiuant.

Si vne ligne droicte est double d'vne autre, le quarré de celle-là est quadruple du quarré de ceste-

cy: & si vn quarré est quadruple d'vn autre quarré: le costé de celuy-là est double du costé de cestuy-cy.

Soient deux lignes droictes AB *&* D, *desquelles* AB *est double de* D. *Ie dis que le quarré de* AB *est quadruple du quarré de* D. *Car ayant diuisé* AB *en deux egalement en* C, *& fait telle construction qu'en ceste 4. prop. il est euident que les 4. parallelogrammes* AK, CI, HG, KF, *seront quarrez & egaux entr'eux. Mais le quarrez* AF *est egal à iceux quatre quarrez: donc le quarré de* AB *sera quadruple du quarré de* AC, *c'est à dire de* D, *qui luy est egale: car* AB *est double de l'vne & de l'autre.*

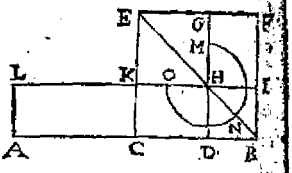


Pour la seconde partie: Soit le quarré de AB *quadruple du quarré de* D. *Ie dis que* AB *est double de* D. *Car* AB *estant couppée en deux egalement en* C, *le quarré de* AB *sera quadruple du quarré de* AC, *comme il a esté demonstré cy dessus. Mais le quarré de* AB *a esté posé aussi quadruple du quarré de* D: *donc les quarrez des lignes* AC *&* D *sont egaux, & partant icelles lignes* AC *&* D *aussi egales. Mais* AB *est double de* AC, *donc aussi double de* D.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte est couppée en deux parties egales, & en deux inegales: le rectangle des deux parties inegales, auec le quarré de la section du milieu, sont egaux au quarré de la moitié de la toute.

Soit la ligne donnee A B couppee en deux parties egales au poinct C, & en deux inegales au poinct D. Ie dis que le rectangle compris des deux parties inegales A D, & D B, auec le quarré de la section du milieu C D, sont egaux au quarré de la moitié C B.



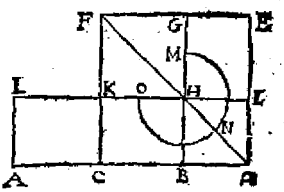
Car sur la ligne CB, soit descrit le quarré CF par la 46. prop. 1. & apres auoir mené D G parallele à B F, soit menee la diagonalle B E coupant D G au poinct H, par lequel soit mené I K L parallele à A B, puis A L parallele à D H, coüppant K L en L. Donc par le corol. de la preced. prop. D I, K G seront quarrez; & partant la ligne D H egale à la ligne DB: & par la 34. prop. 1. KH est aussi egale à CD: parquoy le rectangle AH est compris des deux segmens A D, D B; & K G sera quarré de la section du milieu CD. Il faut donc prouuer que le rectangle AH, auec le quarré KG est egal au quarré CF, faict sur la ligne CB, moitié de la toute AB.

Or le rectangle A K est egal au rectangle C I par la 36. prop. 1. d'autant qu'ils sont sur bases egales AC & CB, & entre mesmes paralleles A B & LI. Pareillement les supplemens CH, & H F sont egaux par la 43. p. 1. ausquels si on adiouste le quarré cõmun DI, les touts CI, & DF seront egaux: & par la 1. com. sent. DF sera egal à A K, ausquels si on adiouste aussi le supplement commun C H, le gnomon ONM sera egal au rectangle A H. Mais iceluy gnomon & le quarré K G conuiennent auec le quarré F, & partant sont egaux par la 8. com. sent. Dona

aussi le rectangle A H, & le quarré K G seront egaux au quarré C F par la 1. com. sent. Parquoy si vne ligne droicte est couppée en deux parties egales, & en deux inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte est couppee en deux parties egales, & on luy adjouste directement quelque autre ligne droicte : le rectangle de la toute & de l'adjoustee comme d'vne, & de l'adjoustée, auec le quarré de la moitié, est egal au quarré qui est faict de la moitié & de l'adjoustee comme d'vne.

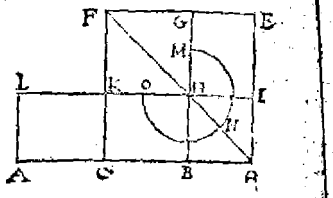


Soit la ligne droicte AB coupee en deux egalement au poinct C ; & à icelle soit adiousteé directement B D. Ie dis que le rectangle compris de la totalle AD, & de l'adiousteé BD, auec le quarré de la moitié CB, est egal au quarré de la ligne CD.

Qu'ainsi ne soit : sur la ligne CD soit deserit le quarré C E auec sa diagonalle D F, & apres auoir mené B G parallele à D E, laquelle couppera la diagonalle au poinct H : par iceluy poinct H soit menee I K L parallele à A D par la 31. propos. 1.

Item AL parallele à DI, rencontrant IL en L.

Premierement le rectangle AI eſt compris de la toute & adiouſtee comme d'vne AD, & de l'adiouſtee DI (car icelle DI eſt egale à l'adiouſtee BD, eſtant BI quarré par le corol. de la 4. p. de ce liure.) Item KG, qui eſt quarré par le meſme corol. eſt faict ſur HK egal à la moitié CB par la 34. prop. 1. Ie dis donc que le rectangle AI, & le quarré KG ſont egaux au quarré CE.

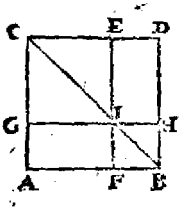


Car les deux ſupplemens CH, & HE eſtãs egaux par la 43. prop. 1. Item les deux rectangles AK, & CH auſſi egaux par la 36. prop. 1. d'autant qu'ils ſont ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles, & par la 1. com. ſent. AK ſera egal à HE, & en adiouſtant à chacun d'iceux le rectangle commun CI, le Gnomon MNO ſera egal au rectangle AI. Mais iceluy Gnomon auec le quarré KG ſont egaux au quarré CE: donc le rectangle AI auec le quarré KG ſera egal au meſme quarré CE. Parquoy ſi vne ligne droicte eſt coupee en deux parties egales, & on luy adiouſte directemẽt quelque autre ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra: le quarré de la toute & le quarré de l'vne des parties, ſont egaux au quarré de l'autre partie, &

deux fois le rectangle compris de la totalle, & de la partie premierement prise.



Soit la ligne A B couppee comme on voudra au poinct F. Ie dis que les deux quarrez de la totalle A B, & de la partie A F, sont egaux au quarré de l'autre partie F B, & au rectaugle deux fois, de A B, A F.

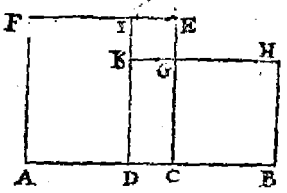
Qu'il ne soit ainsi: sur A B soit descrit le quarré AD auec sa diagonalle B C, & apres auoir mené du poinct F, FE parallele à A C, laquelle couppera la diagonalle BC au poinct I: d'iceluy poinct soit menee GH parallele à AB par la 31. prop. 1. Donc FH & GE seront quarrez par le cor. de la 4. pr. de ce liu. & puis que par la 34. pr. 1. G I est egale à AF; GE sera quarré du segm. AF. Derechef pour ce que A C est egale à AB, le rectangle AE sera cõpris sous la toute AB, & le segm. AF. Par mesme raison le rectangle GD sera compris sous les mesmes lignes A B, AF: (car C D, CG sont egales à A B, A F, à cause des quarrez A D, GE.) Veu donc que les rectangles AE, ID, auec le quarré F H sont esgaux au quarré A D; si on leur appose le commun quarré EG, les quarrez AD, EG seront egaux aux rectangles AE, GD, (chacun desquels est compris de la toute AB & de la partie A F) auec le quarré F H: parquoy si vne ligne droicte est couppee comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Commandin demonstre en ce lieu le theoreme suiuant.

Si vne ligne droicte est coupee en deux parties inegales; les quarrez d'icelles parties sont egaux au rectangle contenu deux fois sous icelles parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excede la moindre.

Soit la ligne droicte AB couppee en deux parties inegales, AC, CB, desquelles AC est la plus grande, & d'icelle AC soit prise AD egale à BC, afin que DC soit l'excez de la partie AC par dessus BC. Ie dis que les quarrez des parties AC, CB, sont egaux au rectangle contenu deux fois sous AC, CB, & au quarré de DC.



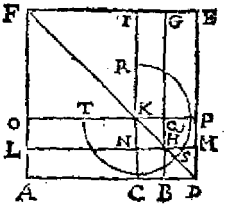
Car soient construits les quarrez AE, CH, & mené DI parallele à CE: puis prolongé HG iusques à ce qu'elle rencontre DI en K. or d'autant que les lignes BC, AD *sont egales, leur adiouſtant la commune DC, la toute* AC, *c'est à dire CE, sera égale à la toute* DB. *Mais* CG *est auſsi egale à* CB: *donc auſsi le reste* GE *sera egal au reste DC: & partant puis qu'auſsi IE est egale à DC par la 34. prop. 1.* GE, IE *seront egales: & partant* IG *sera le quarré de l'excez DC. Et d'autant que les rectangles* AI, DH *sont contenus sous les parties* AC, CB; (*car* AC *est egale à l'vne & à l'autre ligne* AF, DB: CB *à l'vne & à l'autre* AD, BH.) *Il est manifeſte que les quarrez* AE, CH, *des parties* AC, CB *sont egaux aux rectangles* AI, DH, *qui sont contenus sous les parties* AC, CB, *& à* IG *quarré de l'excez* DC: *Ce qui estoit proposé.*

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si vne ligne droicte est couppee comme on voudra: quatre fois le rectan-

gle compris de la toute & de l'vne des parties, auec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré de la toute, & d'icelle partie premierement prise comme d'vne seule ligne.

Soit la ligne donnée AB couppée comme on voudra au poinct C. Ie dis que quatre fois le rectangle, compris de AB & de l'vn ou l'autre segment, sçauoir BC, c'est à dire de AB, & BD, (si apres auoir prolongé la ligne AB, on faict BD egale à BC) auec le quarré de AC sont egaux au quarré de AD composée de la totale AB, & de la partie BC.



Qu'il ne soit ainsi: sur AD soit faict le quarré AE auec sa diagonale FD, & des deux poincts B & C, soient menées BG & CI paralleles à DE. Item des poincts H & K, ausquels elles coupent la diagonale FD, soient menées LM & OP paralleles à AD, par la 31. p. 1. lesquelles coupent les premieres paralleles en N, & Q.

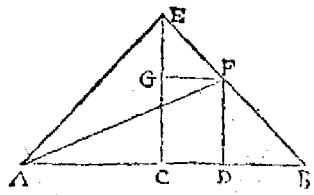
Premierement par ce qui resulte de la 4. p. de ce liure, les rectangles OI, NQ, BM, au long de la diagonalle seront quarrez. Item d'autant que CB est egale à BD; CH, & BM, seront egaux, & quarrez: (estãt l'vn d'iceux quarré) pareillement NQ & HP aussi egaux quarrez; ainsi les quatre CH, BM, NQ, HP, seront quarrez, & egaux: & par la 43. p 1. les deux supplemẽs. IK & KG seõt aussi egaux entr'eux, & par la 36. p. 1. LK est egal à AN; & KG à QE: & par consequẽt iceux quatre rectangles sont aussi egaux entr'eux,

Mais comme aux precedentes il eſt euident que AH eſt vne fois le rectangle de AB & BH, (egale à BD) qui eſt vn des quatre rectangles auec vn des quatre petits quarrez egaux : donc iceux quatre rectangles auec iceux quatre quarrez faiſant le Gnomon RST, ſeront egaux à quatre fois le rectangle de AB & BD, lequel Gnomon auec le quarré de OK, (egale à AC par la 34. p. 1.) ſçauoir eſt OI, conuiennent auec le quarré AE ; & partant par la 8. com. ſent. ils luy ſeront egaux : Si donc vne ligne droite eſt couppée comme on voudra, quatre fois le rectang. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Si vne ligne droite eſt couppée en deux parties egales, & en deux inegales : les quarrez des parties inegales ſeront doubles des quarrez de la moitié, & de la ſection du milieu.

Soit la ligne donnée AB couppée en deux egalement au poinct C, & en deux inegalement en D. Ie dis que les quarrez de AD & DB parties inegales, ſont doubles des quarrez de AC moitié, & de CD partie du milieu.



Qu'il ne ſoit ainſi : au poinct C ſoit leuée la perpendiculaire CE, qu'on fera egale à CA ;

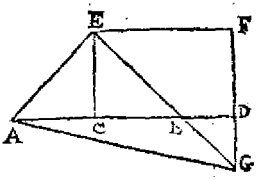
& apres auoir mené AE, & BE, soit leuée la perpendiculaire DF, couppant BE en F, duquel poinct soit menée FG parallele à AB, couppant CE en G: & finalement soit menée AF.

Premierement, les triangles ACE, & ECB seront Isosceles, & feront les angles sur les bases AE, & EB egaux par la 5. p. 1. (sçauoir GEF, à FBD, & demy droicts par la 32. p. 1. estant l'angle ECB droit pour estre CE perpendiculaire. Item FDB estant droict, & DBF demy droict, aussi par la 32. p. 1. DFB sera demy droict, & par la 6. p. 1 les costez DB, & DF, du triangle BDF, seront egaux entr'eux. Par le mesme discours sera demonstré que les costez GF, GE du triangle FGE, sont egaux entr'eux. Item il est euident que l'angle AEB sera droict, estant composé des deux demy droicts AEC, BEC.

Maintenant par la 47. p. 1. au triangle rectangle ACE. le quarré de AE, costé qui soustient l'angle droict, est double du quarré de AC, estant egal à tous les deux de AC, & CE. Par mesme discours, le quarré de EF est double du quarré de GF, ou CD son eg. par la 34. p. 1. partant les deux quarrez de AE & EF, seront doubles des deux de AC, & CD. Pareillement le quarré de AF estant egal aux deux de AE, & EF par la 47. p. 1. iceluy sera double des deux de AC, & CD. Mais par la mesme 47. p. 1. le quarré de AF, est egal aux deux de AD, & DF, ou DB son egale: donc les deux quarrez de AD & DB seront doubles des deux de AC, & CD. Si donc vne ligne droicte est couppée en deux parties egales, & en deux inegales; les quarrez des parties inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEO. 10. PROP. X.

Si vne ligne droite est couppée en deux parties egales, & on luy adjouste directemẽt quelque autre ligne droite; le quarré de la toute auec l'adjoustée comme d'vne, & le quarré de l'adjoustée, sont doubles des quarrez de la moitié, & de celle qui est faicte de la moitié, & de l'adioustée comme d'vne.



Soit la ligne droite AB couppée en deux egalement au poinct C, à laquelle soit adioustée directement BD. Ie dis que les quarrez de AD & BD, sont doubles des quarrez de AC, & CD.

Qu'ainsi ne soit, au poinct C soit leuée la perpendiculaire CE par la 11. p. 1. egale à AC: & apres auoir mené les deux lignes AE & EB, soient menées par la 31. p. 1. EF parallele à CD, & DF à CE se rencontrant en F, & soient continuées EB, & FD iusques à ce qu'elles se coupent au poinct G. Finalement soit tirée la ligne AG.

Premierement puis que AC & CE sont egaux, aussi par la 5. p. 1. les angles EAC, & CEA sont egaux & demy droicts par la 32. p. 1. estant l'angle ACE droit. Par mesme discours, les angles CBE & BEC se-

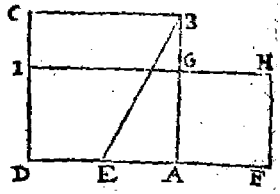
ront auſſi demy droicts, & l'angle AEB droict, eſtant compoſé de deux demy droicts. Item par la 15. p. 1. l'angle DBG ſera egal à CBE, & demy droict; & les deux lignes CD & EF eſtans paralleles, par la 29. p. 1. l'angle interieur de meſme coſté BEF ſera auſſi demy droict; & l'angle F eſtant droict par la 34. p. 1. car il eſt oppoſé à vn droict, BGD ſera demy droict par la 32. p. 1. & par la 6. p. 1. les triangles EGF, & BDG ſeront Iſoſceles rectangles; & CF parallelogrãme rectangle.

Maintenant par la 47. p. 1. le quarré de AE, coſté qui ſouſtient l'angle droict C, eſt egal aux deux quarrez des deux autres coſtez AC, CE; partant double du quarré de AC. Par meſme diſcours EG ſe trouuera double du quarré de EF, ou de CD, qui luy eſt egale par la 34. p. 1. ainſi les deux quarrez de AE, & EG, ou le ſeul de AG qui leur eſt egal par la 47. p. 1. ſera double des deux de AC & CD. Mais par la meſme 47. p. 1. il eſt egal au deux quarrez de AD & DG, ou BD ſon egal; & par conſequent les deux quarrez de AD & BD, ſeront doubles des deux de AC & DC. Si donc vne ligne droite eſt couppée en deux parties egales, & on luy adjouſte directement quelque autre ligne droite, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL. 1. PROP. XI.

Coupper vne ligne droite donnée, tellement que le rectangle de la toute, & de l'vne des parties, ſoit egal au quarré de l'autre.

Soit la ligne droicte donnée AB, laquelle il faut diuiſer ſelon le requis de la prop.



Apres auoir cõſtruit ſur icelle AB le quarré AC, ſoit diuiſée AD en deux egalement au poinct E, & apres auoir mené EB, & prolongé EA vers F, tellement que EF ſoit egale à EB, ſur AF ſoit faict le quarré AH; & ſoit continuée HG iuſques en I. Ie dis que la ligne AB eſt couppée au poinct G, en ſorte que le rectangle CG compris de BC egale à BA, & de BG partie de BA, eſt egal au quarré de l'autre partie AG, ſçauoir à GF.

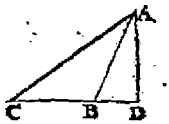
Car la ligne AD eſtant couppée en deux egalement en E, & on luy adjouſte directement AF, le quarré de la moitié & de l'adjouſtée comme d'vne, ſçauoir EF, ou de ſon egale EB, eſt egal au rectang. de DF, AF, & au quarré de AE par la 6. p. de ce liure. Mais le quarré de EB eſt egal aux deux de BA, & AE par la 47. p. 1. ainſi les deux quarrez de BA, & AE ſeront egaux au rectangle de DF, AF, & au quarré de AE: oſtans donc le quarré de AE commun, les demeurans quarré de AB, ſçauoir AC, & le rectangle de DF, AF, ſçauoir FI, ſeront egaux, deſquels AC & FI, ſi on oſte le rectangle commun AI; le demeurant quarré FG, ſera egal au demeurant rectangle GC. Parquoy nous auons couppé la ligne droicte AB en G, tellement que le rectangle d'icelle & de la partie GB, eſt egal au quarré de l'autre partie AG: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous auons enſeigné en nos memoires Mathematiques prob. 72. à couper vne ligne droicte, non ſeulement comme enſeigne icy Euclide, mais auſſi en ſorte que le rectangle de la toute, & de l'vne des parties ſoit double, ou triple, ou quadruple, &c. ou moitié, ou tiers, ou quart, &c. du quarré de l'autre partie: bref qu'icelny rectangle ſoit au quarré, ſelon quelconque raiſon donnée.

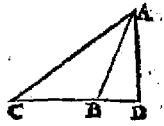
THEOR. 11. PROPOS. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle obtus, eſt plus grand que les quarrez des deux autres coſtez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris du coſté contenant l'angle obtus, ſçauoir celuy ſur lequel eſtant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne priſe dehors entre la perpendiculaire, & l'angle obtus.



Soit le triangle ambligone ABC, duquel ſoit prolongé le coſté CB iuſques en D, & du poinct A ſoit menée la perpendiculaire AD par la 12. p. 1. Ie dis que le quarré du coſté AC qui ſouſtient l'angle

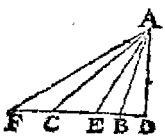
obtus ABC, est plus grand que les quarrez de AB & CB, de deux fois le rectangle de CB & BD, sçauoir CB, qui est l'vn des costez faisant l'angle obtus, celuy sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire AD, & BD prise dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire ; c'est à dire que le quarré du costé AC est egal aux deux quarrez des costez AB, BC, auec deux fois le rectangle de CB, BD.



Qu'il ne soit ainsi: Puis que la ligne CD est couppée en B, le quarré d'icelle CD sera egal aux deux quarrez de CB, BD, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD, par la 4. p. de ce liure: Adiouſtant donc le commun quarré de AD, les deux quarrez de CD, DA, seront egaux aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD. Mais par la 47. p. 1. le quarré de AC est egal aux quarrez de CD, DA: donc aussi le quarré de AC sera egal aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD. Et puis que par la 47. p. 1. le quarré de AB est egal aux quarrez de BD, DA; le quarré de AC sera egal aux quarrez de CB, AB, & à deux fois le rectangle de CB, BD. Parquoy aux triangles ambligones, le quarré du costé qui soustient l'angle obtus, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Or que la perpendiculaire tirée de A; doiue tomber sur le costé CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a prins icy Euclide, nous le demonstrerons ainsi: Soit le triangle ABC

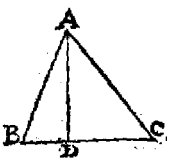


ayant

ayant l'angle B obtus, & le costé CB prolongé de la part de B. Ie dis que la perpendiculaire de A tombe hors le triangle sur le costé CB prolongé, comme est la ligne droicte AD. Car si elle tomboit dans le triangle, comme est la ligne AE, les deux angles ABE, AEB seroient plus grands que deux droicts, contre la 17. prop. 1. Mais si elle tomboit hors le triangle sur le costé BC prolongé de la part de C, comme est AF: derechef au triangle ABF, les deux angles ABF, AFB seront plus grands que deux droicts: ce qui est absurde.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, est plus petit que les quarrez des deux autres costez, de deux fois le rectangle de l'vn des costez qui font l'angle aigu, sçauoir celuy sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise au dedans entre la perpendiculaire, & l'angle aigu.



Soit le triangle ABC, ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au costé BC. Ie dis que le quarré du costé AB, qui soustient l'angle aigu C, est plus petit que les deux quarrez des deux autres costez AC, & CB de deux fois le rectangle de BC & CD: sçauoir BC, l'vn des

costez qui font l'angle aigu C, sur lequel tombe la perpendiculaire, & CD prise entre la perpendiculaire & icelny angle aigu C.

Car d'autant que la ligne BC est couppee en D, les quarrez de BC, CD, sont egaux au quarré de BD, & deux fois le rectangle de BC, CD par la 7. pr. de ce liure, ausquels si on adjouste le quarré commun de AD, les trois quarrez de BC, CD, AD, seront egaux aux deux quarrez de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC, CD. Mais les deux triangles ADB, ADC estans rectangles, le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AD, DB: & le quarré de AC aux deux quarrez de AD, DC par la 47. propos. 1. Donc les deux quarez de AC, BC seront egaux au quarré de AB, & deux fois le rectangle de BC, CD: en ostant donc iceux deux rectangles, le quarré de AB sera d'autant plus petit que les quarrez de AC, BC: ce qui estoit proposé à prouuer. On demonstrera en la mesme maniere que le quarré du costé AC, qui soustient l'angle aigu B, est plus petit que les deux quarrez des deux autres costez AB, BC, de deux fois le rectangle de CB, BD. Donc aux triangles oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

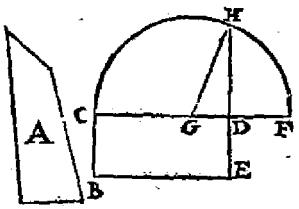
Or combien qu'Euclide propose ce theoreme des triangles oxigones seulement: toutesfois le mesme est aussi veritable és triangles rectangles & ambligones, la perpendiculaire tombant de l'angle droict ou obtus: Car il est manifeste par la 17. ou 32. prop. 1. que les deux autres angles sont aigus: & partant la perpendiculaire tombera touſiours dans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demonstration: ce qui est

auſſi facile à prouuer. Car ſi elle tomboit hors le triangle, il s'enſuiuroit qu'vn angle aigu ſeroit plus grand que le droict. Ce qui eſt abſurde.

PROBL. 2. PROP. XIIII.

Faire vn quarré egal à vne figure rectiligne donnée.

Soit donnée la figure rectiligne A, à laquelle il faut faire vn quarré egal.



Soit premierement fait le parallelogramme B D egal à la figure A; & ayant vn angle droict par la 45. propoſ. 1. puis ſoit prolongé le coſté C D iuſques en F, & fait D F egale à D E: & apres auoir couppé C F en deux egalement au poinct G, & d'iceluy poinct G & interualle G C ou G F, deſcrit le demy cercle C H F, ſoit continuée E D iuſques en H en la circonferance du demy cercle. Ie dis que le quarré de D H eſt egal à la figure rectiligne A.

Car puiſque C F eſt couppee en deux egalement au poinct G & en deux inegalement au poinct D, le rectangle de C D & D F, ſçauoir B D, auec le quarré de la ſection du milieu G D, eſt egal au quarré de la moitié G F par la 5. propoſ. de ce liure, ou de ſon egale G H, lequel eſt egal aux deux quarrez de G D & D H par la 47. propoſ. 1. Que ſi on

oſte le quarré commun de GD, le demeurant quarré de DH, ſe trouuera egal au demeurant rectangle B D : & par conſequent à la figure rectiligne donnee A. Nous auons donc trouué le coſté d'vn quarré egal à vne figure rectiligne donnee A. Ce qu'il falloit faire.

Fin du ſecond Element.

ELEMENT TROISIESME.

DEFINITIONS.

CERCLES egaux, sont ceux desquels les diametres sont egaux, ou desquels les lignes droictes menees du centre à la circonference, sont egales.

2. Vne ligne droicte est dicte toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, si elle est continuée ne le coupe point.

3. Les cercles sont dits se toucher l'vn l'autre, quand en se touchant ils ne se couppent point.

4. Les lignes droictes sont dictes estre egalement distantes du centre,

lors que les perpẽdiculaires tirees du centre sur icelles, sont egales. Mais celle est plus esloignee du centre, sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

5. Segment ou portion de cercle, que la pluspart appellent aussi section, est vne figure compriſe d'vne ligne droicte, & de la circonference du cercle.

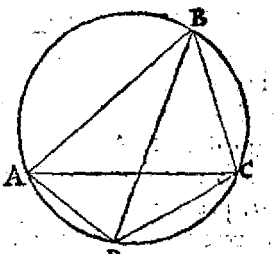
6. L'angle du segment, est celuy compris d'vne ligne droicte, & de la circonference du cercle.

7. Vn angle se dit estre en la portion, lors que sur vn poinct pris en la circonference, sont menees deux lignes droictes des deux extremitez de la ligne qui fert de base à la portion, & c'est l'angle compris d'icelles deux lignes.

8. Mais quand les lignes droictes qui comprennent l'angle embrassent quelque circonference, l'angle est dit estre ou s'appuyer sur icelle.

Euclide definit és trois precedentes definitions trois sortes d'angles qu'on considere au cercle. En la 6. il dit que l'angle mixte BAC ou BCA, contenu soubs la ligne droicte AC, & la circonference ABC s'appelle angle de la

portion. En la 7. def. il dit, que si à quelque poinct B, prins en la circonference d'vne portion ABC, sont menees deux lignes droictes AB, CB, des extremitez de la ligne droicte AC qui sert de base à la section, l'angle rectiligne ABC, sera dit estre en la portion ou segment ABC : Ainsi aussi l'angle rectiligne ADC sera dit estre en la portion ADC: mais l'angle BAC, est dit estre en la portion BAC. Et en la 8. def. Euclide dit qu'estant pris quelque poinct B, en la circonference du cercle ABCD, si on tire d'iceluy les lignes droictes BA, BC aux deux extremes A & C, de la circonference ADC, laquelle prennent icelles lignes BA, BC; l'angle rectiligne ABC sera dit estre, ou s'appuyer sur la circonference ADC: Ainsi aussi l'angle ABD sera dit s'appuyer sur la circonference AD: & l'angle BAD, sur la circonference BCD: mais l'angle BAC sur la circonference BC.

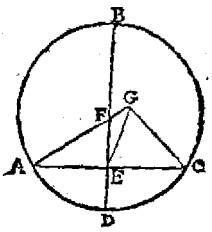


9. Secteur de cercle, est vne figure de deux lignes droictes ambrassant quelque circonference, & faisant angle au centre du cercle.

10. Semblables portions de cercle, sont celles qui reçoiuent angles egaux; ou bien esquelles les angles sont egaux entr'eux.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

Trouuer le centre d'vn cercle donné.



Soit le cercle donné A BC, duquel il faut trouuer le centre.

Soit tiree en iceluy la ligne droicte AC comme que ce soit, laquelle par la 10. & 11. prop. 1. soit couppee en deux egalement, & à droicts angles par la ligne B D, se terminant à la periphere és poincts B & D : & icelle B D estant couppee en deux egalement en F. Ie dis que F est le centre du cercle proposé.

Car en icelle ligne droicte B D, vn autre poinct que F ne sera pas le centre, veu que tout autre poinct la diuise inegalement. Si donc le poinct F n'est le centre : le poinct G hors la ligne B D soit le centre (s'il est possible) duquel soient menees les trois lignes droictes G A, GE, & GC : d'autant que si G estoit le centre, par la def. du cercle AG & GC seront egales : mais AE & EC sont aussi egales, & G E commune : donc les deux triangles GEA & G E C, ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base AG egale à la base C G, & par la 8. prop. 1. les angles A E G & CEG seront egaux : & partant droicts, & la ligne E G perpendiculaire par la 10. def. 1. Mais l'angle B E A par la construction est droict, & tous les angles droicts sont egaux par la 10. com. sent. donc les deux angles A E G & BEA seroient egaux, sçauoir le tout à sa partie ; ce

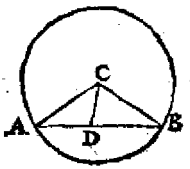
qui eſt abſurde. Donc le poinct G n'eſt pas le centre. Le meſme inconuenient ſenſuiura prenant tout autre poinct hors la ligne BD. Partant le poinct F ſera le centre du cercle ABC, requis à trouuer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que ſi au cercle vne ligne droicte couppe vne autre ligne droicte en deux egalement, & à angles droicts; le centre du cercle ſera en icelles couppante. Car il a eſté demonſtré qu'il eſt impoſſible que le centre du cercle ABC ſoit ailleurs qu'au poinct F milieu de la ligne BD, laquelle couppe la ligne AC en deux egalement, & à angles droicts en E.

THEOR. 1. PROP. 11.

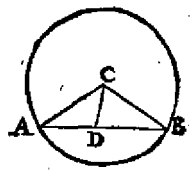
Si en la circonference d'vn cercle, on prend deux poincts comme on voudra; la ligne droicte menée de poinct à autre, tombera dãs le cercle.



En la circonference du cercle AB, dont le centre eſt C, ſoient pris deux poincts tels qu'on voudra A & B. Ie dis que la ligne droicte AB menée d'vn poinct à l'autre tombe dans iceluy cercle.

Car ſoit prins en icelle ligne droicte AB quelconque poinct comme D, entre ſes extremes A & B; puis du centre C, ſoient menées les lignes

droictes CA, CD, CB. D'autant que les deux costez AC, BC du triangle ACB sont egaux, les angles BAC, ABC, seront egaux par la 5. p. 1. Mais l'angle externe ADC est plus grand que l'angle interne ABC par la 16. p. 1. donc le mesme angle ADC sera plus grand que l'angle BAC: & partant par la 19. p. 1. le costé AC sera plus grand que le costé CD: parquoy puis que CA est tirée du centre iusques à la circonference, la ligne droicte CD ne paruiendra iusques à icelle circonference; & par consequent le poinct D tombe dans le cercle. Le mesme sera demonstré de tout autre poinct pris. Donc toute la ligne droicte AB tombe dans le cercle: Ce qu'il falloit prouuer.



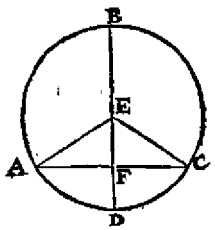
COROLLAIRE.

De cecy est manefeste, qu'vne ligne droicte touchant vn cercle, le touche seulement à vn poinct: car si elle le touchoit à deux poincts, la partie de la ligne d'entre iceux poincts tomberoit dans le cercle par ceste prop. parquoy elle couperoit le cercle, contre l'hypothese.

THEOR. 2. PROP. III.

Si dans le cercle, quelque ligne droicte passe par le centre, & coupe en deux egalement vne autre ligne droicte, ne passant point par le centre; elle la coupperà à droicts angles: & si elle la couppe à droicts angles, elle la couppera aussi en deux egalement.

Au cercle ABCD soit la ligne droicte B D, laquelle passant par le centre E, coupe en deux egalement la ligne droicte AC, laquelle ne passe point par le centre; ie dis que B D couppe aussi AC en angles droits au poinct F.

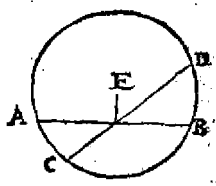


Car estans menées les deux lignes CE & AE, les deux triangles AEF, CEF, auront les deux costez AF, FE, egaux aux deux costez CF, EF, chacun au sien, & la base AE egale à la base EC; & par la 8. p. 1. les deux angles au poinct F seront egaux, & partant droicts par la 10. def. 1.

Ie dis pareillement que si BD couppe AC à angl. droicts au poinct F; qu'elle la couppera aussi en deux egalement. Car les deux angles au poinct F estans droicts, ils seront egaux, & l'angle A est egal à l'angle C par la 5. p. 1. estant AEC triangle Isoscelle, & le costé EF commun aux deux triangles AEF, CEF, & par la 26. p. 1. AF sera egale à CF. Parquoy si dans le cercle quelque ligne droicte passe par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. IIII.

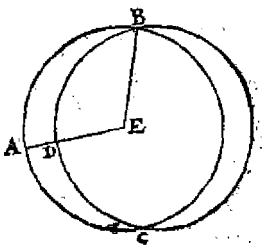
Si dans le cercle, deux lignes droictes ne passans point par le centre, s'entrecoupent; elles ne se couperont point l'vne l'autre en deux egalement.



Au cercle ACBD, duquel le centre eſt E, ſoient deux lignes droictes AB & CD ſ'entrecoupans au poinct F, & deſquelles ny l'vne ny l'autre ne paſſe par le centre E. Ie dis que l'vne ou l'autre eſt couppée inegalement. Car du centre E eſtant menée la ligne EF; ſi icelles lignes AB, CD ſe coupent en deux egalement au poinct F, EF les couppera au meſme poinct auſſi en deux egalement, & à droicts angles par la prop. preced. & les angles AFE, EFB ſeront droits, & egaux à CFE, EFD auſſi droits, & egaux: ce qui eſt impoſſible, n'eſtant AFE que partie de CFE: ainſi les lignes AB, CD ne ſe coupoient pas en deux egalement. Parquoy ſi dans le cercle deux lignes droictes ne paſſant poinct par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. V.

Si deux cercles ſe coupent l'vn l'autre, ils n'auront pas meſme centre.



Soient les deux cercles ABC, BCD ſe coupans l'vn l'autre en B & C. Ie dis qu'ils ne ſçauroient auoir vn meſme centre.

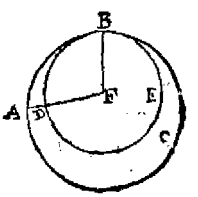
Car s'il eſt poſſible, ſoit leur centre commun E, duquel ſoient tirées deux lignes droictes: ſça-

noir EB à la section B: Mais EA couppans l'vne & l'autre circonference en A & D. Donc puis que E est posé centre du cercle BCD, la ligne droicte ED sera egale à la ligne droicte EB par la 15.d.1. Derechef, puis que E est aussi posé centre du cercle ABC, la ligne droicte EA sera aussi egale à la mesme ligne EB, & par la 1.com.sent. ED, EA seront egales entr'elles, la partie au tout; ce qui est impossible: partant les deux cercles ne pouuoient auoir vn mesme centre. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 5. PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans, ils n'auront pas mesme centre

Soient les deux cercles ABC, & DBE se touchans l'vn l'autre au dedans en B. Ie dis qu'ils n'auront pas mesme centre.



Car s'il est possible, soit leur centre commun F, & d'iceluy soient menées les deux lignes FA & FB: sçauoir est FB à l'attouchement B; & FA, couppāt l'vn & l'autre cercle en D, A; il est euidāt que la mesme absurdité aduiendra qu'en la precedente; sçauoir que FA, FD, seroient egales la partie au tout: donc F ne pouuoit estre centre cōmun des cercles s'entretouchans interieurement en B. Ce qu'il falloit demonstrer.

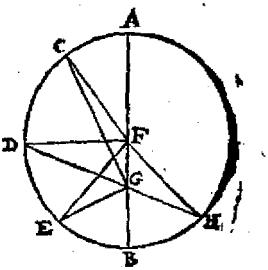
SCHOLIE.

Euclide a proposé ce theoreme des cercles s'entre-touchans seulement au dedans, d'autant que des cercles qui se touchent par dehors, il appert assez que leurs centres sont diuers: veu qu'vn des cercles est dehors l'autre, & le centre est tousiours au milieu de son cercle. Ce que Dounot pounoit icy remarquer, & non pas faire la prop. generale, comme il a faict contre l'intention d'Euclide, laquelle il a changée en plusieurs endroicts de ce liure, soit où en changeant les mots dont il a vsé pour s'exprimer, ou en les retranchant, ou y adjoustant: Comme pour exemple, en la prop. suiuante, au lieu qu'il y a selon Euclide qui est menée par le centre, *Dounot luy faict dire*, qui couppe le centre: *chose absurde, puis que par les def. le centre du cercle est vn poinct lequel est indiuisible: Il faict encore la mesme faute à la 19. p. 3. & en la 8. de ce mesme liure il a retranché ces mots*, Desquelles l'vne passe par le centre, & les autres où l'on voudra. *Et au lieu que ceste prop. ne contient que 5. parties, il en a adjousté vne à la demonstration: sçauoir est celle qu'il faict la tierce. Item il a retranché les deux dernieres parties de la 31. p. de ce mesme liure,*

THEOR. 6. PROP. VII.

Si au diametre du cercle se prend quelque poinct qui ne soit pas le centre, & d'iceluy poinct tombent quelques lignes droictes en la circonferẽce, la plus grande sera celle en laquelle est le centre, & la plus petite celle qui reste: Mais des autres tousiours la plus proche de celle

qui eſt menée par le centre, eſt plus grande que la plus eſloignée: Et deux lignes droictes tant ſeulement venans d'iceluy poinct de part & d'autre du diametre, ſont egales.



Au diametre AB du cercle ACDEB, duquel le centre eſt F, ſoit pris quelque poinct G outre le cẽtre, & d'iceluy poinct G tombent tant qu'on voudra de lignes droictes GC, GD, GE, en la circonference. Ie dis en premier lieu, que de toutes les lignes menées de G à la circonference, GA en laquelle eſt le centre, eſt la plus grande. Car du centre F eſtans menées à C, D, & E, les lignes FC, FD, & FE: le triangle GFC aura les deux coſtez GF, FC, plus grands que le coſté GC par la 20. p. 1. Mais les lignes droictes GF, FC ſont egales aux lignes droictes GF, FA, c'eſt à dire à toute la ligne GA: donc GA ſera auſſi plus grãde que GC. Par meſme raiſon GA ſera auſſi plus grãde que GD, & que GE: parquoy la ligne GA eſt la plus grande de toutes celles menées de G à la circonference.

Secondement, ie dis que GB eſt plus petite que GD, ou autre quelconque: car au triangle DFG, les deux coſtez DG & GF, ſeront plus grands que le troiſieſme DF par la 20. p. 1. ou que ſon egale BF. Que ſi on oſte la ligne commune GF, le demeurant GD ſera plus grand que le demeurant GB. Par meſ-

me raison GB sera aussi plus petite que GE, & que GC, ou autre quelconque tombant de G à la circonference.

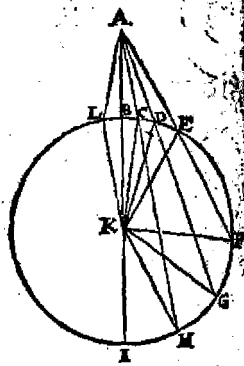
Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG que GD, est plus grande qu'icelle GD : & pour la mesme raison GD plus grande que GE, & ainsi des autres s'il y en auoit dauantage de tirées de G à la circonference. Car les deux costez GF, FC du triangle GFC, sont egaux aux deux costez GF, FD du triangle GFD, chacun au sien : mais l'angle CFG plus grand que l'angle DFG: & parrant par la 24. p. 1. la base GC sera plus grande que la base GD. Pour mesme raison GC sera plus grande que GE : Item GD plus grande que GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui est menée par le centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignée.

Finalement, ayant faict l'angle BFH egal à l'angle BFE, & tiré GH: ie dis que les lignes GE, GH, sont egales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonference aucune autre egale à icelles. Car d'autant que les costez EF, FG du triangle EFG, sont egaux aux costez HF, FG du triangle HFG, & les angles EFG, HFG aussi egaux : les lignes GH, GE, qui sont de part & d'autre, du diametre, sont egales entr'elles: Et il est euident qu'on ne pourra tirer du poinct G vne autre ligne dans le cercle, qui ne s'approche ou recule de la ligne BA tombant de costé ou d'autre de GE, ou GH ; & par ce qui a esté monstré cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'vne & l'autre d'icelle GE, GH. Donc du poinct G à la circonferencene se peuuent tirer plus de deux lignes droictes qui soient egales entr'elles. Parquoy si au diametre d'vn cercle on prend quelconque poinct qui ne soit pas le centre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR.

THEOR. 7. PROPOS. VIII.

Si on prend quelque poinct hors le cercle, & d'iceluy soient menées quelques lignes droictes dans iceluy cercle, desquelles l'vne passe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui passe par le centre sera la plus grande de toutes celles qui seront menées dans la circonference concaue. Quant aux autres, tousiours la plus proche de celle qui passe par le centre est plus grande que la plus esloignée: Mais de celles qui tombent en la circonference conuexe, la plus petite est celle qui est comprise entre le poinct & le diametre: Quant aux autres, la plus esloignée de la plus petite est plus grande que celle qui en est plus proche; & n'y a que deux lignes droictes qui puissent tomber egales de part & d'autre de la plus petite.



Du poinct A hors le cercle BCDE, le centre duquel est K, soient menées les lignes droictes AF, AG, AH, AI couppans le cercle, desquelles AI passe par le centre K, & les autres comment que ce soit. Ie dis que AI qui passe par le centre, est la plus grande de toutes: puis apres que AH qui est la plus proche d'icelle AI, est plus grande que AG qui en est plus essoignée: Et pour mesme raison AG, plus grande que AF. Et au contraire: Ie dis que AB comprise entre le poinct A & la circonference conuexe, est la plus petite ligne de toutes celles qui sont hors le cercle: puis apres que la ligne AC plus prochaine de la plus petite AB, est moindre que AD qui en est plus essoignée: Et par mesme raison icelle AD moindre que AE. Finablement ie dis que de A, on peut seulement mener deux lignes droictes egales de part & d'autre de la plus petite AB.

Car du centre K estans menées aux poincts C, D, E, F, G, H, les lignes droictes KC, KD, KE, KF, KG, KH; les deux costez AK, KH, du triangle AKH, sont plus grands que la ligne AH: Mais les lignes AK, KH sont egales aux lignes AK, KI, c'est à dire à toute la ligne droicte AI: icelle AI sera donc aussi plus grande que AH. Pour la mesme raison AI sera plus grande que AG, & que AF. Parquoy la ligne AI est la plus grande de toutes celles qui

tombent du poinct A dans le cercle.

Puis apres, d'autant que les costez AK, & KH du triangle AKH sont egaux aux costez AK, KG du triangle AKG, chacun au sien, & l'angle AKH plus grand que l'angle AKG; la base AH sera plus grande que la base AG, par la 24. p. 1. Par mesme raison AH sera plus grande que AF; item AG plus grande que AF. Parquoy la ligne plus proche de celle qui passe par le centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignée.

Derechef, puis qu'au triangle ACK la ligne AK est moindre que les deux AC, CK; si on oste les egales BK, CK, demeurera encore AB moindre que AC. Par semblable raison AB sera plus petite que AD, & que AE. Parquoy la ligne AB est la plus petite de toutes celles qui sont menées de A à la circonference conuexe.

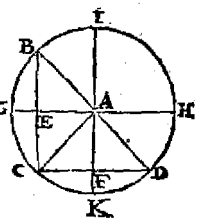
Derechef, d'autant que dans le triangle ADK tombent deux lignes droictes AC, CK, des extremitez du costé AK; icelles AC, CK seront moindres que AD, DK par la 21. p. 1. desquelles si on oste les egales CK, DK, restera encore AC moindre que AD. Par mesme raison on prouuera que AC est moindre que AE: Item AD moindre que AE. Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB, est moindre que la plus esloignée.

Finablement, soit faict l'angle AKL egal à l'angle AKC, & soit menée la ligne AL. D'autant que les costez AK, KC du triangle AKC, sont egaux aux costez AK, KL du triangle AKL; & les angles AKC, AKL aussi egaux, les lignes droictes AC, AL de part & d'autre de la moindre AB, seront egales entr'elles par la 4. p. 1. Or que nulle autre puisse estre egale à icelles, il euident; car si on en

mene vne autre du poinct A, il faudra qu'elle soit plus proche ou plus esloignée de AB; & par ce qui a esté demonstré cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'vne & l'autre d'icelles AC, AD. Donc du poinct A tomberont seulement deux lignes droictes egales de part & d'autre de la moindre AB. Parquoy si on prend quelque poinct hors le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. IX.

Si on prend quelque poinct au dedans d'vn cercle, & d'iceluy poinct tombent plus de deux lignes droictes egales, vers la circonference, le poinct pris est le centre du cercle.



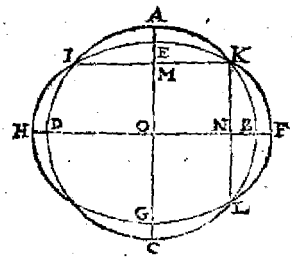
Soit pris le poinct A au cercle BCD, & d'iceluy poinct tombent à la circonference les trois lignes droictes egales AB, AC, AD. Ie dis que le poinct pris A est le centre du cercle.

Qu'il ne soit ainsi: soiēt menées les lignes BC & CD, & apres les auoir couppé en deux egalement aux poincts E & F, d'iceux poincts au poinct A, soient menées les deux lignes EA & FA. D'autant que les deux triangles BEA & CEA, ont deux costez egaux à deux costez,

chacun au sien; & les bases A B, A C aussi egales, les deux angles au poinct E seront egaux; & partant droicts, & par le corol. de la 1. p. de ce liure le centre du cercle sera en la ligne droicte GAH; puis qu'elle diuise la ligne droicte BC en deux egalement, & à angles droicts en E. Par mesme discours le centre du cercle se trouuera aussi en la ligne droicte KI. Il faut donc que ce soit à leur commune section A, n'y ayant poinct d'autre poinct commun. Parquoy si on prend quelque poinct dedans vn cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEO. 9. PROP. X.

Vn cercle ne couppe pas vn autre cercle en plus de deux poincts.

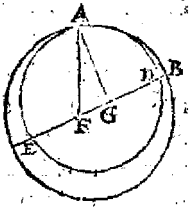


Soient les deux cercles ABCD & EFGH, se couppans aux trois poincts I, K & L, s'il est possible. Item soient menées les deux lignes droictes IK, & KL, lesquelles soient couppées en deux egalement aux poincts M & N par la 10. p. 1. & soient menées les lignes MC, & NH à droicts angles sur IK, & KL. Il faudra par le corol. de la 1. p. de ce liure que les deux centres des deux cercles soient en la ligne AC; ils seront aussi en la ligne FH: Ce sera donc au poinct de la com-

mune section O, & en ce faisant les deux cercles auroient mesme centre, contre la 5. p. de ce liure. Donc les cercles ABCD & EFGH ne se pouuoient pas coupper en plus de deux poincts: Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 10. PROP. XI.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans, & l'on prend les centres d'iceux: ayant ioinct iceux centres par vne ligne droicte & produite, elle tombera en l'attouchement des cercles.

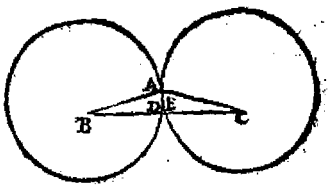


Soient deux cercles ABC & ADE se touchans interieurement au poinct A; & F, soit le centre du cercle ABC, & G le centre du cercle ADE, lesquels centres sont necessairement diuers, puis que par la 6. p. de ce liure deux cercles s'entre-touchant au dedans, ne peuuent auoir vn mesme centre. Ie dis que la ligne droicte menée d'vn centre à l'autre, & produicte, tombera sur le poinct de l'attouchement A. Car si elle n'y tombe, qu'elle coupe l'vn & l'autre cercle és poincts B, D, E, C; & de l'attouchement A, aux centres F & G, soient menées les lignes droictes AF, AG. D'autant que par la 20. p. 1. les deux costez AG, FG du triangle AFG, sont plus grands que le coste FA; & FA est egale à la ligne FB, (pource que F a esté posé centre du cer-

cle ABC) auſſi AG, GF ſeront plus grandes que FB: oſtant donc FG commune, reſtera GA, plus grande que GB. Et partant puis que GA eſt egale à GD; (car G a eſté poſé centre du cercle ADE) GD ſera auſſi plus grande que GB, la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Donc la ligne droicte conjoignant les deux centres des cercles ABC, ADE, & produite, ne tombera pas ailleurs qu'à l'attouchement A. Parquoy ſi deux cercles ſe touchent l'vn l'autre au dedans, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XII.

Si deux cercles ſe touchent l'vn l'autre au dehors, la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre, paſſera par l'attouchement.



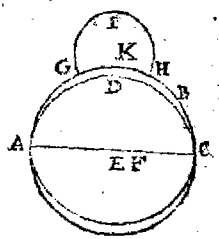
Soient deux cercles ſe touchans au poinct A, deſquels les centres ſoient B, & C. Ie dis que ſi d'vn centre à l'autre on meine vne ligne droicte, qu'icelle paſſera par le poinct d'attouchement A.

Autrement, in s'enſuiura abſurdité: car ſi icelle ligne ne paſſe par le poinct d'attouchement, qu'elle paſſe ailleurs, s'il eſt poſſible, ſçauoir aux poincts D & E, & du poinct d'attouchement A ſoient menées les deux lignes A B, & AC, leſquelles par

la 20.p.1. seront plus grandes que BC, & par la def. du cercle, il s'ensuit que BD, estant egale à BA, & CE à CA, que les deux lignes BD & CE, seroient plus grandes que BC, la partie que le tout. La ligne droicte menée d'vn centre à l'autre, passera donc par l'attouchement. Parquoy si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dehors, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Vn cercle ne touche point vn autre cercle à plus d'vn poinct, tant dehors que dedans.



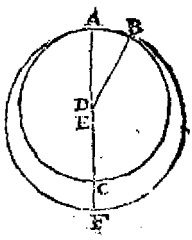
Soient les deux cercles ABC, & ADC se touchans interieurement aux deux poincts A & C, s'il est possible; & d'autant qu'ils ne peuuent auoir vn mesme centre par la 6.p. de ce liure, soient les deux centres diuers E & F, par lesquels estãt tirée la ligne droicte EF, & produite de part & d'autre, il faut qu'elle tombe és poincts d'attouchement A & C par la 11. p. de ce mesme liure: & par la def. du cercle, il faut que les lignes droictes EA & EC soient egales. Item FA, & FC. Mais FA est plus grande que EA. Partant FC sera aussi plus grande que EC, la partie que le tout: ce qui est impossible. Donc les deux cercles ne se toucheront point en deux poincts au dedans.

Pareillement il eſt impoſſible qu'ils ſe touchent exterieurement à plus d'vn poinct : car ſi le cercle HIG, le centre duquel eſt K, pouuoit toucher le cercle ABC en deux poincts, ſçauoir en H & G, il faudroit que la ligne droicte menee par les deux centres E & K paſſaſt par les deux poincts d'attouchement H & G, par la propoſition precedente, ce qui eſt impoſſible : ainſi les cercles ne ſe touchent point à plus d'vn poinct, tant dehors que dedans. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre en ce lieu le theoreme ſuiuant.

Si au demy diametre d'vn cercle produict, on prend vn poinct outre le centre ; le cercle deſcrit d'iceluy poinct comme centre, par le poinct extréme du demy diametre, touchera le premier cercle en iceluy poinct extréme du ſemi-diametre, & tombera tout dehors le meſme cercle.



Soit le cercle ABC, *duquel le centre eſt D, & au demy diametre AD prolongé ſoit prins quelconque poinct E, duquel & de l'interualle EA ſoit deſcrit le cercle AF, lequel ie dis toucher le cercle* ABC *au ſeul poinct A. Car ou le poinct E eſt dans le cercle* ABC, *ou dehors. S'il eſt dedans : d'autant que AE eſt plus grand que AD, c'eſt à dire que DC, & à plus forte raiſon que EC : EF qui eſt egale à EA ſera auſſi plus grande que EC : & partant le point F eſt hors le cercle* ABC, *& le cercle AF hors le meſme cercle pres du poinct F. Iceluy poinct F tombera beaucoup d'auantage*

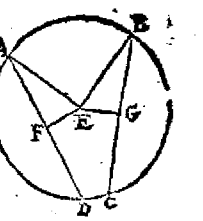
hors le cercle ABC, *si E est hors le mesme cercle* A B C. *Si donc le cercle AF ne tombe tout dehors le cercle* ABC, *tellement qu'il le touche au seul poinct* A, *que le cercle AF coupe ou touche le cercle* ABC, *en vn autre ppinct* B, *si faire se peut, & soit tiree la ligne* DB. *Veu donc qu'au diametre du cercle AF est pris le poinct D, outre le centre E,* D A *sera la plus petite de toutes les lignes tombantes de D, par la 7. p. 3. Donc* D A *est moindre que DB, ce qui est absurde; car D A, D B tombant du centre* D *en la circonference d'vn mesme cercle ABC, sont egales. Donc le cercle AF ne coupe ou touche le cercle* ABC *en vn autre poinct que A, mais tombe tout dehors iceluy: ce qui estoit proposé.*

Que si au semi-diametre non produit, on prend vn poinct outre le centre, le cercle descrit d'iceluy poinct comme centre, par le poinct extreme du semi-diametre touchera pareillement le premier cercle au susdit poinct extreme du demy diametre, & tombera tout dedans le mesme cercle. Comme si au semi-diametre AE, du cercle AF, *on prẽd le poinct D, duquel & de l'interualle D A on descrit le cercle ABC, iceluy tombera totalement dans AF, & le touchera au seul poinct* A. *Car puis qu'il a esté demonstré cy dessus que le cercle AF tombe tout dehors le cercle* AB C, *pareillement tout cestuy-cy tombera dedans celuy là, tellement qu'ils s'entre-touchent au seul poinct A: & par ainsi appert ce qui estoit proposé.*

THEO. 13. PROP. XIIII.

Dans vn cercle, les lignes droictes egales, sont egalement distantes du centre: & les egalement distantes du centre sont egales entr'elles.

Au cercle A B C D, duquel le centre est E, soient deux lignes droictes egales A D, & B C. Ie dis qu'elles seront egalement distantes du centre E.

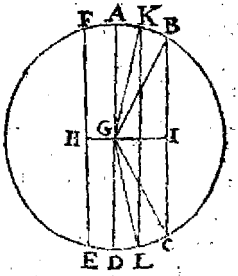


Qu'ainsi ne soit, par la 12. p. 1. du centre E soient menees les deux lignes E F, E G, perpendiculaires aux deux lignes A D, B C: puis soient tirees les deux A E, & B E. Or les deux lignes A D, & B C estans couppees en angles droicts par les perpendiculaires E F, & E G, elles seront aussi couppees en deux egalement par la 3. p. 3. & partant A F sera egale à B G. Pareillement A E estãt egale à B E par la def. du cercle, & le quarré de A E estant egal aux deux quarrez de A F, F E, par la 47. p. 1. & son egal quarré de B E estãt aussi egal aux deux quarrez de B G, G E, les deux quarrez de A F, F E seront egaux aux deux quarrez de B G, G E. Mais le quarré de A F est egal au quarré de B G, & par consequent le quarré de F E est esgal au quarré de G E. Parquoy la ligne F E sera egale à la ligne G E, & par la 4. def. du 3. A D, & B C seront egalement distantes du centre du cercle proposé.

Quant à la seconde partie. Ie dis que si A D, B C sont egalement distantes du centre E, qu'elles seront egalles; car ayant construit comme dessus, les perpendiculaires E F & E G seront egales par la 4. def. de ce liure, & couppperont A D, B C en deux egalement par la 3. p. de ce mesme liure, & par deduction de la 47. p. 1. comme cy dessus, A F se trouuera egale à B G, & par consequent aussi leurs doubles A D, & B C seront egales. Si donc au cercle les lignes droictes egales, &c. Ce qui estoit à demonstrer.

THEOR. 14. PROP. XV.

Dans le cercle, la plus grande ligne est le diamettre : quant aux autres touſiours la plus proche du centre eſt plus grande que la plus eſloignee.



Au cercle ABCDEF, duquel le centre eſt G, ſoit le diametre AD, & la ligne FE la plus proche d'iceluy, mais BC la plus eſloignee. Ie dis que de toutes ces lignes AD eſt la plus grande, & que FE eſt plus grande que BC.

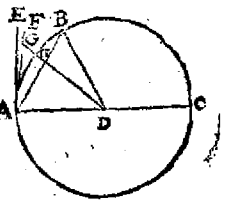
Car ſoient tirees du centre G les lignes droictes GH, GI perpendiculaires aux lignes droictes FE, BC : & pource que BC eſt plus eſloignee du centre que FE ; la perpendiculaire GI ſera plus grande que GH, par la 4. def. de ce liure. Soit donc couppé d'icelle GI, la ligne GM egale à GH, & par M ſoit menee KML perpendiculaire à GI, & ſoient tirees les lignes GK, GB, GC, GL. Donc puis que les perpendiculaires GM, GH ſont egales, les lignes droictes KL, FE ſeront egalement diſtãtes du cẽtre par la 4. def. de ce liure, & partant egales entr'elles par la prop. precedente. Derechef, puis que GK, GL, ſont plus grandes que KL

par la 20. prop. 1. & icelles GK, GL sont egales au diametre A D; iceluy diametre A D sera aussi plus grand que K L ou F E. Par mesme raison A D sera demonstré plus grand que toutes autres lignes.

Item des triangles GKL, & GBC, les costez GK, GL, GB, GC, sont esgaux par la definition du cercle, & l'angle GkL est plus grand que BGC, & par la 24 p. 1. la base K L, ou son egale F E, sera plus grande que la base B C; & ainsi des autres. Parquoy dans le cercle la plus grande ligne est le diametre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

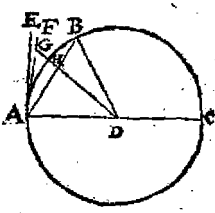
THEOR. 15. PROP. XVI.

Si à l'extremité du diametre d'vn cercle, on leue vne ligne perpendiculaire, icelle tombera dehors le cercle, & entre icelle perpendiculaire & la circonference ne tombera pas vne autre ligne droicte, & l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.



Du cercle A BC, soit le centre D, le diametre A C, sur l'extremité duquel A soit leuee la ligne perpendiculaire A E, par la 11. p. 1. Ie dis premierement qu'icelle ligne A E tombe hors le cercle.

Car si elle tomboit dans iceluy, ainsi que A B,



estant tiree DB, les deux angles DAB, DBA, seront egaux par la 5. p. 1. Mais DAB est droit par la cõstruction; DBA sera donc aussi droict: ce qui est absurde, puis que par la 17. p. 1. deux angles d'vn triangle sont moindres que deux droicts. Donc la perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la mesme raison elle ne tombera pas aussi en la circonference, mais dehors, comme est A E.

Maintenant, ie dis que de A ne peut tomber entre la perpendiculaire A E, & la circonference AB, vne autre ligne droicte. Car s'il est possible que quelque ligne droicte y tombe comme A F, de D soit menee sur icelle la perpendiculaipe D G, couppant la circonference en H, laquelle tombera necessairement de la part de l'angle aigu DAF par le corol. de la 17. p. 1. Veu donc qu'au triangle DAG, les deux angles DAG, DGA, sont moindres que deux droicts par la 17. p. 1. & par la construction DGA est droict, l'angle DAG sera moindre qu'vn droict, & partant la ligne DA, ou son egale DH, sera plus grande que DG, par la 19. p. 1. la partie que le tout: ce qui est absurde. Entre la perpendiculaire AE, & la circonference AB ne tombera donc pas vne autre ligne droicte.

Ie dis finalement, que tout l'angle du demy cercle BA C contenu du diam. AC, & de la circõference AB, est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & que celuy qui reste BAE contenu de la ligne droicte AE, & de la circonference AB, est plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puisque CAE est angle droict diuisé par la seule circonference AB, & qu'entre icelle circonference A B & la ligne droicte AE, ne peut

tomber vne autre ligne droicte ; l'angle BAE ne peut estre diuisé par aucune ligne droicte, ainsi ne sera diminué par aucune ligne droicte; ny par consequent l'ãgle BAC ne sera augmẽté par aucune ligne droicte. Si dõc à l'extremité du diametre d'vn cercle on leue vne perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit demõstrer.

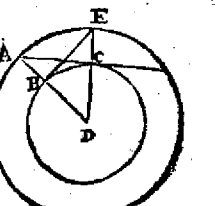
COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste qu'vne ligne droicte tiree perpendiculairement de l'extremité du diametre, touche le cercle en vn seul poinct. Car il a esté demonstré qu'elle tombe hors le cercle: parquoy elle le touche seulemẽt au poinct extreme du diametre. Parquoy s'il estoit requis tirer vne ligne droicte par le poinct A donné en la circonference du cercle, laquelle touche le cercle en A, nous tirerions de A au centre D la ligne droicte AD, & sur icelle seroit éleuee la perpendiculaire AE, laquelle touchera le cercle en A, comme il a esté demonstré.

PROBL. 2. PROP. XVIII.

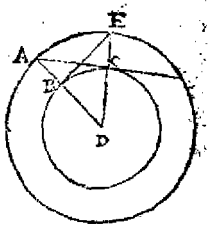
D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte qui touche vn cercle donné.

Soit le poinct donné A, duquel il faut mener vne ligne droicte qui touche le cercle donné BC, dont le centre est D.



Soit menee la ligne AD couppant le cercle BC en B: puis du centre D, & interuale

DA, soit descrit le cercle AE. Et apres auoir leué la perpendiculaire BE au bout du demy diametre BD par la 11. p. 1. Soit menee la ligne ED coupãt le cercle BC au poinct C, & du poinct donné A, à iceluy poinct C, soit menee la ligne AC, ie dis qu'elle touche le cercle au poinct C.



Car les deux triangles ACD & EBD ayans deux costez esgaux, & l'angle D commun, la base AC sera egale à la base EB, & l'angle droict ACD egal à l'angle EBD, qui sera aussi droit. Et par le corol. de la preced. prop. la ligne AC touchera le cercle BC au seul poinct C. Nous auõs donc du poinct donné A mené la ligne droicte AC, qui touche le cercle donné au poinct C: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

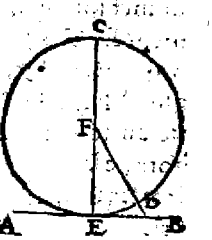
Nous auons enseigné en nostre Geometrie practique, Prob. 20 vne autre maniere beaucoup plus facile que celle cy dessus.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte touche vn cercle, & du centre à l'attouchement on meine vne ligne droicte, elle sera perpendiculaire à la touchante.

Soit

Soit la ligne droicte A B touchant le cercle C D E, au poinct E, & d'iceluy poinct soit menee la ligne droite EC passant par le centre F. Ie dis qu'elle sera perpendiculaire à AB.

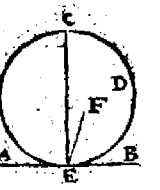


Car si elle ne l'est, soit menee FG perpendiculaire à AB, couppant la circonference en D. Veu donc qu'au triangle EFG les deux angles FEG, FGE sont moindres que deux droicts par la 17. p. 1. & FGE est droict par la construction, FEG sera moindre qu'vn droict; & par la 19. p. 1. la ligne FE, ou FD son egale, sera plus grande que FG, la partie que le tout: ce qui est absurde. Donc FE est perpendic. à AB. Parquoy si vne ligne droite touche vn cercle &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEO. 17. PROP. XIX.

Si vne ligne droicte touche vn cercle, & au poinct de l'attouchement est leuee vne perpendiculaire, en icelle sera le centre du cercle.

Soit la ligne droicte AB touchant le cercle C D E au poinct E: & sur iceluy soit leuee la perpendiculaire EC. Ie dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne perpendiculaire.

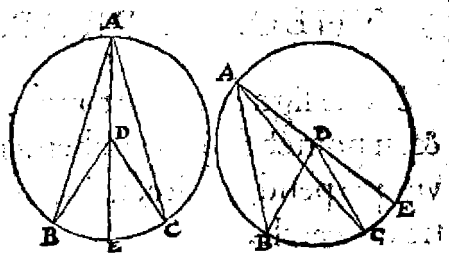


Autrement, il sera dehors icelle ligne; soit donc au poinct F, s'il est possible, & d'iceluy

poinct soit menee la ligne E F au poinct de l'attouchement E, elle sera aussi perpendiculaire à A B par la prop. preced. ce qui est impossible : car les deux angles A E C, A E F, seroient droicts, & egaux, la partie au tout : partant le centre du cercle n'estoit pas hors de la ligne E C, ains dedans. Si donc vne ligne droicte touche vn cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Dans le cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonference, quand iceux angles ont vne mesme circonference pour base.



Dans le cercle A B C, soient les deux angles, sçauoir B A C en la circõference, & B D C au centre, ayant mesme circonference B C, pour base. Ie dis que B D C sera double de B A C.

Car premierement si les lignes droictes A B, A C enclosent les lignes D B, D C, comme en la premiere figure ; par le centre D estant menee la ligne droicte A D E ; & les lignes D A, D B & D C

estans egales, les deux triangles A D B, & ADC seront Isosceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles egaux sur les bases A B & A C. Mais l'angle exterieur BDE par la 32. p. 1. est egal aux deux angles interieurs D A B, & DBA, qui sont egaux: partant il sera aussi double du seul D A B: par mesme discours E D C se trouuera double de D A C, & par consequent les deux ensemble BDC seront doubles des deux ensemble BAC.

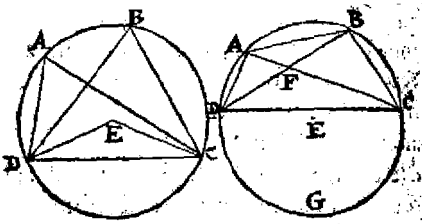
Que si l'angle de la circonference A est comme en la seconde figure, il s'ensuiura tousiours le mesme, sçauoir que B D C sera double de BAC.

Car apres auoir mené la ligne A D E, tout ainsi comme cy dessus par la 32. p. 1. l'angle exterieur B D E sera egal aux deux opposez interieurs A B D, D A B, & double du seul D A B estant le triangle Isoscele: par mesme discours C D E sera double de CAD, & par les com. sent. Si de B D E double de BAE on oste CDE, double de CAE, le demeurant BDC sera double du demeurant B A C. Parquoy dans le cercle l'angle du centre est double de l'angle de la circonference, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Dans le cercle, les angles qui sont en vne mesme portion, sont egaux entr'eux.

Toute portion de cercle, est ou plus grande ou plus petite



que le demy cercle. Soit donc premierement un cercle ABCD, le centre duquel est E, vne plus grande portion DABC, en laquelle soient les angles DAC & DBC. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux.

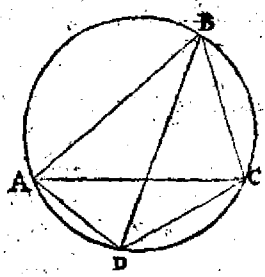
Car si du centre E on meine les deux lignes ED, & EC, l'angle du centre DEC sera double de l'angle en la circonference DAC par la propos. precedente: & par la mesme prop. il sera aussi double de l'autre angle DBC. Mais les choses qui sont moitié d'vne mesme, sont egales entr'elles; ainsi les angles A & B seront egaux entr'eux.

Soit maintenant vne portion plus petite que le demy cercle, comme en la 2. figure. Ie dis que les deux angles DAC, DBC estans en la mesme portion DABC sont egaux.

Car si on meine la ligne AB, il se fera vne portion BGA plus grande que le demy cercle; & comme nous auons demonstré cy dessus les deux angles ADB & BCA, qui sont en vne mesme portion AGB seront egaux; pareillement au deux triangles DAF, & CBF les angles opposez au poinct F sont egaux par la 15. p. 1. & par ce qui a esté demonstré à la 32. p. 1. le troisiesme angle DAF sera egal au troisiesme angle CBF. Dõc au cercle les angles qui sont en vne mesme portion sont egaux entr'eux: ce qui estoit à prouuer.

PROBL. 20. PRO. XXII.

Les figures de quatre costez inscrites au cercle, ont les angles opposez egaux à deux angles droits.



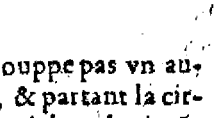
Soit la figure de quatre costez inscrite au cercle ABCD. Ie dis que les angles opposez ABC, ADC; item BAD BCD, sont aussi egaux à deux droicts.

Car si on meine les deux lignes AC, & BD, les deux angles ACD, & ABD estans en vne mesme portion ABCD, seront egaux par la prop. precedente. Pareillement DBC, & CAD, estans en vne mesme portion DABC, seront egaux: donc les deux angles sous le poinct B, seront egaux aux deux DAC, & DCA, lesquels auec les deux du poinct D, sont egaux à deux droicts par la 32. p. 1. partant aussi les deux sous le poinct B auec les deux sous le poinct D; c'est à dire le total ABC, auec le total ADC, seront egaux à deux droicts. Nous demonstrerons en la mesme maniere, que les deux angles BAD, BCD, sont egaux à deux droits. Car de rechef les deux angles ABD, ACD, sont egaux. Item les deux BCA, BDA; & partant tout l'angle BCD sera egal aux deux ABD, ADB, lesquels auec BAD sont egaux à deux droicts par la 32. p. 1. Donc aussi

les deux BCD, BAD, seront egaux à deux droicts. Parquoy les figures de quatre costez inscriptes au cercle, ont les angles opposez egaux à deux angles droicts. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Deux portions de cercles semblables & inegales, ne se mettront pas dessus vne mesme ligne droicte, & de mesme part.



Car si faire se peut, soient deux portions de cercles semblables, & inegales A B C, & A D C sur la ligne droicte A C, & de mesme costé. Il est euident qu'elles s'entre-coupperont seulement és poincts A & C, puis que par la 10. prop. de ce liure vn cercle ne couppe pas vn autre cercle en plus de deux poincts; & partant la circonference d'vne portion sera toute dehors la circonference de l'autre. Soit donc menee la ligne droicte C B couppant les circonferences en D & B, & tirées les deux lignes droictes B A, & D A: par la definition des semblables portions, les deux angles A B C & A D C seront egaux, ce qui est absurde: car par la 16. p. 1. l'angle exterieur A D C doit estre plus grand que l'oppose interieur B. Donc les deux portions A B C, & A D C estans semblables, & inegales, ne se pouuoient mettre sur vne mesme ligne

droicte A C, & de mesme part. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 22. PROP. XXIII.

Semblables portions de cercles estans constituées sur lignes droictes egales, sont egales entr'elles.



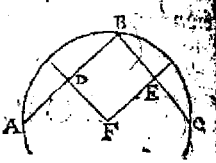
Soient deux portions de cercles semblables ABC & DEF constituees sur lignes droictes egales A C, & D F. Ie dis qu'icelles portions sont egales entr'elles.

Autrement, si elles estoient inegales, il s'ensuiuroit que deux portions semblables & inegales pourroient estre posees sur lignes droictes egales ou bien sur vne mesme, contre la prop. precedente donc les deux portions ABC & DEF constituez sur lignes droictes egales, seront egales : Ce qu'il falloit prouuer.

PROB. 3. PRO. XXV.

La portion d'vn cercle estant donnee, descrire le cercle duquel elle est portion.

Soit vne portion de cercle A B C, de laquelle il faut trouuer le centre pour acheuer le cercle d'icelle.



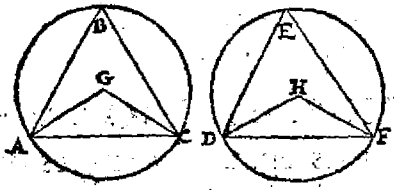
En la circonference d'icelle portiõ soient pris comme on voudra les trois poincts A, B, C, & apres auoir mené les deux lignes droictes AB & BC, & icelles coupees en deux egalement en D & E par la 10. p. 1. d'iceux poincts soient leuees par la 11. p. 1. les perpendiculaires DF, & EF, se rencontrans au poinct F: (or elles se doiuent rencontrer, pour ce que si on menoit la ligne droicte DE, seroient faits deux angles EDF, DEF, moindre que deux droits. Ie dis que F est le centre cherché pour acheuer le cercle.

Car par le corol. de la 1. prop. de ce liure le centre sera à la ligne DF: Il sera aussi en EF: ce sera donc au poinct F, qui leur est commun. Parquoy nous auons trouué le centre du cercle, duquel le segment donné A B C est portion: Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient les cercles egaux ABC & DEF, desquels les centres sont G & H, & les angles dãs iceux egaux, sçauoir aux circonferences, B egal à E; & aux centres, G egal à H. Ie dis que les circonferences AC, & DF, sur lesquelles iceux angles s'appuyent, sont egales.



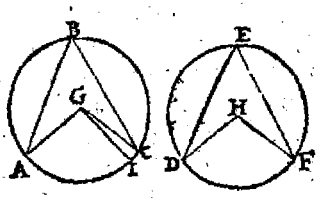
Car d'autant que les cercles sont egaux, les lignes tirées du centre à la circonference seront egales par la 1. def. de ce liure. Ainsi ayant tiré les deux lignes droictes AC, DF, les deux triangles AGC, & DHF, auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle G egal à l'angle H; & par la 4. p. 1. la base AC sera egale à la base DF. Pareillement l'angle B estant egal à l'angle E, la portion ABC sera semblable à la portion DEF, par la 10. def. de ce liure, & par la 24. prop. elles seront egales; & qui de cercles egaux oste portions egales, sçauoir ABC & DEF; le demeurant AC sera egal au demeurant DF: ainsi les angles egaux s'appuyeront dessus circonferences egales AC, DF. Doncaux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Ce qu'Euclide dit en ceste proposition, & aux trois prochaines suiuantes, se doit aussi entendre en mesme cercle, c'est à dire qu'en vn mesme cercle les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, &c. Car tousiours la mesme demonstration qui se fera en deux ou plusieurs cercles egaux aura aussi lieu en vn mesme cercle.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

Aux cercles egaux, les angles qui s'appuyent dessus circonferences egales, sont egaux entr'eux, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.



Soient deux cercles egaux ABC & DEF, les centres desquels sont G & H, & sur les circonferences egales AC & DF soiēt les angles ABC, & DEF tous deux en la circonference. Item AGC & DHF au centre; ie dis premierement que les angles G & H seront egaux.

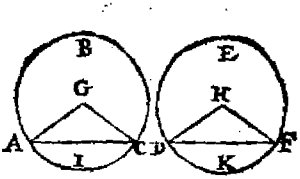
Autrement, l'vn d'iceux sera plus grand ou plus petit. Soit donc AGC plus grand que DHF, s'il est possible, il faudra par la 23. p. 1. sur AG faire l'angle AGI egal à DHF, & par la precedente prop. les circonferences AI & DF seront egales: ce qui est

contre nostre hypothese; car nous auions posé AC egale à DF. Il faudroit doncques que AC & AI fussent egales contre la 8. commune sentence. Donc l'angle AGC n'estoit point plus grand que l'angle DHF, & partant egal.

L'egalité des angles du centre estant prouuée, les angles de la circonference sont entendus egaux, puis qu'ils sont moitiez d'iceux par la 20. proposition de ce liure. Donc aux cercles egaux, les angles qui s'appuyent dessus circonferences egales sont egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 25. PROP. XXVIII.

Aux cercles egaux, les lignes droictes egales, prennent circonferences egales, sçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.



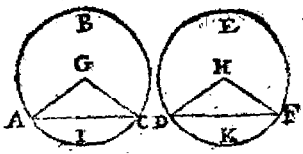
Soiẽt les deux cercles egaux ABC & DEF, desquels les cẽtres soiẽt G & H, & dãs iceux deux lignes droictes egales AC & DF. Ie dis que les circonferences qu'elles couppent sont egales, sçauoir la petite AIC à la petite DKF, & la grande ABC, à la grande DEF.

Qu'il ne soit ainsi; des centres G & H, soient menées les lignes GA, GC, HD, HF, qui seront egales par la premiere def. de ce liure, estans les cercles egaux

& la ligne droicte AC eſtant egale à la ligne droicte D F, les deux triangles A G C, & D H F auront les trois coſtez egaux aux trois coſtez, chacun au ſien: & par la 8. p. 1. l'angle G ſera egal à l'angle H; & par la 26. prop. ce de liure ils ſappuyeront deſſus circonferences egales A I C, D K F; & qui de cercles egaux oſte icelles circonferences egales, reſteront les circonferences A B C, D E F, auſſi egales. Donc aux cercles egaux, les lignes droictes egales prennent circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 26. PROP. XXIX.

Aux cercles egaux, les circonferences egales, ſouſtendent lignes droictes egales.



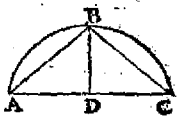
Es cercles egaux A B C & D E F, deſquels les centres ſont G, & H, ſoient les circonferences A B C, D E F egales, ſouſtenduës des lignes droictes A C & D F. Ie dis qu'icelles ſouſtendantes ſont egales.

Qu'ainſi ne ſoit; des centres G & H ſoient menées les lignes droictes G A, G C, H D, H F. Or d'autant que l'on poſe les circonferences A B C, D E F egales, les angles G & H qui ſappuyent deſſus circonferences egales, ſeront egaux par la 27. prop. de ce liure: pareillement les coſtez G A & G C, eſtans egaux aux coſtez H D & H F par la 1. def. la baſe A C

sera egale à la base D F par la 4. p. 1. Donc aux cercles egaux, les circonferences egales soustendent lignes droictes egales : ce qui estoit à prouuer.

PROB. 24. PROP XXX.

Coupper vne circonference donnée en deux egalement.



Soit la circonference donnée ABC, laquelle il faut coupper en deux egalement.

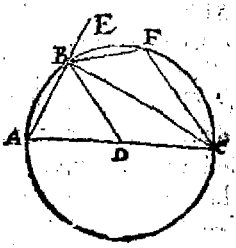
Soit menée la ligne droicte AC, laquelle soit couppée en deux egalement au poinct D, duquel poinct soit elleuée la perpẽdiculaire DB par la 11. p. 1. Ie dis que la circonference ABC est couppée en deux egale-egalement en B.

Qu'il ne soit ainsi : il faut mener les lignes droictes AB & BC; & pour autant que les deux costez AD & DB du triangle ADB, sont egaux aux deux costez CD & DB du triangle CDB, & les deux angles au poinct D egaux ; par la 4. p. 1. la base AB sera egale à la base BC, & par la 28. p. de ce liure les circonferences AB & BC seront egales. Nous auons donc couppé la circonference donnée en deux egalemẽt. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 27. PROP. XXXI.

Au cercle, langle qui est au demy cercle est droit : & celuy qui est en la plus grande portion, est plus petit qu'vn

droict: Mais celuy qui est en la plus petite, est plus grand qu'vn droict. Et d'auantage, l'angle de la plus grande portion, est bien plus grand qu'vn droict: mais l'angle de la plus petite portion est plus petit qu'vn droict.



Au cercle ABC, duquel D est centre, & AC diametre, soit constitué l'angle ABC, dans le demy cercle ABC: & en la plus grande portion BAC, l'angle BAC; mais en la moindre portion BFC, l'angle CFB. Ie dis en premier lieu que l'angle ABC au demy cercle, est droict.

Car apres auoir mené la ligne BD, & continuë AB iusques en E; il est euident que les triangles ABD & CBD sont Isosceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles sur la base egaux, sçauoir BAD à ABD, & CBD à BCD; & partant les deux ensemble ABD CBD seront egaux aux deux ensemble BAD & BCD. Mais par la 32. p. 1. l'exterieur CBE est egal à iceux deux angles BAD, BCD: & partant les deux au poinct B, faisant le seul ABC, seront aussi egaux à l'exterieur CBE, & par la 10. def. 1, ABC & CBE seront tous deux angles droicts.

Ie dis en second lieu, que l'angle BAC, qui est en la plus grande portion CAB, est plus petit qu'vn droict: ce qui est aisé à prouuer par la 32. p. 1. d'au-

tant que l'angle ABC, estant droict, les deux autres ensemble ne vaudrõt qu'vn droict; & partant l'angle BAC est plus petit qu'vn angle droict, & ainsi des autres.

Ie dis tiercemẽt, que l'angle BFC, qui est en la petite portion CFB, est plus grand qu'vn droict: car par la 22. prop. de ce liure la figure de quatre costés ABFC inscrite au cercle, a les deux angles oppoſez egaux à deux droicts; ſçauoir A & F. Mais nous auons prouué A estre plus petit qu'vn droict; par conſequent F ſera plus grand.

Ie dis en quatrieſme lieu, que l'angle de la plus grande portion, compris de la ligne droicte BC, & de la periphere BAC, est plus grand qu'vn angle droict: ce qui est euident, car l'angle droict rectiligne ABC n'est que partie d'iceluy angle mixte CBA.

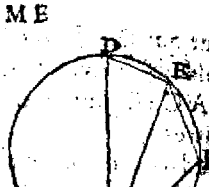
Finablement, ie dis que l'angle de la petite portion, compris de la ligne droicte BC & de la circonference BFC, c'est à dire l'angle mixte CBF, est moindre qu'vn droict, car iceluy n'est que partie de l'ãgle droict CBE. Donc au cercle l'angle qui est au demy cercle est droict, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De ce que deſſus, eſt manifeſte qu'vn angle d'vn triangle eſtant egal aux deux autres, eſt droict.

THEOR. 28. PROP. XXXII.

Si quelque ligne droicte touche le cercle, & de l'attouchement on meine quelque ligne droicte couppant le cercle, les angles qu'elle faict à la touchante ſont egaux à ceux qui ſont aux ſegmens alternes du cercle.



Soit la ligne droicte AB touchant le cercle CDE, au poinct C, & d'iceluy poinct soit menée CE, couppant le cercle en deux portions inegales. Ie dis que l'angle ECB, est egal à tout angle qui peut estre faict en la plus grande portion CDE, & que ECA est egal à tout angle qui peut estre fait en la plus petite portion CFE.

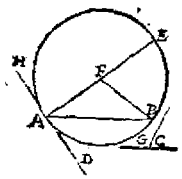
Qu'il ne soit ainsi, apres auoir mené par le centre le diametre CD, soient menées les lignes DE, EF, FC. Maintenant par la proposition precedente l'angle DEC dans le demy cercle est droict, & par la 32. p. 1. les deux autres D & ECD sont egaux à vn droict, c'est à dire à DCB, lequel est droict par la 18. prop. de ce liure; desquels si on oste l'angle commun ECD, le demeurant ECB sera egal au demeurant D. Pareillement par la 22. prop. la figure de quatre costez inscrite au cercle CFED, aura les angles oppolez F & D, egaux à deux droicts: c'est à dire aux deux ECA, ECB, desquels si on oste choses egales, c'est à sçauoir les angles D & ECB egaux, les demeurans F & ECA seront egaux.

Que si la ligne couppant le cercle estoit le diametre d'iceluy, tous les angles tant en l'vn qu'en l'autre demy cercle, seroient droicts par la proposition precedente. Si donc quelque ligne droicte touche le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL.

PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Dessus vne ligne droicte donnée, descrire la portion d'vn cercle capable d'vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



Soit la ligne donnée AB, & l'angle rectiligne C: il faut sur icelle ligne descrire vne portion de cercle comprenant vn angle egal à l'angle donné C.

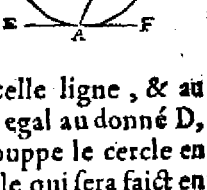
Soit construit l'angle BAD egal à l'angle donné C par la 23. p.1. & au poinct A soit leuée AE perpendiculaire à AD; puis sur la ligne AB, & au poinct B, soit faict l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23.p.1.tirant la ligne BF iusques à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire AE au poinct F: donc par la 6. p. 1. les costez FA, FB, seront egaux: Partant le cercle descrit du centre F & interual FA, passera aussi par le poinct B; & apres auoir mené la ligne droicte BE, ie dis que l'angle E, qui est en la portion AEB est egal à l'angle donné C. Car d'autant que la ligne droicte AE passe par le centre F, & qu'à icelle, DA est perpendiculaire; par le corol. de la 16. prop. de ce liure le cercle touchera icelle DA en A. Parquoy par la preced. prop. l'angle BAD, qui est egal à l'angle C, sera egal à l'angle E, descrit dans la portion AEB; par consequent l'angle E sera egal à l'angle C: ainsi nous auons descrit vne portion de cercle sur la ligne donnée AB, capable d'vn angle egal à vn angle donné C.

Que si l'angle donné eust esté obtus, comme G, il eust fallu construire l'angle BAH egal à icelluy, & chercher le centre F comme dessus, pour descrire le cercle AEBI, & par la prop. precedente, la plus petite portion AIB eust compris vn angle egal à l'angle G.

Que si l'angle donné eust esté droict, ne falloit que descrire vn demy cercle sur la ligne donnée. Or nous auons donc construit sur la ligne donné AB, vn segment de cercle, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 6. PROP. XXXIV.

D'vn cercle donné, oster vne portion capable d'vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

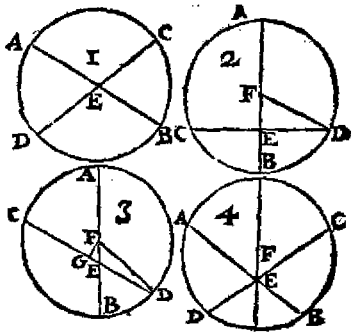


Soit le cercle donné ABC; duquel il faut oster vne portion capable d'vn angle rectiligne egal à l'angle donné D.

Soit menée la ligne droicte EF touchant le cercle en A: puis par la 23. p. 1. soit fait sur icelle ligne, & au poinct A l'angle rectiligne FAC egal au donné D, faisant que la ligne droicte AC couppe le cercle en deux portions. Ie dis que tout angle qui sera faict en la portion ABC, sera egal au donné D. Car il sera egal à l'angle FAC par la 32. prop. de ce liure, lequel est egal à D par la construction. Nous auons donc du cercle donné ABC couppé vne portion, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 29. PROP. XXXV.

Si dans vn cercle, deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre; le rectangle contenu des deux pieces de l'vne, est egal au rectangle compris des deux pieces de l'autre.

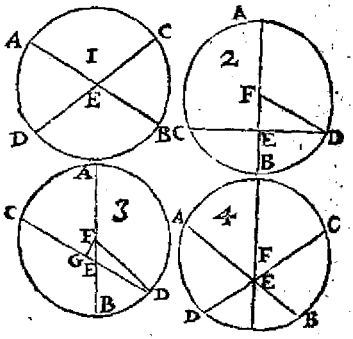


Soient deux lignes droictes AB, CD dans le cercle ACBD, s'entrecoupant en E. Ie dis que le rectãgle compris des deux pieces AE & EB, est egal au rectangle cõtenu des des deux pieces CE & ED.

Or les lignes qui se couppent dans le cercle, ou elles passent toutes deux par le centre, ou bien l'vne d'icelles seulement, ou ny l'vne ny l'autre. Que si elles passoient toutes deux par le centre, comme en la premiere figure, les quatre parties seront egales; & par ainsi la proposition est euidente.

Que si la seule AB, passe par le centre F, & diuise DC en deux egalement, comme en la 2. figure; elle la diuisera aussi à droicts angles, par la 3. prop. de ce liure. Et apres auoir mené FD, il est euident par la 5. p. 2. que le rectangle de AE & EB auec le quarré de EF, seront egaux au quarré de FB, ou FD, (car la ligne AB est couppée en deux egalement au poinct F,

& en deux inegalement en E) & par la 47. p. 1. le quarré de FD eſtãt egal aux deux quarrez de FE & EB, en oſtant le quarré cõmun de FE, le demeurant rectãgle de AE & EB, ſe trouuera



egal au quarré de ED, comme il a eſté demonſtré à la 14. p. 2. ou au rectangle de CE, ED.

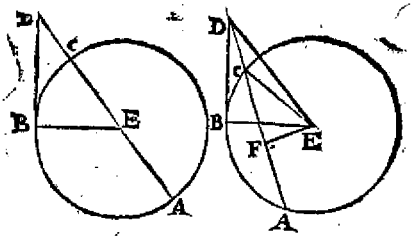
Que ſi la ligne AB paſſant par le centre F (comme en la troiſieſme figure) diuiſe inegalement CD, ne paſſant point par le centre, il ſenſuiura la meſme choſe. Car apres auoir mené la perpendiculaire FG, & la ligne droicte FD: pourautant que AB eſt couppee en deux egalement en F, & en deux inegalement en E, le rectangle de AE & EB, auec le quarré de EF, ſera egal au quarré de FB, ou de ſon egale FD par la 5. prop. 2. Mais le quarré de FE eſt egal aux deux de FG & GE par la 47. p. 1. Pareillement le quarré de FD, eſt egal aux deux de FG & GD par la 47. p. 1. Donc auſſi le rectangle de AE & EB, auec les deux quarrez de FG & GE, ſera egal aux deux quarrez de FG, & GD: & partant en oſtant le quarré commun de FG, le demeurant quarré de GD, ſera egal au rectangle de AE & EB, & quarré de GE. Par meſme diſcours, & par la meſme 5. p. 2. le quarré de GD eſt egal au rectangle de CE & ED, & quarré de GE; en oſtant donc le quarré cõmun de GE, le rectangle de AE, EB, ſe trouuera egal au rectangle de CE & ED.

Que ſi ny l'vne ne l'autre des deux lignes ne paſſe par le centre F, il ſenſuiura le meſme: car ſi on mei-

ne le diametre H I, passant par le poinct commun E de la 4. figure, le rectangle de IE & EH, sera egal au rectangle de CE & ED, comme cy dessus a esté dit; & par mesme raison aussi au rectangle de AE & EB; & par la 1. com. sent. les deux rectangles de AE & EB; item de CE & E D, seront egaux. Si donc dans vn cercle, deux lignes droictes s'entrecouppent, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

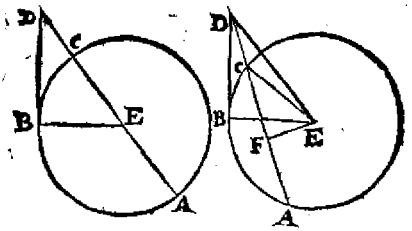
THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle, on prend quelque poinct, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droictes, l'vne desquelles couppe le cercle, & l'autre le touche; le rectangle contenu de toute la couppante, & de sa partie prise dehors entre le poinct & la circonference conuexe, est egal au quarré de la touchante.



Hors le cercle ABC soit pris le poinct D, duquel soit menée la ligne DA, couppant le cercle en C, &

la ligne DB touchant iceluy cercle en B. Ie dis que le rectangle de la toute AD, & de la partie CD prise entre le poinct donné, & le cercle, est egal au quarré de la touchante B D.



Qu'il ne soit ainsi : du centre E au poinct d'attouchement B, soit menée la ligne EB, laquelle par la 18. prop. de ce liure sera perpendiculaire à icelle touchante BD : & pour-autant que la ligne AC est couppée en deux egalement au poinct E, & à icelle est adjoustée directement CD, le rectangle de la totale AD, & de sa partie CD auec le quarré de CE, ou BE son egale, est egal au quarré de DE par la 6. p. 2. ou aux deux de DB & BE par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de BE, le demeurant quarré de BD, sera egal au demeurant rectangle de AD & CD, par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passoit par le centre du cercle proposé, comme en la seconde figure, il faudra demonstrer en ceste sorte : du centre E soient menées les lignes EB, EC, ED, & la perpendiculaire EF, laquelle couppera AC en deux egalement par la 3. prop. de ce liure. Et par la 6. p. 2. comme cy dessus, le rectangle de AD & CD, auec le quarré de CF, sera egal au quarré de DF, ausquelles choses egales si on adjouste le quarré commun de EF, le rectangle de AD & DC, auec les deux quarrez de CF & FE, ou le seul de

CE par la 47. p. 1. sera egal aux deux quarrez de DF & FE, ou au seul de DE par la 47. p. 1. ou aux deux de DB & BE par la mesme 47. p. 1. Que si on oste les quarrez egaux de CE & BE, les demeurans quarré de DB, & le rectangle de AD & CD, seront egaux. Parquoy si hors le cercle on prẽd quelque poinct, & d'iceluy vers le cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si d'vn poinct pris hors le cercle, sont tirées plusieurs lignes couppant le cercle; les rectangles compris souz chacune d'icelles & sa partie exterieure, seront egaux entr'eux: pource que chacun de ces rectangles, sera egal au quarré de la ligne touchante.

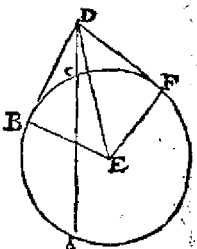
Appert aussi que deux lignes droictes tirées d'vn mesme poinct, & touchant le cercle, sont egales entr'elles puis que le quarré de chacune d'icelles, sera egal au rectangle de la ligne tirée du mesme poinct & couppant le cercle, & de la partie exterieure d'icelle.

Est aussi euident que d'vn mesme poinct pris hors le cercle, peuuent estre seulement tirées deux lignes droictes qui touchent le cercle: Car il faudroit qu'elles fussent toutes egales entr'elles; & partant du poinct D pourroient estre menées plus de deux lignes egales de part & d'autre de DE, contre la 8. proposition de ce troisiesme liure.

THEOR. 31. PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle, on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct tombent deux lignes droictes au cercle, l'vne desquelles couppe le cercle, & l'autre

l'atteint : Si le rectangle compris de toute la couppãte, & de la partie prise entre le poinct & la circonferẽce conuexe, est egal au quarré de celle qui atteint ; celle qui atteint touchera le cercle.



Hors le cercle A B C soit pris le poinct D, & d'iceluy soit menée la ligne droicte DA qui couppe le cercle au poinct C, & la ligne DB qui atteint le cercle au poinct B ; & soit le rectangle de la toute AD & de la partie CD, egal au quarré de DB. Ie dis que DB touche le cercle en B.

Car du poinct D, estant menée la ligne DF touchant le cercle au poinct F, & du centre E les lignes EB, ED, EF, par la proposition precedente, le quarré de DF sera egal au rectangle de AD & CD. Mais par l'hypothese le quarré de DB, est aussi egal à iceluy rectangle: & partant les quarrez, & les lignes DF & DB, seront egales. Item EF & EB, sont aussi egales par la def. du cercle, & ED à soy-mesme : ainsi les deux triangles DBE, & DFE ayans les trois costez egaux aux trois costez, chacun au sien, les angles B & F, seront egaux par la 8. p. 1. & F estant droict par la 18. prop. de ce liure, aussi B sera droict ; & par le coroll. de la 16. prop. la ligne DB touchera le cercle. Parquoy si dehors le cercle on prend quelque poinct, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

Fin du troisiesme Element.

ELEMENT QVATRIESME.

DEFINITIONS.

VNe figure rectiligne se dict estre inscrite en vne figure rectiligne, lors qu'vn chacun des angles de la figure inscrite, touche vn chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

2 Semblablement aussi vne figure se dict estre circonscrite à vne figure, quand vn chacun costé de la circonscrite touche vn chacun angle de l'inscrite.

3 Mais vne figure rectiligne se dit estre inscrite au cercle, quand vn chacun angle de la figure inscrite, touche la cir-

conference du cercle.

4. Et vne figure rectiligne se dit estre circonscrite au cercle, quand vn chacun des costez de la figure circonscrite, touche la circonference du cercle.

5 Semblablement aussi le cercle se dit estre inscrit en vne figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche vn chacun costé de la figure en laquelle il est inscrit.

6 Mais le cercle se dit estre circonscrit à vne figure, quand la circonference du cercle touche vn chacun des angles d'icelle figure à l'entour de laquelle il est descrit.

7. Vne ligne droicte se dit estre accommodee dans le cercle, quand les extremitez d'icelle sont en la circonference du cercle.

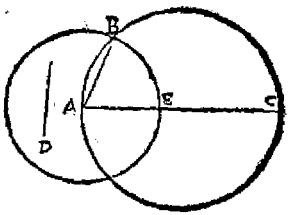
Toutes ces definitions sont si claires & faciles à entendre, qu'il n'est besoin d'en donner autre explication.

PROBL. 1. PROPOS. I.

Au cercle donné, accommoder vne

ligne droicte egale à vne ligne droicte donnee, laquelle ne soit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle dõné A B C, dans lequel il faut accommoder vne ligne droicte egale à la ligne droicte donnee D, qui n'est pas plus grande que A C diametre d'iceluy cercle.



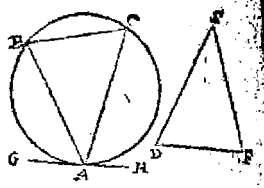
Soit du diametre AC couppee A E portion egale à la ligne D. En apres du centre A, & interual AE soit descrit le cercle BE couppant le cercle donné au poinct B, & soit menee la ligne droicte AB. Ie dis que A B est egale à D.

Car par la def. du cercle, AB & A E sont egales, & par la construction, icelle A E est egale à D, & par la 1. com. sent. AB & D seront egales. Nous auons donc accommodé au cercle donné vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 2. PROP. II.

Dans vn cercle donné, inscrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut inscrire vn triangle equiangle au donné D S F.



Soit menee la ligne G H, qui touche le cercle au poinct A, auquel poinct soient faicts les deux angles G A B egal à l'angle D, & H A C egal à l'angle F, par la 23. p. 1. Puis soit menée B C. Ie dis que le triangle inscrit A B C est equiangle au donné D S F.

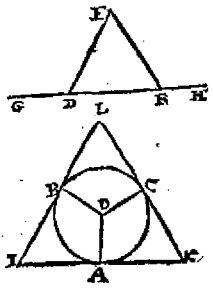
Car puis que la ligne A B couppe le cercle en deux portions, l'angle C en la grande portion sera egal à l'angle de l'attouchement G A B, & par consequent à l'angle D par la 32. p. 3. & par la mesme raison, la ligne A C coupant le cercle, l'angle B se trouuera aussi egal à l'angle F, & par la 32. p. 1. le troisiesme A sera aussi egal l'angle S, & par consequent les triangles seront equiangles. Au cercle donné nous auons donc descrit vn triãgle equiangle à vn triangle donné. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 3. PROP. III.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné A B C, à l'entour duquel il faut descrire vn triangle equiangle au triangle donné D E F.

Soit prolongé le costé D F de part & d'autre iusq-



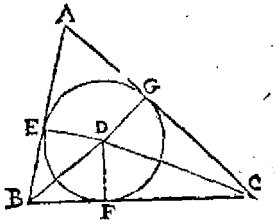
ques en G & H, & du centre D, soit menee à l'aduenture la ligne D A, sur laquelle au poinct D, soient construits les deux angles A D B egal à E D G, & A D C, egal à l'angle H F E par la 23. p. 1. & aux trois lignes D A, D B, D C, soient menees les trois lignes perpendiculaires I K, I L, K L, lesquelles toucheront le cercle és poincts A, B, C, par le corol. de la 16. p. 3. & icelles se rencontrant aux trois poincts I, k, L, feront le triangle I K L, lequel ie dis estre le triangle demandé.

Car il appert desia qu'il est circonscrit au cercle, puis que tous les costez d'iceluy le touchent és poincts A, B, C. Et d'autant que toute figure de quatre costez a les quatre angles egaux à quatre angles droicts (comme nous auons demonstré à la 32. p. 1;) le trapeze A D B I aura les quatre angles egaux à quatre droicts. Mais les deux A & B estans droicts par la construction, les deux autres D & I, seront egaux à deux droicts, c'est à dire egaux aux deux G D E & F D E, qui sont egaux à deux angles droicts par la 13. p. 1. & par la cõstruction A D B est egal à G D E: donc l'angle I sera egal à l'angle E D F. Par mesme discours l'angle K se trouuera egal à l'angle D F E. Et par la 32. p. 1. le troisiesme L sera egal au troisiesme E: ainsi les triangles circonscrit I K L, & donné D E F, seront equiangles: Parquoy nous auons faict ce qui estoit requis.

PROB. 4. PROP. IIII.

Dans vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, dans lequel il faut descrire vn cercle.



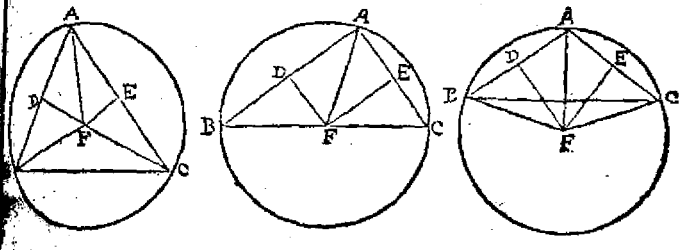
Soient les deux angles B & C couppez en deux egalement par la 9. p. 1. par les deux lignes B D & C D, se rencontrans au poinct D : Item d'iceluy poinct de rencontre D, soient menees les trois perpendiculaires DE, DF, D G, par la 12. p. 1. & du centre D, & interualle DE soit descrit le cercle EFG. Ie dis qu'iceluy cercle est inscrit au triãgle dõné ABC.

Car d'autant que l'angle DEB est droit, il sera egal à l'angle DFB, qui est pareillement droict, & le total B estant coüppé en deux egalement, les deux D E B & DBE, seront egaux aux deux DFB & FBD, & le costé DB estant commun, le costé F D sera egal au costé DE par la 26. p. 1. Par mesme discours D G se prouuera egale à DF, & par la 1. com. sent. les trois lignes DE DF, D G, seront egales: ainsi le cercle EFG descrit de l'interualle DE, sera aussi de l'interualle des deux autres: & partant il passera par les poincts E, F, G, & en iceux touchera les trois costez du triangle par le coro. de la 16. p. 3. pource qu'à iceux costez sont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5. d. de ce liure, le cercle EFG sera inscrit au triangle donné : Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. V.

A l'entour d'vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné A B C, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.



Soient couppez egalement les deux costez A B au poinct D, & A C au poinct E par la 10. p. 1. & par la 11. p. 1. d'iceux poincts D, & E, soient leuees les perpendiculaires DF, EF, se rencontrans au poinct F, lequel sera ou dans le triangle, ou au costé B C, ou hors le triangle: & apres auoir mené les trois lignes FA, FB, FC, les deux triangles ADF, BDF, auront les costez AD, BD egaux, & DF commun, & les deux angles au poinct D egaux pour estre droicts: donc les bases AF, BF, seront egales par la 4. p. 1. Par mesme discours AF, CF, seront aussi egales: & par la 1. com. sent. les trois lignes FA, FB, FC, seront egales: & partant le cercle descrit de F & interuale FA, passera aussi par les poincts B & C. Nous auons donc descrit vn cercle à l'entour du triangle donné ABC: ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choſes eſt manifeſte, que ſi le centre tombe dans le triangle, les trois angles ſont aigus: car ils ſont tous en vne grande ſection de cercle: mais s'il tombe en l'vn des coſtez, l'angle oppoſé à iceluy ſera droict: ſi finalement il tombe hors le triangle, l'angle oppoſé ſera obtus, car il ſera en vne moindre ſection de cercle.

Et au contraire, eſt euident que ſi le triangle eſt oxigone, le centre tombera dedans iceluy: mais s'il eſt rectangle, il tombera au coſté oppoſé à l'angle droict: & finalement s'il eſt ambligone, le centre tombera dehors.

SCHOLIE.

On peut auſſi colliger de ce probl. la maniere de deſcrire vn cercle par trois poincts donnez, leſquels ne ſoient en vne ligne droicte: car ayant ioinct iceux poincts par lignes droictes, on aura vn rriangle, à l'entour duquel faudra deſcrire vn cercle, comme eſt enſeigné en ce Prob. Cecy ſe practique auſſi plus facilement, comme nous auons enſeigné en noſtre Geometrie practique, Prob. 21.

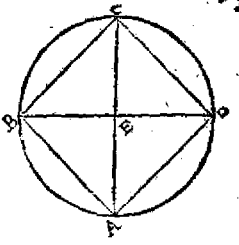
PROBL. 6. PROP. VI.

Dans vn cercle donné, deſcrire vn quarré.

Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut deſcrire vn quarré.

Soient menez les deux diametres A C & B D ſe couppans

couppans au centre E en angles droicts, & soient menées les quatre lignes A B, B C, D C & D A. Ie dis que A B C D est quarré inscrit au cercle donné.

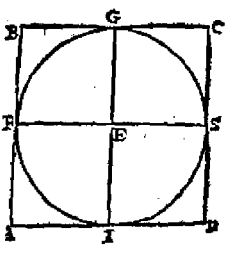


Car d'autant que les quatre angles au poinct E sont droicts, & egaux par la construction, les quatre arcs ausquels ils insistent, seront egaux par la 26. p. 3. & partant les lignes droictes soustendans iceux seront aussi egales par la 29. p. 3. donc tous les costez du quadrilatere A B C D seront egaux entr'eux. Mais les angles d'iceluy sont aussi droicts, par la 31. p. 3. puis qu'ils sont tous au demy cercle: donc le quadrillatere A B C D est vn quarré inscrit au cercle proposé. Ce qu'il faloit faire.

PROB. 7. PROP. VII.

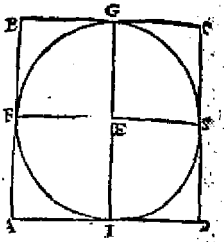
A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné F G S I, à l'entour duquel il faut descrire vn quarré.



Soient menez les deux diametres F S & G I se couppans au centre E à droicts angles, & sur les poincts G & I, soient menees les deux lignes B C, A D paralleles à

FS: Ité par les deux poincts F & S soient menees les deux lignes AB, DC paralelles à GI par la 31. p. 1. icelles quatre lignes paralelles se récõtrans aux poincts A, B, C, D. Ie dis que le quadrilatere A B C D est le quarré demandé.



Car en premier lieu, il est euident par la construction qu'il est parallelogramme, & par la 34. p. 1. les quatre costez seront egaux, estans egaux à l'vn ou l'autre des deux diametres FS, GI, qui sont egaux entr'eux. Pareillement par la mesme 34. p. 1. les quatre angles A, B, C, D, sont egaux aux quatre qui sont au poinct E, chacun à son opposé, d'autant que ce sont parallelogrammes. Mais iceux estans droicts, aussi les quatre A, B, C, D, seront chacun droict, & par consequent le parallelogramme ABCD, aura les quatre costez egaux, & les quatre angles droicts, & partant il sera quarré, les costez duquel touchent le cercle és poincts F, G, S, I, par le corol. de la 16. p. 3. Parquoy nous auons descrit vn quarré à l'entour d'vn cercle donné : Ce qu'il falloit faire.

PROB. 8. PRO. VIII.

Dans vn quarré donné, descrire vn cercle.

Soit le quarré donné ABCD, (en la figure cy dessus) dans lequel il faut descrire vn cercle.

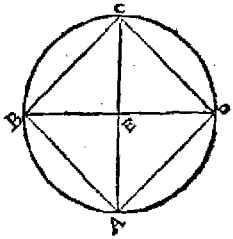
Soient couppez en deux egalement les quatre costez aux poincts F, G, S, I, & apres auoir mené les deux lignes F S & G I s'entrecouppans au poinct E,

d'iceluy poinct E, & interualle E F, si on descrit vn cercle, ce sera le demandé.

Car par la 33. p. 1. I G sera egale & parallele à A B: & F S à B C; ainsi le quarré donné sera diuisé en quatre, parallelogrammes, lesquels par la 34. p. 1. auront les costez oppositez egaux, ainsi A F & I E seront egaux: Item F E, & A I; F B & E G; I D & E S: mais toutes icelles moitiez des costez du quarré sont egales, partant E F, E G, E S, E I, seront aussi egales, & comme elles touchent le quarré aux poincts F, G, S, I, aussi le cercle descrit de l'interuale de l'vne d'icelles, touchera le quarré aux mesmes poincts, par le corol. de la 16. prop. 3. pour ce que les angles à iceux poincts sont droicts. Nous auõs donc descrit vn cercle dans le quarré donné A B C D: Ce qu'il falloit faire.

PRO. 9. PROP. IX.

A l'entour d'vn quarré donné, descrire vn cercle.



Soit le quarré donné A B C D, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

Soient menees les deux diagonales A C & B D, s'entrecoupans au poinct E; puis du centre E, & de l'interuale E A, soit descrit le cercle A D C B.

Ie dis qu'il sera le demandé: c'est à dire qu'il tou-

chera les quatre angles du quarré donné A B C D.

Car le costé A B estant egal au costé A D, le triangle B A D sera Isoscelle : & par la 5. p. 1. les angles A B D & A D B, sur la base B D seront egaux, & seront chacun demy droicts par la 32. p. 1. estant l'angle B A D droict par la def. du quarré. Par mesme discours, nous demonstrons que tous les autres angles des poincts A, B, C, D, seront aussi demy droicts, & partant egaux entr'eux : ainsi au triangle A E D les deux angles E A D & E D A seront egaux, & par consequent les lignes droictes E A, E D aussi egales par la 6. p. 1. & par mesme discours E D sera egalé à E C, & E C à E B; comme aussi E B à E A: & partant les quatre lignes droictes E A, E D, E C, E B, estans egales, il est aisé de conclurre comme aux precedentes, que le cercle descrit du centre E, & de l'interualle de l'vne d'icelles lignes passera par l'extremité des autres, qui sont les angles du quarré donné AB CD. Nous auons donc d'escrit vn cercle à l'entour d'vn quarré donné : ce qu'il falloit faire.

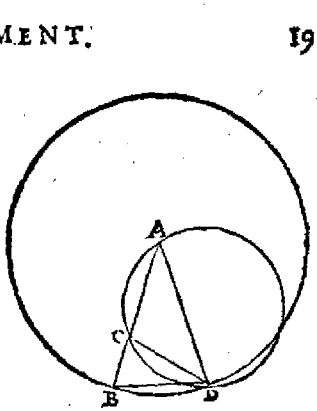
SCHOLIE.

Nous auons enseigné en nostre Geometrie la pratique & construction presque de tous les probl. de ce quatriesme, liure : c'est pourquoy nous n'en dirons icy autre chose.

THEOR. 10. PROP. X.

Descrire vn triangle Isoscelle, ayant vn chacun des angles de la base pouble de l'autre.

Soit la ligne A B couppée en C, comme enseigne la 11. p. 2. & du centre A, & interualle A B soit descrit vn cercle, dans lequel soit accommodee la ligne D B egale à A C; & apres soit menee la ligne A D. Ie dis que A B D est le triangle Isoscele demandé.



Car apres auoir mené C D, si à l'entour du triangle A C D, on descrit le cercle A C D, comme il a este enseigné cy dessus; puis que la ligne A B à esté couppee en C, comme enseigne la 11. p. 2. le rectangle de A B & B C, sera egal au quarré de C A, ou de son egale D B; & par la 37. p. 3. la ligne D B touchera le cercle en D, & l'angle C A D sera egal à l'angle C D B par la 32. p. 3. & si à iceux on adiouste l'angle commun A D C, les touts seront egaux; sçauoir le total A D B, aux deux C A D & A D C: mais l'angle exterieur D C B, est aussi egal aux deux C A D & A D C, par la 32. p. 1. partant il sera aussi egal à l'angle A D B, ou à son egal A B D par la 5. p. 1. (car le triangle est Isoscele) & par la 6. p. 1. le triangle DCB sera aussi Isoscele, & le costé D C egal à D B: partant aussi egal à C A; & le triangle D C A estant Isoscele, il aura les deux angles sur la base A D egaux par la 5. p. 1. & l'angle exterieur D C B (qui est egal à tous les deux) sera double du seul A: aussi sera son egal B, & partãt aussi son autre egal A D B: voila donc A B D

triangle Isoscele, ayant les angles de la base doubles du troisiesme : Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Pource que les trois angles du triangle A B D, sont egaux à deux droicts, c'est à dire à 5 cinquiesmes de deux droicts: il est euident que l'angle A est la 5 partie de deux droicts, & chacun des autres B & D, les deux cinquiesmes parties : item A estre les deux quints d'vn droict: chacun B & D les 4 quints, puis que tous les trois sont egaux à deux droicts, c'est à dire à 10 quints d'vn droict.

SCHOLIE.

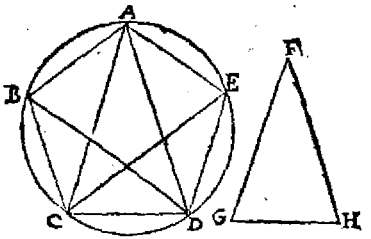
Or par quelle maniere on doit construire vn triangle Isoscele, ayant vn chacun des angles de la base, non seulement double de l'autre, comme faict icy Euclide, mais aussi selon quelconque raison donnée, nous l'auons enseigné (apres Pappus & Clauius) en nostre Geometrie practique Prob. 37, & Scholie du 126.

PRO. 11. PROP. XI.

Dans vn cercle donné, descrire vn pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné à A B C D E, dans le quel il faut inscrire le pentagone demandé.

Dans iceluy cercle il faut inscrire le triangle A C D equiangle au triãgle F G H, lequel ait esté cõstruit selõ le requis de la precedente proposition, & apres



auoir mené les deux lignes droictes CE & DB, couppãt les deux angles ACD & ADC, en deux egalement par la 9.p.1. soient menees les lignes droictes CB, BA, AE, ED. Ie dis que ABCDE, est le pentagone inscrit equiangle & equilateral.

Car puisque le triangle FGH a esté construit selon le precepte de la precedente proposition, les deux angles sur la base GH, seront doubles du troisiesme F, & par consequent le triangle ACD, qui est equiangle à iceluy FGH, aura aussi chacun des angles de dessus la base CD double du troisiesme A, lesquels estans couppez en deux egalement par les lignes droictes CE & DB, & les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ACE sont egaux, & par la 26.prop.3. ils auront circonferences egales pour bases; mais les egales circonferences comprennent lignes droictes egales par la 29.p.3. donc tous les cinq costez estans egaux, le pentagone sera equilateral.

Aussi sera il bien aisé de prouuer qu'il est equiangle par la 27. prop.3. d'autant que chacun angle est soustenu de circonferences egales, sçauoir de trois arcs comprenans trois costez du pentagone, veu que nous auons prouué que tous iceux arcs sont egaux. Nous auons donc descrit dans vn cercle donné vn pentagone equiangle, & equilateral: ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy il s'ensuit que l'angle du pentagone equilateral & equiangle comprend les trois cinquiesmes parties de deux droicts, ou bien les 6 quints d'vn droict. Car puis que les trois angles BAC, CAD, DAE sont egaux par la 27. propos. 3. & CAD est le quint de deux droicts, ou les deux quints d'vn droict; le total BAE, qui est composé de ces trois sera les trois quints de deux angles droicts, ou bien les six quints d'vn droict.

SCHOLIE.

Clauius enseigne en ce lieu cy deux manieres pour describre vn pentagone equilateral, & equiangle sur vne ligne droicte donnee & terminee, la plus facile desquelles nous auons enseignee en nostre Geometrie praticque Prob. 38. c'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

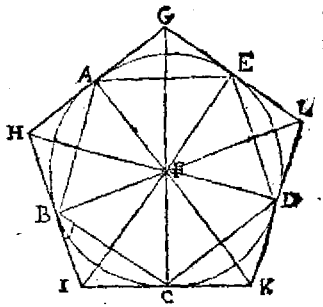
PROB. 12. PROP. XII.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDE, à l'entour duquel il faut descrire le pentagone demandé.

Dans iceluy soit descrit le pentagone ABCDE par la precedente, & apres auoir mené du centre F les cinq lignes FA, FB, FC, FD, FE, soient me-

nées sur icelles les cinq lignes perpendiculaires GH, HI, IK, kL, LG par la 11. pr. 1. se rencontrans aux cinq poincts G, H, I, K, L (elles se doiuent rencontrer; car puis que les angles GAE, GEA sont moindres que deux droicts, estans parties des angles droicts GAF, GEF par la 11. com. sent. les lignes droictes AG, EG se rencontreront de la part de G, & ainsi des autres.) Ie dis que GHIKL est le pentagone demandé equiangle, & equilateral.



Car il est euidemment circonscrit, puis que par le coroll. de la 16. prop. 3. les lignes GH, HI, Ik, KL, LG touchent le cercles és poincts A, B, C, D, E: en apres si on meine les cinq lignes FG, FH, FI, Fk, FL; d'autant que les angles FAG, FEG sont droicts par la 47. pr. 1. le quarré de FG sera egal aux deux quarrez de FA, AG; il sera aussi egal aux deux de FE, EG, & par consequent les deux quarrez de FA, AG, seront egaux aux deux de FE, EG. Mais les quarrez de FA, FE sont egaux: (estans descrits sur lignes egales.) Donc ceux de AG, & EG seront aussi egaux, & les lignes AG & EG egales: Parquoy les deux costez AF, FG du triangle AGF sont egaux aux deux costez EF, FG du triangle EGF, chacun au sien, & la base AG egale à la base GE: & par la 8. prop. 1. les angles AFG, EFG seront egaux; & partant AFE sera double de AFG. Par mesme discours aussi AFB egal à AFE par la 27. prop. 3. car ils ont egales circon-

ferences pour baſes) ſera double de AFH, & par conſequent AFG & AFH ſeront egaux: Donc les triangles AGF, AHF ont deux angles egaux à deux angles, chacun au ſien, & le coſté AF commun: & par la 6. prop. 1. AG ſera egale à AH. Par meſme diſcours GE & EL ſe trouueront egales: mais AG & EG eſtans egales, auſſi leurs doubles GH & GL ſeront egales. Par meſme diſcours on prouuera tous les autres coſtez egaux; & partant le pentagone ſera equilateral.

Qu'il ſoit auſſi equiangle, il eſt euident: car nous auons monſtré que les angles des triangles AGF, EGF ſont egaux: ſçauoir eſt, les angles AGF, EGF: Item AGF, AHF: & qu'on en pouuoit dire autant des autres: donc les deux angles ſous le poinct G, ſeront egaux aux deux angles ſous le poinct H, & ainſi des autres; partant le pentagone ſera equiangle & equilateral. Nous auons donc deſcrit à l'entour d'vn cercle donné vn pentagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

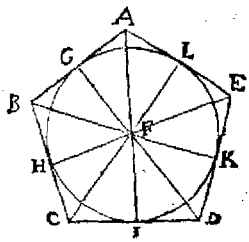
PROB. 13. PROP. XIII.

Dans vn pentagone equiangle, & equilateral, deſcrire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral ABCDE, dans lequel il faut inſcrire vn cercle.

Soient couppez en deux egalement chacun des angles A, & B, par les lignes AF & BF par la 9. prop. 1. ſe rencontrans au poinct F, & par la 12. propoſ. 1. du poinct F ſoient menées les perpendiculaires FG,

FH, FI, FK, FL, & du centre F, & interuale FG soit descrit le cercle GHIKL. Ie dis que c'est le cercle demandé.



Car puisque par la construction les deux angles soubs le poinct A sont egaux, ayant esté le total couppé en deux egalement, & l'angle droict G egal à l'angle droict L, & le costé FA commun aux deux triangles AGF, ALF, par la 26. p. 1. les deux autres costez seront egaux, sçauoir AG à AL & FG à FL: par mesme discours FH, FI, FK, se trouueront egales: & partant le cercle descrit de F & interuale FG, passe par les poincts G, H, I, K, L, esquels il touche les costez du pentagone proposé par le coroll. de la 16. p. 3. le cercle GHIKL est donc inscrit au pentagone donné. Ce qu'il falloit faire.

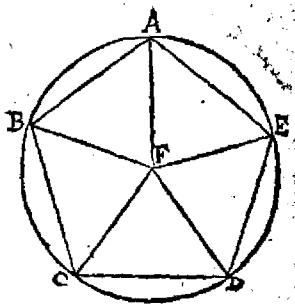
PROBL. 14. PROP. XIIII.

Al'entour d'vn pentagone equiangle, & equilateral, descrire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral ABCDE, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

Soient couppez les cinq angles A, B, C, D, E, en deux egalement par la 9. p. 1. auec les lignes AF, BF, CF,

FD, EF se rencõtrans au poinct F, & d'iceluy poinct F, & interuale de l'vne d'icelles cinq lignes, soit descrit le cercle A B C D E. Ie dis qu'il sera circonscrit au Pentagone.



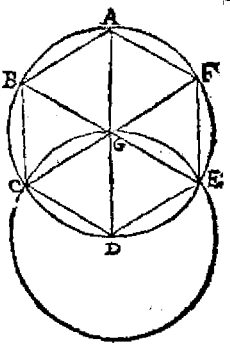
Car puis que le pentagone est equiangle, & chacun angle d'iceluy a esté couppé en deux egalement, les deux angles sur la base BA seront egaux, & par la 6. p. 1. les deux costez AF & BF, seront aussi egaux: & par le mesme discours B F & F C seront aussi egales, ainsi des autres; & par la 1. commune sentence il est euident qu'icelles cinq lignes seront egales entr'elles, & que partant le cercle descrit de l'interuale de l'vne d'icelles, passera par les extremitez des autres, qui sont aussi les cinq angles du pantagone donné. Parquoy nous auons descrit vn cercle à l'entour d'vn pentagone equiangle, & equilateral: Ce qu'il falloit faire.

PROB. 15. PROP. XV.

Dans vn cercle donné, inscrire vn hexagone equiangle, & equiteral.

Soit le cercle donné A B C DE F, dont le centre est G; dans lequel cercle il faut inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit mené le diametre A D, & du centre D & inter-



uale DG, soit descrit vn autre cercle GCE coupant le donné aux poincts C & E, desquels poincts soient menées les deux lignes CGF, EGB: finablement soient menées les lignes droictes AB, BC, CD, DE, EF, FA. Ie dis que ABCDEF est l'hexagone demandé.

Car il est evident, n demonstrant comme en la 1. p. 1. que les deux triangles CDG, DEG sont equilateraux, & par le corol. de la 5 p. ils seront aussi chacun equiangles, & par la 32. p. 1. vn chacun de leurs angles vaudra le tiers de deux angles droicts, & l'angle AGB par la 15. p. 1. vaudra le tiers de deux angles droicts: ainsi par la 13. & 15 p. 1. tous les angles au poinct G, seront egaux, valant chacun vn tiers de deux angles droicts; partant les six bases AB, BC, CD, DE, EF, FA, seront egales, & les angles sur icelles aussi egaux par la 4. p. 1. Donc l'hexagone sera equilateral, & aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont egaux, les deux du poinct A seront egaux aux deux du poinct B; & ainsi des autres. Nous auõs donc descrit dans vn cercle donné vn hexagone equiangle, & equilateral: ce qu'il falloit faire.

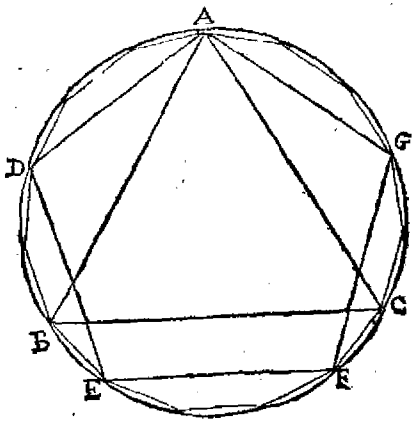
COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste que le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle: car le costé de l'hexagone DC, est egal au semidiametre DG par la def. du cercle.

PROB. 16. PROP. XVI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire vn quindecagone equiangle, & equilateral.



Soit premierement descrit dans iceluy le triangle equilateral A B C par la 2. prop. de ce liure; les trois costez estans egaux, la circonference sera diuisée en trois egalement par les 26. & 28. p. 3. pareillement, soit en iceluy cercle inscrit le pentagone A D E F G par la 11. prop. de ce liure, ayant l'vn des angles sur le poinct A. Ie dis que ayant mené la ligne droicte B E, ce sera le costé du quindecagone demandé.

Car comme il a esté dit, l'arc ADB est le tiers de la circonference; partant doit contenir cinq costez du quindecagone. Item AD costé du pentagone soustient l'arc AD, cinquiesme partie de la circonference; partant doit contenir trois costez du quindecagone; & les deux arcs AD & DE contiendront six costez du quindecagone. Mais l'arc ADB en contient cinq: donc l'arc BE sera la quinziesme partie de toute la circonference; partant la ligne droicte BE sera le costé du quindec. & si par la 1. prop. de ce liure on accommode au cercle encores 14 lignes droictes egales à icelles BE, sera inscrit au cercle vn quindecagone equilateral; & aussi equiangle, puis que tous ses angles soustendent arcs egaux, c'est à sçauoir composez de 13 arcs egaux.

Pareillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze poincts des diuisions egales du cercle, nous tirons des lignes droictes qui se touchent, se descrira vn quindecagone equilateral & equiangle à l'entour dudit cercle: & d'auantage nous descrirons & circonscrirons vn cercle à vn quindecagone equilateral & equiangle donné, suyuant la mesme methode praticquée au pentagone.

Fin du quatriesme Element.

ELEMENT CINQVIESME.

DEFINITIONS.

1. PARTIE, est vne grandeur tirée d'vne plus grande, lors que la plus petite mesure la plus grãde.

C'est à dire que lors qu'vne grandeur en mesure vne autre plus grande, elle est dicte partie d'icelle, comme A qui est contenu 3 fois en B, est dit partie d'iceluy. Or entre les Mathematiciens il y a deux sortes de parties: car il y en a vne qui mesure son tout, comme A, lequel repeté 3 fois constituë son tout B: & l'autre sorte ne mesure pas son tout; mais prise ie ne sçay combien de fois excede iceluy, ou deffaut au mesme, comme A, lequel estant pris 3 fois excede C, mais estant pris seulement 2 fois, il est excedé par le mesme C: Or la premiere est dite partie aliquote, & l'autre partie aliquante; de ceste-là seulement parle icy Euclide, puis que ceste-cy ne mesure son tout; & aussi ne l'appelle-il pas partie au 7. liure, mais parties.

A. B. C.
3. 9. 7.

2. Multiplice, est vne grandeur plus grande

grande qu'vne plus petite, quand la plus grande eſt meſurée de la plus petite.

C'eſt à dire que ſi A eſt meſurée par B moindre grandeur qu'icelle A, elle eſt dite multiplice de B: Ainſi auſſi A 12. B 4. C 20. D 5.
C, *qui eſt meſurée 4 fois par* D, *eſt dicte multiplice d'icelle* D.

Or quand deux moindres grandeurs en meſurent egalement deux autres plus grandes, c'eſt à dire qu'vne moindre eſt contenuë autant de fois en vne plus grande, qu'vne autre moindre en vne autre plus grande, ces deux plus grandes-là ſont dictes equemultiplices d'icelles moindres. Et le meſme ſe doit entendre, ſi pluſieurs moindres meſurent egalement pluſieurs grandes.

3. Raiſon, eſt vne habitude de deux grandeurs de meſme genre, comparées l'vne à l'autre ſelon la quantité.

C'eſt à dire que quand deux quantitez de meſme genre, comme deux nombres, deux lignes, deux ſuperficies, deux ſolides, &c. ſont comparez entr'eux ſelon la quantité, c'eſt à dire ſelon que l'vne eſt plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale; telle comparaiſon eſt appellée raiſon, & par quelqu'vns proportion: Parquoy on ne peut pas dire qu'il y ait quelque raiſon d'vne ligne à vne ſuperficie; ou d'vn nombre à vne ligne, puis que ny la ligne, & la ſuperficie, ny le nombre & la ligne, ne ſont pas quantitez de meſme genre. Semblablement ſi on confere vne ligne auec vne ligne ſelon la qualité, c'eſt à dire

selon que l'vne est blanche, & l'autre noire, ou bien que l'vne est chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'vne & l'autre soient de mesme genre, ceste comparaison n'est pas dicte raison, pource qu'elle n'est pas faicte selon la quantité.

Or iaçoit que la raison se trouue proprement és seulles quantitez, si est-ce toutesfois que toutes autres choses, qui en quelque maniere prennent la nature de la quantité, comme sont les temps, les sons, les voix, les lieux, les mouuemens, les pois, & les puissances, sont aussi dictes auoir raison, si l'habitude d'iceux est considerée, selon la quantité, comme quand nous disons vn temps estre plus grand qu'vn autre temps, ou moindre; ou deux temps estre egaux, &c. telle habitude sera dicte raison, pource qu'alors les temps sont considerez ainsi que certaines quantitez.

En toute raison ceste quantité-là, qui est referée à vne autre, est dicte par Euclide, & autres Geometres, antecedant de la raison; & celle-là à laquelle elle est referée, est dicte consequent d'icelle raison: Comme en la raison de A à B; A est dict antecedant de la raison, & B consequent: Que si au contraire B est comparé à A; B sera appellé antecedant, & A consequent.

A.	B.
8.	10.

Or ceste raison definie par Euclide, est diuisée en raison rationelle, & irrationelle.

La rationelle, est celle qui se peut exprimer en nombres: comme la raison d'vne ligne de 10. pieds à vne autre de 5. pieds, laquelle est exhibée par ces nombres 10. & 5. Mais l'irrationelle, est ceste raison-là qui ne se peut exprimer en nombres: comme la raison du diametre d'vn quarré au costé d'iceluy, laquelle ne se peut trouuer ny exprimer en nombre, comme est demonstré par Euclide, en la derniere prop. du 10. liure.

Autres disent que la raison ou proportion rationelle, est celle qui a les deux quantitez commensurables, c'est à dire qui ont vne commune partie aliquote, ou bien qui sont mesurées par vne mesme commune mesure: comme la raison d'vne ligne de 20. pieds à vne autre de 8. pieds: car vne ligne de 4. pieds ou de 2. est partie aliquote de l'vne & l'autre de ces deux là, & par consequent mesure icelles. Mais la raison ou proportion irrationelle, est celle (disent-ils) qui a les deux quantitez incommensurables, c'est à dire qui n'ont nulle partie aliquote, ou desquelles on ne peut trouuer aucune commune mesure. Comme la raison du costé d'vn quarré à sa diagonalle, & de plusieurs autres lignes dont est traicté au 10. liure.

Ceste raison se diuise aussi en raison d'egalité, & d'inegalité: La raison d'egalité, est quand deux quantitez egales se comparent entr'elles, comme 10 à 10; vne ligne de 12. pieds à vne autre ligne de 12. pieds, &c. Mais la raison d'inegalité, est quand deux quantitez inegales se comparent entr'elles, cõme 10 à 4 est raison d'inegalité; telle est aussi celle de 5 à 9; celle d'vne ligne de 7. pieds à vne autre de 15. pieds, &c.

Ceste raison d'inegalité, est subdiuisée en raison d'inegalité maieure, & d'inegalité mineure. La raison d'inegalité maieure, est quand la plus grande quantité est comparée à la moindre: comme la raison de 8 à 5, est dicte raison d'inegalité maieure: item la raison d'vne ligne de 10 pieds à vne de 4. &c. Mais la raison d'inegalité mineure, est quand on compare la moindre quantité à la plus grande: comme la raison de 7. pieds à 9. s'appelle raison de moindre inegalité: item celle d'vne ligne de 9. pieds à vne autre de 12. pieds, &c.

La raison rationelle d'inegalité maieure, est diuisée en 5. genres, sçauoir raison multiple, superparticuliere, super-

partiente, multiple superparticuliere, & multiple superpartiente, les trois premieres desquelles sont simples, & les deux dernieres composées d'icelles premieres.

La raison multiple, est quand la plus grande quantité contient la moindre plusieurs fois precisément: & ceste raison contient sous soy diuerses especes. Car si la plus grande quantité contient la moindre deux fois precisément, elle est dite double: si trois fois, triple: si 4, quadruple: si dix, decuple, &c. Comme la raison de 20 à 4, est dite quintuple, pource que 20 contient 4. cinq fois; & la raison d'vne ligne de 18 pieds à vne autre de 3 pieds est dite sextuple, d'autant que 18 contient 3 six fois, & ainsi des autres.

La raison superparticuliere, est quand la plus grande quantité contient la moindre vne fois, & en outre vne partie aliquote d'icelle moindre: & ceste raison a diuerses especes. Car si ceste partie aliquote est moitié d'icelle moindre quantité; est constituée vne raison sesquialtere, comme la raison de 3 à 2 en laquelle 3 maieure quantité contient la moindre 2, vne fois & encore $\frac{1}{2}$ d'icelle; si elle est tierce partie, sesquitierce: si vne quarte partie, sesquiquarte: si vne cinquiesme partie, sesquiquinte, &c. commençant touſiours le nom de ladite raison par sesqui, & se terminant par le denominateur de la partie aliquote.

La raison superpartiente, est quand la plus grande quantité contient la moindre vne fois, & en outre plus d'vne partie aliquote dicelle: & a aussi ceste raison plusieurs especes. Car si la plus grande quantité contient la moindre vne fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'icelle, est constituée vne raison superbipartiente tierces, comme la raison de 20 à 12, en laquelle le nombre 20 contient 12, vne fois & $\frac{2}{3}$ d'icelluy: si $\frac{3}{4}$ sera constitué vne raison supertripartiente quarte, comme la raison d'vne ligne de 63 pieds à vne de 36.

& ainſi des autres, le nom d'icelles commençant touſiours par ſuper, & prenant à ſon milieu le numerateur de la partie aliquote, & le denominateur à la fin d'iceluy.

La raiſon multiple ſuperparticuliere, eſt quand la plus grande quantité contient la moindre pluſieurs fois, & encore vne partie aliquote d'icelle : ceſte-cy eſt compoſée de la premiere & de la deuxieſme ; & tout ainſi que chacune d'icelles contient pluſieurs eſpeces, auſſi faict celle-cy. Car ſi la plus grande quantité contient la moindre 2 fois, & encore $\frac{1}{2}$ d'icelle, ceſte raiſon ſera appellée double ſeſquialtere, comme la raiſon de 5 à 2, en laquelle 5 contient 2 deux fois & $\frac{1}{2}$ d'iceluy : ſi $\frac{1}{3}$ d'icelle, comme d'vne ligne de 7 pieds à vne de 3 pieds, ceſte raiſon s'appellera double ſeſquitierce : & la raiſon de 29 à 7, s'appellera quadruple ſeſquiſeptuple, d'autant qu'en 29, 7 eſt contenu 4 fois & $\frac{1}{7}$ d'iceluy, & ainſi des autres.

La raiſon multiple ſuperpartiente, eſt quand la plus grande quantité contient la moindre pluſieurs fois, & pluſieurs parties aliquotes d'icelle : ceſte raiſon eſt compoſée de la premiere & troiſieſme ; & tout ainſi que chacune d'icelles contient ſous ſoy pluſieurs eſpeces, auſſi faict ceſte-cy ; comme ſi la plus grande quantité contient la moindre 2 fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'icelle, ceſte raiſon ſera appellée double ſuperbipartiente tierce, comme eſt la raiſon de 8 à 3 : mais ſi elle la contient 3 fois, & encore $\frac{3}{4}$ d'icelle, elle s'appellera triple ſupertripartiente quarte, comme eſt la raiſon de 15 à 4 : ſi elle la contient 4 fois & encore $\frac{6}{7}$ d'icelle, elle ſera dite quadruple ſuperſextupartiente ſeptuple, comme eſt la raiſon de 34 à 7 ; & ainſi des autres.

Or tout ce qui a eſté dit cy deſſus des 5 eſpeces de raiſon rationelle d'inegalité maieure, ſe doit auſſi entendre des 5 eſpeces de l'inegalité mineure, excepté qu'il faut touſiours

apposer ceste syllabe Sub, *disant* submultiple *au lieu de* multiple, subsuperparticuliere, *au lieu de* superparticuliere, *& ainsi des autres.*

Pour ce que les denominateurs des raisons rationelles cy dessus exposées sont vtils, nous enseignerons icy par quels nombres elles se denomment. Nous appellons denominateur le nombre qui exprime distinctement & apertement l'habitude ou raison d'vne quantité à l'autre: comme le denominateur de la raison quintuple est 5, pource que ce nombre là monstre que la quantité maieure contient 5 fois la mineure. Semblablement le denominateur de la raison sesquiquarte est $1\frac{1}{4}$, pource qu'iceluy nombre signifie que la plus grande quantité contient la moindre vne fois & $\frac{1}{4}$ d'icelle: & ainsi des autres. C'est pourquoy, comme i'estime, Euclide au 6. liure, & autres Mathematiciens, appellent le denominateur de quelconque raison la quantité d'icelle; car il denomme, comme nous auons dit, combien vne quantité est en vne autre auec laquelle elle est conferée, ainsi qu'il appert par les exemples proposez.

Or de ces choses on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raison. Car le denominateur de la raison multiple, est le nombre entier contenant autant d'vnitez, que la plus grande quantité de la raison contient la moindre. Comme le denominateur de la raison double est 2. de la sextuple, 6. de la centuple 100, &c. Mais le denominateur de quelconque raison submultiple, est vn nombre rompu, duquel le numerateur est tousiours l'vnité: mais le denominateur est le nombre denommant la raison multiple correspondante. Comme le denominateur de la raison subdouble est $\frac{1}{2}$: de la subsextuple, $\frac{1}{6}$: de la subcentuple $\frac{1}{100}$, &c. Il est donc facile de trouuer le denominateur de quelconque raison multiple ou sub-

multiple, puis que la prolation monstre le denominateur de la raison, comme il est euident par les exemples proposez cy dessus.

Le denominateur de quelconque raison superparticuliere est l'vnité auec la partie aliquote que la maieure quantité doit comprendre outre la moindre. Comme le denominateur de la raison sesquialtere est $1\frac{1}{2}$: de la sesquitierce, $1\frac{1}{3}$; &c. Il n'est donc pas difficile de trouuer le denominateur d'vne raison superparticuliere, puis que la prolation d'icelle raison exprime le denominateur, par sa partie aliquote, comme il appert par les exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere est vn nombre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur seulement d'vne vnité. Comme le denominateur de la raison subsesquialtere, est $\frac{2}{3}$: & celuy de la subsesquitierce, est $\frac{3}{4}$, &c. Donc le denominateur de telle raison sera aisément trouué, car il n'y a qu'à prendre pour numerateur de la fraction, le denominateur de la partie aliquote; & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'vnité. Comme le denominateur de la raison subsesquiquinte est $\frac{5}{6}$: & celuy de la raison subsesquiseptiesme est $\frac{7}{8}$: mais celuy-là de la raison subsesquineufiesme est $\frac{9}{10}$.

Le denominateur de quelconque raison superpartiente, est vne vnité auec les parties aliquotes que la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison supertripartiente quartes est $1\frac{3}{4}$: celuy de la raison superquadripartiente quintes, est $1\frac{4}{5}$, & ainsi des autres. Or les denominateurs de telles raisons sont faciles à trouuer, pource que la prolation de la raison exhibe le propre denominateur, comme il appert és exemples cy dessus. Mais le denominateur de quelconque raison subsuperpartiente, est vn nombre rompu, duquel le numera-

teur eſt moindre que le denominateur, d'autant d'vnitez que la plus grande quantité contient de parties aliquotes par deſſus la moindre. Comme le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente quarte eſt $\frac{4}{7}$: celuy de ſubſuperquadripartiente quinte, eſt $\frac{5}{9}$, &c. On trouuera donc le denominateur de telle raiſon, ſi pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes exprimees en la raiſon, auquel ſi on adiouſte le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction: comme le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente quinte eſt $\frac{5}{8}$, pource que le numerateur de ceſte fraction eſt le nombre denommant les quintes, ſçauoir 5, auquel eſt adiouſté le nombre 3, des trois parties, à fin de faire 8, denominateur de la fraction: mais le denominateur de la raiſon ſubſuperquadrupartiente neufieſme eſt $\frac{9}{13}$: & ainſi des autres.

Le denominateur de quelconque raiſon multiple ſuperparticuliere eſt le nombre entier, denommant la multiple raiſon, auec la partie que la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raiſon triple ſeſquiſeptieſme eſt $3\frac{1}{7}$: mais celuy de la raiſon quadruple ſeſquiquinte eſt $4\frac{1}{5}$, &c. Le denominateur de telle raiſon eſt aiſé à exhiber, pource que la prolation de la raiſon exprime diſtinctement tant le denominateur de la multiple raiſon, que la partie aliquote, comme ſe voit és exemples propoſez. Et le denominateur de quelconque raiſon ſubmultiple ſuperparticuliere eſt vne fraction dont le numerateur eſt le nombre denommant les parties aliquotes obtenues en la raiſon. Comme le denominateur de la raiſon ſubtriple ſeſquiquarte eſt $\frac{4}{13}$: de ſubquintuple ſeſquiſneufieſme, $\frac{9}{46}$, &c. On trouuera le denominateur de telle raiſon, ſi pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur de la partie aliquote, & iceluy eſtant multiplié

par le denominateur de la raison multiple, si on adiouste 1 au produit, on aura le denominateur de la fraction comme il est manifeste par les exemples cy dessus.

Le denominateur de quelconque raison multiple superpartiente, est le nombre entier, denommant la raison multiple obtenue en icelle, auec les parties aliquotes que doit comprendre la plus grande quantité de la moindre. Comme le denominateur de la raison triple superbipartiente tierces, est $3\frac{2}{3}$: de quadruple supertripartiente quintes, $4\frac{3}{5}$, &c. Il est facile de trouuer le denominateur de telles raisons, pource que la prolation exprime distinctement, tant le denominateur de la raison multiple, que les parties aliquotes, comme appert és exemples cy dessus: & le denominateur d'vne raison submultiple superpartiente, est vne fraction, dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le denominateur de la raison subtriple superbipartiente tierces, est $\frac{3}{1}$: de subquadruple supertripartiente quintes, est $\frac{5}{2\frac{3}{5}}$, &c. Le denominateur de telles raisons sera trouué, si pour le numerateur de la fraction on prend le demoniateur des parties aliquotes: lequel estant multiplié par le denominateur de la raison multiple, & au nombre produit adiousté le nombre des parties aliquotes, viendra le denominateur de la fraction, ainsi qu'il appert és exemples posés cy dessus.

Finablement le denominateur de la raison d'egalité est touſiours l'vnité, pource que les quantitez d'icelle raison sont egales entr'elles; & partant l'vne contient l'autre vne fois precisément.

4. Proportion, est vne similitude de raisons.

Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles

eſt dicte raiſon, ainſi la comparaiſon de deux ou pluſieurs raiſons entr'elles, eſt dicte proportion: comme ſi la raiſon de A à B, eſt ſemblable à la raiſon de C à D,

l'habitude d'entre ces raiſons ſera dicte proportion. Or ceſte proportion eſt cõtinue ou diſcrete: la continuë eſt celle de laquelle

A. B. C. D.
8. 12. 18. 27.

les grandeurs entre moyennes ſont priſes deux fois, tellement qu'il ne ſe faict nulle interruption de raiſons, ains chaque quantité entre moyenne eſt antecedant & conſequent, ſçauoir antecedant de la quantité ſubſequente, mais conſequent à la quantité antecedante: comme ſi on dict, que telle qu'eſt la raiſon de A à B, telle eſt celle de B à C, où la quantité B eſt antecedant de la quantité C, mais conſequent de la quantité A. Mais proportion diſcrette ou non continuë, eſt celle en laquelle chaſque quantité entremoyenne eſt priſe ſeulement vne fois, tellement qu'il ſe faict interruption de raiſons, & aucune quantité n'eſt antecedant & conſequent, mais ſeulement antecedant ou conſequent: comme quand on dict que la raiſon de A à B, eſt comme celle de C à D.

5. Les grandeurs ſont dictes auoir raiſon l'vne à l'autre, leſquelles eſtans multipliées ſe peuuent exceder l'vne l'autre.

Euclide ayant en la 3. def. appellé raiſon l'habitude de deux grandeurs de meſme genre, il explique en ceſte-cy quelle choſe requierent deux quantitez de meſme genre, à fin qu'elles ſoient dites auoir raiſon, ſçauoir eſt que l'vne ou l'autre d'icelles eſtant multipliée, elles s'augmente en ſorte, que finablement elle ſurpaſſe l'autre: ainſi il y a raiſon entre le coſté d'vn quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le coſté multiplié par 2, c'eſt à dire pris deux fois, excede le diametre. Car d'autant que deux coſtez du quarré, & le diametre conſtituent vn triangle Iſoſcele, par la 20. p. 1. les deux coſtez du quarré ſeront plus

grands que le diametre. Ainſi pareillement entre la circonference d'vn cercle & le diametre d'icelluy, il y a raiſon (laquelle toutesfois n'eſt encore cogneuë) puis que le diametre multiplié par 4, c'eſt à dire pris 4, fois, excede la circonference: car toute la circonference, comme il eſt demonſtré par Archimede, ne contient que trois fois le diametre, & encore vne particule peu moindre qu'vne ſeptieſme partie d'iceluy diametre. Mais il s'enſuit de ceſte def. qu'vne ligne finie n'aura raiſon à vne infinie, encores qu'icelles deux lignes ſoient de meſme genre de quantité: car en quelque ſorte que ſoit multipliée la ligne finie, elle ne pourra ſurpaſſer l'infinie. S'enſuit auſſi qu'il n'y a point de raiſon entre vn angle rectiligne, & vn angle contingent. Car il appert de la 16. p. 3. qu'iceluy angle contingent, ne peut iamais exceder vn angle rectiligne.

6. Les grandeurs ſont dites eſtre en meſme raiſon, la premiere à la ſeconde, comme la troiſieſme à la quatrieſme, quand les equemultiplices de la premiere & troiſieſme, aux equemultiplices de la ſeconde & quatrieſme, en quelque multiplication que ce ſoit, defaillent enſemble, ſont egales, ou excedent, vn chacun à vn chacun, prenant celles-là qui s'entre reſpondent.

Ayant eſté dit par Euclide, que c'eſt que raiſon, & quelles grandeurs ſont dites auoir raiſon l'vne à l'autre, maintenant il declare quelle condition requierent les grandeurs pour eſtre en meſme raiſon, ſçauoir eſt que les equemultiplices de la premiere & troiſieſme grandeur excedent, ſoient egales

ou defaillent aux equemultiplices de la deuxies. & quatries-me, en quelque multiplication que soient prises icelles equemultiplices ; comme appert en ces quatre quantitez A, B, C, D, où les equemultiplices de A & C, premiere & tierce sont E & F, & les equemultiplices de B & D, seconde & quatriesme quantitez sont G, & H ; tellement qu'il se voit qu'ayant multiplié A, & C, par vn mesme nombre ; & B, D par quelconque mesme nombre ; si la multiplice E excede la multiplice G qui luy correspond, aussi la multiplice F excede la multiplice H ; si elle est egale, l'autre sera aussi egale ; si elle defaut, aussi sera l'autre, & ce en quelque multiplication qu'on prenne les equemultiplices : & partant il y a mesme raison de A premiere quantité à B seconde, que de C troisiesme à D 4.

A. B. C. D.
6. 3. 4. 2.

E. G. F. H.
24. 15. 16. 10.
30. 30. 20. 20.
12. 21. 8. 14.

Par la conuerse de ceste def. s'il y a telle raison de la premiere à la seconde, que de la troisiesme à la quatriesme, il s'ensuit que les equemultiplices de la premiere & troisiesme excedent, sont egales, ou defaillent aux equemultiplices de la deuxies. & quatriesme, engendrees de quelque multiplication que ce soit.

Et aussi s'il n'y mesme raison de la premiere à la seconde, que de la tierce à la quatriesme, il s'ensuiura que les equemultiplices de la premiere & troisiesme n'excederont, ne seront egales, ou ne defaudront aux equemultiplices de la deuxies. & quatriesme produites de quelque multiplication que ce soit.

Or ce qui est dit icy de quatre grandeurs se doit aussi entendre de trois, prenant celle du milieu deux fois, à fin qu'il y en ait quatre.

7. Les grandeurs qui sont en mesme

raiſon ſont appellées proportionnelles.

Comme ſi des grandeurs A, B, C, D, il y a meſme raiſon de A à B, que de C à D, icelles grandeurs ſont dites proportionnelles. A. B. C. D. 12. 8. 6. 4.

Et les grandeurs E, F, G, leſquelles ſont en proportion continuë, ſont auſſi dites continuellement proportionnelles. E. F. G. 12. 6. 3.

8. Quand des equemultiplices, celuy de la premiere grandeur excede celuy de la ſeconde, & le multiplice de la troiſieſme n'excede celuy de la quatrieſme, lors il y aura plus grande raiſon de la premiere grandeur à la ſeconde, que de la troiſieſme à la quatrieſme.

Euclide declare icy quelle condition doivent auoir 4 grandeurs, à fin que la premiere ſoit dite auoir plus grande raiſon à la ſeconde que la tierce à la 4. diſant qu'ayant pris les equemultiplices de la 1. & de la 3, & les equemultiplices de la 2. & 4. ſi la multiplice de la premiere excede la multiplice de la 2. mais la multiplice de la 3. n'excede la multiplice de la 4. il y aura plus grande raiſon de la premiere à la ſecõde, que de la 3. à la 4. comme il appert en l'exemple icy poſé, auquel ſont prinſes E, & F, doubles de A & C, 1. & 3. grandeurs, mais G & H triples de B & D 2. & 4. grandeurs: & pource que E multiplice de A 1. eſt plus grande que G multiple de B 2. & F multiplice de C 3. n'eſt pas plus grande que H multiplice de D 4. la raiſon de A 1. grandeur à B 2, eſt dite plus grande que la raiſon de C 3. à D 4. A. B. C. D. 6. 2. 4. 3. E. G. F. H. 12. 6. 8. 9.

Or à fin que quatre grandeurs soient dites estre en mesme raison, il est necessaire que les equemultiplices d'icelles, prises selon quelconques multiplications, excedent, soient egales, ou defaillent, comme il a esté exposé en la 6. def. Mais à fin que la premiere grandeur soit dicte auoir plus grande raison à la 2. que la 3. à la 4. c'est assez que des equemultiplices prises selon quelque multiplication, celle de la premiere grandeur excede celle de la deuxiesme: & la multiplice de la troisiesme n'excede celle de la quatriesme, encore que selon plusieurs autres multiplications ces equemultiplices ne soient telles. Parquoy pour conclure en quelque demonstration qu'il y a plus grande raison d'vne grandeur à vne autre, que d'vne troisiesme à vne quatriesme. il suffira de demonstrer que selon quelque multiplication, la multiplice de la premiere grandeur excedant celle de la seconde, la multiplice de la troisiesme n'excede celle de la quatriesme.

Et conuertissant ceste 8. def. s'il y a plus grande raison de la premiere grandeur à la deuxiesme, que de la troisiesme à la quatriesme, la multiplice de la premiere excedant celle de la deuxiesme, il se peut faire quelque multiplication par laquelle la multiplice de la troisiesme n'excede celle de la quatriesme.

Que si au contraire d'icelle def. la multiplice de la premiere grandeur ne surmonte celle de la 2. & la multiplice de la 3. excede celle de la 4. la premiere grandeur sera dite auoir moindre raison à la 2. que la 3. à la 4. La conuerse a aussi lieu.

9. Proportion ne peut estre constituée sur moins de trois termes.

Puis qu'il a esté dit en la 3. def. que raison est l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4. def. est vne similitude de deux ou plusieurs raisons: il s'ensuit qu'il n'y peut auoir moins de trois quantitez ou termes en vne proportion, si elle est proportion continuë, mais en faut quatre au moins, si elle est proportion discrette.

10. Quand trois grandeurs ſont proportionnelles, la premiere eſt dite auoir à la troiſieſme la raiſon doublée de la premiere à la ſeconde: ſ'il y en a quatre, la premiere eſt dite eſtre à la quatrieſme, en raiſon triplée de la premiere à la ſeconde: & touſiours d'vn meſme ordre vne plus, iuſques à ce que la proportion ſoit acheuée.

Comme ſi les grandeurs A, B, C, D, E, ſont continuellement proportionnelles, la premiere quantité A eſt dite auoir à la 3. quantité C, la raiſon doublée de celle de A à la ſeconde B, pource qu'entre A & C ſont deux raiſons, qui ſont egales à la raiſon de A à B, ſçauoir eſt la raiſon de A à B, & celle de B à C, tellement que la raiſon de A à C preſ par ce moyen la raiſon doublée de A à B, c'eſt à dire poſée deux fois d'ordre. Mais la raiſon de la premiere grandeur A à la 4. D, eſt dicte triplée de celle de A à B, pource qu'entre A & D ſe trouuent trois raiſons, leſquelles ſont egales à celle de A à B: c'eſt à ſçauoir la raiſon de A à B, celle de B à C, & celle de C à D: & partant la raiſon de A à D enclost par ce moyen la raiſon triplée de A à B, c'eſt à dire poſée trois fois d'ordre. Et ainſi pareillement la raiſon de A à E, eſt dicte quadruplée de la raiſon de A à B; pource qu'entre A & E ſont encloſes 4. raiſons qui ſont egales à celle de A à B, &c.

A.	B.	C.	D.	E.
16.	24.	36.	54.	81.

Dunot a retranché de ceſte def. ces mots: Et touſiours d'vn meſme ordre vne plus, iuſques à ce que la proportion ſoit finie.

11 Les grandeurs sont dites homologues, ou de semblables raisons, les antecedans aux antecedans, & les consequens aux consequens.

C'est à dire que si plusieurs quantitez sont proportionnelles, comme A, B, C, D, sçauoir que comme A est à B, ainsi C soit à D, les quantitez A & C, antecedantes de chasque raison, seront dites homologues, ou de semblable raison, comme aussi les quantitez consequentes B & D. Ainsi pareillement, si les quantitez E, F, G, sont proportionnelles aux quantitez H, I, K: les termes E, & H, seront dictes homologues ou de semblable raison: comme aussi le terme F sera dict homologue au terme I: & aussi G à K: ainsi les costez des figures estans comparez entr'eux, on entend quels costez doiuent estre antecedans des raisons, & quels consequens.

	A.	B.	C.	D.
	4.	2.	6.	3.
	E.	F.	G.	
	2.	4.	8.	
	H.	I.	K.	
	3.	6.	12.	

12. Raison alterne, est prendre l'antecedant comparé à l'antecedant, & le consequent au consequent.

Euclide explique en ceste def. & és suiuantes, aucuns moyens d'argumenter és proportions, desquels l'vsage est fort frequent en la Geometrie. Il dict donc icy que la raison alterne ou permutée, est quand de quatre grandeurs proportionnelles proposées, comme A, B, C, D, sçauoir que comme A est à B, ainsi C est à D; on vient à conclure qu'il y a mesme raison de l'antecedant A à l'antece-

	A.	B.	C.	D.
	4.	6.	2.	3.

dant

dant C, que du consequent B au consequent D: & ceste maniere d'argumenter se couche ordinairement ainsi : comme A est à B, ainsi C est à D : donc en permutant, comme A sera à C, ainsi B à D. Or il est necessaire qu'en ceste maniere d'argumenter, les quatre grandeurs soient de mesme genre. Car le nombre A estant au nombre B, comme vne superficie E est à vne superficie F; de vouloir inferer cõme a faict Dounot en plusieurs endroicts, & notamment és 17. p. 5; 29. 48 & 85. p. 10. qu'en permutant le nombre A est à la superficie E, comme le nõbre B à la superficie F, c'est se moquer ; puis qu'il n'y a nulle raison du nombre à la superficie, comme il appert par les 3 & 5. def. Ceste maniere d'argumenter est demonstrée en la 16. p. de ce liure.

13. Raison inuerse ou transposée, est lors qu'on prend le consequent comme antecedant pour le comparer à l'antecedant, comme si c'estoit le consequẽt.

Comme si A est à B, ainsi que C à D, nous infererons que par raison inuerse, comme B est à A, ainsi D est à C, c'est à dire les consequens aux antecedans. En ceste sorte d'argumenter les autheurs parlent presques ainsi: comme A est à B, ainsi C est à D : donc en changeant, ou au contraire, B sera à A, comme D à C. Ceste maniere d'argumenter sera demonstrée au coroll. de la 4. p. de ce liure.

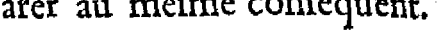
A. B. C. D.
4. 6. 2. 3.

Ceste def. a esté tellement traduicte par Dounot, que le sens d'Euclide n'y peut estre recognu.

14. Composition de raison, est lors qu'on prend l'antecedant auec le consequent, comme vne seule chose, pour

le comparer au mesme consequent.

Comme si AC est à CB, comme DF à FE: & on vient à conclure que la toute AB est à CB, comme la toute DE à FE; c'est à dire que la composée de l'antecedant AC & du consequent CB, est au mesme consequent CB, comme la composée de l'antecedant DF & du consequent FE est à iceluy consequent FE: ceste maniere d'argumenter sera dicte composition de raison: & se prononcee ainsi: comme AC est à CB, ainsi DF à FE: donc en composant AB sera à CB, comme DE à FE: laquelle sorte d'argumentation sera demonstrée en la 18. p. de ce liure.



A ce moyen d'argumenter, par la composition de raison, en peuuent estre adjoustez deux autres: le premier peut-estre dict composition conuerse de raison: sçauoir quand on prend l'antecedent & consequent comme vn seul, pour le comparer à l'antecedant. Comme si AC est à CB, comme DF à FE; & nous inferons, donc comme AB composée de l'antecedant, & du consequent, est à l'antecedant AC, ainsi DE composée de l'antecedant & du consequent est à l'antecedant DF: laquelle argumentation nous demonstrerons estre valide sur la 18. p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut-estre dit composition contraire de raison; c'est à sçauoir quand l'antecedant est comparé à l'antecedant & consequent comme vn seul. Comme si AC est à CB, ainsi que DF à FE, & nous inferons par composition contraire de raison: donc comme AC l'antecedant sera à la toute AB, composée de l'antecedant & du consequent, ainsi DF antecedant sera à la toute DE, composée de l'antecedant & du consequent. Nous demonstrerons sur la 18. p. de ce liure que ceste forme d'argumentation est vallable

15. Diuiſion de raiſon, eſt lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent, pour le comparer à iceluy meſme conſequent.

Comme ſi on dit qu'il y a telle raiſon de AB *à* CB, *(ſoit veuë la precedente figure) que de DE à FE: donc auſſi AC, excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent ſera à CB conſequent, comme DF excez par lequel l'antecedant excede le conſequent, ſera à FE conſequent. Or les autheurs concluent ordinairement auec ceſte raiſon ainſi: comme AB eſt à CB, ainſi DE eſt à FE: donc en diuiſant AC ſera auſſi à* CB, *comme DF à FE. Ce qui ſera demonſtré en la 17. de ce liure.*

A ce moyen d'argumenter en peuuent auſſi eſtre adiouſtez deux autres: le premier peut eſtre appellé diuiſion conuerſe de raiſon, c'eſt à ſçauoir quand le conſequent eſt comparé à l'excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent. Comme ſi AB *eſt à* CB, *comme DE à FE, & nous inferons: donc auſſi par diuiſion conuerſe de raiſon, comme* CB *conſequent ſera à AC, excez par lequel l'antecedant ſurmonte le conſequent, ainſi FE conſequent ſera à DF, excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent: laquelle maniere d'argumẽtatiõ nous demõſtrerons pouuoir eſtre ſur la 17. p. 5. Il eſt manifeſte, qu'en l'vne & l'autre d'icelles argumẽtations par diuiſiõ de raiſon, l'antecedãt doit eſtre plus grand que le conſequent.*

L'autre moyen d'argumenter peut eſtre dit diuiſion contraire de raiſon, c'eſt à ſçauoir quand l'antecedant eſt conferé à l'excez, par lequel le conſequent excede l'antecedant. Comme quand on dit, AC *eſtre à* AB, *comme DF à DE: Donc auſſi par diuiſion contraire de raiſon AC antecedant ſera à* CB, *excez par lequel le conſequent ſurmonte l'antecedant, comme DF antecedant ſera à FE, excez par lequel le*

conſequent ſurpaſſe l'antecedant: lequel moyen d'argumenter nous demonſtrerons ſur la 17. p. de ce liure.

Il eſt euident qu'en ceſte diuiſion contraire de raiſon, le conſequent doit eſtre plus grand que l'antecedant.

16. Conuerſion de raiſon, eſt comparer l'antecedant à l'excez, par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent.

Comme ſi on dit, que comme A B eſt à C B, (ſoit veuë la figure de la 14. def.) ainſi D E à F E: & on vient à conclure que A B antecedant ſera auſſi à A C, excez par lequel il ſurmonte le conſequent, comme D E antecedant ſera à D F, excez par lequel l'antecedant excede le conſequent, cela ſera dit conuerſion de raiſon. En ceſte ſorte d'argumenter les autheurs parlent ordinairement ainſi: comme A B eſt à C B, ainſi D E eſt à F E: Donc par conuerſion de raiſon A B ſera à A C, comme D E à D F: laquelle ſorte d'argumenter ſera demonſtrée au corell. de la 19. p. de ce liure. Ceſte 16. def. a eſté retranchée par Dounot.

17. Raiſon egalle, eſt lors qu'il y a pluſieurs grandeurs d'vn coſté, & autant de l'autre en multitude, priſe de deux en deux en meſme raiſon, & que la premiere des premieres grandeurs, eſt à la derniere des meſmes, comme la premiere des ſecondes eſt à la derniere des meſmes.

Autremẽt, c'eſt lors qu'on prẽd les extremes par la ſouſtractiõ des moyennes.

Comme s'il y a d'vn coſté quatre quantitez, A, B, C, D; & autant d'vn autre E, F, G, H, leſquelles ſoïẽt priſes deux à deux en meſme raiſon, c'eſt à dire que A ſoit à B, comme E à F; & B à C, comme F à G; & C à D comme G à H: on infere que comme A eſt à D, premiere & derniere des premieres grandeurs, ainſi E eſt à H, premiere & derniere des ſecõdes. Ceſte maniere d'argumentation eſt dite raiſon egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que ceſte maniere d'argumenter ſe prend ordinairement en deux ſortes, ſçauoir eſt, quand les grandeurs qui ſont en meſme raiſon ſont priſes d'ordre; & quand l'ordre eſt peruerty: Euclide explique és deux def. ſuiuantes que c'eſt que proportion ordonnée, & perturbée.

A. B. C. D.	
1. 4. 8. 16.	
E. F. G. H.	
3. 6. 12. 24.	

18 Proportion ordonnée, eſt quand l'antecedant eſt au conſequent, comme l'antecedant eſt au conſequent de l'autre: & ainſi qúe l'vn des conſequens eſt à quelque autre, l'autre conſequent ſoit auſſi à quelque autre.

Cecy eſt aiſé à entendre par l'exemple de la def. precedente, où nous auons poſé A eſtre à B, cõme E à F; & B à C, comme F à G, & C à D, cõme G à H: Car ainſi les termes des 4. premieres quantitez ſont pris d'vn meſme ordre, que ceux des 4 dernieres; & partant ceſte proportion eſt dicte ordonnée. Or que le moyen d'argumenter par raiſon d'egalité, la proportion d'ordre eſtant obſeruée, ſoit bon, il ſera demonſtré en la 22. p. de ce liure.

19. Proportion troublée eſt quãd trois grandeurs eſtans d'vn coſté, & autant

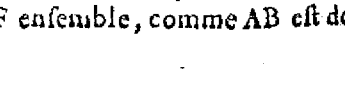
d'vn autre, la premiere eſt à la ſeconde, comme la cinquieſme à la ſixieſme, & comme la ſeconde à la troiſieſme; ainſi la quatrieſme à la cinquieſme.

Comme ſi A eſt à B, ainſi que E eſt à F; & comme B eſt à C, ainſi D à E: ceſte proportion ſera dicte troublée ou perturbée, d'autant qu'vn meſme ordre n'eſt pas gardé en la comparaiſon des premieres grandeurs entr'elles, qu'és ſecondes auſſi entr'elles. Car és premieres quantitez, la premiere eſt comparée à la ſeconde, & ceſte-cy à la 3: mais és ſecondes quantitez la 2 eſt comparée à la 3, & la premiere à la ſeconde. Or que le moyen d'argumenter par raiſon egale, la proportion troublée eſtant gardée, ſoit bon, il ſera demonſtré en 23. p. de ce liure.

A. B. C. 12. 8. 4.
D. E. F. 12. 6. 4.

THEOR. 1. PROP. I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices d'autãt d'autres grãdeurs, chacune à la ſienne; comme l'vne ſera multiplice de l'vne, ainſi les toutes ſeront multiplices des toutes.



Soient tant de grãdeurs qu'on voudra A B & C D, equemultiplices d'autant d'autres grandeurs E & F. Ie dis que les grandeurs AB & CD enſemble, ſeront autant multiplices de E & F enſemble, comme AB eſt de E, ou CD de F.

Car puis que A B eſt multiplice de E ; E meſurera AB certain nombre de fois par la 2. def. de ce liure, qu'elle la meſure donc trois fois, & ſoit icelle AB couppée en trois parties egales, AG, GH, HB, qui ſeront chacune egale à E. Le meſme ſe peut dire de la grandeur CD, laquelle on couppera auſſi en trois parties egales, CI, IK, KD, eſtant chacune d'icelles egale à F : mais qui a choſes egales, ſçauoir à AG & E, adjouſte choſes egales, ſçauoir CI & F, les toutes AG, CI enſemble, ſeront egales aux toutes E & F enſemble. Par meſme raiſon G H & I K enſemble, ſeront egales à icelles E & F enſemble; pareillement H B & KD, aux meſmes E & F. Autant donc qu'il y a de grandeurs en A B, egales à E; & en CD egales à F ; autant y en a-il en AB & CD priſes enſemble, qui ſont egales à E & F priſes enſemble : Parquoy les deux AB & C D enſemble, ſeront triples des deux enſemble E & F, comme la ſeule A B eſt triple de la ſeule E, ou la ſeule CD de la ſeule F. S'il y a donc tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, que la troiſieſme de la quarte ; & la cinquieſme autant multiplice de la ſeconde, que la ſixieſme de la quarte ; la compoſée de la premiere &

cinquieſme, ſera autant multiplice de la ſeconde, comme la compoſée de la troiſieſme & ſixieſme, de la quarte.



Soit la premiere grandeur AB, autant multiplice de la ſeconde C, comme la 3. DE l'eſt de la 4. F: & ſoit la 5. BG autant multiplice de la 2. C, comme la 6. EH, de la 4. F: Ie dis que la 1. & 5. enſemble AB & BG, ſeront autant multiplice de la 2. C comme la 3. & 6. DE & EH enſemble, le ſeront de la 4. F.

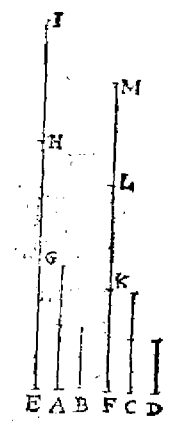
Car puis que AB eſt autant multiplice de C, comme DE de F, il y a en AB autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DE d'egales à F. Par meſme raiſon, il y aura auſſi en BG autant de grandeurs egales à C, comme il y en a en EH d'egales à F. Il y aura donc en AG autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DH d'egales à F: parquoy AG compoſée de la premiere & 5. eſt autant multiplice de la ſeconde C, comme DH compoſée de la 3. & 6. l'eſt de la 4. F. Parquoy ſi la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, que la troiſieſme de la quarte, &c. Ce qu'il falloit démonſtrer.

THEOR. 3. PROP. 111.

Si la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, comme la tierce de la quarte; & on prend des equimultiplices

de la premiere, & troisiesme: la multiplice de la premiere sera aussi autãt multiplice de la seconde, que la multiplice de la tierce le sera de la quarte.

Soit A autãt multiplice de B, comme C l'est de D; & de la 1. & 3. A, C, soient prises les equemultiplices E, & F. Ie dis que E sera autant multiplices de B, que F de D.



Car puis que E est autant multiplice de A, que F l'est de C: E contiendra autant de parties egales à A, comme F de parties egales à C. Soit donc E diuisée en E G, G H, & H I, chacune egale à A: Item F diuisee en F k, K L & L M, chacune egale à C: & d'autant que E G & & F K sont egales à A & C, lesquelles sont equemultiplices de B & D par l'hypothese, aussi E G & F K seront equemultiplices des mesmes B & D. Par mesme raison G H & K L: item H I & L M, seront equemultiplices d'icelles B & D. Veu donc que E G premiere grandeur est autant multiplice de la seconde B, que F K 3. l'est de D 4. item G H 5. autant multiplice de la mesme seconde B, que K L 6. de la 4. D; aussi E H composée de la 1. & 5. sera autant multiplice de la 2. B, que F L composee de la 3. & 6. l'est de la 4. D, par la precedente prop. Derechef puis que E H premiere grandeur est autant multiplice de la seconde B que F L 3. l'est de D 4. &

H I 5. eſt auſſi autant multiplice de la ſeconde B, que L M 6 l'eſt de la 4. D:E I compoſee de la 1. & 5. ſera auſſi autant multiplice de la 2 B, que F M compoſee de la 3 & 6 l'eſt de D 4. par la 2. prop. de ce liure. Si donc la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, &c. ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si la premiere eſt à la ſeconde, en meſme raiſõ que la tierce à la quarte: auſſi les equemultiplices de la premiere & tierce, auront meſme raiſon aux equemultiplices de la ſecõde & quarte, en quelque multiplicatiõ que ce ſoit, ſi elles ſont priſes ainſi qu'elles s'entrereſpondent.



Soit A à B en meſme raiſon que C à D, & ſoiẽt priſes E & F equemultiplices de A premiere & C 3: ſtẽ G & H equemultiplices de B 2. & D 4. ſelõquelque multiplicatiõ que ce ſoit. Ie dis qu'il y a meſme raiſon de E à G, que de F à H.

Car ſi on prend I & K equemultiplices de E & F, pareillement L & M equemultiplices de G & H: d'autant que E premiere eſt autant multiplice de A 2. que F 3. l'eſt de C 4. & I, k ſont

prinſes equemultiplices d'icelles E, F, premiere & tierce; auſſi par la 3. prop. de ce liure I & K, ſeront equemultiplices de A & C, ſeconde & quarte. Par meſme raiſon L & M, ſeront auſſi equemultiplices de B & D: & puis que A eſt à B cõme C à D: & d'icelles A & C, I & K ont eſté demõſtrées I & K equemultiplices, mais de B & D, 2 & 3 autres equemultiplices L & M: par la conuerſe de la 6 def. de ce liure, ſi I deffaut, eſt egale, ou plus grande que L, auſſi K deffaudra, ſera egale, ou plus grãde que M, ſelon quelconques multiplications qu'icelles equemultiplices ſoient priſes. Et pour autant que I & K, ſont equemultiplices de E & F; pareillement L & M de G & H, par la meſme 6 def. il y aura meſme raiſon de E à G, comme de F à H. Si donc la premiere eſt à la ſeconde en meſme raiſon que la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

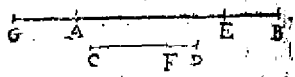
Par cecy eſt manifeſte la preuue de la raiſon inuerſe, qu'Euclide a expliquee en la 13. def. de ce liure, ſçauoir eſt, que ſi 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront auſſi eſtans priſes à rebours, c'eſt à dire que E eſtant à G comme F à H, auſſi en changeant G ſera à E comme H à F. Car puis qu'il a eſté demonſtré que ſi I defaut, eſt egale, ou plus grande que L, auſſi K defaudra, ſera egale, ou plus grande que M: ſelon quelconques multiplices. Il appert auſſi que ſi L defaut, eſt egale, ou plus grande que I, auſſi M defaudra, ſera egale, ou plus grande que K, ſelon quelconques multiplications: Et partant par la 6 def. il y aura meſme raiſon de G à E que de H à F.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne grandeur eſt autant multiplice

d'vne grandeur, que la retranchee de la retranchee: auſſi le reſte ſera autant multiplice du reſte, que la toute de la toute.

Soit la toute A B, autant multiplice de la toute CD, comme la retranchee AE, de la retranchee CF. Ie dis que le reſte E B ſera autant multiplice du reſte F D, que la toute AB eſt de la toute CD.



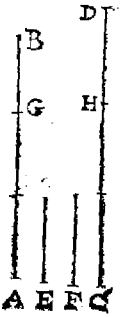
Car AG eſtant faicte autant multiplice de F D, comme AE eſt de CF, ou comme la toute A B l'eſt de la toute de C D: d'autant que AE, AG ſont equemultiplices de CF, FD: par la 1. prop. de ce liure la toute GE, ſera autant multiplice de la toute C D, comme A E de C F: Mais auſſi A B, eſtoit autãt multiplice de CD comme AE de CF: donc GE, AB, ſont equemultiplices de C D, & partant egales entr'elles par la 6. com. ſent. Parquoy en oſtant ce qui eſt de commun A E, demeureront egales G A, E B; & partant ſeront equemultiplices de F D, puis que G A a eſté poſée multiplice d'icelle F D, & autant comme A B de C D: donc auſſi le reſte E B ſera autant multiplice du reſte F D, que la toute AB l'eſt de la toute C D. Parquoy ſi vne grandeur eſt autant multiplice d'vne grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs ſont equemultiplices

de deux autres grandeurs, & d'icelles on retranche des equemultiplices: ou les restes seront egaux aux mesmes, ou equemultiplices d'icelles.

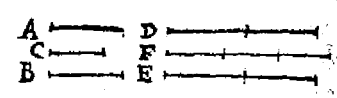
Soient les grandeurs A B, C D, equemultiplices des grandeurs E, F, & les retranchees A G, C H aussi equemultiplices des mesmes E, F. Ie dis que les restes G B, H D, seront ou egales aux mesmes E, F, ou equemultiplices d'icelles.



Car d'autant que A B & C D, sont equemultiplices de E & F; en A B il y aura autãt de grandeurs egales à E comme en C D de grandeurs egales à F. Pareillement d'autant que la retranchee A G est autant multiplice de E, que la retranchee C H l'est de F; A G contiendra autant de grandeurs egales à E, que C H de grandeurs egales à F, par la 1. & 2. def. de ce liure. Si donc d'egales multitudes de grandeurs A B & C D, on oste egales multitudes de grãdeurs A G, C H, les multitudes demeurantes G B, H D seront egales: c'est à dire que G B contiendra autant de fois E, comme H D contiendra F; ou bien si G B est egale à E, aussi H D sera egale à F: & par ainsi iceux restes G B, H D seront egales à E & F, chacune à la sienne, ou bien seront equimultiplices d'icelles. Parquoy si deux grandeurs sont equimultiplices de deux autres grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Les grandeurs egales : ont meſme raiſon à vne meſme : & ceſte-cy aura meſme raiſon aux grandeurs egales.



Soient deux grandeurs egales A & B, & vne autre quelle qu'elle ſoit. C. Ie dis que A & B ont meſme raiſon l'vne que l'autre à C; & que C aura meſme raiſon à A que à B.

Qu'il ne ſoit ainſi; ſoient pris D & E equemultiplices de A premiere, & B tierce, ſoit auſſi pris F quelconque multiplice de C, ſeconde & quarte: donc pour autant que D eſt autant multiplice de A, que E eſt multiplice de B; & que A & B ſont poſées egales: auſſi D & E ſeront egales par la 6. com. ſent. Si donc D eſt plus grande, egale, ou plus petite que F, auſſi E ſera plus grande, egale, ou plus petite que la meſme F, & par la ſuſdite def. de ce liure, il y aura telle raiſon de A à C, comme de B a la meſme C.

Quant à l'autre partie, elle ſe prouue tout de meſme par la ſuſdite def. en prenant les meſmes equemultiplices, & monſtrant l'excez, &c. ou bien plus facilement par la raiſon inuerſe. Car puis qu'il a eſté demonſtré que A eſt à C comme B à C, en changeant C ſera à A, comme C à B par le corol. de la 4. prop. de celiure. Donc les grandeurs egales ont meſme raiſon à vne meſme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

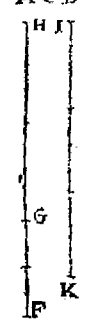
Des grandeurs inegales, la plus grande

a plus grande raiſon à vne meſme, que la plus petite: & vne meſme a plus grande raiſon à la plus petite, qu'à la plus grande.

Soient deux grandeurs inegales A B & C, deſquelles A B eſt la plus grande, & vne troiſieſme quelle quelle ſoit D. Ie dis que A B a plus grande raiſon à la troiſieſme D, que non pas C: item, que D a plus grande raiſon à C, qu'à A B.



Qu'il ne ſoit ainſi: ſoit entenduë A B, premiere grandeur, D ſeconde, C tierce, & D quarte. D'autant que A B eſt plus grande que C, ſoit rettanchée A E egale à icelle C, & ſoient trouuées les equemultiplices, à ſçauoir F G de B E, & G H de E A, en ſorte que F G & G H ſoient plus grandes chacune que D: & puis que les deux F G, G H, ſont equemultiplices des deux B E, E A, par la 1. prop. de ce liure, la toute H F ſera autant multiplice de la toute A B, comme H G de A E, ou de C ſon egale: Maintenant ſoit priſe I k auſſi multiplice de D, en ſorte qu'elle ſoit plus petite que H F, mais plus grande que H G: (ce qui eſt facile, d'autant que D eſt plus petite que ny F G, ny G H: ſi bié qu'il faut ſeulement adiouſter tant de fois la grandeur D, iuſques à ce que l'õ ait ce que l'õ cherche.) D'autãt que F H, G H ſont equemultiplices de A B premiere, & C troiſieſme, ſi I k eſt priſe pour l'equemultiplice, tant de D ſecõde, que



D quatrieſme, il eſt euident que H F multiplice de A B premiere, eſtant plus grande que I k multiplice de D ſecõde, HG multiplice de C tierce, n'eſt pas plus grande que I k multiplice de D quarte: & partant par la huictieſme def. de ce liure il y aura plus grande raiſon de A B à D, que de C à la meſme D.

Quant à la ſecõde partie: d'autant que I k multiplice de la premiere D, (car il faut maintenant poſer D premiere & troiſieſme, C ſecõde, & A B quatrieſme) eſt plus grande que HG multiplice de la ſeconde C, & I K multiplice de la troiſieſme D, eſt moindre que F H multiplice de A B quatrieſme: Il y aura plus grande raiſon de D à C, que de D à AB par la 8. def. de ce liure. Parquoy des grãdeurs inegales, &c. Ce qu'il fallo it demonſtrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les grandeurs qui ont meſme raiſon à vne meſme, ſont egales entr'elles: & celles là auſſi ſont egales, auſquelles vne meſme grandeur a meſme raiſon.

Soient premierement deux grandeurs A & B, leſquelles ont meſme raiſon l'vne que l'autre à la troiſieſme C. Ie dis qu'elles ſont egales entr'elles.



Car ſi elles n'eſtoient egales, il faudroit que l'vne ou l'autre fuſt plus grande; & par la precedente prop. icelle plus grande auroit plus grande raiſon

à C,

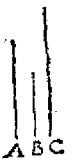
C, que la plus petite: ce qui est contre l'hypothese: donc A & B ne sont pas inegales, mais egales.

Soient maintenant A & B, à chacune desquelles C a vne mesme raison. Ie dis qu'icelles A & B sont aussi egales entr'elles : Car autrement il faudroit que l'vne fust plus petite que l'autre : & par la mesme 8. prop. à icelle plus petite, C auroit plus grande raison qu'à la plus grande : ce qui est contre l'hypothese : A & B ne sont donc pas inegales, mais egales. Donc les grandeurs qui ont mesme raison à vne mesme grandeur sont egales entr'elles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 10. PROPOS. X.

Des grandeurs qui ont raison à vne mesme grandeur, celle qui a plus grande raison est la plus grande : & celle à laquelle la mesme a plus grande raison, est la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C, & la raison de A à C soit plus grande que de B à la mesme C. Ie dis que A sera plus grande que B. Item si C a plus grande raison à B que non pas à A : Ie dis que B sera plus petite que A.



Autrement, pour la premiere partie; si A n'estoit plus grande que B, elle seroit egale, ou plus petite, ce qui est impossible: car si elles estoient egales elles auroient mesme raison l'vne que l'autre

à C, par la 7. prop. de ce liure, ce qui seroit cõtre l'hypothese: si aussi elle estoit plus petite, elle auroit plus petite raison à C que non pas B, par la 8. prop. de ce mesme liure, ce qui est pareillement contre l'hypothese. Donc A ne sera pas moindre ny egale à B; & par consequent sera plus grande.

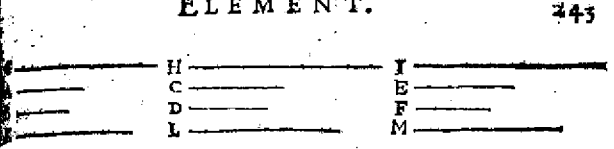
Quant à la seconde partie, si B n'estoit moindre que A, elle seroit egale ou plus grande, ce qui est impossible: car si A & B estoient egales, C auroit mesme raison à l'vne qu'à l'autre par la susdicte 7. prop. de ce liure: ce qui est contre nostre hypothese: si aussi elle estoit plus grande, C auroit plus grande raison à A, qu'à B par la susdite 8. prop. ce qui est aussi contre l'hypothese. Donc B sera moindre que A. Parquoy des grandeurs qui ont raison à vne mesme grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Les raisons qui sont de mesme à vne, sont aussi de mesme entr'elles.

Soit A à B, comme C à D, & comme C à D, ainsi E à F: Ie dis que comme A est à B, ainsi E sera à F.

Qu'il ne soit ainsi; de toutes les antecedantes A, C, E, soient prises quelconques equemultiplices, G, H, I. Pareillement, des consequentes B, D, F, quelconques equemultiplices, K, L, M. Pour autant donc que A est à B comme C à D, par la conuerse de la 6. def. de ce liure, si G multiplice de A, est egale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B: aussi H multiplice de C, sera egale, plus grande, ou plus



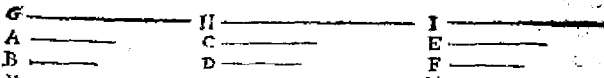
petite que L multiplice de D. Item puis que comme C à D, ainsi E à F, si H multiplice de C est egale, plus grande, ou plus petite que L, multiplice de D, aussi I multiplice de E sera egale, plus grande, ou plus petite que M multiplice de F : Parquoy si G multiplice de A premiere est plus grande, egale, ou plus petite que K multiplice de B seconde, aussi I multiplice de E tierce, sera plus grande, egale, ou plus petite que M multidlice de F quarte; & par la susdite 6. def. comme A sera à B, ainsi E sera à F. Parquoy les raisons qui sont de mesme à vne sont aussi de mesme entr'elles: Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR 12. PROP. XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles : comme l'vne des antecedãtes sera à l'vne des consequentes, ainsi toutes les antecedantes seront à toutes les consequentes.

Soient six grandeurs proportionnelles A, B, C, D, E, F, sçauoir que A soit à B comme C est à D, & E à F : Ie dis que comme l'vne des antecedantes est à vne des consequentes, sçauoir est A à B, ainsi toutes les antecedantes ensemble A, C, E, seront à toutes les consequentes ensemble B, D, F.

Car estant prises de A, C, E, les equemultiplices G, H, I: item de B, D, F, les equemultiplices k, L, M, toutes les trois multiplices ensemble G, H, I, seront autant multiplices des trois ensemble A, C, E, comme la seule G est multiplice de la seule A par la premiere prop. de ce liure. Pareillement par la mesme raison toutes les trois k, L, M ensemble, seront autant multiplices des trois B, D, F ensemble, comme k sera multiplice de B. Partant puisque A, B, C, D, E, F sont proportionnelles, si G multiplice de A premiere, est plus grande, egale, ou plus petite que k multi-



plice de B seconde, aussi H multiplice de D troisiesme, sera plus grande, egale, ou plus petite que L multiplice de D quatriesme, par la conuerse de la 6. def. de ce liure, & ainsi des deux autres: Partant si G est plus grande, egale, ou plus petite que k, le composé des trois G, H, I, sera aussi plus grand, egal ou plus petit que le composé des trois k, L, M. Donc par la mesme 6. def. comme A sera à B, ainsi les trois A, C, E, ensemble seront aux trois B, D, F ensemble: Parquoy si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionneiles, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 13 PRO. XIII.

Si la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte: mais la tierce a plus grande raison à la quarte, que la cinquiesme à la sixiesme: aussi la premie-

re aura plus grande raiſon à la ſeconde, que la cinquieſme à la ſixieſme.

Soit A premiere à B ſeconde (en la precedente figure) comme C tierce à D quarte, & qu'il y ait plus grande raiſon de C tierce à D quarte, que de E cinquieſme à F ſixieſme. Ie dis qu'il y aura auſſi plus grande raiſon de A premiere à B ſeconde, que de E cinquieſme à F ſixieſme.

Car eſtans priſes de A, C, E, les equemultiplices G, H, I, & de B, D, F, auſſi les equempltiplices K, L, M; pour-autant que A eſt à B, comme C à D, ſi G multiplice de A eſt egale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B, auſſi par la conuerſe de la 6. def. de ce liure, H multiplice de C, ſera egale, plus grande, ou plus petite que L multiplice de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raiſon de C premiere à D ſeconde, que de E tierce à F quatrieſme, ſi H multiplice de C, eſt plus grande que L multiplice de D, il n'eſt pas neceſſaire que I multiplice de E excede M multiplice de F, par la 8. def. de ce liure cõuertie: donc auſſi ſi G excede K, il n'eſt pas neceſſaire que I excede M: & partant par ladite 8. def. il y a plus grande raiſon de A à B, que de E à F. Si donc la premiere eſt à la ſeconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Que ſi la tierce C *a moindre raiſon à la quarte* D, *que la cinquieſme* E *à la ſixieſme* F: *auſſi la premiere* A *aura moindre raiſon à la ſeconde* B, *que la cinquieſme* E, *à la ſixieſme* F.

Car si la raison de C à D est moindre que celle de E a F, c'est a dire, que la raison de E premiere à F seconde estant plus grande que celle de C tierce a D quarte, si I excede M, il n'est pas necessaire que H excede L, car quelquesfois elle defaut, ou est egale a icelle par la 8. def. de ce liure conuertie. Mais si H defaut, ou est egale a L, aussi G defaudra, ou sera egale a K par la 6. def. conuertie, parce qu'on a posé C 1. estre a D 2. comme A 3. a B 4. Parquoy si I excede M, il n'est pas necessaire que G excede K: & partant par la susdicte 8 def. il y aura plus grande raison de E a F, que de A a B, c'est a dire que la raison de A a B sera moindre que de E a F, ce qui estoit proposé.

En la mesme maniere sera demonstré, que s'il y a plus grande raison de la premiere a la seconde, que de la tierce a la quarte: mais la tierce a plus grande raison a la quarte, que la cinquiesme a la sixiesme; pareillement la premiere aura beaucoup plus grande raison a la seconde, que la cinquiesme a la sixiesme.

Que si la premiere a moindre raison a la seconde que la tierce a la quarte, & la tierce a moindre raison a la quatriesme que la cinquiesme a la sixiesme; aussi la premiere aura beaucoup moindre raison a la seconde, que la cinquiesme a la sixiesme.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Si la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, & que la premiere soit plus grande que la tierce, aussi la seconde sera plus grande que la quarte, & si egale, egale: si plus petite, plus petite.

Soit A à B, comme C eſt à D, & que A premiere ſoit plus grande, egale, ou plus petite que C troiſieſme: Ie dis que B ſeconde ſera auſſi plus grande, egale ou plus petite que D quatrieſme.



Soit premierement A plus grande que C: il y aura donc plus grande raiſon de A à B, que de C à la meſme B, par la 8. prop. de ce liure, & par conſequent plus grande raiſon de C à D, que de C à B, eſtant icelle la meſme raiſon que de A à B, & par la 10. prop. de ce meſme liure B ſera plus grãde que D.

Soit puis apres A egale à C, & par la 7. prop. de ce meſme liure A ſera à B, comme C à B; & puis que les raiſons de C à D, & C à B, ſont les meſmes que de A à B, les raiſons de C à D, & de C à B, ſeront de meſme entr'elles par la 11. prop. de ce liure, & partant par la 9. prop. B & D ſeront egales.

Finablement ſoit A moindre que C, & par la ſuſdite 8. prop. il y aura plus grande raiſon de C à D, que de A à D; & par conſequent plus grande raiſon de A à B, que de A à D, puis qu'il y a meſme raiſon de A à B, que de C à D, & par la 10. prop. de ce meſme liure B ſera moindre que D. Si donc la premiere eſt à la ſecõde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Que ſi la ſeconde eſt plus grande, ou egale, ou moindre que la quarte: auſſi la premiere ſera plus grande, ou egale, ou moindre que la tierce. Car puiſque A *eſt à* B *comme* C *à* D, *en chãgeant* B *ſera à* A *comme* D *à* C *par le corol. de la* 4. *p. de ce liure. Dõc ſi* B *eſt plus grande, ou egale, ou moindre que* D, *auſſi* A *ſera plus grande, ou egale, ou moindre que* C *par la ſuſdite* 14. *prop.*

Or Euclide n'a pas demonstré que si la premiere est plus grande, egale, ou plus petite que la seconde: aussi la tierce sera plus grande, egale, ou moindre que la quarte, pource que cela est cuident à cause de la similitude des raisons. Ce que nous pourrions neantmoins demonstrer apres Commandin: mais d'autant que sa demonstration ne compete qu'aux grandeurs de mesme genre, nous nous tiendrons à ce que la nature des proportions nous monstre, encore que les grandeurs soient de diuers genres.

THEOR. 15. PRO. XV.

Les grandeurs sont entr'elles, comme sont leurs equemultiplices entr'elles.

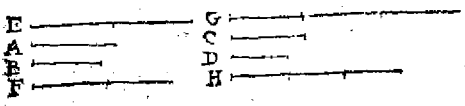
Soit A B autant multiplice de C comme D E est multiplice de F. Ie dis que A B sera à D E, comme C à F. Car puis que A B & D E sont equemultiplices d'icelles C & F, il y aura en A B, autant de parties egales à C, comme D E contient de parties egales à F: soit donc diuisee A B és parties A G, G B egales à C, & D E és parties D H, H E egales à F; & par la 7. prop. de ce liure vne chacune partie de A B, sera à vne chacune partie de D E, comme C est à F, & par la 12. prop. toutes les antecedantes A B, seront à toutes les consequentes D E, comme A G l'vne des antecedantes, est à D H, l'vne des consequentes, c'est à dire comme C à F, puis que c'est la mesme raison. Parquoy les grandeurs sont entr'elles comme sont leurs equemultiplices entr'elles: Ce qu'il falloit prouuer.



THEOR. 16. PROP. XVI.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles; elles le ſeront auſſi eſtans permutées.

Soit A à B, comme C à D. Ie dis qu'en permutant A ſera à C, comme B eſt à D.



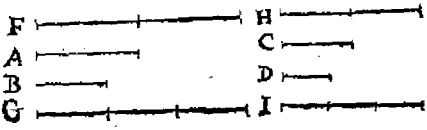
Car ſi on prend E & F equemultiplices de A & B; item G & H equemultiplices de C & D; E ſera à F, comme A à B par la prop. precedente, & G à H comme C à D; & par conſequent E eſtant à F, & C à D, en meſme raiſon que A à B, elles ſont de meſme entr'elles par la 11. prop. de ce liure. Derechef puis que les raiſons de E à F, & G à H ſont les meſmes que de C à D, elles ſeront auſſi de meſme entr'elles par la ſuſdite 11. prop. c'eſt à dire, que comme E premiere eſt à F ſeconde, ainſi ſera G tierce à H quarte: parquoy par la 14. prop. de ce meſme liure ſi E premiere eſt plus grande, egale, ou moindre que G tierce, auſſi F ſeconde ſera plus grande, egale, ou moindre que H quatrieſme, en quelconque multiplication que ſoient priſes les equemultiplices; & par la 6. def. d'iceluy cinquieſme liure A ſera à C, comme B à D (puiſque E & F ſont equemultiplices de A premiere, & F

troiſieſme; & G & H equemultiplices de C ſeconde & D 4. & celles-là defaillent, ſont egales, ou excedent celles-cy, &c.) Parquoy ſi quatre grãdeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront auſſi eſtant permutées: Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or la demonſtration de ceſte propoſition a ſeulement lieu quand les quatre grandeurs ſont de meſme genre. Car ſi les deux A & B eſtoient d'vn genre, & les deux C & D d'vn autre; auſsi les equemultiplices E & F ſeroient d'vn genre, c'eſt à ſçauoir duquel ſont A & B; & les equemultiplices G & H d'vn autre genre, c'eſt à ſçauoir de celuy auquel ſont C & D: Parquoy on ne pourroit pas dire E eſtre plus grande, egale ou, moindre que G; & partant rien ne ſe concluroit par la 6. def. de ce liure. La raiſon permutee a donc ſeulement lieu quand les quatre grandeurs ſont d'vn meſme genre: Ce que Dounot n'a pas recogneu, puis qu'il vſurpe icelle, les grandeurs eſtans de diuers genres, en pluſieurs propoſitions, tant de ce liure que du 10.

Ledit Dounot a auſsi reietté ceſte demonſtration des anciens, & au lieu d'icelle s'eſt imaginé la ſuyuante. Soit A à B comme C eſt à D. Ie dis auſsi, que A ſera alternatine-



ment à C comme B eſt à D. Car ſi on prend F & H equemultiplices de A & C: item G & I equemultipli-

tés de B & D, par la 4. p. 5. F, G, H, I, seront proportionnelles, & par la 14. p. 5. comme F sera plus grande, egale, ou plus petite que G; aussi H sera plus grande, egale, ou plus petite que I: (ce qui ne se peut prendre de ladite 14. p. 5. car par icelle la premiere F estant plus grande, &c. que H 3. la seconde G seroit plus grande, &c. que I 4. mais bien pouuoit-il tirer cela de la nature des proportions, comme nous auons dit au scholie de ladite 14. p. 5.) *Et par la 6. def. 5. A sera à C comme B à D:* ce qui est euidemment faux: car pour estre A à C comme B à D, il faudroit, selon ladite 6. def. 5. que F & G multiplices de A premiere & B troisiesme; item H & I multiplices de C 2. & D 4. fussent equemultiplices, & elles ne le sont pas. Dounot n'a pas donc peu rien conclure de la 6. def. 5. & partant sa pretenduë demonstration de ceste 16. proposition doit estre rejettée, & celle des anciens suiuie.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs composées sont proportionnelles; icelles diuisées seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs composées AB, CB, & DE, FE proportionnelles, c'est à dire que AB soit à CB comme DE à FE. Ie dis que les mesmes grandeurs diuisées sont aussi proportionnelles, c'est à dire que comme AC est à CB, ainsi DF est à FE.

Car d'icelles AC, CB, DF, FE soient prises les equemultiplices GH, HL, IK, KM, chacune à chacune,

& par la 1. prop. de ce liure G L ſera autant multiplice de AB, que GH de AC, c'eſt à dire comme IK de DF. Mais icelle IK eſt autant multiplice de DF, que IM de DE par la meſme 1. prop. donc GL, IM ſont equemultiplices de AB, DE. Derechef ſoient priſes LN, MO equemultiplices de CB, FE. Pour autant que H L premiere eſt autant multiplice de C B ſeconde, que K M tierce de la quarte FE, & LN cinquieſme autant multiplice de CB ſeconde, que M O ſixieſme de la quarte FE, par la 2. prop. de ce meſme liure, H N ſera autant multiplice de CB ſeconde, que KO de FE quatrieſme. Et puiſque A B eſt à CB, comme DE à FE: & ont eſté priſes GL, IM equemultiplices de AB, DE, mais HN, KO de CB, FE, par la 6. def. conuertie ſi GL multiplice de AB premiere excede, eſt egale, ou moindre que H N multiplice de CB ſeconde, auſſi IM, multiplice de DE tierce excedera, ſera egale, ou moindre, que KO multiplice de FE quarte: oſtant donc les choſes communes HL, KM, ſi GH excede LN, auſſi IK excedera MO; & ſi egale, egale; & ſi moindre, moindre. Et d'autant que GH, IK ſont equemultiplices de AC premiere & DF tierce. Item LN, MO equemultiplices de CB ſeconde & FE quarte, & il a eſté demonſtré (en quelconque multiplication qu'ayent eſté priſes icelles equemultiplices) que les equemultiplices de la premiere & troiſieſme excedent, ſont egales, ou moindres, que les equemultiplices de la ſeconde & quatrieſme, par la ſuſdite 6. def. de ce cinquieſme liure AC ſera à CB, comme D F à FE: ce



qui estoit proposé. Si donc les grandeurs composées sont proportionnelles, icelles diuisées seront aussi proportionnelles : Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy ce moyen-là d'argumenter, lequel en la 15. def. nous auons dict conuerse de la raison diuisée: c'est à dire que si AB est à CB, *comme DE à* FE, *aussi* CB *sera à AC, comme* FE *à* DF. *Car d'autant que comme* AB *à* CB, *ainsi DE à* FE, *en diuisant par la 17. p. 5. comme AC sera à* CB, *ainsi DE à* FE : *& en changeant, comme* CB *sera à AC, ainsi* FE *sera à* DF : *ce qui estoit proposé.*

Par mesme maniere, sera demonstré ce moyen là d'argumenter, lequel en la mesme 15. def. nous auons appellé contraire diuision de raison : c'est à dire que si AC est à AB, *comme* DF *à* DE : *aussi AC sera à* CB, *ainsi que* DF *à* FE. *Car puis que AC est à* AB *comme DF à DE : en changeant, comme* AB *sera à AC, ainsi DE à* DF : *donc en diuisant par la 17. p. 5. comme* CB *à* AC, *ainsi* FE *à* DF : *& en changeant derechef, comme* AC *à* CB, *ainsi* DF *à* FE : *ce qui estoit à demonstrer.*

THEO. 18. PROP. XVIII.

Si les grandeurs diuisées sont proportionnelles; icelles composées seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs diuisées AB, BC, & DE, EF proportionnelles. Ie dis qu'en composant, AC est à CB, comme DF à EF.

Car si comme AC est à BC, ainsi DF n'est pas à EF ; DF aura à quelque grandeur moindre ou plus grande que EF, mesme raison que AC à BC. Soit donc premierement DF à GF, moindre que EF, en mesme raison que AC à BC, s'il est possible : & en diuisant par la precedente proposition, DG sera à GF comme AB à BC. Mais comme AB à BC, ainsi DE est à EF : donc aussi comme DG sera à GF, ainsi DE sera à EF



par la 11. prop. de ce liure. Mais DG premiere est plus grande que DE troisiesme: donc par la 14. proposition de ce mesme liure GF seconde sera aussi plus grande que EF quatriesme, la partie que le tout; ce qui est absurde. Il n'y aura donc pas de DF à GF, moindre que EF, mesme raison que de AC à BC.

Par mesme discours on demonstrera que DF n'aura pas à vne grandeur plus grande que EF, mesme raison que AC à BC. Donc comme AC est à BC, ainsi DF est à EF, puisque DF ne peut estre à vne grandeur moindre ou plus grande que EF, en mesme raison que AC à BC. Parquoy si les grandeurs diuisées sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Dounot s'estant licentié de changer la 17. p. a la 18. a aussi rejetté ceste demonstration des anciens, laquelle a lieu en toutes sortes de grandeurs, soit qu'elles soient de mesme genre ou non : & celle qu'il a mise au lieu d'icelle a seulement lieu quand les grandeurs sont de mesme genre, d'autant qu'en icelle il vsurpe la raison permutée, laquelle nous

auons monſtré au ſcholie de la 16. p. 5. ne pouuoir conuenir que aux grandeurs de meſme genre : & partant doit eſtre preferée la demonſtration uniuerſelle des anciens à la particuliere de Dounot.

Nous demonſtrerons icy ces deux moyens là d'argumenter les proportions, leſquels nous auons deſcrits en la 14. def. de celiure. Quant au premier, que nous auons nommé conuerſe compoſition de raiſon : ſoit comme AB *à* BC *ainſi* DE *à* EF. *Ie dis, que comme* AC *eſt à* AB, *ainſi* DF *a* DE. *Car puis que comme* AB *eſt à* BC, *ainſi* DE *a* EF, *en changeant comme* BC *ſera a* AB, *ainſi* EF *a* DE : *donc en compoſant par la 18. prop. cy deſſus, comme* AC *ſera a* AB, *ainſi* DF *à* DE : *ce qu'il falloit prouuer.*

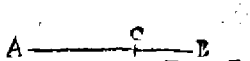
Quant a l'autre moyen que nous auons appellé contraire compoſition de raiſon : ſoit derechef comme AB *a* BC, *ainſi* DE *à* EF : *Ie dis que par le contraire de compoſition de raiſon, comme* AB *a* AC, *ainſi* DE *a* DF. *Car puis que comme* AB *eſt a* BC, *ainsi* DE *a* EF, *en changeant comme* BC *ſera a* AB, *ainſi* EF *a* DE : *donc auſsi en compoſant par la meſme prop. comme* AC *ſera a* AB, *ainsi* DF *a* DE : *& partant en changeant derechef, comme* AB *ſera a* AC, *ainsi* DE *ſera a* DF : *ce qui eſtoit propoſé a prouuer.*

THEO. 19. PROP. XIX.

Si le tout eſt au tout, comme le retranché au retranché ; le reſte ſera auſſi au reſte, comme le tout eſt au tout.

Soit à la toute AB. la toute DE, comme le retranché AC, au retranché DF. Ie dis que le reſte CB eſt auſſi au reſte FE, comme la toute AB à la toute DE.

Car puiſque AB eſt à DE, comme AC à DF, auſſi en permutant par la 16. prop. de ce liure AB ſera AC, comme DE à DF; & par la 17. prop. de ce meſme liure, en diuiſant comme CB ſera à AC, ainſi FE ſera à DF: parquoy en permutant derechef par la ſuſdicte 16. prop. CB ſera à FE, comme AC à DF, c'eſt à dire comme la toute AB à la toute DE, puis que AB, DE, & AC, DF, ont eſté poſées en meſme raiſon. Parquoy ſi le tout eſt au tout comme le retranché au retranché, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

Nous demonſtrerons icy ce moyen-là d'argumenter és proportions, qui eſt pris par la conuerſion de raiſon. Car ſoit comme AB *a* CB, *ainſi* DE *a* FE. *Ie dis par conuerſion de raiſon,* AB *eſtre auſſi à* AC, *comme* DE *à* DF. *Car puiſque comme* AB *a* CB, *ainſi* DE, *à* FE *en deuiſant par la* 17. *prop. de ce liure, comme* AC *a* CB, *ainſi* DF *à* FE: *donc auſſi en changeant comme* CB *à* AC, *ainſi* EF *à* DF: *& partant en compoſant par la* 18. *prop. de ce cinquieſme liure, comme* AB *a* AC, *ainſi* DE *à* DF; *ce qui eſtoit propoſé.*

THEO. 20. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'vn coſté, & trois d'vn autre, eſtans priſes de deux en deux, ſont en meſme raiſon, & qu'en raiſon egale la premiere ſoit plus

grande

grande que la troiſieſme, auſſi la quatrieſme ſera plus grande que la ſixieſme, & ſi egale, egale; ſi plus petite, plus petite.



Soient trois grandeurs d'vn coſté A,B,C, & trois d'vn autre D,E,F, & comme A à B, ainſi D à E, & comme B à C, ainſi E à F: & que A premiere ſoit plus grande que C troiſ. Ie dis que D quatrieſme ſera auſſi plus grande que F ſixieſme.

Car puiſque A eſt plus grande que C, il y aura plus grande raiſon de A à B que de C à B par la 8. prop. de ce cinquieſme liure. Mais comme A à B ainſi D à E, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raiſon de D à E, que de C à B. Item comme C eſt à B, ainſi F à E: (car puiſque B eſt à C, comme E à F, en changeant comme C ſera à B, ainſi F à E) il y aura donc auſſi plus grande raiſon de D à E, que de F à E, & par la 10. p. 5. D ſera plus grande que F.

Que ſi A eſt egale à C; ie dis auſſi que D ſera egale à F. Car puiſque A eſt egale à C, par la 7. prop. de ce liure, A ſera à B comme C à B. Mais comme A eſt à B, ainſi D à E: & par la 11. p. 5. D ſera à E, comme C à B: & comme C eſt à B, ainſi F à E. Donc D ſera auſſi à E comme F à E; & partant D & F ſeront egales par la 9. prop. de ce meſme liure.

En troiſieſme lieu, ſi A eſt moindre que C; ie dis auſſi que D eſt moindre que F. Car puiſque A eſt moindre que C, il y aura moindre raiſon de A à B,

que de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A est à B, ainsi D est à E ; il y aura donc aussi moindre raison de D à E, que de C à B, par la 13. prop. de ce cinquiesme liure. Mais en changeant comme dessus, C est à B, comme F à E. Il y a donc pareillement moindre raison de D à E, que de F à E : & partant par la 10. p. 5. D sera moindre que F. Parquoy si trois grãdeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, prises de deux en deux sont en mesme raison, estant leur proportion sans ordre, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisiesme ; aussi la 4^e^ sera plus grande que la sixiesme, & si egale, egale : si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'vn costé A, B, C. & trois d'vn autre D, E, F, lesquelles prises de deux en deux soient en mesme raison, estant leur proportion troublée, sçauoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Ie dis que comme A sera egale, plus grande, ou plus petite que C, aussi D sera egale,



plus grande, ou plus petite que F.

Car si A est plus grãde que C, il y aura plus grande raison de A à B, que de C à B par la 8. prop. de ce liure Mais comme A à B, ainsi E à F; il y aura donc plus grande raison de E à F, que de C à B par la 13. prop. d'iceluy cinquiesme liure. Et d'autant que comme B est à C, ainsi D est à E, en changeant comme C sera à B, ainsi E à D. Il y aura donc aussi plus grande raison de E à F, que de E à D: & partant par la 10. p. 5. D sera plus grande que F.

On peut prouuer comme en la precedente, si A est egale, ou plus petite que C; D estre aussi egale, ou moindre que F. Parquoy si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

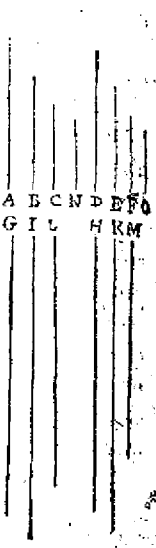
THEOR. 22. PROP. XXII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, lesquelles estans prises de deux en deux soient en mesme raison; icelles en raison egale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs d'vn costé A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, & soit A à B comme D à E, & B à C comme E à F. Ie dis qu'en raison egale comme A à C, ainsi D à F.

Car estans prises G, H equemultiplices de A, D: item I, K, equemultiplices de B, E: Item L, M equemultiplices de C, F: puisque A est à B, comme D à E, aussi G multiplice de A premiere

ſera à I multiplice de B deuxieſme, comme H multiplice de D troiſieſme à K multiplice de E quatrieſme par la 4. prop. de ce cinquieſme liure. Par meſme raiſon I ſera à L, comme K à M. Veu donc que les trois grandeurs G, I, L, & les trois autres H, K, M, eſtans priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, par la 20. p. 5. ſi G excede L, auſſi H excedera M; & ſi egale, egale; & ſi plus petite, plus petite: & partant puiſque G, H, equemultiplices de A & D defaillent, ſont egales, ou excedent L, M, equemultiplices quelconques de C & F, par la 6. def. A ſera à C, comme D à F: ce qu'il falloit prouuer.

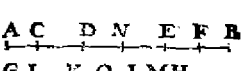


Maintenãt ſoient plus de trois grãdeurs, tellement que C ſoit auſſi à N, comme F à O. Ie dis que A eſt encore à N comme D à O. Car puiſque nous venons de demonſtrer que A eſt à C, comme D à F; & on a poſé C eſtre à N, comme F à O, il y aura trois grandeurs A, C, N, & trois autres D, F, O, leſquels ſont pris de deux en deux en meſme raiſon. Donc comme il a eſté demonſtré és trois grandeurs cy deſſus, A ſera derechef à N, comme D à O. En la meſme maniere ſera demonſtré en tant de grandeurs qu'on voudra. Si donc il y a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Le tres-docte Steuin en la 19. def. de ses prob. geomet. explique vne sorte d'argumenter és proportions, qu'il appelle proportion transformée, qui peut estre reduite en vn tel theoreme que le suiuant.

S'il y a deux grandeurs, desquelles chacune soit couppée en tant de parties qu'on voudra egales en multitude, & proportionnelles : la composée de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur, sera à la composée des parties restantes, en mesme raison que la composée, d'autant de parties de la posterieure grandeur, sera à la composée des parties restantes d'icelle. Et si quelconque partie de l'vne est couppée en deux autres parties, & la partie de l'autre correspondante à ceste partie là, est aussi couppée en deux autres parties proportionnelles à ces deux là : les totales grandeurs seront aussi couppées proportionnellement.



Soit vne grandeur AB couppée en tant de parties qu'on voudra AC, CD, DE, EF, FB; & vne autre grandeur GH, couppée en autant de parties que AB, sçauoir est ès cinq GI, IK, KL, LM, MH, proportionnelles à celle-là de AB. Ie dis que AD composée des deux parties AC, CD, est à DB composée des trois parties restantes, comme GK composée des deux parties GI, IK, est à KH composée des trois autres parties restantes. Car puis que comme AC est à CD, ainsi GI est à IK, en composant par la 18 proposition de ce liure AD sera à CD, comme GK à IK. Mais comme CD à DE, ainsi IK à KL : donc par la 22. prop. de ce mesme liure en raison egale, comme AD sera à DE, ainsi GK sera à KL.

Derechef, pource qu'en changeant, BF est à FE, comme HM à ML, aussi en composant BE sera à FE, comme HL à ML. Mais FE est à ED, comme ML à LK: donc en raison egale, BE sera ED, comme HL à LK; & en composant, BD sera à ED, comme HK *à* LK, *& en changeant, DE à DB, comme* KL *à* KH. *Parquoy puis qu'il a esté demonstré que AD est à DE, comme* GK *à* KL, *& DE est à DB, comme* KL *à* KH, *par la susdite 22. p. 5. en raison egale comme AD sera à DB, ainsi* GK *sera à* KH.

Nous demonstrerons en la mesme maniere, que comme AC est à CB, ainsi GI est à IH. Car derechef en changeant, composant, & par egalité de raison, comme BC sera à DC, ainsi HI à kl: *& en changeant, comme* CD *sera à CB, ainsi* lk *sera à IH. Veu donc que comme* AC *est à* CD, *ainsi GI est à* lk, *& comme* CD *à* CB, *ainsi* lk *à IH: en raison egale, comme* AC *sera à* CB, *ainsi GI sera à IH.*

Par mesme raison, cõme AF *sera à* FB, *ainsi* GM *sera à* MH: *Car derechef en composant, & par egalité de raison, comme* AF *sera à* EF, *ainsi GM sera à LM, par les susdites 18, & 22. prop. de ce liu. Mais aussi comme* EF *est à* FB, *ainsi LM à MH: Donc en raison egale, comme* AF *est à* FB, *ainsi GM est à MH, & ainsi des autres: appert donc ce qui estoit premierement proposé.*

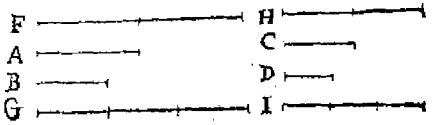
Maintenant soit coupée, (comme pour exemple) la troisiesme partie DE en deux quelconques parties DN, NE *& aussi la troisiesme* KL *en deux parties* KO, OL *proportionnelles à celle-là. Ie dis que comme AN à* NB, *ainsi GO à OH. Car en changeant, comme EN sera à* ND, *ainsi LO à* OK: *& en composant par la 18. p. 5. comme* ED *sera à* DN, *ainsi* lk *à* ko. *Parquoy puisque comme CD est à DE; ainsi* lk *à* kl: *& comme* DE *à* DN, *ainsi* kl *à* ko: *par la 22. p. 5. en raison egale, comme CD sera à*

DN, *ainſi* Ik *à* KO : *donc les parties* AC, CD, DN, *ſont proportionnelles aux parties* GI, Ik, kO. *Derechef pource qu'en changeant, comme* FE *eſt à* ED, *ainſi* ML *à* LK: *& en compoſant, comme* DE *à* NE, *ainſi* KL *à* OL, *en raiſon egale, comme* FE *ſera à* EN, *ainſi* ML, *à* LO, *& en changeant, comme* NE *à* EF, *ainſi* OL *à* LM : *& partant toutes les parties* AC, CD, DN, NE, EF, FB, *ſont proportionnelles à toutes les parties* GI, Ik, KO, OL, LM, MH. *Donc comme il a eſté demonſtré en la premiere partie,* AN *ſera à* NB, *comme* GO *à* OH : *appert donc ce qui eſtoit propoſé en ſecond lieu.*

Caluius demonſtre encore en ce lieu cy le theoreme ſuyuant.

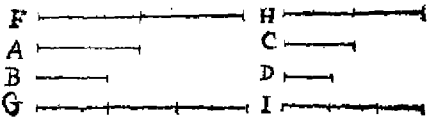
Si la premiere eſt à la ſeconde en meſme raiſon que la tierce à la quarte : les equemultiplices de la premiere & troiſieſme auront auſſi vne meſme raiſon à la ſeconde & quatrieſme. Item les equemultiplices de la ſeconde & quatrieſme auront vne meſme raiſon à la premiere & troiſieſme. Et au contraire, la ſeconde & quatrieſme auront vne meſme raiſon aux equemultiplices de la premiere & troiſieſme. Item la premiere & troiſieſme auront vne meſme reiſon aux equemultiplices de la deuxieſme & quatrieſme.

Soit A *à* B *comme* C *à* D, *& ſoient* F, H, *equemultiplices*



de A, C : *item* G, I, *equemultiplices de* B, D. *Ie dis que* F *eſt à* B, *comme* H *à* D : *item que* G *eſt à* A, *comme* I *à* C. *Et au contraire que* B *eſt à* F *comme* D *à* H : *item* A *à* G, *comme* C

à I. Car puisque F est autant multiplice de A, que H l'est de C, comme F est à A, ainsi H à C, & par l'hypothese A est à B, comme C à D, donc en raison egale par la 22. p. 5. comme F sera à B, ainsi H sera à D. Derechef, pource que G est à B, comme I à D, & comme B à A, ainsi D à C: (car puisque A est à B comme à C à D par l'hypothese, en changeant comme B à A, ainsi D à C) en raison egale, comme G sera à A, ainsi I à C par ladite 22. p. 5.



Maintenant pource que B est à A, comme D à C par raison inuerse: & comme A à F, ainsi C à H: en raison egale, comme B sera à F, ainsi D à H. Derechef puis que A est à B, comme C à D: & comme B est à G, ainsi D à I; en raison egale, comme A sera à G, ainsi C à I, par ladite 22. p. 5. ce qui estoit proposé.

Par cecy est manifeste vn moyen d'argumenter, dont les Geometres s'aident souuent, principalement Archimedes, Apolonius Pergeus, & autres: sçauoir est comme A à B, ainsi C est à D: donc comme F double, ou triple, ou quadriple, &c. de A est à B, ainsi aussi H double, ou triple, ou quadruple, &c. de C est à D: Item comme A est à B, ainsi C à D: donc comme A est au double, triple, ou quadruple, &c. de B, sçauoir est à G; ainsi aussi C sera au double, triple, ou au quadruple, &c. de D, sçauoir est à I.

THEOR. 23. PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en même raison, & en proportion troublee: icelles en raison egale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs A,B,C, & trois autres D,E, F, & soient prises de deux en deux en mesme raison, estant la proportion troublee, sçauoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Ie dis que A sera à C, comme D à F.

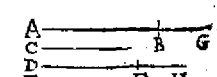


Car estans prises G,H,I, equemultiplices de A,B, D: item K,L,M, quelconques autres equemultiplices de C, E,F. Par la 15.p. de ce liure, comme A sera à B, ainsi G à H, puisque G,H, sont equemultiplices d'icelles A, B. Mais comme A est à B, ainsi est E à F: donc par la 11.p.5. comme G est à H, ainsi E est à F. Mais comme E est à F, ainsi aussi L est à M, par la susdicte 15. p.5. pource que L, M, sont equemultiplices d'icelles E,F: donc aussi comme G est à H, ainsi L est à M, par la 11.p.5. & puisque comme B est à C, ainsi D à E, par la 4.p. 5. comme H multiplice de la premiere B, sera à K multiplice de la seconde C. ainsi I multiplice de la troisiesme D, sera à L multiplice de la quatriesme E: donc les trois grandeurs G,

H, K, & les trois autres I, L, M, eſtans priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, & la proportion d'icelles ſans ordre, puis qu'il a eſté demonſtré que comme G eſt à H, ainſi L eſt à M, & comme H eſt à K, ainſi I à L; & partant par la 21. p. 5. ſi G eſt plus grande, egale, ou moindre que K, auſſi I ſera plus grande, egale, ou moindre que M, & par la 6. def. 5. comme A ſera à C, ainſi ſera D à F. Parquoy ſi trois grandeurs, & autant d'autres, priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, & en proportion troublee &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 24. PROP. XXIIII.

Si la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſieſme à la quatrieſme, & la cinquieſme à la ſeconde, comme la ſixieſme à la quatrieſme; la compoſee de la premiere & cinquieſme, ſera à la ſeconde, comme la compoſee de la troiſieſme & ſixieſme, ſera à la quatrieſme.



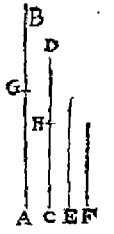
Soit la premiere AB à la ſeconde C, comme la troiſieſme DE eſt à la quatrieſme F; & la cinquieſme BG à la deuxieſme C, comme la ſixieſme EH à la quatrieſme F. Ie dis que la toute AG, ſera à C, comme la toute DH à F.

Car puiſque comme BG à C, ainſi EH à F, auſſi en changeant, comme C ſera à BG, ainſi F à EH. Veu donc que AB eſt à C, comme DE à F, & CàBG, comme F à EH, en raiſon egale, AB ſera à BG, comme DE à EH, par la 22. p. 5. & en compolant, comme la toute AG ſera à BG, ainſi la toute DH ſera à EH, par la 18. prop. d'iceluy 5. liure: & derechef puis que AG eſt à BG, comme DH à EH, & BG à C, comme EH à F, en raiſon egale, AG ſera à C, comme DH à F. Si donc la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſieſme à la quatrieſme, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 25. PROP. XXV.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, la plus grande & la plus petite, ſont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles AB, CD, E, F. Ie dis que la plus grande & la plus petite AB & F enſemble, ſont plus grandes que les deux autres CD & E enſemble.



Car ſi de AB on retranche AG egale à F, & de CD on retranche CH egale à E: AG ſera à CH, comme E à F, c'eſt à dire comme AB à CD. Et puiſque la toute AB eſt à la toute CD, comme la retranchée AG à la retrãchée CH; par la 19. prop de ce liure, comme la toute AB ſera à la toute CD, ainſi le reſte GB ſera au reſte HD: Parquoy iceluy reſte en ſera plus

grand que le reſte HD, comme la toute AB eſt plus grande que la toute CD. Et pour autant que AG & E ſont egales, ſi on adiouſte à icelles, les grandeurs egales F & CH, c'eſt à ſçauoir, F à icelle AG, & CH à E, viendront AG & F enſemble, egales à E & C H enſemble. Et adiouſtant à ces choſes egales, les inegales GB, & HD, ſeront faictes AB & F enſemble plus grandes que GE & CD enſemble, puis que GB eſt plus grande que H D. Parquoy ſi quatre grandeurs ſont porportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Fin du cinquieſme Element.

ELEMENT SIXIESME.

DEFINITIONS.

EMBLABLES figures rectilignes, sont celles qui ont les angles egaux, vn chacun au sien, & les costez qui sont au long des angles egaux proportionnaux.

2. Les figures sont reciproques, quand les termes antecedans & consequens des raisons, sont en l'vne & en l'autre figure.

C'est à dire que s'il y a deux figures semblables ou non, dont le premier & dernier des termes proportionnaux soient en l'vne des figures, & le second & troisiesme en l'autre; icelles figures seront dictes reciproques.

3. Vne ligne droicte est dite estre diui-

ſee en la moyenne & extreme raiſon, quand la toute eſt au plus grand ſegment, comme le plus grand ſegment eſt au moindre.

4 La hauteur d'vne chacune figure, eſt la perpend. tiree du ſommet a la baſe.

5 Vne raiſon eſt dite eſtre compoſee de raiſons, quand les quantités des raiſons multipliees entr'elles font quelque raiſon.

C'eſt à dire que quand les quantitez de deux ou pluſieurs raiſons multipliees entr'elles, produiſent quelque quantité de raiſon: icelle raiſon eſt dite eſtre cõpoſee de celles là. Or la quantité d'vne raiſon eſt le denominateur d'icelle: tellement que la quãtité de la raiſon triple eſt 3: mais de la ſubtriple, c'eſt $\frac{1}{3}$, &c. Ainſi la raiſon trigecuple ſe dit eſtre compoſee des double, triple, & quintuple. Car les denominateurs d'icelles, ſçauoir eſt 2, 3. & 5. multipliés entr'eux produiſent 30. denominateur d'icelle raiſon trigecuple. Pareillement la raiſon double ſe dit eſtre compoſee de la ſeſquialtere, & de la ſeſquitierce, pource que les denominateurs d'icelle, ſçauoir eſt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ eſtans multipliés entr'eux produiſent 2 denominateur de la raiſon double. Parquoy eſtant poſees tant de grandeurs qu'on voudra par ordre, la raiſon des extremes ſera compoſee des raiſons des moyennes: comme pour exemple, ſoit A à B en raiſon ſeſquialtere; B à C en raiſon double, & C à D en raiſon ſuperbipartiente tierce: Il eſt euidẽt que multipliant le denominateur de la raiſon de A à B, par celuy de B à C, ſçauoir 1 $\frac{1}{2}$ par 2 viendront 3. & partãt

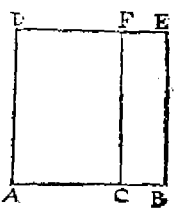
A. B. C. D.
30. 20. 10. 6.

A est à C en raison triple, & multipliant 3 par le denominateur de la raison de C à D proviennent 5, & partant A est à D en raison quintuple.

Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles, tant les 27, 28. & 29. propo. de ce liure, que plusieurs du 10. adiouſtent icy ceſte def.

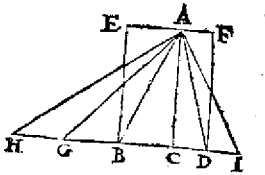
6. Vn parallelogramme appliqué ſelon quelque ligne droicte, eſt dict defaillir d'vn parallelogramme, lors qu'il ne peut occuper entieremẽt la ligne; mais exceder, quãd il occupe vne plus grande ligne que celle ſelon laquelle il eſt appliqué; en telle ſorte toutesfois que le parallelogr. deffaillant, ou excedãt ait vne meſme hauteur que le parallelogramme appliqué, & conſtituë auec iceluy vn ſeul parallelogramme.

Comme le parallelogramme A F appliqué ſelon la ligne A B, eſt dit defaillir du parallelogramme C E, lequel eſt appellé defaut: Mais le parallelogramme A E appliqué ſelon la ligne A C, eſt dict exceder du parallelogramme C E, lequel eſt dict l'excez.



THEOR. 1. PRO. 1.

Les triangles, & les parallelogrammes de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre comme leurs baſes.



Soient deux triangles ABC & ACD de mesme hauteur, sur les bases BC & CD: soient aussi deux parallelogrammes CE, CF de mesme hauteur, les bases desquels soient les mesmes BC, CD. Ie dis premierement que le triangle ABC, est au triangle ACD, comme la base BC, est à la base CD: c'est à sçauoir que si on pose pour premiere grandeur la base BC, pour seconde la base CD, pour troisiesme le triangle ABC, pour quatriesme le triangle ACD; les equemultiplices de la premiere & troisiesme seront plus petites, egales, ou plus grandes, que les equemultiplices de la seconde & quatriesme, ainsi que le requiert la 6. definition du 5. liure.

Qu'il ne soit ainsi; qu'on prolonge BD de part & d'autre, & apres auoir couppé BG & GH, egales à BC d'vn costé: item DI, egale à CD de l'autre, soient menees les lignes AG, AH, AI. Donc par la 38. p. 1. les trois triangles ABC, ABG, AGH, estans sur bases egales & entre mesmes paralleles, seront egaux: aussi par les mesmes raisons les deux triangles ACD & ADI seront egaux; ainsi il est euident qu'autant de fois que la base HC contiendra BC, autant de fois le triangle ACH contiendra le triangle ABC. Pareillement autant de fois que CI contiendra CD, autant de fois le triangle ACI contiendra le triangle ACD. Que si la base CH est egale à CI, le triangle ACH sera egal au triangle ACI, par la 38. p. 1. Que si la base est plus grande, il sera plus grand; si plus petite, plus petit; & par la 6. def. 5. cõme la base BC, à la base CD, ainsi le triangle ABC, sera au triangle ACD: ce qui

estoit

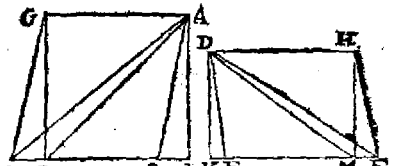
Reste à demonstrer pour la premiere partie.

Quant à la seconde partie touchant les parallelogrammes CE, CF; le mesme se peut dire que des triangles, parce que iceux parallelogrammes sont doubles des triangles ABC, ACD par la 41.p.1. & par la 15.p.5. ce qui est prouué d'iceux triangles s'entendra des parallelogrammes. Donc les triangles, & les parallelogrammes de mesme hauteur sont entr'eux comme leurs bases: Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Commandin adiouste en ce lieu cest autre theoreme.

Les triangles, & les parallelogrammes, desquels les bases sont egales, ou vne mesme, sont entr'eux comme leurs hauteurs.



Soient deux triangles ABC, DEF, & les parallelogrammes AGBC, DEFH, ayans les bases BC, EF egales. Ie dis que le triangle ABC *est au triangle DEF, & le parallelogramme AGBC au parallelogramme DEFH, comme la hauteur AI est à la hauteur DK. Car si on prend les lignes IL, KM egales aux bases BC, EF, & on tire les lignes LA, MD; le triangle ALI sera egal au triangle ABC par la 38.p.1. puis qu'ils sont sur bases egales LI, BC, & entre mesmes paralleles AG, IB: Par mesme raison le triangle DKM sera egal au triangle DEF. Parquoy par la 7.p.5. comme* ABC *sera a* DEF, *ainsi ALI sera à DKM. Mais par la 1.p.6. comme ALI est à DKM, ainsi AI à DK. (car si AI, DK sont posees les bases, les lignes droictes egales LI, KM seront*

les hauteurs.) Donc auſſi ABC ſera à DEF, comme AI à DK.

Et d'autant que par la 15. p. 5. comme ABC eſt à DEF, ainſi le parallelogramme AG BC au parallelogramme DEFH: (carceux parallelogrammes ſont doubles des triãgles par la 41. p. 1.) auſſi AG BC ſera à DEFH, comme AI à DK. Le meſme s'enſuiura ſi les triangles, & les parallelogrammes ont vne meſme baſe.

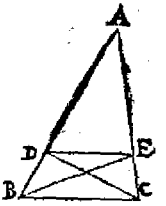
THEOR. 2. PROP. 11.

Si dans vn triangle on meine vne ligne parallele à l'vn de ſes coſtez; elle coupera les autres coſtez du triangle proportionnellement : & ſi les coſtez ſont couppez proportionnellement, la ligne couppante ſera parallele à l'autre coſté.

Soit le triangle ABC, dans lequel ſoit menée DE parallele à BC, couppant les deux autres coſtez AB & AC aux poincts D & E. Ie dis que AD ſera à DB, comme AE eſt à EC.

Car eſtans menées les deux lignes BE & CD : par la 37. p. 1. les deux triãgles DEB & EDC, eſtans ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ſont egaux ; & par la 7. p. 5. ils auront meſme raiſon l'vn comme l'autre au troiſieſme ADE. Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB, & DEA eſtans de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre cõme la baſe BD à la baſe DA: & par la

meſme propoſition, le triangle CDE, eſtãt de meſme hauteur qu'iceluy triãgle EDA, ils ſeront l'vn à l'autre comme CE eſt à EA : & partant par la 11.p.5. BD ſera à DA, comme CE à EA: (puiſque ces deux raiſons ſont les meſmes que du triangle BED au triangle DEA, & du triangle CDE au meſme triangle DEA.) Ce qui eſtoit propoſé.



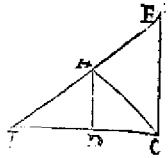
Pour la ſeconde partie : ie dis que ſi DB eſt à DA, comme CE à EA, qu'auſſi DE ſera parallele à BC.

Car les triangles DEB & DEA, ſeront par la 1.p. 6. l'vn à l'autre, comme DB à DA. Item les deux autres CDE, EDA, ſeront auſſi l'vn à l'autre, comme CE à EA : & par la 11.p.5. le triangle DEB ſera au triangle DEA, comme le triangle CDE eſt au meſme triangle EDA: & par la 9.p.5. les deux triangles BED, & EDC ſeront egaux, leſquels eſtans ſur meſme baſe DE, par la 39.p. 1. ils ſeront entre meſmes paralleles: & partant DE ſera parallele à BC. Parquoy ſi l'on meine vne ligne parallele à l'vn des coſtez d'vn triangle, icelle couppera les autres coſtez d'iceluy triangle proportionnellement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO. 3. PROP. III.

Si l'angle d'vn triangle eſt couppé en deux egalement par vne ligne droicte, laquelle couppe auſſi la baſe; les ſegmens de la baſe ſeront l'vn à l'autre comme les autres coſtez du triangle: Et ſi les ſegmens de la baſe ſont l'vn à

l'autre comme les autres costez : la ligne droicte tirée du sommet à la section de la base, couppe l'angle en deux egalement.



Au triangle ABC, soit l'angle BAC couppé en deux egalemẽt par la ligne AD. Ie dis qu'il y a mesme raison de BD à DC, comme de AB à AC.

Qu'il ne soit ainsi: apres auoir du poinct C mené CE parallele à DA, soit continuee BA directement iusqu'à ce qu'elle rencontre CE: (Or BA, CE se rencontreront, d'autant que les deux angles B & BCE sõt moindres que deux droicts, estans egaux aux deux B & BDA, qui sont moindres que deux droicts par la 27.p.1.) & parce que DA & CE sont paralleles, l'angle CAD sera egal à son alterne ACE par la 29.p.1. Et si l'exterieur DAB sera egal à l'oppose interieur AEC. Mais BAD, CAD estãs egaux par l'hypothese, aussi par les com. sent. AEC, ACE seront egaux: & partãt par la 6. p.1. les costez AE & AC seront egaux Mais par la precedente prop. BA est à AE, comme BD à DC, (estant AD parallele à CE) & par consequent BA sera aussi à AC, (egale à AE) comme BD à DC. Ce qui estoit proposé.

Pour la seconde partie : ie dis que si BA est à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB sera couppé en deux egalement par la ligne droicte AD.

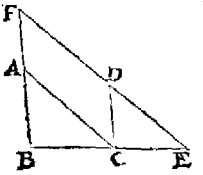
Car apres auoir construit comme dessus, BA sera à AE, comme BD à DC, par la precedente prop. Et partant par la 11.p.5. BA sera à AE, comme le mesme BA à AC, & par la 9.p.5. AE & AC seront egaux; & par

tant par la 5. p. 1. les deux angles AEC, ACE, serõt aussi egaux; & par la 29. p. 1. ils sõt egaux, l'vn à DAB, & l'autre à DAC, lesquels par ce moyen seront aussi egaux; ce qui estoit proposé. Parquoy si l'angle d'vn triãgle est couppé en deux egalemẽt par vne ligne droicte, laquelle couppe la base, &c. Ce qu'il falloit demõstrer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Des triãgles equiãgles, les costez qui sont au lõg des angles egaux, sont proportionnaux, & les costez qui soustiennẽt les angles egaux, sont de mesme raisõ.

Soient deux triangles ABC, DCE, equiangles: c'est à dire que l'angle ABC soit egal à l'angle DCE, & l'angle ACB à l'angle E, & le troisiesme au troisiesme. Ie dis que comme AB à BC, ainsi DC à CE, & comme BC à CA, ainsi CE à ED, & finablement comme AB à AC, ainsi DC à DE. Car ainsi les costez d'alentour les angles egaux, sont les proportiõnaux, & les costez homologues, sont ceux-là qui soustiennent les angles egaux, c'est à dire que tous les antecedans, & semblablement les consequens regardent les angles egaux.



Soient constituez les costez BC, CE selon vne ligne droicte, tellement que l'angle externe DCE soit egal à l'interne ABC, & pareillement l'externe ACB à l'interne DEC: & d'autant que par la 17. p. 1. les deux angles ABC, ACB sont moindres que deux droicts, & l'angle DEC est egal à l'angle ACB, aussi les angles B & E serõt

moindres que deux droicts: & partant les lignes BA & ED estans produictes de la part de A & D, se rencontreront: Qu'elles soient donc prolongees & conuiennẽt en F. Il est euident que l'angle exterieur BCD, estãt, par l'hypothese egal à son oppose interieur CBA; DC sera parallele à FB par la 28. p. 1. Pareillement l'angle exterieur ACB estant egal à son oppose interieur DEC, aussi par la mesme 28. p. 1. CA, & EF seront paralleles. Partant ACDF sera parallelogramme, & par la 34. p. 1. il aura les angles, & les costez oppositez egaux. Mais AC estant parallele à EF, par la 2. p. 6. AB sera à AF, ou CD sont egale, comme BC à CE, & en permutant par la 16. p. 5. AB sera à BC, comme DC à CE. Pareillement CD estant parallele à BF, comme BC sera à CE, ainsi FD, ou CA son egale, sera à ED par la 2. p. 6. & en permutant BC sera à AC, comme CE à ED.

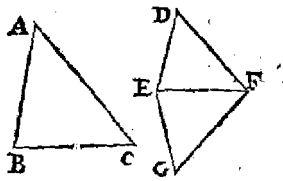
Veu donc que AB est à BC, comme DC à CE, & BC à CA comme CE à ED, aussi en raison egale AB sera à AC, comme DC à ED. Parquoy des triangles equiangles, les costez qui sont au long des angles egaux, sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si deux triangles ont les costez proportionnaux, ils seront equiangles, & auront les angles egaux, soubs lesquels les costez de mesme raison seront subtendus.

Soient deux triangles ABC, & DEF, ayans les costez proportionnaux, & soit AB à BC comme DE à EF, & BC à CA comme EF à FD, & encore AB à AC

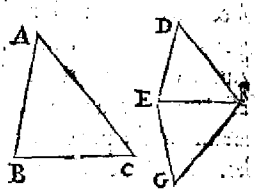
comme DE à DF. Ie dis que les triangles sont equiangles, sçauoir l'angle A estre egal à l'angle D, & l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F; car ainsi les angles egaux regardent les costez de mesme raison.



Qu'il ne soit ainsi: sur la ligne EF, & aux deux poincts E & F soient construits les deux angles FEG egal à B, & EFG egal à C, & conuiennēt les lignes EG, FG en G: par la 32. p. 1. le troisiesme angle G sera egal au tiers A: & partant les triangles ABC, GEF sont equiangles: parquoy comme AB à BC, ainsi GE à EF par la 4. p. 6. Mais comme AB à BC, ainsi a esté posé DE à EF: donc par la 11. p. 5. comme GE à EF, ainsi DE à la mesme EF: & partant par la 9. p. 5. GE, DE seront egales. Et d'autant que par la proposition precedente, comme BC à CA, ainsi EF à FG: & par l'hypothese comme BC à CA, ainsi EF à FD: par la 11. p. 5. comme EF sera à FG, ainsi la mesme EF sera à FD: & par la 9. p. 5. FG, FD seront egales. Veu donc que les costez EG, FG du triangle GEF sont egaux aux costez DE, DF du triangle DEF, chacun au sien, & la base EF commune, les angles G & D seront egaux par la 8. p. 1. & partant par la 4. p. 1. les autres angles GEF, GFE seront aussi egaux aux autres DEF, DFE, chacun au sien. Parquoy l'angle G estant egal à l'angle A, aussi l'angle D sera egal au mesme angle A: & ainsi l'angle DEF sera egal à l'angle B, & l'angle DFE à l'angle C. Si donc deux triangles ont les costez proportionnaux, ils seront equiangles, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'iceux angles egaux, proportionnaux: ils seront equiangles, & auront les angles egaux sous lesquels les costez de mesme raison sont subtendus.



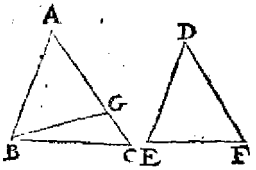
Soient les deux triangles ABC & DEF, ayans l'angle A egal à l'angle E, & comme AB à BC, ainsi DE à EF. Ie dis que les triangles sont equiangles, sçauoir que l'angle A est egal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F.

Qu'il ne soit ainsi; sur la ligne E F soit construit comme en la proposit. precedente, le triangle GEF equiangle au triangle ABC: & par la 4. p. 6. GE sera à EF, comme AB à BC, ou DE à EF, (car ils sont en la mesme raison) & par la 9. p. 5. GE & DE (qui ont vne mesme raison à EF) seront egales; & les deux triãgles GEF & DEF, auront deux costez egaux à deux costez, sçauoir GE, EF, à DE, EF, & les deux angles au poinct E, egaux (car ils sont chacun egal à l'angle B) & par la 4. p. 1. ils auront la base egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien; & partant seront equiangles. Mais l'vn d'iceux triangles GEF est equiangle à ABC par construction; aussi sera donc l'autre DEF, par les communes sentences.

Parquoy si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 7. PROP. VII.

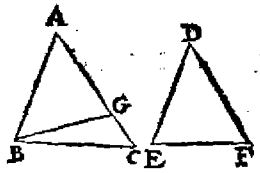
Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'vn autre angle, proportionnaux, estans les troisiesmes angles de mesme espece: Iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux, au long desquels les costez seront proportionnaux.



Soient deux triangles ABC, & DEF, desquels les deux angles A & D soient egaux, & les costez AB, BC d'alẽtour l'angle ABC, proportionnaux aux costez DE, EF d'alentour l'angle E, c'est à dire que comme AB est à BC, ainsi DE soit à EF; mais les autres angles C & F soient de mesme espece, c'est à dire aigus, droicts, ou obtus, & soient premierement aigus. Ie dis que les triangles sont equiangles, sçauoir les angles ABC & E à l'entour desquels sont les costez proportionnaux, & les angles C & F estre egaux.

Car l'angle B sera egal, ou non à l'angle E; si egal, aussi par la precedente les triangles seront equian-

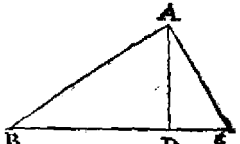
gles. Si inegal, comme si B estoit plus grand que E, soit fait ABG egal à E par la 23. p. 1. le troisiesme angle AGB, sera egal au troisiesme F, & partant aigu comme iceluy; & les deux triangles ABG, & DEF seront equiangles; & par la 4. p. 6. comme AB à BG, ainsi DE à EF. Mais par l'hypothese, comme AB à BC, ainsi DE à EF: donc par la 11. p. 5. comme AB sera à BG, ainsi la mesme AB sera à BC; & partant par la 9. p. 5. BG, BC seront egales & par la 5. p. 1. les deux angles C & BGC sur la base CG seront egaux, & tous deux aigus, & par cõsequent l'angle BGA sera plus grand qu'vn droict, puis que par la 13. p. 1. les deux BGC, AGB sont egaux à deux droicts: Mais l'angle ABG a esté demõstré egal à l'angle F: donc F seroit aussi plus grand qu'vn droict, & on l'a posé aussi moindre: ce qui est absurde. Maintenant tant l'angle C, que F ne soit aigu; & comme dessus l'angle C sera egal à l'angle BGC; & partant iceluy BGC ne sera aussi aigu, & les deux C & BGC ne seroient moindres que deux droicts, mais egaux, ou plus grands que deux droicts: ce qui est absurde: car par la 17. p. 1. ils sont moindres que 2. droicts. Les angles ABC & E ne sont dõc pas inegaux, ains egaux; & partant par la 32. p. 1. le troisiesme C sera aussi egal au tiers F. Si donc deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



THEO. 8. PROP. VIII.

Si de l'angle droict d'vn triangle re-

ctangle on tire vne perpendiculaire sur la base ; les triangles au long de la perpendiculaire sont semblables au tout, & entr'eux.



Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droict A, duquel soit menée à la base BC la perpendiculaire AD. Ie dis que les triangles ABD & ADC sont equiangles au total BAC, & entr'eux, & par consequent semblables.

Qu'ainsi ne soit: d'autant que AD est perpendiculaire, l'angle BDA est droict, & egal à l'angle droict BAC, du triangle total, & l'angle B est commun à tous les deux triangles BAD & BCA, & par la 32. p. 1. le troisiesme angle BAD, est egal au troisiesme ACB: & partant les deux triangles BAD & BAC, seront equiangles ; & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux, c'est à dire que comme CB sera à AB, ainsi AB à BD ; & comme BA à AC, ainsi BD à DA ; & comme BC à CA, ainsi BA à AD ; & partant par la 1. def. de ce liure les triangles ABC, ABD seront semblables.

Par mesme discours on prouuera que les deux triangles BAC & ADC, sont aussi equiangles, & semblables : car l'angle C estant commun à tous les deux, & l'angle droict egal à l'angle droict, le troisiesme CAD sera egal au troisiesme B, par la 32. p. 1. & par la 4. p. 6. comme BC sera à CA, ainsi CA est à CD ; & comme CA à AB, ainsi CD à DA ; & comme CB à BA, ainsi CA à AD.

On demonſtrera en la meſme maniere les triangles ADB, ADC eſtre ſemblables entr'eux, puiſque les angles au poinct D ſont droicts, & les angles ABD, CAD, & BAD, ACD ont eſté demonſtrez egaux; & partãt par la 4.p.6. comme BD à DA, ainſi DA à DC; & cõme DA à AB, ainſi DC à CA; & comme AB à BD, ainſi CA à AD. Si donc de l'angle droict d'vn triangle rectãgle on tire vne perpendiculaire ſur la baſe, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte que la perpendiculaire tirée de l'angle droict d'vn vriangle rectangle à la baſe, eſt moyenne proportionnelle entre les deux ſegmens de la baſe: & chacun des coſtez comprenant l'angle droict, eſtre auſſi moyen proportionnel entre toute la baſe, & le ſegment qui le touche.

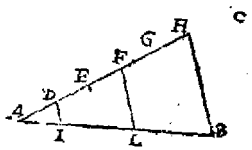
Car il a eſté demonſtré que comme BD *eſt à* DA, *ainſi* DA *à* DC; *& partant* DA *eſt moyenne prop. entre* BD *&* DC: *item que comme* CB *eſt à* BA, *ainſi* BA *à* BD; *& par ainſi* BA *eſt moyenne prop. entre* CB, *&* BD: *finablement que comme* BC *à* CA *ainſi* CA *à* CD, *& partant* CA *eſtre moyenne proportionnelle entre* BC *&* CD.

PROB. 1. PROP. IX.

D'vne ligne droicte donnée, oſter la partie demandée.

Soit la ligne droicte donnée AB, de laquelle il faut oſter la cinquieſme partie, ou autre telle qu'on voudra.

Du poinct A ſoit menée la ligne droicte AC, fai-



sant angle auec AB, & en icelle AC, soient prises à l'aduanture cinq parties egales; (car il faut qu'icelle ligne soit tant grande qu'il sera besoin) & soient icelles AD, DE, EF, FG, GH; & apres auoir mené la ligne BH, du poinct D soit menée DI, parallele à HB: Ie dis que AI est la cinquiesme partie de AB.

Car puis qu'au triangle ABH, la ligne DI est parallele au costé HB, par la 2. p. 6. comme HD sera à DA, ainsi BI à IA: & en composant par la 18. p. 5. comme HA sera à DA, ainsi BA à IA: mais par la construction HA est quintuple de AD: donc aussi BA sera quintuple de AI: & partant AI sera la cinquiesme partie de la ligne droicte AB, laquelle auoit esté demandée.

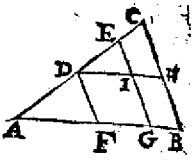
SCHOLIE.

Que si de AB il falloit oster plusieurs parties, comme pour exemple les trois cinquiesmes, il est euident par ce qui a esté demonstré qu'estant tirée la ligne FL parallele à HB, le segment AL sera les trois cinquiesmes de AB, *tout ainsi que AF est les trois cinquiesmes de AH.*

PROBL. 2. PROP. X.

Coupper semblablement vne ligne droicte donnée non couppée, à vne autre ligne droicte donnée & couppée.

Soient données les lignes droictes AB AC, desquelles AC est couppée en D & E: & il faut couppper AB en parties semblables, & proportionnelles à celles de AC.



Soient accommodées icelles lignes données en sorte qu'elles facent l'angle BAC; & apres auoir mené BC, de D & E, soient menées DF, EG, paralleles à icelles BC par la 31. p. 1. Ie dis que la ligne AB est semblablement couppée en F & G, comme est couppée AC en D & E. Car par la 2. p. 6. comme AD est à DE, ainsi AF à FG. Que si on tire DH parallele à AB couppant EG en I. Derechef par la susdicte 2. p. 6. comme DE sera à EC, ainsi DI à IH, c'est à dire ainsi, FG à GB, pource que par la 34. p. 1. FG est egale à DI, & GB à IH. Parquoy les parties FG, GB seront aussi proportionnelles aux parties DE, EC. Les trois parties AF, FG, GB, sont donc proportionnelles aux trois parties AD, DE, EC: & partant AB est couppée semblablement à AC, ainsi qu'il falloit faire.

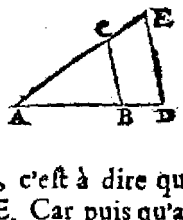
PROBL. 3. PROP. XI.

A deux lignes droictes données, trouuer vne troisiesme proportionnelle.

Soient deux lignes droictes données AB & AC, ausquelles il faut trouuer vne troisiesme proportionnelle.

Soient dispoſées icelles lignes en vn angle CAB;

& apres auoir prolongé AB iusques en D, soit faicte BD egale à AC; & apres auoir mené CB, du poinct D, soit tirée DE parallele à BC, rencontrant AC prolongée en E. Ie dis que CE



est la troisiesme proportionnelle, c'est à dire que comme AB est à AC, ainsi AC à CE. Car puis qu'au triangle ADE la ligne droicte BC est parallele au costé DE, par la 2. p. 6. comme AB sera à BD, ainsi AC à CE: mais par la 7. p. 5. comme AB est à BD, ainsi la mesme AB est à AC, egale à icelle BD. Donc comme AB est à AC, ainsi à AC à CE. Partant à deux lignes droictes données, nous en auons trouué vne troisiesme proportionnelle: Ce qu'il falloit faire.

PROB. 4. PROP. XII.

A trois lignes droictes données; trouuer la quatriesme proportionnelle.

Soient les trois lignes données (en la precedente figure) AB, BD, AC, ausquelles il faut trouuer la quatriesme proportionnelle.

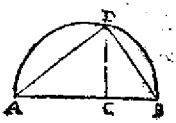
Soient disposées les deux premieres AB, BD, selon vne ligne droicte AD; & la troisiesme AC face auec la premiere AB vn angle A: puis apres soit menée BC, & de D, la ligne DE parallele à icelle BC, rencontrant AC prolongée en E. Ie dis que CE est la 4. proportionnnelle requise. Car par la 2. p. 6. comme AB est à BD, ainsi AC est à CE. Nous auõs donc

trouué vne quatrieſme ligne proportionnelle à trois données: Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droictes données, trouuer vne moyenne proportionnelle.

Soient les deux lignes droictes données A C & C B, entre leſquelles il faut trouuer vne moyenne proportionnelle.



Soient icelles diſpoſées en vne ligne droicte AB, ſur laquelle ſoit deſcrit vn demy cercle A D B; & apres auoir du poinct C leué la perpendiculaire C D: Ie dis qu'icelle C D eſt la moyenne proportionnelle demandée.

Car eſtans menées les deux lignes AD & BD, l'angle A D B dans le demy cercle ſera droict par la 31. p. 3. Veu donc que de l'angle droict A D B du triangle rectangle ADB, eſt tirée DC perpendiculaire à la baſe AB, par le corol. de la 8. p. 6. CD ſera moyenne proportionnelle entre A C, C B. Nous auons donc trouué vne moyenne proportionnelle entre les deux lignes données: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

De cecy eſt euident qu'vne ligne droicte tirée perpendiculairement de quelconque poinct au diametre d'vn cercle, iuſques à la circonference, eſt moyenne proportionnelle entre

les

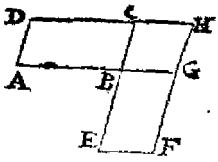
les segmens du diametre faicts par icelle perpendiculaire. Car de quelconque poinct pris au diametre A B, estant leuée vne perpendiculaire iusques à la circonference, par les mesmes raisons que dessus, icelle perpend. sera moyenne prop. entre les deux segment du diametre AB.

THEOR. 9. PROP. XIV.

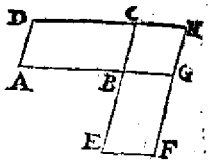
Des parallelogrammes egaux qui ont vn angle egal à vn angle : les costez au long des angles egaux, sont reciproques: & les parallelogrammes qui ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.

Soient deux parallelogrammes egaux ABCD, & BEFG, desquels les deux angles ABC & EBG soient egaux: Ie dis que les costez qui sont au long d'iceux angles egaux, sont reciproques : c'est à dire que AB est à BG, comme EB à BC.

Car les parallelogrammes AC, EF, estans disposez de telle façon que AB & BG, facent vne ligne droicte, soient prolongez D C, F G, iusques à ce qu'il se rencontrent en H. Puis donc que les deux parallelogrammes AC, BG, sont egaux, ils auront vne mesme raison au parallelogramme BH, par la 7. p. 5. Mais la raison du parallelo-



gramme AC à BH, eſt par la 1. p. 6. comme celle de la baſe AB à la baſe BG. Item celle des parallelogrammes EG, EH, eſt comme celle de EB à BC; & partant par la 11. p. 5. comme AB à BG, ainſi EB à BC. Ce qui eſtoit propoſé.

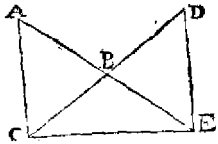


Pour la ſeconde partie; ſi AB eſt à BG, comme EB à BC, & que les angles ABC & EBG ſoient egaux: Ie dis que les parallelogrammes AC & EG, ſeront auſſi egaux.

Car demeurant la meſme conſtruction, on prouuera par la 1. p. 6. qu'il y a meſme raiſon du parallelogramme AC, au parallelogramme BH, que de la baſe AB à la baſe BG: pareillement qu'il y à meſme raiſon du parallelogramme EG, au parallelogramme BH, que de EB à BC: mais les raiſons des baſes ſont poſées ſemblables: donc auſſi les raiſons des parallelogrammes AC & EG, au troiſieſme BH ſeront ſemblables par la 11. p. 5. & partant par la 9. p. 5. ils ſeront egaux. Parquoy des parallelogrammes egaux, qui ont vn angle egal; les coſtez au long, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO. 10. PROP. XV.

Les triangles egaux ayans vn angle egal à vn angle, ont les coſtez au long des angles egaux reciproques: & les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, & les coſtez au long des angles egaux reciproques, ſont auſſi egaux.



Soient deux triangles egaux ABC & DBE, ayans les angles au poinct B egaux. Ie dis que les costez qui sont au long des angles egaux, sont reciproques : c'est à dire que comme AB est à BE, ainsi DB sera à BC.

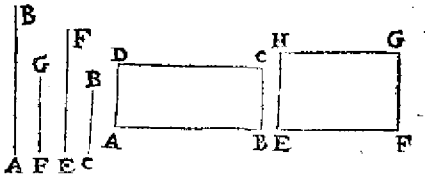
Car les triangles estans disposez en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, soit menée la ligne CE. Pour-autant que les deux triangles ABC & DBE sont egaux, ils auront vne mesme raison au triangle BEC par la 7. p. 5. mais par la 1. p. 6. la raison du triangle ABC, au triangle EBC, (estant de mesme hauteur) est comme de la base AB à la base BE; pareillement par la mesme 1. p. 6. le triangle DBE sera au triangle ECB, comme DB est à BC; & partant par la 11. p. 5. AB sera à BE, comme DB à BC. Ce qui a esté propopsé.

Pour la seconde partie, elle se prouuera comme en la precedente, en retrogradant par la 1. p. 6: 11 p. 5. & 9. p. 5. Donc les triangles egaux ayans vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 11. PROP. XVI.

Si quatre lignes sont proportionnelles, le rectangle compris des extremes, est egal à celuy des moyennes : & si le rectangle compris des extremes, est egal au rectangle compris des moyennes : les quatre lignes sont proportionnelles.

Soient quatre lignes proportionnelles AB, FG, EF, BC, sçauoir est que AB soit à FG, comme EF à BC, & soit le rectangle ABCD compris des extremes AB, BC; & le rectangle EFGH compris sous les moyennes EF, FG. Ie dis que les rectangles AC, EG, sont egaux.



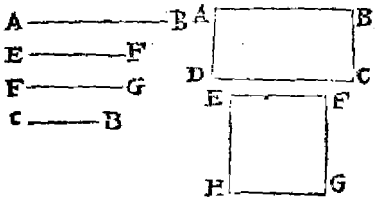
Car puis que les angles droicts B & F sont egaux; & que comme AB est à FG, ainsi EF à BC; les costez au long des angles egaux B & F, seront reciproques par la 2. def. 6. & partant par la 14. p. 6. les parallelogrammes AC & EG seront egaux. Ce qui a esté proposé.

Quant à la seconde partie; soient les rectangles AC, EG egaux. Ie dis que les quatre lignes AB, FG, EF, BC, sont proportionnelles; c'est à dire que comme AB est à FG, ainsi EF est à BC. Car puis que les rectangles sont egaux, & ont les angles B & F aussi egaux, sçauoir droicts, ils auront les costez au long d'iceux angles egaux reciproques par la 14. p. 6. sçauoir est que comme AB est à FG ainsi EF à BC. Si donc quatre lignes sont proportionnelles, le rectangle compris des extremes, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XVII.

Si trois lignes droictes sont proportion-

nelles; le rectangle compris des extremes, sera egal au quarré faict de la moyenne: & si le rectangle compris des extremes est egal au quarré descrit de la moyenne; les trois lignes seront proportionnelles.



Soient trois lignes proportionnelles AB, EF, BC; & soit le rectangle ABCD cõpris soubs les extremes AB, BC, & le quarré de la moyenne EF soit EFGH. Ie dis que le rectangle AC est egal au quarré EG.

Car estant prise FG egale à EF, les quatre lignes AB, EF, FG, BC, seront proportionnelles, & le quarré EG sera compris soubs les moyennes EF, FG, à cause de l'egalité d'icelles. Parquoy par la precedente prop. le rectangle AC compris des deux extremes AB BC est egal au quarré EG, c'est à dire au rectangle des moyennes EF, FG. Ce qui estoit proposé.

Pour la seconde partie; le rectangle AC soit egal au quarré EG. Ie dis que comme AB est à EF ainsi EF à BC. Car puisque les rectangles AC, EG sont egaux, par la 16. p. 6. comme AB sera à FE, ainsi FG à BC: mais par la 7. p. 5. cõme FG est à BC, ainsi EF egale à icelle FG, est à la mesme BC: & partant

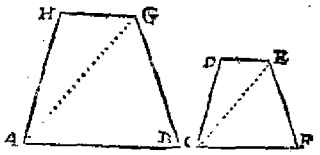
cõme AB est à EF, ainsi EF est à BC. Si donc trois lignes droictes sont proportionnelles, le rectangle compris des extrémes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par la derniere partie de ce theoreme, qu'vne ligne droicte est moyenne proportionnelle entre deux autres lignes droictes, qui comprennent vn rectangle egal au quarré d'icelle ligne. Car pource que le rectangle de AB, BC est egal au quarré de EF, il a esté demonstré, que comme AB à EF, ainsi EF à BC; & partant EF est moyenne prop. entre AB & BC.

PROBL. 6. PROP. XVIII.

Sur vne ligne droicte donnée, descrire vne figure rectiligne semblable, & semblablement posée à vne figure rectiligne donnée.



Soit la ligne droicte dõnée AB, sur laquelle il faut construire vne figure semblable, & semblablement posée à la figure rectiligne donnée CDEF.

Soit diuisée la figure donnée en deux triangles, par la ligne CE : & apres auoir par la 23. p. 1. descrit sur la ligne AB, & aux poincts A & B, les deux angles BAG, ABG, egaux, l'vn à l'angle

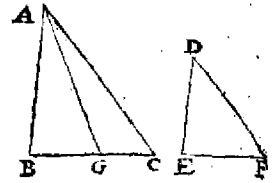
FCE, & l'autre à l'angle CFE. Il eſt euident par la 32. p.1. que le troiſieſme ſera egal au troiſieſme, & les triangles CEF, AGB ſeront equiangles, & auront les coſtez au long des angles egaux proportionnaux par la 4. p. 6. Pareillement ſur la ligne AG, & aux deux poincts A & G, ſoient deſcrits les deux angles HAG, & AGH, egaux aux deux DCE & CED, chacun au ſien : auſſi par la 32. p. 1. le troiſieſme H ſera egal au troiſieſme D, & les triangles CDE & AHG ſeront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les coſtez au long des angles egaux proportionnaux : ainſi l'angle D eſtant egal à l'angle H, & l'angle E à l'angle B, les deux de C aux deux de A, & les deux de E aux deux de G ; les deux figures CDEF, ABGH, ſeront equiangles : & pour autant qu'elles ſont compoſees de triangles equiangles, leſquels ont les coſtez au long des angles egaux, proportionnaux, comme CF ſera à FE, ainſi AB à BG : item comme CF eſt à CE, ainſi AB à AG, & comme CE à CD, ainſi AG à AH ; & en raiſon egale, comme CF ſera à CD, ainſi AB ſera à AH ; ainſi les coſtez aux long des angles egaux FCD, BAH, ſeront auſſi proportionnaux, & ainſi des autres. Parquoy les figures CDEF, AHGB ſeront ſemblables, & ſemblablement deſcrites. Nous auons donc faict ce qui eſtoit requis.

Que ſi la figure donnee auoit plus de 4. coſtez, il la faudroit diuiſer en pluſieurs triangles, & operer ſur chacun triangle, comme il a eſté dit cy deſſus.

THEOR. 13. PROP. XIX.

Les triangles ſemblables, ſont l'vn à

l'autre en raison doublee de leurs co-ſtez de meſme raiſon.



Soient deux triangles ſemblables ABC & DEF. Ie dis qu'ils ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon BC & EF: c'eſt à dire que ſi à BC & EF on trouue la troiſieſme proportionnelle BG; le triangle ABC ſera au triangle DEF, comme la ligne BC eſt à la troiſieſme proportionnelle BG: car telle eſt la raiſon doublee par la 10. def. 5.

Car eſtant tiree la ligne AG; d'autant que les triangles ABC, DEF ſont ſemblables, & que comme AB eſt à BC, ainſi DE eſt à EF; en permutant par la 16. p. 5. comme AB ſera à DE, ainſi BC ſera à EF: mais comme BC eſt à EF, ainſi EF eſt à BG par la conſtruction. Donc comme AB ſera à DF, ainſi EF ſera à BG par la 11. p. 5. & par ainſi les deux triangles ABG, DEF, auront les coſtez au lõg des angles egaux B & E, reciproques; & par la 15. p. 6. iceux triangles ABG, DEF, ſeront egaux entr'eux; & partãt cõme le triangle ABC ſera au triangle DEF, ainſi ſera le meſme triangle ABC au triangle ABG par la 7. p. 5. Mais comme le triangle ABC eſt au triangle ABG de meſme hauteur, ainſi eſt la baſe BC à la baſe BG par la 1. p. 6. Donc comme le triangle ABC eſt au triangle DFF, ainſi eſt BC à BG. Mais BC, EF, BG, eſtans continuellement proportionnelles, BC eſt à BG en raiſon doublee de BC à EF par la 10. def. 5. donc auſſi le triangle ABC eſt au triangle DEF en raiſon dou-

blée du costé BC au costé EF. Donc les triangles semblables sont l'vn à l'autre en raison doublé de leurs costez de mesme raison : ce qu'il falloit demonstrer.

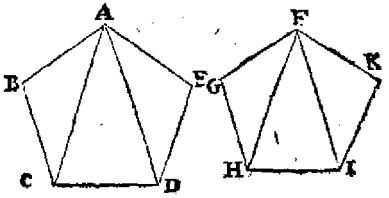
COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'estant trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere sera à la troisiesme, ainsi le triangle descrit sur la premiere sera au triangle semblable, & semblablement posé sur la seconde. Car il a esté demonstré que comme BC est à BG, ainsi le triangle ABC au triangle DEF.

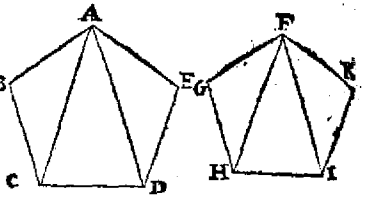
THEOR. 14. PROP. XX.

Les polygones semblables peuuent estre diuisez en nombre egal de triangles semblables entr'eux, & proportionnaux à leur tout: & les polygones sont l'vn à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison.

Soient deux polygones sẽblables ABCDE, & FGHIK, Ie dis premierement qu'ils peuuent estre diuisez en nõ-



bre egal de triangles semblables.



Car apres auoir mené les lignes AC, AD, FH, FI, il est euident que l'vne des figures est diuisée en autant de triangles que l'autre. Et pour autant que les figures sont semblables, l'angle B sera egal à l'angle G, & cõme BA sera à BC, ainsi GF sera à GH, & par la 6 p. de ce liure les triangles ABC & FGH seront equiangles, & par la 4. prop. de ce mesme liure, ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux, & seront semblables: par mesme discours, les triangles AED & FKI, seront aussi semblables. Pareillement par ce qui a esté dit cy dessus AC est à CB, comme FH à HG: mais BC est à CD comme GH à HI: car ce sont costez de figures semblables: donc en raison egale par la 22. p. 5. AC sera à CD, comme FH, à HI: & d'autant que les angles ECD, GHI sont egaux, & les angles BCA, GHF aussi egaux; iceux estans ostez, les restans ACD, FHI, seront pareillement egaux; & partant par la 6. p. 6. les triangles ACD & FHI, seront equiangles, & par consequent semblables.

Ie dis secondement, qu'iceux triangles sont proportionnaux à leur tout. Car les trois triangles de l'vne des figures estans semblables aux trois triangles de l'autre, chacun au sien, & par la prop. preced. ils sont l'vn à l'autre, en raison doublée de leurs costez de mesme raison; les triangles ABC & FGH, seront l'vn à l'autre en raison doublée de AC à FH: aussi en la mesme raison doublée seront les triangles

ACD, FHI: & le troiſieſme AED eſtant au troiſieſme FKI en raiſon doubłée de AD à FI, qui eſt la meſme que de AC à FH, eſtans coſtez de triangles ſemblables; auſſi les triangles AED, FKI, ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublee de AC à FH: & par la 12. p. 5. tous les triangles du premier polygone, ſeront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'vn des triãgles de l'vn d'iceux, à ſon reſpondãt de l'autre.

Ie dis tiercement, que le polygone eſt au polygone, en raiſon doublee des coſtez CD & HI: car puiſque toute la figure ABCDE, eſt à toute la figure FGHIK, comme l'vn des triangles de l'vne ACD, eſt à l'vn des triangles de l'autre FHI, leſquels par la prop. precedente ſont en raiſon doublee de CD à HI, par la 11. p. 5. le polygone ſera au polygone, en raiſon doublée des coſtez de meſme raiſon CD & HI. Parquoy les polygones ſemblables peuuent eſtre diuiſés en nombre egal de triangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

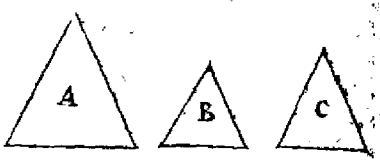
Par cecy eſt manifeſte qu'eſtans trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere ſera à la tierce, ainſi ſera le polygone deſcrit ſur la premiere au polygone ſemblable, & ſemblablemẽt deſcrit ſur la ſeconde; puis qu'il a eſté demonſtré que les polygones ſont entr'eux en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon, c'eſt à dire comme le coſté du premier a vne troiſieſme proportionnelle auſdits coſtez de meſme raiſon.

THEOR. 15. PROP. XXI.

Les figures rectilignes ſemblables à vne, ſont auſſi ſemblables entr'elles.

Soit la figure A ſemblable à la figure B, & la figure C ſemblable auſſi à la meſme B: Ie dis que A & C

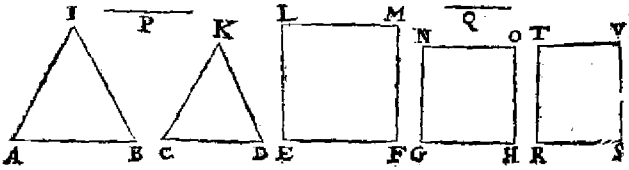
ſeront ſemblables entr'elles.



Car d'autant que chacune d'icelles A & C eſt ſemblable à B, elle a les angles egaux aux angles de B par la 1. def. 6. & partant par la 1. com. ſent. les angles de A, ſeront auſſi egaux aux angles de C; & par la 4. p. 6. A & C auront les coſtez au long des angles egaux proportionnaux: & par la 1. def. 6. elles ſeront ſemblables: donc les figures rectilignes ſemblables à vne ſont auſſi ſemblables entr'elles: ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 16. PROP. XXII.

Si quatre lignes ſont proportionnelles, les figures rectilignes ſemblables, & ſemblablement deſcrites ſur icelles, ſeront proportionnelles: & ſi icelles figures ainſi deſcrites ſont proportionnelles, icelles lignes ſeront auſſi proportionnelles.



Soient quatre lignes proportionnelles AB, CD,

EF, GH; & sur AB & CD soient constituées deux quelconques rectilignes ABI, CDK semblables, & semblablement descrits: item sur EF & GH deux autres quelconques rectilignes semblables & semblablement descrits EFML, GHON. Ie dis premierement que ces 4. rectilignes sont proportionnaux, c'est à dire que comme ABI est à CDK, ainsi EFML est à GHON.

Qu'il ne soit ainsi: aux deux lignes AB & CD, soit trouuée P troisiesme proportionnelle par la 11. p.6. & aux deux EF & GH, soit trouuée Q aussi troisiesme proportionnelle: & d'autant que AB est à CD, comme EF est à GH. Item CD à P: comme GH à Q: en raison egale AB sera à P, comme EF à Q par la 22. p.5. Mais comme AB est à P, ainsi le rectiligne ABI est au rectiligne CDK par le coroll. de la 19. ou 20. p. 6. Item comme EF est à Q, ainsi le rectiligne EM est au rectiligne GO. Donc comme ABI est à CDK, ainsi EM est à GO par la 11. p.5.

Ie dis pour la seconde partie, que si icelles figures semblales, & semblablement descrites sont proportionnelles, que les lignes sur lesquelles elles sont descrites, seront aussi proportionnelles.

Car soit trouué RS 4. proportionnelle aux trois AB, CD, EF; puis sur icelle RS descrit le rectiligne RV semblable au rectiligne EM, & semblablement posé par la 18. p. 6. & partant aussi semblable au rectiligne GO par la prop. preced. & d'autant que comme AB est à CD, ainsi EF est à RS, comme il a esté demonstré cy dessus, le rectiligne ABI sera au rectiligne CDK, comme le rectiligne EM au rectiligne RV. Mais comme ABI est à CDK, ainsi aussi a esté posé EM à GO: donc par la 11. p. 5. comme EM sera à RV, ainsi EM sera à GO; & partant par

la 9.p.5. RV, GO serõt egaux: lesquels estãs semblables & semblablement descrits, consistent necessairemẽt (comme nous demonstrerons incontinent) sur lignes droictes egales RS, GH. Parquoy par la 7.p.5. comme EF sera à RS, ainsi EF sera à GH. Mais par l'hypothese EF est à RS, comme AB à CD: donc par la 11.p.5. comme AB sera à CD, ainsi aussi EF sera à GH: Parquoy si quatre lignes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

LEMME.

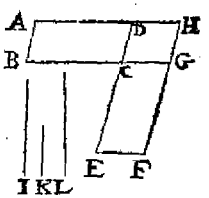
Or que les rectilignes egaux semblables & semblablement descrits, tels que sont GO, RV, consistent sur lignes droictes egales, on le prouuera ainsi. Si les lignes GH, RS peuuent estre inegales, soit GH la plus grande: & puis que les rectilignes sont semblables, comme GH est à HO, ainsi RS à SV: & GH ayant esté posee plus grande que RS, par la 14.p.5. HO sera aussi plus grande que SV; & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV; puis que celuy-cy peut estre constitué dans celuy-là: ce qui est absurde, ayans esté posez egaux. Les lignes GH, RS ne sont donc pas inegales, mais egales: ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

Il est euident, que s'il y a aussi trois lignes droictes proportionnelles, les rectilignes semblables, & semblablement descrites sur icelles, seront pareillement proportionnelles, &c. Car la ligne moyenne, & son rectiligne estant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles: donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a esté cy dessus demonstré. Veu donc que le rectiligne qui sera descrit sur la seconde ligne, sera egal à celuy descrit sur la 3. est manifeste ce qui estoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes equiangles, sont l'vn à l'autre en la raison composee de celles de leurs costez.



Soient deux parallelogrammes equiangles ABCD, & CEFG, ayans les deux angles BCD, ECG egaux: Ie dis que la raison de l'vn à l'autre est composee de celles de leurs costez, sçauoir est composee de la raison que BC a à CG, & de celle que DC a à CE.

Car ayant disposé les deux parallelogrammes, en sorte que BC & CG, se puissent rencontrer directement, & ne fassent qu'vne ligne droicte, comme aussi DC, CE vne autre ligne droicte, soit paracheué le parallelogramme DCGH; & soit prise quelconque ligne droicte I; puis aux 3. BC, CG & I, soit trouué la 4. prop. K. Item aux 3. DC, CE, & K, la 4. prop. L. Veu donc que par la 1. p. 6. comme BC est à CG, ainsi AC à DG; & comme BC à CG; ainsi aussi I est à K par l'hypothese: pareillement comme AC sera à DG, ainsi sera I à K par la 11. p. 5. Le mesme se peut dire de DC à CF, qu'ils sont l'vn à l'autre comme K à L, par la 1. p. 6. & 11. p. 5. Donc en raison egale, comme AC sera à CF, ainsi I sera à L par la 22. p. 5. Mais la raison de I à L est composee de la raison de BC à CG, & de celle de DC à CE par la 5. def. de ce liure. Dõc aussi d'icelles raisons est composee la raison

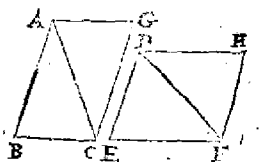
du parallelogramme AC au parallelogramme CF. Parquoy les parallelogrammes equiangles sont l'vn à l'autre en la raison composée de celles de leurs costez: Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Il est facile à colliger de ceste demonstration comment on compose vne raison de deux ou de d'auantage. Car des raisons de BC à CG, & DC à CE a esté composee la raison de I à L. Que s'il faut composer vne raison de trois autres proposées, ayant trouué celle cõposée de deux, d'icelle & de la troisiesme nous en composerons vne autre en la mesme maniere, laquelle sera composee de trois: & ainsi consequemment des autres.

Clauius demonstre en ce lieu-cy (apres Commandin) quelques autres propositions assez vtiles: c'est pourquoy nous les ioindrons aussi icy.

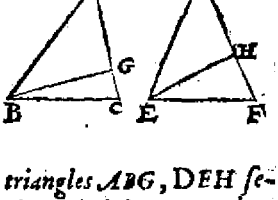
Les triangles ayans vn angle egal à vn angle, sont en raison composee des costez comprenant l'angle egal.



Soient les triangles ABC, DEF ayans l'angle B egal à l'angle E: Ie dis que le triangle ABC est au triangle DEF en raison composee des costez comprenant les angles B & E. Car ayant acheué les parallelogrammes BG, EH, ils seront equiangles; & partant par la 23. p. 6. la raison d'iceux sera composee de celle de leurs costez. Veu donc que les triangles ABC, DEF, desquels ils sont moitiez par la 34. p. 1. sont en la mesme raison qu'iceux par la 15. p. 5. aussi iceux triangles seront l'vn à l'autre en icelle raison composee des costez.

Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, sont l'vn

l'vn à l'autre, en la mesme raison que les rectangles compris sous les costez qui contiennent l'angle egal.



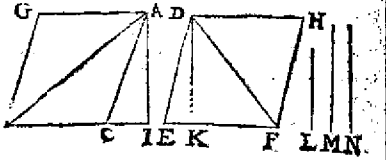
Soient les triangles ABC, DEF ayans l'angle A egal à l'angle D. Ie dis que le triangle ABC est au triangle DEF, comme le rectangle de AB, AC, *est au rectangle de DE, EF. Car estans tirees sur AC, DF, les perpendiculaires BG, EH; les triangles ABG, DEH seront equiangles, comme appert par le corol. de la 32 p. 1. donc par la 4. p. 6. comme GB est à BA, ainsi HE à ED. Mais par la 1. p. 6. comme GB est à BA, ainsi le rectangle de* BG, AC, *au rectangle de* BA, AC, *pource que posant GB,* BA, *bases, la hauteur d'iceux rectangles sera vne mesme, sçauoir AC. Semblablement comme HE à ED, ainsi est le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF. Donc par la 11. p. 5. le rectangle de* BG, AC *est au rectangle de* AB, AC, *comme le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF; & en permutant le rectangle de* BG, AC, *sera au rectangle de EH, DF, comme le rectangle de* AB, AC *au rectangle de DE, DF. Mais le rectangle de* BG, AC, *est au rectangle de EH, DF, ainsi que le triangle ABC, au triangle DEF par la 15. p. 5. pource que ces triangles sont moitiez d'iceux rectangles par la 41 p. 1. (Car ils ont mesmes bases qu'iceux AC, DF; & mesmes hauteurs BG, EH; & partant entre mesmes paralleles) donc aussi le triangle ABC sera au triangle DEF, comme le rectangle de* AB, AC, *est au rectangle de* DE, DF: *ce qui estoit propose.*

COROLLAIRE.

De cecy resulte que les parallelogrammes equiangles sont

aussi entr'eux, en la mesme raison que les rectangles compris sous les costez des angles egaux, puis qu'ils sont doubles d'iceux triangles.

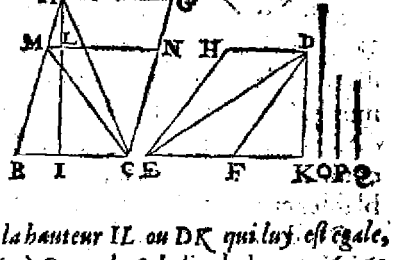
Les triangles, & les parallelogrammes, sont entr'eux en la raison composee de la raison des bases, & de celle des hauteurs.



Soient les triangles ABC, DEF; & les parallelogrammes CG, EH, les hauteurs d'iceux soient AI, DK. Ie dis que la raison d'iceux triangles, & parallelogrammes, est composee de la raison de la base BC à la base EF, & de celle de la hauteur AI à la hauteur DK. Car premierement soient les hauteurs egales, mais les bases, ou aussi egales, ou inegales: & soit faict comme BC à EF, ainsi L à M; & comme AI à DK, ainsi M à N, lesquelles seront egales, puis que AI, DK, sont posees egales: & partant par la 7. p. 5. L sera à N comme L à M, c'est à dire comme BC à EF. Mais par la 1. p. 6. comme BC est à EF, ainsi est le triangle ABC au triangle DEF; & le parallelogramme CG au parallelogramme EH: Donc par la 11. p. 5. comme L sera à N, ainsi le triangle au triangle, & le parallelogramme au parallelogramme: Mais la raison de L à N est composee de la raison de L à M, c'est à dire de la raison de BC à EF, & de la raison de M à N, c'est à dire de AI à DK: donc la raison du triangle ABC au triangle DEF, & du parallelogramme CG au parallelogramme EH, est aussi composee des mesmes raisons.

Soient maintenant les hauteurs AI, DK inegales, & AI la plus grande, mais les bases BC, EF, ou egales, ou aussi inegales. Soit faict comme AI à DK, ainsi O à P; & comme BC à EF, ainsi P à Q: & ayant coupé IL egale à DK,

soit tiree M parallele à BC, & ioincte CM. D'autant que le triangle ABC est au triangle MBC; & le parallelogrãme BG au parallelog. BN, cõme la hauteur AI à la hauteur IL ou DK qui luy est egale, c'est à dire comme O à P par le Scholie de la 1. p. 6. & comme le triangle est MBC au triangle DEF, & le parallelogramme BN au parallelogramme FH, ainsi est la base BC à la base EF, (pource qu'ils sont de mesme hauteur) c'est à dire ainsi P à Q: en raison egale ABC sera à DEF, & BG à FH, comme O à Q. Parquoy puis que la raison de O à Q est composee de la raison de O à P, c'est à dire de AI à DK, & de la raison de P à Q, c'est à dire de la base BC à la base EF: la raison du triangle ABC au triangle DEF, & du parallelogramme BG au parallelogramme FH, sera composee des mesmes raisons. Ce qui estoit proposé.

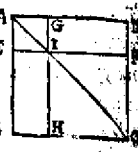


On peut demonstrer en la mesme maniere, que le triangle DEF, qui à la moindre hauteur, est au triangle ABC, & le parallelogramme FH au parallelogramme CG en la raison composee de celle de la base EF à la base BC, & de celle de la hauteur DK à la hauteur AI; & ce en faisant que comme EF à BC ainsi Q à P; & puis comme DK à AI, ainsi P à O; & tout le reste comme dessus. Appert donc ce qui estoit proposé.

THEOR. 18 PROP. XXIIII.

En tout parallelogramme; les parallelogram. qui sont à l'entour du diametre, ayans vn angle commun au total,

ſont ſemblables entr'eux, & au total.



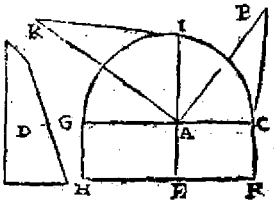
Soit le parallelogramme ABCD, duquel le diametre eſt AC: Ie dis que les deux parallelogrammes GE & FH deſcrits ſur iceluy diametre, ayans les angles A & C communs auec le total, ſont ſemblables entr'eux, & au total ABCD.

Car d'autant que les lignes AD, EF, BC, ſont paralleles, ſur leſquelles tombent AC & GH, elles feront les angles alternatiuement egaux, par la 29. p. 1. ainſi les triangles AIG & ICF, ſeront equiangles entr'eux, & au total ACD, & par la 4. p. 6. ils auront les coſtez au long des angles egaux, proportionnaux. Le meſme ſe peut dire des trois autres triangles AIE, ICH & ACB, leſquels ſont egaux aux trois premiers, chacun au ſien par la 34. p. 1. ainſi le parallelogramme EG, ayant les coſtez AE & EI proportionnaux à AB & BC, coſtez du parallelogramme BD, & aux coſtez IH & HC du parallelogramme FH, &c. Il eſt euident par la 1. def. 6. qu'iceux parallelogrammes EG, HF, ſeront ſemblables entr'eux, & au tout BD. Donc en tout parallelogramme, les parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBL. 7. PROP. XXV.

Deſcrire vne figure rectiligne, ſemblable à vne donnee, & egale à vne autre propoſee.

Soient deux figures rectilignes ABC & D : il faut faire vne autre figure rectiligne egale à D, & semblable à ABC.



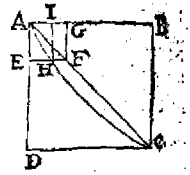
Sur la ligne AC, soit faict le rectangle ACFE egal à la figure ABC : Item sur la ligne AE, soit construit GE rectangle egal à la figure donnee D, le tout par la 44. & 45. p. 1. & apres auoir trouué AI, moyenne proportionnelle entre GA & AC : Sur icelle AI, soit descrite la figure AIK semblable & semblablement posee à la figure ACB, par la 18. p. 6. Ie dis qu'elle sera aussi egale à la figure donnee D.

Car puisque par la construction le rectangle GE est egal à D, & AF à ABC, & que par la 1. p. 6. AF est à GE, comme CA à AG : Pareillement que les deux figures semblables ABC & AKI, sont l'vne à l'autre en raison doublee de AC à AI, par le corol. de la 19. ou 20. p. 6. sçauoir comme CA à la 3. proport. AG, aussi par la 11. p. 5. ACB sera à IKA, comme AF à GE : & en permutãt ACB sera à AF, comme IKA à GE, par la 16. p. 5. & partant ACB estãt egal à AF, aussi IKA sera egal à GE, & par consequent egal à D ; & par la construction, iceluy rectiligne IKA est aussi semblable & semblablement posé au rectiligne ABC. Nous auons donc descrit vne figure rectiligne semblable à vne autre donnée, & egale à vne proposee : Ce qu'il falloit faire.

THEO. 19. PROP. XXVI.

Si d'vn parallelogramme on oste vn

parallelogramme semblable & semblablement posé au tout, ayant vn angle commun auec le tout ; l'osté sera auec le tout sur vn mesme diametre.

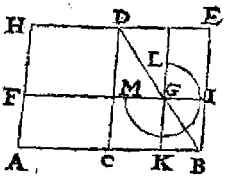


Soit le parallelogramme AB CD, duquel on retranche AEF G parallelogramme qui luy est semblable & semblablement posé, ayans l'angle A commun auec le total: Ie dis qu'ils sont sur mesme diametre AFC.

Autrement, s'ils ne sont sur mesme diametre, soit vn autre diametre AHC, qui ne soit commun à tous les deux parallelogrammes, ains couppe le costé EF en H, & d'iceluy poinct soit menee HI parallele à AE, par la 31. p. 1. donc le parallelogramme IE estant sur vn mesme diametre auec le total, sera semblable à iceluy, par la 24. p. 6. auquel total, GE est aussi semblable par hypothese ; & partant par la 21. p. 6. GE & IE seront semblables, & par la 1. def. 6. AE sera à EF, comme AE à EH : mais AE estant egale à soy-mesme, il faudroit aussi par la 14. p. 5. que EF 2. fust egale à EH 4. le tout à la partie, ce qui est absurde: donc les parallelogrammes BD & GE, total & retranché, estoient sur mesme diametre : car il aduiendra tousiours mesme absurdité, si on dict que le diametre de BD passe par quelconque autre poinct, soit du costé EF ou FG, du parallelogramme retranché GE. Si donc d'vn parallelogramme on oste vn parallelogramme, &c. ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrammes appliquez selon vne mesme ligne droicte, & defaillans à icelle de parallelogrammes semblables & semblablement posés à vn autre descrit sur la moictié de la mesme ligne; le plus grand est celuy qui est descrit sur l'autre moictié de la ligne, & semblable au defaillant.



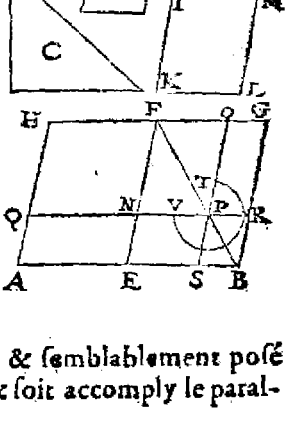
Soit la ligne AB couppée en deux egalement en C, & sur CB moictié d'icelle, soit constitué le parallelogramme BCDE, duquel le diametre est BD. Si donc on accomplit tout le parallelogramme A B E H, le parallelogramme AD estant sur la moictié **A C**, appliqué selon la ligne A B, sera defaillant du parallelogramme CE & semblable à iceluy C E. Ie dis que de tous les parallelogrammes appliquez sur icelle ligne A B, & defaillans d'vne figure semblable à C E, le plus grand est A D, qui est descrit sur la moictié AC, & defaillant du parallelogramme CE.

Car eſtans pris au diametre BD quelcõque poinct G, & tirées par iceluy poinct les lignes droictes GI, kG, paralleles aux lignes droictes AB, BE; le parallelogramme AKGF appliqué ſelon la ligne AB, ſera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 24.p.6. eſt ſemblable & ſemblablement poſé à CE. Et d'autant que par la 43.p.1. les complemens CG, GE, ſont egaux, ſi on leur adiouſte kI commun, auſſi CI, KE ſeront egaux. Mais CI, CF eſtans ſur baſes egales, ſont pareillement egaux par la 36.p.1. donc auſſi CF, KE ſeront egaux, & leur adiouſtant CG cõmun, le parallelogramme AG ſera egal au gnomon LM. Parquoy puiſque CE eſt plus grand qu'iceluy gnomon, LM; (car CE outre le gnomon contient encore le parallelogr. DG) auſſi AD qui eſt egal à CE par la 36.p.1. ſera plus grand que le parallelogramme AG, du meſme parallelogramme DG. Et en la meſme maniere ſera demonſtré que AD eſt plus grand que tous autres parallelogrammes, qui ſeront appliquez ſelon la meſme ligne droicte AB, & defaillans de figures parallelogrammes ſemblables à CE. Parquoy de tous les parallelogrammes appliqués ſelon vne meſme ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROB. 8. PROP. XXVIII.

Sur vne ligne droicte donnee, appliquer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, & defaillant d'vn parallelogramme ſemblable à vn autre donné; mais il faut

que la figure rectiligne donnee ne soit plus grande que le parallelogramme, qui estant appliqué sur la moictié de la ligne donnée, est semblable au parallelogramme donné.

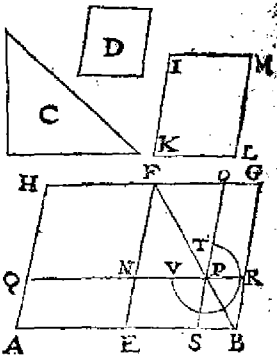


Soit la ligne donnée AB, sur laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal à la figure rectiligne donnée C, defaillant d'vn parallelogramme semblable au parallelogramme donné D.

Ayant couppé AB en deux egalement en E, sur la moitié EB soit descrit le parallelogramme EFGB semblable & semblablement posé à iceluy D, par la 18. p. 6. & soit accomply le parallogramme AHGB.

Maintenant, si AF est egal à C, on a ce que l'on demande: car il est appliqué sur AB, & defaut du parallelogramme EG. Mais si C est plus petit que AF, (car par l'hypothese il ne peut estre plus grand) il sera aussi plus petit que EG egal à iceluy AF: soit donc trouué l'excez de EG par dessus C, (ceste egalité ou inegalité, & excez sera cogneuë par ce que nous auons dit à la 45. p. 1.) lequel excez par la 25. p. 6. soit reduit en parallelogramme IKLM, semblable & semblablement posé à EG; & veu que EG

eſt plus grand que KM, il eſt euident que les coſtez EF, FG ſeront auſſi plus grands que les coſtez KI, IM; parquoy d'iceux EF, FG ſoient couppez FN, FO, egaux à iceux KI, IM, à fin qu'eſtant accomply le parallelogramme NFOP, il ſoit egal à KM, & ſemblable & ſemblablement poſé au meſme KM; & partant auſſi à EG; & par conſequent qu'eſtant tiré le diametre BF, iceux parallelog. EG, NO, ſoient au long d'iceluy diametre par la 26. p. 6. & apres auoir continué les coſtez NP OP, tant qu'il ſera de beſoin: Ie dis que AP eſt le parallelogramme demandé.



Car il eſt defaillant du parallelogramme S R, lequel par la 24. p. 6. eſt ſemblable à EG, partant auſſi à D. Item puis que I L eſt l'excez par lequel EG excede C, & qu'à iceluy excez eſt egal NO. Il eſt euident que le gnomon TV ſera egal à la figure C. Mais il eſt auſſi egal à AP, comme il a eſté prouué à la precedente: donc auſſi AP ſera egal à C, & defaudra à la ligne donnée AB du parallelogramme S R ſemblable au donné D. Nous auons donc ſur vne ligne droicte donnée appliqué vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

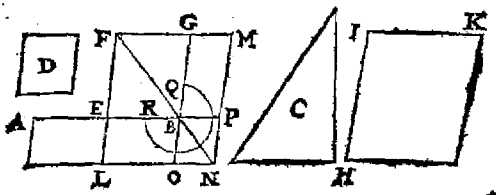
PROB. 9. PROP. XXIX.

Sur vne ligne droicte donnée, appli-

pliquer vn parallelogramme egal à

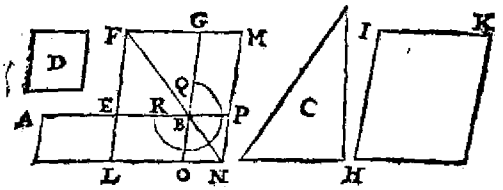
vne figure rectiligne donnée, excedan d'vn parallelogramme semblable à vn autre donné.

Soit la ligne droicte donnée AB, sur laquelle il faut descrire vn parallelogramme egal au rectiligne donné C, mais excedant d'vn parallelogramme semblable au parallelogramme donné D.



Soit couppée en deux egalement AB au poinct E, & sur la moitié EB soit descrit le parallelogramme EFGB semblable & semblablement posé à D par la 18. p. 6. En apres soit descrit le parallelogramme HK egal aux deux figures C & EG, & semblable & semblablement posé à EG par la 25. p. 6. & partant à cause de la similitude d'iceux parallelogrãmes HK, EG, cõme HI à IK, ainsi EF à FG; & par consequent HK estant plus grand que EG, aussi les costez HI, Ik fesont plus grands que les costez EF, FG: estans donc prolongez les costez FE, FG, tellement que FL, FM, soient egales aux lignes IH, Ik, & acheué le parallelog. LFMN, il sera semblable & semblablement posé à EG. Parquoy par la 26. p. 6. LM, EG,

ſeront au long d'vn meſme diametre, qui ſoit FN. Maintenant eſtans prolongez AB, GB iuſques en P & O; & acheué le parallelogramme LA; le parallelogramme AN ſera appliqué à la ligne AB, l'excedant du parallelogramme OP, qui eſt ſemblable à EG par la 24. p. 6. & partant à D. Ie dis donc que le parallelogramme AN eſt egal au rectiligne C: Car puiſque par la 36. p. 1. AL, EO ſont egaux, & par la 43. p. 1. EO eſt egal au complement BM, auſſi

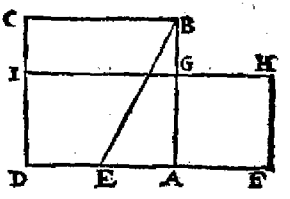


AL ſera egal à iceluy BM; leur adjouſtant donc LP commun, AN ſera egal au gnomon QR, lequel eſt egal au rectiligne C: (car puiſque HK, c'eſt à dire LM eſt egal au rectiligne C & à EG enſemble: ſi on oſte EG commun, reſteront le gnomen QR & le rectiligne C egaux) donc auſſi AN ſera egal au rectiligne C. A la ligne droicte AB nous auons donc appliqué le parallelogramme AN egal au rectiligne C, excedant du parallelogramme OP, qui eſt ſemblable à vn autre donné D: ce qu'il falloit faire.

PROB. 10. PROP. XXX.

Coupper vne ligne droicte donnée en la moyenne & extréme raiſon.

Soit la ligne droicte donnée A B, laquelle il faut couppper en la moyenne & extréme raiſon.



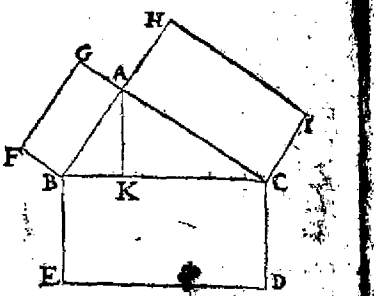
Soit doc icelle couppée au poinct G, de telle façon que le quarré de la partie AG ſoit egal au rectangle de la toute AB, & de la partie GB, comme il a eſté enſeigné en la 11. p. 2. Ie dis que AB ſera couppée en la moyenne & extréme raiſon au poinct G.

Car puis que le quarré de AG eſt egal au rectangle de AB & GB, les trois lignes AB, AG & GB, ſeront continuellement proportionnelles, par la 17. p. 6. c'eſt à dire que la toute AB ſera au plus grand ſegment AG, comme AG au plus petit ſegment GB; & par la 3. d. 6. AB eſt couppée en G, en la moyenne & extréme raiſon. Ce qu'il falloit faire.

THEO. 21. PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure deſcrite ſur le coſté qui ſouſtient l'angle droict, eſt egale aux deux autres figures qui luy ſont ſemblables, & ſemblablement poſées ſur les deux autres coſtez.

Soit le triangle rectangle ABC, ayant l'angle BAC, droict. Ie dis que la figure deſcrite ſur le coſté BC, qui

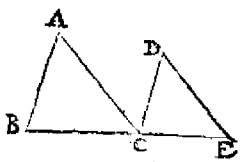


ſouſtient l'angle droict, eſt egale aux deux autres figures ſemblables, & ſemblablement poſées ſur les deux autres coſtez AB, & AC.

Car ſi du poinct A, qui faict l'angle droict, on meine la perpendiculaire Ak, par la 8. p. 6. elle fera deux triangles equiangles entr'eux, & au total : ainſi les trois triangles BAk, CAk & ABC ſeront ſemblables par la 4. p. 6. & 1. d. 6. & par la 19. p. 6. ils ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublée des coſtez de meſme raiſon AB, BC, CA. Pareillement par la 20. p. 6. les trois figures AF, BD & AI eſtans ſemblables & ſemblablement poſées, elles ſeront auſſi l'vne à l'autre en raiſon doublée de leurs coſtez de meſme raiſon AB, BC, CA, qui ſont les meſmes coſtez des triãgles, & par la 11. p. 5. les rectilignes AF, BD, AI, ſeront entr'eux, comme les triangles BAK, BAC, CAk entr'eux; c'eſt à dire que comme le triangle BAk eſt au triangle ABC, ainſi le rectiligne AF eſt au rectiligne BD, & comme le triangle CAk eſt au triangle ABC, ainſi le rectiligne AI eſt au rectiligne BD : Donc par la 24. p. 5. comme le compoſé des triangles BAk, CAk, ſera au triangle ABC, ainſi le compoſé des rectilignes AF, AI, ſera au rectiligne BD : mais le triangle BAC, eſt egal aux deux autres : donc la figure BD deſcrite ſur BC, ſera auſſi egale aux deux autres AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ont deux costez proportionnaux à deux costez, & sont disposés faisant vn angle, tellement que les costez de mesme raison soient parallelz; les deux autres costez se rencontreront directement.

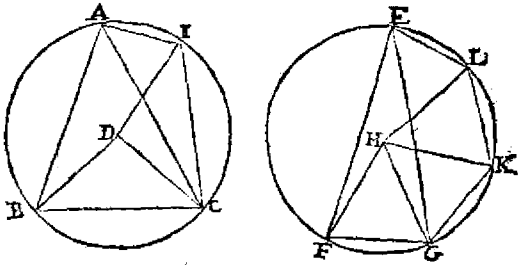


Soient deux triangles ABC & CDE, ayans les costez BA & AC proportionnaux aux costez CD & DE, disposez de telle façon qu'ils facent l'angle ACD, & que BA soit parallele à CD, & AC à DE : ie dis que BC & CE se rencontreront directement.

Car BA & CD estans paralleles, l'angle ACD sera egal à son alterne A, par la 29. p. 1. aussi AC estant parallele à DE, l'angle D sera egal à son alterne ACD ainsi l'angle D sera egal à l'angle A, & par la 6. p. 6 les deux triangles seront equiangles : donc l'angle ACD, estant egal à l'angle A, l'angle DCE à l'angle B, il est euident que les trois angles au poinct C, seront egaux aux trois angles du triangle BAC, c'est à dire à deux droits par la 32. p. 1. & par la 14. p. 1. les deux lignes BC, CE se rencontreront directement : Si donc deux triangles ont deux costez proportionnaux à deux costez, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Aux cercles egaux, les angles tant aux centres qu'aux circonferences, ſont entr'eux, comme les circonferences qui les ſouſtiennent. Les ſecteurs ſont auſſi de meſme entr'eux.



Soient deux cercles egaux ABC & EFG, deſquels les centres ſont D & H, & ſoient les deux angles aux centres BDC & FHG, ou en la circonference BAC & FEG; ie dis que comme la circonference BC eſt à la circonference FG, ainſi l'angle BDC eſt à l'angle FHG, & l'angle BAC à l'angle FEG.

Qu'il ne ſoit ainſi: ſoient pris les deux arcs GK & KL egaux à FG: item CI egal à BC, & ſoient menées les lignes IA, ID, KH, HL, KE, LE: les trois angles FHG, GHK & KHL ſont egaux entr'eux, par la 27. p. 3. ainſi l'arc FGKL eſt autant multiplice de l'arc FG, comme l'angle FHL l'eſt de FHG: & par le meſme diſcours, l'arc BCI eſt autant multiplice de l'arc

l'arc BC, comme l'angle BDI, l'eſt de BDC: partant ſi l'arc BCI eſt egal à l'arc FGLk, l'angle BDI ſera egal à l'angle FHL par la 27. p. 3. ſi plus grand, plus grand, ſi plus petit, plus petit; & par ainſi BCI, BDI, eſtans equemultiplices de BC premiere grandeur, & BDC 3. & FGKL, FHL equemultiplices de FG, FHG 2. & 4. par la 6. d. 5. comme l'arc BC à l'arc FG, ainſi l'angle BDC à l'angle FHG: le meſme diſcours eſt des angles en la circonference.

Pour la ſeconde partie. Ie dis auſſi, que le ſecteur BDC eſt au ſecteur FHG, comme l'arc BC eſt à l'arc FG.

Car on prouuera aiſément (demeurant la meſme conſtruction) que les deux arcs BC, CI eſtans egaux que leurs cordes ſeront egales, & les deux portions egalles: mais les deux triangles BDC, CDI ſont auſſi egaux par la 4. p. 1. leur adjouſtant donc les deux ſegmens egaux; par les communes ſentences, les deux ſecteurs BDC, CDI ſeront egaux, & l'arc BCI ſera autant multiplice de l'arc BC, que le ſecteur BDI le ſera du ſecteur BDC: & par meſme diſcours, l'arc FGKL ſera autant multiplice de l'arc FG, que le ſecteur FHL le ſera du ſecteur FHG; la concluſion eſt aiſée par la 6. def. 5. cõme en la premiere partie. Parquoy aux cercles egaux, les angles tant aux centres qu'aux circonferences, &c. Ce qu'il falloit demouſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy ſ'enſuit que comme le ſecteur eſt au ſecteur, ainſi l'angle eſt à l'angle. Car l'vne & l'autre a la meſme raiſon que l'arc à l'arc; & partant par la 11. p. 5. ils ſeront auſſi entre-eux en la meſme raiſon.

Il eſt auſſi euident que comme vn angle au centre, eſt à quatre angles droits, ainſi eſt l'arc ſouſtendant iceluy angle, à toute la circonference, & au contraire que comme quatre angles droits ſont à vn angle au centre, ainſi toute la circonference eſt à l'arc ſouſtendant iceluy angle.

Car comme vn angle au centre eſt à vn angle droit au centre, ainſi l'arc qui ſouſtient iceluy angle, eſt au quadrant qui ſouſtient l'angle droit par la 33. p. 6. Parquoy comme l'angle au centre ſera au quadruple de l'angle droit, c'eſt à ſçauoir à 4. angles droits, ainſi l'arc ſouſtendant iceluy angle, ſera au quadruple du quadrant, ſçauoir eſt à toute la circonference, par les choſes que nous auons demonſtrées à la fin du ſcholie de la 22. p. 3. puis apres d'autant qu'vn angle au centre eſt à quatre angles droits, comme l'arc qui ſouſtient iceluy angle, eſt à toute la circonference; auſſi en permutant comme quatre angles droits ſeront à vn angle au centre, ainſi toute la circonference ſera à l'arc ſouſtendant l'angle du centre: ce qui a eſté propoſé.

Fin du ſixieſme Element.

ELEMENT SEPTIESME.

DEFINITIONS.

1. VNITE', eſt ſelon laquelle vne chacune choſe de celles qui ſont, eſt appellée vne.

Euclide ayant traicté és 6. liures precedents de la premiere partie de Geometrie, ſçauoir eſt de celle là qui conſidere les plans, auparauant que venir à l'autre partie, laquelle traicte des ſolides; il explique en ce ſeptieſme liure & és deux ſuiuans les proprietez & affections des nombres, pour puis apres traicter au 10. liures des lignes commenſurables & incommenſurables, neceſſaires pour auoir entiere & parfaicte cognoiſſance des proprietez des ſolides. Euclide definit donc icy que c'eſt que vnité, & dit que c'eſt cela ſelon quoy toute choſe qui eſt ſe nomme vne: & eſt à noter que tout ainſi que en la Geometrie le poinct n'a aucune partie, auſsi és nombres l'vnité (ſelon l'autheur) ne reçoit aucune diuiſion.

2. Nombre, eſt vne multitude compoſée de pluſieurs vnitez.

C'est à dire qu'estans assemblées plusieurs vnitez ensemble, leur aggregé s'appelle nombre.

3. Partie est vn petit nombre tiré d'vn plus grand, lors que le petit mesure le plus grand.

C'est à dire que lors qu'vn nombre en mesure vn plus grand, il est dict partie d'iceluy: & ceste partie est appellée aliquote, tellement que 2 est dit partie aliquotte de 4; & se nomme $\frac{1}{2}$; & 5, est dict $\frac{1}{3}$ de 15, pource que 5 mesure 15 par 3: ainsi 4 qui mesure 28 par 7, est dit $\frac{1}{7}$, &c.

4. Et parties, est lors que le plus petit ne mesure pas le plus grand.

C'est à dire que lors qu'vn petit nombre n'en mesure pas vn plus grand, il n'est pas dict partie d'iceluy, mais parties. Comme 6. est dict parties de 9: Car il ne le mesure pas precisément, mais est 2 parties d'iceluy, sçauoir est $\frac{2}{3}$: ainsi 12. est parties de 16, sçauoir $\frac{3}{4}$ pource que 4, qui mesure l'vn & l'autre nombre, est 3 fois en 12, & 4 fois en 16: aussi 15 est parties de 24, sçauoir est $\frac{5}{8}$, puis que 3, qui est commune mesure, est 5 fois en 15, & 8 fois en 24. &c.

5. Mais vn grand nombre est dit multiplice d'vn petit, lors que le petit mesure le grand.

Tout ainsi que tout petit nombre n'est pas dit partie d'vn plus grand, ains seulement de celuy là qu'il mesure precisément; ainsi aussi tout grand nombre n'est pas dit multiplice, ou le plusieurs fois de tout autre nombre plus petit, mais seulement de ceux là qui le peuuent precisément mesurer: tellement que de deux nombres inegaux, si le petit mesure precisément le grand, ce moindre est dit partie du grand, mais celuy cy est aussi dit multiplice de cestuy là: Ainsi 4 est bien dit

partie de 12, mais auſsi iceluy 12 eſt dit multiplice de 4. Pareillement 30 eſt dit multiplice tant de 5 que de 6, qui ſont partie d'iceluy, puis que l'vn & l'autre le meſure.

6. Nombre pair, eſt celuy qui peut eſtre diuiſé en deux egalement.

Comme tous ces nombres 2, 4, 8, 20, 50, ſont appellez nombres pairs, pource que chacun d'iceux peut eſtre diuiſé en deux egalement, c'eſt à dire en deux parties egales.

7. Mais l'impair, eſt celuy qui ne peut eſtre diuiſé en deux egallement: ou bien celuy qui eſt different du nombre pair de l'vnité.

Comme tous ces nombres cy 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ſont nommez impairs, pource qu'ils ne peuuent eſtre diuiſez en deux egalement.

8. Nombre pairement pair, eſt celuy qu'vn nombre pair meſure par vn nombre pair.

Comme 32, lequel 8 meſure par 4. eſt dict nombre pairement pair.

9. Et pairement impair, eſt celuy qu'vn nõbre impair meſure par vn nõbre pair.

Comme 42, lequel 7 meſure par 6, eſt dit nombre pairement impair.

10. Mais nombre impairement impair, eſt celuy qui eſt meſuré d'vn nombre impair par vn nombre impair.

Comme 15, lequel eſt meſuré de 5 par 3, eſt dit nombre impairement impair.

11. Nombre premier, eſt celuy qui eſt meſuré par la ſeule vnité.

C'eſt à dire, que ſi vn nombre n'eſt meſuré par aucun autre nombre, mais ſeulement par l'vnité, il eſt nombre premier, & tels ſont tous ceux cy 2.3.5.7.11.13 17.19.23.29.31. &c. Car la ſeule vnité meſure iceux.

12. Nombres premiers entr'eux, ſont ceux là, qui n'ont autre commune meſure que l'vnité.

13. Nombre compoſé, eſt celuy qui eſt meſuré par quelque nombre.

14. Mais les nombres compoſez entre-eux, ſont ceux-là qui ont autre commune meſure que l'vnité.

15. Vn nóbre eſt dit multiplier vn nóbre, lors qu'il en eſt procrée vn autre, qui eſt autant de fois compoſé deceluy qui eſt multiplié qu'il y a d'vnitez au multipliãt.

16. Lors que deux nombres ſe multiplient l'vn l'autre, le produict eſt appellé plan, & les multiplians ſont les coſtez d'iceluy plan.

17. Lors que trois nóbres ſe multiplient l'vn l'autre, le produict eſt appellé ſolide, & les multiplians ſont les coſtez d'iceluy.

18. Nombre quarré, eſt celuy qui eſt egalement egal : ou bien c'eſt le produict de deux nombres egaux.

19. Nombre cube, eſt celuy qui eſt egalement egal : ou bien c'eſt le produit de trois nombres egaux.

20. Les nombres ſont proportionnaux, lors que le premier eſt autãt multiplice, où meſme partie, ou meſmes parties du ſecond, cõme le troiſieſ. du quatrieſme.

Selon ceſte vulgaire def. d'Euclide, ne ſont point compris és nombres prop. ceux qui ſont en raiſon ſuperparticuliere, ſuperpartiente, multiple ſuperparticuliere, & multiple ſuperpartiente. Car en toutes ces proportions, le premier nombre n'eſt pas autant multiplice du ſecond, que le 3. du 4. ny auſsi meſme partie, ou parties : Mais le premier contient autant le 2, que le troiſieſme le quatrieſme ; & en outre vne meſme partie, ou parties d'iceluy : comme il eſt euident par les choſes que nous auons enſeignées à la 1. d. 5. C'eſt pourquoy Clauius (& à bon droict) a eſtimé que ceſte vulgaire def. d'Euclide a eſté corrompuë, puis qu'elle eſt manque & imparfaicte : laquelle imperfection Dounot a encore augmentée en ſa traduction, en oſtant equemultiplice, *tellement que ſelon ſadicte traduction, on ne peut pas conclure que les nombres qui ſont en raiſon multiple ſoient proportionnaux, comme veut la vulgaire definition. Pour donc rendre ceſte 20. def. generale à tous genres de proportions, comme a faict Clauius, nous la poſerons telle que s'enſuit.*

Les nõbres ſont proportiõnaux, lors que le premier eſt autãt multiple, ou bien meſme partie, ou meſmes parties du ſecond que le troiſieſme du quatrieſme. Ou bien quand le premier contient egalement le ſecond, & le troiſieſme le quatrieſme, & en outre vne meſme partie, ou meſmes parties d'iceluy. *Ainſi ces nombres 6.2.9.3. ſont proportionnaux, puis que le premier eſt autant multiplice du ſecond, que le 3. l'eſt du 4. c'eſt à ſçauoir triple: Item ceux-cy 4.12.3.9; car le premier eſt la meſme partie du ſecond, que le 3. du 4. ſçauoir eſt le tiers: item ceux cy 6. 8. 9. 12. pource que le premier eſt meſmes parties du ſecond que le 3. du 4. Sont auſſi proportionnaux ces nombres cy 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. Car au premier exemple, le premier & 3. nombre contient vne ſeule fois le 2 & 4, & en outre vne meſme partie, ſçauoir eſt $\frac{1}{2}$: mais au ſecond, vne ſeule fois, & en outre meſme parties, ſçauoir eſt les $\frac{3}{4}$: & au 3. deux fois, & encores vne meſme partie, c'eſt à ſçauoir $\frac{1}{2}$: & au dernier, deux fois, & encores meſmes parties, ſçauoir eſt les $\frac{2}{5}$. Que ſi le premier nombre n'eſt autant multiplice ou meſme partie, ou parties du ſecond que le 3. du 4. Ou bien que le premier ne contienne autant de fois le ſecond, que le 3. contient le 4. & en outre vne meſme partie, ou meſmes parties d'iceluy, les nombres propoſez ne pourront eſtre appellez proportionnaux. Parquoy ſi 4. nombres ſont poſez proportionnaux, il eſt neceſſaire d'accorder que le premier eſt autant multiple, &c.*

Or *Euclide* definit ſeulement les nombres proportionnaux, qui ont vne meſme raiſon d'inegalité: Car de la raiſon d'egalité, il eſt euident que le premier eſt tãt egal au ſecond, auſſi le 3. doit eſtre egal au 4. afin que les nombres ſoient dicts proparti.

Or de ceſte def. reſulte apertement, que les nombres egaux ont meſme raiſon à vn meſme, & au contraire qu'vn nombre a auſſi meſme raiſon à deux egaux: item que les nombres ayant meſme raiſon à vn meſme, ou auſquels vn meſme nõbre

mesme raison, sont egaux. Car puis que les nõbres egaux sont, ou equemultiplices, ou mesme partie, ou mesmes parties d'vn mesme nombre; ou contiennent egalement vn mesme nombre, & en outre vne mesme partie, ou parties d'iceluy. Item qu'vn mesme nombre est ou equemultiplices, ou mesme partie, ou mesmes parties de nombres egaux; ou bien qu'il les contient egalement, & en outre vne mesme partie, ou parties d'iceux: il est euident par ceste definition que les nombres egaux ont mesme raison à vn mesme nombre, ou vn mesme à des egaux. Ce qui a esté demonstré en toutes grandeurs à la 7. p. 5.

Derechef, pource que les nombres ayans mesme raison à vn mesme nombre, sont ou equemultiplices d'iceluy, ou mesme partie, ou parties; ou bien ils le contiennent egalement, & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy: Item puis que vn mesme nombre ayant mesme raison à quelqu'vns, est ou equemultiplice d'iceux, ou la mesme partie, ou parties; ou bien il les contient egalement, & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceux; selon ceste def. il est manifeste que les nombres qui ont mesme raison à vn mesme nombre, ou ausquels vn mesme nombre à mesme raison, sont egaux entr'eux. Ce qui a aussi esté demonstré en toutes sortes de grandeurs en la 9. p. 5.

Par mesme raison on collige, que de deux nombres inegaux, le plus grand a plus grande raison à vn mesme nombre, que le plus petit: & au contraire qu'vn mesme nombre a plus grande raison à vn petit nombre, qu'à vn plus grand. Item que des nombres inegaux, celuy qui a plus grande raison à vn mesme, est le plus grand: & celuy auquel vn mesme nombre a plus grande raison, est le plus petit: Toutes lesquelles choses sont claires, & euidentes, si ceste def. est bien entenduë. Ceci a aussi esté demonstré és grandeurs au 5. liure prop. 8. & 10.

21. Les nombres semblables plans, ou so-

lides, ſont ceux qui ont les coſtez proportionnaux.

Comme 24. & 6. ſont nombres plans ſemblables, pource que 6. & 4. coſtez de ceſtuy-là ſont proportionnaux à 3. & 2. coſtez de celuy-cy: ainſi auſſi 192. & 24. ſont nombres ſolides ſemblables, pource que 8. 6. 4. coſtez de ceſtuy-là ſont prop. à 4. 3. 2. coſtez de celuy-cy. Et eſt à noter que ces nombres plans, & ſolides ſemblables peuuent bien eſtre compris ſous des coſtez non proportionnaux, mais toutesfois nous ne les conſiderons icy qu'entend qu'ils ſont contenus ſous leurs coſtez proportionnaux.

22. Nombre parfaict, eſt celuy qui eſt egal à toutes ſes parties aliquotes.

Comme 6 eſt dict nombre parfaict, pource que les parties aliquotes d'iceluy, ſçauoir 1. 2. 3 priſes enſembles, luy ſont egales. Ainſi auſſi 28. duquel les parties aliquotes, ſçauoir eſt 1. 2. 4. 7. 14. eſtans priſes enſembles, luy ſont egales; ſera dict nombre parfaict.

COMMVNES SENTENCES.

1. LEs nombres equemultiplices de nombres egaux, ou d'vn meſme nombre, ſont egaux entr'eux.

2. Et ceux deſquels vn meſme nombre eſt equemultiplice, ou deſquels les equemultiplices ſont egaux, ſont auſſi egaux entr'eux.

3. Mais les nombres qui ſont vne meſme partie, ou meſmes parties de nombres e-

gaux, ou d'vn meſme, ſont egaux entre eux.

4. Et ceux deſquels vn meſme nombre, ou nõbres egaux, ſont meſme partie, ou meſmes parties: ſõt auſſi egaux entr'eux.

5. L'vnité meſure tout nombre par les vnitez qui ſont en iceluy, c'eſt à dire par le meſme nombre.

6. Tout nombre meſure ſoy-meſme par l'vnité.

7. Si vn nombre multipliant vn nõbre, en produit quelqu'vn, le multipliãt meſurera le produit par le multiplié: mais le multiplié par le meſme multipliant.

8. Si vn nombre meſure vn nombre; auſſi celuy par lequel il le meſure, meſurera le meſme par les vnitez qui ſont au meſurant, c'eſt à dire par iceluy nombre meſurant.

9. Si vn nombre meſurant vn nombre, multiplie celuy par lequel il le meſure, ou eſt multiplié par iceluy, ſera produit celuy lequel eſt meſuré.

10. Le nombre qui en meſure deux ou

d'auantage, mesure aussi le composé d'eux.

11. Mais celuy qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré.

12. Et celuy qui mesure le tout, & le retranché, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux nombres inegaux proposez, on soustraict tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, & que le petit residu ne mesure iamais le plus grand iusques à ce qu'on ait pris l'vnité; les nombres proposez au commencement, seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inegaux AB & CD, si on soustraict continuellement le plus petit du plus grand, & que le plus petit residu ne mesure iamais le plus grand, iusques à ce qu'on ait pris l'vnité: ledis qu'iceux nombres AB, & CD seront premiers entr'eux.

A..... 5F.. 2G. 1B
C... 3H.. 2D
E..2

Autrement s'ils ne sont premiers, ils seront cõposez, & par la 14. def. de ce liure ils seront mesurez par

quelque nombre : soit icelluy E commune mesure à tous les deux : ainsi CD plus petit nombre estant soustraict de AB, soit le reste FB plus petit que CD. Item FB estant soustraict de CD, soit le reste HD plus petit que FB. Pareillement HD estant soustrait de FB, soit le reste GB, vnité. Puis donc que E mesure le tout CD, il mesurera aussi AF ; & d'autant qu'il mesure le tout AB, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le residu FB, lequel mesure CH ; & partant par la 11. com. sent. E mesurera aussi CH ; & puis qu'il mesure le tout CD, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste HD, & par consequent FG : mais il mesure aussi FB ; E mesurera donc pareillement l'vnité restante GB, sçauoir le tout la partie : ce qui est impossible. Donc AB & CD ne peuuent estre mesurez par aucun nombre, ains par l'vnité seulement : & partant ils sont nombres premiers entr'eux par la 12. def. de ce liure. Si donc de deux nombres inegaux proposez on soustraict tousiours alternatiuement, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Commandin ayant demonstré la conuerse de ceste prop. vient à la suiuante.

Estans proposez deux nombres composez entr'eux, si on soustraict tousiours alternatiuement le moindre du plus grand, la soustraction ne paruiendra iusques à l'vnité.

Ce qui est euident, car si on paruenoit à l'vnité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux, comme il a esté demonstré en la prop. 3 dessus : & ils sont posez composez.

Or il est manifeste par ces choses, qu'estans proposez deux nombres, nous cognoistrons facilement s'ils sont premiers en-

tr'eux ou non. Car eſtant faicte la ſouſtraction, comme dit eſt, ſi on paruiẽt iuſques à l'vnité, leſdits nombres propoſez ſeront premiers entr'eux: mais ſi on n'y paruient, ils ſeront compoſez.

PROBL. 1. PROP. 11.

Trouuer la plus grande commune meſure de deux nombres propoſez non premiers entr'eux.

Soient deux nombres non premiers AB, & CD, deſquels il faut trouuer la plus grande commune meſure.

Soit ſouſtrait le plus petit C D, tãt de fois que faire ſe pourra du plus grand AB: s'il reſte quelque choſe comme EB, iceluy ſoit oſté de CD, tellement qu'il reſte encore FD; & ainſi ſoit ſouſtraict continuellement le plus petit du plus grand, iuſques à ce qu'on paruienne à vn nombre qui meſure le precedent; ce qui aduiendra neceſſairement: car ſi on paruenoit iuſques à l'vnité, les nombres AB, CD, par la preced. prop. ſeroient premiers entr'eux, contre l'hypotheſe. Donc FD meſurant EB, il ne reſte rien. Ie dis que FD eſt la plus grande commune meſure de AB & CD.

A.....9 E.....6 B
C.....6 F...3 D
G....4

Qu'ainſi ne ſoit. Ie dis en premier lieu que FD meſure AB, & CD: Car meſurant EB, il meſure auſſi CF; par la 11. com. ſent. & d'autant qu'il ſe meſure ſoy-meſme, par la 10. com. ſent. il meſure le tout CD: Pareillement il meſurera AE; & puis qu'il meſure auſſi EB, il meſurera le tout AB; ainſi il meſure tous les deux AB, & CD.

Ie dis secondement que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD. Autrement soit vn plus grand nombre, sçauoir G, qui mesure tous les deux nombres AB & CD s'il est possible: & puis qu'il mesure CD, il mesurera aussi AE, & mesurant le tout AB par la 12. com. sent. il mesurera aussi le residu EB; & par consequent il mesurera CF. Item mesurant le tout CD, il mesurera aussi le reste FD, sçauoir vn plus grand nombre mesurera vn plus petit: ce qui est impossible. Donc vn plus grand nombre que FD ne mesure pas les nombres AB, CD: partant iceluy nombre FD est la plus grande commune mesure d'iceux AB, & CD.

Que si le moindre nombre CD mesuroit le plus grand AB; il est manifeste qu'il seroit la plus grande commune mesure. Nous auons donc trouué la plus grande commune mesure de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy est euident que qui mesure deux nombres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure, puis qu'il a esté demonstré que si G mesure AB & CD, il mesurera aussi FD leur plus grande commune mesure.

SCHOLIE.

Par les choses cy-dessus dictes, nous cognoistrons facilemẽt si trois ou d auantage de nombres sont premiers entr'eux, ou non. Car soient les trois nombres A, B, C. Premierement donc soit veu par ce qui est dit à la 1. prop. si les deux nombres A & B sont premiers entr'eux, ou non: Que s'ils sont premiers, il est euident que les trois nombres A, B, C, ne serõt

A..... 12
B..... 9
C..... 6
D... 3

composez entr'eux. Mais si A & B estoient composez entr'eux, soit trouuee par la 2 prop, leur plus grande commune mesure D; que si elle mesure aussi le nombre C, il est manifeste que les trois nombres A, B, C, sont composez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune mesure,

Que si D plus grande commune mesure de A & B, ne mesure C; C & D seront premieres entr'eux, ou non: S'ils sont premiers, les trois nombres A, B, C, ne seront composez entr'eux, mais premiers: Car s'ils estoient composez, ils auroient vne commune mesure, laquelle mesureroit aussi le nombre D plus grande commune mesure de A & B, par le coról. de ceste prop & partant C & D ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Mais si C & D ne sont premiers entr'eux, les trois nombres A, B, C, seront composez entr'eux. Car estant trouuee par la 2. p. 7. E plus grande commune mesure de C & D; iceluy nombre E mesurera aussi A & B par la 11. com. sent. puis que D les mesure. Parquoy veu que le mesme E mesure aussi C; il mesurera les trois A, B, C; & partant iceux seront composez entr'eux. Ce qui estoit proposé.

A.....9
B.....6
C.....5
D...3

En la mesme maniere sera cogneu si d'auantage de nombres que trois sont premiers entr'eux, ou non. Car s'il y a 4. nombres donnez, il en faudra esprouuer premierement trois; si cinq, quatre, &c. & acheuer comme nous auons dict, de trois nombres proposez.

PROB. 2. PROP. III.

Trouuer la plus grande commune mesure de trois nombres proposez, non premiers entr'eux.

Soient

A.....12
B.....8
C.....6
D....4 E.2

Soient trois nombres non premiers entr'eux A,B,C, desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure.

A.....12 D....4.
B.....8 E..2
C.....6 F...3

Soit tiree la plus grande commune mesure des deux A & B, par la precedente prop. sçauoir D. Si donc D mesure aussi C, nous auons ce que nous demandons: Car si vn plus grand nombre que D mesure A, B, C; par le corol. de la prop. precedente, il mesureroit aussi D, plus grande mesure de A, & B, sçauoir est, vn grand nombre, vn moindre: ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'hypothese que par le susdict corol. de la 2. prop. donc par icelle mesme proposition soit trouuee E plus grande commune mesure de C & D. Il est euident par la 11. comm. sent. que E mesurera tous les trois nombres, A, B, C, d'autant qu'elle mesure C & D, lequel mesure B & A. Ie dis d'auantage que E est aussi la plus grande commune mesure. Autrement si elle n'est la plus grande, en soit vne autre plus grande, sçauoir F s'il est possible: Or mesurant A, & B, elle mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure par le mesme corol. de la 2. propo. & par la mesme raison mesurant C & D, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure E, sçauoir le plus grand, le plus petit: ce qui est impossible. Donc vn plus grand nombre que E ne mesure pas les nombres A, B, C, & partant iceluy nombre E sera la plus grande commune mesure d'iceux trois nombres A, B, C. Parquoy nous auons trouué le plus grande commune mesure de tous nombres proposez non premiers entr'eux. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy eſt manifeſte qu'vn nombre qui en meſure trois, meſurera auſſi la plus grande commune meſure d'iceux.

En la meſme maniere, eſtans donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux, ſera trouuee leur plus grande commune meſure, & aura auſſi lieu le meſme corol.

THEOR. 2. PROP. IIII.

Tout nombre moindre, eſt partie ou parties de tout nombre plus grand.

C'eſt à dire que de deux nombres inegaux le plus petit eſt partie aliquote, ou aliquante du plus grand.

Soient deux nombres A, & B inegaux, A.....6
deſquels A ſoit le plus grand. Ie dis que le B...3
plus petit B, eſt ou partie aliquote, ou ali- B...4
quante de A. B.....5

Car ou B meſure A, ou nõ. S'il le meſure, il eſt partie aliquote par la 3. def. de ce liure: s'il ne le meſure pas, ou bien A & B, ſeront entr'eux nombre compoſez, ou premiers: ſi compoſez, ils auront vne commune meſure par la 14. def. de ce meſme liure: ſi premiers, ils auront l'vnité pour commune meſure par la 12. deff ainſi B contiendra certain nombre d'vnitez ſemblables aux vnitez qui ſont en A. Parquoy tout nombre moindre eſt partie, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO. 3. PROP. V.

Si de quatre nombres, le premier eſt

telle partie du second, que le tiers du quart; le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A est telle partie de BC, que D est de EF. Ie dis que A & D ensemble, sont telle partie de BC & EF ensembles, comme A l'est de BC.

A...3
B...3 G...3 C
D....4
E....4 H....4 F

Car puis que A est telle partie de BC, que D de EF; BC contiendra A autant de fois, comme EF contiendra D par la 3. def. Soit donc BC diuisé en autant de parties qu'il contient de fois A, sçauoir en BG & GC; EF se diuisera aussi en autant de parties egales à D, sçauoir en EH & HF: & d'autant que BG est egal à A, & EH à D; si à choses egales on adiouste choses egales, sçauoir A & BG, à D & EH; A & D ensemble, seront egaux à BG & EH ensemble: le mesme se dira de A, GC; D & HF: & partant autant de fois que BC contient A, autant de fois BC & EF ensemble, contiendront A & D ensemble: Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie du second, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second que le

tiers du quart : le premier & tiers ensemble, seront telles parties du second & quart ensemble, que le premier du second.

Soient quatre nombres AB, C, DE, & F, desquels le premier AB contient autant de parties du second C, que le troisiesme DE est du quatriesme F. Ie dis que AB, & DE ensemble, contiennent autant de parties de C & F ensemble, que AB de C.

A...3 G...3 B
C.....9
D....4 H....4 E
F.....12

Car pour autant que AB contient telles parties de C, que DE en contient de F ; estans AB & DE diuisez en parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la prop. precedente AG & DH ensemble, seront telle partie de C & F ensemble, comme AG est de C. Item GB & HE ensemble, seront telle partie de C & F ensemble, comme GB seul est de C seul ; ainsi AB & DE ensemble, seront telles parties de C, & F ensemble, que AB est de C : Parquoy si de quatre nombres le premier contient telles parties, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 5. PROP. VII.

Si vn nombre est telle partie d'vn autre nombre, que le retranché du retranché ; le reste sera aussi telle partie du reste, comme le tout est du tout.

Soit le nombre AB telle A....4 E..2 B
partie du nombre CD, G....4 C.....8 F....4 D
que le retranché AE est du retranché CF. Ie dis que le reste EB, sera telle partie du reste FD, que le tout AB est du tout CD.

Car estant pris le nombre GC, en sorte que telle partie qu'est le retranché AE du retranché CF, telle partie le reste EB soit d'iceluy GC; par la 5. propos. les deux nombres AE & EB ensemble seront telle partie des nombres GC & CF ensemble, qu'est AE de CF, c'est à dire qu'est le tout AB du tout CD: & partant puisque le nombre AB est telle partie du nombre CF que de CD: iceux nombres GF, CD seront egaux entr'eux par la 4. com. sent. en ostant donc le nombre commun CF, les demeurans GC & FD seront egaux: & partant le reste EB sera telle partie du reste FD, que de GC: c'est à dire que le tout AB du tout CD puisque EB a esté posé telle partie de GC, que AE de CF, qui par l'hypothese est la mesme que AB de CD. Si donc vn nombre est telle partie d'vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Commandin a demonstré aussi en cest endroit le theoreme suivant.

Si vn nombre est autant multiplice d'vn autre nombre que le retranché du retranché; aussi le reste sera autant multiplice du reste, que le tout du tout.

Soit le nombre AB autant multiple
du nombre CD, que le retranché AE A.....6 E....4 B
d'un retranché CF: Ie dis aussi que le reste C...3 F..2 D

EB est autant multiple du reste FD, que le tout AB l'est du tout CD. Car puisque AB, AE sont equemultiplice de CD, CF, par le contraire le tout CD sera telle partie du tout AB, que le retranché CF du retranché AE: & partant par la susdicte prop. 7. aussi le reste FD, sera telle partie du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc au contraire EB sera autant multiple de FD, que le tout AB est multiple du tout CD. Ce que estoit proposé à demonstrer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si vn nombre contient telles parties d'vn autre nombre, que le retranché du retranché: aussi le reste contiendra telles parties du reste, que le tout du tout.

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD, que le retranché AE du retranché CF: le dis que le reste EB contiendra telles parties du reste FD, que le total AB, du total CD.

G..2 A.....6 E..2 B
C.....9 F...3 D

Car si on pose GA contenir telles parties de FD, que AE de CF, ou AB de CD, par la 6. prop. les deux nombres GA, AE ensemble, seront telles parties des deux CF, FD ensemble, (c'est à dire le tout GE du tout CD) que GA de FD, ou AB de CD: & partant puis que GE & AB contiennent telles parties de CD, l'vn que l'autre, ils seront egaux: parquoy en ostant le nombre commun AE, resteront GA & EB egaux. Mais GA contient telles parties de

FD, que AB de CD : Donc auſſi EB contiendra telles parties d'iceluy FD, que AB de CD. Parquoy ſi vn nombre contient telles parties d'vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier eſt telle partie du ſecond que le tiers du quart ; auſſi en permutant le premier ſera telle partie, ou telles parties du tiers, que le ſecond du quart.

Soit A telle partie de BC, que D eſt de EF. Ie dis qu'en permutant, A ſera telle partie, ou contiendra telles parties de D, que BC de EF, pourueu que A & BC ſoient plus petits que D & EF, chacun au ſien ; car ainſi ſe doit entendre ceſte prop.

A...3
B...3 G...3 C
D....4
E....4 H....4 F

Qu'ainſi ne ſoit : d'autant que par l'hypotheſe, A eſt telle partie de BC comme D de EF ; BC contiendra autant de parties egales à A que EF d'egales à D : ſoit donc diuiſé le nombre BC en parties BG, GC egales à A ; & le nombre EF en parties EH, HF egales à D. Et puis que A eſt poſé moindre que D, par la 4. propoſition de ce liure, A eſt partie de D, ou contient parties d'iceluy, & conſequemment tous les autres BG de EH, & GC de HF : mais parce que BG eſt egale à GC, & EH à HF ; BG ſera telle ou telles parties de EH, que GC de HF : & partant par la 5. ou 6. propoſit. BG, GC enſemble, c'eſt à dire BC, ſera telle ou telles parties de EH, HF

enſembles, ſçauoir EF, que BG de EH, c'eſt à dire que A de D. Parquoy ſi de quatre nombres le premier eſt telle partie du ſecond, que le tiers du quart, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8 PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contiēt telles parties du ſecond, que le tiers du quart; auſſi en permutant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le ſecond du quart.

Soient quatre nombres AB, C, DE, & F, deſquels AB contienne telles parties de C, que DE de F. Ie dis qu'en permutant, AB ſera telle ou telles parties de DE, que C eſt de F, moyennant que AB & C ſoient plus petits que DE & F, chacun au ſien, car ceſte prop. auſſi bien que la precedente ſe doit ainſi entendre.

A..2 G..2 B
C.....6
D.....5 H.....5 E
F.....15

Car AB eſtant diuiſé en AG, GB parties de C; & DE en DH, HE parties de F; AB ſera diuiſé en autāt de parties que DE, & tant AG que GB ſera telle partie de C, que DH & HE de F: Dōc en permutant par la 9. prop. de ce 7. liure, AG ſera telle partie ou parties de DH, & GB de HE, que C de F: & partant AG ſera telle partie, ou parties de DH, que GB de HE. Donc par la 5. ou 6. prop. AG, GB enſemble, ſçauoir eſt le premier nombre AB, ſera auſſi telle partie, ou parties de DH, HE enſemble, c'eſt à dire du troiſieſme nombre DE, que AG de DH, c'eſt à dire que le ſecond nombre C du quart F: Parquoy ſi de quatre nombres, le premier contient telles parties du ſe-

cond, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 9. PROP. XI.

Si le tout eſt au tout, comme le retranché au retranché; auſſi le reſte ſera au reſte, comme le tout au tout.

Si le tout AB eſt au tout CD, comme le retranché AE eſt au retranché CF: ie dis que le reſte EB ſera au reſte FD, comme le tout AB au tout CD.

A....4E..2B
C.....6F...3D

Car puis que AB eſt à CD, comme AE à CF; AB eſtant plus petit nombre que CD, il ſera telle ou telles parties d'iceluy CD, que AE de CF, & par la 7. ou 8. prop. le reſte EB ſera telle ou telles parties du reſte FD, que le tout du tout: & partant par la 20. def. conuertie le reſte EB ſera au reſte FD, comme le tout AB au tout CD. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or combien que nous ayons poſé le nombre AB eſtre plus petit que le nombre CD, ſi eſt-ce toutesfois que la demonſtration, auroit auſſi lieu ſi AB eſtoit plus grand que CD. Car ou iceluy nombre CD meſureroit AB, ou il ne le meſureroit pas. Que CD meſure donc premierement AB; & d'autant que comme AB eſt à CD, ainſi AE eſt à CF, par la 20. def. AB, AE, ſeront equemultiplices de CD, CF, c'eſt à dire que CD ſera telle partie de AB, que CF de AF; & par la 7. prop. le reſte FD ſera auſſi meſme partie de EB, que le tout CD du tout AB: donc par le contraire AB, EB, ſeront equemultiplices d'icelles CD, FD: & par la 20.

A.....8E.....6B
C.... 4 F...3D

def. conuertie comme le tout AB sera au tout CD, ainsi le reste EB sera au reste FD.

Maintenant que CD ne mesure pas AB: A.....6 E...3 B
derechef puisque cõme AB est à CD, ainsi C....4 F..2 D
AE est à CF, telles parties que CD est de AB, *telles parties CF est aussi de AE par la susdite 20. def. & par la 7. & 8. prop. le reste FD sera mesmes parties du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc par la mesme def. conuertie le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB sera au tout CD. Ce qu'il falloit demonstrer.*

THEOR. 10. PROP. XII.

Si autant de nombres qu'on voudra sont proportionnaux; comme l'vn des antecedans sera à l'vn des consequens, ainsi tous les antecedans seront à tous les consequens.

Soient tant de nombres qu'on voudra proportionnaux A, B; C, D; E, F; c'est à sçauoir qu'il y ait telle raison de A à B, que de C à D, & que de E à F. Ie dis que tous les antecedans A, C, E, ensemble, seront à tous les consequens B, D, F, ensembles comme A l'vn des antecedans à B l'vn des consequens.

A.....6 C....4 E..2
B.....9 D.....6 F...3

Car puis que les susdits nombres sont proportionnaux, & A, C, E, sont moindres que B, D, F; par la 20. def. A sera telles parties de B, que C de D, & E de F; & par la 5. ou 6. prop. de ce mesme liure A & C ensemble seront telle, ou telles parties de B & D en-

ſemble, que A de B, ou E de F. Derechef puis que A, C enſemble comme vn ſeul, eſt telle partie, ou parties de B, D, enſemble comme vn ſeul, que E de F, auſſi par les meſmes prop. A. C enſemble auec E, ſeront telle ou telles parties de B, D enſemble auec F, que A de B: parquoy par la ſuſdite 20. def. conuertie tous les antecedans A, C, E enſemble, auront meſme raiſon à tous les conſequens B, D, F enſemble, que A à B: Si donc il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux, comme l'vn des antecedans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Encore que ceſte prop. auſſi bien que la precedente & ſuiuante ayent pluſieurs cas, ſi eſt-ce toutesfois qu'Euclide s'eſt contenté de les demonſtrer en vn ſeul, apres lequel il eſt aiſé de conclure des autres, comme il eſt manifeſte par ce que nous auons demonſtré au Scholie precedent, c'eſt pourquoy nous ne nous arreſteront d'auantage ſur ces deux propoſitions.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si quatre nombres ſont proportionnaux : auſſi en permutant ils ſeront proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, ſçauoir qu'il y ait telle raiſon de A à B, que de C à D: Ie dis qu'en permutant, il y aura telle raiſon de A à C, que de B à D.

A.....6
B.....9
C.....8
D.....12

Car puis que comme A eſt à B, ainſi C à D, par la 20.def. A eſtant plus petit que B & C que D, A ſera telle ou telles parties de B, que C eſt de D, & partant en permutant par la 9. ou 10. prop. de ce liure A ſera telle ou telles parties de C, que B eſt de D, & par la ſuſdite 20.def. conuertie, il y aura meſme raiſon de A à C que de B à D. Parquoy ſi quatre nombres ſont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'vn coſté, & autant d'vn autre, qui ſe prennent deux à deux, & en meſme raiſon; iceux en raiſon egale, ſeront auſſi en meſme raiſon.

Soiẽt d'vne part tant de nombres qu'on voudra A, B, C, & autant d'autre part D, E, F, & que de deux en deux il y ait telle raiſon de A à B, que de D à E, & de B à C que de E à F. Ie dis qu'en raiſon egale, il y aura telle raiſon de A à C, que de D à F.

A.....9 D.....6
B.....6 E...4
C...3. F..2

Car puis que comme A eſt à B, ainſi D à E, en permutant par la preced. prop. comme A ſera à D, ainſi B à E: ſemblablement auſſi puis que comme B eſt à C, ainſi E à F, en permutant comme B ſera à E, ainſi C à F. Donc comme A ſera à D, ainſi C ſera à F (car puis que A eſt à D, & C à F, en meſme raiſon

que B à E, aussi A sera à D en la mesme raison que C à F, comme sera incontinent demonstré) & partant en permutant, comme A sera à C, ainsi D sera à F: ce qu'il falloit prouuer.

LEMME.

Or que A estant à D, & C à F, en mesme raison que B à E, ils soient de mesme raison entr'eux, nous le demonstrerons ainsi. D'autant que comme A est à D, ainsi B à E; E plus petit sera telle ou telles parties de B, que D de A: Derechef puis que comme B à E, ainsi C à F; F moindre sera telle, ou telles parties de C, que E de B: parquoy F sera aussi telle ou telles parties de C, que D de A: & partant par la 20. def. conuertie, comme A sera à D, ainsi C sera à F. Donc les raisons des nombres qui sont de mesme à vne, sont aussi de mesme entr'elles

SCHOLIE.

Ce Lemme respond à la 11. p. 5. Dounot se sert d'icelle 11. p. 5. & d'autres prop. du mesme liure pour appuyer les demonstrations des 7. 8. & 9. liures: mais il est euident qu'Euclide a voulu distinguer le nombre d'auec la grandeur, puis que plusieurs propositions demonstrées és grandeurs au 5. liure, sont derechef demonstrées en nombres és 7. 8. & 9. liures: & partant ne se doiuent appuyer les demonstrations des prop. de ceux cy sur celles de celuy-là.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si l'vnité mesure quelque nombre autant de fois qu'vn tiers mesure vn

quart ; auſſi en permutant le ſecond meſurera le quart autant de fois que l'vnité meſure le tiers.

Soit l'vnité A meſurant autant de fois BC, que D meſure EF : Ie dis qu'en permutant BC meſurera EF, comme A meſure D.

A.1
B.1G.1H.1C
D..2
E..2I..2K..2F

Car par l'hypotheſe BC eſtant diuiſé par l'vnité A, & EF par la partie D, icelle partie D ſera autant de fois en EF, comme A en BC, & chacune partie de EF ſera egale à D, comme chacune de BC à l'vnité A: donc l'vnité BG eſt à la partie EI, comme GH à IK, & HC à KF : & partant par la 12 prop. tous les antecedants BC ſeront à tous les conſequents EF, comme BG à EI, ou leur egaux A à D : Parquoy ſi l'vnité meſure quelque nombre, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres ſe multiplient l'vn l'autre leurs produicts ſeront egaux entr'eux.

Soient deux nombres A & B ; & que A multipliant B produiſe C ; & B multipliant A produiſe D : Ie dis qu'iceux deux produicts C & D ſont egaux entr'eux.

Car puis que A multipliant B produit C ; B ſera autant dans C, que l'vnité eſt en A par la 15. def. de

ce 7. liure, & par la 15. prop. en permutant A ſera autant de fois dans C, que l'vnité eſt en B. Item B multipliant A & produiſant D; A ſera autant de fois dedans D. qu'il y a d'vnitez en B par la meſme 15. def. & nous auons prouué que A eſtoit autant en C. que l'vnité en B: donc A eſt autant en C qu'en D; & partant par la com. ſent. C & D ſeront egaux entr'eux: Parquoy ſi deux nombres ſe multiplient l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Vnité.
A...3 B....4
C.... 12
D.....12

THEOR. 15. PROP XVII.

Vn nombre multipliant deux autres, les produicts ſeront entr'eux en meſme raiſon que les multipliez.

Soit le nombre A lequel multipliant les nombres B & C faſſe D & E: Ie dis que les deux produicts D & E ſont entr'eux, comme B à C.

Car par la 15. def. B multiplié par A eſt autant de fois dans ſon produict D, que l'vnité eſt en A; & C dans ſon produict E, comme la meſme vnité en A: par conſequent il y aura telle raiſon tant de B à D, que de C à E, comme de l'vnité à A. Parquoy par le Lemme de la 14. p. 7. B ſera à D, comme C à E; & en permutant par la 13. p. 7. comme B ſera à C, ainſi D ſera à E: donc vn nombre multipliant deux autres, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

Vnité.
A..2
B..3 C....4
D 6
E.....8

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Deux nombres multiplians vn autre, les produicts seront entr'eux, en mesme raison que les multiplians.

Soient deux nombres A & B, multiplians C; & soient les deux produicts D & E. Ie dis qu'iceux D & E seront l'vn à l'autre comme A est à B.

A...3 B....4
C..2
D.....6 E.....8

Car puisque A multip'iant C produict D, aussi C multipliant A produira le mesme D par la 16. prop. & par la mesme raison, puisque B multipliant C produict E, aussi C multipliant B produira le mesme E: ainsi A & B multipliant C, c'est comme si C multiplioit A & B. Or C multipliant A & B, les deux produicts D, E, seront l'vn à l'autre comme A est à B par la prop. preced. Parquoy deux nombres en multipliant vn autre, &c. Ce qui estoit à prouuer.

SCHOLIE.

Clauius a accommodé (apres Campanus) tant ceste prop. que la precedente à tant de nombres qu'on voudra; en ceste sorte.

Si vn nombre multiplie tant de nombres qu'on voudra, ou quelconques nombres en multiplient quelque autre; les produicts seront entr'eux en mesmes raisons que les multipliez, ou multiplians.

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou estant multiplié par iceux, soient produicts les nombres E, F, G. Ie

dis

dis que E, F, G, ſont entr'eux comme les nombres multipliez ou multiplians B, C, D ; *c'eſt à dire que comme* B *eſt à* C, *ainſi* E *à* F ; *& comme* C *à* D, *ainſi* F *à* G. *Car puis que* E, F *ſont produicts de* A *multipliant* B, C ; *ou de* B, C, *multipliez par* A, *comme* B *ſera à* C. *ainſi* E *ſera à* F *par la* 17. *ou* 18. *prop. Semblablement pource que* F, G, *ſont produicts de* A *en* C, D, *ou de* C, D *par* A, *auſſi comme* C *ſera à* D, *ainſi* F *ſera à* G, *& ainſi des autres. Appert donc ce qui eſtoit propoſé.*

A...3
B..2 C...3 D...4
E.....6 F. .....9 G.....12

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres ſont proportionnaux, le produict du premier & quart, ſera egal au produict du ſecond & tiers. Et ſi le produict du premier & quart, eſt egal au produict du ſecond & tiers, iceux quatre nombres ſont proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, & que le premier A multiplié par le dernier D produiſe E, & le ſecond B par le tiers C produiſe F. Ie dis que E & F ſont egaux.

A.....6 B....4
C...3 D..2
E.....12
F.....12
G.....18

Qu'ainſi ne ſoit. Soit multiplié A par C, & le produict ſoit G : d'autant que A multiplié par C & D, produict G & E, il y aura telle raiſon de G à E, que de C à D, par la prop. preced. Pareillement d'au-

tant que C multipliant A & B, produict G & F, il y aura telle raison de G à F, que de A à B, par la 17. prop. ou de C à D, qui sont en mesme raison que A & B. Parquoy G estant à E, & G à F en mesme raison que C à D, par le lemme de la 14. prop. comme G sera à E, ainsi G sera à F; parquoy G aura mesme raison à E qu'à F; & partant E & F seront nombres egaux, ainsi que nous avons dit en la 20. def.

Pour la seconde partie, soit E produict de A multiplié par D, egal à F, produict de B multiplié C: Ie dis que A est à B comme C est à D.

Car si G est produict de A multiplié par C; E & F nombres egaux auront mesme raison à G, comme nous avons dit en la 20. def. Mais il y a telle raison de G à E, comme de C à D, par la precedente prop. & telle raison de G à F, comme de A à B, par la 17. prop. & Partant par le lemme de la 14. prop. A sera à B, comme C à D: Si donc quatre nombres sont proportionnaux, le produict du premier & quart, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si trois nombres sont proportionnaux, le produict des extrémes est egal au produict du milieu: & si le produict des extrémes est egal à celuy du milieu, iceux trois nombres seront proportionnaux.

Ceste proposition est aisée à demonstrer: car en posant le nombre du milieu deux fois, afin qu'il

ait 4. nombres proportionnaux, desquels le second & tiers soient egaux; par la precedente le produict du premier & quart, sera egal au produict du second & tiers, c'est à dire au produict du second par soy mesme, &c.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux, mesurent également les nombres qui ont la mesme raison, sçauoir le plus grand, le plus grand, & le plus petit, le plus petit.

Soient deux nombres les plus petits en leur raison A & B, & deux autres nombres plus grands C & D en mesme raison qu'iceux A & B: Ie dis que de mesme façon que A mesure C, aussi B mesure D.

A...3 B....4
C.....6 D.....8

Car puisque iceux A, B, C, D, sont proportionnaux, ils le seront aussi en permutant par la 13. prop. A sera donc à C comme B à D; & A, & B plus petits que C & D, & par la 20. def. ils seront mesme partie ou parties d'iceux C & D. Or ils ne peuuent estre parties: car il est euident qu'ils ne seroient les plus petits nombres de leur raison; ce qui est contre l'hypotese. Donc A est mesme partie de C, que B de D: & partant A mesure C, autant de fois que B mesure D: Parquoy les plus petits nombres de tous ceux

qui ont vne mesme raison, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'vn costé, & autant d'vn autre, lesquels pris de deux en deux soient en mesme raison, la proportion estant troublée, en raison egale, ils seront proportionnaux.

Soient trois nombres d'vn costé A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, & qu'en proportion troublée A soit à B, comme E à F, & B à C comme D à E : Ie dis qu'en raison egale A sera à C, comme D à F.

A....4 D.....12
B...3 E.....8
C..2 F.....6

Car A estant à B, comme E à F, le produict de A multiplié par F, sera egal au produict de B multiplié par E, par la 19. prop. Item B estant à C, comme D à E; le mesme produict de B multiplié par E, sera egal au produict de C multiplié par D, par la mesme prop. & partant le produict de A par F, sera egal au produict de C par D, & par la susdite 19. prop. il y aura telle raison de A à C, comme de D à F : Parquoy s'il y a trois nombres d'vn costé, & autant d'vn autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

D'autant que de six moyens d'argumenter és proportions, lesquels Euclide a expliqué en grandeur, & demonstré au s.

liure, il en demonſtre en celuy-cy ſeulement deux en nombres; il ne ſera hors de propos de demonſtrer auſſi en nombres les 4. autres moyens, comme ont faict pluſieurs Interpretes.

I.

Si quatre nombres ſont proportionnaux; par raiſon inuerſe, ou en changeant, ils ſeront auſſi proportionnaux.

Soit A *à* B *comme* C *à* D. *Ie dis qu'en changeant comme B à A, ainſi D à C. Car puis que comme A à B, ainſi C à D, en permutant par la 13. prop. comme A ſera à C, ainſi B à D. Derechef puis que B eſt à D comme A à C, par la meſme prop. B ſera à A comme D à C. Ce qui eſtoit propoſé.*

A.....6.C...3
B....4 D..2

II.

Si les nombres compoſez ſont proportionnaux; iceux diuiſez ſeront auſſi proportionnaux.

Soit AB *à* CB *comme* DE *à* EF. *Ie dis qu'auſſi en diuiſant, comme* AC *à* CB, *ainſi* DF *à* FE. *Car puis que comme* AB *à* CB, *ainſi* DE *à* FE: *en permutant par la* 13. *prop. comme le tout* AB *au tout* DE, *ainſi le retranché* CB *au retranché* FE: *& partant par la* 11. *prop. comme le tout* AB *eſt au tout* DE, *ainſi le reſte* AC *ſera au reſte* DF: *c'eſt à dire* AC *à* DF, *comme* CB *à* FE: *donc en permutant comme* AC *ſera à* CB, *ainſi* DF *ſera à* FE. *Ce qui eſtoit propoſé.*

A.....6C...3B
D....4 F..2E

Par la meſme maniere nous demonſtrerons comme au liure 5. la diuiſion conuerſe & contraire de raiſon. Car ſoit premierement comme AB *à* CB, *ainſi* DE *à* FE; *Ie dis que, par diuiſion conuerſe de raiſon, comme* CB *à* AC, *ainſi* FE *à* DF. *Car puis que comme* AB *à* CB, *ainſi* DE *à* FE; *en diuiſant, comme* AC *ſera à* CB, *ainſi* DF *à* FE: *& en changeant comme* CB *ſera à* AC, *ainſi* FE *ſera à* DF.

Soit maintenant comme AC à AB, ainſi DF à DE. Ie dis par diuiſion contraire de raiſon, que comme AC eſt à CB, ainſi DF à FE. Car puis que comme AC à AB, ainſi DF à DE : en changeant comme AB ſera à AC, ainſi DE à DF. Donc en diuiſant comme CB à AC, ainſi FE à DF : & en changeant comme AC ſera à CB, ainſi DF à FE. Ce qui eſtoit propoſé.

III.

Si les nombres diuiſez ſont proportionnaux: iceux compoſez ſeront auſſi proportionnaux.

Soit AB à BC, comme DE à EF. Ie dis qu'en compoſant comme AC eſt à BC, ainſi DF à EF. Car puis que comme AB à BC, ainſi DE à EF, en permutant par la 13. prop. comme AB à DE, ainſi BC à EF : & partant par la 12. prop. comme AB BC, enſemble à DE, EF enſemble, c'eſt dire la toute AC à la toute DF, comme BC à EF : & en permutant par la 13. prop. comme AC à BC, ainſi DF à EF. Ce qui eſtoit propoſé.

A.....6B...3C
D.... 4 E..2F

Semblablement nous demonſtrerons icy comme au 5. liure la compoſition conuerſe & contraire de raiſon. Car ſoit premierement comme AB à BC, ainſi DE à EF. Ie dis par compoſition conuerſe de raiſon, que comme AC eſt à AB, ainſi DF à DE. Car veu que AB eſt à BC, comme DE à EF : en changeant comme BC, ſera à AB, ainſi EF à DE : & en compoſant comme AC ſera à AB, ainſi DF ſera à DE.

Maintenant ſoit derechef AB à BC, comme DE à EF. Ie dis que par compoſition contraire de raiſon, comme AB eſt à AC, ainſi DE à DF : car puiſque comme AB à BC, ainſi DE à EF : en changeant comme BC ſera à AB, ainſi EF à DE. Donc en compoſant comme AC à AB, ainſi DF à DE, & en changeant comme AE ſera à AC, ainſi DE à DF.

IIII.

Si les nombres compoſez ſont proportionnaux; ils

le seront aussi par conuersion de raison.

Soit comme AB à CB, ainsi DE à FE. *A.....6 C...3 B*
Ie dis que par conuersion de raison, comme AB est à AC, ainsi DE à DF. *D.... 4 F.. 2 E*
Car puis que comme AB à CB, ainsi DE à FE: en permutant par la 13. prop. comme le tout AB sera au tout DE, ainsi le retranché CB sera au retranché FE: & partant par la 11. prop. comme le tout AB au tout DE, ainsi le reste AC au reste DF. Donc en permutant comme AB sera à AC, ainsi DE à DF. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B. Ie dis qu'ils sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison qu'eux.

A.....6 B.....5
C.... D... E..

Car s'il n'est ainsi, soient C & D plus petits en la mesme raison, s'il est possible, par la 21. prop. ils mesureront A & B, l'vn comme l'autre: qu'ils les mesurent donc par le nombre E. Donc E sera commune mesure des nombres A & E: ainsi ils ne seroient point premiers entr'eux, mais composez contre l'hypothese. A & B sont donc les plus petits de tous ceux qui sont en mesme raison qu'eux. Parquoy les nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 22. PROP. XXIIII.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont vne mesme raison, sont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison : Ie dis qu'ils sont premiers entr'eux.

A.....6 D..
C..
B.....5 E...

Autrement ; ils ne sont premiers, que C les mesure tous deux s'il est possible, sçauoir A autant de fois qu'il y a d'vnitez en D, & B autant de fois qu'il y a d'vnitez en E. Veu donc que C mesure A par les vnitez qui sont en D, & B par les vnitez qui sont en E ; C multipliant D & E, produira A & B par la 9. com. sent. Parquoy par la 17. prop. il y aura mesme raison de A à B que de D à E : & partant puis que D & E sont parties d'iceux A & B, ils sont moindres : ainsi A & B ne seront pas les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison : ce qui est contre nostre hypothese : A & B sont donc nombres premiers entr'eux. Parquoy les plus petits nombres de tous ceux, &c. Ce qu'il falloit prouuer,

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entre-eux, celuy qui en mesurera l'vn sera premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, l'vn ou l'autre C...3 D..

A.....6 B.....5

desquels, sçauoir A, soit mesuré par le nombre C. Ie dis que C est premier à l'autre B.

Autrement, si B & C ne sont premiers entr'eux, que D les mesure tous deux, s'il est possible. Veu donc que D mesure C, & C mesure A, par la 1t com. sent. D mesurera aussi A : mais il mesure pareillement B. Donc A & B ne sont premiers entr'eux, contre l'hypothese. C est donc premier à B. Si quelque nombre mesure B, on prouuera en la mesme maniere qu'il sera premier à l'autre A. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEO. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre, le produit des deux sera premier à cest autre.

Soient deux nombres A & B, tous deux premiers à C ; & que A multiplié par B produise D. Ie dis que D est premier à C.

A..2 B...3 C.....5
D.....6 E..2 F...3

Autrement, si D & C ne sont premiers entr'eux, qu'ils soient composez, & que E les mesure tous deux, sçauoir D par le nombre F: Donc E multipliant F, produict D par la 9. com. sent. comme fait aussi A par B: Parquoy A, E, F, B, seront proportionnaux par la 19. prop. Et d'autant que A & C sont premiers entr'eux; E mesurant C sera premier à A par la prop. precedente ; & par la 25. propos. A & E estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison; & par-

tant ils mesureront egalement F & B, qui sont en la mesme raison, sçauoir A mesurera F, & E mesurera B par la 21. prop. Mais il mesure aussi C: B & C ne seroient donc pas premiers, ce qui est absurde, & contre l'hypothese. D sera donc premier à C. Partant si deux nombres sont premiers à quelque autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres sont premiers entre-eux, le produict de l'vn d'iceux multiplié par soy, est premier au restant.

Soient deux nombres premiers A, B, & que l'vn ou l'autre d'iceux sçauoir est A, multiplié par soy produise C. Ie dis que B & C sont premiers entr'eux.

A...3 B...4
C.....9 D...3

Car si on prend D, egal à A; B sera aussi premier à D. Ainsi A & D estans premiers à B par la 26. p. 7. A multiplié par D, c'est à dire par soy-mesme, produira C premier au mesme B. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres sont premiers à deux autres; (l'vn & l'autre à l'vn & à l'autre) leurs produicts seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres A & B premiers à deux autres C & D, & que E soit le produict de A multiplié par B, & F produict de C multiplié par D: Ie dis que E, & F sont premiers entr'eux.

A..2 B....4
C...3 D.....5
E.....8 F.....15

Car A & B estans premiers à C, leur produict E sera aussi premier au mesme C par la 26. prop. Par le mesme discours E sera aussi premier à D; ainsi C & D estans premiers à E, leur produict F sera aussi premier à E par la mesme 26. prop. Si donc deux nombres sont premiers à deux autres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux sont multipliez chacun par soy, leurs produicts seront premiers entr'eux: Et si iceux deux produicts sont encore multipliez par les nombres premiers proposez au commencement, les produicts sont encores premiers entr'eux; & tousiours enuiron les extremes aduiendra la mesme chose.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, & que A multiplié par soy mesme produise C, mais B multiplié aussi par soy produise D. Ie dis que C & D, seront premiers entr'eux. Item si A multipliant C, produict E, & B multipliant D produict F.

Ie dis que E & F seront premiers entr'eux.

A..2 B...3
C... 4 D.....9
E.....8 F.....27
G 16 H 81.

Car par la 27. prop. A & B estans premiers, C produict de A multiplié par soy, sera premier à B restant: par la mesme raison B & C estans premiers entr'eux, D sera aussi premier à C. Derechef puis que A & B sont premiers, par la mesme 27. prop. C sera aussi premier à B; & D à A: Mais il a esté demonstré que C est aussi premier à D: parquoy l'vn & l'autre nombre A, C, sera premier à l'vn & à l'autre nombre B, D; & partant par la 28. prop. E produict de A en C, sera premier à F, produict de B par D.

Que si encore A multipliant E produict G; & B multipliant F produict H: G & H seront aussi premiers entr'eux. Car puis que A & C sont premiers à B, leur produict E sera aussi premier à B par la 26. prop. Par la mesme raison F sera aussi premier à A: Ainsi les deux A, E, seront premiers aux deux B, F, sçauoir l'vn & l'autre, à l'vn & à l'autre; & partant par la 28. prop. G produict de A en E, sera aussi premier à H produict de B en F, & ainsi à l'infiny. Parquoy si deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si deux nombres premiers entr'eux sont adiouſtez ensemble, le produict sera premier à chacun d'eux: & si le produict est premier à quelqu'vn d'i-

ceux deux nombres, ils seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux AB & BC: Ie dis que le composé des deux AC, sera premier à chacun d'iceux AB, BC.

Car si AC, AB ne sont premiers, soit D leur commune mesure, s'il est possible: si donc D mesure le tout AC, & la partie AB; il mesurera aussi le reste BC, par la 12. com. sent. ainsi AB & BC ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Parquoy AC sera premier à AB: on demonstrera par la mesme maniere que AC est aussi premier à BC.

A...3 B....4 C
D..

Secondement, si le tout AC est premier à AB ou à BC. Ie dis que iceux AB & BC seront premiers entr'eux. Autrement que D les mesure s'ils ne sont premiers; il mesurera aussi le composé des deux AC, par la 10. com. sent. Ainsi AC ne seroit premier à AB, & BC, ce qui est contre l'hypothese. AB & BC sont donc premiers entr'eux. Si donc deux nombres premiers entr'eux sont adioustez ensemble, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

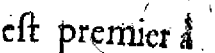
COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cecy, que si vn nombre composé de deux, est premier à l'vn d'iceux, il sera aussi premier à l'autre. Car *si AC est premier à AB; AB, BC seront premiers entr'eux par la seconde partie de ceste prop. Donc aussi AC sera premiere à BC par la premiere partie de la mesme prop. ce qui a esté proposé.*

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Tout nombre premier, eſt premier à tout autre qu'il ne meſure pas.

Soit vn nombre premier A, qui ne meſure le nombre B: Ie dis que A & B ſont premiers entr'eux.



Car s'ils ne le ſont, ils auront vne commune meſure autre que l'vnité; laquelle ſoit C, s'il eſt poſſible. Or C ne peut eſtre egal à A puis que nous auons poſé que A ne meſure pas B: & par ainſi A eſtant meſuré par quelque autre nombre, il ne ſeroit premier contre l'hypotheſe. Parquoy A & B ſont premiers entr'eux: donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Si deux nombres ſe multiplient l'vn l'autre, & que quelque nombre premier meſure leur produict, il meſurera auſſi l'vn d'iceux deux nombres poſez au commencement.

Soient deux nombres A, & B, de la multiplication deſquels ſoit produict C, & que D nombre premier meſure iceluy C. Ie dis qu'il meſurera auſſi l'vn ou l'autre d'iceux A & B, s'il ne les meſure tous deux.

Autrement, s'il ne meſure l'vn ny l'autre, qu'il me-

sure C par le nombre E : Si donc D ne mesure A, par la prop. preced. il sera premier à iceluy, & par la 23. prop. ils seront les plus petits de leur raison. Mais pour-autant que D par E faict C, aussi bien que A multiplié par B, par la 19. prop. A sera à D, comme E à B, & par la 21. prop. A & D mesureront egalement E & B, c'est à dire que A mesurera E; & D mesurera B. En la mesme maniere sera demonstré que si D ne mesure pas B, qu'il mesurera A. Si donc deux nombres se multiplient l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A....4 B.....6
C.....24
D...3 E.....8

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre composé A. Ie dis qu'il sera mesuré par quelque nõbre premier. Car puis qu'il est composé, il sera mesuré de quelque nombre par la 13. deff. & soit de B, lequel sera composé ou non: s'il est premier, la prop. est manifeste: mais s'il est composé, il sera mesuré par vn autre nombre, & soit C, lequel sera premier ou non: s'il est premier, puis qu'il mesure B; & B mesure A, aussi C mesurera A par la 11. com sent. Mais si C est composé, il sera mesuré par quelque nombre: Et pource qu'vn nombre ne se diminuë infiniement, nous viendrons finablement à quelque nombre que nul autre ne mesurera; & partant à vn nombre premier, lequel mesurant tous les precedents, mesurera aussi le composé A. Parquoy tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier. Ce qu'il falloit prouuer.

A.....8
B....4
C..2

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre eſt premier, ou bien meſuré par quelque nombre premier.

Soit quelconque nombre A : Ie dis qu'iceluy eſt ou nombre premier, ou que quelque nombre premier le meſure. A.....5 A.....6

Car s'il n'eſt nombre premier, il eſt nombre compoſé, & par la precedente prop. tout nombre compoſé, eſt meſuré par quelque nombre premier. Parquoy tout nombre eſt premier, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROB. 3. PROP. XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra eſtans donnez, trouuer les plus petits de tous ceux qui auront meſme raiſon.

Soient donnez tant de nombres qu'on voudra A,	A.....6	B...4	C.....8	
B C : & il faut trouuer les plus petits en la meſme raiſon.		D..2		
	E...3	F..2	G....4	
	H..	I..	K...	L..

Les nombres A, B, C ſont ou nombres premiers, ou nombres compoſez : s'ils ſont premiers entr'eux, on a ce que l'on cherche par la 23. prop. mais s'ils ſont compoſez, ſoit trouué D plus grande commune meſure d'iceux

ceux A, B, C, par la 3. prop. laquelle mesure A selon E; B selon F; & C selon G. Ie dis que E, F & G sont les plus petits nombres qui soient en la raison de A, B, & C.

Car il est euident qu'iceux E, F, G sont és mesmes raisons que A, B, C, d'autant que D mesurant iceux A, B, C par les nombres E, F, G; D multipliant iceux E, F, G, seront produicts A, B, C, par la 9. com. sent. & par ce que nous auons demonstré à la 18. prop. E, F, G, auront la mesme proportion entr'eux que les multipliez A, B, C. Et qu'ils soient les plus petits, on le demonstrera ainsi. S'ils ne sont tels, soient H, I, K les plus petits nombres ayans mesme proportion qu'iceux A, B, C: ils les mesureront donc egalement par la 21. prop. & soit par le nombre L; ce qu'estant, par la 9. com. sent. L multipliant H, I, K, seront produits les nombres A, B, C. Veu donc que D multipliant E, fait A; & L multipliant H, faict le mesme A; par la 19. pro. il y aura telle raison de D à L, que de H à E: mais H est moindre que E: donc D sera aussi moindre que L: Et puis que H, I, K mesurent A, B, C, par L; L mesurera aussi iceux A, B, C, par la 8. com. sent. & ainsi D ne sera la plus grande commune mesure d'iceux A, B, C: ce qui est contre l'hypothese. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G, qui soient en mesme raison, que les proposez A, B, C. Parquoy estans donnez quelconques nombres, nous auons trouué les plus petits, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il appert icy que la plus grande commune mesure de quelconques nombres, mesure iceux par les nombres qui sont les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison qu'iceux proposez.

SCHOLIE.

Par ces choſes appert le moyen de trouuer les deux plus petits nombres qui ont la meſme raiſon, que tant de nombres qu'on voudra donner continuellement proportionnaux. Comme ſi on propoſe les nombres A, B, C, continuellement proportionnaux, nous trouuerons les deux moindres en la meſme raiſon, ſi par ce prob. nous prenons E & F en la meſme raiſon des deux A & B, c'eſt à ſçauoir ces nombres-là, par leſquels D plus grande commune meſure d'iceux A & B, meſure iceux. Car par le corol cy-deſſus, E & F ſeront les plus petits de tous ceux qui ſont en la meſme raiſon que A à B: c'eſt à dire en la raiſon des continuellement proportionnaux A, B, C.

PROBL. 4. PRO. XXXVI.

Trouuer le plus petit nombre que peuuent meſurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & B: il faut trouuer le plus petit nombre meſuré par iceux.

A...3 B....4
C.....12
D.....

Si le plus petit nombre des deux donnez meſure le plus grand, iceluy plus grand ſera le nombre que nous cherchons: que ſi l'vn ne meſure l'autre, ou A & B ſeront premiers entr'eux, ou non: ſi premiers, ſoit C produit de A, multiplié par B. Ie dis que C eſt le plus petit nombre meſuré par A, & par B. Car par la 7. comm. ſent. il eſt euident que C ſera meſuré par l'vn & par l'autre,

E... F...

& s'il n'eſt le moindre nombre meſuré par iceux A, B, en ſoit vn autre plus petit D, s'il eſt poſſible, lequel A meſure ſelon le nombre E, & B ſelon le nombre F. Ce qu'eſtant, D ſera produit tant de A multiplié par E, que de B par F, par la neufieſme commune ſentence, & partant par la 19. prop. A ſera à B comme F à E. Item A & B, eſtans premiers, ils ſeront les plus petits de leur raiſon par la 23. prop. & A meſurera F par la 21. prop. & d'autant que B multipliant A produict C, & multipliant F produict D, il y aura telle raiſon de C à D, que de A à F, par la 17. prop. Mais nous auons monſtré que A meſuroit F: donc C meſurera auſſi D, ſçauoir le plus grand meſurera le plus petit, ce qui eſt impoſſible. C eſtoit donc le moindre nombre que A & B peuuent meſurer.

Soient maintenant les deux nombres A & B compoſez, & par la preced. prop. ſoient trouuez C & D les plus petits nombres de la meſme raiſon, tellement que ces 4. nombres A, B, C, D, ſoient proportionnaux: Quoy poſé par la 19. prop. le produit de A multiplié par D, ſera egal au produict de B multiplié par C: iceluy produit ſoit E. Donc E ſera meſuré par B, & par A: & par le meſme diſcours de la precedente demonſtration, on monſtrera qu'il eſt le plus petit nombre meſuré par A, & par B. Nous auons donc trouué le plus petit nombre, &c. Ce qu'il falloit faire.

A....4 B.....6
C..2 D...3 E.....12

THEOR. 33. PROP. XXXVII.

Si deux nombres meſurent vn autre nombre; le plus petit qu'ils me-

surent, mesurera aussi iceluy autre.

Soient deux nombres A, & B, qui en mesurent vn autre CD, & que le plus petit nombre qu'ils mesurent soit E. Ie dis que E mesurera aussi CD.

A..2 B...3
C..... F.....D
E.....6

Autrement, si E ne mesure CD; apres auoir mesuré CF, qu'il laisse FD plus petit que soy, s'il est possible: A & B mesurans E, ils mesureront aussi CF par la 11. com. sent. Mais ils mesurent le tout CD par la 12. com. sent. ils mesureront donc aussi le reste FD plus petit que E, ce qui est impossible, estant le plus petit qu'ils mesurent. Parquoy E mesurera CD: Si donc deux nombres mesurent vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL. 5. PROP. XXXVIII.

Trouuer le plus petit nombre que peuuent mesurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez A, B, C; il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils mesurent.

A..2 B...3 C.....6
D:.....6

Soit trouué D plus petit nombre que peuuent mesurer A & B, par la 36. prop. Or C mesure aussi D, ou il ne le mesurera pas: s'il le mesure; Ie dis qu'il est aussi le plus petit qu'iceux A, B, C, peuuent mesurer: car

E....

s'il ne l'est, en soit quelque autre plus petit E, s'il est possible, lequel tous les trois A, B, C mesurent. D'autant que A & B mesurent E moindre que D, iceluy D, ne sera le moindre que A & B mesurent, ce qui est contre l'hypothese. D est donc le moindre nombre que peuuent mesurer les nombres proposez A, B, C.

Que si D n'est aussi mesuré par C: par la mesme 36. propos. soit trouué E plus petit nombre mesuré par C & D: Ie dis que E sera le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

A..2 B...3 C....4
D....6
E.....12
F.....

Car premierement E est mesuré par A, B, C: d'autant que C & D, le mesurent; & A & B mesurant D, par la 11. com. sent. ils mesureront aussi E mesuré par D. Que si on dit que E n'est le plus petit nombre mesuré par A, B, C, soit F plus petit, s'il est possible: A & B donc mesurant F; D le plus petit mesuré par eux, mesurera aussi F par la preced prop. Mais C mesure aussi F; (car A, B, & C le mesurent) donc C & D mesureront F. Et par la mesme prop. E plus petit mesuré par C & D, mesurera aussi F; le plus grand vn plus petit; ce qui est impossible. Donc E estoit le plus petit nombre mesuré par A, B, C. Estant donc donnez trois nombres nous auons trouué le plus petit qu'ils peuuent mesurer: Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que si trois nombres en mesurent quelque autre; le plus petit qu'ils mesureront, mesurera aussi cest autre. Car il a esté demonstré que A, B, C, mesurant F; aussi E le plus petit nombre mesuré par A, B, C, mesure le mesme nombre F.

SCHOLIE.

Par mesme raison estans donnez plus de trois nombres, nous trouuerons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si 4 nombres sont donnez, il faudra trouuer le moindre que trois mesurent: si 5, il faudra trouuer le plus petit que 4 mesurent, &c. procedant au reste tout ainsi qu'il a esté dict de trois nombres.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si vn nombre mesure vn autre nombre, le mesuré aura vne partie denommee par le mesurant.

Vnité.

Soit le nombre A, lequel mesure le nombre B. Ie dis que iceluy B contiendra vne partie denommée par A.

A...3 B.....6 C..2

Qu'ainsi ne soit; que A mesure B selon C, c'est à dire autant de fois qu'il y a d'vnitez en C; par la 15. prop. C mesurera B autant de fois, que l'vnité mesure A; & C sera telle partie de B que l'vnité de A. Mais l'vnité est vne partie de A, denommée par iceluy A, comme nous auons dict en la 2. deff. de ce 7. liure: donc aussi C sera vne partie de B denommée par A. Si donc vn nombre mesure vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 35. PROP. XL.

Si vn nombre a vne partie quelle qu'elle

soit, le nombre nommant ceste partie le mesurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B denommee par le nombre C. Ie dis que C mesure A.

A.....12
B...3 C....4

Car puis que B est partie denommée par C; & l'vnité est partie de C, denommée par le mesme C; comme l'vnité mesure C, ainsi B mesure A: & par la 15. prop. en permutant comme l'vnité mesurera B, ainsi C mesurera A. Parquoy si vn nombre a quelconque partie, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROB. 6. PROP. XLI.

Trouuer le plus petit nombre qui ayt les parties donnees.

Soient les parties données A, B, C; il faut trouuer le plus petit nombre qui ait icelles parties.

A *deuxiesme* D..2
B *tiers* E...3
C *quart.* F....4

Soient pris les trois nombres, D, E, F, denommez par icelles parties A, B, C; & par la 38. prop. soit trouué G, le plus petit nombre que peuuent mesurer D, E, F: Ie dis qu'iceluy nombre G contient les parties A, B, C.

G.....12
H.....

Car puis que D, E, F mesurent G, par la 39. prop. G aura les parties denommees par D, E, F, c'est à dire les parties A, B, C. Ie dis aussi que G est le plus petit nombre qui ait icelles parties. Car s'il ne l'est, soit H plus petit, s'il est possible, ayant icelles parties. Et H sera mesuré par les nombres D, E, F denom-

mées par les parties E,B,C,par la precedente prop.& partant puis que H eſt moindre que G;iceluy nombre G ne ſera le plus petit que peuuent meſurer les nombres D, E, F, contre l'hypotheſe. G eſt donc le moindre nombre,ayant les parties donnees A, B,C. Parquoy nous auons trouué le plus petit nombre ayant les parties données:Ce qu'il falloit faire.

Fin du ſeptieſme Element.

ELEMENT HVICTIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

Si tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionnaux, & les extrémes ſont premiers entr'eux; ils ſeront les plus petits de leur raiſon.

SOIENT trois nõbres continuellement proportionnaux A, B, C; & que les extrémes A & C, ſoient premiers entr'eux: Ie dis que A, B, C, ſont les plus petits qui ſoient en la meſme raiſon.

A....4 D...
B.....6 E.....
C.....9 F.....

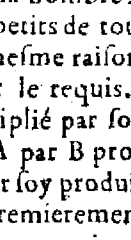
Car ſ'ils ne ſont tels, ſoient D, E, F, plus petits en la meſme raiſon, ſ'il eſt poſſible. Donc en raiſon egale, D ſera à F, comme A eſt à C par la 14. p. 7. & parce que A & C ſont premiers entr'eux, ils ſeront les plus petits de leur raiſon, par la 23. p. 7. & par la 21. p. 7. ils meſureront D & F: ce qui eſt impoſſible, pour eſtre plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, eſtoient les

plus petits en la mesme raison. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROB. 1. PROP. II.

Trouuer tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, les plus petits en vne raison donnée.

Soiẽt les deux nombre A & B les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison: il faut trouuer le requis.



Que A multiplié par soy produise C; A par B produise D; & B par soy produise E: Ie dispremierement que C, D, E, sont continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Car puis que A multipliant A & B a produict C & D; comme A sera à B, ainsi C à D par la 17. p. 7. Derechef, puis que B multipliant A & B, produict D & E, comme A sera à B, ainsi D sera à E: Parquoy C, D, E, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Ie dis aussi qu'ils sont les plus petits d'icelle raison donnée. Car d'autant que par la 24. p. 7. A & B sont premiers, aussi par la 29. p. 7. C & E seront premiers: & par la precedente prop. C, D, E, seront les plus petits en la raison donnée de A à B.

Que si on en vouloit quatre. Que A multiplié par C produise F; A par D produise G; B par D produise H, & B par E produise I: Ie dis que F, G, H, I sont

les nombres requis. Car par le mesme discours de la 17. & 18. p. 7. ces nombres seront continuellement proportionnaux, & par la 24. & 29. p. 7. F & I seront premiers entr'eux : & par la precedente F, G, H, I, seront les plus petits qui ayent la mesme raison qu'iceux extrémes F & I. Et en ceste façon on en trouuera tant que l'on voudra. Nous auons donc trouué les nombres continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il resulte de cecy que trois nombres continuellement proportionnaux, estans les plus petits de leur raison ; les extrémes seront quarrez : s'il y en a quatre, qu'iceux extrémes seront Cubes. Car des trois C, D, E, les extrémes C & E, ont esté produicts de A & B multipliez par eux mesmes, & des 4. F, G, H, I, les extrémes F & I ont esté produicts de la multiplication de A & B par leurs quarrez C & E.

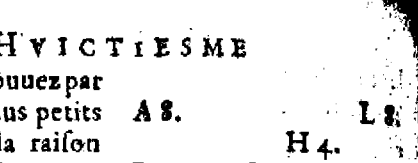
Il resulte encore que les extrémes des nombres continuellement proportionnaux trouuez selon ceste prop. sont premiers entr'eux. Car il a esté demonstré par les 24. & 29. p. 7. que les extrémes C, E; & F, I sont premiers entr'eux.

THEOR. 2. PROP. III.

Si tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, sont les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison : les extrémes seront premiers entr'eux.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison, A, B, C, D : Ie dis que les extrémes A & D sont premiers entr'eux.

Car soient trouuez par la 35. p. 7. les plus petits qui soient en la raison de A à B, sçauoir F & G: ils seront premiers entr'eux, par la 13. p. 7. & comme il a esté enseigné en la preced. soient trouuez des nombres



continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de F à G, sçauoir premierement les trois H, I, K. Puis apres les quatre L, M, N, O; & ainsi consecutiuement vn plus, iusques à ce que on en ayt autant qu'il y en aura de proposez: il ne faut donc icy que ces quatre L, M, N, O. Or iceux estans les plus petits en la raison de F à G, ils seront egaux aux quatre A, B, C, D, qui sont aussi les plus petits en la mesme raison. Et comme les extrémes L & O sont premiers entr'eux, par le corol. de la preced. les extrémes A & D seront aussi premiers entr'eux. Parquoy si tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROB. 2. PROP. IIII.

Estans données tant de raisons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raisons; trouuer tant de nombres qu'on voudra les petits cõtinuellement proportionnaux selon les raisons données.

Soient dõnées les deux raisons de A à B, & de C à D, aux plus petits termes d'icelles : il faut trouuer trois nombres en continuelle proportion, les plus petits de ceux qui sont selon les raisons données.

A 2.
B 3.
C 4.
D 5.

G 8. Loo
F 12. Moo
H 15. Noo

Soit trouué F le plus petit nombre qui soit mesuré par B, & par C, par la 36. p. 7. en apres soit trouué G, autant de fois mesuré par A, que F par B. Pareillement H autant de fois mesuré par D que F par C. Ie dis que les trois nombres G, F, H sont les nombres requis.

Car il est euident qu'ils sont continuellement proportionnaux en la raison donnée ; d'autant que A mesure autant de fois G, que B mesure F ; & par consequent A & B multiplians vn mesme nombre (sçauoir celuy par lequel iis mesurent G & F) ont produict G & F : par la 18. p. 7. G est à F, en mesme raison que A à B. Et par mesme discours F sera à H, comme C à D.

On prouuera aussi qu'ils sont les plus petits, selon les raisons données : d'autant que s'il n'est ainsi, en soient trouuez de plus petits L, M, N, s'il est possible, & qui respondent aux raisons données comme les trois G, F, H : il est euident que B & C doiuent mesurer M, à cause des semblables raisons, par la 21. p. 7. Mais F est le plus petit nombre mesuré par B & par C, & par la 37. p. 7. F mesurera M, sçauoir est, le plus grand, le plus petit : ce qui est impossible. Partant G, F, H, estoient les plus petits selon les raisons données.

Que si trois raisons estoient données aux plus

petits termes A à B; C à D, & F à G, selon lesquelles il fallut trouuer quatre nombres tels que requiert la proposition: on procedera en ceste sorte.

A 2. I 8. M 16.
B 3. H 12. N 24.
C 4. K 15. O 30.
D 5. F 6. L. P 35.
F G 7.

Soiēt trouuez les trois nombres I, H, K, comme dessus: ce faict ou F mesurera k, ou non. S'il le mesuroit, faudroit prendre L autant de fois mesuré par G, que K par F: & par la precedente demonstration, il est euident qu'on auroit satisfaict. Que si F ne mesure K, soit trouué O le plus petit nombre mesuré par F, & par K, par la 36. p. 7. Et que G mesure autant de fois P, que F mesure O. Item que comme K mesure O, ainsi H mesure N; & I mesure M. Ie dis que M, N, O, P sont les quatre nōbres requis.

Car puisque I, H, K mesurent egalement M, N, O, cōme dit est cy dessus, I sera à H ainsi que M à N, & comme H sera à K, ainsi N à O. Mais il y a mesme raison de I à H que de A à B. & de H à k que de C à D, pource que A & B mesurent egalemēt iceux I & H; & C, D, egalement H & k. Donc comme A à B, ainsi M à N, & cōme C à D, ainsi N à O: aussi comme F à G ainsi O à P, à cause que F, G mesurent egalement O, P. Les quatre nombres M, N, O, P, sont donc continuellement proportionnaux és raisons donnes. Et qu'ils soient les plus petits, on le demonstrera en la mesme façon qu'on a faict cy dessus de trois nombres.

Or en la mesme maniere sera procedé si 4. ou d'auantage de raisons sont données aux plus petits ter-

mes. Parquoy eſtans données tant de raiſons qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 3. PROP. V.

Les nombres plans ſont l'vn à l'autre en la raiſon compoſée de leurs coſtez.

Soient les deux nombres plans A & B; les coſtez de A, ſoient C & D; & les coſtez de B, ſoient E & F. Ie dis que le plan A eſt au plan B, en la raiſon compoſée de C à E, & de D à F.

Qu'il ne ſoit ainſi. Que D multiplié par E produiſe G. Donc D multipliant C & E, produira A & G, qui ſeront en meſme raiſon que C à E, par la 17. p. 7. Et par meſme diſcours E multipliant D & F, produira G & B, qui ſeront auſſi en meſme raiſon que D à F. Parquoy les trois nombres A, G, B ſont continuellement proportionnaux és raiſons de C à E, & de D à F. Mais par la 5. d. 6. la raiſon de A à B eſt compoſée de A à G, & de G à B. Donc la raiſon du nõbre plan A au nombre plan B, ſera compoſée de la raiſon des coſtez C à E, & D à F. Parquoy les nombres plans ſont l'vn à l'autre en raiſon compoſée de celles de leurs coſtez. Ce qu'il falloit prouuer.

C 3.
A 12.
D 4.
G 8.
E 2.
B 18.
F 9.

THEOR. 4. PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &

que le premier ne mesure le second, ny aussi pas vn autre ne mesurera pas vn autre.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D; & que le premier A, ne mesure point le second B. Ie dis que pas vn autre n'en mesurera pas vn autre.

A 8. B 12. C 18. D 27. E 4. F 6. G 9.

Car premierement, comme A ne mesure point B, ainsi B ne mesurera C; ny C ne mesurera D, d'autant qu'ils sont en mesme raison: que si on vouloit dire qu'en passant quelqu'vn, les extrémes se pourroient mesurer, comme si A pouuoit mesurer C, soient trouuez trois nombres E, F, G, les plus petits en la raison de A, B, C par la 37. p. 7. ainsi A estant à B comme E à F, & comme B à C, ainsi F à G: en raison egale A sera à C cõme E à G, par la 14. p. 7. & puis que par l'hypothese, A ne mesure point B, aussi E ne mesurera point F; & partãt E ne sera pas l'vnité, autrement il mesureroit F, veu que l'vnité mesure tout nombre. Et d'autant que par la 3. prop. de ce liure E & G sont nombres premiers, & que E n'est pas l'vnité; iceluy E ne mesurera pas G: Mais nous auons demonstré que comme A est à C, ainsi E est à G. Donc comme E ne mesure point G, aussi A ne mesurera point C. Par le mesme discours on prouuera de tous les autres. S'il y a donc tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, & que le premier A mesure le dernier D. Ie dis qu'il mesurera aussi le second B.

A 3. B 9. C 12. D 24.

Car par la precedente, si A ne mesuroit B, aussi pas vn autre ne mesureroit pas vn autre, & par consequent A ne mesureroit pas D, contre l'hypothese. A mesurera donc B. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, il en tombera autant entre deux autres estans en la mesme raison.

Soient les nõbres A & B, entre lesquels tombent C & D continuellement proportionnaux: & qu'il y ait telle raison de E à F, que de A à B. Ie dis qu'entre

A 3. C 9. D 27. B 81.
G 1. H 3. I 9. K 27.
E 2. L 6. M 18. F 54.

E & F se trouuerõt autant de nombres moyens continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouuez par la 2. p. 8. les quatre nombres, G, H, I, k, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A, C, D, B. Donc en raison egale comme A sera à B, ou E à F (car c'est la mesme raison) ainsi G à K par la 14. p. 7. Mais G & K sont premiers entr'eux par la 3. p. 8. & les plus petits nombres de leur raison par la 23. prop. 7. & par la 21. p. 7. ils mesureront egalement E & F. Donc autant de fois que G & K mesureront E & F; qu'autant de fois H & I mesurent d'autres nombres L & M : tellement que les nombres G, H, I, k, mesurent egalement les nombres E, L, M, F, par la 9. com. sent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, produisent iceux E, L, M, F, lesquels seront entr'eux comme G, H, I, K, ainsi que nous auons demonstré à la 18. p. 7. Mais G, H, I, K sont continuellement proportionnaux: donc aussi E, L, M, F, seront continuellement prop: & partant puis que la multitude E, L, M, F, est egale à la multitude A, C, D, B, il tombera autãt de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B. Parquoy si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

De ceste demonstration appert non seulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E *&* F, *qu'entre* A *&* B, *mais aussi que la proportion des nombres* E, L, M, F, *est la mesme que des nombres* A, C, D, B. *Car il a esté demonstré que la proportion de* E, L, M, F, *est la mesme que celle des*

nombres G, H, I, K: Mais iceux sont par la construction en la mesme prop. que A, C, D, B, donc aussi E, L, M, F, sont en mesme proportion que A, C, D, B.

Il appert aussi de ce theoreme, qu'entre nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne peut tõber vn nombre moyen proportionnel. Car puis que la raison double, és moindres nombres, est trouuée entre le binaire & l'vnité; mais la superparticuliere, entre nombres differens seulement de l'vnité; & la superbipartiente, entre les nombres, desquels la difference est le binaire: si entre deux nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, tombe vn moyen prop. il en tombera pareillement vn (par ce theor.) entre le binaire & l'vnité, ou entre les nombres differens de la seule vnité, ou du binaire; c'est à sçauoir entre les plus petits nombres qui ont la mesme raison que ceux-là; ce qui est impossible. Car il est tout euident qu'entre le binaire & l'vnité, ny entre 2. nombres differens seulement de l'vnité. ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens seulement du binaire, tombe seulement vn nombre, qui differe à l'vn & l'autre de l'vnité: lequel nous demonstrerons ne pouuoir estre milieu prop. entre iceux.

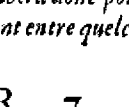
Soient les nombres AB & CD, differens du binaire, entre lesquels tombe le nombre EF moindre que AB de l'vnité, mais plus grand que CD, aussi de l'vnité. Ie dis que EF n'est moyen prop. entre AB, CD. Car si on dit que comme AB à EF, ainsi EF à CD: estant osté de AB, le nombre AG egal à EF, afin qu'il reste l'vnité GB; & de FF, le nombre EH egal à CD, afin qu'il reste aussi l'vnité HF; pareillement comme AB sera à EF, ainsi le retranché AG sera au retranché EH. Donc aussi le reste GB sera au reste HF; c'est à dire l'vnité à l'vnité, comme le tout AB

A.....6 G. B	A. G. B
E.....5 H. F	E. H. F
C.....5 D	C. D

au tout EF, le plus grand au moindre: Ce qui eſt abſurde; donc EF n'eſt pas moyen prop. entre AB & CD.

Parquoy entre les nombres de raiſon triple ne peut tomber vn nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit auſſi vn entre 3 & 1, les plus petits nombres de la raiſon triple, qui different entr'eux du binaire: Ce qui eſt impoßible, comme nous venons de demonſtrer.

Par meſme raiſon, ne peut auſſi tomber vn moyen prop. entre deux nombres de quintuple raiſon. Car s'il y en tomboit vn, il en tomberoit auſſi vn (par ce theor) entre 5 & 1, les petits nombres de la raiſon quintuple: ce qui ne ſe peut faire. Car s'il eſt poßible qu'entre le quinaire AB & l'vnité C, tombe vn moyen prop. binaire, ou ternaire D, tellement que AB ſoit à D, comme D à C: en changeant C ſera à D comme D à AB. Et pource que l'vnité C meſure D, auſſi D meſurera AB. Mais le binaire, ou ternaire D meſure pareillement le ſinaire AE: donc D meſurera le tout AE, & le retranché AB; & partant par la 11. com. ſent. auſſi D meſurera le reſte vnité BE. Ce qui eſt abſurde. La meſme abſurdité aduiendra touſiours, ſi on dit qu'vn nombre quaternaire ſoit moyen prop. entre iceluy quinaire AB, & l'vnité C. Il ne tombera donc point de milieu prop. entre 5 & 1. & par conſequent entre quelconques nombres de raiſon quintuple.



THEOR. 7. PROP. IX.

Si deux nombres ſont premiers entre-eux, autant de nombres continuellement proportionnaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chacun d'iceux, & l'vnité.

Soient deux nombres premiers entre-eux A & B, entre lesquels tombẽt quelques nombres

A 8 C 12. D 18. B 27.

Vnité.

E 2. F 3.

G 4. H 6. I 9.

K 8. L 12. M 18. N 27.

continuellement proportionnaux C & D. Ie dis qu'entre chacun d'iceux A, B, & l'vnité, il tombera autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

Car ayant posé l'vnité, soient pris E & F, les plus petit nombres qui soient en la raison de A à C, par la 35. p. 7. puis par la 2. p. 8. soient trouuez les trois plus petits en la mesme raison G, H, I: puis les quatre k, L, M, N; & ainsi consequemment iusques à ce que la multitude des pris soit egale à la multitude A, C, D, B. D'autant que les extrémes A, B, sont premiers entr'eux, par la 1. p. 8. A, C, D, B, seront les plus petits en la raison de E à F: Mais leurs egaux en multitude k, L, M, N, sont aussi les plus petits en la mesme raison par la construction. Donc k, L, M, N, sont egaux à iceux A, C, D, B, chacun au sien, comme k à A, & N à B. Et pource que (comme il appert par la demonstration de la 2. p. 8.) E multipliant soy-mesme a produict G; & multipliant G a faict k, par la 7. com. sent. E mesurera G par E; & G iceluy k par le mesme E: mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure iceluy E par E. Donc l'vnité mesurera egallement E; & E iceluy G; & G iceluy k: & partant l'vnité sera mesme partie de E, que E de G, & G de k. Donc par la 20. d. 7. l'vnité & les nombres E, G. k, sont continuellement proport. Par mesme discours l'vnité & les trois nombres F, I, N, seront aussi prouuez con-

tinuellement proportionnaux. Et puis que tant la multitude E,G,K, que F,I,N,auec l'vnité, est egale à la multitude K,L,M,N, ou A,C,D,B; il s'ensuyura qu'entre l'vnité & le nombre k ou A, qui luy est egal; & aussi entre l'vnité & le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux,&c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. x.

Autant de nombres qui tomberont continuellemẽt proportionnaux entre l'vnité & chacun de deux nombres proposez; autant en tombera-il entre iceux deux nombres.

Soient deux nombres proposez A & B,& qu'entre l'vnité C, & chacun d'iceux, tombent quelques nombres continuellemẽt proportionnaux, comme D & E, entre C & A: Item F & G, entre C & B. Ie dis qu'aussi il en tombera deux continuellement proportionnaux entre A & B

A8.I12.K18.B27.
E4.H6.G9.
D2.F3.
C1.

Car si on vient à multiplier comme en la 2. p. 8. pour trouuer les trois nombres, H, I, K, c'est à sçauoir que H soit le produict de D multiplié par F; I le produict de D, par H: & K, le produict de F par H. Puisque comme C à D, ainsi D à E, & E à A; & que par la 5. com. sent. C vnité mesure D, par les

vnitez qui ſont en D; auſſi D meſurera E, par les vnitez qui ſont en D; & E meſurera A, par les meſmes vnitez de D; ainſi il eſt euident que D multiplié par ſoy-meſme produict E, & E multiplié par D, a produict A. Par meſme diſcours ſe prouuera que F multiplié par ſoy-meſme, a produict G, & que G par F à produict B.

Maintenant puis que D multiplié par ſoy-meſme, & par F à produict E & H, par la 17. p. 7. comme D à F, ainſi E à H. Pareillement F multiplié par D, & par ſoy-meſme, a produict H & G; auſſi H ſera à G comme D à F: Parquoy les trois nombres E, H, G, ſeront en continuelle proportion. D'auantage D multipliant E & H, produict A & I; partant comme E ſera à H, ainſi A ſera à I: & puis que D & F multiplient H, & produiſent I & K: I ſera à K, comme D à F. Par meſme diſcours k ſera à B à la meſme raiſon, eſtans les produicts de H & G multipliez par F, le tout par les 17. & 18. p. 7. Il eſt donc euident que A, I, K, B, ſont continuellement proportionnaux, & que partant les deux nombres I & K ſont tombez en continuelle proportion entre A & B, c'eſt à ſçauoir autant qu'il y en a entre chacun d'iceux A & B, & l'vnité C. Parquoy autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9. PROP. XI.

Entre deux nombres quarrez tombe vn moyen proportionnel: & le quarré eſt au quarré en raiſon doublée du coſté au coſté.

Soient deux nombres quarrez A & B, desquels les costez soient C & D. le dis qu'entre iceux quarrez A & B, tombera vn moyen proportionnel: & que le quarré A est au quarré B en la raison doublee du coste C au costé D.

A4. E6. B9.
C2. D3.

Car puis que C est le costé de A; C multiplié par soy-mesme produira A: pareillement D par soy-mesme produira B. Maintenant soit trouué E, produict de C multiplié par D. Et par la 17. prop. 7. comme C à D, ainsi A à E, & E à B. Partant E est moyen proportionnel entre A & B.

Pour la seconde partie: il est euident que le quarré A, est au quarré B, en raison doublee du costé C au costé D. Car A, E, B estans continuellement proportionnaux, A est à B en raison doublee de A à E par la 10. deff. 5. qui est la mesme raison que de C à D, ainsi qu'il à esté demonstré cy-dessus. Parquoy entre deux nombres quarrez tombe vn moyen proportionnel, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent deux moyens proportionnaux: & le cube est au cube en raison triplee du costé au costé.

Soient deux nombres cubes A & B, desquels les costez

A27. H36. I48. B64.
E9. G12. F16.
C3. D4.

soient C & D. Ie dis que entre iceux cubes A & B, tomberont deux moyens proportionnaux: & que la raison du cube A au cube B, est la raison triplée du costé C au costé D.

Qu'il ne soit ainsi. Que C se multipliant soy-mesme produise E; D par soy produise F; mais C & D l'vn par l'autre produise G; & iceluy G multiplié par l'vn & l'autre C & D, produise H & I. Or puis que A, & B sont cubes, ils seront les produicts de C multiplié par E, & de D multiplié par F: il est donc euident que la construction est semblable à celle de la 2. prop. 8. & par la demonstration de la mesme, A, H, I, B seront continuellement proportionnaux selon la raison de C à D. Partant H & I, seront deux moyens proportionnaux entre les nombres cubes A & B.

Quant à la seconde partie; il est manifeste que le cube A est au cube B, en raison triplee du costé C au costé D. Car A, H, I, B estans continuellement proportionnaux, A est à B en raison triplée de A à H par la 10. deff. 5. Mais comme A est à H, ainsi C est à D. Donc le cube A est au cube B en raison triplée du costé C au costé D. Parquoy entre deux nombres cubes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 11. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux; iceux estans multipliez chacun par soy, leurs produicts seront aussi continuellement proportionnaux: & si

chacun multiplie encores son produit, les derniers produicts seront aussi continuellement proportionnaux: & cela aduiendra tousiours enuiron les extremes.

Soiēt A2. B4. C8.
trois D4. N8. E16. O32 F64.
nom- G8. P16. Q32. H64. R128. S256. I512.
bres continuellement proportionnaux A, B, C: Et qu'iceux se multiplians chacun par soy produisent D, E, F. Item que les mesmes multiplians chacun son produict facent G, H, I, & ainsi continuellement. Ie dis que D, E, F, & G, H, I, sont entr'eux continuellement proportionnaux.

Qu'il ne soit ainsi; que N soit le produict de A multiplié par B; & O, de B par C: Pareillement que P soit le produit de A par N; Q, de A par E; R, de B par O; S, de B par F: par la 17. propost. 7. A se multipliant, & multipliant B, les produicts D & N seront en la mesme raison de A à B: & par mesme discours B multipliant A & soy-mesme, les produicts N, & E seront aussi en la mesme raison, & ainsi des autres: Partant D, N, E, O, F, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B: ainsi D, N, E; & E, O, F, sont continuellement proportionnaux en vne mesme raison; & en en raison egale comme D sera à E, ainsi E à F: parquoy D, E, F, seront continuellement proportionnaux.

Pareillement d'autant que A multipliant D, N, E a faict G, P, Q: par ce que nous auons demonstré

à la 18. prop. 7. G, P, Q seront entr'eux, comme les proportionnaux D, N, E; c'est à dire comme A à B. Item pource que A & B multipliant E ont produit Q & H, & par la 18. prop. 7. comme aussi A sera à B, ainsi Q à H. Donc G, P, Q, H, sont proportionnaux en la raison de A à B. Par mesme discours H, R, S, I, seront prouués proportionnaux en la mesme raison de A à B: & partant en raison egale comme G sera à H, ainsi H à I: parquoy G, H, I seront continuellement proportionnaux. S'il y a donc tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIIII.

Si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré; aussi le costé mesurera le costé: que si le costé mesure le costé, aussi le quarré mesurera le quarré.

Soit le nombre quarré A qui mesure le nombre quarré B; & d'iceux quarrez les costez soiēt C, & D. Ie dis en premier lieu que le costé C mesurera aussi le costé D.

A 4. E 12. B 36. C 2. D 6.

Car ayant multiplié C par D, il est euident par la demonstration de la 11. prop. 8. que le produict E est moyen proport. entre A & B, en la raison de C à D: mais le premier A mesure le dernier B: donc par la 7. prop. 8. il mesurera aussi le second E. Parquoy puis que comme A à E, ainsi C à D: aussi le costé C mesurera le costé D. Ie dis en second lieu, que si le costé C mesure le costé D, aussi le quarré A mesurera le quarré B. Car comme dessus A,

E & B'seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D : Et puisque C mesure D, aussi A mesurera E ; & E mesurera B, & par consequent A mesurera aussi B, parce que qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré, par la 11. com. sent. Parquoy si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si vn nombre cube mesure vn nombre cube: aussi le costé mesurera le costé: & si le costé mesure le costé ; aussi le cube mesurera le cube.

Soit vn nombre cube A, qui mesure vn autre nombre cube B, & d'iceux cubes les costez soient C & D. Ie dis que le costé C mesurera aussi le costé D : Pareillement que si le costé C mesure le costé D, aussi le cube A mesurera le cube B.

A 8. H 24. I 72. B 216.
E 4. G 12. F 36.
C 2. D 6.

Car puis que par la 12. p. 8. entre deux cubes tombét deux moyens proportionnaux H, I, & le cube est au cube en raison triplee du costé au costé, c'est à dire que le costé C est au costé D, comme l'vn des cubes A est à son prochain moyen proportionnel H, lequel il mesurera par la 7. prop. 8. & par consequent le costé C mesurera aussi le costé D. Pour la seconde partie, si le costé C mesure le costé D, aussi le cube A mesurera son prochain moyen prop. H,

lequel mesurera l'autre moyen prop. I, & iceluy l'autre cube B ; & par consequent le cube A mesurera l'autre cube B, par la 11. com. sent. repetée. Parquoy si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si vn nombre quarré ne mesure pas vn nombre quarré, aussi le costé ne mesurera pas le costé : que si le costé ne mesure le costé, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Soient les nombres quarrez A & B, desquels les costés sont C & D, mais que A ne mesure pas B : Ie dis premierement que le costé C ne mesurera pas le costé D.

A 16. B 81.
C 4. D 9.

Car par la 14. prop. de ce liure, si ledict costé C mesuroit le costé D, aussi le quarré A mesureroit le quarré B contre l'hypothese. Pour la seconde partie, que le costé C ne mesure pas le costé D : Ie dis que le quarré A ne mesurera pas le quarré B. Cecy est aussi manifeste, car si le quarré A mesuroit le quarré B, aussi le costé C mesureroit le costé D par la susdite 14. prop. 8. contre nostre hypothese. Si donc vn nombre quarré ne mesurera pas vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si vn nombre cube ne mesure point vn

nombre cube, auſſi le coſté ne meſurera pas le coſté: que ſi le coſté ne meſure le coſté, auſſi le cube ne meſurera pas le cube.

Soient les nombres cubes A & B, dont les coſtez ſont C & D, & que A ne meſure pas B: Ie dis que le coſté C ne meſure pas auſſi le coſté D: & d'auantage que ſi le coſté C ne meſure pas le coſté D, auſſi le cube A ne meſurera pas le cube B.

A 8. B 17
C 2. D 3

Ceſte demonſtration ſe faict par l'impoſſible de la 15. prop. 8. Car par icelle, ſi le coſté meſuroit le coſté, auſſi le cube meſureroit le cube contre l'hypotheſe. Et pour le ſecond: Si le cube meſuroit le cube, auſſi le coſté meſureroit le coſté, par la ſuſdicte 15. p. 8. auſſi contre l'hypotheſe. Parquoy ſi vn nombre cube ne meſure pas vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans ſemblables, il y a vn moyen proportionnel: & le plan eſt au plan en raiſon doublee des coſtez de ſemblable raiſon.

Soient deux nombres plans ſemblables A & B, & leurs coſtez ſoient C, D, & E, F. Ie dis qu'entre iceux plans A & B ſe trouuera vn moyen proportionnel; & que A eſt à B en raiſon doublee de C à E, coſtez de meſme raiſon.

A 12. G 18. B 27.
C 6. D 2. E 9. F 3.

Car puis que les plans A & B ſont ſemblables, par la 21. def. 7. C ſera à D comme E à F ; & ſi A ſera le produict de C par D. Item B le produit de E par F, par la 17. def. 7. Maintenant que D multipliant E produiſe G; par la 17. p. 7. puis que D multipliant C & E produict A & G; A ſera à G, comme C à E, ou D à F (car puis que comme C à D, ainſi E à F, en permutant comme C à E, ainſi D à F.) Item E multipliant D, & F, produict G & B; partant iceux G & B ſeront l'vn à l'autre comme D à F: ainſi A, G, B, ſeront continuellement proportionnaux, en la raiſon de C à E, & partant G ſera vn moyen proportionnel entre A & B.

Quant à la ſeconde partie, elle eſt euidente: car puis que A, G, B, ſont continuellement proportionnaux, par la 10. def. 5. A eſt à B en raiſon doublée de A à G, qui eſt la meſme raiſon que de C à E, coſtez de ſemblable raiſon. Parquoy entre deux nombres plans ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres ſolides ſemblables, tombent deux moyens proportionnaux; & le ſolide eſt au ſolide en raiſon triplee des coſtez de ſemblable raiſon.

Soient deux nombres ſolides ſemblables A & A 30. M 60. N 120. B 240. I 6. L 12. K 24. C 2. D 3. E 5. F 4. G 6. H 10.

B, desquels les costez soient C, D, E, & F, G, H. Ie dis qu'entre A & B, on trouuera deux moyens proportionnaux, & que A est à B en raison triplee de C à F costez de mesme raison.

Car I soit le produict de C multiplié par D, K le le produict de F par G, L le produict de F par D, & M & N produicts de L par E & H.

Maintenant puisque par la 21 def. 7. C, D, E, sont l'vn à l'autre comme F, G, H: aussi en permutant, ils seront proportionnaux, c'est à dire que comme C sera à F, ainsi D sera à G, & E à H. Et par la 17. prop. 7. puis que D multipliant C & F, produict I & L, iceux I & L seront l'vn à l'autre comme C à F, c'est à dire comme D à G, ou E à H. Par mesme discours F multipliant D & G, produict I & K, iceux seront donc aussi l'vn à l'autre comme D à G; & partant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D à G, ou C à F, ou E à H. Pareillement puis que le solide A, est le produict des trois nombres C, D, E; & I, le produict de C par D, aussi A sera le produict de I par E: & par mesme discours B sera le produict de K par H, & par la 17. prop. 7. E multipliant I & L, produict A & M, en la raison de I à L: & par mesme discours L multipliant E & H, produict M & N en la raison de E à H, qui est la mesme que de I à L; aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront aussi en la raison de L à K, qui est la mesme que de I à L. Et partant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est à dire de C à F; & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

Pour la seconde partie, elle est euidente, car puis que les quatre nombres A, M, N, B, ont esté prouuez conti

continuellement proportionnaux en la raison de C à F, par la 10. def. 5. A est à B en raison triplee de A à M, c'est à dire comme C à F, costez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres solides semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si entre deux nombres, tombe vn moyé proportionnel: iceux seront nombres plans semblables.

Soient deux nombres A, & A 12. C 18. B 27. B, entre lesquels tombe C, D 2. E 3. F 6. G 9. moyen proportionnel. Ie dis que A & B sont nombres plans semblables.

Car ayant pris D & E les plus petits termes en la raison de A, C, B; iceux D & E mesureront A & C l'vn comme l'autre, par la 21. prop. 7. Ils mesureront aussi egalement C & B, qui sont en la mesme raison. Donc que D & E mesurent A & C selon le nombre F; & qu'ils mesurent aussi C & B selon le nombre G. Parquoy F multipliant D & E, sera produict A & C, par la 9. com. sent. Item G multipliant les mesmes D & E, sont produicts C & B. Veu donc que E multipliant F & G faict C & B; comme C sera à B, ainsi F à G par la 17. p. 7. Mais comme C est à B, ainsi estoit D à E. Donc comme D sera à E, ainsi F sera à G; & en permutant comme D sera à F, ainsi E à G. Et puis que F multipliant D a faict A, iceluy A sera vn plan duquel les costez sont D, F. Item pource que G multipliant E a faict B; B sera le plan

duquel E & G ſont les coſtez. Mais ces coſtez ont eſté demonſtrez proportionnaux, c'eſt à dire D eſtre à F, comme E à G. Donc par la 21. def. 7. A & B ſeront plans ſemblables. Parquoy ſi entre deux nombres tombe vn moyen proportionnel, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux; iceux ſeront nombres ſolides ſemblables.

Soient les deux nombres A & B, entre leſquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux C & D. Ie dis qu'ils ſont nombres ſolides ſemblables.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soient trouuez par la 2. prop. 8. les trois nombres E, F, G, les plus petits en la raiſon de A, C, D, B.

A 16. C 24. D 36. B 54.
E 4. F 6. G 9.
H 2. I 2. M 4. K 3. L 3. N 6.

Veu donc qu'entre E & G tombe vn moyen proportionnel F, par la preced. prop. E & G ſeront plans ſemblables: Soient leurs coſtez H, I; & K, L, leſquels ſeront proportionnaux par la 21. def. 7. & puiſque E, F, G ſont les plus petits en la raiſon de A, C, D, ils les meſureront egalement par la 21. prop. 7. ſoit ſelon le nombre M: c'eſt à dire que E, F, G, eſtans multipliez par M produiſent A, C, D: item par le meſme diſcours E, F, G, meſureront egalement les trois nombres C, D, B, chacun le ſien: ſoit ſelon le

nombre N, c'est à dire que N multipliant E, F, G, produise C, D, B. Il est donc euident, que A & B sont nombres solides, desquels les costez sont H, I, M; & K, L, N. Mais pour autant que M & N multiplians F, produisent C & D, par la 18. p. 7, M sera à N en la raison de C à D, & C est à D en mesme raison que E à F par la 17. p. 7. pource que N multipliant E & F a produict iceux C & D; mais aussi E est à F en la mesme raison que H à K, ou I à L. Donc aussi H sera à K, ou I à L comme M à N; & en permutant H sera à I, comme K à L; & I à M comme L à N: & partant les costez H, I, M sont proportionnaux aux costez K, L, N; & par la 21. def. 7. A & B seront nombres solides semblables: Parquoy si entre deux nombres tombent deux moyens continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit quarré; le troisiesme sera aussi quarré.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, desquels le premier A soit quarré: Ie dis que le troisiesme C est aussi quarré. A 4. B 6. C 9.

Car puisque entre A & C tombe vn moyen proportionnel, par la 20. prop. de ce liure, ils seront plans semblables; & partant l'vn d'iceux estant quarré, aussi sera l'autre. Si donc trois nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres ſont continuellement proportionnaux, & que le premier ſoit cube, auſſi le quart ſera cube.

Soient quatre nombres A 8. B 12. C 18. D 27. continuellement proportionnaux, A, B, C & D, le premier deſquels A ſoit cube: Ie dis que le quatrieſme D eſt auſſi cube.

Car puiſque entre A & D tombe deux moyens proportionnaux B & C, par la 21. prop. de ce liure, iceux A & D ſeront ſolides ſemblables: mais l'vn eſt cube, & partant auſſi ſera l'autre. Parquoy ſi quatre nombres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si deux nombres ſont l'vn à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, & que l'vn d'iceux ſoit quarré, auſſi ſera l'autre.

Soient deux nombres A & B, leſquels ſoient entr'eux, comme le quarré C au quarré D, & ſoit A quarré. Ie dis que B eſt auſſi quarré.

A 16. F 24. B 36.
C 4. E 6. D 9.

Car puisque A est à B comme C à D; & par la 11. p. 8. il tombe entre C & D, vn moyen proportionnel, sçauoir est E; il en tombera aussi vn entre A & B par la 8. prop. 8. & soit F. Veu donc que les trois nombres A, F, B, sont continuellement proportionnaux, & le premier A est quarré; aussi par la 22. prop. 8. le troisiesme B sera quarré. Parquoy si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Il appert des choses cy-dessus dictes, que la raison de quelque nombre quarré que ce soit à quelconque nombre non quarré, ne peut estre exhibee en deux nombres quarrez: Car si elle y estoit exhibee, par la 24. proposit. 8. les deux premiers nombres ayans la mesme raison que les quarrez de la raison exhibee seroient aussi quarrez, puis que l'vn est posé quarré. Ce qui est absurde: car l'vn est posé non quarré. D'où vient que les nombres ayans la raison double, ne sont comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres cy 4. 8. 16. 32, &c. seroient quarrez; d'autant que 4. estant quarré, par la 24. proposit. 8. aussi 8 seroit quarré: donc aussi 16 & 32. &c. Ce qui est absurde. Car entre 4 & 8. & entre 8 & 16. & entre 16 & 32, &c. tomberoit vn moyen proportionnel, s'ils estoient quarrez par la 11. prop. 8. & nous auons demonstré au Scholie de la 8. prop. 8. qu'il ne peut tomber de moyen prop. entre quelconques nombres de la raison double.

Semblablement les nombres en raison quintuple, ne sont aussi comme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y estoient, par la 11. proposit. 8. il tomberoit entre iceux vn milieu proportionnel: donc aussi entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raison quintuple par la 8. prop. 8. Ce qui est impossible, comme nous auons demonstré au Scholie de la 8. prop. 8.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres ſont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube, & que l'vn d'iceux ſoit cube, auſſi ſera l'autre.

Que A ſoit à B, comme le cube C au cube D, & que A ſoit cube: Ie dis que B eſt auſſi cube.

A 8. G 12. H 18. B 27.
C 64. E 96. F 144. D 216.

Car puiſque A eſt à B comme C à D, il tombera deux moyens proportionnaux entre les deux cubes C & D par la 12. prop. de ce liure, leſquels ſoient E & F; Mais par la 8. prop. 8. il en tombera auſſi deux entre A & B, & ſoient iceux G & H. Veu donc que les quatre nombres A, G, H, B ſont continuellement proportionnaux, & que le premier A eſt cube, auſſi ſera le quatrieſme B par la 23. prop. 8. Parquoy ſi deux nombres ſont l'vn à l'autre comme nombre cube à nõbre cube, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il appert auſſi des choſes cy deſſus, que la raiſon de quelque nombre cube que ce ſoit à quelconque nombre non cube, ne ſe peut exhiber par deux nombres cubes.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Les nombres plans ſemblables, ſont l'vn à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient deux nõbres plans semblables A & B. Ie dis que A sera à B comme nombre quarré à nombre quarré.

A 20. C 30. B 45. D 4. E 6. F 9.

Car par la 18. p. 8. il tombera entre A & B vn moyẽ prop. & soit C: si donc on prend les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raison cõtinuë de A, C, B, les extremes D & F seront quarrez par le corol. de la 2. prop. 8. Parquoy puis qu'en raison egale A est à B, comme D à F, il est manifeste que A est à B comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à sçauoir comme le nombre quarré D au nombre quarré F. Parquoy les nombres plans semblables sont entre-eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Clauius a demonstré la conuerse de ceste prop. c'est à sçauoir:

Que les nombres qui sont l'vn à l'autre, comme nõbre quarré à nõbre quarré, sont plans semblables.

Car les nombres A & B estans entr'eux, comme les quarrez D & F, par la 11. prop. 8. Il tombera vn moyen prop. entre iceux quarrez; & ainsi vn entre A & B, par la 8. prop. 8. & partant A & B sont plans semblables.

Et par cecy est manifeste que les nombres plans qui ne sont semblables, ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Les nombres solides semblables, sont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient deux nombres solides semblables A, & B. Ie dis que A sera à B, comme nombre cube à nombre cube.

A 16. C 24. D 36. B 54.
E 8. F 12. G 18. H 27.

Car par la 16. prop. 8. entre A & B tomberont deux moyens proportionnaux, & soient iceux C & D. Que si on prend les plus petits termes de la raison de A à C, & qu'en la raison d'iceux on trouue, par la 2. prop. 8. les quatres nombres en continuelle proportion E, F, G, H; les extremes E & H seront cubes par le corol. de la 2. propo. 8. & en raison egale comme E à H, ainsi A à B: Parquoy les nombres solides semblables sont l'vn à l'autre, &c. Ce qui estoit à demonstrer.

SCHOLIE.

Clauius demonstre aussi la conuerse de ceste proposit. sçauoir est:

Que les nombres qui sont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube, sont solides semblables.

Car les nombres A & B, estans entr'eux, comme les cubes E & H, par la 12. p. 8. Il tombera deux moyens prop. entre les nombres cubes E & H, Il en tombera aussi deux entre A & B par la 8. prop. 8. & partant par la 21. prop. 8. A & B sont solides semblables.

Il est euident par toutes les choses cy-dessus dictes, qu'aucuns nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne sont plans, ou solides semblables. Car s'ils estoient plans semblables, par la 18. prop. 8. vn moyen proportionnel tomberoit entr'eux, ce qui ne se peut faire, comme il a esté demonstré au Scholie de la 8. prop. 8. Ils ne

seront aussi solides semblables, puis qu'entre iceux ne peuuent tomber deux moyens prop. car autrement il en tomberoit aussi deux entre les plus petits nombres des mesmes raisons par la 8.p.8. Ce qui ne se peut faire, pource qu'iceux sont seulement distans entr'eux de l'vnité ou du binaire, comme il a esté dict au susdit Scholie, entre lesquels il certain, que deux nombres moyens prop ne peuuent tomber.

Semblablement deux nombres premiers, quels qu'ils soient, ne peuuent estre plans, ou solides semblables, pource qu'ils ne peuuent auoir les costez proportionnaux. Car quelque nombre plan que ce soit estant nombre premier, a seulement soy-mesme & l'vnité pour costez, encore improprement. Comme ces nombres plans 7 & 13, desquels les costez sont 7,1; & 13,1, puis qu'ils sont produits de la multiplication d'iceux costez, lesquels appert n'estre proportionnaux. Et le nombre solide, qui aussi est nombre premier, a seulement, pour costez soy-mesme, & deux vnitez; & par consequent il est manifeste qu'ils ne peuuent estre proportionnaux.

Pareillement deux nombres premiers entr'eux, n'estans quarrez, ou cubes, ne peuuent estre plans, ou solides semblables: Car s'ils estoient tels, par la 18. ou 19. p. 8. tomberoit entre iceux, vn ou deux moyens prop. & puis que les extrémes sont posez premiers entr'eux; tous les trois, ou les quatre seront premiers entr'eux, pource que aucun nombre ne sera commune mesure d'iceux, les extrémes n'en ayans point: Parquoy il est euident par la 23.p.7. qu'ils seront les plus petits en leur prop. Et partant par le corol. de la 2. p.8. les deux extrémes seront quarrez, ou cubes. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez n'estre quarrez ny cubes.

De ces choses s'ensuit que s'il y a deux nombres plans, ou solides semblables, desquels le moindre soit premier, il mesurera le plus grand. Car autrement par la 31.p.7. iceux deux nombres proposez seroient premiers entr'eux: & partant

(*comme nous venons de prouuer*) *ils ne seroient plans ou solides semblables. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez tels.*

De cecy est euident que deux nombres premiers entr'eux, desquels le moindre est premier, ne peuuent estre plans, ou solides semblables. Car s'ils l'estoient, le moindre mesureroit le plus grand, comme appert cy dessus. Veu donc qu'il se mesure aussi soy-mesme, ils ne seroient premiers entr'eux, mais composez: Ce qui est contre l'hypothese.

Parquoy il est facile de trouuer deux nombres plans, ou solides non semblables. Car si on prend deux nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente; ou certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, desquels l'vn ny l'autre soit quarré, ou cube; il est euident par ce que dessus, qu'ils seront plans, ou solides dissemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, desquels l'vn soit quarré, & l'autre non quarré, comme 16 & 20, ils ne sont plans semblables. Car autrement par la 26. p. 8. ils seroient comme quarré à quarré: & 16 estant quarré, par la 24. p. 8. 20 seroit aussi quarré, contre l'hypothese. Par mesme raison si de deux nombres, l'vn est cube, & l'autre ne l'est pas; comme 27 & 40. ils ne sont pas solides semblables. Car s'ils l'estoient, par la 27. p. 8. ils seroient comme cube à cube; & 27 estant cube par la 25. p. 8. 40 seroit aussi cube, contre l'hypothese.

Fin du huictiesme Element.

ELEMENT NEVFIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

Si deux nombres plans ſemblables ſe multiplient l'vn l'autre, le produict ſera quarré.

SOIENT deux nombres plans ſemblables A & B, leſquels ſe multiplians mutuellement, produiſent C. Ie dis que C eſt quarré. Car A ſe multipliant ſoy-meſme produict D quarré. Et puiſque A multipliant A & B a produict D & C, comme A ſera à B, ainſi D à C, par la 17. p. 7. Mais A & B eſtans plans ſemblables, il tombera entr'eux vn moyen proportionnel par la 18. p. 8. Il en tombera donc auſſi vn entre D & C, par la 8. p. 8. & ſoit E. Et puiſque des trois nombres continuellement proportionnaux D, E, C, le premier D eſt quarré par la conſtruction; le tiers C ſera auſſi quarré par la 22. p. 8. Parquoy ſi deux nombres plans

A 4. B 9.
D 16. E 24. C 36.

ſemblables ſe multiplient l'vn l'autre, le produict ſera quarré. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre produiſent vn nombre quarré, iceux ſeront plans ſemblables.

Soient deux nombres A & B qui ſe multiplians l'vn l'autre, produiſent C quarré. Ie dis que A & B ſont plans ſemblables.

A 4. B 9. D 16. C 36.

Car que A ſe multipliant ſoy-meſme produiſe D quarré. Veu donc que A multipliant A & B a produict D & C, comme A ſera à B, ainſi D à C par la 17. p. 7. Et par la 11. p. 8. entre les quarrez D & C tombe vn moyen proportionnel ; Il en tombera donc auſſi vn entre A & B, par la 8. p. 8. & partant par la 20. p. 8. A & B ſeront plans ſemblables. Parquoy ſi deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THOR. 3. PROP. III.

Si vn nombre cube ſe multiplie ſoy-meſme, le produict ſera cube.

Soit le nombre cube A, lequel ſe multipliant ſoy-meſme produiſe B. Ie dis que B eſt nombre cube.

A 8. E 16. D 4. F 32. C 2. B 64. *Vnité.*

Car ſoit C coſté du cube A : &

de C multiplié en soy, soit produict D; il est manifeste que C multipliant D, produict le cube A. Veu donc que C multipliant soy-mesme a faict D, par la 7.com. sent. C mesurera D par C. Mais par la 5.com. sent. l'vnité mesure aussi C par C. L'vnité sera donc mesme partie de C, que C de D; & partant comme l'vnité est à C, ainsi C à D par la 20. d. 7. derechef puisque C multipliant D a faict A, par la 7. com. sent. D mesurera A par C. Mais aussi C mesure D par C. Donc C est mesme partie de D, que D de A; & partant comme C à D, ainsi D à A; mais comme C à D, ainsi estoit l'vnité à C. Donc comme l'vnité à C, ainsi C à D, & D à A: ainsi entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Derechef pource que A mesure B par A; (car B a esté faict de A multiplié en soy) & que l'vnité mesure aussi A par A; l'vnité sera mesme partie de A, que A de B: partant comme l'vnité sera à A, ainsi A sera à B. Parquoy puis qu'entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D; par la 8.p.8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux E & F. Et veu que les 4. nombres A. E, F, B sont continuellement proportionnaux, & que A premier est cube, aussi B quatriesme sera cube par la 23. prop. 8. Parquoy si vn nombre cube se multiplie soy-mesme, le produict sera cube. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si vn nombre cube multiplie vn nombre cube, le produict sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produiſe C: Ie dis que C eſt auſſi nombre cube.

A 8. B 27. D 64. C 216.

Car ſi on prend D, produict de A multiplié par ſoy-meſme, il ſera cube par la prop. precedente: & pource que A multipliant B, & ſoy-meſme, a produict C & D; il y aura telle raiſon de D à C, que de A à B, par la 17. p. 7. Et par la 12. p. 8. il tombera deux moyẽs proportionnaux entre A & B: il en tombera donc auſſi deux entre D & C, par la 8. p. 8. Et partant D eſtant cube, par la 23. p. 8. C ſera auſſi cube. Si donc vn nombre cube multiplie vn nombre cube, le produict ſera cube. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, produict vn nombre cube, le multiplié ſera auſſi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produiſe le nombre cube C. Ie dis que B multiplié eſt auſſi nombre cube.

A 8. B 27. D 64. C 216.

Car ſi on prend D, produict de A multiplié par ſoy-meſme, comme en la precedente: A ſera à B comme D à C, & par la 8. p. 8. entre A & B ſe trouueront deux moyens proportionnaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 23. p. 8. A eſtant cube, B multiplié ſera auſſi nombre cube. Parquoy, ſi vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vn nombre ſe multipliant ſoy-meſme produict vn nombre cube, iceluy nombre ſera auſſi cube.

Soit le nombre A, lequel multiplié par ſoy-meſme produiſe le nombre cube B. Ie dis que A eſt auſſi nombre cube. A 8. B 64. C 512.

Car ſi on prend C, produict de A multiplié par B, il ſera cube par la definition du nombre cube; & par la 5.p. 9. A ſera auſſi cube. Si donc vn nombre ſe multipliant ſoy-meſme produict vn nombre cube, iceluy nombre ſera auſſi cube. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Vn nombre compoſé eſtant multiplié par quelque autre, le produict ſera ſolide.

Soit le nombre compoſé A, lequel eſtant multiplié par quelque nombre B produiſe C. Ie dis que C eſt nombre ſolide. A 6. B 5. C 30. D 2. E 3.

Car puiſque A eſt compoſé, quelqne nombre outre l'vnité le meſurera par la 13.d.7. Que D meſure donc A par E. Ce qu'eſtant poſé, D multipliant iceluy E, produira A par la 9.com.ſent. Et puiſque B

multipliant A, à produict C, iceluy C ſera Procrée de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B, partant par la 17.d.7. il ſera nombre ſolide, duquel les coſtez ſont D, E, B. Parquoy vn nombre compoſé eſtant multiplié par quelque autre, le produict ſera ſolide. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on vondra continuellement proportionnaux, le troiſieſme depuis l'vnité ſera quarré, & tous les autres qui en laiſſeront vn: Mais le quatrieſme ſera cube, & tous les ſuyuans qui en laiſſeront deux: & le ſeptieſme ſera cube & quarré enſemble, & tous les ſuyuans qui en laiſſeront cinq.

Soiēt *Vnité*. A. B. C. D. E. F. G. H. I. tant de nōbres 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683. qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité, A, B, C, D, E, F, G, H, I. Ie dis que le troiſieſme B ſera quarré, enſemble tous les autres qui en laiſſeront vn de l'ordre, comme D, F & H: en apres que le quatrieſme C eſt cube, & tous les autres en laiſſant deux nombres, comme F & I. Pareillement que le ſeptieſme F eſt cube & quarré enſemble, comme auſſi tous autres qui pourroient ſuiure en laiſſant touſiours cinq nombres.

Pour

Pour la premier partie : puis que les nombres sont continuellement proportionnaux, comme l'vnité mesure A selon les vnitez qui sont en A, par la 5. com. sent. ainsi chacun mesurera son suiuant selon les vnitez de A : partant B troisiesme qui sera en ce faisant le produict de A multiplié par soy, sera quarré: & par la 22. p. 8. puis que B, C, D, sont continuellement proportionnaux, & B est quarré, aussi D sera quarré. Par mesme discours en prenant les trois continuellement proportionnaux D, E, F; veu que D est quarré, aussi F sera quarré; & ainsi de tous les autres.

Pour la seconde partie; puis que A multiplié par soy produict B; & B par A produict C; Il est euident par les definitions du 7. que C sera cube, & par la 23. p. 8. C, D, E, F, estans continuellement proportionnaux, F sera aussi cube: par mesme raison, estans prins les quatre continuellement proportionnaux F, G, H, I, puis que F est cube, aussi I sera cube; & ainsi de tous les autres, en laissant deux, si d'auantage y en auoit.

Pour la troisiesme partie. Il est euident par les deux precedentes parties que F a esté prouué & quarré & cube, il en sera ainsi de tous les autres. Si donc depuis l'vnité il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit

l'vnité ſoit quarré, auſſi tous les autres ſeront quarrez: que s'il eſtoit cube, auſſi les autres ſeront cubes.

Soient tant de nombres qu'on voudra cõtinuellement proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D. Ie dis premierement que ſi le premier A eſt quarré, que tous les autres ſeront auſſi quarrez.

Vnité.	A.	B.	C.	D.
1.	4.	16.	64.	256.

Car il eſt euident comme en la precedente, que puis qu'iceux nombres A, B, C, D, ſont continuellement proportionnaux, comme l'vnité meſurera A par les vnitez qui ſont en A, ainſi A meſurera auſſi B par les vnitez qui ſont en A; & par conſequent B ſera nombre quarré: mais A eſt auſſi quarré par l'hypotheſe; & par la 22. p. 8. C ſera auſſi quarré: & par la meſme raiſon B eſtant quarré, auſſi ſera D. Et ainſi de tous les autres.

Ie dis en ſecond lieu que ſi A eſt cube, auſſi tous les autres ſeront cubes: Car il eſt euident que A meſurera B par ſoy-meſme comme en la premiere partie: C'eſt à dire que A multiplié par ſoy produira B, lequel eſtant cube, B ſera auſſi cube par la 3. p. 9. Mais tous les ſuiuans ſont en la raiſon de A à B, & par la 23. p. 8. ils ſeront tous cubes. Si donc depuis l'vnité il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Vnité	A.	B.	C.	D.
1.	8.	64.	512.	4096.

THEOR. 10. PROP. x.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres

qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré: aussi pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisiesme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent vn. que si celuy qui suit l'vnité n'est nombre cube; aussi pas vn autre ne sera cube, sinon le quatriesme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent deux.

Soient tant de nombres qu'on voudra	*Vnité*,	A.	B.	C.	D.	E.	F.
	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

continuellement proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D, E, F, & que A qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré. Ie dis pour la premiere partie, que pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisiesme B, ou D, ou F en laissant C & E.

Car par la 8. prop. 9. B, D, F sont quarrez: Que si quelqu'vn veut dire qu'il y en ayt d'autres comme C, il faudroit par la 22. p. 8. que A fust aussi nombre quarré (estans C, B, A, continuellement proportionnaux & C quarré) ce qui est contre l'hypothese. Par mesme discours on monstrera que pas vn autre ne peut estre quarré, sinon ceux qui ont esté exceptez.

Pour la seconde partie: si A n'est cube; aussi

pas vn autre ſera cube, ſinon C & F, & tous les autres qui en laiſſeront deux.

Car par la 8. p. 9. C & F ſont cubes : que ſi quelqu'vn veut dire que D ſoit auſſi cube ; il faudroit par la 23. p. 8. que A le ſoit contre l'hypotheſe. Par meſme deduction on monſtrera tous ceux qui ne peuuent eſtre cubes. Si donc depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux : le plus petit meſure le plus grand ſelon quelqu'vn de ceux qui ſont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A ſoient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, F. Ie dis que le plus petit nombre B meſurera le plus grand F par quelqu'vn des nombres C, D, E.

A. B. C. D. E. F.
1. 3. 9. 27. 81. 845.

Car d'autant que A, B, C, D, E ſont en meſme raiſon que B, C, D, E, F, en raiſon egale l'vnité A ſera à E, comme B eſt à F. Et par les def. du 7. comme l'vnité A meſure E par E : ainſi B meſurera F par E. Le meſme peut-on dire des autres. Parquoy ſi depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Il appert par ce que dessus que le plus grand nombre est autant esloigné du grand qui le mesure, que l'vnité est distante d'iceluy nombre par lequel le moindre mesure le grand : & ce d'autant qu'il y doit auoir vne mesme raison du moindre nombre au plus grand, que de l'vnité à celuy par lequel le moindre mesure le grand, comme il appert icy.

Ainsi B mesurera F par D ; & C mesurera F par C, c'est à dire par soy-mesme, &c. Pour ce que tant entre B & F, qu'entre l'vnité & D se trouuent trois nombres : & tant entre C & F, qu'entre l'vnité & C sont interposez deux nombres.

	Vnité	A.	B.	C.	D.	E.	F.
	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Il appert encor que quelconque de ces nombres, multiplié par soy-mesme en produict vn autre, qui entre les proportionnaux est autant esloigné d'iceluy, comme il est distant de l'vnité. Mais si vn petit nombre en multiplie vn grand, celuy qui en prouiendra sera autant esloigné du grand que le moindre de l'vnité : Car si vn nombre qui en mesure vn autre, multiplie celuy par lequel il le mesure, sera produict celuy-là qui est mesuré par la 9. com. sent. Ainsi C multipliant soy-mesme produict F, qui est autant esloigné de C qu'iceluy C de l'vnité. Pareillement B multipliant D, sera le mesme F, pour ce que D mesure iceluy nombre F par B, &c.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux : Autant de nombres

premiers mesureront le nombre d'apres l'vnité, qu'il y en aura qui mesureront le dernier.

Soient depuis l'vnité A, tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, B, C, D, E. Ie dis qu'autant de nombres premiers se trouueront mesurer le dernier E, qu'il y en a qui mesurent B, lequel suit l'vnité, c'est à dire que si quelque nombre premier que ce soit, comme F, mesure iceluy nombre E, il mesurera aussi B.

A. B. C. D. E. F.
1. 3. 9. 27. 81. 3.

Car si ledict nombre premier F mesurant E dernier, ne mesure pas aussi B; B & F seront nombres premiers par la 31. p. 7. Et d'autant que B multiplié par soy produict C; comme nous auons dit au Scholie de la prop. preced. C & F seront aussi premiers par la 27. p. 7. Item B multipliant C produict D; D & F seront donc aussi premiers par la 26. p. 7. Pareillement B multipliant D produict E; partant E & F seroient aussi nombres premiers, & par ainsi F ne mesureroit pas E: ce qui est contre l'hypothese; Donc F mesuroit aussi B. Parquoy si depuis l'vnité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité soit premier: Le plus grand ne sera mesuré par aucun autre

nombre, sinon par ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A 1. B 3. C 9. D 27. E 81.
A soient tant de K 00. I 00. H 00. G 00.
nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, & que B qui suit l'vnité soit premier. Ie dis que le plus grand nombre E ne sera mesuré par aucun autre que d'iceux B, C, D.

Autrement, s'il est possible, que quelque autre nombre G mesure E; il est manifeste que G ne peut estre autre nombre premier que B, autrement il faudroit par la prop. preced. qu'il mesuraſt B, qui a esté posé nombre premier: G ne sera donc premier, mais composé, & mesuré par quelque nombre premier par la 33. p. 7. qui ne peut estre autre que B; d'autant qu'il mesurera E, par la 11. com. sent. & par la prop. preced. il faudroit qu'il mesuraſt aussi B nombre premier: ce qui est absurde. Il n'y a donc point d'autre nombre premier que B, qui mesure G. Que maintenant B mesure G par H: & puis que par les choses dictes au Scholie de la 11. prop. de ce liure, B multipliant D & H produict E & G, par la 17. p. 7. comme E sera à G, ainsi D à H: mais G mesure E; donc aussi H mesurera D. On prouuera comme dessus qu'il ne peut estre premier ny mesuré par vn autre nombre premier que B: Car si H estoit premier, mesurant D, il mesureroit aussi B: ce qui ne se peut faire, ayant esté posé premier. Que si H est composé, celuy nombre premier qui le mesurera sera B, ou si c'est vn autre, cest autre mesurera aussi D & celuy qui mesure D, c'est à sçauoir B, par la 11. cõ. sent. ce qui est absurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui mesure H; & posãt que ce soit par le nom-

bre I. On prouuera aussi comme dessus, que cõme H mesure D, ainsi I mesure C, & que I ne peut estre nõbre premier, ny mesuré par aucun autre nombre premier sinon B. Donc que I mesure C par le nombre K: par mesmes raisons, comme I mesure C, ainsi K mesurera B nombre premier; il faut donc qu'à tout le moins il soy soit egal; ce qui est impossible; d'autant que B est moyen proportionnel entre K & I, par la 20. p. 7. puis que C est produict de K multiplié par I, & qu'il est aussi le produict de B multiplié par soy-mesme. Partant aucun nombre ne mesurera, E sinon B, C, D, qui le mesurent, par la 11. p. 9. Parquoy si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 14. PROP. XIIII.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent estre mesurez par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, que ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre de tous ceux qui peuuẽt estre mesurez par les 3. nombres premiers B, C, D. Ie dis qu'aucun nombre premier autre que B, ou C, ou D, ne mesurera A.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
30.	2.	3.	5.	0.	0.

Autrement, s'il est possible, que E autre nombre premier mesure A par F: donc E multiplié par F

produira A, lequel eſt meſuré par B, C, & D, & par la 32.p.7. iceux B, C, D, meſureront l'vn ou l'autre de E, ou F: Or ils ne meſureront pas E, autre nombre premier que pas vn d'iceux, ils meſureront donc F, lequel eſtant plus petit que A, iceluy A ne ſeroit le plus petit de ceux qui peuuent eſtre meſurez par B, C, D. Donc E ne pouuoit meſurer A. Parquoy le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent eſtre meſurez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

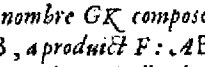
SCHOLIE.

Nous demonſtrerons icy (apres Commandinus & Clauius) en nombres, les 10 premiers theoremes, leſquels ſont demonſtrez en lignes au ſecond liure.

I.

S'il y a deux nombres, l'vn ou l'autre deſquels ſoit couppé en tant de parties qu'on voudra, le nombre plan compris ſous iceux deux nombres, eſt egal aux nombres plans contenus du nombre indiuiſé, & de chaque partie d'iceluy qui eſt couppé.

Soient deux nombres, AB & C, deſquels AB eſt diuiſé en AD, DE, EB, & ſoit faict F de C en AB: Item GH de C en AD, & HI, de C en DE, & IK de C en EB: Ie dis que F eſt egal aux nombres GH, HI, IK, c'eſt à dire à tout le nombre GK compoſé d'iceux. Car puiſque C multipliant AB, a produict F: AB meſurera F par C, c'eſt à dire que AB ſera la partie d'iceluy F, denommee par C. Par la meſme raiſon AD ſera la partie de GH: & DE de HI: & EB de IK, denommee par C, ſçauoir eſt, la meſme que AB de F. Mais il eſt euident par la 5. prop. 7. que AB eſt la meſme partie de GK, que AD de GH; par-



quoy auſſi AB *ſera meſme partie de* GK, *que* AB *de* F; *& partant par la* 4. *com. ſent.* F *&* GK *ſeront egaux entr'eux. Ce qui eſtoit proposé,*

II.

Si vn nombre eſt couppé en deux parties, les nombres plans compris ſous le tout, & vne chacune partie, ſont egaux au nombre quarré du tout.

Car le nombre AB *ſoit diuiſé en* AC, CB.
Ie dis que les nombres qui ſeront produicts du total AB, *és parties* AC, CB *ſeront enſemble egaux au quarré de* AB. *Car eſtant pris le nombre* D *egal à* AB, *par le* 1. *theo. le nombre faict de* D; *c'eſt à dire de* AB *en* AB, *ſçauoir eſt le quarré d'iceluy* AB, *ſera egal aux nombres qui ſeront produicts de* D, *c'eſt à dire de* AB *en* AC, *&* CB: *ce qui eſtoit proposé.*

A....C..B
D.....

Le meſme ſera demonſtré, ſi AB *eſt couppé en plus de deux parties, comme on peut veoir par la ſeconde figure icy appoſée. Car par la meſme raiſon, le nombre faict de* E, *c'eſt à dire de* AB *en* AB, *c'eſt à ſçauoir le quarré de* AB *ſera egal aux nombres, qui ſeront produicts de* E, *c'eſt à dire de* AB, *en chaſque partie* AC, CD, *&* DB.

A...C..D.B
E.....

III.

Si vn nombre eſt couppé en deux parties; le nombre plan compris du total, & de l'vne des parties, eſt egal à celuy-là contenu des parties, & au quarré faict d'icelle partie premierement priſe.

Soit le nombre AB *diuiſé en* AC, CB.
Ie dis que le nombre plan produict de AB *en la partie* AC, *eſt egal à celuy faict des parties* AC, CB, *& au quarré d'icelle partie* AC. *Car eſtant pris le nombre* D *egal à la ſuſdicte partie* AC; *par le* 1. *theo. le nombre faict de* D, *c'eſt à di-*

A....C.....B
D....

ve de AC *en* AB *; ou (qui eſt le meſme) de* AB *en* AC, *ſera egal aux nombres faits de* D, *c'eſt à dire de* AC *en* CB, *& de* D, *c'eſt à dire de* AC *en* AC, *ſçauoir eſt le quarré de* AC. *Ce qui eſtoit propoſé.*

IIII.

Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties; le quarré faict du tout eſt egal aux deux quarrez faicts des deux parties, & a deux fois le nombre plan contenu d'icelles parties.

Soit le nombre AB *diuiſé en* AC, CB. A.....C....B
Ie dis que le nombre quarré faict de AB, *eſt egal aux quarrez des parties* AC, CB, *auec deux fois le nombre plan faict de* AC *en* CB. *Car par le* 2. *theo. le nombre quarré de* AB, *eſt egal aux nombres faicts de* AB *en* AC, *& en* CB. *Mais par le* 3. *theo. le nombre faict de* AB *en* AC, *eſt egal au nombre produict de* AC *en* CB, *& au quarré d'iceluy* AC: *Item le nombre produict de* AB *en* CB *eſt par meſme raiſon egal au nombre produict de* AC *en* CB, *& au quarré de* CB. *Donc le nombre quarré faict de* AB, *eſt pareillement egal aux nombres quarrez des parties* AC, CB, *& a deux fois le nombre faict de* AC *en* CB. *Ce qui eſtoit propoſé.*

V.

Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties egales, & en deux inegales; le nombre plan contenu des parties inegales, auec le quarré du nombre qui eſt entre les deux ſections, eſt egal au quarré faict de la moitié du nombre total.

Soit le nombre AB, *couppé en deux parties egales* AC, CB, *& en deux inegales* AD, DB. *Ie dis que le nombre plan compris des parties inegales* AD, DB, *auec le quarré du nombre* CD, *eſt egal au quarré du nombre* BC. *Car puis que par le theo. preced. le nombre quarré de* CB, *eſt egal aux quarrez des parties* CD, D A.....C...D..B

B, auec deux fois le nombre faict de CD, DB; & par le 3. theor. le nombre plan compris de CD, DB, ensemble auec le quarré de DB, est egal au nombre produict de CB en DB. sera faict que si ce nombre faict de CB, en DB, est pris pour le quarré de DB, auec le nombre faict de CD en DB, aussi le nombre quarré de CB, est egal à l'autre quarré de CD, ensemble à l'autre nombre faict de CD en DB, & au nombre produict de CB, c'est à dire de AC en DB: & partant par le 1. theor. le nombre faict du total AD en DB, est egal aux nombres produicts de CD en DB, & de AC en DB. Donc le quarré de CB, sera egal au quarré de CD, & au nombre faict de AD en DB. Ce qui estoit proposé.

VI.

Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & à iceluy est adiousté quelque autre nombre, le nombre qui est fait du tout auec l'adiousté en l'adiousté, auec le quarré de la moitié du nombre, est egal au quarré du nombre composé de la moitié & de l'adiousté.

Soit le nombre AB couppé en deux parties egales AC, CB, & à iceluy soit adiousté le nombre BD. Ie dis que le nombre faict du tout AB & de l'adiousté BD, comme vn seul, sçauoir est de AD en l'adiousté BD, auec le quarré de la moitié CB, est egal au quarré faict de la moitié CB & adiousté BD, comme vn seul, c'est à dire au quarré de CD. Car puis que par le 4. theor. le quarré de CD est egal aux quarrez des parties CB, BD, auec deux fois le nombre plan compris de CB, BD, c'est à dire aux quarrez des parties CB, BD, & aux nombres contenus de CB, BD, & de AC, BD: Mais par le premier theo. le nombre faict de AD en BD est egal aux nombres contenus sous CB, BD, & sous AC, BD, & sous AD, BD, c'est à dire au quarré de BD. Donc prenant le nombre faict de AD en DB, pour le quarré de la partie BD,

A... C... B..D

auec les nombres faicts de CB *en* BD, *& de* AC *en* BD, *le quarré de* CD *sera egal à l'autre quarré de* CB, *ensemble auec le nombre faict de* AD *en* BD: *c'est à dire que le nombre faict de* AD *en* BD, *auec le quarré de* CB, *est egal au quarré de* CD: *ce qui estoit proposé.*

VII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties, le quarré du tout auec le quarré de l'vne des parties, est egal à deux fois le nombre faict du tout en icelle partie, ensemble auec le quarré de l'autre partie.

Soit le nombre AB *couppé és parties* AC, CB. *Ie dis que le quarré de* AB, *auec celuy de la partie* CB, *est egal à deux fois le nombre faict de* AB *en* CB, *ensemble auec le quarré de l'autre partie* AC. A..... C....B

Car puisque par le 4. theor. le quarré de AB *est egal aux quarrez des parties* AC, CB, *& a deux fois le nombre faict d'icelles* AC, CB; *si on adiouste le commun quarré de* CB, *les quarrez de* AB, CB, *seront ensemble egaux aux quarrez de* AC, CB, CB, *auec deux fois le nombre produict de* AC *en* CB: *mais par le 3. theor. le nombre faict de* AC *en* CB *auec le quarré de* CB, *est egal au nombre produict de* AB *en* CB; *& partant le double de l'vn est egal au double de l'autre. Donc si pour le double du nombre faict de* AC *en* CB, *& quarré de* CB, *on prend le double du nombre produict de* AB *en* CB, *les quarrez des nombres* AB, CB *seront ensemble egaux à deux fois le nombre de* AB *en* CB, *auec le quarré de l'autre partie* AC. *Ce qui estoit proposé.*

VIII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties, quatre fois le nombre faict du tout en vne partie, auec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré du nombre composé du tout & de la partie premierement prise.

Soit le nombre AB *couppé és parties* AC, CB. *Ie dis que le nombre faict de* AB *en la partie* A....C...B...D

CB, *ensemble auec le quarré de l'autre partie* AC, *est egal au quarré du nombre composé de* AB *&* *de la partie* CB. *Car estant adiousté le nombre* BD *egal à* CB, *par le 4. theor. le quarré du tout* AD *est egal aux quarrez des nombres* AB, BD, *ensemble auec le nombre double de* AB *en* BD, *c'est à dire aux quarrez des nombres* AB, CB, *ensemble auec deux fois le nombre de* AB *en* CB: *Mais par le 7. theor. les quarrez de* AB, CB, *sont egaux à deux fois le nombre contenu de* AB, CB, *auec le quarré de* AC: *donc si pour les quarrez de* AB, CB, *on prend le nombre double de* AB *en* CB, *&* *le quarré de* AC; *le quarré faict de* AD *est egal à 4 fois le nombre faict de* AB *en* CB, *ensemble auec le quarré de l'autre partie* AC: *ce qui estoit proposé.*

IX.

Si vn nombre est couppé en deux parties egales, & en deux inegales; les quarrez faicts des parties inegales, sont doubles des quarrez faicts de la moictié, & de la section du milieu.

Soit le nombre AB *diuisé és parties egales* AC, CB; *& és inegales* AD, DB. A.....C...D..B *Ie dis que les quarrez des parties inegales* AD, DB, *sont doubles des quarrez de la moictié* AC, *& du nombre entre-moyen* CD. *Car puisque par le 4. theor. le quarré du nombre* AD *est egal aux quarrez des nombres* AC, CD, *ensemble auec deux fois le nombre faict de* AC *en* CD; *si on adiouste le commun quarré de* DB, *les quarrez des parties* AD, DB, *seront egaux aux quarrez des parties* AC, CD, DB, *ensemble auec deux fois le nõbre produict de* AC *en* CD, *c'est à dire de* CB *en* CD. *Mais par le 7. theor. les quarrez de* CB, *c'est à dire de* AC, *&* CD, *sont egaux au quarré de* DB, *&* *à deux fois le nombre de* CB *en* CD. *Donc si pour le quarré de* DB, *&* *deux fois le nombre faict de* CB *en* CD, *on prend les quarrez de* AC, CD, *les quar-*

rez de AD, DB *seront egaux au double des quarrez des parties* AC, CD ; *& partant ces quarrez-là sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.*

X.

Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & à iceluy on adiouste quelque autre nombre; le quarré du nombre composé d'iceux, & le quarré de l'adiousté, sont ensemble doubles des quarrez de la moictié, & de celuy faict du nombre composé d'icelle moictié & de l'adiousté.

Soit le nombre AB *diuisé en deux parties egales* AC, CB, *& à iceluy soit adiousté le nombre* BD. *Ie dis que le quarré du nombre* AD *composé du tout* AB, *& de l'adiousté* BD, *& le quarré d'iceluy nombre adiousté* BD, *sont ensemble doubles des quarrez faicts de la moictié* AC, *& de* CD, *composé de la moictié* CB *& de l'adiousté* BD. *Car puisque par le 4. theor. le quarré de* AD *est egal aux quarrez de* AC, CD, *& à deux fois le nombre produict de* AC, *c'est à dire de* CB *en* CD ; *si on adiouste le commun quarré du nombre* BD, *les quarrez des nombres* AD, BD *seront egaux aux quarrez des parties* AC, CD, BD, *ensemble auec deux fois le nombre produict de* CB *en* CD. *Mais par le 7. theor. les quarrez de* CB, *ou* AC, *&* CD *sont egaux au quarré de* BD, *& à deux fois le nombre faict de* CB *en* CD. *Donc si pour le quarré de* BD, *& deux fois iceluy nombre produict de* CB *en* CD, *on prend les quarrez des nombres* CB, CD, *c'est à dire des nombres* AC, CD : *les quarrez des nombres* AD, BD *seront egaux à deux fois les quarrez des nombres* AC, CD : *& partant ceux-là sont doubles de ceux-cy : ce qui estoit proposé.*

A.....C....B...D

THEOR. 15. PROP. XV.

Si trois nombres ſont continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont meſme raiſon auec iceux: le compoſé de deux tels que l'on voudra d'iceux, ſera premier à l'autre.

Soient les trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, les plus petits qui ſoient en la meſme raiſon: Ie dis que les deux enſemble A & B ſont premiers à C; & B, C enſemble premiers à A; & A, C enſemble à B.

A 9. B 12. C 16. D 3. E 4.

Car ſi on prend D & E les plus petits qui ſoient en la meſme raiſon par le ſcholie de la 35. prop. 7. il eſt euident par ce qui a eſté demonſtré à la 2. prop. 8. que A & C ſont les quarrez de D & E, & que B eſt le produict de D multiplié par E: & par le 3. theo. du ſcholie precedent D & E, comme vn ſeul nombre multiplié par D, produira A & B comme vn ſeul nombre. Mais D & E eſtans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. auſſi tous deux enſemble, ſeront premiers au ſeul E, par la 30. prop. 7. ou à ſon quarré C, par la 27. prop. 7. Et par la meſme propoſition D ſera premier à C, & par la 26. prop. 7. le produict de D & E comme vn ſeul nombre multiplié par D ſera premier à C. Mais nous auons monſtré que ce produict eſt egal au nombre compoſé de A & B: Donc auſſi A & B enſemble ſeront premiers à C.

En apres, puisque comme dessus le composé des deux nombres D, E est premier à chacune d'iceux, par la 26. prop. 7. le produit de D, E comme vn seul nombre multiplié par E sera premier à D. Mais par le susdict theor. iceluy produit est egal à C faict de E en soy, & au nombre B faict de D en E. Donc le nombre composé de ces deux B & C sera aussi premier à D; & partant aussi à A par la 27. prop. 7.

Finablement D & E estans premiers entr'eux par la 24. propos. 7. & premiers au composé des deux par la 30. propo. 7. leur produict B sera premier au composé des deux par la 26. prop. 7. & par la 27. pro. 7. le produict de D E comme vn seul nombre, multiplié par soy, sera premier à B. Mais par le 4. theo. du scholie precedent, iceluy produict de DE comme vn seul nombre multiplié en soy, est egal à A & C & deux fois B ensemble: donc A & C auec deux fois B, sont premiers à B. Or en ostant les deux fois B; il est manifeste que le reste A & C sera premier à B. Car autrement ils seroient composez, & leur commune mesure mesureroit aussi deux fois B; & par consequent aussi le composé de A & C & deux fois B, qui ne seroit en ce faisant premier à B, contre ce qui a esté demonstré cy-dessus. Donc le composé de A & C est premier à B. Parquoy si trois nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier

au second, ainsi le second à quelque autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux. A & B. Ie dis que comme A est à B, ainsi B n'est pas à quelque autre, c'est à dire qu'à A & B on ne peut trouuer vn troisiesme proportionnel.

A 3. B 5. C 00.

Autrement, s'il est possible, soit que comme A est à B, ainsi B soit à vn autre, c'est à sçauoir à C. Par la 23. prop. 7. A & B estans premiers, ils seront les plus petits qui soient en la mesme raison, & par la 21. prop. 7. A mesurera B, & B mesurera C. Mais aussi A mesure soy-mesme; donc A mesure iceux A & B: Ainsi A & B ne seroient premiers, contre l'hypothese. Donc il n'est pas comme A à B, ainsi B à C. Par mesme raison, il ne sera pas comme B à A, ainsi A à quelque autre. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellemẽt proportionnaux, desquels les extremes soient premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C, continuellement proportionnaux,

desquels les extremes A & C soient premiers entr'eux. A 4. B 6. C 9. D 00. Ie dis qu'il ne se peut faire que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre.

Car s'il est possible, comme A est à B, ainsi soit C à D. En permutant comme A sera à C, ainsi B à D: & par la 23. prop. 7. A & C estans premiers, ils seront les plus petits en leur raison: & par la 21. p. 7. ils mesureront egalement B & D; sçavoir est A iceluy B, & C iceluy D. Et pource que comme A à B, ainsi B à C; & A mesure B, aussi B mesurera C: & par la 11. comm. sent. A mesurera aussi C; & iceluy A mesurant soy-mesme; il mesurera iceux A & C premiers entr'eux: ce qui est absurde. A n'est donc pas à B, comme C à D. Par mesmes raisons, il ne sera pas comme C à B, ainsi A à quelque autre. Parquoy si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROB. 1. PROP. XVIII.

Deux nombres estans donnez, considerer si on en pourra trouuer vn troisiesme proportionnel à iceux.

Soient donnez les deux nombres A & B: Il faut considerer si à iceux on peut trouuer vn troisiesme nombre proportionnel. A 4. B 6. D 9. C 36. A 6. B 7. D 00. C 49.

La solution de ceste proposition est aisee. Car il n'y a qu'à considerer si C produict du second

nombre B multiplié par soy mesme, peut-estre mesuré, c'est à dire diuisé par le premier A: car s'il peut estre mesuré ou diuisé, comme en la premiere formule, il est euident par la 20. prop. 7. que le quotient sera troisiesme nombre proportionnel; sinon, on n'en trouuera point, puis que par la susdite 20. prop. 7. trois nombres estans prop. le produit des extremes doit estre egal au produict du milieu.

PROB. 2. PROP. XIX.

Estans donnés trois nombres, considerer si on pourra trouuer vn quatriesme proportionnel à iceux.

Soient donnez trois nombres A, B, C; & il faut considerer si à iceux on peut trouuer vn quatriesme proportionnel.

A 3. B 6. C 5. E 10. D 30.

La solution de ceste prop. est aussi aisee. Car il faut seulement considerer si D, qui est le produit des second & troisiesme nombre B & C peut estre mesuré par le premier A: s'il peut estre mesuré ou diuisé, il est euident par la 19. prop. 7. que le quotient E sera quatriesme prop. sinon, on n'en trouuera point, puis que par la susdicte 19. propos. 7. quatre nombres estans prop. le produict du second & troisiesme doit estre egal au produict du premier & quatriesme.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres pre-

miers qu'on propose, il s'en trouuera encores d'autres.

Soit quelconque multitude de nombres premiers A, B, C. Ie dis qu'il s'en trouuera encores d'autres.

A..2 B...3 C.....5
D.....E.F
G.....

Car si on trouue le nombre DE le plus petit de tous ceux qui peuuent estre mesurez par les trois nombres A, B, C, par la 38. prop. 7. & à iceluy on adiouste l'vnité EF; le tout DF sera premier ou non: S'il est premier, on a vn autre nombre premier que pas vn des proposez: s'il n'est premier, il sera mesuré par quelque nombre premier, par la 34. propo. 7. Soit donc mesuré par G: il est euident que G ne peut pas estre vn des trois A, B, C: car s'il estoit quelqu'vn d'iceux, il mesureroit DE, & le tout DF: Partant par la 12. comm. sent. il mesureroit aussi l'vnité EF, luy qui est vn nombre. Ce qui est absurde. Donc G est autre nombre premier que pas vn des proposez. Et en ceste façon on en peut trouuer infini autres. Parquoy quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra sont adiouſtez, le tout sera pair.

Ceste demonstration est aisée: d'autant que par

la 6. def. 7. le nombre pair peut estre diuisé en deux parties egales; partant les moictiés de chacun des proposez feront ensemble la moitié du tout: Et par consequent le tout sera pair, puis qu'il peut estre diuisé en deux egallement, par la susdicte 6. definition du 7.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si plusieurs nombres impairs sont adiouſtez, & que le nombre d'iceux soit pair, le tout sera pair.

Ceste demonstration est aussi aisee: d'autant que si de chacun d'iceux nombres impairs on oste l'vnité, on les rendra pairs, & par la 21. proposit. 9. leur tout sera pair: Et pour-autant que leur multitude est en nombre pair, les vnitez retranchees feront vn nombre pair, lequel adiousté auec tout le reste, qui est desia nombre pair, le tout sera pair par la susdicte 21. prop. 9.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si plusieurs nombres impairs sont adiouſtez, & que le nombre d'iceux soit impair, le tout sera impair.

Ceste demonstration est aussi aisee. Car si on

retranche vn nombre impair, tout le reste sera vn nombre pair par la precedente : Et si du restant impair on oste l'vnité ; ce qui restera sera pair, lequel adiouste à tout le reste sera vn nombre pair par la 21.prop.9. Partant il est euident, que si on adiouste l'vnité restant, que le tout sera impair.

THEOR. 22. PROP. XXIIII.

Si d'vn nombre pair, on oste vn nombre pair, le reste sera pair.

Ce qui est euident : Car si le reste n'estoit pair, en ostant l'vnité on le rendroit pair : Et le retranché auec iceluy feroit aussi vn nombre pair par la 21. prop. 9. & partant adiouſtant l'vnité ostée, le tout seroit impair, ce qui est absurde ; puis qu'il a esté posé pair.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si d'vn nombre pair, on oste vn nombre impair, le reste sera impair.

Cela est euident : Car si le reste estoit pair, & le tout aussi pair, le retranché ne pourroit estre impair par la 24.prop.9.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si d'vn nombre impair on oste vn

nombre impair, le reste sera pair.

La demonstration de ceste prop. est aussi euidente: Car si le reste estoit impair; le reste & le retranché feroient vn nombre pair par la 22. propos. 9. contre l'hypothese.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si d'vn nombre impair on oste vn nombre pair, le reste sera impair.

Cecy est aussi aysé à demonstrer: Car si le reste estoit pair; le reste & le retranché feroient vn nombre pair, par la 21. prop. 9. contre l'hypothese.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre pair, le produit sera pair.

La demonstration de ceste prop. est aussi euidente: Car par les def. du 7. le produit contiendra autant de fois le multipliant, qu'il y a d'vnitez au nombre pair multiplié: Et par ainsi le produit sera la somme de plusieurs nombres impairs, desquels la multitude est en nombre pair, & partant par la 22. prop. 9. le produit sera pair.

SCHOLIE.

On demonstrera en la mesme maniere que si vn nombre pair

multiplie vn nombre pair ; le produict sera aussi pair.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre impair ; le produict sera impair.

Cela est aussi euident ; Car comme en la precedente, le produict sera vne addition de plusieurs nombres impairs, desquels la multitude sera en nombre impair ; & partant par la 23. p. 9. le tout, ou le produict sera impair.

SCHOLIE.

Clauius demonstre en cest endroit apres Campanus les deux theoremes suiuans.

Vn nombre impair mesurant vn nombre pair, il le mesure par vn nombre pair. A...3 C..2. B.....6.

Soit le nombre impair A, lequel mesure le nombre pair B par C. Ie dis que C est pair. Car s'il est impair ; B produict de A impair multiplié par C impair, sera impair, par la 29. p. 9. ce qui est absurde : car il a esté posé pair. Donc C est pair.

Vn nombre impair mesurant vn nombre impair, il le mesure par vn nombre impair. A...3 C.....5 B.....15

Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre impair B par C Ie dis que C est impair. Car s'il est pair ; B faict de A impair par C pair, sera pair par la 28. p. 9. ce qui est contre l'hypothese ; donc C est impair.

Tout nombre qui mesure vn nombre impair, est aussi impair. A.....15 B.....5 C...3

Soit le nombre impair A, lequel B mesure par C. Ie dis que B est impair. Car C estant multiplié par B produira A par la 9. com. sent. & si B n'est impair, mais pair, le produict A sera pair par la 28. p. 9. ce qui est absurde, puis qu'il a esté posé impair. Donc B qui mesure A impair, n'est pas nombre pair, mais impair.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si vn nombre impair mesure vn nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre pair B. Ie dis qu'il mesurera aussi sa moitié C.

A...3 D....4 E..2
B.....12
C.....6

Car puis que A mesure B, soit par le nombre D: iceluy sera pair: d'autant que s'il estoit impair, estant multiplié par A impair, leur produict seroit aussi impair par la 29. p. 9. contre l'hypothese; D sera donc pair; & partant se pourra diuiser en deux egalement par la 6. def. du 7. E soit donc la moitié de D. Parquoy comme D sera à sa moictié E, ainsi B sera à sa moictié C: & en permutant, comme D sera à B, ainsi E sera à C. Mais A mesurant B par D, aussi D mesurera B par A par la 8. com. sent. & partant D sera la partie de B denommée par A: donc aussi E sera la partie de C denommée par le mesme A: & partant A mesurera C, par la 40. p. 7. Si donc vn nombre impair mesure vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si vn nombre impair eſt premier à quelque nombre, il ſera auſſi premier à ſon double.

Soit le nombre impair A, premier à quelque nombre B, duquel le double ſoit C. Ie dis que A eſt auſſi premier à C. Car ſi A & C ne ſont premiers entr'eux, quelque nombre meſurera iceux, & ſoit D, lequel ſera impair, comme nous auons demonſtré au Scholie de la 29. p 9. Et puis qu'il meſure le nombre pair C (car C eſt pair, puis qu'il a moictié B) il meſurera auſſi ſa moictié B par la prop. precedente. Mais il meſure auſſi A. Donc D meſure iceux A & B premiers entr'eux : ce qui eſt abſurde. Il n'y aura donc point de nombre qui meſure A & C ; & partant ils ſeront premiers entr'eux. Si donc vn nombre impair eſt premier à quelque nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

A...3 B....4
C.....8 D

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui ſuiuent le binaire en progreſſion double, ſont ſeulement pairement pairs.

Soient depuis le binaire A tãt de nõbres

Vnité. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32.

qu'on voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en raison double. Ie dis qu'ils sont tous pairement pairs, & qu'il n'y en a point d'autres.

Qu'il ne soit ainsi; Soit prise l'vnité, & puisque depuis l'vnité, A, B, C, D, E, sont continuellement prop. le plus petit mesurera le plus grand selon quelqu'vn de ceux qui sont entre les proportionnaux par la 11. p. 9. lesquels estans tous pairs, il est euident par les def. du 7. que B, C, D, E, seront pairement pairs, & tous les autres qui pourroient suiure en la mesme progression. Mais pour autant que A prochain de l'vnité est nombre premier, par la 13. p. 9. aucun autre nombre ne mesurera aucun de tous ceux qui sont en la progression, sinon ceux de la mesme progression, lesquels estans tous pairs, iceux nombres seront pairement pairs seulement. Parquoy tous les nombres qui suiuent le binaire, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'vn nombre est impair, icelluy nombre sera seulement pairement impair.

Soit le nombre A, duquel la moitié B est impair. Ie dis que A sera pairement impair seulement.

Car puisque B est moitié de A, il le mesurera par C nombre binaire, & par les def. 7. A sera pairement impair : Mais qu'il soit seulement pairement impair on le prouuera

A 30. C 2. B 15. D 00. Eoe.

ainſi. S'il eſtoit pairement pair, vn nombre pair comme D le meſureroit par quelque nombre pair, comme E. Et par la 9. com. ſent. A eſt faict de D en E: mais le meſme A eſt auſſi faict de la moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19. p. 7. le produict de C par B, eſtant egal au produict de E en D, comme C ſera à E, ainſi D à B. Mais C nombre binaire meſure E; il faudroit donc auſſi que D pair meſuraſt B, qui eſt vn nombre impair: ce qui eſt impoſſible. Donc A eſtoit nombre pairement impair ſeulement. Parquoy ſi la moitié d'vn nombre eſt impair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Si vn nombre pair n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ne ſoit nombre impair, il ſera pairement pair, & pairement impair.

Ceſte demonſtration eſt aiſée. Car ſa moitié eſtant pair, il ſera meſuré par vn nombre pair ſelon le binaire qui eſt auſſi pair. Et pour-autant qu'il n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire; ſi on le diuiſe touſiours en deux egalement, on viendra à vne moitié impaire auparauant que paruenir iuſques au binaire, & par conſequent il ſera meſuré par vn nombre impair: & par les def. 7. il ſera pairement pair, & pairement impair.

THEOR. 33. PROP. XXXV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que du second & dernier on soustrait le premier; comme le reste du second sera au premier, ainsi le reste du dernier sera à tous les precedens.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux A, B, C, D, & du second B on retranche F G egal au premier A: Et du dernier D l'on retranche K L aussi egal à A: Ie dis que comme le reste B F sera à A, ainsi l'autre reste D K sera à tous les trois A, B, C ensemble.

A.....8
B....4 F.....8 G
C.....18
D 9. H 6. I 4. k 8. L

Car si de D L on retranche L I egal à B G, il est euident que K I sera egal à B F, (estant K L egal à F G) & si on retranche L H egal à C; comme les quatre nombres D, C, B, A, sont continuellement proportionnaux, aussi seront leurs egaux D L, H L, I L, K L: & en diuisant D H sera à H L, comme H I à I L, ou I K à K L; & partant par la 12. p. 7. tous les antecedans D H, H I, I K, (c'est à dire D K) seront à tous les consequents H L, I L, K L, (c'est à dire A, B, C,) comme l'vn des antecedans I k, est à l'vn des consequens K L, ou leurs egaux B F à A. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Si depuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raiſon double, iuſques à ce que le tout compoſé ſoit nombre premier : iceluy tout multiplié par le dernier produira vn nombre parfaict.

Soient depuis l'vnité tant de nombres qu'on voudra A,B,C,D, continuellement doubles, la ſomme deſquels & de l'vnité ſoit E nombre premier. Ie dis que ſi E eſt multiplié par le dernier D, que le produict F G ſera nombre parfaict.

Vnité. A..2 B....4 C.....8 D.....16 E 31. H 31. M 31. I K 124. L 248. F 31. N 465. G O 00. P 00.

Car ſi on prend H I double de E; K double de H I: & L double de K, ainſi des autres; E, H I, K, L, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de A, B, C, D; & en raiſon egale A ſera à D comme E à L, & par la 19. p. 7. A multiplié par L, ſera le produict de D par E, ſçauoir F G : mais A eſtant binaire, F G ſera double de L; ainſi E, H I, K L, F G, ſeront continuellement proportionnaux : Maintenant de H I ſoit retranché H M egal à E ; & de F G ſoit retranché F N, auſſi egal à E : par la 35. propoſition 9. comme H M eſt egal à E (d'autant que

HI estoit double de E) ainsi NG sera egal à E, HI, K, L, ensemble. Mais FN egal à E, est aussi egal à l'vnité, & à A, B, C, D ensemble. Et par consequent FG sera egal à l'vnité, & à A, B, C, D, E, HI, K, L, ensemble: & puis que FG a esté faict de E multiplié par D, par la 7. com. sent. D mesurera FG; & partant par la 11. com. sent. l'vnité, & les nombres A, B, C, qui par la 11. p. 9, mesurent D, mesureront le mesme FG. Derechef puis que L mesure FG; aussi par la 11. com. sent. les nombres E, HI, K, lesquels par la 11. prop. 9. mesurent L à cause de la raison double; mesureront le mesme FG: ainsi l'vnité & tous les nombres, A, B, C, D, E, HI, K, L mesurent iceluy FG. Parquoy si FG ne peut estre mesuré par aucun autre nombre que ceux-cy, par la 22. def. du 7. il sera nombre parfaict estant egal à toutes ses parties aliquotes.

Que si on pense qu'il puisse estre mesuré par quelque autre nombre autre que les deuant dits; que D le mesure s'il est possible, selon P: donc D multipliant P produira FG par la 9. com. sent. Mais le mesme FG est aussi produict de E en D. Donc vn mesme nombre est faict de E premier par D 4, & de P second en O 3; & partant comme E à P, ainsi O à D par la 19. prop. 7. & puis que A, B, C, D, depuis l'vnité sont continuellement proportionnaux, & A proche de l'vnité est premier, par la 13. p. 9. nul autre nombre que A, B, C mesurera le dernier D: & O est posé n'estre le mesme qu'aucuns d'iceux A, B, C; O ne mesurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D, ainsi estoit E à P: Donc aussi E ne mesurera P: & puis que E est premier par la 31. p. 7. E & P seront premiers entr'eux: & partant les moindres en leur raison par la 23. p. 7. & par la 21. p. 7. E mesurera O, comme P mesurera D. Mais nul autre que A, B, C

mesure

meſure iceluy D. Donc P ſera le meſme que l'vn d'iceux A, B, C. Soit donc le meſme que B: & d'autant que B, C, D, & E, H I, K, ſont continuellement proportionnaux en raiſon double, par raiſon egale comme B ſera à D, ainſi E à K, & partant par la 19. p. 7. le produict de B par K, ſera egal au produict de D en E. Mais le produict de D en E eſt egal à iceluy de P en O. Donc vn meſme nombre ſera faict de P en O, que de B en K; & partant par la 19. p. 7. comme P ſera à B, ainſi k à O. Mais P eſtoit le meſme que B: Donc auſſi k ſera le meſme que O. Ce qui eſt abſurde, car O a eſté poſé autre que tous ceux cy A, B, C, D, E, H I, k, L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A, B, C, D, E, H I, k, L, qui meſurent F G. Iceluy eſt donc nombre parfaict. Parquoy ſi depuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raiſon double, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Fin du neufieſme Element.

ELEMENT DIXIESME.

DEFINITIONS.

1 COMMENSVRABLES grandeurs, ſont celles meſurées par vne meſme meſure.

2 Incommenſurables grandeurs, ſont celles qui n'ont aucune commune meſure.

Telles grandeurs ſont le diametre & le coſté de quelque quarré; car icelles n'ont nulle commune meſure, comme ſera demonſtré à la derniere prop. de ce liure. Il y a encores pluſieurs autres lignes incommenſurables, ſçauoir eſt auſquelles on ne peut donner aucune commune meſure, beaucoup deſquelles ſeront expliquées en ce liure; & enſeigné par quelles manieres elles peuuent eſtre trouuées: derechef, les ſuperficies ſont dictes incommenſurables, & les ſolides incommenſurables, qui n'ont aucune commune meſure.

3 Les lignes droictes commenſurables par puiſſance, ſont celles deſquelles les

quarrez peuuent estre mesurez par vne mesme superficie.

Les lignes droictes sont considerées ou selon leur longueur ou selon leur puissance, & en l'vne & l'autre sorte elles sont dites cõmensurables & incommens. Aux deux premieres def. Euclide a expliqué qu'elles sont les lignes cõmens. & incommens. considerées selon leurs longitudes, mais en ceste cy, & en la suiuante, il declare qu'elles sont celles dites commens. & incõmens. en puissance. Il dit donc icy que les lignes droites dõt les quarrez peuuent estre mesurez par vne mesme superficie sont commensurables en puissance: comme par exemple, appliquant les nombres aux lignes; vne ligne de 3 pieds sera dite commensurable en puissance à vne autre ligne de 6 pieds, parce que leurs quarrez 9 & 36 peuuent estre mesurés par vne mesme superfice: Ainsi aussi vne ligne ayant 2 pieds en longueur, & vne autre √ 8 seront dictes cõmensurables en puissance, pource que leurs quarrez 4 & 8 sont mesurez par vn mesme espace superficiel: derechef vne ligne estant √√ 20, & vne autre √√ 125 seront pareillement dictes commensurables en puissance, pource que leurs quarrez √20 & √125 sont mesurez par vne mesme superficie √5; car elle est deux fois en √20, & 5 fois en √125.

4 Lignes droictes incõmensurables en puissance, sont celles desquelles les quarrez n'ont aucune commune superficie qui les puisse mesurer.

Comme par exemple, vne ligne estant de 2 pieds, & vne autre √√ 6, icelles deux lignes seront dictes incommens. en puissance, pource qu'il n'y a aucune superficie qui mesure leurs quarrez 4 & √ 6: de mesme √8 & √√12 seront aussi dictes incommensurables en puissance, car vn espace superficiel ne mesure leurs quarrez 8 & √12.

Il faut icy noter que toutes lignes (ou nombres (incommensurables en puissance, le sont aussi en longitude, mais non pas au contraire. Ainsi vne ligne de 2 pieds sera bien incommensurable en longitude à vne autre ligne de √8. mais non pas en puissance : & 2 qui est incommensurable en puissance à √8, l'est aussi en longitude.

5 Cela estant ainsi, il est euident que à toute ligne droicte proposée, on trouuera infinies lignes droictes commensurables, & infinies incommensurables: les vnes en longitude & puissãce, les autres en puissãce seulemẽt. Or vne ligne droicte proposée, est appellée rationelle.

Si on propose quelque ligne droicte de grandeur cogneuë & determinée, icelle est appellée rationele, pource que c'est selon elle que nous ratiocinons: & appliquant les nombres à telles lignes, nous les poserons tousiours d'vn de ces nombres absolus, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

Dounot a estimé que ceste definition ne deuoit auoir lieu, & partant l'a reiettée. Ce que i'estime qu'il n'a deub faire, veu qu'il se sert presque à tous propos de ceste ligne rationelle mentionnée en ceste definition.

6 Les lignes commensurables à vne ligne rationelle, soit en longitude & puissance, soit en puissance seulement, sont appellées rationelles.

7 Et les lignes incommensurables à vne ligne rationelle, sont irrationelles.

Si comparant quelque ligne droicte, à la ligne prinse pour

rationelle, & sur laquelle nous ratiocinons, elle est trouuée commensurable à icelle rationelle, soit en lõgueur & puissance, soit en puissance seulement, telle ligne est aussi dicte rationelle par Euclide; mais si elle est incommens. à icelle ligne rationelle proposée, tant en longitude qu'en puissance, ceste dicte ligne est appellée rationelle par nostre autheur.

8 Le quarré descrit sur vne ligne rationelle, est appellée rationel.

Tout ainsi que ceste ligne là, laquelle est cognuë & determinée de certaine quantité est dite rationelle; ainsi aussi le quarré descrit sur icelle ligne, est appellé rationnel, pource qu'icelluy est certain & cogneu: & les superficies comparées à iceluy quarré, sont aussi dictes rationelles, ou bien irrationelles, selon qu'elles seront trouuées commens. ou incommens. à iceluy quarré rationel, ainsi qu'il est dit és deux def. suiuantes.

9 Les figures commẽsurables au quarré rationel, sont aussi rationelles.

10 Et celles qui sont incommensurables au quarré rationel, sont irrationelles & sourdes.

11 Et les lignes qui peuuent icelles figures irrationelles, sont irrationelles & sourdes.

Or vne ligne est dicte pouuoir vne figure, quand le quarré descrit sur icelle est egal à icelle figure, d'autant que tout quarré est la puissance de sa racinee ou de son costé. Ainsi il a esté dit cy-dessus que deux lignes sont commensurables en puissance, lors que non pas les lignes, mais les quarrez d'icelles lignes, peuuent estre mesurez par vne mesme superficie.

Or à ces definitions nous adiousterons (apres Clauius) vne demande, & quelques communes sentences, dont l'vsage sera trouué en ce liure.

DEMANDE.

Qu'on puisse multiplier quelconque grandeur tant de fois qu'elle excede quelconque grandeur de mesme genre.

COMMVNES SENTENCES.

1 Vne grandeur mesurant tant de grandeurs qu'on voudra, mesure aussi la composée d'icelles.

2 Vne grandeur mesurant quelconque grandeur, mesure pareillement toute grandeur que celle-là mesure.

3 Vne grandeur qui mesure toute vne grandeur, & vne ostée, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

Estans proposees deux grandeurs inegales, si on retranche de la plus grande plus de la moitié, & encores du resi-

du plus de la moitié, & en continuant touſiours ainſi : Il demeurera à la fin vne grandeur plus petite que la moindre des deux propoſées.



Soient propoſées deux grandeurs inegales AB & C, eſtant C la plus petite : Ie dis que ſi on retranche plus de la moitié de AB, & du reſidu encores plus de la moitié, & en continuant touſiours ainſi, on trouuera à la fin vn reſidu plus petit que C.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soit la grandeur C multipliée tant fois qu'elle excede la plus grande AB, & ſoit la produite d'icelle multiplication DE, laquelle ſera multiplice de C, & plus grande que AB : qu'elle ſoit donc diuiſée en parties egales à C, comme en DF, FG, GE : Item ſoit oſté de AB plus de la moitié, ſçauoir AH, & du reſidu HB plus de la moitié, ſçauoir HI, & en continuant touſiours cecy iuſques à ce que AB ſoit diuiſée en autant de parties que DE, ſçauoir AH, HI, & IB, comme DE eſt diuiſée en DF, FG, GE. Pour autant que DE eſt plus grande que AB, & que le retranché DF n'eſt pas plus grand que la moitié de DE; comme le retranché AH, eſt plus grand que la moitié de AB, le reſte FE ſera plus grand que le reſte HB : ſemblablement ſi du plus grand reſidu FE, on oſte FG, qui n'eſt pas plus que la moitié, & du plus petit reſidu HB on oſte plus de la moitié HI; le reſte IB ſera plus petit que le reſte GE egal à C : & par conſequent IB derniere partie de

A B, sera plus petit que C. Estans donc proposées deux grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si de deux grandeux inegales proposées on retranche tousiours alternatiuement la plus petite de la plus grande, sans que le residu mesure la grandeur precedente ; telles grandeurs sont incommensurables.



Soient proposées deux grandeurs inegales AB & CD ; si on retranche continuellement & alternatiuement la plus petite de la plus grande, & que le residu ne mesure iamais sa grãdeur precedente, c'est à dire que le plus petit residu ne mesure iamais le plus grand residu ; ie dis que A B & CD sont incommensurables.

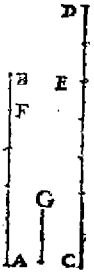
Autrement, il faudra qu'elles soient commensurables : Partant aussi qu'elles ayent vne commune mesure, soit donc icelle E, s'il est possible. Maintenant, de la plus grande C D soit retranchée C F egale à A B : Et s'il se peut faire, soit continué ce retranchement iusques à ce que le reste D F soit plus petit que A B. Donc E commune mesure, mesurera la toute C D & la retranchée C F, egale à A B, ou multiplice d'icelle, par la 2. com. sent. & elle doit aussi mesurer le reste D F par la 3. com. sent. Item soit re-

tranchee DF de AB tant de fois que faire se pourra, iusques à ce que le reste GB soit plus petit que E, qui mesure FD, & par consequent sa multiplice AG, par la 2. comm. sent. donc aussi le reste GB, par la 3. comm. sent. ce qui est absurde. Parrant AB & CD n'auoient point de commune mesure; & par consequent sont incommensurables. Parquoy si de deux grandeurs inegales propopoſees, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBL. 1. PROP. III.

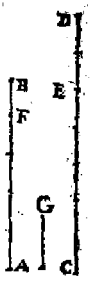
Estans donnees deux grandeurs commensurables, trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient donnees deux grandeurs commensurables AB, CD, & il faut trouuer leur plus grande commune mesure. Or AB, qui est moindre que CD, mesurera icelle, ou elle ne la mesurera point: si elle la mesure, il est euident qu'elle sera la plus grande commune mesure. Si elle ne la mesure point, soit alternatiuement retranchee la plus petite de la plus grande iusques à ce que le reste mesure le reste: (ce qui doit aduenir, d'autant que les grandeurs donnees sont commensurables) donc que AB soit retranchée de CD, & que le reste ED mesure AB. Ie dis qu'icelle ED sera la plus grande commune mesure d'icelles grandeurs AB, CD.



Car puis qu'elle mesure AB, elle

mesurera aussi CE son egale : & se mesurant soy-mesme, elle mesurera aussi la toute CD, par la 1. com. sent. Que si on nie quelle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir G, (s'il est possible) donc par les comm. sent. G mesurera AB, CD, & le retranché CE égal à AB, & par consequent le reste ED, qui est plus petit; ce qui est impossible: donc vne plus grande magnitude que ED, n'est commune mesure d'icelles AB, CD: Partant ED estoit la plus grande commune mesure. Estans donc données deux grandeurs commensurables, nous auons trouué leur plus grande commune mesure. Ce qu'il falloit faire.



COROLLAIRE.

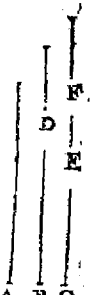
De cecy est manifeste que si vne grandeur mesure deux grandeurs, qu'elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté demonstré que si G mesure AB & CD, qu'elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure ED.

PROBL. 2. PROP. IIII.

Trois grandeurs commensurables estans donnees, trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient donnees trois grandeurs commensurables A, B, C, desquelles il faut trouuer la plus grande

commune mesure. Soit trouuee D plus grande commune mesure entre A & B par la 3. prop. 10. Si D mesure aussi C, il est manifeste que D est la plus grande commune mesure de toutes les trois grandeurs A, B, C. Car si vne plus grande magnitude que D mesure les grandeurs A, B, C, par le coroll. de la precedente prop. elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles A & B, c'est à dire D, qui est moindre grandeur, ce qui est impossible. Que si D ne mesure pas C, au moins D, C, seront commensurables: car veu que A, B, C sont commensurables, quelque mesure commune d'icelles, mesurera D plus grande mesure d'icelles A, B, par le corol. de la 3. prop. 10. mais ceste mesme mesure-là mesurera aussi C: donc D & C, seront commens. Soit donc trouuee par la susdicte 3. prop. 10. E plus grande commune mesure d'icelles D, C: & icelle E sera la plus grande mesure des grandeurs donnees A, B, C. Car d'autant que E mesure D & C; & D mesure A & B, par la 2. com. sent. E mesurera aussi icelles A & B. Mais elle mesure aussi C: donc E est mesure commune d'icelles A, B, C. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir F, s'il est possible. Donc puis que F mesure A & B, par le susdict corol. de la 3. prop. 10. elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure D. Mais elle mesure aussi C: donc F mesurant D & C, mesurera pareillement E plus grande mesure d'icelles: ce qui est absurde. Donc vne plus grande grandeur que E ne mesure pas les grandeurs A, B, C: & partant E est la plus grande commune mesure



d'icelles. Parquoy eſtans données trois grandeurs commenſurables. nous auons trouué leur plus grande commune meſure. Ce qu'il falloit faire.

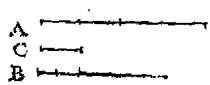
COROLLAIRE.

Par cecy eſt euident que ſi vne grandeur meſure trois grandeurs, qu'elle meſure auſſi la plus grande commune meſure d'icelles. Car il a eſté demonſtré que ſi F meſure A, B, C, qu'elle meſurera pareillement E plus grande commune meſure d'icelles.

Par ſemblable maniere, eſtans donnees plus de trois grandeurs commenſurables, nous trouuerons leur plus grande commune meſure; & ce meſme corollaire aura auſſi lieu.

THEOR. 3. PROP. V.

Les grandeurs commenſurables, ſont entr'elles comme nombre à nombre.



Soient deux grandeurs commenſurables A & B. Ie dis qu'elles ſont entr'elles comme nombre à nombre.

Car puis qu'elles ſont commenſurables, elles auront vne commune meſure, ſoit icelle C: donc C meſurera A ſelon quelque nombre, comme ſelon D: il meſurera auſſi B ſelon quelque autre nombre, comme ſelon E: ainſi puis que C eſt autant de fois en A, comme l'vnité F eſt en D, & C en B, comme

F en E; les grandeurs A, C, B, seront l'vne à l'autre comme les nombres D, F, E, & en raison egale A sera à B, comme le nombre D est au nombre E par la 22. prop. 5. Donc les grandeurs commensurables sont entr'elles comme nombre à nombre. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont l'vne à l'autre comme nombre à nombre, elles seront commensurables.



Soient deux grandeurs A & B qui soient l'vne à l'autre comme le nombre C est au nombre D: Ie dis qu'elles seront commensurables.

Car soit diuisee A en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C, & l'vne d'icelles parties soit egale à E: donc E est à A, ainsi que l'vnité F est au nombre C. Mais par l'hypothese A est à B, comme le nombre C est au nombre D; donc en raison egale, E sera à B, comme l'vnité F à D, par la 22. prop. 5. Mais l'vnité F mesure D; donc aussi E mesure B: mais E mesure pareillement A. Donc E est commune mesure de A & B; & partant par la premiere deff. de ce liure A & B sont commensurables. Parquoy si deux grandeurs sont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Par cecy est euident qu'estant proposez deux nombres com-

me C & D, & vne ligne droicte comme A qu'il sera aisé de trouuer vne autre ligne droicte, à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D: Car diuisant A en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C; & on prend vne ligne droicte B, contenant autant d'icelles parties qu'il y a d'vnitez au nombre D: alors A sera à B, comme le nombre C au nombre D, ainsi qu'il est manifeste parce qui a esté demonstré.

De cecy appert derechef, par quelle maniere on peut (estans donnez deux nombres, & vne ligne droicte,) trouuer vne autre ligne droicte, le quarré de laquelle soit au quarré de la donnee comme nombre à nombre. Car s'il faut trouuer vne ligne droicte, au quarré de laquelle soit le quarré de la ligne A, comme le nombre C est au nombre D; Il faudra trouuer ainsi que dessus la ligne B, à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D; puis soit trouuee par la 13.p.6. la moyenne prop. entre icelles A & B: & le quarré de A sera au quarré d'icelle moyenne prop. comme le nombre C au nombre D. Car le quarré de A sera (par le corol. de la 20. prop. 6.) au quarré de ladite moyenne prop. comme A à B; & partant comme le nombre C au nombre D.

THEOR. 5. PROP. VII.

Les grandeurs incommensurables, ne sont entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs incommensurables A & B; Ie dis qu'elles ne sont entr'elles comme nombre à nombre.



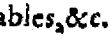
Ce qui est manifeste: car si elles estoient entr'elles comme nombre à nombre, elles seroient com-

mensurables par la 6. prop. 10. ce qui est contre l'hypothese, ayans esté posées incommensurables. Parquoy les grandeurs incommensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THOR. 6. PROP. VIII.

Si deux grãdeurs ne sont entr'elles comme nombre à nombre, elles seront incommensurables.

Que les grandeurs A & B ne soient entr'elles comme nombre à nombre: Ie dis qu'elles sont incommensurables.



Ce qui est euident: car si elles estoient commensurables, il faudroit qu'elles fussent comme nombre à nombre par la 5. prop. 10. Ce qui est contre nostre hypothese, puis qu'elles ont esté posées n'estre entr'elles comme nombre à nombre. Parquoy si deux grandeurs ne sont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 7. PROP. IX.

Les quarrez descrits sur lignes commensurables en longitude, sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarrez qui sont entr'eux comme nõbre quarré à nombre quarré, ont les costez cõmensurables en lõgitude. Mais les quarrez descrits sur lignes incommensurables en

longitude, ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarrez n'eſtans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les coſtez incommenſurables en longitude.



C. 4. D. 9. E. 16. F. 9.

Soient les lignes A & B commenſurables en longitude: Ie dis que leurs quarrez ſont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Car puis que les lignes A & B ſont commenſurables en longitude, elles ſeront entr'elles cõme nombre à nombre, par la 5. propoſi. 10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D; & les quarrez d'iceux C & D ſoient E & F. Or les quarrez de A & B ſont en raiſon doublee de leurs coſtez, par la 20. prop. 6. Item les nombres quarrez E & F ſont auſſi en raiſon doublee de leurs coſtez, par la 11. prop. 8. Donc le quarré de A eſt au quarré de B, comme le nombre quarré E eſt au nombre quarré F: C'eſt à ſçauoir en raiſon doublee des coſtez A & B, ou des nombres C & D, qui ſont en la meſme raiſon que les lignes A & B.

Pour la ſeconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré E au nombre quarré F: Ie dis que les lignes A & B ſeront commenſurables en longitude. Car par la 20. prop. 6. & 11. prop. 8. la raiſon des quarrez aux quarrez, eſt la raiſon doublee de leurs coſtez; & partant comme le coſté

costé A au costé B, ainsi le nombre C au nombre D, puis que leurs raisons doublees sont egales. Donc par la 6. prop. 10. A & B sont commensurables en longitude.

Pour la troisiesme partie, soient les lignes droictes A & B incommensurables en longitude. Ie dis que leurs quarrez ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Car si les quarrez de A & B estoient ainsi que nombre quarré à nombre quarré, icelles A & B seroient commensurables en longitude contre l'hypothese.

Finablement les quarrez de A & B n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Ie dis qu'elles sont incommensurables en longitude. Car autrement leurs quarrez seroient (par la premiere partie) comme nombre quarré à nombre quarré, contre l'hypothese. Parquoy les quarrez descrits sur lignes commensurables en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par les choses cy dessus demonstrees, que les lignes commensurables en longitude, le sont aussi en puissance: mais que celles qui sont commensurables en puissance, ne le sont pas toutesfois en longitude. Que les incommensurables en longitude, ne le sont pas pourtant en puissance: & que celles incommens. en puissance, le sont aussi en longitude.

Car d'autant que les quarrez d'icelles lignes commens. en longitude sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à dire simplement comme nombre à nombre: iceux quarrez seront commensurables par la 6. prop. 10. & partant les lignes commensurables en longitude le sont aussi en puissance.

Puis apres veu que les lignes dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ains seulemẽt comme nombre à nombre, sont commens. en puissance (car leurs quarrez sont commensurables par la 6. pr. 10.) & non en longitude comme il a esté demonstré: il appert que les lignes commensurables en puissance ne le sont pas pourtant en longitude, sinon que les quarrez d'icelles lignes soient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

Derechef puis que les lignes desquelles les quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, mais toutesfois comme nombre à nombre sont incommens. en longit. & commensurables en puissance: il appert que les lignes incommensurables en longitude ne le sont pas tousiours en puissance: ains qu'il n'y a que celles dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre à nombre, qui soient aussi incommens. en puissance, veu que leurs quarrez sont incommens. par la 8. prop. 10.

Finablement est manifeste que les lignes incommens. en puissance, le sont aussi en longitude: car si elles estoient commens. en long. elles le seroient aussi en puissance, comme appert par la premiere partie de ce corol. ce qui est contre l'hypothese.

SCHOLIE.

Il est à notter qu'és deux premieres parties de ceste proposition s'entend aussi des lignes inexplicables par nombres, pourveu qu'elles soient commensurables en longitude; comme si les quarrez de A & B estoient 12 & 3, leurs costez seroient √ 12 & √ 3, qui sont inexplicables par nombres, toutesfois commens. Car par la 20. prop. 6. 12 seroit à 3 en raison doublee de √ 12 à √ 3. Mais 12 est quadruple de 3: Ainsi le costé A sera double du costé B, par la 19. def. 5. Car la double raison doublee est quadruple.

THEOR. 8. PROP. X.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, & la premiere eſt commenſurable à la ſeconde, la troiſieſme ſera auſſi commenſurable à la quatrieſme. Que ſi la premiere eſt incommenſurable à la ſeconde, la troiſieſme ſera auſſi incommenſ. à la quatrieſme.

Soient quatre grandeurs prop. A, B, C, D: ſi A eſt commenſurable à B, Ie dis que C ſera auſſi commenſ. à D.



Car A eſtant commenſurable à B, ils ſeront entr'eux comme nombre à nombre, par la 5. prop. 10. Mais comme A à B, ainſi C à D; Partant C eſt à D, comme nombre à nombre; & par conſequent commenſurable par la 6. propoſit. 10.

Que ſi A eſtoit incommenſ. à B. Ie dis que C ſeroit auſſi incommenſurable à D: Car A & B ne ſeroient pas comme nombre à nombre par la 7. prop. 10. Mais comme A à B, ainſi C à D: donc C n'eſt pas à D comme nombre à nombre; & par conſequent incommenſurable par la 8. propoſit. 10. Si donc quatre grandeurs ſont proportionnelles &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

LEMME.

Trouuer deux nombres plans dissemblables, c'est à dire, qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

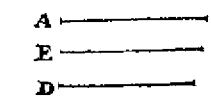
Soit pris quelconque nombre quarré A, & vn autre B *non quarré. Ie dis qu'iceux nombres A & B sont plans dissemblables.* A 16. B 20.

Car s'ils estoient plans semblables, ils seroient comme nombre quarré à nombre quarré, par la 26. prop. 8. & partant A estant nombre quarré, aussi B *seroit quarré par la 24. prop. 8. contre l'hypothese. Donc A,* B, *ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.*

PROBL. 3. PROP. XI.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables à vne ligne rationelle proposee, sçauoir vne en longitude seulement, & l'autre en longitude & puissance.

Soit la ligne rationelle proposee A, à laquelle il faut trouuer deux autres lignes incommensurables, l'vne seulement en longitude, & l'autre en longitude & puissance.



Soient trouuez par le lemme precedent deux nom-

bres B, & C, qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré : Item par le coroll. de la 6. prop. 10. soit trouuee la ligne D, de laquelle le quarré soit au quarré de la ligne A, comme le nombre C est au nombre B. Or d'autant qu'iceux quarrez de A & D sont comme nombre à nombre, ils seront commensurables entr'eux par la 6. prop. 10. Mais n'estans pas comme nombre quarré à nombre quarré, ils n'auront pas les costez A & D commens. en longitude, par la 9. prop. 10. Donc les lignes droictes A & D sont commensurab. en puissance seulement : la ligne D est donc la premiere requise.

Maintenant soit trouuee la ligne E moyéne prop. entre A & D, par la 13. prop. 6. & icelle E sera la seconde ligne demandee : car puis que par le corol. de la 20. propos. 6. le quarré de A est au quarré de E comme A à D, & icelles A & D sont incommensurables en longitude, comme il a esté demonstré : le quarré de A sera aussi incommensurable au quarré de E, par la 10. propos. 10. Parquoy les lignes A & E sont incommens. en puissance, & par le corol. de la 9. prop. 10. elles sont aussi incommens. en longitude. Nous auons donc trouué deux lignes droictes incommensurables, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit A 5. donc la ligne D sera V 20, laquelle il appert estre incommensurable en longitude à A, mais commensurable en puissance. Mais E estant moyenne prop. entre A 5, & DV 20, sera VV 500, qui est incommens. tant en longit. que puissance à A 5.

Dounot ayant delaissé le lemme precedent, se sert neantmoins d'iceluy en la construction cy dessus.

THEOR. 9. PROP. XII.

Les grandeurs commensurables à vne autre, sont aussi commensurables entr'elles.

Soient les deux grandeurs A & B, commens. chacune à la grandeur C. Ie dis qu'elles sont commensurables entre-elles.



D, 10. E, 8.
F, 2, G, 5.
H, 5. I, 4. K, 6.

Car puisque A & C sont commens. icelles serõt comme nombre à nombre par la 5. p. 10. & soit comme le nombre D au nõbre E. Derechef puis que C & B sont commens. C sera à B, comme nombre à nombre, & soit comme le nombre F au nombre G. Soient pris par la 4. prop. 8. les trois nombres H, I, K, les plus petits continuellement proportionnaux, selon les raisons de D à E, & F à G; tellement que H soit à I comme D à E, c'est à dire comme A à C, & I à K, comme F à G, c'est à dire comme C à B. Donc puis que A est à C, comme H à I; & C à B, comme I à K, par raison egale A sera à B, comme H à K, c'est à dire comme nombre à nombre: & partant A & B sont commens. par la 6. prop. 10. Donc les grandeurs commensurables à vne autre, sont aussi commensurables entr'elles. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 10. PROP. XIII.

Si de deux grandeurs, l'vne eſt commenſurable à vne troiſieſme, mais l'autre incommenſ. icelles grandeurs ſeront incommenſ. entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, deſquelles A ſoit commenſ. à C; & B incommenſ. à la meſme C. Ie dis que A & B ſont incommenſ. entr'elles. Car ſi B eſtoit commenſ. à A, lequel A eſt poſé auſſi commenſ. à C, par la 12. prop. 10. B & C ſeroient commenſ. contre l'hypotheſe. Donc A & B ne ſont commenſ. Parquoy ſi de deux grandeurs, l'vne eſt commenſurable à vne troiſieſme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A——— —
C—— —
B————

THEOR. 11. PROP. XIV.

Si de deux grandeurs commenſ. l'vne eſt incommenſ. à vne tierce, auſſi ſera l'autre à la meſme.

Soient deux grandeurs commenſurables A & B, & que A ſoit incommenſurable à la tierce C: Ie dis que B & C ſont auſſi incommenſurables.



Autrement, ſi B eſt commenſurable à C, il ſera auſſi commenſurable à A, par la

12.prop.10. contre noſtre hypotheſe : donc B eſt incommenſurable à C : Parquoy ſi de deux grandeurs commenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Les Interpretes d'Euclide colligent de ceſte prop. le theoreme ſuiuant, vtile aux choſes demonſtrees en ce liure.

Les grandeurs commenſurables à des incommenſurables, ſont auſſi incommenſurables entr'elles.

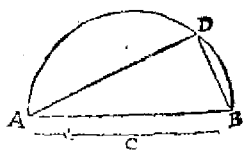
Soient deux grandeurs A & B incommenſurables, auſquelles C & D ſoient commẽſurables, ſçauoir eſt C à A, & D à B. Ie dis que C & D ſont incommenſurables entr'elles. Car puis que A & C ſont poſées commenſurables, & A incommenſurable à B, l'autre C ſera auſſi incommenſ. à A par la 14. prop. 10. Derechef, puis que D & B ſont poſees commenſurables, & B a eſté demonſtree incommenſurable à C; D ſera auſſi incommenſurable à la meſme C par la 14. prop. 10. Ce qui eſtoit propoſé.



LEMME.

Eſtans donnees deux lignes droictes inegales, trouuer combien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soient donnees les deux lignes droictes AB & C, deſquelles AB eſt la plus grande: & il faut trouuer combien la ligne AB peut plus que la ligne C. Soit deſcrit ſur AB le demy cercle ADB, & dans iceluy ſoit accommodee AD egale à C, par la 1. prop. 4. & ſoit



mente DB. *Ie dis que* AB *peut plus que* C *du quarré de* BD. *Car d'autant que l'angle* D *eſt au demy cercle, il eſt droict par la* 31. *p.* 3. *& par la* 47. *p.* 1. *le quarré de* AB *ſera egal aux quarrez de* AD, BD: *& partant* AB *pourra plus que* AD, *c'eſt à dire que* C, *du quarré de* BD. *Ce qui eſtoit propoſé.*

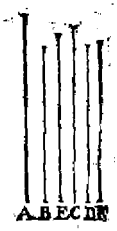
Semblablement eſtans données deux lignes droictes, en trouuer vne autre pouuant icelles.

Soient données les deux lignes droictes AD, BD: *& il faut trouuer vne ligne droicte qui puiſſe icelles. Soient poſées icelles* AD, BD *à angle droict* D, *& tiré* AB. *Il eſt euident qu'icelles* AB *peut* AD *&* BD; *puis que par la* 47. *p.* 1. *le quarré d'icelle* AB, *eſt egal aux quarrez de* AD, BD.

THEOR. 12. PROP. XV.

Si quatre lignes ſont proportionnelles, & la premiere peut plus que la ſeconde du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude: auſſi la troiſieſme pourra plus que la quatrieſme du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitude. Que ſi la premiere peut plus que la ſeconde du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude: auſſi la troiſieſme pourra plus que la quatrieſme du quarré d'vne ligne qui luy ſera incommenſurable en longitude.

Soient 4. lignes proportionnelles A, B, C, D, & que A puisse plus que B du quarré de E, & C plus que D du quarré de F. Ie dis que comme A sera commensurable ou incommens. à E, ainsi C sera commensurable, ou incommensurable à F.



Car puis que A, B, C, D, sont proportionneles, comme le quarré de A sera au quarré de B, ainsi le quarré de C sera au quarré de D, par la 22. prop. 6. Mais le quarré de A est egal aux quarrez de B, E, par l'hypothese, & le quarré de C aux quarrez de D, F: donc aussi les quarrez de B, E, seront au quarré de B, comme les quarrez de D, F, au quarré de D: & en diuisant comme le quarré de E sera au quarré de B, ainsi le quarré de F au quarré de D; & par la 22. p. 6. comme la ligne E sera à la ligne B, ainsi la ligne F à la ligne D; & en changeant comme B à E, ainsi D à F. Donc puis que comme A à B, ainsi C à D, & comme B à E ainsi D à F, par raison egale comme A sera à E, ainsi C à F: Et par la 10. p. 10. si A est commens. ou incommensurable à E, aussi C sera commens. ou incommensurable à F: Parquoy si quatre lignes sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 13. PROP. XVI.

Si deux grãdeurs commensurables sont iointes, la composée sera commensurable à chacune de ses parties: Et si la composée est commensurable à

vne de ſes parties, icelles ſeront commenſurables entr'elles.



Soient iointes deux grandeurs commenſ. AB & BC : Ie dis que la compoſée AC, eſt commenſurable à AB, & à BC parties d'icelle.

Car puis que AB & BC ſont commenſurables, elles auront vne commune meſure, laquelle meſurant AB & BC, meſurera auſſi la toute AC, par la 1. c. ſent. Partant la toute AC eſt commenſ. à ſes parties.

Pour la ſeconde partie. Si la toute AC eſt commenſ. à vne de ſes parties, comme AB : Ie dis qu'icelles parties AB, BC ſeront commenſurables entr'elles. Car ſi AC & AB, ſont commenſurables, elles auront vne commune meſure, laquelle meſurant le tout & le retranché, meſurera auſſi le reſte par la 3. comm. ſent. Partant le retranché & le reſte ſeront commenſurables, d'autant qu'ils ont vne commune meſure. Parquoy ſi deux grandeurs commenſurables ſont iointes enſemble, la compoſée, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte que ſi vne grandeur compoſée de deux, eſt commenſurable à l'vne d'icelles, qu'elle le ſera auſſi à l'autre. Comme ſi AC eſt commenſurable à AB, *elle le ſera auſſi à* BC. *Car par la ſeconde partie de ceſte prop.* AB, BC *ſont commenſurables : donc par la premiere partie AC ſera commenſurable à chaſques partie,* AB, BC.

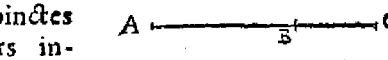
SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{18}$, *&* BC $\sqrt{8}$, *leſquelles ſont commenſ. La*

composée AC sera V 50, laquelle est commens. tant à V 18, que à V 8. Car V 50 est à V 18, comme 5 à 3; & à V 8, comme 5 à 2.

THEOR. 14. PROP. XVII.

Si on conjoinct deux grandeurs incommensurables, la composée sera incommensurable à chacune de ses parties: Et si la composée est incommensurable à l'vne de ses parties, icelles parties seront incommensurables entr'elles.



Soient conjoinctes deux grandeurs incommens. AB & BC: Ie dis que la toute AC est incommens. à vne chacune de ses parties.

Autrement, si AC estoit commens. à AB, elle le seroit aussi à BC: car la commune mesure qui mesureroit AC & le retranché AB, mesureroit aussi le reste BC, par la 3. com. sent. Et partant AB & BC seroient commens. (ce qui est contre l'hypothese.) Donc AC & AB sont incommens. Il s'ensuiura le mesme inconuenient si on nie que AC, BC soient incommensurables.

Pour la secõde partie: Ie dis que si AC & BC, sont incommens. que AB & BC seront aussi incommens. Autrement si elles estoient commensurable: La toute AC, seroit aussi commensurable à sa partie BC par la 16. p. 10. contre nostre hypothese. Donc AB & BC sont incommens. Par mesme argument

nous demonſtrerons que ſi AC & AB ſont incommenſ. que AB & BC ſont auſſi incommenſurables. Parquoy ſi on conjoinct deux grandeurs incommenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLAIRE.

Il reſulte de ces choſes, que ſi vne grandeur compoſée de deux, eſt incommenſurable à l'vne d'icelles, qu'elle le ſera auſſi à l'autre. Comme ſi AC compoſée de AB & BC eſt incommenſurable à AB, elle le ſera auſſi à BC. Car ſi AC eſtoit commenſ. à icelle BC, elle le ſeroit auſſi à AB, par le coroſaire de la precedente prop. ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc AC & BC ne ſont commenſurables, mais incommenſurables.

SCHOLIE.

Soit AB 8, & BC γ 28, leſquelles ſont incommenſurables. La compoſée AC ſera 8 + γ 28 incommenſurable à chacune d'icelles AB 8, BC γ 28.

THEOR. 15. PROP. XVIII.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & ſur la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, defaillant d'vne figure quarrée, & que le rectangle diuiſe icelle plus grande ligne en parties commenſurables en longitude ; la plus grande ligne pourra plus que la

plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. en longitude: Et ſi la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude, eſtant appliqué vn rectangle ſur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarrée; le rectangle diuiſera icelle plus grande ligne en parties commenſurables en longitude.



Soient deux lignes inegales AB & C, & par la 28. p. 6. ſur la plus grande AB ſoit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'vne figure quarrée, c'eſt à dire d'vne ligne egale à ſon autre coſté. Et ſoit iceluy rectangle contenu de AD & DB. Ie dis que ſi AD & DB ſont commenſurables en longitude, que AB pourra plus que C du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. en longitude.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soit la ligne AB couppée en deux egalement en E, & ſoit faicte EF egale à ED: Il eſt euident que AF ſera egale à DB, puis que les toutes AE, EB ſont egales, & auſſi les retranchées EF, ED. Maintenant puis que AB eſt couppée en deux egalement en E, & en deux inegalement en D, par la 5. p. 2. le rectangle de AD & DB auec le quarré de

ED, seront egaux au quarré de BE, lequel n'estant par l'hypothese que le quart du quarré de AB, quatre fois le rectangle de AD & DB, & quatre fois le quarré de ED, sont egaux au quarré de AB. Mais quatre fois le rectangle de AD & DB valent le quarré de C, d'autant que par l'hypothese le rectangle de AD, & DB est le quart du quarré de C. Donc le quarré de AB est plus grand que le quarré de C, de quatre fois le quarré de ED, ou du seul de FD egal à iceux, par le Scholie de la 4. p. 2. puisque FD est double de ED. Il faut donc demonstrer que AB & FD sont commensurables en longitude: Pource que AD & DB estant posées commens. en longitude, la toute AB sera aussi commens. en longitude à sa partie DB par la 16. p. 10. Et partant à son egale AF, & à toutes les deux ioinctes en vne: & par consequent au reste de la ligne FD par la mesme 16. p. 10. Donc la ligne droicte AB peut plus que C, du quarré de FD qui luy est commensurable en longitude.

Pour la seconde partie, sans rien changer à la construction: si AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longitude. Ie dis que AD & DB seront aussi commens. en longitude. Car il sera demonstré ainsi que dessus que AB peut plus que C du quarré de FD. Mais AB a esté posée pouuoir plus que C du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: & partant AB sera commens. en longitude à icelle FD. Et puis que AB composée de FD, AF, & DB comme d'vne, est commens. en longitude à la partie FD; la mesme AB sera aussi cõmens. en longitude à l'autre partie cõposée de AF, DB par le coroll. de la 16. p. 10. Mais icelle composée de AF, DB, est aussi commens. en long. à DB, puis qu'elle est double d'icelle: donc puis que chacune di-

celles AB, DB est commensurable en longit. à la composée de AF, DB; aussi AB, DB seront commensurables entr'elles en longitude par la 12. p. 10. & partant veu que la toute AB composée de AD, DB est commensurable en longitude à icelle DB; aussi icelles AD, DB seront commensurables en longitude entr'elles par la 16. p. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, & sur la plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

L'application mentionnée au cõmencement de la demonst. cy dessus se fera bien plus brefuement par le 60. de nos problemes geometriques, posant AB somme des extremes de trois proportionnelles, & la moitié de C, moyenne.

Quant application des nombres soit AB 30, *&* C 24. *donc les segmens AD, &* DB, *seront* 24 *&* 6, *desquels le produict, c'est à dire le rectangle est* 144, *qui est egal au quart de* 576, *quarré de* C 24, *& defaillant du quarré de* DB 6, *c'est à dire* 36: *& sont icelles parties AD* 24, DB 6, *commens. en longitude: car l'vne est quadruple de l'autre. Ainsi* FD, *qui peut auec* C *le quarré de* AB, *sera* 18: *car le quarré de* AB *est* 900, *& celuy de* C 576; *& partant reste pour le quarré de* FD, 324, *dont la racinee quarrée est* 18, *commensurable en longitude à* AB. *L'autre partie sera aussi euidente par l'addaption des nombres cy dessus.*

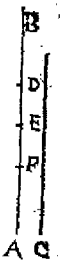
La proposition suiuante sera aussi facilement entenduë, si on pose AB 12, *&* C $\sqrt{96}$: *car les segmens AD,* DB, *seront* $6+\sqrt{12}$. *&* $6-\sqrt{12}$; *&* FD $\sqrt{48}$. *qui est à* 12 *incommensurable en longitude, &c.*

THEOR.

THEOR. 16. PROP. XIX.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & ſur la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarrée, & que le rectangle diuiſe icelle plus grande ligne en parties incommenſ. en longitude, la plus grãde ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſera incommenſ. en longitude. Que ſi la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude, eſtant appliqué vn rectangle ſur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de le plus petite, & defaillant d'vne figure quarrée, le rectangle diuiſera la plus grande ligne en parties incommenſurables en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & ſur la plus grande AB ſoit appliqué (par la 28. p. 6.) vn rectangle egal au quart du quarré de C, defailant d'vne figure quarrée: & ſoit iceluy rectangle contenu



sous AD, DB incommensurables en longitude. Ie dis que AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude. Car ayant construit comme en la precedente prop. nous demonstrerons semblablement que AB peut plus que AC du quarré de FD. Il faut donc demonstrer que AB & FD sont incommens. en longit. D'autant que les lignes AD, DB sont posées incommens. en longitude la toute AB sera aussi incommes. en long. à la partie DB par la 17. p. 10. Mais DB est commensurable en longitude à la composée de AF, DB, veu que ceste-cy est double de celle là: donc puis que de ces deux lignes commens. icelle DB est incommens. en longitude à AB; la composée de AF, DB sera aussi incommens. en long. à la mesme AB par la 14. p. 10. Et pour autant que AB composée de AF, DB comme vne, & de FD, est incommens. en long. à la composée de AF, DB; la mesme AB sera aussi incommens. en long. à FD, par le corol. de la 17. p. 10. Donc AB peut plus que C du quarré de FD, qui luy est incommensurable en longitude.

Maintenant si AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & sur icelle AB est appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, & defaillant d'vne figure quarrée, lequel rectangle diuise AB és parties AD, DB. Ie dis qu'icelles AD, DB sont incommens. en long. Car nous demonstrerons comme deuant (les mesmes choses estans construictes) que AB peut plus que C du quarré de FD, & qu'icelles AB & FD sont incommensurables en longitude: & puis que AB est composée de FD & de AF, DB ioinctes en vne

icelle AB sera aussi incommens. en longitude à la composée de AF, DB par le corol. de la 17. p. de ce liure. Mais la composée de AF, DB est commens. en longit. à icelle DB, puis que celle là est double de ceste-cy. Donc puis que AB est incommensurable en longit. à la composée de AF, DB, icelle AB sera aussi incommens. en long. à DB, par la 14. p. 10. Et partant puis que AB composée de AD, DB est incommens. en long. à DB, icelles AD, DB seront aussi incommensurables en longitude entr'elles par la 17. p. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, & sur la plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

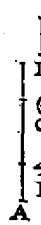
LEMME.

Puis qu'il a esté demonstré que les lignes commensurables en longitude, le sont aussi en puissance, mais que celles commens. en puissance ne le sont pas tousiours en longitude: il est manifeste que s'il y a quelque ligne commens. en longitude à vne proposée rationele: elle doit estre appellée rationele & commensurable à icelle, non seulement en longitude, mais aussi en puissance: car les lignes cõmens. en long. le sont tousiours aussi en puissance. S'il y a aussi quelque ligne droicte commens. en puissance & longitude à l'exposée rationele, elle sera aussi dite rationele commens. en longitude & puissance. Que si derechef il y a quelque ligne commens. en puissance à icelle, mais incommens. en longitude, elle sera aussi dicte rationele commens. à icelle en puissance seulement.

SCHOLIE.

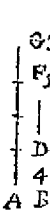
Il appert par ce que dessus, qu'il y a de trois sortes de lignes rationeles commensurab. entr'elles en longitude. Car de deux lignes rationeles commensurables entr'elles en longitude, ou l'vne est egale à l'exposee rationele; & partant l'vne & l'au-

tre cõmenſ. en longitude à la rationele: ou l'vne ny l'autre n'eſt egale à l'expoſée rationele, & toutesfois cõmenſ. en longit. à icelle: ou finablement l'vne & l'autre eſt commenſ. à l'expoſée rationele en puiſſance ſeulement. Or nous trouuerons ces trois genres de lignes rationeles en ceſte maniere. Soit vne rationele propoſée A diuiſée en quatre parties egales; c'eſt



à ſçauoir en autant qu'il y a d'vnitez au nombre B: puis apres eſtant pris quelque autre nombre C, la ligne D ſoit vne partie de A; & autant de fois que D meſure A, autant de fois elle meſure quelque ligne E: Item autant de fois que l'vnité eſt en C, qu'autant de fois la meſme D meſure quelque autre ligne F. Dont puis que A & E ſont compoſées de parties egales en nombre, qui ſont egales à D; elles ſeront egales. Derechef puis que D meſure toutes les trois lignes A, E, F, elles ſeront commenſ. en longitude; parquoy E & F ſont rationeles commenſ. en longitude à la rationele A: mais elles ont eſté demonſtrées eſtre auſſi commenſ. entr'elles en longitude. Nous auons donc trouué deux rationeles E & F commenſ. en longitude, tant entr'elles qu'à la ration. expoſée A, & deſquelles vne ſçauoir eſt E, eſt egale à A.

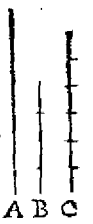
Or maintenant que D meſure deux lignes C & E par deux nombres F & G differens de B, tellement que l'vne & l'autre ligne C & E ſoit inegale à A. Donc comme deſſus les trois lignes A, C, E, ayans D pour meſure commune, ſeront commenſ. en longitude; parquoy C & E ſont rationeles commenſ. en longitude à la rationele A: mais elles ſont



auſſi entr'elles. Nous auons donc trouué deux rationeles C & E commenſ. en longitude, tant entr'elles qu'à la rationele

proposée A, l'vne ny l'autre desquelles n'est egale à icelle A.

Finablement par la 11. p. 10. à l'exposée rationele A soit trouuée la ligne B, incommens. en longitude seulement, laquelle soit couppée en tant de parties egales qu'õ voudra, & soit prise C, composée de quelconque nombre d'icelles parties de B: & icelles B & C seront commens. en longitude. Ie dis qu'elles sont auſsi commens. en puissance seulement à l'exposée rationele A. Car



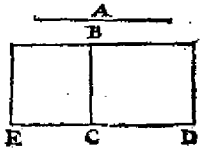
puis que A & B sont commensurable en puissance; le quarré de A sera commens. au quarré de B: Mais au mesme quarré de B, est auſsi commens. le quarré de C, pource que B, C estans commens. en longitude, elles le sont auſsi en puissance. Donc par la 12. p. 10. les quarrez de A & C, sont pareillement commens. entr'eux. Parquoy C est commens. en puissance à icelle A. Et pource que des deux lignes B & C commens. en longitude, B est incommens. en longitude à A: par la 14. p. 10. G sera auſsi incommens. en longitude à la mesme A. Donc C est commens. à A seulement en puissance. Et pource que B & C, commensurables en puissance à l'exposée rationele A, sont rationeles; elles seront deux rationeles commensurables en longitude entr'elles, mais en puissance seulement à l'exposée rationele A: elles sont donc les deux lignes requises à trouuer.

Que si quelqu'vn desire trouuer tant qu'on voudra de lignes rationeles commensurables en longitude entr'elles, cela se fera ainsi qu'il ensuit: Soit pris quelcõque mesure D, (regardez la derniere figure de la page precedente) & soient composées autant qu'on voudra de lignes A, C, E, d'autant de parties egales à icelle D; qu'il y a d'vnitez en autant de nombres inegaux B, F, G: car les lignes A, C, E, ayans la commune mesure D, seront commensurables en longitude.

Or il eſt auſſi euident que toutes lignes rationeles, ſont commenſ. non ſeulement à vne expoſée rationele, mais auſſi entr'elles. Car puis que par la 6. d. 10. les lignes rationeles ſont celles qui ſont commenſ. à l'expoſée rationele, ſoit en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement, & que par la 12. p. 10. les commenſurables à vne meſme, ſont auſſi commenſ. entr'elles; il eſt manifeſte que toutes lignes rationeles, ſont commenſ. entr'elles.

THEOR. 17. PROP. XX.

Le rectangle compris de deux lignes rationeles commenſ. en longitude ſelon quelqu'vne des manieres cy deuant dites, eſt rationel.



Soit vne expoſée rationele A, & le rectangle BD compris ſous BC, CD rationeles commenſ. en longitude, ſelon quelqu'vne des manieres cy deſſus dites: Ie dis qu'iceluy rectangle eſt rationel.

Car ſi ſur BC on faict le quarré BE, il ſera commenſurable au quarré de la rationele A par la 3. d. 10. puis que BC eſt rationele commenſ. à la rationele expoſée A, ou en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement. Et puis que BC, ou CE, CD ſont commenſ. en longitude (car BC, CD ont eſté poſées rationeles commẽſurables en longitude entre elles) & par la 1. p. 6. comme EC eſt à CD, ainſi EB à BD, par la 10. p. 10. EB, BD ſeront auſſi commenſ.

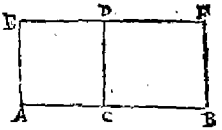
tellement donc que le quarré de A, & le rectangle BD sont commensurables au quarré EB; & partant commens. entr'eux par la 12. p. 10. Mais le quarré de A est rationnel par la 8. d. 10. Donc par la 9. d. 10. le rectangle BD sera aussi rationel: Parquoy le rectangle compris de deux lignes rationeles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit BC 3 *&* CD 4. *donc le rectangle* BD *sera* 12. *Derechef soit* BC $\sqrt{3}$ *&* CD $\sqrt{12}$: *Le rect.* BD *sera* $\sqrt{36}$, *c'est à dire* 6. *Et derechef si* BC *est* $\sqrt{8}$, *&* CD $\sqrt{18}$: *Le rectangle* BD *sera* $\sqrt{144}$, *c'est à dire* 12. *Ainsi iceluy rectangle est rationel.*

THEOR. 18. PROP. XXI.

Si vn rectangle rationel a l'vn des costez rationel, il aura aussi l'autre costé rationel: & iceux seront entr'eux commensurables en longitude.



Soit le rectangle rationel DB ayant le costé CD rationel: Ie dis que BC sera aussi rationel commensurable en longitude à CD.

Car sur DC, soit faict le quarré AD, lequel sera rationel par la 8. d. 10. Et comme le rectãgle est au quarré, ainsi CB à CA par la 1. propop. 6. Mais le quarré & le rectangle sont rationnaux, & partant commensurables. Donc par la 10 prop. 10. CB & CA, ou CD son egale, seront

rationeles & commensurables en longitude. Parquoy si vn rectangle rationnel a l'vn des costez rationel, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit le rectangle DB 6, & la ligne CD √3 : BC sera donc √12. qui est commens. en longitude à √3. Car elle est double d'icelle. Soit derechef DB 12, & la ligne droicte CD √8, l'autre costé BC sera √18, qui est commens. en longitude à CD √8. Car si on diuise √18, par √8 prouiendra √2 $\frac{1}{4}$ c'est à dire √$\frac{9}{4}$ qui est $\frac{3}{2}$: & partant √18 est à √8. comme 3 à 2, c'est à dire comme nombre à nombre; & par conséquent commens. en longitude.

LEMME.

Trouuer deux lignes droictes rationeles commensurables en puissance seulement.

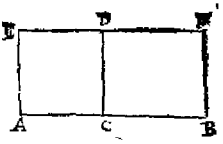
Soit trouué par la 11. p. 10. quelque ligne droicte incommensurable en longitude seulement à vne ligne droicte rationele proposée, & icelles seront les requises : car puis qu'elles sont commensurables en puissance seulement par la construction, elles seront aussi rationeles par la 6. d. 10.

Que si à la ligne trouuée, on en trouue encore vne autre, moindre ou plus grande que la proposée rationele, il est manifeste par la 12. prop. 10. que toutes les trois seront commensurables entr'elles en puissance seulement, & partant rationeles.

THEOR. 19. PROP. XXII.

Le rectangle compris de deux lignes droites rationeles commens. en puis-

sance seulement, est irrationel: & la ligne droicte qui peut iceluy est irrationelle. Soit icelle appellee Mediale.



Soit le rectangle CF, compris de deux lignes rationelles DC & BC commensurables en puissance seulement. Ie dis que le rectangle est irrationel: & la ligne qui peut iceluy, pareillement irrationelle, qui doit estre appellee Mediale.

Car si sur la rationelle CD on descrit le quarré AD, il sera rationel, & sera au rectangle CF, comme AC ou CD son egale, est à BC, par la 1. propo. 6. Mais DC & BC sont incommens. en longitude: donc par la 10. prop. 10. le quarré AD, & le rectangle CF seront incommens. Or le quarré est rationel: donc par la 10. def. 10. le rectangle sera irrationel; & par la vnzieſme la ligne qui peut iceluy sera aussi irrationelle: & soit icelle ligne appellee Mediale, pource que le quarré d'icelle est egal au rectangle compris sous les rationelles DC, CB commensurables entr'elles en puissance seulement, & par consequent moyenne prop. entre icelles rationelles par la 17. p. 6. Donc le rectangle compris de deux lignes droictes rationelles commensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Pour donc facilement definir la ligne mediale, nous dirons

icelle estre vne ligne irrationnelle, moyenne proportionelle entre deux lignes rationelles, entr'elles commensurables en puissance seulement. Ou bien celle qui peut vn rectangle contenu sous deux lignes rationelles commensurables entr'elles en puissance seulement.

Et faut notter que le quarré d'icelle ligne mediale, ou le rectangle irrationel qu'elle peut, est aussi nõmé medial, pource qu'il est moyen prop. entre les quarrez d'icelles lignes rationelles commens. entr'elles en puissance seulement, non qu'il faille pourtant entendre que tout rectangle medial soit tousiours contenu sous deux lignes droictes rationelles commensurables en puissance seulement, tel qu'est le medial CF: car il en aduient quelquesfois autrement, comme se verra cy apres.

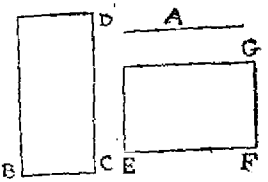
La ligne DC soit 2, & BC √8. Le rectangle BD sera √32, qui est irrationel; & sera dict medial, mais la ligne pouuant iceluy est √√32, laquelle on appelle mediale.

THEOR. 20. PROP. XXIII.

Le quarré d'vne ligne mediale appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre costé rationel commens. en puissance seulement à la ligne à laquelle se faict l'application.

Auparauant que venir à ce qui est icy proposé, est à notter que pour appliquer sur vne ligne rationelle vn rectangle egal au quarré d'vne ligne mediale, autrement & plus facilement que par la 45. prop. 1. Il faut en premier lieu poser quelconque ligne ratio-

nelle, en second lieu la mediale, & chercher la tierce proportionelle, laquelle sera l'autre costé du rectãgle: car par la 17. propos. 6. le quarré de la moyenne est egal au rectangle des extremes.



Venons maintenant à la demonstration de la proposition.

Soit la mediale A, le quarré de laquelle soit appliqué sur la ligne rationelle BC, faisant le rectangle BD: Ie dis que BC & CD sont rationelles commens. en puissance seulement.

Car A estant mediale, elle peut vn rectangle compris de deux lignes rationelles commens. en puissance seulement, autrement elle ne seroit dicte mediale: Soit donc iceluy rectangle EG, contenu sous les rationelles EF, FG commensurables en puissance seulement. Et pource que A, par l'hypothese peut aussi le rectangle BD: Iceux rectangles BD, EG seront egaux, & par la 14. prop. 6. ils auront les costez reciproques, sçauoir que comme BC à EF, ainsi FG à CD, & par la 22. prop. 6. les quarrez d'icelles lignes seront proport. Mais le quarré de BC ligne rationelle, est commens. au quarré de EF, aussi ligne rationelle: donc par la 10. prop. 10. le quarré de FG sera aussi commens. au quarré de CD; & partant les lignes FG, CD seront comm. au moins en puissance, & le quarré de FG estant rationel, le quarré de CD sera aussi rationel; & par consequent les lignes CB & CD seront rationelles. Or qu'icelles BC & CD soient commens. en puissance seulement, il est euident par ce qui a esté demonstré à la 21. prop. 10. Car

si elles estoient commensurables en longitude, le rectangle BD seroit rationel, & nous l'auons prémedial, c'est à dire egal au quarré de la mediale. ..Donc les lignes BC & CD sont incommensurables en longitude. Parquoy le quarré d'vne ligne mediale appliqué sur vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

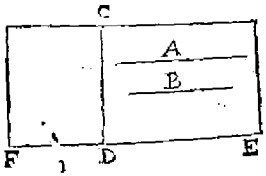
SCHOLIE.

Soit le quarré de A V 40, mais BC soit 2. Si donc à BC on applique V 40, l'autre costé CD sera V 10, qui est incommens. en longitude à BC, mais commens. en puissance. Que si BC est V 5, CD sera V 8, aussi commens. en puissance seulement. Mais si la mediale A estoit VV 35, & BC V 5: le quarré de A seroit V 35: & CD V 7, commens. en puissance seulement à BC.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Vne ligne droicte commensurable à vne ligne mediale, est aussi mediale.

Soit la mediale A, à laquelle soit commensurable la ligne droicte B. Ie dis qu'icelle B est aussi mediale.



Car soit proposee la rationelle CD, & sur icelle appliqué le rectangle CE egal au quarré de A: Item sur la mesme rationelle CD soit appliqué

le rectangle CF egal au quarré de B. D'autant que le quarré de la mediale A, est appliqué sur la rationelle CD, l'autre costé DE est rationel commensurable en puissance seulement à CD, par la 23. prop. 10. Mais A & B estans commensurables, leurs quarrez (ou leurs egaux rectangles CE, & CF) seront aussi commens. Mais par la 1. prop. 6. comme CE est à CF, ainsi la ligne droicte ED est à la ligne droicte DF: Donc par la 10. prop. 10. ED, DF, seront commens. en longitude. Mais la ligne ED est rationelle, & incommensurable en longitude à la ligne CD: donc aussi DF est rationelle & incommens. en longitude à la mesme CD, par la 14. prop. 10. & partant puis qu'icelles CD, DF sont rationelles, elles seront commensurables en puissance seulement, & par la 22. propo. 10. le rectangle CF compris sous icelles CD, DF sera medial, & la ligne B qui peut iceluy rectangle, sera aussi mediale: ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que toute figure commensurable à vne figure mediale, est aussi mediale: d'autant que les quarrez egaux à icelles figures seront aussi commensurables, & par consequent commensurables les lignes qui les pourront, à tout le moins en puissance, & l'vne d'icelles estant mediale, l'autre qui luy sera commens. sera aussi mediale par ceste proposition.

SCHOLIE.

Soit AV 200, BV 128, CD 4. Donc DE sera V 12 $\frac{1}{2}$ & DF V 8 commens. entr'elles: car elles sont comme 5 à 4. & DE est commens. en puiss. seulement à CD; & par consequent

le rectangle CF, qui est V 128, est medial, & la ligne BV V 128, qui peut iceluy, aussi mediale.

LEMME 1.

Or ce qui a esté dit des lignes rationeles au lemme de la 19. prop. de ce liure, nous le dirons aussi des mediales: sçauoir est que les lignes droictes commens. en long. à vne mediale, est dite mediale, & com. à icelle, non seulement en longit. mais aussi en puissance. Car vniuersellement les lignes droictes commensurables en longitude le sont aussi en puissance. Et s'il y a quelque ligne commens. en puissance & longit. à vne mediale, elle sera pareillement dite mediale, & à icelle commens. en longit. & puissance. Que si derechef il y a quelque ligne commens. en puissance à vne mediale, mais in commens. en longit. elle sera aussi dite mediale commens. à icelle en puissance seulement.

LEMME 2.

Trouuer deux lignes mediales commensurables en longitude: Item deux commensurables en puissance seulement.

Soient trouuees les deux lignes A & B commens. à la mediale C, c'est à sçauoir A en longit. & B en puissance seulement: & chacune d'icelles A & B seront aussi mediales par la 24. prop. 10. Veu donc que A & C sont commens. en longit. & B, C en puissance seulement, est manifeste ce qui estoit proposé.



Or il est à notter qu'encore que toute ligne droicte commen. à vne mediale, soit mediale, neantmoins toute ligne mediale n'est pas commens. à quelque mediale que ce soit. Car deux mediales se peuuent donner incommens. en longit. & puissan-

ce, comme apparoistra par la 36. prop. de ce liure, où nous enseignerons aussi à trouuer deux telles lignes mediales.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commensurables en longitude, est aussi medial.

Soit le rectangle DB, (à la figure de la precedente fol. 487.) compris des deux mediales commensurables en longitude DC & BC : Ie dis qu'il est medial.

Car si sur la ligne DC on descrit le quarré DA, il sera medial, estant descrit sur vne ligne mediale : & par la 1. prop. 6. comme AC est à CB, ainsi AD à DB: mais CD, ou CA son egale, est commensurable en longitude à BC : Partant par la 10. prop. 10. le quarré medial AD, sera commensurable au rectangle DB : & par le corolaire de la 24. propo. 10. iceluy rectangle sera medial. Donc le rectangle compris de deux lignes mediales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

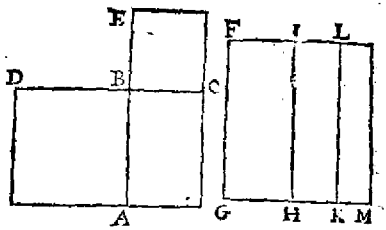
SCHOLIE.

Si les mediales DC, CB commens. en longitude sont √√2 & √√32: le rectangle d'icelles, sçauoir DB, sera √√64, c'est à dire √8, qui est medial.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Le rectangle compris de deux lignes

mediales commensurables en puissance seulement, est rationel, ou medial.



Soient les deux mediales commẽsurables en puissãce seulement AB & BC, comprenant le rectangle AC: Ie dis qu'iceluy rectangle est rationel, ou medial.

Qu'ainsi ne soit. Sur AB & BC soient faicts les quarrez AD & CE, lesquels comme estans faicts sur lignes mediales seront mediaux. Maintenant soit proposee la ligne rationelle FG, & sur icelle soient descrits les trois rectangles FH, IK, LM, egaux aux trois figures AD, AC, CE, par la 45. prop. 1. Et d'autant que les quarrez AD, & CE sont mediaux, leurs egaux rectangles FH, LM seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationelle FG, leurs autres costez GH & KM, seront rationnaux commens. en puissance seulement à FG par la 23. prop. 16. Mais d'autant que les quarrez AD & CE sont commensurab. (estans faicts sur lignes commens. en puissance) leurs egaux rectangles FH & LM seront aussi commens. mais par la 1. pr. 6. comme FH est à LM, ainsi la ligne droicte GH est à la ligne droicte KM: donc par la 10. prop. 10. GH & kM seront commens. en longitude; & par la 20. prop. 10. le rectangle de GH

& KM sera rationel. Et pource que AB, BD sont egales, & BC, BE aussi egales, comme DB est à BC, ainsi AB à BE. Mais comme DB à BC, ainsi AD à AC par la 1. propos. 6. & comme AB est à BE, ainsi AC à CE: donc comme AD à AC, ainsi AC à CE: & partant AD, AC, CE sont proportionnaux: & par consequent leurs egaux FH, HL, LM seront aussi proportionnaux. Mais par la 1. prop. 6. les lignes GH, HK, KM sont entr'elles, comme les rectangles FH, HL, LM: elles seront donc proportionelles: & par la 17. prop. 6. le rectangle de GH, KM, sera egal au quarré de HK. Or le rectangle d'icelles GH, KM a esté demonstré rationnel: donc aussi le quarré de HK sera rationel: & par consequent la ligne HK sera aussi rationelle: & par la 6. def. 10. elle sera pareillement commensurable à la rationelle proposee FG, ou à son egale HI, soit en longitude & puissance, ou en puissance seulement: Si en longitude, le rectangle HL contenu sous icelles HI, HK, ou le rectangle AC qui luy est egal, sera rationel par la 20. prop. 10. mais si HK est commensurable en puissance seulement à HI, iceluy rectangle HL ou AC sera medial par la 22. prop. 10. Parquoy le rectangle compris de deux lignes mediales commensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

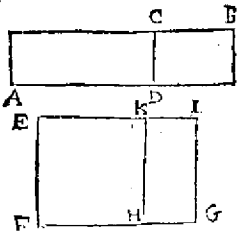
Soient les mediales AB & BC, VV8, & VV2: (desquelles les puissances sont commensurables, car elles sont en raison double.) Le rectangle d'icelles AC sera VV16, c'est à dire 2, qui est rationel. Mais si AB est VV12, & BC VV3, (desquelles les puissances sont commens. estant en raison double.) Le rectangle AC sera VV36, c'est à dire V6, qui est vn medial.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

Vne figure mediale, n'eſt pas plus grande qu'vne figure mediale, d'vne figure rationelle.

Soit la figure mediale AB qui excede le medial AC du rectangle DB : ie dis que DB n'eſt pas figure rationelle.

Qu'il ne ſoit ainſi: Sur vne propoſée rationelle EF ſoient faicts les rectangles EG & EH, egaux aux rectangles AB & AC par la 45. prop. 1. tellement que HI ſera egal à DB : partant iceux rectangles EG, EH ſeront mediaux, leſquels eſtans appliquez ſur la rationnelle EF, les autres coſtez FG & FH ſeront lignes rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement à EF par la 23. prop. 10.



Maintenant ſi on dit que HI eſt rationel, eſtant appliqué ſur la rationelle KH, l'autre coſté GH ſera rationel commenſ. en longitude à KH par la 21. prop. 10. mais FH eſt incom. en long. à KH, ou EF: donc par la 14. prop. 10. FH & GH ſeront incommenſ. en longitude : mais comme FH à GH, ainſi le rectangle de FH & GH au quarré de GH par la 1. prop. 6. (car ils ſont de meſme hauteur.) Partant par la 10. prop. 10. le quarré de GH eſt incommenſ. au rectangle de FH & GH. Il le ſera auſſi à deux fois le

rectangle de FH & GH par la 14.prop.10. Or le mesme quarré de GH est comm. au quarré de FG, (icelles lignes GH, FG estans rationelles,) & par la 16.p. 10. les deux quarrez de FH & GH, ensemble seront commens. au quarré de GH: mais iceluy quarré est incommensurable à deux fois le rectangle de FH & GH: donc par la 13.prop.10. les deux quarrez de FH & GH seront ensemble incommens. à deux fois le rectangle de FH & GH. Mais iceux deux quarrez, & deux fois le rectangle de FH & GH sont egaux au quarré de FG par la 4.prop.2. donc par la 17.p.10. le quarré de FG sera incommens. aux deux quarrez de FH & GH ensemble: lesquels estans rationaux (car ils sont faits sur lignes rationelles) il faudra que le quarré de FG soit irrationel, par la 10.def. 10. & par consequent la ligne FG irrationelle, laquelle cy dessus auons monstré estre rationelle. Ce qui est absurde: donc le rectangle HI, ou son egal DB n'estoit pas rationel. Parquoy vne figure mediale n'est pas plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

GCD Lyon 1 Mathématiques

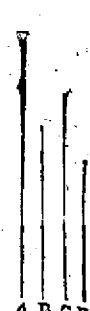
SCHOLIE.

Soit le rectangle medial AB $\sqrt{50}$, *& le rectangle* AC $\sqrt{18}$: *le rectangle restant* DB *sera* $\sqrt{8}$, *qui est medial. Derechef* AB *estant* $\sqrt{32}$, *&* AC $\sqrt{20}$; *le restant* DB *sera* $\sqrt{32} - \sqrt{20}$, *qui n'est pas rationel.*

PROBL. 4. PROP. XXVIII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel.

Soient deux lignes rationelles commens. en puissance seulement A & B, (trouuees par le lemme qui precede la 22.prop. de ce liure) entre lesquelles (par la 13.propo.6.) soit trouuee la moyenne proportionelle C; puis (par la 12.propos.6.) aux trois A, B, C, soit trouuee la quatriesme proportionelle D: Ie dis que C & D sont les deux lignes demandees.



Car puis que C est moyenne proport. entre A & B, le rectangle de A & B (lequel par la 22. p. 10. est medial) sera egal au quarté de C par la 17.prop.6.& par la 22. prop.10. C qui peut le rectangle medial, est medialle: Item puis que comme A à B, ainsi C à D, mais A est commensurable en puissance seulement à B, aussi sera C à D par la 10.prop.10. & par la 24.propos.10. D sera ligne mediale (pour estre commens. en puissance à la mediale C.) Voila donc les deux lignes commens. en puissance seulement qui sont trouuees. Reste à prouuer que leur rectangle est rationel.

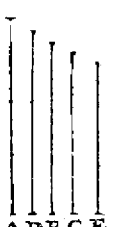
D'autant que comme A est à B, ainsi C à D, & en permutant comme A à C ainsi à BD; & comme A à C, ainsi C à B. Pareillement comme C sera à B, ainsi B sera à D par la 11.pr.5. parquoy B est moyenne prop. entre C & D, & par la 17. prop.6. le quarré d'icelle B sera egal au rectangle de C & D. Mais iceluy quarré de B est rationel: donc le rectangle comprins de C & D est aussi rationel. Nous auons donc trouué C & D mediales commens. en puissance seulement qui comprenent vn rectangle rationel; ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit AV 20, & BV 12. donc la moyenne prop. C sera VV 240. & puis que comme A à B, ainsi C à D; D sera VV 86⅔. Or les puissances de VV 240. & VV 86⅔ sont commens. car elles sont comme 3 à 1: & le rectangle contenu d'icelles est VV 20736, c'est à dire 12, egal au quarré de V 12, qui est aussi 12: & partant icelluy rectangle de C & D commens. en puissance seulement est rationel.

PROBL. 5. PROP. XXIX.

Trouuer deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial.



Soient trois lignes rationelles commens. en puissence seulement A, B, C, trouuees comme il est enseigné au lemme qui precede la 22. prop. 10. & par la 13. prop. 6. entre A & B soit trouuee la moyenne proportionelle D: puis par la 12. p. 6. soit faict comme B à C ainsi D à E: Ie dis que D & E sont les deux mediales demandees.

Car en premier lieu, il est euident que D est mediale par la 22. prop. 10. d'autant que par la 17. posit. 6. elle peut le rectangle irrationel de A & B: mais comme B à C, ainsi D à E, & B est commens. en puissance seulement à C, aussi par la 10. prop. 10. D sera commens. en puissance seulement à E: Et par la

24. prop. 10. D estant mediale, E sera aussi mediale commens. en puissance seulement à D.

D'auantage, ie dis que le rectangle des deux medialles D & E est aussi medial. Car puis que comme B à C, ainsi D à E, en permutant B sera à D comme C à E: mais B est à D comme D à A; partant comme D est à A, ainsi C est à E; & par la 16. prop. 6. le rectangle des extremes D & E sera egal au rectangle des moyennes A & C. Mais le rectangle de A & C, rationnelles commens. en puissance seulement, est medial par la 22. prop. 10. Donc par le corollaire de la 24. prop. 10. le rectangle de D & E sera aussi medial. Parquoy nous auons trouué deux lignes medialles commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE 1.

Soit A 20, *B* $\sqrt{}$200, *& C* $\sqrt{}$80. *Donc la moyenne prop.* D, *sera* $\sqrt{}\sqrt{}$80000. *Et puis que comme* B *à* C, *ainsi* D *à* E; *icelle* E *sera* $\sqrt{}\sqrt{}$12800. *Or les puissances de* D *&* E, *sont commensurables, car elles sont comme* 5 *à* 2: *& le rectangle d'icelles est* $\sqrt{}\sqrt{}$1024000000, *c'est à dire* $\sqrt{}$32000, *egal au rectangle de A & C; qui est* $\sqrt{}$32000.

Or és choses suiuantes nous aurons besoin de ce probleme cy.

Trouuer deux nombres plans semblables.

Soient pris quatre nombres proportionnaux A 6. C 12. A, B, C, D, *c'est à dire que comme A est à B,* B 4. D 8. *ainsi* C *soit à* D. *Mais A & B se multipliant* E 24. F 96. *entr'eux facent E: Item C & D se multipliant facent* F. *Donc E & F seront nombres plans semblables, puis qu'ils ont les costez proportionnaux.*

Or d'autant qu'il a esté demonstré és 28. & 29.p.9. que si on multiplie vn nombre impair ou pair, par vn pair, est produit vn nombre pair; mais vn impair, si on multiplie vn impair par vn impair; il appert par quelle maniere peuuent estre trouuez deux plans semblables, l'vn & l'autre desquels soit pair ou impair; ou vn seul pair, & l'autre impair: Car si les costez prins sont nombres pairs, les plans d'iceux seront aussi pairs; mais si les nombres sont impairs, les plans d'iceux seront aussi impairs. Que si les costez de l'vn sont nombres impairs, mais de l'autre pairs, le plan de ceux-là sera impair, mais de ceux-cy pair: Semblablement les plans seront pairs, si chacun a vn costé nombre pair, mais l'autre impair, &c.

LEMME 1.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le composé d'iceux soit aussi quarré.

Soient trouuez par les choses cy-dessus dictes deux plans semblables AB & C, vn chacun desquels soit pair ou impair. Et d'autant que par les 24. & 26. prop. 9. si on oste d'vn pair vn pair, ou bien vn impair d'vn impair, le reste est pair; estant osté BD egal à C de AB, le reste AD sera pair; & iceluy AD estant diuisé en deux egalement en E; Ie dis que le nombre faict de AB en BD (qui est vn quarré par la 1 prop. 9) auec le quarré du nombre ED, faict vn quarré. Car puis que le nombre AD est diuisé en deux egalement en E, & à iceluy est adiousté DB; le nombre qui est faict de AB en BD, ensemble auec le quarré du nombre DE, sera egal au quarré du nombre EB, par le 6. theo. de ceux que nous auons demonstré à la 14. prop. 9. Parquoy les deux quarrez, sçauoir celuy faict de AB en BD, & celuy du nombre DE adiousteż ensemble seront vn quarré, sçauoir celuy qui sera produict de BE. Ce qui estoit proposé.

A.....E.....D.....B
C.....

COROLLAIRE.

De ces choſes eſt manifeſte que quand AB & C ſont ſemblables, c'eſt trouuez en la meſme maniere les deux nombres quarrez des nombres BE, ED, deſquels l'excez, ſçauoir le nombre faict de AB en BD, eſt auſſi quarré.

Que ſi les nombres AB & C ne ſont prins ſemblables, l'vn & l'autre toutesfois pair, ou impair, ſeront trouuez en la meſme maniere les deux quarrez des nombres BE, ED, deſquels l'excez, ſçauoir le nombre faict de AB en BD n'eſt quarré. Car s'il eſtoit quarré, par la 2 propoſit. 9. les nombres AB, BD, c'eſt à dire AB & C, ſeroient plans ſemblablables. Ce qui eſt abſurde, puis qu'ils ont eſté poſez diſſemblables.

SCHOLIE 2.

Parquoy s'il faut trouuer deux nombres quarrez, deſquels l'excez ſoit auſſi nombre quarré, nous prendrons comme cy-deſſus, deux plans ſemblables, deſquels l'vn & l'autre ſoit pair ou impair, ſçauoir AB & C, & acheuerons comme il eſt dict au prochain lemme.

Que s'il faut trouuer deux quarrez, deſquels l'excez ne ſoit quarré, il faudra prendre deux nombres plans diſſemblables, & parachéuer comme deſſus. Ce qu'on obtiendra plus facilement, diuiſant vn nombre quarré en deux nombres, l'vn deſquels ſoit quarré, & l'autre non. Comme 16 en 4 & 12: ou 36 en 16 & 20: & ainſi des autres.

LEMME. 2.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le composé d'iceux ne soit quarré.

Soient deux nombres A..H..I.E.F.G...D.....B plans semblables AB, & C..... C pairs, ou impairs, & soit faict mesme construction qu'au lemme preced. tellement que le quarré faict de la multiplication des nombres semblables AB, DB entr'eux, ensemble auec le quarré de DE, soit egal au quarré de BE: en apres de DE soit ostée l'vnité EF. Donc le quarré de DF sera moindre que le quarré de DE, à cause de l'inegalité des costez. Ie dis que le nombre composé des nombres quarrez, desquels l'vn est faict de AB en BD, & l'autre de DF en soy, n'est pas quarré. Car si ce composé estoit nombre quarré, il sera plus grand, ou egal, ou moindre que le quarré de BF: Soit premierement plus grand; & partãt le costé d'iceluy sera plus grand que le costé BF: donc le costé d'iceluy sera egal, ou plus grand que le nõbre BE: (car il ne sera moindre, pource qu'entre BE, BF, nombres differens de l'vnité, ne tombe aucun milieu, & le susdit costé seroit milieu entre iceux, s'il estoit posé plus grand que BF, mais moindre que BE) Si on dict qu'il est egal, tellement qu'au quarré de BE, soit egal le nombre quarré composé du quarré de AB en BD, & du quarré de DF, puis qu'au mesme quarré de BE, il a esté demonstré au lemme precedent, estre egal le nombre faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DE; celuy faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DF, sera egal à celuy là faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DE. Ostant donc le commun faict de AB en DB, le reste quarré de DF, sera egal au reste quarré de DE; & partant le costé DF aussi egal au costé DE, la partie au tout: ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarrez, des-

quels l'vn eſt faict de AB *en* BD, *& l'autre de* DE *en ſoy, n'eſt pas egal au nombre* BE. *Mais il n'eſt pas plus grand. Car ſi faire ſe peut, le coſté d'iceluy ſoit egal au nombre* BI, *qui eſt plus grand que* BE. *Donc puis que le quarré de* BI *plus grand coſté, eſt plus grand que le quarré de* BE *moindre coſté; pareillement le compoſé des quarrez, deſquels l'vn eſt faict de* AB *en* BD, *& l'autre de* DF *en ſoy.* (*puis que ce compoſé eſt poſé egal au quarré de* BI) *ſera plus grand que le quarré de* BE. *Mais au precedent lemme le quarré de* BE *a eſté demonſtré egal au nombre faict de* AB *en* BD, *enſemble au quarré de* DE: *oſtant donc le commun nombre faict de* AB *en* BD, *reſtera le quarré de* DF, *plus grand que le quarré de* DE, *& partant le coſté* DF *plus grand que le ceſte* DE, *la partie que le tout. Ce qui eſt abſurde. Donc le coſté du quarré compoſé des quarrez, deſquels l'vn eſt faict de* AB *en* BD, *& l'autre de* DE *en ſoy, n'eſt pas plus grand que le coſté* BF: *mais il a eſté demonſtré qu'il n'eſt pas auſſi egal, ny moindre. Donc iceluy quarré compoſé n'eſt pas plus grand que le quarré de* BF.

Soit maintenant ſi faire ſe peut, le nombre faict de AB *en* BD, *enſemble auec le quarré de* DF, *egal au quarré de* BF; *& ſoit poſé* AH *double de l'vnité* EF. *Donc puis que le tout* AD *eſt double du tout* ED, (*car* AD *a eſté diuiſé en deux egalemẽt en* E) *& l'oſté* AH *double de l'oſté* EF, *auſſi le reſte* HD *ſera double du reſte* FD *par la 7. p. 7. & partant* HD *eſt diuiſé en deux egalement en* F: *Parquoy par le 6. theor. de ceux que nous auons demonſtré ſur la 14. p. 9. le nõbre faict de* HB *en* BD, *enſemble auec le quarré de* DF, *ſera egal au quarré de* BF: *Mais au meſme quarré de* BF, *eſt poſé egal le nombre faict de* AB *en* BD *enſemble auec le quarré de* DF. *Donc le nombre faict de* HB *en* BD, *enſemble auec le quarré de* DF, *eſt egal à celuy faict de* AB *en* DB, *enſemble auec le quarré de* DF. *Oſtant donc le commun quarré de* DF, *reſtera le nombre faict de* HB *en* BD, *egal à celuy*

fait de AB en DB. Parquoy puis que HB, AB multiplians le mesme BD, produisent nombres egaux, & par la 18. p. 7. les multiplians ont mesme raison que les produits; HB sera egal à AB, la partie au tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DF, n'est pas egal au quarré de BF.

Soit finalement, si faire se peut, le nombre faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DF, moindre que le quarré de BF; & partant le costé d'iceluy, moindre que le costé BF, lequel soit BG, tellement que le nombre faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DF, soit egal au quarré de BG: Soit pris AI double d'iceluy EG. Dõc puis que le tout AD est double du tout FD, & l'osté AI double de l'osté EG; par la 7. p. 7. le reste ID sera aussi double du reste GD; & partant ID est diuisé en deux egalement en G. Parquoy par le 6. theor. demonstré sur la 14. p. 9. le nombre faict de IB en BD ensemble auec le quarré de DG, est egal au quarré de BG. Mais au mesme quarré de BG a esté posé egal le nombre faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DF: Donc le nombre faict de IB en BD, ensemble auec le quarré de DG, est egal à celuy faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DF. Ostant donc les quarrez de DG & DF, desquels celuy de DG est moindre, restera le nombre faict de IB en BD, plus grand que celuy faict de AB en BD, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre faict de AB en BD ensemble auec le quarré de DF, n'est pas moindre que le quarré de BF: mais il a esté demonstré qu'il n'est pas aussi plus grand, ny egal. Donc le nombre produict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DF, n'est pas quarré. Ce qui estoit proposé à demonstrer.

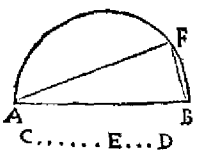
SCHOLIE. 3.

Par cecy nous trouuerons facilement deux nombres, tels que le composé d'iceux ne soit à l'vn ny à l'autre comme

nombre quarré à nombre quarré. Car si par le Lemme precedent on trouue deux quarrez, tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ce composé non quarré ne sera à l'vn ny à l'autre d'iceux, comme nombre quarré à nombre quarré. Nous obtiendrons le mesme, diuisant quelque nombre quarré en deux non quarrez : *Car ainsi le quarré total ne sera à l'vn ny à l'autre d'iceux nombres (lesquels il est diuisé, en raison de nombre quarré à nombre quarré.*

PROB. 6. PROP. XXX.

Trouuer deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.



Soit proposée la rationele, AB, & soient trouuées (comme il a esté enseigné au 2. Scholie de la preced. prop.) les deux nombres quarrez CD, CE, l'excez desquels DE ne soit quarré : puis par le corol. de la 6. p. 10. soit trouuée AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre DE; & apres auoir descrit vn demy cercle sur AB, soit accommodée en iceluy AF : & ioincte BF. Ie dis que AB & AF sont les deux lignes requises.

Car d'autant que le quarré de AB est au quarré

de AF comme le nombre CD eſt au nombre DE, ils ſeront commenſurables par la 6. p. 10. & partant auſſi leurs coſtez AB & AF aumoins en puiſſance; mais AB eſt rationnele, & par conſequent auſſi ranele AF qui luy eſt commenſurable mais; les quarrez de AB & AF n'eſtans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. p. 10. les lignes AB & AF ſeront incommenſurables en longitude: elles ſeront donc rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement.

Maintenant veu que l'angle F au demy cercle eſt droit par la 31. p. 3. le quarré de AB ſera egal aux deux quarrez de AF & FB, c'eſt à dire que la ligne AB peut plus que la ligne AF, du quarré de FB. Et d'autant que comme CD eſt à DE, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de AF, par conuerſion de raiſon, comme le nombre quarré CD ſera au nombre quarré CE, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de FB (car ainſi que CD excede DE du quarré de CE, ainſi auſſi le quarré de AB ſurpaſſe le quarré de AF du quarré de FB) parquoy les lignes droictes AB, FB ſont commenſurables en longitude par la 9. p. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commenſurables en puiſſance ſeulement, & la plus grande AB peut plus que AF du quarré de la ligne FB, qui luy eſt commenſurable en longitude : ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 6 : AF ſera √20 : & partant BF ſera 4. commenſ. en longitude à AB.

La conſtruction & demonſtration tant de ceſte prop. que de pluſieurs autres de ce liure, ſont tellement deffectueuſes en

l'edition de Donnot, que ceux qui la verront pourront eux-mesmes (ayans bien, entendu ce que nous auons dict iusques icy) recognoistre facilement les deffauts d'icelle : c'est pourquoy nous ne nous arresterons à les remarquer.

PROB. 7. PROP. XXXI.

Trouuer deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude.



Soit exposée la rationele AB & soient trouuez (comme il a esté enseigné au lemme 2. de la prop. 29. de ce liure) deux nombres quarrez tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ou plustost soit diuisé quelque nombre quarré CD, en deux nombres non quarrez CE, ED, à fin que le tout CD ne soit à l'vn ou à l'autre d'iceux CE, ED, comme nombre quarré à nombre quarré : puis sur AB soit descrit le demy cercle AFB; & par le corol. de la 6. p. 10. soit trouuée la ligne dioicte AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre CE: & finalement soit menée BF. Ie dis que AB & AF sont les deux lignes demandées.

Car on prouuera tout ainsi qu'à la precedente, que AB & AF sont rationeles commensurables en puissance seulement (d'autant que leurs quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré) & que AB peut plus que AF du quarré de BF. Et d'autant que comme CD est à CE, ainsi le quarré de AB est au quarré de AF: par conuersion de raison comme CD sera à DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de BF. Mais CD n'est pas à DE comme nombre quarré à nombre quarré: donc aussi le quarré de AB, ne sera pas au quarré de BF comme nombre quarré à nombre quarré. Parquoy les lignes droictes AB, BF seront incommensurables en longitude, par la 9. prop. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commensurables en puissance seulement, tellement que la plus grande AB peut plus que AF, du quarré de la ligne BF, qui luy est incommensurable en longitude: Ce qu'il falloit faire.

SHOLIE.

Si la rationele AB *est* 3: AF *sera* $\sqrt{6}$, *&* BF 3.

PROB. 8. PROP. XXXII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel; & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trouuées par la 30. prop. de ce liure deux lignes rationeles A & B commensurables en puissance seulement, & que la plus grande A puisse plus que la plus petite B du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude : Item par la 13. prop. 6. soit trouuée C moyenne proportionnele entre A & B ; & finablement par la 12. prop. 6 aux trois lignes A, B, C, soit trouuée la 4. proportionele D. Ie dis que C & D sont les deux lignes demandées.



Car puis que A & B sont rationeles commensurables en puissance seulement, par la 22. prop. 10. le rectangle d'icelles A & B sera irrationel ; & la ligne C pouuant iceluy par la 17 prop. 6. (car elle est moyenne prop. entre A & B) sera mediale. Et d'autant que comme A est à B, ainsi C à D ; & A est commensurable en puissance seulement à B, aussi C sera commensurable en puissance seulement à D, par la 10. prop. 10. Mais puis que C est mediale, par la 24. prop. 10. D, sera aussi mediale. Et d'autant que comme A est à B, ainsi C à D : & en permutant comme A sera à C, ainsi B sera à D : mais par la construction comme A est à C, ainsi C est à B : pareillement donc comme C sera à B, ainsi B sera à D : & partant le rectangle de C & D sera egal au quarré de B, par la 17. prop. 6. & puis que le quarré de la rationele B est rationel, le rectangle compris soubs C & D qui luy est egal sera aussi rationel. Et veu que comme A est à B, ainsi C à D ; & peut plus que B du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, aussi par la 15. prop. 10. C pourra plus que D du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude. Nous auons donc trouué C & D, deux

mediales

mediales commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel, C pouuant plus que D du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude : ce qu'il falloit faire.

Que ſi on vouloit que C peuſt plus que D du quarré d'vne ligne qui luy fuſt incommenſ. en longitude, il ne faudroit que trouuer A & B, telles qu'elles ſont requiſes par la precedente prop. au lieu que cy deſſus elles ont eſté trouuées par la 30. p. 10. & acheuer le tout comme deſſus.

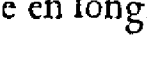
SCHOLIE.

Soit A 8, B V 28 : le rectangle d'icelles ſera V 1792, & la ligne C V V 1792, qui eſt mediale. Et puis que comme A 8, eſt à B V 28, ainſi C V V 1792 eſt à D, icelle ſera V V 343 : donc C & D ſont deux mediales commenſ. en puiſſance ſeulement, leſquelles contiennent vn rationel 28. & la plus grande C peut plus que la moindre D, d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude. Car ſi du quarré d'icelle C, on oſte le quarré de D, reſtera V 567, & ſeront commenſ. en longit. les deux mediales V V 1792 & V V 567. Car elles ſont comme 4 à 3. Derechef ſoit A 8, & B V 20 : le rectangle d'icelles ſera V 1280, & la ligne C V V 1280, & partant D ſera V V 125 : donc C & D ſont mediales comprenant vn rationel 20, & C peut plus que D du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude.

PROB. 9. PROP. XXXIII.

Trouuer deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial, & que la

plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.



Soient trouuées trois lignes rationeles commens. en puissance seulement, A, B, C, & que A puisse plus que C du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longitude : (ce qu'on obtiendra trouuant premierement par la 30. p. 10. les deux rationeles A & C commensurables en puissance seulement, & que A puisse plus que C du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude : puis à C & A soit trouuée B commens. en puissance seulement, par ce qui est enseigné au lemme qui precede la 22. p. 10.) Item par la 13. p. 6. soit trouuée D moyenne prop. entre A & B : puis par la 12. p. 6. soit faict comme D à B, ainsi C à E. Ie dis que D & E sont les deux lignes demandées.

Car puis que D est moyẽne prop. entre A & B, par la 17. p. 6. elle peut le rectangle d'icelles A & B, qui est irrationel, & par consequent D est mediale par la 22. p. 10. Mais d'autant que comme D à B, ou A à D, ainsi C à E, en permutant comme A sera à C, ainsi D sera à E. Mais A & C sont commens. en puissance seulemẽt : donc aussi D & E : & par la 24. p. 10. D estãs mediale, E le sera aussi. Et derechef puis que comme D à B, ainsi C à E, par la 16. p. 6. le rectangle des extrémes D & E sera egal au rectangle des moyẽnes B & C. Mais par la 22. p. 10. le rectangle de B & C rationeles commens. en puissance seulement est medial. Dõc par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de

D & E sera aussi medial. Finablement puis que comme A à C, ainsi D à E; & A peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude, par la 15. p. 10. D pourra aussi plus que E du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude. Nous auons donc trouué deux mediales D & E commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit faire.

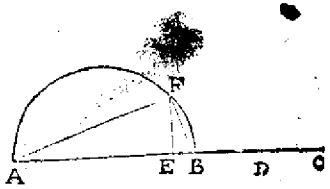
Que si on trouue A, B, C rationeles commens. en puissance seulement, tellement que B puisse plus que C du quarré d'vne ligne qui luy soit incommens. en longitude, & on acheue de construire comme dessus; on demonstrera semblablement que D & E sont mediales, commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande D, peut plus que E du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude.

SCHOLIE.

Soit A 8, B √ 48, & C √ 28: *le rectangle compris de* A & B *sera donc* √ 3072. *& la ligne droicte* D √ 3072, *qui est mediale, & A estant à C, comme D à E, icelle sera* √√ 588. *Donc D & E, sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn medial, & la plus grande D peut plus que la moindre E du quarré d'vne ligne, qui luy est commensurable en longitude. Car si du quarré d'icelle D, on oste le quarré de E, le reste sera* √ 972, *qui est commensurable en longitude à icelle* D √ 3072. *Derechef si A est* 8, B √ 48, & C √ 20; D *sera encore* √√ 3072, *mais E sera* √√ 300. *Donc D & E sont deux mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent vn medial, & la plus grande D, peut plus que la moindre E, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude.*

PROB. 10. PROP. XXXIV.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarrez rationel, mais le rectangle contenu d'icelles, medial.



Soient deux lignes rationeles cõmensurables en puissance seulement AB & BC, & que la plus grãde AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude, trouuées comme il a esté enseigné en la 31. prop. 10. & apres auoir couppé en deux egalement CB au poinct D, soit appliqué vn rectangle sur BA egal au quarré de BD, defaillant d'vne figure quarrée par la 28. prop. 6. & soit iceluy rectangle compris de AE & EB : & apres auoir faict le demy cercle sur la ligne BA & mené la perpendiculaire EF, soient menées BF & FA : Ie dis qu'icelles lignes sont les requises.

Car puis que AB & BC sont inegales, & que la plus grande AB peut plus que la moindre BC du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude, & que le rectangle de AE, EB appliqué sur AB, & defaillant d'vne figure quarrée, est egal au quart du quarré de BC (c'est à dire au quarré de

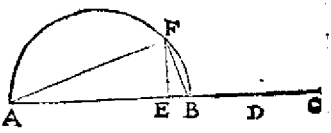
DB: car nous auons demonſtré au ſcholie de la 4. p. 2. que le quarré de BC eſt quadruple du quarré de BD:) les deux lignes AE & EB ſeront incommenſ. en longitude par la 19. p. 10. Mais par le ſcholie de la 13. p. 6. EF eſt moyenne proport. entre icelles AE, EB; & partant comme il a eſté demonſtré à la 11. p. 10. elle ſera incommenſ. en puiſſance à EA. Mais comme FE à EA, ainſi BF à FA par la 4. p. 6. (car iceux triangles ſont equiangles par la 8. p. 6.) donc puis que FE, EA ſont incommenſ. en puiſſance, par la 10. p. 10. BF & FA ſeront auſſi incommenſ. en puiſſance. Item le quarré de AB, eſt egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. lequel quarré de BA eſt rationel, eſtant la ligne AB rationele; partant le compoſé des quarrez de BF & FA, ſera auſſi rationel. Et d'autant que par l'hypotheſe le rectangle de AE, EB, eſt egal au quarré de BD, & qu'il eſt auſſi egal au quarré de la moyenne proport. EF, par la 17. prop. 6. le quarré de EF ſera egal au quarré de BD: partant la ligne EF eſt egale à BD: & par la 16. p. 6. le rectangle de BF & FA ſera egal au rectangle de BA & EF, ou BD ſon egale, (car par la 8. & 4. prop. 6. AB eſt à BF comme FA à EF.) Or par la 1. prop. 6. le rectangle de AB & DC eſt double du rectangle de AB & BD, (car la baſe BC eſt double de la baſe BD.) Mais le rectangle de AB & BC eſt medial par la 22. prop. 10. donc auſſi ſa moitié rectangle de AB & BD: & par conſequent medial ſon egal rectangle de BF & FA. Nous auons donc trouué les deux lignes AF, FB, incommenſurables en puiſſance, qui font le compoſé de leurs quarrez rationel: mais le rectangle compris d'icelles, medial: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB *eſt* 6, *&* BC $\sqrt{12}$; BD *ou* EF *ſera* $\sqrt{3}$: *& par conſequent* AE *ſera* $3+\sqrt{6}$, *&* EB $3-\sqrt{6}$: *& puis que le quarré de* AF *eſt egal aux quarrez de* AE, EF : *icelle* AF *ſera* $\sqrt{(18+\sqrt{216})}$: *mais* BF *ſera* $\sqrt{(18-\sqrt{216})}$. *Donc icelles* AF, FB *ſont incommenſurables en puiſſance, & le compoſé de leurs quarrez, ſçauoir* 36, *eſt rationel, mais le rectangle compris d'icelles, ſçauoir eſt* $\sqrt{108}$, *eſt medial.*

PROB. II. PROP. XXXV.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, qui facent le compoſé de leurs quarrez medial : mais qu'elles comprenent vn rectangle rationel.



Soiẽt deux mediales commenſ. en puiſſance ſeulement AB & BC, comprenant vn rectãgle rationel, & que AB puiſſe plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incõmenſurable en longitude, trouuées comme il a eſté enſeigné en la 32. p. 10. & ſoit acheuée la conſtruction comme en la precedente. Ie dis que BF & FA ſont les deux lignes demandées.

Car nous demonſtrerons ainſi qu'en la preco-

dente prop. qu'icelles BF & FA ſont incommenſ. en puiſſance : & le quarré de BA eſt medial, eſtant deſcrit ſur vne ligne mediale, & egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. Partant le compoſé des deux quarrez de BF & FA eſt medial. Et d'autant que le rectangle de AB, BC (comme il a eſté demonſtré en la preced. prop.) eſt double du rectangle de AB, BD ; & qu'il eſt rationel par la conſtruction, auſſi iceluy rectangle de AB, BD ſera rationel. Mais il a eſté demonſtré en la precedente qu'il eſt egal au rectangle de BF & FA : & par conſequent iceluy eſt auſſi rationel. Nous auons donc trouué deux lignes AF & BF incommenſurables en puiſſance, qui font le compoſé de leurs quarrez medial : mais le rectangle compris d'icelles rationel : ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB eſt √√432, & BC √√48 : BD ou EF ſera √√3, & AF √(√108 + √72) ; mais BF eſt √(√108 — √72) : & partant icelles AF, BF ſont incommenſurables en puiſſance, & le compoſé de leurs quarrez, ſçauoir eſt √432, eſt medial : mais le rectangle compris d'icelles, ſçauoir eſt √36, c'eſt à dire 6, eſt rationel.

PROB. 12. PROP. XXXVI.

Trouuer deux lignes droictes incommẽſurables en puiſſance, qui facent le compoſé de leurs quarrez medial, & auſſi le rectangle d'icelles, medial, &

incommensurable au composé de leurs quarrez.

Soient deux mediales commensurables en puissance seulement AB & BC, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude, trouuées comme nous auons enseigné à la fin de la 33. prop. 10. & apres auoir acheué la construction comme en la 34. p. 10. Ie dis que BF & FA sont les lignes demandées.

Car premierement elles sont incommensurables en puissance : comme en la demonstration de la 34. p. 10. & le quarré de BA estant medial comme en la precedente, le composé des quarrez de BF & FA sera aussi medial : Item le rectangle de AB & BC estant medial par l'hypothese, le rectangle de AB & BD (ou EF son egale) qui est sa moitié, sera aussi medial par le corollaire de la 24. p. 10. & par consequent medial le rectangle de BF & FA qui luy est egal, comme il a esté demonstré en la 34. prop. 10. Et d'autant que par l'hypothese AB est incommensurable en longitude à BC, mais à icelle BC est commensurable en longitude sa moitié BD : Donc par la 13 p. 10. BD sera aussi incommensurable en longitude à AB, & par la 1. prop. 6. le quarré de AB sera au rectangle de AB & BD (d'autant qu'ils sont tous deux de la hauteur de AB) comme AB à BD, c'est à dire incommensurable, par la 10. prop. 10. & par consequent le rectangle de BF, & FA egal au rectangle de AB & BD, sera incommensurable au quarré de BA, c'est à dire au composé des quarrez de BF & & FA. Nous auons donc trouué deux lignes droictes

AF, BF incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle contenu sous icelles medial, & incommensurable au composé d'iceux quarrez: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB est $\sqrt{\sqrt{192}}$, & BC $\sqrt{\sqrt{48}}$; BD ou son egale EF sera $\sqrt{\sqrt{3}}$, & AF $\sqrt{(\sqrt{48}+\sqrt{24})}$, & BF $\sqrt{(\sqrt{48}-\sqrt{24})}$: Parquoy icelles AF, BF *sont incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarrez, sçauoir est $\sqrt{192}$, est medial incommens. à $\sqrt{24}$, rectangle medial compris d'icelles AF,* BF.

Or de ce probleme est manifeste le suiuant.

Trouuer deux mediales incommensurables en longitude & puissance.

Car puis que tant le composé des quarrez des lignes AF, BF, *que le rectangle compris d'icelles, est medial, & qu'iceluy rectangle est incommens. à ce composé, aussi les lignes pouuans iceluy composé, & rectangle, seront pareillement mediales incommens. tant en longitude que puissance. Car si elles estoient commens. en puissance, aussi les quarrez d'icelles, c'est à dire le composé des quarrez des lignes* AF, BF, *& le rectangle sous icelles* AF, FB *seroient commens. Ce qui n'est pas. Parquoy si on prend* AB *pouuant le composé des lignes* AF, FB; *& vne autre ligne pouuant le rectangle d'icelles* AF, FB, *c'est à dire vne moyenne proportionnelle entre AF,* FB, *seront trouuees deux mediales incommensurables en longitude & puissance.*

ICY COMMENCENT LES *ſixaines des lignes irrationelles par la compoſition.*

THEOR. 25. PROP. XXXVII. Six.I.

Si deux lignes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement ſont aſſemblees, la toute ſera irrationelle: & ſoit icelle appellee Binome.



Soient aſſemblees deux lignes rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement AB & BC, trouuees par le lemme qui precede la 22. prop. 10. Ie dis que la toute AC eſt irrationelle.

Car par la 1. prop. 6. le rectangle de AB & BC eſt au quarré de BC, comme AB à BC: mais AB, BC ſont incommenſ. en longitude par l'hypotheſe. Donc par la 10. prop. 10. le rectangle de AB, BC ſera incommenſ. au quarré de BC: & partant par la 14. prop. 10. deux fois le rectangle de AB & BC ſera incommenſ. au quarré de BC. Mais d'autant que les lignes AB, & BC ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, leurs quarrez ſeront commenſurables entr'eux, & le compoſé de tous deux ſera commenſurable au ſeul de BC par la 16. prop. 10. & partant par la 14. p. 10. les deux quarrez d'icelles AB & BC ſeront incommenſ. à deux fois le rectangle de AB & BC, & par la 17. p. 10. le compoſé de deux fois le rectangle &

des deux quarrez, c'eſt à dire le quarré de la toute AC (car par la 4. prop. 2. ce quarré eſt egal aux quarrez de AB, BC, & deux fois le rectangle d'icelles AB, BC) eſt incommenſ. aux deux quarrez de AB & BC, leſquels eſtans rationnaux, & le compoſé d'iceux rationel, le quarré de AC qui luy eſt incommenſurable ſera irrationel, par la 10. def. 10. & par conſequent la ligne AC irrationelle : icelle ſera donc appellee binome. Si donc deux lignes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit AB 2, *&* BC $\sqrt{3}$: *la toute* AC *ſera* $2+\sqrt{3}$. *& ſon quarré eſt* $7+\sqrt{48}$.

Or il appert de ce que deſſus, que de deux lignes rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, ſont procrees deux lignes irrationelles. Car la ligne moyenne prop. entre icelles rationelles eſt irrationelle par la 22. prop. de ce liure, laquelle eſt appellee mediale. Et la compoſee d'icelles, par la 37. prop. 10. eſt vne irrationelle, qui eſt dite binome.

THEOR. 26. PROP. XXXVIII.

Si deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement ; comprenant vn rectangle rationel ſont aſſemblees, la toute ſera irrationelle : & ſoit icelle appellee bimedialle premiere.

Soient assemblees deux mediales AB & BC commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, trouuees par la 28. prop. 10. Ie dis que la toute AC est irrationelle.



Car puisque par la 1. propo. 6. comme AB est à BC, ainsi le rectangle compris sous AB, BC est au quarré de BC; & que AB, BC sont incommensurables en longitude; par la 10. prop. de ce liure, iceluy rectangle de AB, BC sera aussi incommensurable au quarré de AB. Mais le rectangle de AB, BC est commensurable à deux fois iceluy; & au quarré de BC est commens. le composé des quarrez d'icelles AB, BC: (car puisque AB, BC sont commensurables en puissance, leurs quarrez seront commensurables; & partant le composé d'iceux quarrez sera aussi commensurable au quarré de BC par la 16. prop. 10.) Doncle composé des deux quarrez de AB, BC sera incommensurable à deux fois le rectangle compris d'icelles lignes AB, BC par la 14. prop. 10. Parquoy le composé d'iceux deux quarrez, & rectangles, c'est à dire le seul quarré de AC, qui leur est egal par la 4. prop. 2. sera aussi incommensurable à deux fois le rectangle de AB, BC par la 17. prop. 10. Mais à deux fois iceluy rectangle de AB, BC est commensurable vn seul rectangle d'icelles AB, BC: donc par la 13. prop. 10. le quarré de AC sera incommensurable au rectangle compris sous AB, BC: & iceluy rectangle estant rationel par l'hypothese, iceluy quarré de AC sera irrationel par la 10. def. 10. & pource la ligne AC sera aussi irrationnelle par la 11. def. 10. Et icelle ligne soit appellée bimedialle premiere. Si donc deux lignes medialles commensurables en

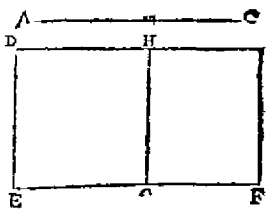
puiſſance ſeulement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE

Soit ABVV54, & BCVV24 : La toute AC ſera VV54+VV24, irrationelle nommee bimediale premiere.

THEOR. 27. PROP. XXXIX.

Si deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial ſont aſſemblees, la toute ſera irrationelle : & ſoit icelle appellee bimediale ſeconde.



Soient aſſemblees les deux mediales AB & BC commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial, trouuees par la 29. prop. 10. Ie dis que la toute AC eſt irrationelle.

Car ſoit vne ligne rationelle propoſee DE, ſur laquelle ſoit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AC, & le rectangle DG egal au compoſé des quarrez de AB & BC par la 45. prop. 1. Et d'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de AC, c'eſt à dire le rectangle DF, eſt egal aux deux quarrez de AB, BC

enſemble auec deux fois le rectangle de AB, BC; le rectangle HF ſera egal à deux fois le rectangle de AB, BC: & puis que par l'hypotheſe le rectangle de AB, BC, eſt medial, par le corol. de la 24. prop. 10. le double rectangle de AB, BC, qui luy eſt commenſ. c'eſt à dire le rectangle HF, ſera auſſi medial. Derechef puis que les quarrez des mediales AB, BC ſont commenſ. le compoſé d'iceux, c'eſt à ſçauoir le rectangle DG ſera auſſi commenſurable à vn chacun d'iceux par la 16. prop. 10. Mais chacun d'iceux quarrez des mediales AB, BC, eſt medial: Donc par le coroll. de la 24. propo. 10. le rectangle DG ſera auſſi medial: Ainſi les deux rectangles DG & HF eſtans mediaux, & appliquez ſur la rationelle DE, (car GH eſt egale à la rationelle DE,) leurs autres coſtez EG & FG ſeront rationaux commenſurables en puiſſance ſeulement à DH, par la 23. propoſi. 10. Maintenant le rectangle de AB & BC eſt au quarré de BC comme AB eſt à BC, par la 1. propo. 6. c'eſt à dire incommenſurable par la 10. prop. 10. & partant le double du rectangle de AB & BC ſera auſſi incommenſ. au quarré de BC: & les deux quarrez de AB & BC eſtans commenſurables entr'eux, les deux enſemble ſeront commenſurables au ſeul de BC, par la 16. prop. 10. & par la 14. prop. 10. les deux quarrez de AB & BC ſeront incommenſurables à deux fois le rectangle de AB & BC: & par conſequent auſſi leurs egaux rectangles DG & HF: & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. EG & FG lignes rationelles ſeront incommenſurables en longitude: elles ſeront donc commenſurables en puiſſance ſeulement; (car autrement elles ne ſeroient rationelles ſi elles eſtoient incommenſurables,) & par la 37. propoſi. 10. la toute compoſee EF ſera irrationelle: & le rectrngle DE

ſera irrationel : car s'il eſtoit rationel la ligne DE eſtant rationelle, il faudroit par la 21. prop. 10. que l'autre coſté EF fut auſſi rationel, ce qui n'eſt pas. DF eſt donc irrationel : & partant auſſi irrationel ſon egal quarré de AC ; & par conſequent la ligne AC irrationelle, qui ſera appellee bimediale ſeconde. Si donc deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par cecy que le rectangle compris d'vne ligne rationelle & d'vne irrationelle, eſt auſſi irrationel. Car il y a eſté demonſtré que le rectangle DF compris de la rationelle DE, & irrationelle EF, ne peut eſtre rationel.

SCHOLIE.

Soit AB$\sqrt{\sqrt{}}$ 18, *&* BC$\sqrt{\sqrt{}}$ 8 : *La toute AC ſera* $\sqrt{\sqrt{}}$ 18 + $\sqrt{\sqrt{}}$ 8, *qui eſt irrationelle, appellee bimediale ſeconde.*

THEOR. 28. PROP. XL.

Si on adiouſte enſemble deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, mais le compoſé de leurs quarrez ſoit rationel ; la toute ſera irrationelle : & ſoit icelle appellee ligne maieure.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel, trouuees par la 34 prop. 10. Ie dis que la toute est irrationelle.

Car d'autant que le rectangle compris sous AB & BC est posé medial, deux fois le mesme rectangle sera aussi medial par le corollaire de la 24. prop. 10. & partant irrationel. Mais par l'hypothese le composé des quarrez de AB & BC est rationel: partant incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC par la 10. def. 10. Et par la 17. prop. 10. le composé des deux rectangles, & des deux quarrez (qui est le quarré de AC par la 4. prop. 2.) sera incommensurable au composé des deux quarrez de AB & BC, qui est rationel: partant le quarré de AC sera irrationel; & son costé AC aussi irrationel: lequel sera appellé ligne maieure. Parquoy si on adiouste deux lignes droictes incommensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

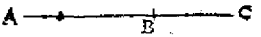
Soit AB $\sqrt{(18+\sqrt{216})}$, *&* BC $\sqrt{(18-\sqrt{216})}$: *La toute* AC *sera donc* $\sqrt{(18+\sqrt{216})}+\sqrt{(18-\sqrt{216})}$, *qui est irrationelle nommee ligne maieure.*

THEOR. 29. PROP. XLI.

Si deux lignes droictes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de

leurs

leurs quarrez medial, sont assemblees, la toute sera irrationelle : & soit icelle appellee ligne pouuant vn rationel, & & vn medial.



Soient assemblees les deux lignes AB & BC, telles que demande la propos. & qu'enseigne à trouuer la 35. proposition de ce liure. Ie dis que la toute AC est irrationelle.

Car puis que le composé des quarrez de AB & BC est medial, & leur rectangle rationel, deux fois iceluy rectangle sera aussi rational, & incommensurable au composé des quarrez de AB & BC, lequel estant medial, par la 17. propos. 10. le composé des deux quarrez, & des deux rectangles, sçauoir le quarré de AC par la 4. prop. 2. sera incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel est rationel : Ainsi par la 10. def. 10. le quarré de AC sera irrationel : & par consequent la ligne AC aussi irrationelle : laquelle sera appellee ligne pouuant vn rationel & vn medial. Parquoy si deux lignes droictes incommensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Soit $AB\sqrt{(\sqrt{108}+\sqrt{72})}$, *&* $BC\sqrt{(\sqrt{108}-\sqrt{72})}$: *La toute* AC *sera donc* $\sqrt{(\sqrt{108}+\sqrt{72})}+\sqrt{(\sqrt{108}-\sqrt{72})}$.

THEOR. 30. PROP. XLII.

Si deux lignes droictes incommensura-

bles en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, incommenſurable au compoſé de leurs quarrez auſſi medial, ſont aſſemblees; la toute ſera irrationelle: Soit icelle appellee ligne pouuant deux mediaux.

Soient aſſemblees les deux lignes AB & BC, (comme en la figure de la prop. 39. pag. 525.) telles que demande la prop & qu'enſeigne à trouuer la 36. prop. 10. Ie dis que la toute AC eſt irrationelle.

Soit expoſee la rationelle DE, ſur laquelle ſoit faicte meſme conſtruction qu'en la 39. prop. 10. ſçauoir que le rectangle DH ſoit egal au quarré de AC; DG aux deux quarrez de AB & BC, lequel ſera medial, comme le compoſé d'iceux quarrez, & incommenſ. au rectangle HF, egal à deux fois le rectangle de AB & BC, auſſi medial, ainſi qu'il a eſté demonſtré en la 39. prop. 10. & par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. EG & GF ſeront auſſi incommenſ. en longitude. Mais les deux rectangles DG & HF eſtans mediaux, & appliquez ſur la rationelle DE, feront les deux autres coſtez EG & FG rationaux par la 23. p. 10. Ainſi EG & FG ſeront rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 37. prop. 10. la toute EF ſera irrationelle. Mais DE eſtant rationelle, le rectangle DF ſera irrationel par le coroll. de la 39. p. 10. Partant la ligne qui peut iceluy rectangle, ſçauoir AC ſera irrationelle: laquelle on appellera ligne pouuant deux mediaux. Si donc deux lignes droictes incommenſurab. en puiſſance, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

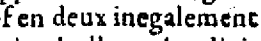
SCHOLIE.

Soit $ABV.(V48+V24)$ *&* $BCV.(V48-V24)$ *Dont*

la toute AC sera $\sqrt{(\sqrt{48}+\sqrt{24})}+\sqrt{(\sqrt{48}-\sqrt{24})}$.

LEMME I.

Si vne ligne droicte est couppee en deux inegalement en vn poinct, & derechef en deux inegalement en vn autre poinct, & les parties de l'vne des diuisions sont inegales aux parties de l'autre diuision, chacune à la sienne: les quarrez des deux lignes de la plus inegale diuision sont plus grands que les quarrez des lignes de la moins inegale.

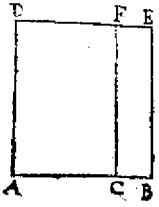


Soit la ligne droicte AC diuisée inegalement en B: & encores inegalement en E, & les premieres parties AB, BC soient plus inegales que les posterieures CE, AE: (c'est à dire que AE soit plus grande que BC.) Ie dis que les quarrez de AB & BC, sont plus grands que ceux de AE & EC.

Car si AC *est couppee en deux egalement en* D; *d'autant que* AB, & BC *sont plus inegales que* CE, AE; *& que* AE *est plus grande que* BC, *il appert que* ED *sera plus petite que* BD: *or par la* 5. *p.* 2. *le rectangle de* AB & BC, *auec le quarré de* DB, *est egal au quarré de* DC: *Item le rectangle de* AE & EC, *auec le quarré de* DE, *est aussi egal au quarré de* DC: *partant le rectangle de* AE & EC *auec le quarré* DF, *est egal au rectangle de* AB & BC, *auec le quarré de* BD. *Et en ostãt les quarrez inegaux des lignes inegales* DE, BD, *le rectangle de* AE & EC *demeurera plus grand que le rectangle de* AB & BC: *& partant son double sera aussi plus grand que le double du rectangle de* AB & BC. *Maintenant les deux quarrez de* AB & BC, *& deux fois le rectangle de* AB & BC, *sont egaux au quarré de* AC *par la* 4. *p.* 2. *auquel sont aussi egaux les deux quarrez de* AE & EC, *& deux fois le rectangle de* AE & EC: *& par consequent les composez des quarrez, & rectangles sont egaux entr'eux: mais les deux rectangles de* AE & EC, *ont esté demonstré plus grands que les deux de* AB & BC: *partant les deux quarrez de* AB & BC *seront plus grands que les deux quarrez de* AE & EC: *Ce qui estoit proposé.*

LEMME. 2.

Vne figure rationelle excede vne figure rationelle, d'vne figure rationelle.

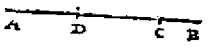


Soient les deux figures rationelles AE & AF, estant AE plus grande que AF de CE: Ie dis que CE est figure rationelle.

Car AE & AF estans rationelles, elles seront aussi commens. & par la 16. prop. 10. AF & CE seront commens. entr'elles, & par consequent rationelles.

THEOR. 31. PROP. XLIII.

La ligne binome ne peut estre diuisee en ses noms, qu'en vn poinct seulement.



Soit le binome AB diuisé en ses noms au poinct C: tellement que AC, CB, soient rationelles commensurables en puissance seulement, comme veut la 37 prop. 10. Ie dis qu'on ne peut diuiser AB en ses noms en vn autre poinct, sçauoir est que les lignes soient rationelles commens. en puissance seulement.

Car s'il se peut faire, soit diuisee derechef AB en ses noms au poinct D. Or il appert que AB n'est couppee en deux egalement és poincts C & D. Car AC, CB. ou AD, DB seroient commens. en longitude contre l'hypothese: il faut donc que AD & DB

soient plus grandes ou plus petites que AC & CB, chacune à la sienne : car si elles estoient egales, elles seroient diuisees sur vn mesme poinct. Si AD & DB sont parties plus grandes que AC & CB, par le lemme qui suit la 42. propos. 10. le composé des quarrez de AC & CB sera plus grand que le composé des quarrez de AD & DB: Et d'autant qu'iceux cõposez sont rationaux (car ce sont quarrez constituicts sur lignes rationelles) leurs excez sera aussi rationel par le lemme preced. Or est-il que le composé des quarrez de AC & CB, auec deux fois le rectangle de AC & CB, est egal au composé des quarrez de AD & DB, auec deux fois le rectangle de AD & DB : (car iceux sont chacun egaux au quarré de AB par la 4. prop. 2.) Il faudra donc que d'autant que les quarrez de AC & CB, sont plus grands que les quarrez de AD & DB, d'autant les rectangles de AC, CB, soient plus petits que les rectangles de AD & DB: mais il a esté demonstré que l'excez des quarrez est rationel : donc l'excez des rectangles sera aussi rationel: (puis que ces excez sont egaux) qui est contre la 27. prop. 10. Car iceux rectangles par la 22. prop. 10. sont mediaux, d'autant que les lignes AC & CB, ou AD & DB, sont rationelles commens. en puissance seulement. Donc le binome AB n'a peu estre diuisé en ses noms qu'en C : car en quelque autre poinct qu'on le diuise, il s'ensuiura la mesme absurdité. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

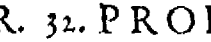
Il est à notter qu'és cinq sortes de lignes irrationnelles qui suyuent, iamais les deux noms d'icelles ne peuuent estre egaux: car comme il a esté dict cy dessus, ils seroient commen-

en longitude, & ils ont esté demonstrez incommensurables en long. faut aussi remarquer que quand on dict qu'icelles lignes ne peuuent estre diuisees en leurs noms qu'au poinct proposé, faut entendre que le contrediſant apportant vne autre diuision, les parties d'icelles doiuent estre inegales aux parties de la proposee.

THEOR. 32. PROP. XLIV.

La bimediale premiere est diuisee en ses noms en vn poinct seulement.

Soit la bimediale premiere AB, diuisee en ses noms au poinct C, tellement que AC & BC soient mediales commenſ. en puiſſance ſeulemẽt, comprenant vn rectangle rationel, comme veut la 38. prop. 10. Ie dis qu'on ne la peut diuiſer en ſes noms en vn autre poinct.



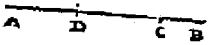
Car s'il ſe peut faire, ſoit AB derechef diuiſee en D, ſçauoir que AD & DB ſoient mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel. Nous demonſtrerons tout ainſi qu'en la precedente propoſition, que deux fois le rectangle de AD & DB ſera autant plus grand que deux fois le rectangle de AC & BC, que les quarrez de AD & DB ſont plus petits que les quarrez de AC & BC: Or tous iceux rectangles ſont rationaux par l'hypotheſe. Donc leurs excez ſera rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. & par conſequent l'excez des quarrez ſera auſſi rationel, ce qui eſt abſurde: car iceux quarrez eſtans deſcrits ſur lignes mediales, ſont mediaux, ainſi qu'il appert par la 16. propoſi. 10. & coroll. de la 24. prop. 10. partant l'ex-

cez d'iceux ne sera rationel par la 27. prop. 10. Donc la ligne bimediale premiere AB ne pouuoit estre diuisee en ses noms, sinon au poinct C. Ce qu'il falloit demonstrer.

LEMME.

Si vne ligne droicte est couppee inegalement, les quarrez des deux parties seront plus grands ensemble que deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne droicte AB couppee inegalement en C : Ie dis que les quarrez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB.



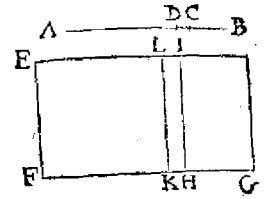
Car ayant pris CD egale à la moindre partie CB, par la 7. prop. 2. les quarrez de AC, CD, c'est à dire de AC, CB sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, (c'est à dire de AC, CB) auec le quarré de AD : & partant les deux quarrez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB: ce qui estoit proposé.

THEOR. 33. PROP. XLV.

La bimediale seconde, est diuisee en ses noms en vn poinct seulement.

Soit la bimediale seconde AB diuisée en ses noms au poinct C, en sorte que AC & BC soient mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, comme veut la

37. prop. de ce liure: Ie dis qu'elle ne peut estre diuisee en ses noms en vn autre poinct que C.



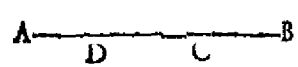
Car si faire se peut qu'elle soit encore diuisee en AD & DB, en sorte que dessus : & soit vne ligne rationelle proposee EF, sur laquelle (par la 45. prop. 1. soit construit le rectangle EG, egal au quarré de AB. Item EH egal aux deux quarrez de AC, CB: le reste IG sera egal à deux fois le rectangle de AC, CB, puis que par la 4. prop. 2. le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AC, CB, auec deux fois le rectangle d'icelles AC, CB. En la mesme maniere si sur EF on applique EK égal aux quarrez de AD, DB : le reste LG sera egal à deux fois le rectangle de AD, DB. Et pour autant que les quarrez de AC, CB, sont inegaux aux quarrez de AD, DB : leurs egaux rectangles EH, EK seront aussi inegaux : & partant les lignes FH, FK, seront inegales. Et derechef puis que les quarrez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, CB par le lemme precedent ; EH sera aussi plus grand que IG : & partant EH plus grand que la moitié de EG : & consequemment la ligne FH plus grande que la moitié de la ligne FG. Nous demonstrerons par mesmes raisons que FK, est aussi plus grande que la moitié de FG. Donc les parties FH & HG, sont inegales aux parties FK, KG, chacune à la sienne. Et pource que AC, CB sont mediales, & commensurables en puissance, les quarrez d'icelles seront aussi mediaux & commensurables, & par la 16. prop. 10. le compris d'iceux sera aussi commensurable à vn cha-

eun d'eux ; lesquels estans mediaux leur composé, c'est à sçauoir le rectangle EH sera aussi medial par le corol. de la 24. p. 10. Par mesme raison EK sera demonstré medial : parquoy EH, EK appliquez sur la rationele EF, auront les costez FH, FK, rationaux commensurables en puissance seulement à la rationele EF, par la 23. prop. 10. Pareillement, puis que le rectangle de AC, CB est posé medial ; le double d'iceluy, sçauoir est IG, sera aussi medial par le corol. de la 24. prop. 10. & estant appliqué sur la rationele HI, l'autre costé HG sera aussi rationel commensurable en puissance seulement à icelle HI, par la 23. p. 10. Et puis que AC, CB sont incommensurables en longitude, & par la 1. prop. 6. comme AC est à CB, ainsi le quarré de AC est au rectangle de AC, CB : (car ils ont AC pour hauteur,) par la 10. prop. 10. le quarré sera incommensurable au rectangle. Mais au quarré de AC est commensurable le composé des quarrez de AC CB ; (car d'autant que AC, CB sont commensurables en puissance, & partant les quarrez d'icelles commensurables, le composé d'iceux quarrez sera aussi commensurable au quarré de AC, par la 16. prop. 10.) & le rectangle de AC, CB est commensurable à son double. Donc aussi le composé des quarrez de AC, CB, c'est à dire le rectangle EH est incommensurable au double du rectangle de AC, CB, c'est à dire à IG, par le scholie de la 14. prop. 10. & d'autant que par la 1. prop. 6. comme EH est à IG, ainsi FH est à HG, par la 10. prop. 10. icelles FH, HG seront incommensurables en longitude. Mais elles ont esté demonstrées rationeles : Donc les lignes FH, HG sont rationeles commensurables en puissance seulement. Et par la 37. prop. 10. la toute FG sera binome, & diuisée en

ſes noms au poinct H. En la meſme maniere nous demonſtrerons auſſi FG binome eſtre diuiſée en d'autres noms à vn autre poinct k ; ce qui eſt abſurde : car par la 43. p. 10. elle ne peut eſtre diuiſée en ſes noms qu'en vn ſeul poinct. Donc AB bimediale ſeconde ne peut eſtre diuiſée en ſes noms qu'au poinct C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 34. PROP. XLVI.

La ligne maieure, eſt diuiſée en ſes noms, en vn poinct ſeulement.



Soit la ligne maieure AB, diuiſée en ſes noms au poinct C, tellement que AC & BC ſoient incommenſurables en puiſſance : & le compoſé de leurs quarrez ſoit rationel : mais le rectangle compris d'icelles, medial comme veut la 40. p. de ce liure. Ie dis qu'on ne pourra diuiſer icelle AB en ſes noms en vn autre poinct que C.

Car ſi faire ſe peut, qu'elle ſoit diuiſée en ſes noms en vn autre poinct D. Donc en quelque lieu que ſoit le poinct D, nous demonſtrerons tout ainſi qu'en la 43. p. de ce liure, que les compoſez des quarrez de AC & BC ; & de AD & DB ont vn meſme excez que les doubles rectãgles de AC & BC ; & de AD & DB. Mais d'autant que les compoſez quarrez ſont rationaux par l'hypotheſe ; & par conſequent leur excez rationel : il faudroit donc que l'excez des doubles rectangles (leſquels ſont mediaux par le corol.

de le 24. prop. 10.) fut rationel; ce qui est contraire à la 27. prop. 10. Donc la ligne maieure AB, ne sera diuisée en ses noms en autre poinct qu'en C. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 35. PROP. XLVII.

La ligne pouuant vn rationel & vn medial, est diuisée en ses noms, en vn poinct seulement.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuisée en ses nõs au poinct C, en sorte que AB & BC soient incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle rationel; & que le composé de leurs quarrez soit medial: mais le rectangle d'icelles, rationel, cõme veut en la 41. p. 10. Ie dis qu'on ne pourra diuiser icelle AB en ses noms en vn autre poinct que C.

Car il s'ensuiuroit mesme absurdité qu'en la precedente prop. sçauoir que si on la diuisoit encores au poinct D, il s'ensuyuroit comme là, que l'excez tant des quarrez, que des rectangles, seroit rationel, & medial. Parquoy la ligne pouuant vn rationel, & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 36. PROP. XLVIII.

La ligne pouuant deux medaux, est diuisée en ses noms, en vn poinct seulement.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuisée en ses noms au poinct C, (comme en la figure mise a la page 536.) en sorte que AC & BC soient incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial, comme veut la 42. prop. 10. Ie dis qu'on ne peut diuiser icelle AB en ses noms en vn autre poinct que C.

Car si faire se peut, qu'icelle AB soit encore diuisée au poinct D: & sur la rationele proposée EF soit faite pareille construction qu'en la 45. prop. 10. sçauoir est le rectangle EG egal au quarré de AB, & EH egal aux deux quarrez de AC & CB: & partant IG, egal au double du rectangle de AC & BC, (comme il a esté demonstré en ladite 45. prop. 10) & les deux rectangles EH & IG, qui sont mediaux par la susdite demonstration, feront les lignes FH & HG rationeles: mais le composé des quarrez de AC & BC est incommensurable au double de leur rectangle: (car par l'hypothese il est incommensurable à iceluy rectangle de AC, CB,) partant aussi les rectangles EG & EH seront incommensurables. Ainsi les lignes rationeles FH & HG seront commensurables en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. AB sera binome, diuisé en ses noms au poinct H. Que si on veut dire que AB peut encore estre diuisé en ses noms au poinct D: il s'ensuyura, cõme en icelle 45. prop. 10. que le binome FG, diuisé en ses noms au poinct H, se pourroit encore diuiser en ses noms au poinct K, contre la 42. prop. 10. Ainsi AB ne pouuoit estre diuisée en ses noms qu'au seul poinct C. Ce qu'il falloit demonstrer.

SECONEES DEFINITIONS.

Vne ligne rationele eſtant propoſée, & le binome diuiſé en ſes noms: lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude.

1. Si le plus grand nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée: toute la ligne ſoit appellée Binome premier.

2. Mais ſi le plus petit nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée: toute la ligne ſoit appellée Binome ſecond.

3. Qne ſi ny l'vn ny l'autre nom n'eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée: toute la ligne ſoit appellée Binome troiſieſme.

Et lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude.

4. Si le plus grand nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée: toute la ligne ſoit appelée Binome quatrieſme.

5. Mais ſi le plus petit nom eſt com-

mensurable en longitude à la rationele proposée : toute la ligne est appelée Binome cinquiesme.

6. Que si ny l'vn ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposée ; la toute soit appelée Binome sixiesme.

Il n'est rien dict icy des lignes, desquelles les deux noms soient commensurables en longitude à la rationele proposée: parce que telles lignes ne sont binomes : car par la 37. p. 10. tout binome est composé de deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement.

PROB. 13. PROP. XLIX. Six.3. Trouuer vn Binome premier.

Estans trouuez deux nombres quarrez AB, CB (comme nous auons enseigné au scholie 2. de la 29. p. 10.) desquels l'excez AC ne soit quarré, à fin que AB, CB soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, & AB, AC ne soient entr'eux comme quarré à quarré: Soit vne rationele proposée D, à laquelle soit pris EF commensurable en longitude : & icelles D & EF seront rationeles commensurables en longitude. En apres par le corol. de la 6. prop. 10. soit faict que comme le nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG. Ie dis que la toute EG est binome premier.

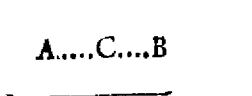
Car puis que les quarrez de EF, FG qui ſont entr'eux comme les nombres AB, AC, ſont commenſurables par la 6. prop. 10. auſſi les lignes EF, FG ſeront commenſurables au moins en puiſſance : Et d'autant que EF eſt rationele, auſſi FG ſera rationele. Mais pource que AB, AC ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré, les quarrez d'icelles rationeles EF, FG ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré ; & partant les lignes EF FG ſont incommenſurables en longitude par la 9. p. 10. elles ſont donc rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement : & par la 37. p. 10. la toute EG ſera binome. Ie dis auſſi qu'il eſt premier. Car puis que les quarrez de EF, FG ſont enr'eux comme les nombres AB, AC ; & AB eſt plus grand que AC, auſſi le quarré de EF ſera plus grand que le quarré de FG : ſoit donc du quarré de H (iceluy quarré ſera trouué par le lemme qui ſuit la 14. p. 10.) Et puis que cõme le nombre AB eſt à AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de FG : par conuerſion de raiſon comme AB à CB, ainſi le quarré de EF ſera au quarré de H. Mais AB eſt à CB comme nombre quarré à nõbre quarré : donc le quarré de EF ſera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré ; & partant les lignes EF, H ſont cõmenſ. en longitude par la 9. p. 10. Veu donc que EF plus grand nom eſt commenſ. en longitude à la rationele D, & peut plus que le moindre nom FG du quarré de H qui luy eſt commenſ en longitude ; EG ſera binome premier par la 1. des ſecondes def. Nous auons donc trouué vn binome premier : Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit la rationele propoſée D 8, & EF 6. faiſant donc que

comme AB 9 eſt à AC 5, ainſi 36 quarré de EF, ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera √20: & partant la toute EG, ſera 6+√20, qui eſt binome premier; car le plus grand nom eſt commẽſurable à nombre abſolu, qui tient lieu de rationele, & peut plus que le moindre nom d'vn quarré dont la racine eſt commenſurable en long. à icelluy plus grand nom. Icelluy binome premier ſera trouué plus briefuement que deſſus, poſant quelque nombre pour plus grand nom, & pour le moindre la racine quarré des trois quarts de ſa puiſſance. Ainſi poſant 8 pour le plus grand nom, ſon quarré ſera 64, dont le quart ſouſtrait reſte 48; & partant 8+√48 ſera binome premier.

PROBL. 14. PROP. L. Trouuer vn Binom ſecond.



Eſtans trouuez les deux nombres quarrez AB, CB, comme la prop. precedente, & pris FG commenſurable en longitude à vne rationele propoſée D: icelles D & FG ſeront rationeles commenſurables: puis apres par le corol. de la 6. p 10. ſoit faict que comme le nombre AC eſt au nombre AB: ainſi le quarré de FG ſoit au quarré de EF. Ie dis que EG eſt binome ſecond.

Car on demonſtrera premierement tout ainſi qu'en la precedente que EG eſt binome. Et puis que comme le nombre AC eſt au nombre AB, ainſi le quarré de FG eſt au quarré de EF: en changeant comme AB à AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de FG. Mais AB eſt plus grand que AC: Donc auſſi le quarré de EF ſera plus grand que le quarré de FG,

&

& ſoit du quarré de H. Nous demonſtrerons maintenant comme en la precedente prop. que H & EF ſont commenſurables en longitude. Et partant que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre nom FG du quarré de H qui luy eſt commenſ. en longitude, & le moindre nom FG commenſurable en longitude à la rationele D: & par les ſec. def. EG, ſera binome ſecond. Nous auons donc trouué vn binome ſecond, ainſi qu'il eſtoit requis.

SCHOLIE.

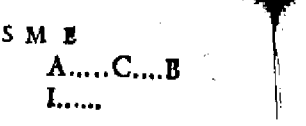
La rationele propoſée D ſoit 7, & FG 5: faiſant donc que comme AC 5 eſt à AB 9, ainſi 25 quarré de FG ſoit au quarré de EF; icelle EF ſera V 45. & partant la toute EG ſera V 45 + 5, qui eſt binome ſecond; pource que le plus grand nom d'iceluy peut plus que le moindre d'vn quarré, dont la racine eſt commenſurable en longitude à iceluy plus grand nom, & que le moindre nom eſt auſſi commenſurable au nombre rationel propoſé. Or pour trouuer plus brefuement que deſſus iceluy binome ſecond, il faut prendre pour le moindre nom quelconque nombre, & au quarré d'iceluy adiouſter le tiers, & la racine quarrée de ce qui en viendra ſera le plus grand nom. Ainſi prenant pour le moindre nom 6, ſon quarré eſt 36, dont le tiers luy eſtant adiouſté ſera 48: & partant V 48 + 6 ſera binome ſecond.

PROB. 15. PROP. LI.

Trouuer vn binome troiſieſme.

Eſtans trouuez deux nombres AB, CB comme en la 49. prop. 10. ſoit pris vn autre nombre I qui

ne soit à l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré : (ce qui se faict prenant I nombre non quarré prochainement plus grand que AC. Car puis



qu'il n'est quarré, il ne sera au quarré AB, comme nombre quarré à nombre quarré. Derechef puis qu'il est non quarré prochainement plus grand que AC, il differe d'iceluy par l'vnité, ou par le binaire: Parquoy il ne tombera entre I & AC vn moyen proportionel, comme nous auons demonstré au scholie de la 8. p. 8. Ils ne seront donc plans semblables : & partant ne seront entr'eux comme nombres quarrez, & apres auoir exposé la rationele D, par le corol. de la 6. p. 10. soit faict comme I à AB. Ainsi le quarré de D, au quarré de EF : ainsi les quarrez de D, & EF, estans comme nombre à nombre, seront commensurables par la 6. prop. 10. & partant les lignes D, & EF aussi commensurables, au moins en puissance. D estant donc rationele, EF sera aussi rationele. Mais parce que I n'est pas à AB, c'est à dire le quarré de D au quarré de EF, comme nombre quarré à nombre quarré; D & EF seront incommensurables en longitude par la 9. prop. 10. Derechef soit faict par le susdit corol. que comme AB est à AC; ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG : & par la 6. prop. 10. iceux quarrez de EF, FG, estans comme nombre à nombre, seront commensurables entr'eux : & partant les lignes EF, FG aussi commensurables, au moins en puissance; & EF estant rationele FG le sera aussi. Et d'autant que AB n'est pas à AC, c'est à dire le quarré de EF au quarré

de FG, comme nombre quarré à nombre quarré, les lignes EF, FG seront incommensurables en longitude par la 9. prop. 10. & partant icelles EF, FG sont rationeles commensurables en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. la toute EG sera binome. Ie dis aussi qu'elle est binome troisiesme. Car d'autant, que comme I est à AB, ainsi le quarré de D est au quarré de EF; & comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG, par raison egale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D sera au quarré de FG. Mais I n'est pas à AC, comme nombre quarré à nombre quarré; donc les quarrez de D, & FG ne seront aussi comme nombre quarré à nombre quarré: & partant les lignes D, & FG, seront incõmensurables en longitude par la 9. p. 10. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF est au quarré de FG; & AB est plus grand que AC, aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG: soit donc plus grand du quarré de H. Maintenant nous demonstrerons comme en la 49. prop. de ce liure, que EF & H sont commensurables en longitude. Donc le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG du quarré de H, qui luy est commensurable en longitude, & l'vne ny l'autre d'icelles EF, FG n'est commensurable en longitude à la proposée rationele D, comme il a esté demonstré: partant EG sera binome troisiesme par les secondes definitions. Nous auons donc trouué vn binome troisiesme. Ce qu'il falloit faire.

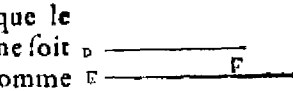
SCHOLIE.

La rationele proposée D soit 6: faisant donc que com-

me 16, eſt à AB 9, ainſi 36 quarré de D ſoit au quarré de EF; icelle EF ſera V 54; & faiſant que comme AB 9 eſt à AC 5, ainſi 54 quarré de EF ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera V 30: & partant la toute EG ſera V 54+V 30, qui eſt binome troiſieſme, parce que l'vn ny l'autre nom eſt commenſurable en longitude à nombre rationel propoſé, & que le plus grand nom peut plus que le moindre d'vn quarré, duquel la racine eſt commenſurable en longitude au plus grand nom. Or pour trouuer ce binome plus prõptement que deſſus, on poſera la racine quarrée de quelconque nombre non quarré pour le plus grand nom, & la racine quarrée des trois quarts du meſme nombre pour le moindre nom: Ainſi poſant pour le plus grand nom V 20, l'autre nom ſera V 15: & partant V 20+V 15 ſera binome troiſieſme.

PROB. 16. PROP. LII.

Trouuer vn binome quatrieſme.



Eſtans trouuez deux nombres AC, CB, tels que le compoſé d'iceux AB, ne ſoit à l'vn ny à l'autre comme nombres quarrez: (comme nous auons enſeigné au 3. ſcholie de la 29. prop. de ce liure) Soit expoſé la rationele D, & puis EF commenſurable en longitude à icelle rationele D; & par conſequent EF ſera auſſi rationele: Et ayant conſtruit le reſte comme en la 49. p. 10. Nous demonſtr.. comme là que la toute EG eſt binome. Item que le quarré de EF peut plus que le quarré de FG du qu. de H; & que par conuerſion de raiſon, comme AB eſt à CB, ainſi le quarré

de EF au quarré de H. Mais AB n'eſt à CB comme nombre quarré à nombre quarré : Donc le quarré de EF ne ſera au quarré de H, comme nõbre quarré à nombre quarré : & par la 9. p. 10. les lignes EF & & H, ſont incommenſ. en longitude : parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy eſt incommenſurable en longitude, & qu'icelle EF eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée D ; EG ſera binome quatrieſme par les def. ſecondes. Nous auons donc trouué vn binome quatrieſme : Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele expoſée D ſoit 8, & EF 6 : faiſant donc que cõme AB 9 eſt AC 6, ainſi le quarré de EF, ſçauoir 36. ſoit au quarré de FG ; icelle FG ſera trouuée de √24 : & partant la toute EG ſera 6+√24, qui eſt binome quatrieſme ; pource que le plus grand nom eſt commenſurable en longitude au nombre rationel propoſé, & qu'iceluy nom peut plus que le moindre nom d'vn quarré dont la racine eſt incommenſurable en longitude à iceluy plus grand nom. On trouuera ce binome plus prõptement que deſſus poſant pour le plus grand nom quelque nombre ; & pour le moindre la racine quarrée de la moitié du quarré d'iceluy. Ainſi poſant 6. pour le plus grand nom, ſon quarré ſera 36, dont la moitié ſera 18, & partant 6+√18 ſera binome quatrieſme.

PROB. 17. PROP. LIII.

Trouuer vn binome cinquieſme.

Eſtans trouuez les deux nombres AC, CB comme en la precedente prop. & fait la conſtruction comme en la 50. p. on demonſtrera comme en ladi-

te 50. prop. que EG eſt binome. Item que le quarré de EF eſt plus grand que le quarré de FG du quarré de H. Et comme en la precedente qu'icelles EF & H ſont incommenſurables en longitude: & partant par les ſecondes def. EG eſt binome cinquieſme. Nous auons donc trouué vn binome cinquieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

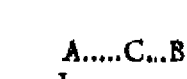
La rationele propoſée D ſoit 7, & FG 6: donc faiſant que comme AC 6 eſt à AB 9, ainſi le quarré de GF, ſçauoir eſt 36, ſoit au quarré de EF: icelle EF ſera trouuée de √54: partant la toute EG ſera √54+6, qui eſt binome cinquieſme: car le moindre nom eſt commenſurable en longit. au nombre rationel proposé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'vn quarré dont la racine eſt incommenſurable en long. à iceluy plus grand nom. Pour autrement trouuer tel binome ſoit posé pour le moindre nom quelconque nombre, & la moitié du quarré d'iceluy eſtant adiouſtée au meſme quarré, la racine du tout ſera le plus grand nom: Ainſi poſant 4 pour le moindre nom, ſon quarré ſera 16, dont la moitié 8 luy eſtant adiouſtée ſeront 24, dont la racine ſera √24; & partant √24+4 ſera binome cinquieſme.

PROBL. 18. PROP. LIV.

Trouuer vn Binome ſixieſme.

Soient expoſez deux nombres AC, CB, tellement que le compoſé d'iceux AB ne ſoit à l'vn ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré (ce qu'on ſera adiouſtant enſemble deux nombres premiers

entr'eux : Car par la 30. p. 7. le total ſera auſſi premier à chacun d'eux; & partant ne ſera à l'vn ny



à l'autre cõme nombre quarré à nombre quarré par les choſes demõſtrées à la fin du 8. liure.) Et ſoit pris quelque autre nombre non quarré I, à fin qu'iceluy ne ſoit à AB, ny à AC, comme nombre quarré à nombre quarré. En apres ſoit vne rationele propoſée D: & par le corol. de la 6. p. 10. ſoit faict que cõme I eſt à AB, ainſi le quarré de D ſoit au quarré de EF: & ayãt acheué comme en la 51. p. 10. nous demonſtrerons comme là que EG eſt binome: en apres que D & FG ſont incommenſ. en longitude, & que le quarré de EF eſt plus grand que le quarre de FG du quarré de H. Finalement nous demonſtrerons cõme en la 49. p. que par conuerſion de raiſon, comme AB à CB, ainſi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'eſt pas à CB, comme nombre quarré à nombre quarré, ny par conſequent le quarré de EF au quarré de H: donc par la 9. p. 10. les lignes droictes EF & H, ſeront incommenſ. en longitude. Parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG, du quarré de la ligne H, qui luy eſt incommenſ. en longitude: & l'vn ny l'autre d'iceux noms n'eſt commenſ. en longitude à l'expoſée rationele D, par les ſecondes def. EG ſera binome ſixieſme. Nous auons donc trouué vn binome ſixieſ. Ce qu'il falloit faire.

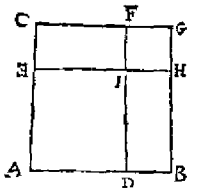
SCHOLIE.

La rationele propoſée D ſoit 6 : faiſant que comme 16

eſt à AB 8, *ainſi le quarré de* D, *c'eſt à ſçauoir* 36, *au quarré de* EF : *icelle* EF *ſera trouuée de* $\sqrt{}$ 48 : *& faiſant que comme* AB 8 *eſt à* AC 5, *ainſi* 48 *quarré de* EF *ſont au quarré de* FG : *icelle* FG *ſera trouuée de* $\sqrt{}$30 : *partant la toute* EG *ſera* $\sqrt{}$ 48 + $\sqrt{}$30, *qui eſt binome ſixieſme : car l'vn & l'autre nom eſt incommenſurable en longitude au nombre rationel proposé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'vn quarré, dont la racine eſt incommenſurable à icelluy plus grand nom. Or pour trouuer plus promptement que deſſus tel binome il ny a qu'à prendre les racines quarrées de deux nombres non quarrez, dont l'vn ſoit double de l'autre: Ainſi poſons* $\sqrt{}$12 *pour le plus grand nom, l'autre ſera* $\sqrt{}$6; *& partant* $\sqrt{}$12 + $\sqrt{}$6 *ſera binome ſixieſme.*

LEMME.

Les quarrez AI, IG eſtans conioincts à l'angle I, tellement que les coſtez DI, IF facent vne ſeule ligne droicte DF; & par conſequent les coſtez EI, IH auſſi vne ſeule ligne droicte EH, eſtant acheué le parallelogramme BC. Ie dis qu'iceluy eſt quarré: & EF eſtre rectangle moyen proportionnel entre les quarrez AI, IG: & EG moyen proportionnel entre les quarrez AG, IG.



Car d'autant que EI *eſt egale à* ID, *mais* HI *à* IF : *la toute* EH *ſera egale à la toute* DF. *Mais par la* 34. *p.* 1. *la ligne* EH *eſt egale à l'vne & à l'autre d'icelles* AB, CG : *&* DF *à* AC, BG : *& par conſequent chacune d'icelles* AB, CG *eſt egale à l'vne & à l'autre* AC, BG : *donc le parallelogramme* BC *eſt equilateral. Mais par la* 29. *propoſition* 1. *il eſt auſſi rectangle, & partant quarré. Derechef puis que comme* DI *eſt à* IF, *ainſi* EI *à* IH. *Mais par la* 1. *prop.* 6.

comme DI à IF, ainſi AI à EF: & comme EI à IH, ainſi EF à IG: donc comme AI à EF, ainſi EF à IG: & partant EF eſt moyen prop. entre AI, IG. Et finalement veu que cõme AE à EC, ainſi CF à FG, icelles eſtans egales chacune à la ſienne: & en compoſant comme AC à EC, ainſi CG à FG. Mais comme AC à CE, ainſi AC à EG: & comme CF à FG ainſi EG à IG par la 1. prop. 6. Donc comme AG à EG, ainſi EG à IG; & par conſequent EG eſt moyen prop. entre AG, IG.

Or voila comme Commandin propoſe & demonſtre ce lemme: mais Clauius le propoſe ainſi.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, le rectangle contenu ſous les parties, eſt moyen proportionnel entre les quarrez d'icelles. Item le rectangle contenu ſous la toute, & vne des parties, eſt moyen prop. entre le quarré de la toute, & le quarré de ladite partie.

Ce qui eſt la meſme choſe que deſſus.

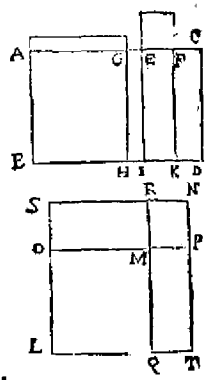
THEOR. 37. PROP. LV. Six. 4.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome premier, la ligne pouuant iceluy rectangle eſt binome.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome premier AC: Ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle eſt l'irrationelle appellee binome.

Car d'iceluy binome AC, le plus grand nom ſoit AE: donc par la def. AE, EC ſont rationelles com-

menſ. en puiſſance ſeulement, & AE pourra plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. & auſſi AE ſera commenſ. en longit. à la rationelle propoſee AB. Soit couppée EC en deux egalement en F. Donc puis que AE peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en long. ſi ſur icelle AE on applique vn rectangle egal au quart du quarré de EC, c'eſt à dire au quarré de EF, & defaillãt d'vne figure quarrée, il diuiſera icelle AE en parties commenſ. en long. par la 18. prop. 10. ſoient donc icelles parties AG, GE: & par les poincts G, E, F ſoient menees GH, EI, FK paralleles à icelles AB, CD: puis par la 14. p 2. ſoient deſcrits les quarrez LM, MN egaux aux deux rectãgles AH, GI, & diſpoſez en ſorte que OM, MP facent vne ligne droicte : puis ſoit acheué le rectangle ST, lequel ſera quarré par le lemme precedent.



Maintenant, d'autant que par la conſtruction le rectangle de AG, GE eſt egal au quarré de EF : les lignes AG, EF, GE ſeront proport. par la 17. prop. 6. Donc par la 1. prop. 6. les rectangles AH, FK, GI ſeront auſſi proportionnaux : parquoy EK ſera moyen proport. entre AH, GI, ou leurs egaux quarrez LM, MN. Mais par le lemme precedent OR eſt auſſi moyen prop. entre iceux quarrez LM, MN: donc OR, EK ſeront egaux. Mais par la 43. prop. 1. OR, QP ſont egaux : & par la 36. prop. 1. EK eſt egal à FD : donc QP ſera auſſi egal à FD: & par conſequent tout le quarré LN egal à tout le rectangle

AD:& ainſi la ligne OP peut le rectangle AD : Ie dis donc qu'icelle OP eſt binome.

Car puis que AG, GE ont eſté demonſtrees commenſ. en longitude, la toute AE ſera auſſi commenſ. en longitude à chacune d'icelles par la 16. prop. 10. Mais AE eſt auſſi commenſurab. en longitude à AB: donc par la 12. prop. 10. icelle AB eſt auſſi commenſ. en long. à chacune d'icelles AG, GE:& partant AB eſtant rationelle, AG, GE ſeront auſſi rationelles : & par la 20. prop. 10. les rectangles AH, GI contenus ſous icelles rationelles, ſeront rationaux : donc auſſi rationaux leurs egaux quarrez LM, MN:& par conſequent les lignes OM, MP ſeront auſſi rationelles. Et d'autant que AE eſt incommenſ. en longitude à EC, mais commenſ. à AG,& EC à ſa moitié EF, par le ſcholie de la 14. prop. 10. AG, EF ſeront incommenſ. en long. parquoy AH, EK qui ont meſme raiſon que AG, EF par la 1. pr. 6. ſont auſſi incommenſ. par la 10 p. 10. & par conſequent leurs egaux LM, QP: donc par la 10. prop. 10. les lignes OM, MP ſont auſſi incommenſ. en longit. puis que par la 1. p. 6. elles ſont en meſme raiſon que LM, QP. Mais OM, MP, ont eſté demonſtrees rationelles : & partant elles ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement: donc la toute OP pouuant le rectangle AD eſt binome par la 37. p. 10. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome premier, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

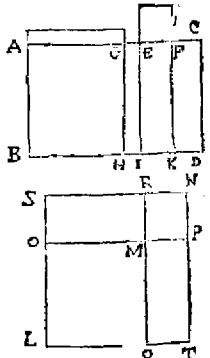
SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 5, & AC 4+√12. Donc le rectangle AD ſera 20+√300 : Et, puis que AE plus grand nom du binome eſt 4, & EF moitié du plus petit nom EC, eſt √3,

AG sera 3, & GE 1. Donc le rectangle AH sera 15. & la ligne OM qui peut iceluy rectangle sera √15 : Ainsi GI est 5, & MP √5. Mais EF est √3, & EI egale à AB : donc EK sera √75, & son double ED √300. Or si on multiplie OM, MP entr'elles, sera produicte MI √75, egal à EK. Mais à iceluy MT est egal MS : donc MS, MT ensemble seront aussi √300. Or les quarrez LM 15, MN 5, sont ensemble 20 : Partant tout le quarré LN est 20+√300, & son costé OP ou LT √15+√5, qui est binome sixiesme.

THEOR. 38. PROP. LVI.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle & d'vn binome second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est bimediale premiere.



Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome second AC : Ie dis que (apres auoir faict pareille construction & demonstration qu'en la precedente) la ligne OP qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationelle appellée bimediale premiere.

Car puis que AC est binome second, AE sera incommensurable en longit. à la rationelle AB : Item AG & EG (qu'on prouuera estre commensurable en longitude entr'elles, comme en la precedente, &

par la 16.prop.10.à leur toute AE) feront par la 14. pro.10. aussi incommensurables en longitude à icelle AB, laquelle estant rationelle, icelles AG,GE seront aussi rationelles: & par consequent commens. en puissance seulement à icelle rationelle AB. Donc par la 22.prop.10. les rectangles AH, GI seront mediaux : & leurs egaux quarrez LM, MN aussi mediaux: Et partant les lignes OM, MP mediales, lesquelles on prouuera estre commens. en puissance seulement, tout ainsi qu'en la precedente prop. Et d'autant que EC est commens. en longitude à la rationelle AB, le rectangle ED sera rationel par la 20. prop.10. aussi sera sa moitié EK: & par consequent son egal QP compris des deux mediales OM, MP: & par la 38.prop.10. OP est bimediale premiere. Si donc vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle,&c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB *soit* 5, *&* $AC\sqrt{48+6}$: *donc le rectangle* AD *sera* $\sqrt{12000+30}$. *Et puis que* AE *est* $\sqrt{48}$, *&* EC 6: EF *sera* 3, *&* *son quarré* 9, *auquel est imposé egal le rectangle de* AG, GE, *icelles seront* $\sqrt{27}$, *&* $\sqrt{3}$: *parquoy le rectangle* AH *sera* $\sqrt{675}$, *&* *par consequent la ligne* OM, *qui peut iceluy sera* $\sqrt{\sqrt{675}}$: *ainsi* GI *sera* $\sqrt{75}$. *&* MP $\sqrt{\sqrt{75}}$. *Or* EC *est* 6: *partant* ED *double de* MS $\sqrt{\sqrt{50625}}$, *c'est à dire* 15, *est* 30; *&* *par consequent* MS, MΓ, *seront aussi* 30. *Parquoy tout le quarré* LN *composé des quarrez* LM $\sqrt{675}$, MN $\sqrt{75}$, *&* *des deux rectangles* MS, MΓ 30, *sera* $\sqrt{1200+30}$, *&* *son costé* OP *ou* LT $\sqrt{\sqrt{675}+\sqrt{75}}$, *qui est bimediale premiere.*

THEOR. 39. PROP. LVII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome troisiesme, la ligne qui peut iceluy rectangle est l'irrationele nommée bimediale seconde.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome troisiesme AC (apres auoir construit comme aux predentes.) Ie dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationele appellee bimediale seconde.

Car on prouuera comme en la precedente, que les deux lignes OM, MP sont mediales commensurables en puissance seulement : Item d'autant que AC est binome troisiesme, EC est commensurable en puissance seulement à la rationelle AB; & par la 22. prop. 10. le rectangle ID sera medial, aussi sera sa moitié EK : Et par consequent medial (son egal QP (compris des deux mediales OM & MP). Ainsi OM, MP sont deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & par la 39. prop. 10. OP sera bimediale seconde. Parquoy si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB soit 5, & AC $\sqrt{32}+\sqrt{24}$: Donc le rectangle AD sera $\sqrt{800}+\sqrt{600}$. Mais d'autant que AE est

√32, & EC √24 ; EF sera √6 , au quarré de laquelle est posé egal le rectangle de AG, GE ; & partant AG sera √18 , & GE √2. Parquoy le rectangle AH sera √450, & GI √50 ; & par consequent la ligne OM est √√450 , & MP √√50. Et puis que EI est 5 , & EC √24 , le rectangle ED sera √600, lequel est double de MΓ √150. Donc tout le quarré LN, qui est composé des quarrez LM √450, MN √50, & des rectangles MS, MT √600 ; sera √800 + √600 ; & partant son costé OP est √√450 + √√50, qui est bimediale seconde.

THEOR. 40. PROP. LVIII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome quatriesme; la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Maieure.

Soit le rectangle AD, compris du binome quatriesme AC & de la rationelle AB (apres auoir construict & demonstré comme en la 55. p.) Ie dis que OP qui peut iceluy rectangle AD est ligne irrationelle qu'on appelle maieure.

Car puis que AC est binome quatriesme, AE plus grand nom est commensurable en longitude à la rationelle AB, & peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & par la 19. prop. 10. le rectangle deffaillant compris sous AG, GE (qui est egal au quart du quarré de EC) diuisera AE en AG & EG incommensurab. en longitude: & les rectangles AH & GI seront incommens. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. Donc aussi incommens.

leurs egaux quarrez LM, & MN : & par consequent les lignes OM, MP seront incommens. en puissance. Mais le rectangle AI compris des rationelles AB, AE, est rationel par la 20. prop. 10. (qui est egal aux quarrez LM, MN) Et le rectangle QP compris d'icelles lignes OM, MP est medial, car son egal EK est medial, comme son double EC par la 22. prop. 10. estant ED rationelle commens. en puissance seulement à AB: & par la 40. prop. 10. OP est ligne maieure. *Si donc vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle, &c.* Ce qu'il falloit demonstrer.

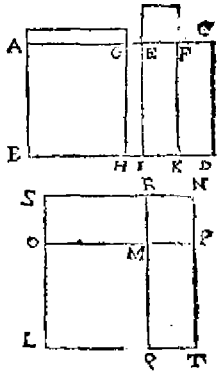
SCHOLIE.

La rationelle AB *soit* 5, *& AC* $4+\sqrt{8}$: *Donc le rectangle AD sera* $20+\sqrt{200}$. *Et puis que AE est* 4, *& EC* $\sqrt{8}$; *EF sera* $\sqrt{2}$, *au quarré de laquelle, sçauoir* 2, *ayant esté posé egal le rectangle de AG, GE; la ligne* AG *sera* $2+\sqrt{2}$, *&* GE $2-\sqrt{2}$: *partant le rectangle AH sera* $10+\sqrt{50}$, *&* GI $10-\sqrt{50}$; *& par consequent OM est* $\sqrt{(10+\sqrt{50})}$ *& MP* $\sqrt{10-\sqrt{50}}$). *Or ED estoit* $\sqrt{8}$; *donc ED double du rectangle MT* $\sqrt{50}$; *sera* $\sqrt{200}$. *La somme des quarrez LM, MN, sera donc* 20, *à laquelle si on adiouste les plans TMS* $\sqrt{200}$, *on aura pour tout le quarré LN* $20+\sqrt{200}$; *& partant son costé OP sera* $\sqrt{(10+\sqrt{50})}+\sqrt{(10-\sqrt{50})}$ *ou* $\sqrt{(20+\sqrt{200})}$ *qui est ligne maieure.*

THEOR. 41. PROP. LIX.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome cinquiesme, la ligne qui peut iceluy rectan-

gle, eſt ligne irrationelle pouuant vn rationel & vn medial.



Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB, & du binome cinquieſme AC; Ie dis (apres auoir conſtruit & demonſtré comme en la 55. p.) que OP qui peut iceluy rectangle AD, eſt ligne irrationelle, pouuant vn rationel & vn medial.

Car puis que AC eſt binome cinquieſme, AE plus grand nom peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude: & comme en la precedente AG & EG ſeront incommenſurables en longitude: Et les lignes OM, MP ſeront incommenſurables en puiſſance, & l'egal au compoſé de leurs quarrez, ſçauoir le rectangle AI, eſt medial par la 22. propoſit. 10. car les lignes AB & AE ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. Et d'autant que AB, & le plus petit nom EC, ſont commenſurables en longitude, par la 20. propoſit. 10. ED eſt rationel: auſſi ſera ſa moitié EK, & ſon egal QP compris des lignes OM, MP, & par la 41. prop. 10. OP eſt ligne irrationelle pouuant vn rationel, & vn medial. Si donc vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB soit 5, & AC √8+2. Donc le rectangle AD sera √200+10. Et d'autant que AE est √8, & EC 2; EF sera 1, au quarré de laquelle estant egal le rectangle de AGE, le costé AG sera √2+1: & GE √2—1: & partant le rectangle AH sera √50+5, & la ligne OM √(√50+5); & MP √(√50—5), puis que GI est √50—5. Et pource que EI est 5, & EC 2; le rectangle ED sera 10; & par consequent sa moitié MT est 5. Donc la somme des quarrez LM, MN, est √200, à laquelle adioustant les rectangles SMT 10, tout le quarré LN sera √200+10; & par consequent son costé OP, est √(√50+5)+√(√50—5), ou bien √(√200+10), qui est ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

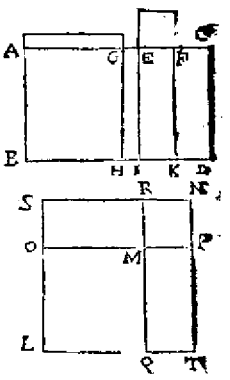
THEOR. 42. PROP. LX.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome sixiesme; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant deux mediaux.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB, & du binome sixiesme AC: (apres auoir construit & demonstré comme en la 55. prop. que OP peut iceluy rectangle AD) Ie dis qu'icelle OP, est ligne pouuant deux mediaux.

Car puis que AC est binome sixiesme, AE plus grand nom peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude, & si les

deux noms ſont incommenſurables en longitude à la rationelle AB : Et comme il a eſté demonſtré à la 58. prop. 10. OM, MP ſeront incommenſurables en puiſſance ; & ſi par la 22. prop. 10. le rectangle AI, qui eſt egal au compoſé de leurs quarrez eſt medial : Item ED qui eſt compris de deux rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt auſſi medial par la meſme propoſit. auſſi medial ſa moitié EK, & ſon egal QP compris d'icelles lignes OM, MP. Et ſi iceluy rectangle QP, ou ſon egal EK eſt incommenſur. au compoſé des quarrez LM, MN, ſçauoir AI : car les lignes AE & EC eſtant incommenſ. en longitude, auſſi AE & EF le ſeront : & par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. Les rectangles AI & Ek ſeront incommenſ. Et par la 42. prop. 10. OP ſera ligne pouuant deux mediaux.



SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 5, AC √12+√8. Donc le rectangle AD ſera √300+√200. Et pource que AE eſt √12, & EC √8 ; EF ſera √2, au quarré de laquelle eſtant egal le rectangle de AGE ; le coſté AG ſera √3+1, & le coſté GE √3—1 : Parquoy le rectangle AH ſera √75+5, & la ligne OM √(√75+5) ; & GI eſtant √75—5, MP ſera √(√75—5). Mais EC eſtant √8, le rectangle ED double de MT √50, ſera √200. Donc les quarrez LM, MN, ſeront enſemble √300, & les rectangles SMT √200 ; & partant

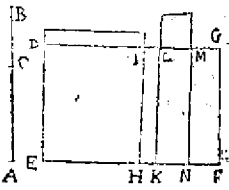
tout le quarré LN sera $\sqrt{300}+\sqrt{200}$; *& par conſequent ſon coſté OP ſera* $\sqrt{(\sqrt{75}+5)}+\sqrt{(\sqrt{75}-5)}$ *ou bien* $\sqrt{(\sqrt{300}+\sqrt{200})}$, *qui eſt ligne pouuant deux medians.*

THEOR. 43. PROP. LXI. Six.5.

Le quarré d'vn binome, appliqué ſur vne ligne rationelle, faict l'autre coſté binome premier.

Soit le binome AB, le plus grand nom duquel eſt AC; & ſur la rationelle DE ſoit appliqué par la 45. prop.1. le rectangle DF egal au quarré de AB: ie dis que l'autre coſte DG eſt binome premier.

Car ſur la meſme DE ſoit conſtitué le rectangle DH egal au quarré de AC: & ſur HI vn autre rectangle IK egal au quarré de CB: il eſt donc euident par la 4 prop.2. que le reſte LF eſt egal à deux fois le rectangle de AC, CB: & en diuiſant LG egalement en M, & en menant MN parallele à CD, chaſque rectangle LN, MF ſera egal au rectangle de AC, CB. Et d'autant que AB eſt binome, AC, CB ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement; & leurs quarrez ſeront rationaux, & leurs egaux rectangles DH & IK auſſi rationaux; & par la 21. propo. 10. les coſtez DI & IL ſeront rationelles commenſurables en longitude à la rationelle DE, & entr'elles par la 12. propoſit. 10. Et par la 16. propoſit. 10. la toute DL ſera commenſurable



en longitude à chacune DI, IL, & par la 12. prop. 10. elle sera rationelle & commens. en longitude à DE rationelle : Et d'autant que par la 22. prop. 10. le rectangle de AC, CB est medial, son double LF sera aussi medial : & par la 22. prop. 10. Iceluy medial LF estant appliqué sur la rationelle LK, l'autre costé LG sera aussi rationel incommens. en longit. à icelle LK, c'est à dire à DE, à laquelle DL estant commens. en longit. par la 13. prop. 10. DL, LG sont incommens. en longit. mais elles sont rationelles: elles seront donc commens. en puissance seulement ; & par la 37. prop. 10. DG est binome. Ie dis en outre que c'est binome premier.

Car il appert par le lemme de la 54. prop. de ce liure, que le rectangle de AC, CB est moyen prop. entre les quarrez d'icelles AC, CB : donc aussi LN moyen prop. entre DH, Ik: & par consequent la ligne LM moyenne prop. entre les lignes DI, IL par la 1. p. 6. & par la 17. p. 6. le rectãgle de DI, IL sera egal au quarré de LM: Et d'autant que les quarrez de AC, CB sont commens. (car icelles AC, CB sont posees commensurab. en puissance) leurs egaux DH, IK seront aussi commens. Donc aussi commens. en longitude les lignes DI, IL par les 1. propo. 6. & 10. p. 10. Et d'autant que les deux quarrez de AC & CB sont plus grands que leur rectangle deux fois, par le lemme qui suit la 44. prop. de ce liure : partant DK sera plus grand que LF ; & DL plus grand nom que LG: car icelles lignes sont entr'elles comme Dk à LF, par la 1. prop. 6. Et puisque le rectangle de DI, IL appliqué sur DL, est egal au quarré de LM, c'est à dire au quart du quarré de LG, & defaillant d'vne figure quarree, & les parties DI, IL sont commens. en longitude : icelle DL peut plus que LG du quarré

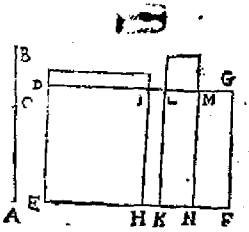
d'vne ligne qui luy eſt commenſur. en longit. par la 18. prop. 10. & partant icelle DL ayant eſté demonſtrée commenſ. en long. à la rationelle DE, par les ſecondes def. DG ſera binome premier. Donc le quarré d'vn binome appliqué ſur vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Le binome AB ſoit $\sqrt{45}+3$, *& la rationelle* DE 6. *d'autant que le plus grand nom* AC *eſt* $\sqrt{45}$, *ſon quarré eſt* 45, *lequel appliqué ſur* DE 6, *faict l'autre coſté* DI *de* $7\frac{1}{2}$: *Et le moindre nom* CB *eſtant* 3, *ſon quarré eſt* 9, *qui appliqué ſur* IH 6, *fait* IL *de* $1\frac{1}{2}$, *& partant la toute* DL *eſt* 9. *Or le rectangle de* ACB *eſt* $\sqrt{405}$, *& ſon double* LF $\sqrt{1620}$. *Donc la ligne* FG *ſera* $\sqrt{45}$: *& par conſequent la toute* DG *ſera* $9+\sqrt{45}$, *qui eſt binime premier.*

THEOR. 44. PROP. LXII.

Le quarré d'vne bimediale premiere, appliqué ſur vne ligne rationelle, faict l'autre coſté binome ſecond.



Soit la bimediale premiere AB diuiſee en ſes noms en C, dont le plus grand ſoit AC, (apres auoir conſtruit comme en la precedente.) Ie dis que DG eſt binome ſecond.

Car puis que AB eſt bimediale premiere, par la 38.

prop. 10. AC, CB, sont mediales commensurab. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, duquel le double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. LG sera rationelle commens. en longitude à DE. Mais icelles deux lignes AC & CB estans mediales, leurs quarrez sont mediaux : & partant leurs egaux rectangles DH, IK seront aussi mediaux & commens. Et d'autant que par la 16. p. 10. le total DK est commens. à chacun d'iceux DH, IK, par le coroll. de la 24. prop. 10. iceluy DK sera aussi medial : Et par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel incommensur. en longitude à la rationelle DE : & par la 13. prop. 10. DL, LG seront incommens. en longit. & partant rationelles commens. en puissance seulement : & par la 37. prop. 10. DG sera binome. Ie dis d'auantage qu'il est binome premier. Car il se prouuera comme en la precedente, que DL est plus grand nom, & qu'il pent plus que le moindre LG du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude. Nous auons aussi monstré que LG plus petit nom, est commens. en longitude à la rationelle DE : & partant par les secondes def. DG est binome second. Parquoy le quarré d'vne bimediale premiere, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La bimediale AB *soit* $\sqrt{\sqrt{180}}+\sqrt{\sqrt{12}}$, *& la rationelle* DE 4. *D'autant que le plus grand nom* AC *est* $\sqrt{\sqrt{108}}$, *son quarré est* $\sqrt{108}$, *lequel estant appliqué sur la rationelle* DE 4, *le costé* DI *sera* $\sqrt{6\frac{3}{4}}$: *Ainsi aussi le moindre nom estant* $\sqrt{\sqrt{12}}$, *son quarré est* $\sqrt{12}$; *& par consequent* IL, *est* $\sqrt{\frac{3}{4}}$, *& la toute* DL $\sqrt{12}$. *Or le rectangle de* ACB *est* 6 : *& partant le rectangle* KG *double d'iceluy est* 12, *& le costé* LG 3.

Donc la toute DG *sera* $\sqrt{12+3}$, *qui est binome second.*

THEOR. 45. PROP. LXIII.

Le quarré d'vne bimediale seconde, appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre costé binome troisiesme.

Soit la bimediale seconde AB, diuisee en ses noms en C, desquels AC soit le plus grand. (Apres auoir construit comme en la 61. p.) Ie dis que DG est binome troisiesme.

Car puis que AB est bimediale seconde, par la 39. prop. 10. AC, BC sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial; partant les quarrez d'icelles AC, CB seront commensurables & mediaux; & aussi leurs egaux rectangles DH, IK: & par la 16. p. 10. le total DK est commensurable à chacun d'iceux DH, IK: donc par le coroll. de la 24. propos. 10. DK sera aussi medial, & estant appliqué sur la rationelle DE, par la 23. propo. 10. son autre costé DL, sera rationel incommensurable en longitude à icelle DE. Derechef puis que le rectangle de AC, CB est medial, son double LF le sera aussi; & iceluy LF estant appliqué sur la rationelle LK, son autre costé LG sera rationel incommensurable en longitude à LK: c'est à dire à DE. Donc l'vne & l'autre d'icelles lignes DL, LG, est rationelle & incommensurable en longitude à la rationelle DE. Et d'autant que comme AC à CB, ainsi le quarré de AC au rectangle de AC & CB, par la 1. prop. 6. Il est euident par la 10. propo. 10. que le

quarré sera incommensurable au rectangle (estans les deux lignes incommensurables en longitude.) Mais par la 16. prop. 10. au quarré de AC est commensurable le composé des quarrez de AC, CB; & au rectangle de AC, CB est commensurable son double: Donc le composé des quarrez de AC, CB, c'est à dire le rectangle DK, est incommensurable au double du rectangle de AC, CB; c'est à dire au rectangle LF, par le scholie de la 14. prop. 10. parquoy les lignes DL, LG qui sont en mesme raison que DK, LF sont incommensurables en longitude par la 10. prop. 10. mais elles sont rationeles, & partant commens. en puissance seulement: & par la 37. p. 10. DG est binome.

Ie dis d'auantage, qu'il est binome troisiesme. Car il a esté demonstré que les deux noms sont incommensurables en longitude à la rationele DE: Et se prouuera comme à la 61. prop. que DL peut plus que LG du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude: & par les secondes def. DG est binome troisiesme. Donc le quarré d'vne bimediale seconde, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

AB soit $\sqrt{\sqrt{72}}+\sqrt{\sqrt{8}}$, *&* $DE\ 4$. *Donc* DH *sera* $\sqrt{72}$, $IK\ \sqrt{8}$, *&* LN *ou* $MF\ \sqrt{24}$, *qui appliquez sur* DE; DI *sera* $\sqrt{4\frac{1}{2}}$, $IL\ \sqrt{\frac{1}{2}}$, *&* LM *ou* $MG\ \sqrt{1\frac{1}{2}}$: *& partant la toute* DL *sera* $\sqrt{8}$, *&* $LG\ \sqrt{6}$. *Parquoy la toute* DG *est* $\sqrt{8}+\sqrt{6}$, *qui est binome troisiesme.*

THEOR. 46. PROP. LXV.

Le quarré d'vne ligne maieur appliqué

sur vne ligne rationele, faict l'autre costé binome quatriesme.

Soit la ligne maieur AB, diuisée en ses noms en C, dont le plus grand soit AC: (apres auoir construit comme en la 61. p. de ce liure) ie dis que DG est binome quatriesme.

Car puis que AB est ligne maieur, par la 40. p. AC, & CB sont incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel: partant le rectangle DK egal au composé d'iceux quarrez est aussi rationel, lequel estant appliqué sur la rationele DE, son autre costé DL sera aussi rationel commensurable en longitude à icelle DE par la 21. prop. 10. Item le rectangle LF double du rectangle de AC, CB sera medial, lequel appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, par la 23. prop. 10. LG sera rationele incommensurable en longitude à DE. Et partant par la 13. prop. 10. les rationeles DL & LG, seront incommensurables en longitude. Donc commens. en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. DG est binome.

Ie dis d'auantage qu'il est binome quatriesme. Car puis que les lignes AC & CB sont incommensurables en puissance, leurs quarrez seront incommensurables: partant aussi leurs egaux rectangles DH, Ik, & les lignes DL, & IL incommensurables. Et d'autant que nous demonstrerons comme en la 61. p. que DL est plus grande que LG, & sur DL est appliqué le rectangle de DI, IL egal au quart du quarré de LG, & defaillant d'vne figure quarrée, lequel diuise icelle DL en parties incommensurables en longitude, par la 19. p. 10. DL, qui est commens.

en longitude à la rationele DE, peut plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & par les ſecondes def DG eſt binome quatrieſme. Donc le quarré d'vne ligne maieure, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La ligne maieur AB *ſoit* $\sqrt{(10+\sqrt{37\frac{1}{2}})}+\sqrt{(10-\sqrt{37\frac{1}{2}})}$, *& la rationele* DE *ſoit* 5. *Donc le rectangle* DH *ſera* $10+\sqrt{37\frac{1}{2}}$, IK $10-\sqrt{37\frac{1}{2}}$: LN *ou* ME $\sqrt{62\frac{1}{2}}$, *qui appliquez ſur* DE, *le coſté* DI *ſera* $2+\sqrt{1\frac{1}{2}}$, IL $2-\sqrt{1\frac{1}{2}}$, *& LM ou* MG $\sqrt{2\frac{1}{2}}$. *Parquoy* DL *ſera* 4, *&* LG $\sqrt{10}$; *& par conſequent la toute* DG *eſt* $4+\sqrt{10}$, *qui eſt binome quatrieſme.*

THEOR. 47. PROP. LXV.

Le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial appliqué ſur vne ligne rationele, faict l'autre coſté binome cinquieſme.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuiſée en ſes noms au poinct C, dont le plus grand eſt AC : (apres auoir conſtruit comme à la 61. prop.) Ie dis que DG eſt binome cinquieſme.

Car puis que AB eſt ligne pouuant vn rationel, & vn medial, AC, CB, par la 41. p. 10. ſont incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle rationel, & le compoſé de leurs quarrez medial : Partant le rectangle Dk egal au compoſé d'iceux quarrez eſt auſſi medial, lequel eſtant appliqué ſur la rationele DE, ſon autre coſté DL ſera auſſi rationel

commensurable en puissance seulement à icelle DE par la 23. prop. 10. Item le rectangle de AC, CB estant rationel, son double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. iceluy LF estant appliqué sur IK, c'est à dire sur la rationele DE, son autre costé LG, sera ligne rationele com. en long. à icelle DE; & par la 13. prop. 10. les rationeles DL, LG seront commensurables en puissance seulemẽt, & par la 36. prop. 10. DG sera binome. Ie dis de plus, qu'il est binome cinquiesme. Car LG est commensurable en longitude à la rationele DE, & si on prouuera comme en la precedente, que DL peut plus que LG, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude, & par les secondes definitions DG est binome cinquiesme. Donc le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La ligne AB sera $\sqrt{(\sqrt{125}+5)}+\sqrt{(\sqrt{125}-5)}$, *& la rationele DE* 5. *Donc le rectangle* DH *sera* $\sqrt{125}+5$, IK $\sqrt{125}-5$, *& LN, ou MF* 10, *qui appliquez sur DE, le costé DI sera* $\sqrt{5}+1$, LV $\sqrt{5}-1$, *& LM ou MG* 2. *Parquoy DL sera* $\sqrt{20}$, *& LG* 4, *& par consequent la toute DG est* $\sqrt{20}+4$, *qui est binome cinquiesme.*

THEOR. 48. PROP. LXVI.

Le quarré d'vne ligne pouuãt deux mediaux appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé binome sixiesme.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuisée en ses noms au poinct C, dont le plus grand est AC: (Apres auoir construit comme aux precedentes) ie dis que DG est binome sixiesme.

Car puis que AB est ligne pouuant deux mediaux, par la 42. prop. 10. AC, CB sont incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial: ainsi il est euident que DK & LF sont mediaux, & incommensurables; & par la 23. p. 10. iceux estans appliquez sur lignes rationeles, leurs autres costez DL, LG seront rationaux commensurables en puissance seulement à la rationele DE. Mais iceux costez DL, LG estans entr'eux comme les parallelogrammes DK, LF, lesquels sont incommensurables, seront aussi entr'eux incommensurables en longitude, par la 10. prop. 10. Donc les rationeles DL, LG seront commensurables en puissance seulement, & par la 37. prop. 10. DG est binome, duquel les deux noms sont incommensurables en longitude à la rationele DE: & comme il a esté demonstré aux precedentes, le plus grand d'iceux DL peut plus que le moindre LG, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude, & par les secondes def. DG est binome sixiesme. Parquoy le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

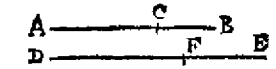
SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{(\sqrt{252}+\sqrt{72})}+\sqrt{(\sqrt{252}-\sqrt{72})}$, *& DE 6. Le rectangle DH sera donc* $\sqrt{252}+\sqrt{72}$, *IK* $\sqrt{252}-\sqrt{72}$, *& LN, ou MF* $\sqrt{180}$, *qui appliquez à DE,*

le costé DI est √7+√2, IL √7−√2, & LM ou MG √5. Partant DL est √28, & LG √20; & par consequent la toute DG est √28+√20, qui est binome sixiesme.

THEOR. 49. PROP. LXVII. Six. 6.

La ligne commensurable en longitude au binome, est aussi binome de mesme ordre.



Soit quelconque binome AB diuisée en ses noms au poinct C, desquels AC est le plus grand, & CB le moindre: & soit la ligne droicte DE commensurable en longitude au binome AB. Ie dis que DE est aussi binome, & de mesme ordre que AB.

Car ayant fait par la 12. prop. 6. que comme la toute AB est à la toute DE, ainsi la retranchée AC soit à la retranchée DF, par la 19. p. 5. le reste CB sera au reste FE, cõme la toute AB à la toute DE. Et pource AB, DE, sont commensurables en longitude par la 10. prop. 10. AC, DF, & CB, FE, seront aussi commens. en longitude. Mais par la 37. p. 10. AC, CB, sont rationeles. Donc aussi DF, FE sont rationeles. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en permutant comme AC sera à CB, ainsi DF à FE. Mais AC, CB sont rationeles commensurables en puissance seulement; donc aussi DF, FE seront rationeles commensurables en puissance seulement. Et partant par la 37. prop. 10. DE est binome. Maintenant ie dis qu'il est aussi binome de mesme ordre que AB.

Car si AC peut plus que CB du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude, aussi par la 15. p. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Et si AC est commensurable en longitude à la rationele proposée, aussi sera DF par la 12. prop. 10. veu que l'vne & l'autre est commensurable en longitude à la mesme AC: Et partant AB, & DE seront binome premier: Si BC est commensurable en longitude à la rationele exposée, aussi sera FE: ainsi AB & DE seront binome second: si AC & BC sont incommens. en longitude à la rationele, aussi seront DF & FE: & par les def. AB & DE seront binome troisiesme. Que si AC peut plus que CB du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude, aussi par la 15. prop. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Parquoy nous demonstrerons comme dessus, que AB, DE seront binome ou quatriesme, ou 5. ou 6. Partant AB, DE, seront binomes de mesme ordre. Donc la ligne commensurable en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 50. PROP. LXVIII.

La ligne commensurable en longitude à vne bimediale, est aussi bimediale de mesme ordre.

Soit quelconque bimediale AB, diuisée en ses noms au poinct C, desquels AC est le plus grand; & CB le plus petit, & à icelle AB soit commensurable en longitude la ligne DE. Ie dis qu'icelle DE est aussi bimediale de mesme ordre qu'icelle AB.

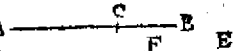
Car (apres auoir construit comme en la precedente) le reste CB sera au reste FE, comme la toute AB, à la toute DE: & partant par la 10.p.10. AC sera commensurable en longitude à DF, & CB à FE. Mais AC, CB sont mediales: donc par la 24. p. 10. DF, FE, commensurables à icelles, sont aussi mediales. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en permutant comme AC à CB, ainsi DF à FE. Mais AC, CB sont commensurables en puissance seulement, par la 38. prop. 10. Donc aussi DF, FE seront commensurables en puissance seulement, par la 10. prop. 10. mais elles sont aussi mediales: & partant par la 38. ou 39. prop. 10. DE sera bimediale. D'auantage ie dis qu'elle est en mesme ordre que AB. Car d'autant que comme AC est à DF, ainsi BC à FE, par la 22. prop. 6. le quarré de AC sera au quarré de DF, comme le rectangle de AC, BC est au rectangle de DF, FE, (estant iceux rectangles semblables, d'autant qu'ils ont les costez prop.) Mais le quarré de AC est commensurable au quarré de DF, ainsi par la 10. prop. 10. les rectangles seront aussi commensurables: que si l'vn est rationel, l'autre le sera aussi. Et partant AB, & DE seroient bimediales premieres, par la 38. prop. 10. Que si l'vn des rectangles est medial, l'autre sera aussi medial, & AB & DE seront bimediales secondes, par la 39. prop. 10. Ainsi DE sera bimediale, & en mesme ordre que AB. Parquoy la ligne commensurable en longitude à vne bimediale, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



THEOR.

THEOR. 51. PROP. LXIX.

La ligne commensurable à vne ligne maieur, est aussi ligne maieur.

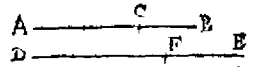


Soit la ligne maieur AB, diuisée en ses noms en C, & à icelle soit commensurable DE. Ie dis qu'icelle DE est aussi ligne maieur.

Car (apres auoir construict comme aux precedentes) AC sera à CB comme DF à FE, & AC commensurable à DF, & CB à FE: mais par la 41. proposit. 10. AC & CB sont incommensurables en puissance; les lignes DF & FE le seront donc aussi. Item puis que icelles lignes AC, CB, DF, FE sont proport. par la 22. p. 6. leurs quarrez seront proportionnaux: & en compofant, les deux de AC & BC seront au seul de CB, comme les deux DF & FE sont au seul de FE, & en permutant les deux quarrez de AC, & CB, seront aux deux de DF & FE, comme le seul de CB est au seul de FE. Mais les lignes CB, FE estans commensurables leurs quarrez seront aussi commensurables, & partant les deux de DF & FE, seront par la 10. prop. 10. commensurables aux deux de AC & BC: & seront rationaux comme iceux. Item on prouuera comme en la precedente que le rectangle de DE & FE est commensurable au rectangle de AC & BC: lequel estant medial, par la 40. prop. 10. aussi sera celuy de DF & FE, par le corol. de la 24. prop. 10. Parquoy DE sera ligne maieure. Donc la ligne commens. à vne ligne maieure, est aussi maieure. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 52. PROP. LXX.

La ligne commensurable à vne ligne pouuant vn rationel, & vn medial, est aussi ligne pouuant vn rationel, & vn medial.



Soit la ligne AB pouuant vn rationel & vn medial, diuisée en ses noms en C, & à icelle soit commensurable la ligne DE. Ie dis qu'icelle DE est aussi ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

Car (apres telle construction qu'aux precedentes) on prouuera que comme AC & BC sont incommẽsurables en puissance, aussi seront DF & FE. Item que le composé des quarrez de AC & BC sera commensurable au composé des quarrez de DF & FE; & le rectangle de AC & BC aussi commensurable au rectangle de DF & FE. Mais par la 41. p. 10. le composé des quarrez de AC & BC est medial, & leur rectangle rationel: Partant le composé des quarrez de DF & FE sera aussi medial, & leur rectangle rationel: & par ainsi le toute DE sera ligne pouuant vn rationel, & vn medial, par la susdite 41. prop. de ce liure. Parquoy la ligne commensurable à vne ligne pouuant vn rationel, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 53. PROP. LXXI.

La ligne commensurable à vne ligne

pouuant deux mediaux, eſt auſſi ligne pouuant deux mediaux.

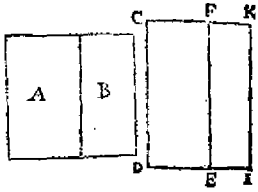
Soit la ligne AB pouuant deux mediaux, diuiſée en ſes noms au poinct C, & à icelle ſoit commenſ. DE. Ie dis qu'icelle DE eſt auſſi ligne pouuant deux mediaux.

Car (apres auoir conſtruict comme aux precedentes) on prouuera tout de meſme que DF & FE ſont incommenſ. en puiſſance: que le compoſé de leurs quarrez eſt medial, & leur rectãgle auſſi medial: mais on prouuera auſſi comme en la 69. p. que le compoſé des quarrez de AC & BC, eſt au compoſé des quarrez de DF & FE, comme le quarré de CB au quarré de FE: & encore comme en la 68. p. que le quarré de CB eſt au quarré de EF comme le rectangle de AC & BC, eſt au rectangle de DF & FE: donc par la 11. p. 5. le compoſé ſera au compoſé, comme le rectangle au rectangle: Et en permutant, comme le compoſé des quarrez de AC & BC eſt incommenſ. à leur rectangle, auſſi le compoſé des quarrez de DF & FE eſt incommenſ. à leur rectangle, & par la 42. p. 10. DE eſt ligne pouuant deux mediaux. Parquoy la ligne commenſ. à vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 54. PROP. LXXII. six. 7.

Si vne ſuperficie rationele, & vne mediale ſõt iointes; la ligne qui peut tout le compoſé eſt binome, ou bimedia-

le premiere, ou ligne maieure, ou ligne pouuãt vn rationel, & vn medial.



Soient ioinctes deux superficies A rationele, & B mediale : ie dis que la ligne qui peut toutes les deux est binome, ou bimediale premiere, ou ligne maieur, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Car premierement les deux superficies ne sçauroient estre egales (car ou elles seroient toutes deux rationeles, ou toutes deux mediales). Soit donc premierement A plus grande que B : Et sur la rationele CD soit appliqué le rectangle CE egal à A : & sur EF vn autre rectangle FI egal à B, à fin que tout le rectangle CI soit egal aux deux superficies proposées A & B. Et puis que A est rationele, & B mediale, aussi CE sera rationel, & FI medial, lesquels estans appliquez à la rationele CD; CF sera rationele commensurable en longitude à icelle CD par la 21. p. 10. & aussi F K rationele, mais incommensurable en longitude à la mesme CD par la 23. prop. 10. & par la 13. prop. 10. les rationeles CF, FK seront incommensurables en longitude; donc commensurables en puissance seulement : & par la 37. prop. 10. CK sera binome diuisé en ses noms en F. Mais puis que A a esté posée plus grande que B, aussi CE sera plus grand que FI; & partant CF sera plus grande que FK par la 1. p. 6. Parquoy CF sera le plus grand nom du binome Ck. Or iceluy plus grand nom CF, peut plus que le moindre nom FC du quarré d'vne ligne

qui luy eſt commenſurable ou incommenſurable en longitude. Si commenſ. (eſtant CF commenſ. en longitude à la rationele CD) CK ſera binome premier par la 1. des ſecondes def. Et par la 55. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt binome. Si incommenſ. CK ſera binome quatrieſme, par la 4. des ſecondes def. & par la 58. p. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle CI eſt ligne maieure.

Que ſi la figure A eſtoit plus petite que B, auſſi le rectangle CE ſeroit plus petit que le rectangle FI; & CF ſeroit le plus petit nom commenſ. à la rationele CD: & par ce moyen CK ſera binome ſecond, ou cinquieſme: ſi binome ſecond, par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt bimediale premiere. Si binome cinquieſme, par la 59. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt ligne pouuant vn rationel & vn medial. Si donc vne ſuperficie rationele, & vne mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

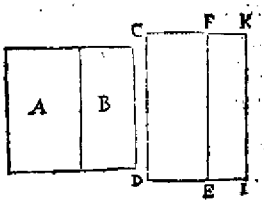
SCHOLIE.

Si la ſuperficie rationele A eſt 7, & la mediale B√48, la ligne pouuant icelles adiouſtées enſemble ſera 2+√3, qui eſt binome premier: ſi A & B ſont 21 & √432, la ligne pouuant icelles ſera √12+3, qui eſt binome ſecond: mais elle ſera √8+√6, qui eſt binome troiſieſme, ſi A eſt 14 & B √192: mais ſi A eſt 6, & B√32, elle ſera 2+√2, qui eſt binome quatrieſme: ſi A eſt 3 & B√8, elle ſera √2+1 qui eſt binome cinquieſme: & ſi A eſt 5, & B√24, la ligne pouuant la compoſée d'icelles ſera √3+√2 qui eſt binome 6: mais ſi A eſt 4 & B√18, la ligne pouuant la ſuperficie compoſée d'icelles ſera √√8+√√2, qui eſt mediale premiere: mais ſi A eſt 6, & B√12, la ligne pouuant la compoſée d'icelles ſera √(6+12) ou √(3+√6)+√(3−√6): & finalement ſi A eſt 2, & B√8, la ligne pouuant icelles ſera

$\sqrt{(\sqrt{8}+2)}$, ou $\sqrt{(\sqrt{2}+1)}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)}$, qui est ligne pouuant vn rationel & vn medial.

THEOR. 55. PROP. LXXIII.

Si deux superficies mediales incommensurables sont iointes, la ligne qui peut tout le composé est bimediale seconde, ou ligne pouuant deux mediaux.



Soient iointes ensemble deux superficies mediales incommens. A & B : Ie dis que la ligne droite qui peut le composé d'icelles superficies A & B est bimediale seconde, ou ligne pouuant deux mediaux.

Ayant faict sur la rationele CD pareille construction qu'en la precedente p. les rectangles CE & FI seront mediaux & incomment. Et par la 23.p.10. CF FK seront rationeles commens. en puissance seulement entr'elles, & à la rationele CD : & par la 37. p. 10. CK sera binome. Soit donc CF le plus grãd nom: Car CF & FK ne sçauroient estre egales, d'autant qu'elles sont incommens. en longitude : Donc CF peut plus que CG du quarré d'vne ligne qui luy est commens. ou incõmens. en longitude. Si commens. CK est binome troisiesme par la 3. d. secondes; (estãs les deux noms CF, FK incommens. en longitude à la

rationele CD) & par la 57. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt bimediale ſeconde : Si incommenſ. par la 6. des ſecondes def. CK ſera binome ſixieſme: & la ligne qui peut le rectangle CI eſt par la 60. p. 10. ligne pouuant deux mediaux. Parquoy ſi deux ſuperficies mediales incommenſ. ſont ioinctes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si A eſt γ 50, & B γ 48: *la ligne pouuant la compoſée d'icelles ſera* $\gamma\gamma 18 + \gamma\gamma 8$, *qui eſt bimediale ſeconde : mais ſi* A *eſt* γ 12, & B γ 8, *ladite ligne pouuant icelles ſera* $\gamma(\gamma 12 + \gamma 8)$, *ou bien* $\gamma(\gamma 3 + 1) + \gamma(\gamma 3 - 1)$, *qui eſt ligne pouuant deux mediaux.*

COROLAIRE.

De toutes ces choſes on peut facilement colliger que le binome & les autres lignes irrationeles qui ſuyuent icelle ſont differentes entr'elles & à la mediale. Car le quarré d'vne ligne mediale, appliqué ſur vne ligne irrationele, faict l'autre coſté rationel commenſurable en puiſſance ſeulement à la rationele à laquelle il eſt appliqué par la 23. p. 10.

Mais le quarré d'vn binome, faict l'autre coſté binome premier par la 61. p. 10.

Le quarré d'vne bimediale premiere, faict l'autre coſté binome ſecond, par la 62. p. 10.

Le quarré d'vne bimediale ſeconde, faict l'autre coſté binome troiſieſme, par la 63. p. 10.

Le quarré d'vne ligne maieure, faict l'autre coſté binome quatrieſme, par la 64. p. 10.

Le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial faict l'autre coſté binome cinquieſme, par la 65. p. 10.

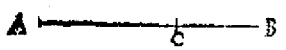
Le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, faict l'autre coſté binome ſixieſme, par la 66. p. 10.

Mais il faut touſiours entendre qu'ils ſoient appliquez ſur vne ligne rationele. Et puis que tous ces coſtez ſont differens entr'eux, il eſt manifeſte que toutes icelles lignes irrationeles ſont differentes entr'elles.

ICY COMMENCENT LES ſixaines des lignes irrationeles par le retranchement.

THEOR. 56. PROP. LXXIV.

Si d'vne ligne rationele, eſt retranchée vne ligne rationele commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute; le reſte eſt irrationel : & ſoit appelé Reſidu.



Soit retranchée de la rationele AB la rationele AC, en ſorte que AB & AC, ſoient rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement : Ie dis que le reſte CB eſt irrationel.

Car par la 1. p. 6. comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de AB eſt au rectangle de AB & AC : mais AB eſt incommenſurable en longitude à AC. Donc par la 10. p. 10. Le quarré de AB eſt incommenſ. au rectangle de AB & BC : Partant auſſi à ſon double : mais

les quarrez de AB & AC, ſont poſez commenſur. Donc par la 16.prop.10. les deux enſemble ſeront commenſ. au ſeul de AB: & partant puis que le quarré de AB eſt incommenſurable au double du rectangle de AB, AC, par la 14.prop.10. les quarrez de AB & AC, ſeront auſſi incommenſ. à deux fois le rectangle de AB & AC, leſquels auec le quarré de CB, eſtans egaux aux deux quarrez de AB & AC par la 7.prop.2. il s'enſuiura que le quarré de CB auec deux fois le rectangle de AB, & AC ſeront incommenſurable à iceux deux rectangles: Et par le coroll. de la 17.prop.10. deux fois le rectangle auec le quarré de CB, (ou les deux quarrez de AB & AC) ſeront incommenſ. au quarré de CB: Mais iceux quarrez de AB, AC, eſtans rationaux; (car ils ſont deſcrits ſur lignes rationelles) le quarré de CB ſera irrationel: Partant la ligne CB ſera auſſi irrationelle appellee Reſidu. Si donc d'vne ligne rationelle eſt retranché vne ligne rationelle commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB *ſoit* 2, *&* AC $\sqrt{3}$: *Donc le reſte* BC *ſera* $2-\sqrt{3}$. *Or en ceſte prop. & és* 5 *ſuiuantes, on Euclide monſtre l'origine des Apotomes ou reſidus, il ne veut dire autre choſe, ſinon que ſi aux lignes dont il s'agit és prop.* 37. 38. 39. 40. 41. *&* 42, *on retranche le plus petit nom du plus grand, ce qui reſtera eſt irrationel appellé reſidu, &c.*

THEOR. 57. PROP. LXXV.

Si d'vne ligne mediale, eſt retranchee

vne mediale commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute, comprenant auec la toute vn rectangle rationel, le reſte eſt irrationel: Soit appellé reſidu medial premier.

Soit la mediale AC, de laquelle eſt retranchee la mediale AB, en ſorte que AB & AC ſont mediales commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel: Ie dis que le reſte BC eſt irrationel.



Car puis que AB & AC ſont mediales, leurs quarrez ſeront mediaux, & partant incommenſ. au double du rectangle de AB & AC, lequel eſt rationel, vn ſeul rectangle ayant eſté poſé rationel. Mais par la 7. prop. 2. deux fois le rectangle de AB & AC, auec le quarré de BC ſont egaux aux quarrez de AB & AC: donc auſſi deux fois le rectangle de AB, AC, auec le quarré de BC ſeront incommenſur. au double du rectangle de AB & AC, & par la 17. prop. 10. le quarré de BC ſera incommenſur. au double du rectangle AB & AC, mais iceluy double eſt rationel: donc le quarré de BC ſera irrationel; & partant la ligne BC auſſi irrationelle, qu'on appellera reſidu medial premier.

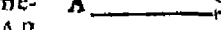
SCHOLIE.

La mediale AC ſoit √√54, & la retranchee AB √√24: donc le reſte BC ſera √√54 — √√24.

THEOR. 58. PROP. LXXVI.

Si d'vne ligne mediale est retranchee vne ligne mediale commens. en puissance seulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, le reste est irrationel: Soit appellé residu medial second.

Soit la mediale A B, de laquelle est retranchée la mediale AC, en sorte que AB & AC soient commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial: Ie dis que le reste CB est irrationel.



Car puis que les quarrez de AB & AC sont commensurab. par la 16. prop. 10. le composé d'iceux sera aussi commensur. à vn chacun d'eux: & chacun d'iceux estant medial, (pource que les lignes AB, AC sont posees mediales) aussi le composé d'iceux quarrez est medial par le coroll. de la 24. prop. 10. comme aussi le double du rectangle de AB, AC puis que le seul rectangle de AB, AC est posé medial. Veu donc que par la 7. prop. 2. le composé des quarrez de AB, AC, est egal au double du rectangle de AB, AC, auec le quarré de CB: le composé des quarrez de AB, AC, qui est medial, excedera le double du rectangle de AB, AC, qui est aussi medial, du quarré de CB. Mais par la 27. p. 10. vn medial n'excede pas vn medial, d'vn rationel: donc le quarré de CB n'est pas

rationel;& partant il est irrationel;& la ligne BC sera aussi irrationelle, qu'on appellera residu medial second. Parquoy si d'vne ligne mediale on retranche vne ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

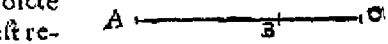
SCHOLIE.

La mediale AB *soit* $\sqrt{\sqrt{18}}$,& AC $\sqrt{\sqrt{8}}$: *donc le reste* CB *sera* $\sqrt{\sqrt{18}-\sqrt{8}}$.

THEOR. 59. PROP. LXXVII.

Si d'vne ligne droicte est retranchéevne ligne droicte incommensurable en puissance à la toute,comprenãt auec icelle vn rectangle medial,& le composé de leurs quarrez rationel, le reste sera irrationel: Soit appellé ligne mineure.

Soit la ligne droicte AC, de laquelle est retranchee AB incommens. en puissance à la toute AC,comprenant auec icelle vn rectangle medial,& le composé de leurs quarrez est rationel: Ie dis que le reste BC est irrationel.



Car puisque le composé des quarrez de AB,& AC est rationel, il est incommens. au rectangle de AC & AB, lequel est medial: partant aussi au double d'iceluy rectangle. Mais par la 7. prop. 2. le composé

des quarrez de AB, AC est egal au double du rectangle de AB, AC, ensemble au quarré de CB: donc par le coroll. de la 17. prop. 10. le composé d'iceux quarrez de AB, AC sera aussi incommens. au quarré de CB. Et puis qu'iceluy composé est posé rationel, par la 10. def. le quarré de BC est irrationel, & la ligne BC irrationelle, qu'on appellera ligne mineure. Parquoy si d'vne ligne droicte est retranchée vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit la ligne $AC\sqrt{(18+\sqrt{108})}$, *&* $AB\sqrt{(18-\sqrt{108})}$: *le reste* BC *sera donc* $\sqrt{(18+\sqrt{108})}-\sqrt{(18-\sqrt{108})}$.

THEOR. 60. PROP. LXXVIII.

Si d'vne ligne droicte est retranchée vne ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial, le reste sera irrationel: Soit appellé ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial.

Soit la ligne droicte AC, de laquelle est retranchee AB incommens. en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez est medial: Ie dis que le reste BC est irrationel.



Car puis que le rectangle de AB & AC est ratio. nel, aussi sera son double, & partant par la 10. def. il sera incommensurable au composé des quarrez de AC & AB, lequel est medial, c'est à dire irrationel. Mais le composé d'iceux quarrez par la 7. prop. 2. est egal au double du rectangle de AB, AC, ensemble au quarré de BC. Donc aussi le double du rectangle de AB, AC est incommensurable au double d'iceluy rectangle auec le quarré de BC: Et par la 17. prop. 10. iceluy double rectangle sera aussi incommens. au quarré de BC. Et puis que iceluy double rectangle est rationel, par la 10. definit. le quarré de BC sera rationel, & la ligne BC irrationele, appellee ligne faisant auec vne superficie rationelle, vn tout medial, ainsi nommee à cause que le quarré d'icelle ligne adiousté auec vne superficie rationelle fait vn tout medial, comme il apparoistra à la 109. prop. 10. Parquoy si d'vne ligne droicte est retranchée, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Si AC est $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}$, *& AB* $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$; *le reste BC sera* $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}-\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$.

THEOR. 61. PROP. LXXVIIII.

Si d'vne ligne droicte, est retrãchee vne ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs

quarrez auſſi medial, le reſte eſt irrationel : ſoit appellé ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne droicte AB, de laquelle eſt retrãché la ligne AC incommenſurable en puiſſance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial incommenſ. au compoſé de leurs quarrez auſſi medial : Ie dis que le rectangle BC eſt irrationel.

Car puis que par la 7. propoſit. 2. le compoſé des quarrez de AB, AC, eſt egal au double du rectangle de AB, AC, auec le quarré de BC : iceluy compoſé des quarrez excedera le double du rectangle du quarré de BC. Mais par la 27. propoſit. 10. vn medial n'excede pas vn medial d'vn rationel : Donc le quarré de BC n'eſt pas rationel ; & partant eſt irrationel, & la ligne BC auſſi irrationelle, qu'on appellera ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial : ainſi appellee parce que le quarré d'icelle auec vne ſuperficie mediale faict vn tout medial. Parquoy ſi d'vne ligne droicte eſt retranchée vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si AB eſt $\sqrt{\sqrt{1}}(80+\sqrt{60})$, *&* $AC\sqrt{}(\sqrt{180}-\sqrt{60})$, *le reſte CB ſera* $\sqrt{}(\sqrt{180}+\sqrt{60})-\sqrt{}(\sqrt{180}-\sqrt{60})$.

LEMME.

S'il y a quatre grandeurs AB, C, DE, F, & que GB excez d'entre AB & C soit egal à DH excez d'entre DE & F; aussi en permutant l'excez d'entre AB & DE sera egal à l'excez d'entre C & F. Car puis que GB est l'excez d'entre AB & C, AG sera egal à C: En la mesme maniere DH sera egal à F. Donc l'excez d'entre AG & DH sera egal à l'excez d'entre C & F, puis que ces grandeurs en sont egales à celles-là, chacune à la sienne, & partant adiouſtant à AG & DH choſes egales GB & HF, l'excez d'entre les toutes AB, & DE sera touſiours egal à l'excez d'entre C & F. Ce qui eſtoit propoſé.



COROLLAIRE.

De ces choſes appert que quatre grandeurs ayant proportion Arithmetique, en permutant elles ſeront auſſi en proportion Arithmetique.

THEOR. 62. PROP. LXXX.

Au reſidu ne peut conuenir qu'vne ſeule ligne rationelle commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute.

Soit le reſidu AB, auquel conuienne BC, en ſorte que AB & BC ſoient rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement: Ie dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne en la meſme ſorte.

A B C D

Car

Car s'il eſt poſſible, en ſoit vne autre BD, s'accordant auec icelle AB, en ſorte que AD, & BD ſoient rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement. Maintenant par la 7. prop. 2. les deux quarrez de AC, BC ſont plus grands que deux fois le rectangle de AC, BC du quarré de AB. Pareillement les deux quarrez de AD, & BD ſont plus grands que deux fois le rectangle de AD, BD, du meſme quarré de AB; & en permutant par le lemme precedent, les quarrez excederont autant les quarrez, que les rectangles excedent les rectangles: & d'autant que les quarrez ſont rationaux, leur excez ſera rationel, par le lemme qui precede la 43. prop. 10. & partant les rectangles eſtans mediaux, (pource que par la 22. prop. 10. vn ſeul d'iceux rectangles eſt medial, & par le corol. de la 24. prop. 10. ſon double eſt auſſi medial) leur excez ſera rationel contre la 27. prop. 10. Donc à AB ne peut conuenir autre ligne que BC, rationelle commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute. Parquoy au reſidu ne peut conuenir, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 63. PROP. IXXXI.

Au reſidu medial premier, ne s'accorde qu'vne ſeule ligne mediale commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel.

Soit le reſidu medial premier AB, auquel la me-

diale BC s'accorde en sorte que AC & BC, soient mediales commensurab. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel: Ie dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne que BC en la mesme sorte.

A B C D

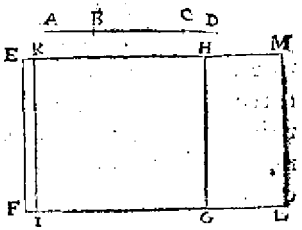
Car si faire se peut en soit vne autre BD. Maintenant par la 7. propos. 2. il se prouuera comme en la preced. que l'excez d'entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, est tel que l'excez d'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre ces rectangles est rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. pource que chacun d'iceux est rationel: & partant l'excez d'entre les quarrez qui sont mediaux (estans descrits sur lignes mediales) seroit aussi rationel, contre la 27. pr. 10. Donc à AB n'a peu conuenir autre ligne mediale que BC, qui soit comment. en puissance seulement à la toute, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 64. PROP. LXXXII.

Au residu medial second, ne peut estre conioincte qu'vne seule ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial.

Soit conioincte au residu medial second AB la mediale BC, commensurable en puissance seulement à la toute AC, & faisant auec icelle vn rectangle

medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut pas cõuenir vne autre ligne que BC, en la meſme ſorte.



Car ſi faire ſe peut, en ſoit conioincte vne autre BD en la ſorte requiſe. Et ſur la rationele propoſee EF, ſoit appliqué le rectangle EG egal aux deux quarrez de AC, BC; & à la meſme EF ſoit encore appliqué EI egal au quarré de AB: parquoy par la 7. p. 2. le reſte KG ſera egal à deux fois le rectangle de AC, BC. Item ſur la meſme rationelle ſoit encore appliqué le rectangle EL egal aux deux quarrez de AD, BD: Et puiſque le rectangle EI eſt egal au quarré de AB, auſſi KL ſera egal à deux fois le rectangle de AD, DB, par la ſuſdicte 7. p. 2.

Maintenant les quarrez de AC & BC ſont mediaux (eſtans faicts de lignes mediales) & ſi deux fois le rectangle de AB & BD doit eſtre medial: partant leurs egaux rectangles EG, & KG ſerõt mediaux: leſquels appliquez ſur la rationele EF, auront les autres coſtez EH, & KH rationaux comm. en puiſſ. ſeulement à EF par la 23. p. 10. en apres le quarré de AC eſtant au rectangle de AC, & BC, par la 1. p. 6. comme AC eſt à BC, qui ſont incomm. en long. par la 10. p. 10. le quarré de AC ſera incomm. au rectangle de AC & BC: & partãt auſſi à ſon double KG. Item le quarré de BC eſt cõmenſ. au quarré de AC, & par la 16. p. 10. le rectangle EG egal à iceux quarrez, ſera incommenſur. au ſeul quarré de AC, auquel KG eſt incommenſ. Et par la 14. p. 10. EG, & KG ſeront incommenſ. auſſi ſeront les lignes EH & KH par la 1. p. 6. & 10. p. 10. leſquelles eſtans rationeles ſeront incõmenſ. en puiſſance ſeu-

lement : & par la 74. prop. 10. EK sera residu, & KH sa conuenable. Par mesme discours (si on maintient que DC soit aussi adiointe à AB, selon le requis) Ek se trouuera residu, & KM sa conuenable : ce qui seroit contre la 80. prop. 10. Donc au residu medial AB ne peut s'adioindre autre conuenable que BC. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 65. PROP. LXXXIII.

A la ligne mineure, est conuenable vne seule ligne incommens. en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle conuienne BC incommensur. en puissance à la toute AC, & faisant le composé de leurs quarrez rationel, & le rectangle compris d'icelles AG, BC, medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut estre adiointe autre ligne que BC qui face le mesme.



Car si faire se peut en soit adioustee vne autre BD, qui soit pareillement incommensurable en puissance à la toute AD, & faisant le composé des quarrez de AD, BD rationel, & le rectangle compris sous icelles AD, BD, medial. Il se prouuera comme en la 80. propos. 10. qu'il y a mesme excez entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, qu'entre deux

fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre les quarrez est rationel par le lemme qui suit la 42. propos. 10. pource que l'vn & l'autre composé est rationel: donc aussi l'excez d'entre les rectangles sera rationel, contre la 27. proposit. 10. Car iceux rectangles estans mediaux l'excez d'iceux ne peut estre rationel. Donc à la ligne mineure AB on n'a peu adiouster autre ligne conuenable que BC. Parquoy à la ligne mineure s'accorde vne seule ligne incommensurable en puissance, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 66. PROP. LXXXIIII.

A la ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, s'accorde vne seule ligne incommensurab. en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarrez medial.

Soit la ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial AB, à laquelle s'accorde la ligne BC, incommens. en puissance à la toute AC, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarrez medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut s'accommoder autre ligne que BC, qui face la mesme chose.

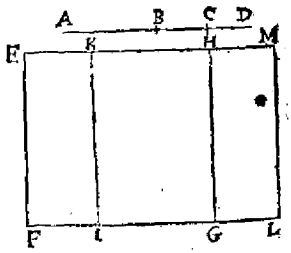
A ____ B ____ C ____ D

Car s'il est possible en soit encore vne autre BD: il se prouuera comme en la 80. p. 10. que les quarrez

de AC, & BC, excedent les quarrez de AB & BD d'vn mesme excez, que deux fois le rectangle de AC & BC, excedent deux fois le rectangle de AB, & BD, lequel excez comme en la precedente seroit rationel & irrationel, si à la ligne AB, on pouuoit enioindre BD incommensurable en puissance à la toute AD, &c. Parquoy à vne ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 67. PROP. LXXXV.

A la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, se conioinct vne seule ligne incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial.



Soit la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial AB, à laquelle s'accorde BC incommensur. en puissance à la toute AC, & comprenant auec icelle vn rectangle medial incommensurable au composé de leurs quarrez, qui est aussi medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut s'ad-

ioindre autre ligne que BC, qui face le proposé.

Car si faire se peut en soit adiouſtee vne autre BD. Puis soit faict mesme construction qu'en la 82. propos. 10. Donc le composé des quarrez de AC & BC estant medial & incommensurable à deux fois le rectangle de AC & BC aussi medial, leurs egaux rectangles EG, & KG seront mediaux, & incommensurables: Et par la 23.prop.10. estans appliquez sur la rationelle EF leurs autres costez EH, & KH seront lignes rationeles, & par la 1.prop.6. & 10.prop. 10.commensurables en puissance seulement; (puis que leurs rectangles sont incommensurables) & par la 74.prop. 10. EK sera residu auquel KM sera conuenablement adiouſtee. Par mesme discours (si on dit que BD soit aussi conuenable à AB & face ce qui est proposé.) EK se trouuera residu, & kM sa conuenable: ainsi le residu Ek n'auroit pas vne seule conuenable, contre la 80.prop.10. On ne pouuoit donc pas adioindre à AB, autre ligne conuenable que BC, incommensurable en puissance à la toute AC, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

DEFINITIONS TROISIEMES.

Estant proposee vne ligne rationele, & vn residu: Lors que la toute composee du residu, & de sa conuenable ou adiouſtee, peut plus que la conuenable, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude.

1. Si la toute est commensurable à la rationelle proposee, le residu soit appellé residu premier.

SCD Lyon 1 Mathématiques

2. Mais si l'adiouſtee eſt commenſurable à la rationele expoſee, Soit reſidu ſecond.

3. Que ſi ny l'vne ny l'autre n'eſt commenſurable à la rationelle propoſee, Soit reſidu troiſieſme.

Derechef, lors que la toute peut plus que l'adiouſtee, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude.

4. Si la toute eſt commenſurable à la rationelle propoſee, Soit reſidu quatrieſme.

5. Mais ſi l'adiouſtee eſt commenſurable à la rationelle, Soit reſidu cinquieſme.

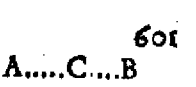
6. Que ſi ny l'vne ny l'autre n'eſt commenſurable à la rationelle, Soit reſidu ſixieſme.

PROBL. 19. PROP. LXXXVI.

Trouuer vn reſidu premier.

Eſtans trouuez deux nombres quarrez AB, CB, (comme nous auons enſeigné au ſecond ſcholie de la 29. propoſit. de ce liure, deſquels l'excez AC ne ſoit quarré, ſoit expoſee la rationnelle D, à la-

quelle E F soit commensurable en longitude ; & partant icelle EF sera aussi rationele: puis apres par le corol. de la 6. prop. 10. soit faict que comme le nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF soit au quarré de GF. Ie dis que EG est residu premier.



Car puis que les quarrez de EF, GF, qui sont comme nombre à nombre, sont commensurables par la 10. pr. aussi les lignes EF, GF seront commens. au moins en puissance : & E F estant rationele, GF le sera aussi. Mais d'autant que AB, AC ne sont entre-eux comme nombres quarrez : aussi les quarrez de EF, GF ne seront entr'eux comme nombres quarrez : & partant par la 9. prop. 10. les lignes EF, GF sont incommensurables en longitude : elles sont donc rationeles commensurables en puissance seulement, & partant le reste EG sera residu par la 74. prop. 10.

Ie dis d'auantage qu'il est residu premier : car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle GF, soit du quarré de H. Et puis que comme le nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF, au quarré de GF, par conuersion de raison comme AB sera à CB, ainsi le quarré de EF sera au quarré de H. Mais AB, CB sont nombres quarrez : Donc les quarrez de E F & H sont comme nombres quarrez : & partant par la 9. prop. 10. les lignes EF, & H sont commensurables en longitude. Ainsi la toute EF commensurable en longitude à la rationele D, peut plus que la conuenable GF, du quarré de la ligne H qui luy est commensurable en longitude : & partant par la 1. des troisiesmes def. EG sera residu

premier. Nous auons donc trouué vn residu premier. Ce qu'il falloit faire.

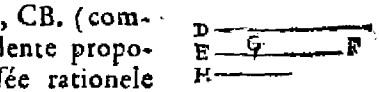
SCHOLIE.

La rationnele D soit 9, EF 6 : AB 9, CB 4, & par consequent AC est 5 : faisant donc que comme 9 est à 5, ainsi le quarré de EF, c'est à dire 36, soit au quarré de FG ; icelle FG sera √20 : & partant le reste EG sera 6—√20, qui est residu premier.

Or il appert par les def. preced. que Apotome ou residu n'est autre chose que ce qui reste apres de deux nombres posez rationaux commensurables en puissance seulement on soustrait le moindre du plus grand ; ce qui se faict par l'interposition du signe—: & par ainsi il n'y a aucune difference entre le binome & le residu, sinon qu'en celuy-là les deux noms sont conioints par le signe +, & en cestuy-cy, l'vn est soustrait de l'autre par le signe—. Parquoy pour promptement trouuer vn residu de quelque espece que ce soit, il n'y a qu'à trouuer le binome de mesme espece, ainsi qu'il a esté dit cy deuant, puis au lieu du signe + apposer le signe—. Comme au scholie de la 49. prop. nous auons trouué ce binome premier 8+√48 ; mais en changeant seulement le signe nous aurons 8—√48, pour residu premier : & ainsi des autres.

PROBL. 20. PROP. LXXXVII.
Trouuer vn residu deuxiesme.

Estans trouuées deux nombres quarrez AB, CB. (comme en la precedente proposition & l'exopsée rationele D, soit prise GF commensuen longitude à icelle D, laquelle sera aussi rationele:



puis soit faict que comme le nombre AC est au nombre AB, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF par le corol. de la 6. prop. 10. Ie dis que EG est residu second.

Car puis que les quarrez de GF, EF, ayans la raison des nombres AC, AB, sont commensurables par la 6. prop. 10. les lignes GF, EF seront aussi commensurables au moins en puissance : & GF estant rationele, EF sera aussi rationele. Et d'autant que les nombres AC, AB, & partant aussi les quarrez de GF, EF, ne sont entr'eux comme nombres quarrez, par la 9. prop. 10. GF, EF, seront incommensurables en longitude: donc les rationeles GF, EF, sont commensurable en puissance seulement : & partant par la 74. prop. 10. le reste EG est residu.

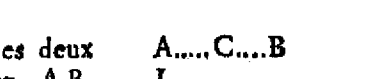
Ie dis aussi qu'il est residu second. Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, & soit du quarré de H. Donc puis que comme AC est à AB, ainsi le quarré de GF au quarré de EF: en changeant cõme AB sera à AC, ainsi le quarré de EF au quatré de GF. Maintenant nous demõstrerons cõme en la precedente prop. que la ligne H est commensurable en longitude à icelle EF. Parquoy puis que la toute EF, peut plus que l'adiouſtée GF, du quarré de H, qui luy est commensurable en longitude, comme aussi à la rationele proposée D : par les troisiesmes def. EG sera residu second. Nous auons donc trouué vn residu second, ainsi qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationnele D soit 9, FG 5. AB 9, CB 4. & par consequent AC 5 : faisant donc que comme AC 5 est AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF : icelle EF sera √45 : & partant EG sera √45—5, qui est residu second.

PROBL. 21. PROP. LXXXVIII.

Trouuer vn residu troisiesme.



Ayant trouué les deux nombres quarrez AB, CB, comme en la p. 86. soit pris vn autre nombre I, (comme nous auons enseigné en la 51. prop. de ce liure) qui ne soit à l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, cõme nombre quarré à nombre quarré : puis estant exposée la rationele D, soit faict que cõme I est à AB, le quarré de D soit au quarré de EG, lesquels quarrez par la 6. p. 10. seront commensurables : & partant les lignes D & EG, aussi commensurables au moins en puissance. Donc D estant rationele, aussi EG sera rationele. Et d'autant que les nombres I & AB, & partant les quarrez de D & EG, ne sont en raison de nombres quarrez, par la 9. prop. 10. les lignes D & EG seront incommensurables en longitude. Derechef soit fait que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EG soit au quarré de GF. Ie dis que EF est residu troisiesme.

Car puis que les quarrez de EG, GF, estans comme nombre à nombre, sont commensurables par la 6. prop. 10. les lignes EG, GF seront aussi commensurables au moins en puissance. Mais EG estant rationele, GF le sera aussi. Et puis que AB, AC, & partant aussi les quarrez de EG, GF, ne sont comme nombres quarrez, par la 9. prop. 10. les lignes EG, GF, seront incommensurables en longitude. Donc

EG, FG ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulemẽt: & partant puis que de EG eſt oſtée GF commenſurable en puiſſance à icelle, par la 74. p. 10. le reſte EF ſera reſidu.

Ie dis qu'il eſt auſſi reſidu troiſieſme: Car puis que comme I eſt à AB, ainſi le quarré de D au quarré de EG, & comme AB à AC, ainſi le quarré de EG au quarré de GF, en raiſon egale comme I ſera à AC, ainſi le quarré de D au quarré de GF. Or les nombres I & AC ne ſont comme nombres quarrez, ny par conſequent auſſi les quarrez de D & GF: parquoy par la 9. p. 10. les lignes D & GF ſont incommenſurables en longitude. Donc l'vne & l'autre d'icelles EG, GF eſt incommenſurable en longitude à la rationele propoſée D. Et comme en la 86. prop. on prouuera que EG peut plus que GF du quarré de la ligne H, qui luy eſt commenſurable en longitude: Et par les tierces def. EF ſera le reſidu troiſieſ. qu'il falloit trouuer.

SCHOLIE.

La rationele D ſoit 6, & ſoit faict que comme le nombre I 6, eſt à AB 9, ainſi le quarré de D, ſçauoir 36, ſoit au quarré de EF, & iceluy ſera 54, & par conſequent la ligne EF √54: Mais faiſant que comme AB 9, eſt à AC 5, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de FG, icelle FG ſera √30, & par conſequent EG ſera √54—√30, qui eſt reſidu troiſieſme.

PROBL. 22. PROP. LXXXIX.

Trouuer vn reſidu quatrieſme.

Estans trouuez (comme nous auons enseigné au 3. scholie de la 29. proposition 10. & comme il appert en la fig. de la 87. propo. fol. 602.) deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB ne soit à l'vn ny à l'autre AC, CB, comme nombre quarré à nombre quarré: soit proposée la tationele D, à laquelle soit commensurable en longitude EF, laquelle sera par consequent aussi rationele. Que si on acheue de construire comme en la 86. proposition, on demonstrera comme làque EG est residu : & d'auantage, ie dis qu'il est residu quatriesme.

Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, soit du quarré de H. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de GF: par conuersion de raison comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais les nombres AB, CB, ne sont comme nombre quarré à nombre quarré: donc par la 9. prop. 10. les lignes EF & H seront incommensurables en longitude. Parquoy la toute EF peut plus que l'adiousté GF, du quarré de H, qui luy est incommensurable en longitude, & la mesme EF est commensurable en longitude à la rationele D: partant par la def. EG sera residu quatriesme. Nous auons donc trouué vn Apotome ou residu quatriesme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele D *soit* 9, EF 6; *faisant donc que comme* AB 9 *est à* AC 6, *ainsi* 36 *quarré de* EF *soit au quarré de* FG, *icelle sera* $\sqrt{24}$, *& par consequent le reste* EG *sera* $6-\sqrt{24}$ *qui est residu quatriesme.*

PROBL. 23. PROP. XC.
Trouuer vn residu cinquiesme.

Estans trouuez les deux nombres AC, CB, comme en la prop. precedente, soit faict mesme construction qu'en la 87. prop. puis soit demonstré comme en icelle 87. prop. que EG est residu. Ie dis qu'il est aussi residu 5. Car EF peut plus que G du quarré de H: Et comme en la 86. proposition, nous demonstrerons par conuersion de raison que comme AB est à CB, ainsi le quarré de EF est au quarré de H: & comme en la precedente les lignes EF & H seront incommensurables en longitude: & la conuenable GF commensurable en longitude à la rationele D. Parquoy par les def. troisiesmes EG sera residu cinquiesme. Nous auons donc trouué vn residu cinquiesme. Ce qu'il falloit faire

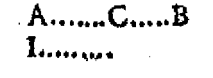
SCHOLIE.

La rationele D soit 9, FG 6. faisant que comme AC 6, est à AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF, iceluy, sera 54, & par consequent la ligne EF √54; & le reste EG, √54—6, qui est residu cinquiesme.

PROB. 24. PROP. XCI.
Trouuer vn residu sixiesme.

Estans trouuez les trois nombres AC, CB, & I, comme en la 54. prop. & exposé la rationele D, soit

acheuée la cõstructiõ comme en la 88. p. Nous demonstrerons comme là, que D & EG sont incommensurables en longitude, & que EF est residu: puis que D & FG seront aussi incommensurables en longitude, & partant l'vne & l'autre d'icelles EG, FG est incommensurable en longitude à la rationele proposée D. Maintenant EG peut plus que FG du quarré de la ligne H, laquelle nous demonstrerons comme en la 89. prop. estre incommensurable en longitude à icelle EG. Parquoy par la derniere des 3. def. EF sera residu sixiesme. Nous auons donc trouué vn residu sixiesme. Ce qu'il falloit faire.

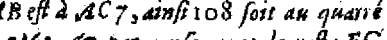


SCHOLIE.

La rationele D soit 9; & soit faict que comme I *9 est à* AB *12, ainsi 81 quarré de D soit au quarré de EF; lequel sera trouué de 108, & par consequent icelle sera* $\sqrt{108}$; *& faisant que comme AB est à AC 7, ainsi 108 soit au quarré de* FG; *icelle* FG *sera* $\sqrt{63}$, *& par consequent le reste* EG *sera* $\sqrt{108}-\sqrt{63}$, *qui est residu sixiesme.*

Or nous trouuerons encores (comme enseigne Theon) les six residus susdits, ainsi qu'il ensuit.

S'il faut trouuer pour exemple le residu premier: soit trouué par la 49. p 10. le binome premier AD *duquel le plus grãd nom est* AC, *& le moindre* CD;



puis soit couppé de AC la ligne CB *egale à* CD. *Ie dis que* AB *est residu premier. Car d'autant que AC, CD, sont rationeles*

neles commensurables en puissance seulement ; aussi AC, BC seront rationeles commensurables en puissance seulement: Donc par la 74. p. 10. AB est residu. Et pource que AC peut plus que CD, ou CB du quarré d'vne ligne qui lui est commensurable en longitude, & AC est commensurable en longitude à la rationele proposée par la def. du binome premier, AB sera residu premier par la 1. des tierces def. Par la mesme maniere seront trouuez tous les autres residus, sçauoir est le 2. si du second binome nous ostons le moindre nom du plus grand, &c,

Ainsi ayant trouué le binome premier AD $9+\sqrt{45}$, si du plus grand nom AC 9, on oste le moindre nom, restera le residu AB de $9-\sqrt{45}$. & ainsi des autres.

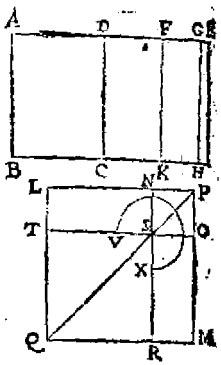
THEOR. 68. PROP. XCII. Six. 4.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele & d'vn residu premier, la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du residu premier AD: Ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Au residu AD soit sa conuenable DE, laquelle soit couppée en deux egalement au poinct F, & apres auoir appliqué vn rectangle sur la ligne AE defaillant d'vne figure quarrée, c'est à dire d'vne ligne egale à son autre costé, & egal au quart du quarré de DE, qui est le quarré de FE, soit iceluy rectangle compris soubs AG, GE : en apres soient menées les lignes Fk, GH, EI paralleles à AB, qui rencontrent la ligne BC prolongée en k, H & I, puis soit faict le

quarré LM egal au rectangle AH, & le quarré NO egal au rectangle EH, ayant auec LM l'angle LPM commun. Donc les quarrez LM, NO, par la 26.p.6. seront au long d'vn mesme diametre, lequel soit PQ: soient continuées les lignes NS, OS, à fin d'acheuer le gnomon VX. Maintenant FE est moyenne pr. entre AG & GE, par la 17.p.6. car par l'hypothese le quarré de EF est egal au rectangle de AG & GE, & par la 1. p.6. le rectangle kE sera milieu proport. entre les deux rectãgles AH & HE; il le sera aussi entre leurs egaux quarrez LM & NO. Mais par le lemme de la 54.p.10. le rectangle LO, est aussi milieu proport. entre iceux quarrez: Donc kE, ou Dk son egal, sera egal au rectãgle LO. Et par consequent kG à LS, (estant HE egal à NO) Iceluy Gk sera aussi egal à SM: ainsi le rectãgle DH sera egal au gnomon VX. Mais tout le quarré LM est egal au rectangle AH. Donc le rectangle AC sera egal au quarré TR. Maintenant ie dis que la ligne TS qui peut le rectangle AC est residu.



Car puisque AD est residu premier, & DE sa conuenable: les deux lignes AE & DE sont rationeles commens. en puissance seulement, estant la toute AE commens. en longitude à la rationele AB, & pouuant plus que l'adioustée DE, du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: Et par la 18.p.10. le rectangle defaillant aura les deux costez AG, & GE commens. en longit. & par la 16 p.10. ils seront commens. en longit. à la totale AE, laquelle

estant commensurable en longit. à la rationele AB, par la 12. pr. 10. AE, AG, GE, AB seront toutes rationeles commens. en longitude : & par la 20. p. 10. les rectangles AH & HE seront rationaux, & par consequent leurs egaux quarrez LM & NO aussi rationaux, & les lignes TO & SO rationeles.

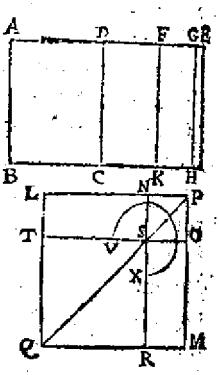
Pareillement les deux lignes DF & FE estans egales, & commens. elles le seront aussi à leur toute DE, par la 16. p. 10. laquelle DE estant rationele, DF, & FE seront aussi rationeles commens. en puissance seulement à AB, comme leur toute DE ; & par la 22. p. 10. leurs rectangles CF & kE seront mediaux. Mais le rectangle LO est egal au medial kE, partant aussi medial, & incommens. au quarré rationel NO. Et par la 1. p. 6. & 10 p. 10. leurs costez TO & SO seront incommens. en longit. & pour autant qu'ils sont rationaux, ils seront commens. en puissance seulement, & par la 74. p. 10. TS est residu. Si donc vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn residu premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 8, *&* $AD\ 9 - \sqrt{45}$: *DE est donc* $\sqrt{45}$, *& sa moitié* DF $\sqrt{11\frac{1}{4}}$: *mais* AG *sera* $7\frac{1}{2}$, *&* GE $1\frac{1}{2}$. *Donc le rectangle* BE *est* 72, *AH* 60, HE 12, CF $\sqrt{720}$, *&* $AC\ 72 - \sqrt{2880}$, *& le rectangle de* AG, GE *est* $11\frac{1}{4}$. *Parquoy le quarré LM sera* 60, *&* NO 12 : *& partant la ligne LP est* $\sqrt{60}$, *&* NP $\sqrt{12}$: *& par consequent LN, ou TS sera* $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, *qui est residu ; & son quarré TR, est* $72 - \sqrt{2880}$, *egal au rectangle AC.*

THEOR. 69. PROP. XCIII.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele & d'vn reſidu ſecond, la ligne qui peut iceluy rectangle, eſt reſidu medial premier.



Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du reſidu ſecond AD. Ie dis (apres auoir conſtruict comme en la precedente, & demonſtré comme là que le rectangle AC eſt egal au quarré TR) que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, eſt reſidu medial premier.

Car puis que AD eſt reſidu ſecond, & DE ſa conuenable, les deux lignes AE & DE ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, la conuenable DE eſtant commenſurable en longitude à la rationele AB; & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, & par la 18. prop. 10. le rectangle defaillant aura les deux coſtez AG & GE commenſurables en longitude, & par la 16. prop. 6. ils ſeront auſſi commenſurables à la totale AE, & par la 14. pro. 10. icelle totale eſtant commenſurable en longitude à la rationele AB, auſſi ſeront AG, & GE qui ſont rationeles (car elles ſont commenſurables à leur totale qui eſt rationele) commenſurables en puiſſance ſeulement à la rationele AB, & par la 22.

p.10. les rectangles AH & HE seront mediaux ; partant mediaux leurs egaux quarrez LM & NO, & & leurs costez TO & SO seront lignes mediales.

Pareillement DE estant commensurable en longitude à la rationele AB, aussi sera sa moitié FE, & par la 20. prop. 10. le rectangle KE sera rationel: partant aussi rationel son egal rectangle LO, compris des deux mediales TO & SO, lesquelles sont incommensurables en longitude : (autrement leur rectangle seroit medial par la 25. prop. 10.) & par la 75. prop. 10. TS est residu medial premier. Si donc vn rectangle compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 4, AD $\sqrt{45}-5$: DE est donc 5, & sa moitié DF $2\frac{1}{2}$, & par consequent le quarré d'icelle DF ou FE est $6\frac{1}{4}$, auquel estant egal le rectangle de AG, GE, icelles seront $\sqrt{31\frac{1}{4}}$ & $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: parquoy le rectangle HE, ou quarré NO sera $\sqrt{20}$: & partant son costé SO est $\sqrt{\sqrt{20}}$. Mais puis que la ligne AE est $\sqrt{45}$, & AG $\sqrt{31\frac{1}{4}}$: le rectangle BE sera $\sqrt{720}$, & AH, ou le quarré LM $\sqrt{500}$: & par consequent la ligne TO est $\sqrt{\sqrt{500}}$: de laquelle estant ostée SO, restera TS $\sqrt{\sqrt{500}-\sqrt{20}}$, qui est residu medial premier, & son quarré TR est $\sqrt{720}-\sqrt{20}$. Mais le rectangle AC est autant : car multipliant AB 4 par AD $\sqrt{45}-5$, viendra aussi $\sqrt{720}-\sqrt{20}$. Donc ST residu medial premier peut le rectangle AC.

THEOR. 70. PROP. XCIIII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn residu troisiesme, la ligne pouuant iceluy rectangle,

est residu medial second.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du residu troisiesme AD: (apres auoir construit comme en la 92. p. 10.) Ie dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC,) comme nous auons demonstré en la susdite p.) est residu medial second.

Car puis que AB est residu troisiesme, & DE sa conuenable, les lignes AE & DE sont rationeles commens. en puissance seulement entr'elles, & à la rationele AB: mais AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longit. & par la 18. p. 10. AG & GE seront commens. en longitude, & à leur totale AE par la 16. p. 10. Et seront rationeles comme icelle: mais AE est commens. en puissance seulement à la rationele AB, & par la 14. p. 10. AG & GE seront commens. en puissance seulement à AB: Et par la 22. p. 10. les rectãgles AH & HE seront mediaux: donc aussi mediaux leurs egaux quarrez LM & NO, & leurs costez TO & SO seront lignes mediales.

Pareillement DE estant incommens. en longitude à la rationele AB, aussi sera sa moitié FE, par la 14. p. 10. & par la 22. p. 10. EF estant rationele comme sa double DE, le rectangle KE sera medial, partant aussi medial son egal LO, compris des deux mediales commensurables en puissance seulement TO & SO: (car leurs quarrez sont commensurables) estans leurs egaux rectangles commensurables, & ne sçauroient estre commensurables en longitude, car il faudroit par la 1. p 6. & 10. p. 10. que LO & NO fussẽt aussi commensurables, & par consequent leurs egaux rectangles KE & HE, (ce qui n'est pas,) & par la 76. p. 10. TS est residu medial second. Si donc

vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, &c
Ce qu'il falloit demonstrer

SCHOLIE.

La rationele AB soit 4, & AD √54—√30; donc DE est √30: & sa moitié DF √7 ½, son quarré 7 ½, lequel estant appliqué sur la ligne AE √ 54, & defaillant d'vne figure quarrée, les costez du rect. appliqué, sçauoir AG, GE, seront √37 ½, & √1 ½. Parquoy le rectangle AC sera √864—√480, BE √864, CE √480, AH √600, DK √120, & HE √24. Mais le quarré LM estant egal à AH, il sera aussi √600, NO egal à HE √24: & partant les costez d'iceux quarrez, sçauoir TO, SO sont √√600, √√24: & par consequent TS est √√600—√√24, & son quarré TR √864—√480, egal au rectangle AC.

THEOR. 71. PROP. XCV.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn residu quatriesme, la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne mineure.

Soit le rectangle AC cõpris de la rationele AB, & du residu quatriesme AD (apresauoir cõstruit comme en la 92. prop. 10. & demonstré comme là que la ligne TS peut le rectangle AC.) Ie dis qu'icelle ligne TS est ligne mineure.

Car puis que AD est residu quatriesme, & DE sa conuenable, les lignes AE & DE sont rationeles cõmens. en puissance seulement; & AE qui est cõmens.

en longitude à la rationele AB, peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude : & par la 19. prop. 10. AG & GE seront incommẽsurables en longitude : partant par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les rectangles AH & HE seront incommens. aussi seront donc leurs egaux quarrez LM & NO : partant les lignes TO & SO seront incommensurables en puissance : Mais AE estant commensurable en longitude à la rationele AB, par la 20. prop. 10. le rectangle AI sera rationel : partant aussi rationel sera le composé de leurs egaux quarrez LM & NO.

Pareillement DE estant commensurable en puissance seulement à AB, le rectangle CE sera medial par la 22. prop. 10. aussi sera sa moitié KE : & par consequent son egal LM sera aussi medial : partant les deux lignes TO & SO, qui comprennent iceluy rectangle, mediales (estans incommens. en puissance) & le composé de leurs quarrez estant rationel, par la 77. p. 10. TS est ligne mineure. Parquoy si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 6, AD 9 — $\sqrt{54}$; donc DE est $\sqrt{54}$, & sa moitié DF $\sqrt{13\frac{1}{2}}$, son quarré $13\frac{1}{2}$, lequel appliqué sur AE 9, & defaillant d'vne figure quarrée, les costez AG, GE seront $4\frac{1}{2}+\sqrt{6\frac{3}{4}}$, & $4\frac{1}{2}-\sqrt{6\frac{1}{4}}$. Parquoy le rectangle AC sera $54-\sqrt{1944}$, BE 54, AH $27+\sqrt{243}$, DK $\sqrt{486}$, & HE $27-\sqrt{243}$. Mais le quarré LM estant egal à AH, sera aussi $27+\sqrt{243}$, & NO egal à HE $27-\sqrt{243}$: & partant leurs costez TO, SO sont $\sqrt{(27+\sqrt{243})}$, & $\sqrt{(27-\sqrt{243})}$: & par consequent TS est $\sqrt{(27+\sqrt{243})}-\sqrt{(27-\sqrt{243})}$, & son quarré TR $54-\sqrt{1944}$, egal au rectangle AC.

THEOR. 72. PROP. XCVI.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, & d'vn reſidu cinquieſme, la ligne qui peut iceluy, eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationelle AB, & du reſidu cinquieſme AD: (apres auoir conſtruit comme en la 92. pro. 10. & demonſtré comme là que la ligne TS peut iceluy rectangle AC). Ie dis que icelle TS eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele, vn tout medial.

Car puis que AD eſt reſidu cinquieſme, & DE ſa conuenable, les lignes AE, & DE ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, & DE eſt commenſur. en longitude à la rationelle AB, & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & par la 19. propo. 10. les lignes AG & GE ſont incommenſ. en longitude: & comme en la precedente TO & SO ſeront incommenſ. en puiſſance. Mais AE eſtant incommenſurable en longitude à la rationelle AB, le rectangle AI ſera medial par la 22. propoſ. 10. partant auſſi medial le compoſé de leurs egaux quarrez LM, & NO.

Pareillement DE eſtant commenſ. en longitude à la rationele AB, par la 20. prop. 10. le rectangle CE ſera rationel, auſſi ſera ſa moitié KE, & ſon egal LO, compris de deux lignes incommenſur. en puiſſance

TO & SO, desquelles le composé de leurs quarrez faict vn tout medial, & par la 78. prop. 10. TS sera ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial. Parquoy si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationele AB *soit* 4, AD $\sqrt{54}-6$: *donc* DE *est* 6, *& sa moitié* DF 3, *son quarré* 9, *auquel estant egal le rectangle de* AGE: AG *sera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}+\sqrt{4\frac{1}{2}}$, *&* GE $\sqrt{13\frac{1}{2}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}$. *Mais le rectangle* AC *sera* $\sqrt{864}-24$, BE $\sqrt{864}$, AH $\sqrt{216}+\sqrt{72}$, DK 12, *&* HE $\sqrt{216}-\sqrt{72}$: *ainsi le quarré* LM *sera* $\sqrt{216}+\sqrt{72}$, NO $\sqrt{216}-\sqrt{72}$, *& leurs costez* TO, SO, $\sqrt{(\sqrt{216}+72)}$, *&* $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$, *& par consequent* TS *est* $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}-\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$, *& son quarré* TR *sera* $\sqrt{864}-24$.

THEOR. 73. PROP. XCVII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn residu sixiesme, la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationelle AB, & du residu sixiesme AD (apres auoir construit comme en la 92. prop. 10.) Ie dis que TS qui peut iceluy rectangle AC, comme il a esté demonstré en la susdicte prop.) est ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

Car puis que AD eſt reſidu ſixieſme, & DE ſa conuenable, AE & DE ſont rationelles commenſurab. en puiſſance ſeulement entr'elles, & à la rationelle AB; & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude: Et par la 19. prop. 10. AG & GE ſeront incommenſurab. en longitude: Et comme en la 95. prop. 10. TO & SO ſeront incommenſ. en puiſſance, & tout ainſi qu'en la precedente le rectangle AI eſtant medial, le compoſé de leurs egaux quarrez LM & NO, ſera auſſi medial: Item DE eſtant commenſ. en puiſſance ſeulement à AB rationelle, par la 22. propo. 10. le rectangle CE ſera medial: auſſi ſera donc ſa moitié kE, & ſon egal LO. Et AE, DE eſtans incommenſ. en longitude, par la 1. prop. 6. & 10. propo. 10. les rectangles AI, CE, ſeront incommenſur. & puis que CE eſt commenſ. à ſa moitié KE, par la 14. prop. 10. KE ſera incommenſ. à AI: Et partant le medial LO (egal à KE) compris des lignes TO & SO incomm. en puiſſance, eſt incommenſ. au compoſé des quarrez d'icelles TO & SO (egal à AI) medial: Parquoy par la 79. prop. 10. le reſte TS ſera ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

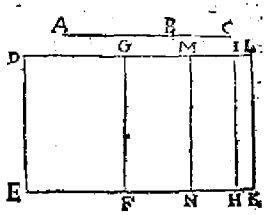
SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 6, AD $\sqrt{108}-\sqrt{63}$ *: donc DE eſt* $\sqrt{63}$, *& ſa moitié DE* $\sqrt{15\frac{3}{4}}$ *ſon quarré* $15\frac{3}{4}$, *AG* $\sqrt{27}+\sqrt{11\frac{3}{4}}$, *GE* $\sqrt{27}-\sqrt{11\frac{3}{4}}$ *: mais le rectangle* AC *ſera* $\sqrt{3888}-\sqrt{2268}$, *BE* $\sqrt{3888}$, *AH* $\sqrt{972}+\sqrt{405}$, *DK* $\sqrt{567}$, *& HE* $\sqrt{972}-\sqrt{405}$ *: ainſi le quarré LM ſera* $\sqrt{972}+\sqrt{}$

405, NO $\sqrt{972-\sqrt{405}}$, & leurs costez TO, SO, seront $\sqrt{\sqrt{(972+\sqrt{405})}}$, & $\sqrt{\sqrt{(972-\sqrt{405})}}$: & par consequent TS est $\sqrt{\sqrt{(972+\sqrt{405})}}-\sqrt{\sqrt{(972-\sqrt{405})}}$, & son quarré TR $\sqrt{3888-\sqrt{2268}}$.

THEOR. 74. PRO. XCVIII. Six.5.

Le quarré d'vn residu appliqué sur vne rationelle, faict l'autre coste residu premier.



Soit le residu AB, & BC sa conuenable, tellement que AC, BC soient rationelles commens. en puissance seulement : & sur la rationelle DE soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Ie dis que l'autre costé DG est residu premier.

Car sur la mesme rationelle DE soit appliqué le rectangle DH egal au quarré de AC: & sur FH vn autre rectangle IK egal au quarré de BC, tellement que le total DK est egal au composé des quarrez de AC, BC; lequel estant egal par la 7. prop. 2. à deux fois le rectangle de AC, CB, ensemble auec le quarré de AB, si on oste le quarré de AB & le rectangle DF; restera GK egal à deux fois le rectangle de AC, CB : partant GL estant couppee en deux egalement en M, & tiré MN parallele à DE : MK sera egal au rectangle de AC, CB. Et pource que AC, CB sont rationeles, leurs quarrez seront aussi rationaux, & partant commens. & par la 16. prop. 10. le composé

d'iceux quarrez est commens. à vn chacun d'eux: & partant iceluy composé, ou DK son egal, est rationel, lequel estant appliqué sur la rationelle DE, par la 21.prop.10. DL sera rationelle commens. en longit. à icelle DE. Derechef puis que AC, CB sont rationelles commensur. en puissance seulement, le rectangle d'icelles, & partant aussi son double GK, sera medial: & iceluy estant appliqué à la rationelle GF, par la 23.prop.10. GL sera rationelle incommens. en longitude à GF, ou DE: Et puis que DK rationel, & GK medial, c'est à dire irrationel, sont incommens. par la 1.prop.6. & 10.prop.10. les lignes DL, GL, seront aussi incommens. en longitude. Parquoy puis qu'elles ont esté demonstrees rationelles, elles seront commensur. en puissance seulement: & partant par la 74.prop.10. le reste DG sera aussi residu. Ie dis d'auantage qu'il est residu premier.

Car puis que par le lemme de la prop.54. le rectangle de AC, CB, ou son egal MK, est moyen prop. entre les quarrez de AC, CB, c'est à dire entre DH, IK: DH, MK, IK seront continuellement proportionaux: & par consequent aussi les lignes DI, ML, IL, & par la 17.prop.6. le rectangle de DI, IL est egal au quarré de ML, c'est à dire au quart du quarré de GL, par le scholie de la 4. prop.2. Et puis que les quarrez de AC, CB, ou leurs egaux rectangles DH, IK, sont commens. par la 1.prop.6. & 10. prop.10. les lignes DI, IL, seront commens. en longit. Parquoy puis que les lignes DL, GL sont inegales, & à la plus grande DL est appliqué le rectangle de DI, IL, egal à la quarte partie du quarré de GL, & defaillant d'vne figure quarree, par la 18.prop.10. DL pourra plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: & par la 1.des 3.def. DG

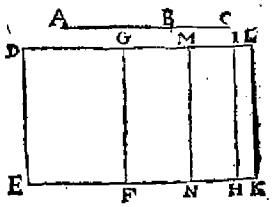
ſera reſidu premier. Parquoy le quarré d'vn reſidu appliqué ſur vne rationnelle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Le reſidu AB ſoit √60—√12, & BC √12: donc la toute AC eſt √60: mais la rationelle DE *ſoit* 8, *ſur laquelle eſtant appliqué le quarré de AB, qui eſt* 72—√2880, *l'autre coſté* DG *ſera* 9—√45: *auſſi* DI *ſera* $7\frac{1}{2}$, IL $1\frac{1}{2}$, DL 9, *&* GL √45, *&* GM √$11\frac{1}{4}$: *Ainſi le reſt.* DK *ſera* 72, DH 60, IK 12, GN √720, GK √2880. *&* DF 72—√2880.

THEOR. 75. PROP. XCIX.

Le quarré d'vn reſidu medial premier, appliqué ſur vne ligne rationele, faict l'autre coſté reſidu ſecond.



Soit le reſidu medial premier AB, duquel la conuenable ſoit BC, tellement que AC, BC, ſoient mediales commenſur. en puiſſance ſeulement, & contiennent vn rectangle rationel: & ſur la rationele DE ſoit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Ie dis que l'autre coſté DG eſt reſidu ſecond.

Car ſoit conſtruit ainſi qu'en la precedente, tellement que derechef DH, IK, ſoient egaux aux quar-

rez de AC, BC, & GK double du rectangle compris d'icelles lignes AC, BC, & partant MK egal à vne fois le rectangle de AC, BC. Veu donc que les lignes AC, CB, sont mediales commensurab. en puissance seulement; les quarrez d'icelles, ou leurs egaux rectangles DH, Ik, seront aussi mediaux & commens. & partant par la 16. propos. 10. le tout DK sera aussi commens. à chacun d'iceux: Donc aussi medial, par le corol. de la 24. prop. 10. Et par la 23. prop. 10. DL sera rationelle commens. en puissance seulement à DE: & d'autant que le rectangle de AC, BC est rationel, son double Gk sera aussi rationel: & par la 21. prop. 10. GL sera rationelle commens. en longitude à DE rationele, & les deux rectangles Dk, & Gk estans incomm. (car l'vn est rationel, & l'autre medial) les rationelles DL & GL seront commensurab. en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. DG sera residu: lequel ie dis estre aussi second. Car on prouuera de mesme qu'en la precedente, que la toute DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, & partant par les tierces definitions DG est residu second. Parquoy le quarré d'vn residu medial premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Le residu medial premier AB soit VV 500—VV 20, & BC VV 20: la toute AC sera donc VV 500: & estant appliqué sur la rationelle DE 4, le quarré de AC, qui est V 500, l'autre costé DI sera V 31 1/4, & si à la mesme DE est appliqué IK egal au quarré de BC, qui est V 20, IL sera V 1 1/4: ainsi la toute DL sera V 45. Derechef appliquant à DE le rect. GN egal au rect. de ACB, qui est 10. l'autre costé GM

sera $2\frac{1}{2}$, *& son double GL 5 : parquoy* DG *sera* $\sqrt{45-5}$, *qui est residu second.*

THEOR. 76. PROP. C.

Le quarré d'vn residu medial second, appliqué sur vne ligne rationnelle, faict l'autre costé residu troisiesme.

Soit le residu medial second AB, auquel conuient ne BC, tellement que AC, CB, soient mediales commens. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle medial: Et sur la rationelle DE, soit appliqué le rectangle DF. Ie dis que l'autre costé DG est residu troisiesme.

Car (ayant construit comme en la 98. prop. 10.) on demonstrera comme en la precedente que le rectãgle DK est medial, & partant par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel commens. en puissance seulement à la rationelle DE. Item le rectangle de AC, BC, estant medial, aussi sera son double Gk, & par la 23. prop. 10. GL sera aussi rationele commens. en puissance seulement à la rationelle DE : Et puis que AC, BC sont incommens. en longitude, le quarré de AC sera incommens. au rectangle de AC, BC, par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. partant aussi à son double Gk : Mais le quarré de AC est aussi commens. au quarré de BC : (pource qu'iceux quarrez sont descrits sur lignes commensur. en puissance:) & partant par la 16. prop. 10. le composé d'iceux quarrez, c'est à dire Dk, sera aussi commens. au quarré de AC, auquel est incommens. Gk, parquoy par la 13. prop. 10. Dk sera

Dk sera incommens. à GK, & par la 10. prop. 10. les lignes DL, GL, ayant mesme raison que DK, Gk seront incom. en long. Mais estans rationeles, elles seront comm. en puissance seulement, & par la 74. p. 10. BG sera resídu. Mais ny DL, ny GL ne sont commens. en longitude à la rationele DE, & si on prouuera comme en la 98. prop. 10. que DL peut plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy est commensurab. en longitude : Et par les tierces des. DG est resídu troisiesme. Parquoy le quarré d'vn resídu medial second, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

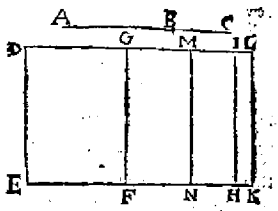
Le resídu medial second AB soit $\sqrt{\sqrt{600}}-\sqrt{\sqrt{24}}$, *&* $BC\sqrt{\sqrt{24}}$: *la toute AC sera donc* $\sqrt{\sqrt{600}}$: *& appliquant sur la rationele* DE 4, *le rect.* DH *egal au quarré de* AC, *qui est* $\sqrt{600}$, *l'autre costé* DI *sera* $\sqrt{37\frac{1}{2}}$; *mais appliquant sur la mesme* DE *le rectangle* IK *egal au quarré de* BC, *l'autre costé* IL *sera* $\sqrt{1\frac{1}{2}}$; *& partant la toute* DL *sera* $\sqrt{54}$: *& si derechef on applique sur la mesme* DE *le rect.* GN *egal au rectangle de* ACB, *qui est* $\sqrt{120}$, *l'autre costé* GM *sera* $\sqrt{7\frac{1}{2}}$, *& son double* GL $\sqrt{30}$: *parquoy* DG *est* $\sqrt{54}-\sqrt{30}$, *qui est resídu troisiesme.*

THEOR. 77. PROP. CI.

Le quarré d'vne ligne mineure, appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre coste resídu quatriesme.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle BC conuienne, en sorte que AC, BC, soient incommensurab. en

puiſſance, comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel, & le quarré d'icelle AB ſoit appliqué ſur la rationelle DE: ie dis que l'autre coſté DG eſt reſidu quatrieſme,



Car (apres auoir conſtruit comme en la 98. propoſ. 10.) le rectangle DK ſera rationel, & GK medial, par le diſcours des precedentes; & par la 21. prop. 10. DL ſera rationele commenſ. en longit. à la rationele DE; & GL, par la 23. prop. 10. ſera rationele commenſ. en puiſſance ſeulement à icelle rationelle DE: & puis que Dk eſt rationel, & Gk medial, ils ſont incomm. & par la 10. prop. 10. les lignes DL, GL qui ſont en meſme raiſon que Dk, GK, ſeront incommenſur. en longitude. Mais elles ſont rationelles, elles ſeront donc commenſ. en puiſſance ſeulement: & par la 74. prop. 10. DG ſera reſidu.

D'auantage il eſt reſidu quatrieſme. Car puis que les lignes AC, BC ſont incommenſur. en puiſſance, leurs quarrez ſeront incommenſ. Auſſi incommenſ. leurs egaux rectangles DH, IK, & par conſequent incommenſ. les lignes DI, IL, coſtez du rectangle defaillant d'vne figure quarree egale au quarré de ML, c'eſt à dire à la quarte partie du quarré de GL, comme il a eſté demonſtré en la 98. prop. 10. & par la 19 prop. 10. DL (qui eſt commenſ. en longitude à la rationelle DE,) peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude: & par les tierces definitions DG eſt reſidu quatrieſme. Donc le quarré d'vne ligne mineure, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La ligne mineure AB soit $\sqrt{(27+\sqrt{243})} - \sqrt{(27-\sqrt{243})}$ *& BC* $\sqrt{(27-\sqrt{243})}$ *: la toute AC sera donc* $\sqrt{(27+\sqrt{243})}$*, le quarré de laquelle appliqué sur la rationele DE 6, l'autre costé DI sera* $4\frac{1}{2}+\sqrt{6\frac{3}{4}}$ *: mais estant appliqué sur la mesme DE, le rectangle Ik, egal au quarré de BC, qui est 27—*$\sqrt{243}$*, l'autre costé IL sera* $4\frac{1}{2}-\sqrt{6\frac{3}{4}}$*: & partant la toute DL sera 9. Que si à la mesme DE on applique le rect. GN egal au rectangle de ACB, qui est* $\sqrt{486}$*, l'autre costé GM sera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}$*, & son double GL* $\sqrt{54}$*: & partant DG est 9—*$\sqrt{54}$*, qui est residu quatriesme.*

THEOR. 78. PROP. CII.

Le quarré d'vne ligne faisant auec vne superficie rationelle, vn tout medial, appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre costé residu cinquiesme.

Soit la ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial AB, de laquelle le quarré soit appliqué sur la rationele DE : Ie dis que l'autre costé DG est residu cinquiesme.

Car (apres auoir construit comme en la 98. prop. 10.) AB estant ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial, & BC sa conuenable, les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de

leurs quarrez medial : partant le rectangle DK sera medial, & GK rationel, & par la 23. prop. 10. DL sera rationele incommensur. en longitude à la rationele DE : & par la 21. propos. 10. GL sera aussi rationele, mais commens. en longit. à la rationele DE : Item les rectangles DK, GK estans incomm. (car l'vn est rationel, & l'autre medial) les lignes DL, GL seront aussi incommens. en longitude. Mais icelles sont rationeles : elles sont donc commens en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. DG sera residu. Mais GL estant commensur. en longitude à la rationelle DE, & si comme en la precedente on prouuera que la toute DL peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude : & partant par les tierces def. DG est residu cinquiesme. Donc le quarré d'vne ligne faisant auec vne superficie rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}-\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$, *& BC* $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$; *la toute AC sera donc* $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}$, *le quarré de laquelle soit appliqué sur la rationelle DE* 4, *& l'autre costé DI sera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}+\sqrt{4\frac{1}{2}}$: *mais estant appliqué sur la mesme rationelle, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui est* $\sqrt{216}-\sqrt{72}$, *l'autre costé IL sera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}$: *& partant la toute DL sera* $\sqrt{54}$: *Que si à la mesme rationele on applique le rectangle GN ou NK, egal au rectangle de ACB, qui est* 12, *l'autre costé ML sera* 3, *& son double GL* 6 : *Parquoy DG sera* $\sqrt{54}-6$, *qui est residu cinquiesme.*

THEOR. 79. PRO. CIII.

Le quarré d'vne ligne faisãt auec vne superficie mediale vn tout medial, appliqué sur vne ligne rationele, faict l'austre costé residu sixiesme.

Soit la ligne AB, faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, le quarré de laquelle AB soit appliqué sur la rationelle DE: le dis que l'autre costé DG est residu sixiesme.

Car (apres auoir construit comme en la 98.p. 10.) AB estant ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, & BC la conuenable à icelle AB, les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarrez aussi medial: partant les deux rectãgles DK & GK sont mediaux & incommens. & par la 23.prop. 10. DL, GL seront rationeles incommens. en longit. entr'elles, & à la rationele DE; & par consequent commens. en puissance seulement: & par la 74.prop.10. BG sera residu. Mais on peut prouuer comme en la 101.p.10. que la toute DL peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longit. & partant par les tierces def. GD est residu sixiesme. Donc le quarré d'vne ligne faisant auec vne superficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

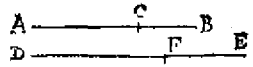
La ligne AB soit $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405})}-\sqrt{(\sqrt{972}-$

$\sqrt{405}$), & BC $\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}$: donc la toute AC sera $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405})}$, au quarré de laquelle soit egalle rectangle DH, appliqué sur la rationelle DE 6 : l'autre costé DI sera donc $\sqrt{27}+\sqrt{11\frac{1}{4}}$: mais estant appliqué sur la mesme rationele, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui est $\sqrt{972}-\sqrt{405}$, l'autre costé IL sera $\sqrt{27}-\sqrt{11\frac{1}{4}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{108}$: Si derechef on applique sur la mesme rationelle le rectangle MK, ou GN, egal au rectangle de ACB, qui est $\sqrt{567}$ l'autre costé GM sera $\sqrt{15\frac{3}{4}}$, & son double $\sqrt{63}$: parquoy DG sera $\sqrt{108}-\sqrt{63}$, qui est residu sixiesme.

THEOR. 80. PROP. CIIII. Six.6.

La ligne commensurable en longitude à vn residu, est aussi residu, & de mesme ordre.

Soit le residu AC, auquel soit comm. en long. la ligne droicte DF. Ie dis que DF est residu de mesme ordre que AC.



Car CB soit la conuenable au residu AC, tellement que AB, CB soient rationeles commensur. en puissance seulement, & par la 12. p. 6. soit faict que comme AC est à DF, ainsi CB soit à FE. Donc par la 12. p. 5. la toute AB sera à la toute DE, comme AC à DF, ou CB à FE: & par la 10. prop. 10. comme AC est commensurable en longitude à DF, ainsi AB à DE, & BC à FE. Et en permutant comme AB à BC, ainsi DE à FE. Maintenant comme AB & BC sont ra-

tioneles, auſſi ſeront DE & FE : (car elles ſont commenſurables à icelles, par la 10. prop. 10.) Mais AB & BC ſont commenſur. en puiſſance ſeulement: partant DE & FE ſeront auſſi rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, & par la 74. propo. 10. DF eſt reſidu.

Ie dis d'auantage qu'il eſt reſidu de meſme ordre que AC. Car la ligne AB peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable ou incommenſurable en longitude : ſi commenſurable, auſſi DE pourra plus que FE de meſme façon par la 15. propoſ. 10. (eſtans les quatre lignes proport.) que ſi AB eſt commenſ. en long. à vne ligne rationele propoſee, auſſi DE qui luy eſt commenſ. en longitude ſera commenſ. en longitude à la meſme rationelle propoſee par la 12. prop. 10. Parquoy AC & DF ſeront reſidus premiers : Que ſi BC eſt commenſur. en longitude à la rationele, auſſi ſera FE : & AC, DF ſeront reſidus ſeconds: ſi AB & BC ſont incommenſurables en longitude à la rationelle, auſſi ſeront DE & FE; & AC, DF ſeront reſidus troiſieſmes. Que ſi AB peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude, auſſi DE pourra plus de meſme que FE par la 15. prop. 10. & ſi AB eſt commenſurable en longitude à la rationelle, auſſi ſera DE : & AC, DF ſeront reſidus quatrieſmes. Si BC eſt commenſurable en longitude à la rationele, auſſi ſera FE : & AC, DF ſeront reſidus cinquieſmes. Si AB & BC ſont incommenſur. en longitude à la rationele, auſſi ſeront DE & FE : partant AC & DF ſeront reſidus ſixieſmes : par ainſi DF eſt reſidu de meſme ordre que AC. Parquoy la ligne commenſ. en longitude a vn reſidu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Le residu AC *soit* $\sqrt{60}-\sqrt{12}$, *&* DF $\sqrt{15}-\sqrt{3}$, *lesquelles sont commens. en longitude, l'vne estant double de l'autre, & la conuenable* CB *soit* $\sqrt{12}$: *Donc la toute* AB *est* $\sqrt{60}$: *& puis que comme* AC *est à* DF, *ainsi* CB $\sqrt{12}$ *est à* FE; *icelle* FE *sera* $\sqrt{3}$: *& la toute* DE $\sqrt{15}$, *commens. seulement en puissance à* DF.

THEOR. 81. PROP. CV.

La ligne commensurable à vn residu medial, est aussi residu medial de mesme ordre.

Soit la ligne DF commens. au residu medial AC: ie dis que icelle DF est aussi residu medial, & de mesme ordre que AC.

Car ayant faict mesme construction qu'en la preced. prop. AB & BC seront comm. à DE, EF lesquelles sont mediales commens. en puissance seulement, & par la 24. prop. 10. DE & FE seront mediales commens. en puissance seulement, par la 10. p. 10. Et partant par la 75. ou 76. p. 10. DF est residu medial: ie dis d'auantage qu'il est de mesme ordre que AC.

Car le quarré de AB est au rectangle de AB, BC comme AB à BC: Item le quarré de DE est aussi au rectangle de DE, FE comme DE à FE, par la 1. p. 6. Mais le quarré de AB est commensur. au quarré de DE, estant AB & DE commens. & par la propos. 10. les deux rectangles seront aussi commens. Que com-

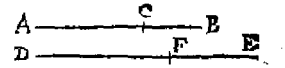
me l'vn ſera rationel ou medial, auſſi l'autre ſera rationel ou medial: partant ſi les rectangles ſont rationaux, AC & DF ſeront reſidus mediaux premiers: ſi les rectangles ſont mediaux, AC & DF ſeront reſidus mediaux ſeconds. Donc la ligne commenſ. à vn reſidu medial, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Le reſidu medial AC ſoit VV 500—*VV* 20, *& DF VV* $21\frac{1}{4}$—*VV* $1\frac{1}{4}$: *BC ſera VV* 20, *& la toute AB VV* 500; *mais FE ſera VV* $1\frac{1}{4}$, *& la toute DE VV* $31\frac{1}{4}$.

THEOR. 82. PROP. CVI.

La ligne commenſurable à vne ligne mineure, eſt auſſi ligne mineure.



Soit la ligne DF, commenſurable à la ligne mineure AC: ie dis qu'icelle DF eſt auſſi ligne mineure. Car CB eſtant conuenable à icelle AC, & faict meſme conſtruction qu'en la 104. prop. 10. AB & BC ſeront incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel. Mais cõme AB à CB, ainſi DE à FE, & par la 10. p. 10. DE & FE ſerõt incommenſ. en puiſſance. Item puis que comme AB à BC, ainſi DE à FE, par la 22. prop. 6. leurs quarrez ſeront proportionnaux, & en compoſant comme le compoſé des quarrez de AB, BC ſera au quarré de BC, ainſi le compoſé des quarrez de DE, FE, ſera au quarré de FE; & en permutant comme le compoſé des quar-

rez de AB, BC sera au composé des quarrez de DE, FE, ainsi le quarré de CB sera au quarré de FE: lesquels quarrez de CB & FE sont commensurables: (car les lignes BC & FE sont commensurables comme AC & DF, ainsi qu'il a esté demonstré à la 104. prop. 10.) & partant par la 10. prop. 10. le composé des quarrez de AB & BC, (lequel est rationel) sera commensurable au composé des quaarez de DE & FE, lequel sera aussi rationel. Pareillement d'autant que comme nous auons dit à la prop. precedente, le quarré de AB est au rectangle de AB & CB, comme le quarré de DE au rectangle de DE & FE, & en permutant cõme le quarré, au quarré ainsi le rectangle au rectangle: c'est à dire commens. Car les les lignes AB & DE sont commens. par la 10. pr. 10. & par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de AB & BC estant medial, celuy de DE & FE sera aussi medial: partant DE & FE estant incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel, par la 77. p. 10. DF sera ligne mineure. Donc la ligne commensurable à vne ligne mineure est aussi ligne mineure. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 83. PROP. CVII.

La ligne commensurable à vne ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, est aussi ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.

Soit la ligne DF commensurable à la ligne AC,

faisant auec vne superficie rationele vn tout medial. Ie dis que DF est aussi ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.

Car soit CB conuenable à AC, tellement que AB, CB soient incommens. en puissance, & facent le composé de leurs quarrez medial, mais le rectangle compris d'icelles, rationel : Et estant faict mesme construction qu'en la 104. p. on demonstrera comme en la precedente que les lignes DE, & FE sont incommens. en puissance; & que le composé des quarrez de AB, CB est commens. au composé des quarrez de DE, FE. Mais celuy là est medial : aussi sera donc cestuy-cy, par le corol. de la 24. p. 10. Derechef comme nous auons demonstré en la 105. p. le rectangle de AB, CB est commens. au rectangle de DE, FE : mais cestuy-là est posé rational : aussi sera donc cestuy-cy par la 9. d. 10. Veu donc que DE, FE, sont incommens. en puissance, & font le composé de leurs quarrez medial, mais leur rectangle rationel, par la 78. p. 10. DF sera ligne faisant auec superficie raionele vn tout medial. Parquoy la ligne commensurable à vne ligne, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 84. PROP. CVIII.

La ligne commensur. à la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, est aussi ligne faisãt auec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne DF commens. à la ligne AC, faisant auec vne superficie mediale vn tout medal: Ie dis que DF est aussi ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

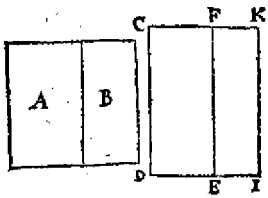
Car à AC ſoit CB conuenable, tellement que AB, CB ſoient incommenſurables en puiſſance, & facent le compoſé de leurs quarrez medial, & leur rectangle auſſi medial, & incommenſ. au compoſé de leurs quarrez : & ayant faict ſemblable conſtruction qu'aux precedentes, on prouuera comme en la 106. prop que les lignes DE, FE, ſont incommenſurable, en puiſſance, & que le compoſé des quarrez de AB & BC, eſt commenſurable au compoſé des quarrez de DE & FE : & comme en la 105. p. que le rectangle de AB & BC, eſt commenſurable au rectangle de DE & EF. Mais le rectangle de AB & CB, eſt medial, & incommenſurable au compoſé des quarrez de AB & CB, auſſi medial : partant par le ſcholie de la 14. p. 10. le rectãgle de DE & EF, ſera medial, & incommenſ. au compoſé des quarrez de DE & FE auſſi medial : & DF ſera ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial. Donc la ligne commenſurable à la ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 85. PROP. CIX.

Si d'vne ſuperficie rationele, eſt retranchée vne ſuperficie mediale : la ligne qui peut le reſte eſt reſidu, ou ligne mineure.

Soit la ſuperficie rationele AB, de laquelle ſoit retranchée la mediale A : Ie dis que la ligne qui peut le reſte, B eſt reſidu, ou ligne mineure.

Qu'il ne soit ainsi: Sur vne rationele proposée CD soit descrit le rectangle CE egal à A, & FI egal à B. Il est euident que CI sera rationel, & par la 21. p. 10. son autre costé Ck sera rationel commensurable en longitude à CD. Item par la 23. prop. 10. CD estant medial, CF sera rationele commensurable en puissance seulement à CD, & par la 13. prop. 10. CK & CF seront rationeles commensurables en puissance seulement: & partant par la 74. p. 10. Fk sera residu. Maintenant CK peut plus que CF du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longit. Si commensurable Fk sera residu premier: & la ligne qui peut le rectangle FI (ou son egal B) est residu par la 92. prop. 10. Si incommensurable CK est residu quatrieſme: & la ligne qui peut le rectangle FI, ou (ou son egal B) est ligne mineure par la 95. pr. 10. Parquoy si d'vne superficie rationele, est retranché vne superficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

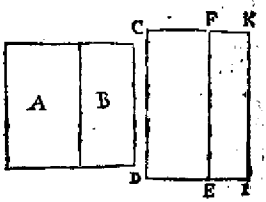


SCHOLIE.

Si le rectangle rationel AB est 32, le medial A √320, & la ligne rationele CD 6, sur laquelle est descrit le rectangle CE egal à A, & FI egal à B: les costez CF; & FK, seront √8 8/9, & 5 1/3 — √8 8/9: & partant la toute CK sera 5 1/3: & le rectangle CI 32, duquel ostant CE, qui est √320, le reste rectangle FI sera 32 — √320: & la ligne pouuant iceluy sera √(16+√176) — √(16—√176), qui est ligne mineure.

THEOR. 86. PROP. CV.

Si d'vne ſuperficie mediale eſt retranchée vne ſuperficie rationele, la ligne qui peut le reſte, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.



Soit comme deſſus la ſuperficie mediale AB, de laquelle ſoit retranchée la rationele A. Ie dis que la ligne qui peut le reſte B, (apres auoir conſtruict comme en la precedente) ou ſon egal FI, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie, rationele vn tout medial.

Car puis que la ſuperficie totale AB eſt mediale auſſi la totale CI eſt mediale, & par la 23. p. 10. le coſté CK eſt rationel commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele CD. Item puis que le retranché A eſt rational, auſſi ſera ſon egal CE, & par la 21. p. 10. CF ſera rationele commenſurable en longitude à la rationele CD: & par la 13. pr. 10. Ck & CF ſeront rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement; & partant par la 74 p. 10. FK ſera auſſi reſidu. Mais à cauſe que Ck peut plus que CF du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable, ou incommenſurable en longitude, Fk ſera reſidu ſecond,

ou residu cinquiesme. Si residu second; la ligne qui peut le rectangle FI est residu medial premier par la 93 prop. 10. si residu cinquiesme, la ligne qui peut le rectangle FI, est ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial par la 96. p. 10. Parquoy si d'vne superficie mediale est retranchée vne superficie rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Si la superficie mediale AB est √800, & la rationele A 12; le reste B sera √800—12, & la ligne pouuant iceluy sera √(√200+√164)—√(√200—√164), qui est ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.

THEOR. 87. PROP. CXI.

Si d'vne superficie mediale, est retranchée vne superficie mediale incommensurable à la toute; la ligne qui peut le reste est ou residu medial second, ou ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la superficie mediale AB, de laquelle soit retranchée la superficie mediale A, incommenſ. à la toute AB. Ie dis que la ligne qui peut le reste B, est residu medial second, ou ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

Car ayant faict mesme construction qu'aux precedentes, les rectang. CI, CE seront mediaux & incom-

mensurables entr'eux ; & par la 23. prop. 10. les lignes Ck, CF seront rationeles incommensurables en longitude à CD. Et puis que CI, CE sont incommensurab. les rationeles CK, CF, qui sont en mesme raison que CI, CE, seront aussi incommensurables en longitude, par la 10. prop. 10. & par consequent elles sont seulement commensurables en puissance: Donc FK sera residu par la 74. prop. 10. & FC sa conuenable. Maintenant Ck peut plus que Fk, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude : si commensurable, FK sera residu troisieme, par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou son egal B (est residu medial second, par la 94, prop. 10. Si incommens. FK sera residu 6. par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou B son egal) est ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, par la 97. p. 10. Si donc d'vne superficie mediale est retranché vne superficie mediale incommensurable à la toute, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

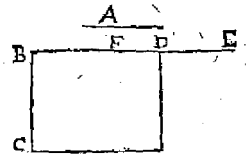
Si la superficie mediale AB est $\sqrt{279}$, *&* $A\sqrt{40}$: *la superficie restante B sera* $\sqrt{279}-\sqrt{40}$: *& la ligne pouuant icelle sera* $\sqrt{(\sqrt{69\frac{3}{4}}+\sqrt{59\frac{3}{4}})}-\sqrt{(\sqrt{69\frac{3}{4}}-\sqrt{59\frac{3}{4}})}$, *qui est appellée ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.*

THEOR. 88. PROP. CXII.

La ligne appelée residu, n'est pas la mesme que Binome.

Soit

Soit le residu A. Ie dis qu'elle n'est pas mesme ligne que binome.



Car soit la rationele proposée BC, sur laquelle soit appliqué le rectangle CD. egal au quarré du residu A : par la 98. prop. 10. BD sera residu premier, auquel si on adiouste sa conuenable DE ; BE & DE, seront rationeles commensurables en puissance seulement : & BE commens. en longitude à la rationele BC.

Maintenant si on pose A estre binome ; BD sera binome premier, par la 61. p. 10. lequel estant diuisé en ses noms au poinct F ; (estant BF le plus grand nom) BF & FD seront rationeles commensurables en puissance seulement, & BF commensurable en longitude à la rationele BC ; & par la 12. p. 10. BE & BF, seront commensurables en longitude. Veu donc que la toute BE est commensurable en longitude à la partie BF. par le corol. de la 16. prop. 10. l'autre partie FE sera aussi commensurable en longitude à BE : partant aussi rationele comme icelle BE. Mais DE qui est aussi rationele, n'est commensurable en longitude à BE, & par la 14. prop. 10. FE, DE sont rationeles commensurables en puissance seulement : & partant par la 74. prop. 10. FD est residu, & par consequent irrationele ; ce qui est absurde : car elle a esté prouuée tantost rationele : donc le residu A, sera different du binome. Parquoy la ligne appellée residu n'est pas la mesme que binome. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De ces choses on peut facilement colliger que la ligne appel-

le residu, & les cinq sortes de lignes irrationeles suiuantes, sont differentes de la mediale, & entr'elles. Car le quarré de la mediale appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé rationel commensurable en puissance seulement à icelle rationele, par la 23. p. 10.

Le quarré du residu, faict l'autre costé residu premier, par la 98. p. 10.

Le quarré du residu medial premier, faict l'autre costé residu second, par la 99. p. 10.

Le quarré du residu medial second, faict l'autre costé residu troisiesme, par la 100. p. 10.

Le quarré de la ligne mineure, faict l'autre costé residu quatriesme, par la 101. p. 10.

Le quarré de la ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, faict l'autre costé residu cinquiesme, par la 102. prop. 10.

Le quarré de la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, faict l'autre costé residu sixiesme. par la 103. p. 10.

Puis donc que tous ces costez, (qui sont les latitudes des rect angles) sont differens; les lignes qui les peuuent seront aussi differentes. Mais les quarrez des binomes, & des cinq lignes irrationeles suiuantes, estans appliquez sur vne ligne rationele font l'autre costé binome de quelque ordre: partant le binome, & les cinq suiuantes sont differentes du residu, & des cinq suiuantes.

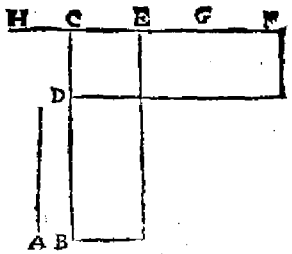
Ainsi toutes les lignes irrationeles cy deuant dictes sont treize: sçauoir celles-cy.

1. Mediale.
2. Binome.
3. Bimediale premiere.
4. Bimediale seconde.
5. Ligne maieure.
6. Ligne pouuant vn rationel & vn medial.
7. Ligne pouuant deux mediaux.

8. Residu.
9. Residu medial premier.
10. Residu medial second.
11. Ligne mineure.
12. Ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.
13. Ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

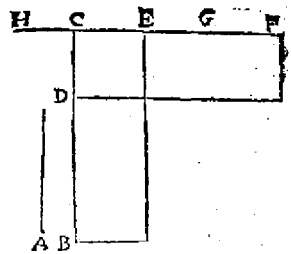
THEOR. 89. PROP. CXIII.

Le quarré d'vne ligne rationele estant appliqué sur vn binome, faict l'autre costé residu, les noms duquel sont proportionaux, & commensur. aux noms du binome: en outre le residu est de mesme ordre que le binome.



Soit la rationele A, & le binome BC, duquel le plus grand nom soit BD: & à icelle BC soit appliqué le rectangle BE egal au quarré de la rationele A. Ie dis que l'autre costé CE est residu tel que dit la proposition.

Car sur le plus petit nom CD soit appliqué le rectãgle DF aussi egal au quarré de la rationele A: donc les deux rectangles BE, DF, seront egaux, & par la 14. p. 6. leurs costez seront reciproques, sçauoir que cõ-



me BC à DC, ainſi CF à CE, & en diuiſant cõme BD, à DC, ainſi FE à EC. Mais BD eſt plus grande que CD: donc auſſi FE ſera plus grande que EC. Maintenant de EF ſoit retrãchée EG egale à EC, & ſoit faict cõme FG à GE, ainſi EC à CH par la 12. p. 6. & en compoſant comme FE à EG (ou EC ſon egale) ainſi EH à CH, & par la 12. prop. 5. les deux antecedents FEH ſeront aux deux conſequents ECH, comme l'vn des antecedens EH à l'vn des conſequés CH: & partant les trois lignes FH, EH, CH, ſeront continuellement proportioneles en la raiſon de FE à EC, ou BD à DC: & par la 22. p. 6. & 10. p. 10. comme le quarré de BD eſt commenſ. au quarré de DC, (car iceux quarrez ſont commenſurables, puis que BD, DC ſont les noms du binome BC) ainſi que le quarré de EH, ſera commenſ. au quarré de CH: & par le corol. de la 20. p. 6. & 10 p. 10. CH ſera commenſ. en lõgitude à la troiſieſme proportionele FH, & par la 16. p. 10. CH & CF ſeront commenſ. en longitude. Et d'autant que le rectangle DF eſt rationel (eſtant egal au quarré de la ligne rationele A) & DC ligne rationele: CF ſera auſſi ligne rationele cõmen. en longitude à CD, par la 21. p. 10. Et CH ſera auſſi rationele commenſ. en longitude à CD, par la 12. p. 10. & par la 10. p. 10. comme CD & DB ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, auſſi CH, EH, ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant par la 74. prop. 10. CE ſera reſidu: duquel les noms EH, CH ſont proportionaux, & commenſ.

aux noms BD, DC, du binome BC : Car il a esté demonstré que comme BD est à DC, ainsi EH à CH; & partant en permutant comme BD sera à EH, ainsi DC à CH. Mais DC, CH ont esté demonstrées commens. en longitude par la 10. p. 10. BD, EH, seront donc aussi commens. en longitude.

Reste donc à prouuer que le residu est de mesme ordre que le binome : Or les noms de l'vn estans proportionnaux, & commens. aux noms de l'autre: par la 15. p. 10. comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy sera commens. ou incommens. en longitude: le plus grand nom du residu pourra plus de mesme: Que si le plus grand nom du binome est commens. en longitude à la rationele, aussi sera le plus grand du residu par la 12. p. 10. & ils seront binome premier, & residu premier. Que si le plus petit nom du binome est commens. en longitude à la raionele, aussi sera le plus petit du residu; & ils seront binome & residu second. Que si ny l'vn ny l'autre nom du binome est commens. à la rationele : semblablement l'vn ny l'autre nom du residu ne sera commens. à la mesme rationele par la 14. p. 10. & partant ils seront binome, & residu troisiesme : & ainsi des autres. Parquoy le quarré d'vne ligne rationele estant appliqué sur vn binome, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

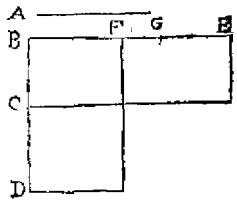
SCHOLIE.

Si la rationele A est 8, le binome BC $9 + \sqrt{45}$. *tellement que BD soit 9, & CD* $\sqrt{45}$: *Le quarré de A estant appliqué sur BC, l'autre coſté du rectangle CE sera* $16 - \sqrt{142\frac{2}{9}}$, *qui est residu : & puis que comme DC est à CB, ainsi CE à CF, icelle CF sera* $\sqrt{91\frac{1}{45}}$; *&* $EF\sqrt{460\frac{4}{5}} - 16$. *Mais EG estant*

egale à CE, est 16—$\sqrt{142\frac{1}{9}}$—; GF $\sqrt{111\frac{1}{9}}$—32: & d'autãt que comme FG *est à* GE, *ainsi* E C *à* CH, *icelle sera* $\sqrt{142\frac{1}{9}}$, *&* EH 16: *Ainsi est manifeste que* CE *est residu de mesme ordre que le binome* BC, *& que les noms* EH, CH, *sont proportionaux aux noms* BD, CD.

THEOR. 90. PROP. CXIIII.

Le quarré d'vne ligne rationele, estant appliqué sur vn residu, faict l'autre costé binome, les noms duquel sont proportionaux, & commensur. aux noms du residu: En outre le binome est de mesme ordre que le residu.



Soit la rationele A, & le residu BC auquel cõuienne CD, & sur BC soit descrit le rectangle CE egal au quarré de la rationele A: Ie dis que l'autre costé BE sera binome tel que demande la proposition.

Car sur BD, soit descrit le rectangle DF egal au mesme quarré de la rationele A: Donc les rectangles CE & DF seront egaux, & ayans les costez reciproques par la 14 p. 6. BD sera à BC comme BE à BF, & par conuersion de raison BD sera à CD, comme BE à FE. Maintenant soit couppée EF en G, par la 10. p. 6. tellement que comme BE est à FE, ainsi EG à GF: veu donc que comme la toute BE est à la

toute FE, ainsi EG retranchée de BE, est à GF retranchée de FE, aussi par la 19. p. 5. le reste BG sera au reste EG, comme la toute à la toute, c'est à dire comme la retranchée EG à la retranchée GF: & partant EG est moyenne proportionele entre BG & GF. Parquoy cõme BG sera à GF, ainsi le quarré de BG sera au quarré de EG, par le corol. de la 20. p. 6. Et puis que comme BD à CD, ainsi BE à FE, c'est à dire BG à GE; & BD, CD noms du residu BC sont rationeles commens. en puissance seulement: & par la 10. p. 10. BG, GE seront aussi commensurables en puissance seulement: & partant les quarrez d'icelles BG, GE sont commensurables, & par consequent les lignes BG, FG qui ont mesme raison qu'iceux quarrez, sont commensurables en longitude par la mesme 10. p. 10. Et par le corol. de la 16. prop. 10. BG, BF seront aussi commensurables en longitude. Et d'autant que BD plus grand nom du residu BC est rationele, & le rectangle DF egal au quarré de la rationele A, est rationel; par la 21. prop. 10. BF sera aussi rationele commensurable en longitude à BD. Donc par la 12. prop. 10. BG sera aussi rationele commens. en longitude à la mesme BD. Et puis que BG, GE, ont esté demonstrées commens. en puissance seulement, & BG rationele, GE sera aussi rationele. Donc BG, GE sont rationeles commens. en puissance seulement: Et partant par la 37. p. 10. BE est binome: duquel les noms BG, GE, sont proportionaux, & commens. aux noms BD, CD, du residu BC. Car il a esté demonstré que comme BD à CD, ainsi BG à GE: & partant en permutant comme BD à BG, ainsi CD à GE: mais BD a esté demonstré commensurable en longitude à BG: donc aussi CD sera commens. en longitude à GE, par la 10. p. 10. reste

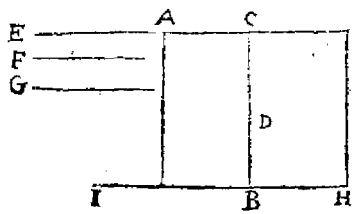
donc à prouuer que BE est binome de mesme ordre que le residu BC: ce qu'on fera procedant tout ainsi qu'en la precedente. Parquoy le quarté d'vne ligne rationele estant appliqué sur vn residu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Si la rationele A *est* 4, *& le residu* BC 9—$\sqrt{45}$, CD $\sqrt{45}$, *&* BD 9, *le rect.* DF *sera* 16, *& aussi* CE 16: *ainsi le costé* BF *sera* $1\frac{1}{9}$, *&* BE $4+\sqrt{8\frac{8}{9}}$: *& par consequent* FE *sera* $\sqrt{8\frac{8}{9}}+2\frac{2}{9}$: *&* GE $\sqrt{8\frac{8}{9}}$, FG $2\frac{2}{9}$, BG 4. *ainsi est cuident que* BE *est binome en mesme ordre que le residu* BC, *& que les noms d'iceux sont proportionaux.*

THEOR. 91. PROP. CXV.

Si vn rectangle est compris d'vn residu, & d'vn binome, desquels les noms sont proportionaux & commensurables, la ligne droicte pouuant iceluy rectangle est rationele.



Soit le rectãgle AB, cõpris sous le residu AC, & le binome CB, duquel les noms CD, DB, soiẽt proportionaux, & commẽsurables aux noms CE, AE du residu AC: & soit la ligne droicte F pouuant iceluy rectangle AB. Ie dis que F est rationele.

Car soit vne rationelle proposee G, le quarré de laquelle estant appliqué sur le binome CB, face le rectangle CH. Donc par la 113. prop. 10. l'autre costé BH sera residu, duquel les noms HI, BI sont commensur. & proportionaux aux noms CD, DB, sçauoir est que comme HI à BI, ainsi CD à DB, & partant ainsi CE à AE: & en permutant comme la toute HI à la toute CE, ainsi la retranchee BI à la retranchee AE; & par la 19. prop. 5. le reste BH sera aussi au reste AC, comme la toute à la toute. Mais icelles toutes sont commensur. en longitude par la 12. prop. 10. pource que l'vne & l'autre est commensurab. a CD: donc aussi BH, AC seront commensur. en longitude par la 10. prop. 10. & par consequent les rectangles HC & BA estans par la 1. prop. 6. en mesme raison que BH, & AC, ils seront aussi commens. Mais HC, egal au quarré de la rationelle G, est rationel: donc aussi AB sera rationel; & partant la ligne F qui peut iceluy AB, sera aussi rationele. Si donc vn rectangle est compris d'vn residu, & d'vn binome, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste qu'vn rectangle rationel, peut estre compris de lignes irrationeles.

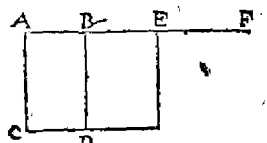
SCHOLIE.

Si le residu AC est $4-\sqrt{8\frac{8}{9}}$, *tellement que les noms d'iceluy* CE, *&* AE *soient* $4, \& \sqrt{3\frac{8}{9}}$, *mais le binome* BC *soit* $9+\sqrt{45}$, *le rectangle AB sera* 16, *qui est rationel: & partant la ligne* F *qui peut iceluy est* 4, *& par consequent rationele. Or la rationele* G *estant* 8, *le rectangle CH sera* 64, *& le costé*

BH 16—$\sqrt{142\frac{2}{9}}$, HI 16, & BI $\sqrt{142\frac{2}{9}}$.

THEOR. 92. PROP. CXVI.

De la ligne mediale naissent infinies lignes irrationeles, toutes differentes des deuant dites.



Soit la ligne mediale AB : ie dis que d'icelle naissent infinies lignes irrationelles toutes differentes des deuant dictes.

Car si sur l'extremité de la mediale on meine la perpendiculaire AC qui soit rationelle, & on acheue le rectangle AD, iceluy rectangle sera irrationel par le coroll. de la 39. prop. 10. & par la 11. deff. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle est irrationelle, soit icelle BE ; laquelle sera differente de toutes les deuant dictes. Car son quarré appliqué sur vne ligne rationelle comme AC, fait l'autre costé AB medial: Ce que ne faisoit pas vne des deuant dictes. Item si on accomplit le rectangle DE, il sera aussi irrationel : & la ligne qui le peut, aussi irrationele : & soit EF, laquelle sera differente de toutes les deuant dictes Car le quarré de pas vne d'icelles, appliqué sur vne ligne rationele, ne faict l'autre costé tel que BE: & de ceste façon on peut proceder à l'infiny.

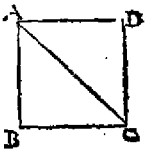
SCHOLIE.

Si la mediale AB est $\sqrt{\sqrt{2}}$, & la rationele AC 2; le rectan-

gle AD sera VV 32, & la ligne BE qui peut iceluy sera V V V 32: Ainsi le rectangle DE sera V V V 512, & la ligne EF qui peut iceluy sera V VV V 512, & ainsi à l'infiny.

THEOR. 93. PROP. CXVII.

Au quarré, la diagonale est incommensurable en longitude au costé.



Soit le quarré ABCD, duquel AC soit diagonale. Ie dis que la diagonale AC est incommens. en longitude au costé AB.

Car par la 47. prop. 1. le quarré de AC est double du quarré de AB: mais toute grandeur double d'vne autre est comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. Donc le quarré de AC est au quarré de AB, comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré, comme nous auons demonstré au corol. de la 24. prop. 8. & partant par la 9. prop. 10. la diagonale AC, & le costé AB, sont incõmen. en longitude. Donc au quarré, la diagonale est incommens. en longitude au costé. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Si AB costé du quarré est 1, la diagonale AC sera V 2: tellement que la raison du costé au diametre est comme 1 à V 2, c'est à dire incommens. en longitude.

Fin du dixiesme Element.

ELEMENT VNZIESME.

DEFINITIONS.

1. SOlide, eſt ce qui a longueur, largeur & profondeur: Mais les termes d'vn ſolide, ſont ſuperficies.

2. Vne ligne droicte eſt perpendiculairement eſleuee ſur vn plan, quand toutes les lignes conſtituées ſur iceluy plan & menees vers elle la rencontrent en angles droicts.

3. Vn plan eſt eſleué perpendiculairement ſur vn plan, quand les lignes menees ſur l'vn d'iceux perpendiculairement à la ligne de commune ſection, ſont auſſi perpendiculaires à l'autre plan.

4. L'inclination d'vne ligne droicte à vn plan eſt l'angle aigu contenu d'icelle ligne, & d'vne autre ligne droicte menee au plan de l'inclinante, par le poinct auquel tombe vne perpendiculaire tiree du ſommet d'icelle inclinante ſur ledit plan.

5. Vn plan eſt incliné ſur vn plan, quand les lignes menees ſur l'vn & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune ſection, & vers vn meſme poinct d'icelle, ne ſont point perpendiculaires les vnes aux autres: & l'inclination d'iceux plans, eſt l'angle aigu compris d'icelles perpendiculaires.

6. Vn plan eſt dit eſtre ſemblablement incliné à vn plan, lors que les ſuſdicts angles d'inclination ſont egaux entr'eux.

7. Plans parallels, ſont ceux leſquels eſtans continuez ne ſe rencontrét point.

8. Solides ſemblables, ſont ceux qui ſont compris de ſuperficies ſemblables, egales en nombre.

9. Solides egaux, & ſemblables, ſont

ceux qui ſont compris de ſemblables ſuperficies, egales en nombre & grandeur.

10. Angle ſolide, c'eſt la rencontre de plus de deux angles plans en vn meſme poinct, eſtans iceux conſtituez ſur plans differens.

11. *P*yramide, eſt vn ſolide compris de pluſieurs plans, ſe rencõtrans en vn meſme poinct, & ayans vn autre plan pour baſe.

12. Priſme, eſt vn ſolide compris de plans, deſquels deux qui ſont oppoſez ſont egaux, ſemblables & parallels, & les autres ſont parallelogrammes.

13. Sphere, eſt vne figure compriſe par le demy cercle, lors que ſon diametre demeurant immobile, iceluy demy cercle tourne iuſques à ce qu'il reuienne là d'où il eſtoit party.

14. L'axe de la ſphere, eſt iceluy diametre immobile à l'entour duquel tourne le demy cercle.

15. Le centre de la ſpere, eſt celuy meſme que du demy cercle.

16. Diametre de la sphere, est vne lig. dr. laquelle passant par le centre d'icelle, est terminee à la superficie de la sphere.
17. Cone, est vn solide compris par vn triangle rectangle, lors que l'vn des costez qui comprenent l'angle droict demeurant immobile, le triangle faict vn tour à l'entour d'iceluy costé. Et si ledit costé immobile est egal à l'autre costé, comprenant l'angle droict, le cone sera rectangle: si plus petit, il sera ambligone: si plus grand, il sera oxigone.
18. L'axe du cone est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle tourne le triangle.
19. Mais le cercle descrit par l'autre costé comprenant l'angle droict qui tourne, est la base du cone.
20. Cylindre, est vn solide compris par vn parallelogramme rectangle, lors que l'vn des costez demeurant immobile, le parallelogramme faict vn tour à l'entour d'iceluy costé.
21. L'axe du cylindre, est icelle ligne

immobile à l'entour de laquelle se meust le parallelogramme.

22. La base du cylindre, est le cercle descrit par l'autre costé, qui auec l'axe du cylindre comprend l'angle droict.

23. Semblables cones, & cylindres, sont ceux desquels les axes & les diametres de leurs bases sont proportionnaux.

24. Cube est vn solide compris de six quarrez.

25. Tetraedre, est vne figure solide compriſe de quatre triangles egaux, & equilateraux.

26. Octaedre, est vn solide compris de huict triangles egaux, & equilateraux.

27. Dodecaedre, est vn solide compris de douze pantagones egaux, & equilateraux & equiangles.

28. Icosaedre, est vn solide compris de vingt triangles egaux, & equilateraux.

29. Parallelipipede, est vn solide compris de six quadrangles plans, desquels les oppoſez sont parallels.

30. Vne figure solide, est dicte inscrite

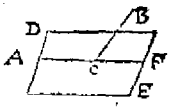
en

en vne figure solide, lors que tous les angles de la figure inscrite sont constituits, ou és angles, ou és costez, ou finablement és plans de la figure en laquelle elle est inscrite.

31. Mais vne figure solide, est dicte circonscrite à vne figure solide, quand ou les angles, ou les costez, ou les plans de la figure circonscrite, touchent tous les angles de la figure à l'entour de laquelle elle est descrite.

THEOR. 1. PROP. I.

Vne partie d'vne ligne droicte ne peut estre sur vn plan, & l'autre partie en l'air.

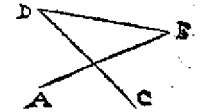


La demonstration de ceste prop. est facile. Car si AC partie de la ligne ACB est sur le plan DE, & l'autre partie CB en l'air, il est euident que ACB ne sera pas ligne droicte, comme il est requis.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux lignes droictes se coupent l'vne

l'autre, elles seront sur vn mesme plan: Et tout triang. est en vn mesme plan.



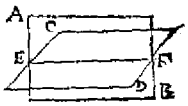
Soient deux lignes droictes AB & CD se coupans l'vne l'autre au poinct E; & en EB, ED soient pris quelconques poincts B & D, & soit tiree la ligne droicte BD, afin de faire le triangle EBD. Ie dis que les deux lignes droictes AB, CD, sont constituees en vn seul plan: Item que le triangle EBD est pareillement en vn seul plan.

Car d'autant que les lignes droictes AB, CD s'entrecoupent en E, BE, DE feront vn angle au poinct E: & par la definition de l'angle plan conuertie, & 1. p. 11. elles seront en vn mesme plan. Et par la mesme raison la ligne droicte BD faisant deux angles auec icelles deux lignes BE, DE, sera aussi au mesme plan: Partant tout le triangle EBD est en vn mesme plan. Et puis que BE, DE parties des lignes AB, CD, sont en vn mesme plan, il s'ensuit par la prop. precedente qu'icelles AB, CD, sont aussi en vn mesme plan; sçauoir est en celuy auquel nous auons demonstré estre le triangle EBD. Parquoy si deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si deux plans se coupent l'vn l'autre, leur commune section sera vne ligne droicte.

Soient les deux plans se couppans l'vn l'autre AB & CD, & les termes de leur commune section, soient les poincts E,F. Ie dis que icelle commune section est vne ligne droicte.



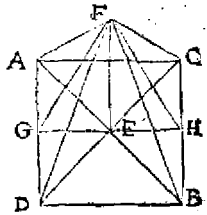
Car puis que les poincts E,F, sont communs à tous les deux plans, d'vn poinct à l'autre soit menee vne ligne droicte sur le plan AB, item de mesmes poincts soit menee vne ligne droicte sur le plan CD: Ie dis qu'il est impossible qu'icelles deux lignes soient autres qu'vne seule ligne droicte, sçauoir E & F: car si elles estoient differentes, il s'ensuiuroit que deux lignes droictes auroient leurs extremitez communes: ce qui est impossible, car elles enfermeroient vne espace, contre la 12. comm. sent. La ligne droicte EF est donc sur l'vn & l'autre plan, & partant leur commune section. Parquoy si deux plans se couppent l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si deux lignes droictes se couppans l'vne l'autre, & au poinct de leur section on esleue perpendiculairement vne autre ligne droicte, elle sera aussi esleuee perpendiculairement sur le plan d'icelles.

Soient les deux lignes droictes AB & CD, se couppans l'vne l'autre au poinct E, & d'iceluy poinct de section E, soit esleuee la perpendiculaire EF à cha-

cunes d'icelles : ie dis qu'elle eſt auſſi perpendiculaire à leur plan.



Car ſoient poſees egales AE, EB, CE & ED, & ſoient tirees les lignes AD, BC, & par le poinct E ſoit menee la ligne droicte GH couppant les lignes AD, BC, és poincts G & H: Item du poinct en l'air F ſoient tirees les lignes FA, FG, FD, FB, FH & FC. D'autant que les coſtez EA, ED du triangle AED, ſont egaux aux coſtez EB, EC du triangle BEC, chacun au ſien, & les angles AED, BEC contenus par iceux coſtez auſſi egaux par la 15. propoſ. 1. les baſes AD, BC ſeront pareillement egales, par la 4. prop. 1. Derechef puis que les angles AEG, BEH ſont egaux par la 15. prop. 1. les deux angles AEG, EAG du triangle AGE ſeront egaux aux deux angles BEH, EBH du triangle BHE, & le coſté AE eſt egal au coſté BE: donc par la 26. prop. 1. les deux coſtez AG, GE, ſeront egaux aux deux coſtez BH, HE. Et puis que les deux coſtez FE, EA du triangle FEA ſont egaux aux coſtez FE, EB du triangle FEB, & les angles contenus d'iceux coſtez auſſi egaux, ſçauoir droicts par l'hypotheſe, par la 4. prop. 1. les baſes EA, EB ſeront egales. Par meſme raiſon ſeront auſſi egales les lignes FD, FC. D'auantage veu que les coſtez FA, AD du triangle FAD, ſont egaux aux coſtez FB, BC du trian. FBC, & la baſe FC, egale à la baſe FD, par la 8. p. 1. les angles FAD, FBC ſeront auſſi egaux: Parquoy les coſtez FA, AG du trian. FAG, eſtans egaux aux coſtez FB, BH, du triangle FBH, les baſes FG, FH, ſeront pareillement egales par la 41. prop. 1. Et finablement puis que les coſtez FE, EG, du triangle FEG,

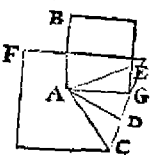
sont egaux aux costez EF, EH du triangle FEH, & les bases FG, FH aussi egales, les angles FEG, FEH seront pareillement egaux par la 8.p.1.& partant par la 10.d.1.la ligne droicte FE sera perpendiculaire à la ligne GH, qui la touche en E, & constituee au mesme plan que les lignes AB, CD, par la 2.prop.11.

On pourra semblablement prendre tant de lignes qu'on voudra sur le mesme plan, qui feront les angles droicts rencontrant la perpendiculaire FE, par les mesmes raisons que dessus:& par la 2.d.11. FE sera perpendiculaire au plan des lignes AB & CD. Si donc deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droite rencontre en vn poinct perpendiculairement trois autres lignes droictes, icelles trois lignes droictes seront en vn mesme plan.

Soit la ligne droicte AB perpendiculaire à trois autres lignes droictes AC, AD, AE, au poinct de leur rencontre A. Ie dis qu'icelles trois lignes AC, AD, AE, sont sur vn mesme plan.

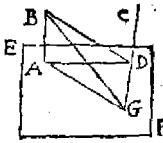


Car puis que deux d'icelles quelles qu'elles soient sont en vn mesme plan par la 2.proposit.11. soient AC, AD, au plan FC: Si donc on dit que AE n'est point sur le mesme plan FC, mais qu'elle est esleuee en l'air, elle pourra estre au mesme plan que AB par la 2.propos.11. & soient toutes

deux au plan BE. Ainſi FC, & BE ſont deux plans differens, leſquels ſe touchans au poinct A, ne ſont pas parallels, partant eſtans continuez tant qu'il ſera de beſoin ils ſe coupperont, & leur commune ſection ſera vne ligne droicte par la 3.p. 11. ſoit la ligne AG, laquelle par ce moyen ſera au meſme plan que AC; & partant par la 3.d. 11. BA, & GA ſe rencontteront en angles droicts: mais par hypotheſe AB & AE ſe rencontrent auſſi en angles droicts: par ainſi les angles BAE, BAG eſtans au plan BG tiré par les lignes BA, AG, ſeroient egaux, la partie au tout: ce qui eſt impoſſible: Donc AE n'eſtoit pas eſleuée en l'air, ains eſtoit au meſme plan que AC & AD. Parquoy ſi vne ligne droicte rencontre en vn poinct perpendiculairement trois autres lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux lignes droictes ſont eſleuees perpendiculairement ſur vn meſme plan, elles ſeront paralleles.



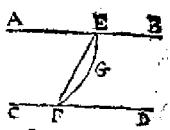
Soient deux lignes droictes AB CD eſleuees perpendiculairement ſur vn meſme plan EF, & aux poincts A & D. Ie dis qu'elles ſont paralleles entr'elles.

Car ſi des ſuſdicts poincts A & D, du plan EF, on meine la ligne droicte AD, les deux angles BAD & CDA ſeront droicts par la 2. def. 11. partant ſi les deux lignes BA & CD ſont en meſme plan, elles ſeront paralleles par la 28. prop. 1.

Ores qu'elles soient en vn mesme plan, on le prouue ainsi. Sur le plan EF & du poinct D, soit menee DG perpendiculaire à AD par la 11. prop. 1. & soit posee icelle DG egale à AB, & soient menees les lignees BD, BG, AG. D'autant que les deux triangles ABD & AGD ont les deux costez AB, DG egaux, & AD commun, & l'angle droict BAD egal à l'angle GDA aussi droict, par la 4. prop. 1. la base BD sera egale à la base AG. Item les deux triangles AGB & GDB ayans les deux costez AB, & DG egaux, & les deux autres AG & BD aussi egaux, & la base BG commune à tous les deux triangles par la 8. prop. 1. les deux angles BAG, BDG seront egaux. Mais l'angle BAG est droict par la 3. def. 11. donc BDG sera aussi droict: il est donc euident que GD touche perpendiculairement en vn poinct D, les trois lignes DA, DB, DC: & partant par la 5. prop. 11. icelles trois lignes seront en vn mesme plan, c'est à dire que CD sera au plan mené par les lignes AD, DB. Mais par la 2. prop. 11. les trois lignes AB, BD, AD sont aussi sur vn mesme plan: partant AB & CD seront en vn mesme plan. Parquoy si deux lignes droictes sont esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux lignes droictes sont paralleles, & de l'vne à l'autre on meine vne ligne droicte, elle sera au mesme plan des lignes paralleles.



Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, & de l'vne à l'autre soit menee la ligne droicte EF. Ie dis qu'icelle ligne est au mesme plan des lignes paralleles AB & CD.

Car si elles n'est au mesme plan, ains en vn autre que celuy cy couppe cestuy-là és poincts E, & F, & la commune section d'iceux plans soit EGF, laquelle sera ligne droicte par la 3. prop. 11. donc les deux lignes droictes EF, EGF, ayans mesmes termes E & F, enfermeroient vn espace: ce qui est absurde. Donc la ligne droicte EF n'est pas en vn autre plan que celuy auquel sont les paralleles AB, CD. Parquoy si deux lignes droictes sont paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

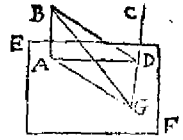
SCHOLIE.

Ceste mesme proposition est aussi veritable, encore que les deux lignes AB, CD ne soient paralleles, pourueu qu'elles soient en vn mesme plan, comme il est manifeste par la demonstration.

THEOR. 8. PROP. VIII.

S'il y a deux lignes droictes paralleles, desquelles l'vne soit à angles droicts à quelque plan: aussi l'autre sera à angles droicts sur le mesme plan.

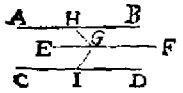
Soiēt deux lignes droictes paralleles AB & CD, & que l'vne d'icelle AB soit esleuee perpendiculairement sur le plan EF. Ie dis que l'autre CD est aussi esleuee perpendiculairement sur le mesme plan EF.



Qu'il ne soit ainsi. Soit faicte mesme construction qu'en la 6. p. 11. & comme il a esté demonstré, les deux angles B A G & G D B seront droicts, & par la 4. prop. 11. G D sera esleuée perpendiculairement sur le plan des lignes A D & B D: mais par la precedente prop. les deux lignes AB & A D sont au mesme plan de AB & CD: car elles sont paralleles par l'hypothese: il s'ensuit donc que GD est perpendiculaire sur le plan où est la ligne CD: Ainsi l'angle C D G sera droict. Mais l'angle ADC est aussi droict par la 29. prop. 1. estans AB & C D paralleles: & par la 4. prop. 11. C D sera perpendiculaire au plan de G D & A D, c'est à dire au plan EF. Parquoy s'il y a deux lignes droictes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les lignes droictes paralleles à vne mesme, lesquelles ne sont à vn mesme plan qu'icelle, sont aussi paralleles entr'elles.



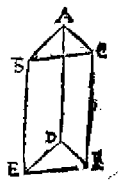
Soient les lignes droictes AB, CD, paralleles à la ligne EF, & ne soient en vn mesme plan qu'icelle. Ie dis que AB, CD, sont aussi paralleles entr'elles.

Soit pris en EF quelconque poinct G, duquel soient tirées à icelle EF deux perpendiculaires, ſça-

uoir GH au plan des paralleles AB, EF; & GI au plan des paralleles CD, EF. D'autant que EF eſt perpendiculaire aux deux lignes GH, GI, qui l'entretouchent en G : elle le ſera auſſi au plan tiré par icelles par la 4. prop. 11. Parquoy puis que AB, EF, ſont paralleles : & EF eſt perpendiculaire au plan mené par GH, GI : auſſi AB ſera perpendiculaire au meſme plan par la 8. p. 11. Par meſme raiſon CD ſera perpendiculaire au plan paſſant par GH, GI : & partant par la 6. p. 11. AB, CD eſtans perpendiculaires à vn meſme plan, ſont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si deux lignes droictes s'entretouchãs, ſont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, & ne ſont en vn meſme plan, elles comprendront angles egaux.



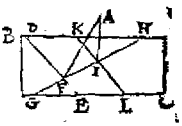
Soient deux lignes droictes AB & AC ſe touchans en A, leſquelles ſoient paralleles à deux autres lignes droictes DE & DF ſe touchant en D : & AB, AC ne ſoient au meſme plan que DE, DF. Ie dis que les angles BAC, EDF, comprins par icelles ſont egaux.

Qu'ainſi ne ſoit. Soient priſes egales les quatre lignes AB, AC, DE, DF ; & ſoient menées les lignes AD, BE, CF, BC, EF. Premierement AB & DE eſtans egales & paralleles, AD & BE ſeront auſſi

egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par la meſme raiſon AD, & CF ſeront auſſi egales & paralleles: & partant par la 9. prop. 11. BE & CF ſeront auſſi egales & paralleles entr'elles; & par la 33. prop. 1. BC & EF ſeront egales & paralleles: Ainſi les deux triangles ABC, & DEF auront les trois coſtez egaux aux trois coſtez chacun au ſien, & par la 8. p. 1. les angles BAC, EDF ſeront egaux. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBL. 1. PROP. XI.

D'vn poinct donné en haut, mener vne ligne perpendiculaire ſur le plan qui eſt au deſſous d'iceluy poinct.



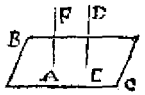
Soit le poinct A eſleué en haut, duquel il faut tirer vne perpendiculaire au plan BC, qui eſt au deſſoubs d'iceluy poinct A. Au plan BC, ſoit menée comme on voudra la ligne DE; à laquelle de A ſoit tirée la perpendiculaire AF par la 12. prop. 1. Et au plan BC par F, ſoit tirée GH perpendiculaire à DE par la 11. prop. 1. Et à icelle GH ſoit tirée de A la perpendiculaire AI par la 12. prop. 1. Ie dis qu'icelle AI eſt perpendiculaire au plan BC.

Car au plan BC, eſtant tirée par I, la ligne KIL parallele à DFE par la 31. prop. 1. puis que DF eſt perpendiculaire aux deux lignes FA, FH par la conſtruction: & partant auſſi perpendiculaire au plan tiré par FA, FH par la 4. p. 11. pareillemẽt KI ſera per-

pendiculaire au meſme plan par la 8. prop. 11. Et d'autant que par la 2. prop. 11. AI eſt en vn meſme plan que FA, FH, & touche la ligne KI en I, l'angle KIA ſera droict par la 2. def. 11. & AI ſera perpendiculaire aux deux KI, IF. Donc par la 4. prop. 11. AI ſera perpendiculaire au plan où ſont les lignes KI, IF, ſçauoir au plan BC. Nous auons donc d'vn poinct donné en l'air abaiſſé vne perpendiculaire au plan d'au deſſoubs d'iceluy poinct : Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 2. PROP. XII.

A vn plan donné, & d'vn poinct donné en iceluy, eſleuer vne ligne perpendiculaire.

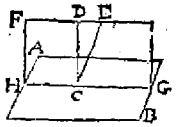


Soit le plan donné BC, & le poinct donné en iceluy ſoit A : Il faut d'iceluy poinct A eſleuer vne ligne perpendiculaire au plan donné BC.

Soit pris en l'air comme on voudra le poinct D, & d'iceluy ſoit menée ſur le plan BC, la perpendiculaire DE, par la precedente prop. laquelle rencontrant le plan BC au poinct A, on aura faict ce qui eſtoit requis : Mais ſi elle ne rencontre iceluy poinct A, mais quelque autre poinct E, dudict poinct A ſoit menée AF parallele à ED, par la 31. prop. 1. il eſt euident que par la 8. prop. 11. AF ſera auſſi perpendiculairement eſleuée ſur le plan BC, ainſi qu'il eſtoit requis.

THEOR. 11. PROP. XIII.

D'vn meſme plan, & d'vn meſme poinct d'iceluy, on ne leuera pas en l'air d'vn meſme coſté, deux lignes perpendiculaires.



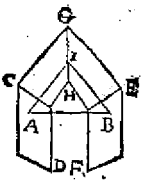
Soit donné quelque plan comme AB, & le poinct en iceluy C: ie dis que du poinct C, on n'eſleuera pas en l'air deux lignes perpendiculaires ſur iceluy plan, & de meſme coſté.

Autrement, ſ'il eſt impoſſible: du poinct C, ſoient eſleuées en l'air les deux perpendiculaires CD & CE, elles ſeront en vn meſme plan, par la 2. prop. 11. & ſoit iceluy FG, lequel d'autant qu'il touche le plan AB, au poinct C, n'eſt point parallele à iceluy AB: partant eſtans continuez ils ſe coupperont, & leur commune ſection ſera vne ligne droicte: ſoit icelle GCH. Et parce que les lignes CD & CE ſont perpendiculaires à iceluy plan AB, les angles ECG & DCG ſeroient droicts & egaux, la partie au tout: ce qui eſt impoſſible. Il ne ſe peut donc eſleuer du poinct C, deux lignes perpendiculaires au plan AB, & de meſme coſté. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si vne ligne droicte eſt perpendiculaire à deux plans, iceux plans ſeront parallels.

Soit la ligne droicte AB, perpendiculaire à chacun des plans CD & EF : ie dis qu'iceux plans sont parallels entr'eux.

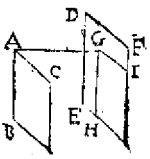


Autrement s'ils n'estoient parallels, estans continuez ils se rencontreront, & leur commune section sera vne ligne droicte par la 3. prop. 11. soit icelle G H, en laquelle soit pris comme on voudra le poinct I, & soient d'iceluy menées les lignes IA, IB és plans GCD, GEF. Maintenant puis que la ligne A B est perpendiculaire à chacun d'iceux plans GCD, GEF, au triangle AIB les angles IAB & IBA, seront droits, contre la 17. prop. 1. donc les deux plans CD, EF ne se rencontreront point, ains seront parallels. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si deux lignes droictes s'entretouchant sont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, n'estans toutesfois en vn mesme plan : les plans passans par icelles, seront aussi parallels.

Soient les deux lignes A B & B C, se touchans au poinct A, paralleles à deux autres lignes D E, DF, s'entretouchans en D, & ne soient en vn mesme plan qu'icelles. Ie dis que le plan BC mené par



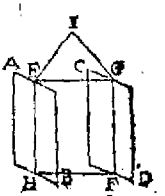
icelles AB, AC est parallel au plan EF tiré par les lignes DE, DF.

Car par la 31. prop. 11. de A soit tirée sur le plan EF la perpendiculaire AG, rencontrant le plan EF en G: puis par la 31. prop. 1. au plan EF, soient tirées de G, les lignes GH, GI paralleles à DE, DF. Maintenant d'autant que AB, GH sont paralleles à DE, icelles AB, GH seront paralleles entr'elles, par la 9. prop. 11. & partant par la 29. prop. 1. les angles BAG, AGH sont egaux à deux droicts. Mais AGH est droict, par la 3. def. 11. Donc BAG sera aussi droict. Par mesme raison on prouuera l'angle CAG estre droict. Parquoy veu que la ligne GA est perpendiculaire aux deux AB, AC; par la 4. prop. 11. elle sera aussi perpendiculaire à leur plan BC: Mais par la construction elle l'est aussi au plan EF. Donc par la 14. prop. 11. les plans BC, seront parallels. Parquoy si deux lignes droictes s'entretouchãs sont paralleles à deux autres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux plans parallels sont couppez par vn autre plan; les lignes de commune section seront paralleles.

Soient les deux plans parallels AB & CD, couppez par le troisiesme plan EF: Ie dis que leurs lignes de commune section (c'est à sçauoir HE & GF) sont paralleles.

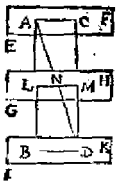


Autrement, si elles n'estoient pa-

ralleles, eſtans continuées, elles ſe rencontreroient comme au poinct I : Mais d'autant qu'iceux plans AB, CD ſont parallels, eſtans continuez ils ne ſe rencontreront iamais : il faudroit donc que les lignes HEI, FGI (leſquelles ſe rencontrent) fuſſent en partie ſur leurs plans, en partie dehors, ce qui eſt contre la 1. p. 11. Donc HE & GF eſtans continuées ne ſe rencontrent point, & partant ſont paralleles: Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si deux lignes droictes ſont couppées par pluſieurs plans parallels, elles ſeront couppées proportionellement.



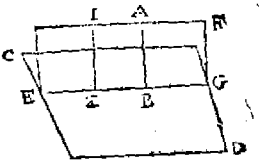
Soient les deux lignes AB, CD, traverſans les trois plans parallels EF, GH, IK, tellement qu'icelles lignes ſont couppées par iceux plans és poincts A, L, B, C, M, D. Ie dis qu'elles ſont couppées proportionellement, c'eſt à dire que les ſegmens d'icelles interceps entre les ſuſdits plans ſont proportionaux, ſçauoir que comme AL eſt à LB, ainſi CM à MD.

Car és plans EF, IK, ſoient menées les lignes droictes AC, BD: & tiré AD rencontrant le plan GH au poinct N, duquel ſoient menées les lignes LN, NM, au meſme plan GH : & le triangle ABD, par la 2. prop. 11. ſera en vn meſme plan : ſemblablement le triangle ADC en vn ſeul plan. Et d'autant que les plans parallels GH, IK ſont couppez par le plan

plan du triangle ABD : leurs communes sections LN, BD seront paralleles par la 16. prop. 1. Par mesme raison MN, AC, seront aussi paralleles. Parquoy par la 2. prop. 6. comme AL sera à LB, ainsi AN sera à ND : Item comme AN à ND, ainsi CM à MD : Et partant par la 11. prop. 5. comme AL sera à LB, ainsi CM sera à MD. Si donc deux lignes droictes sont couppées par plusieurs plans parallels, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte est esleuée perpendiculairement sur vn plan, aussi tous les plans procedans d'icelle, seront perpendiculaires au mesme plan.



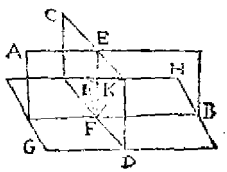
Soit la ligne AB perpendiculaire sur quelque plan CD : Ie dis que tous les plans menez de la ligne AB, qu'elle part on voudra, seront esleuez perpendiculairement sur le mesme plan CD.

Qu'ainsi ne soit. Soit tiré par AB le plan EF, couppant le plan CD par la ligne EG : & en icelle soit pris quelconque poinct H, duquel au plan EF soit menée HI parallele à AB par la 31. prop. 1. Donc puis que AB, IH sont paralleles, & AB a esté posée perpendiculaire au plan CD : aussi IH sera perpendilaire au mesme plan CD, par la 8. prop. 11. & partant par la 2. def. 11. aussi perpendiculaire à la com-

mune section EG. Par mesme discours toutes autres lignes qui seront tirées au plan EF paralleles à icelle AB, seront perpendiculaires au plan CD : & par consequent à la ligne EG. Parquoy par la 3. def. 11. le plan EF sera perpendiculaire au plan CD. Par mesme raison seront demonstrez tous autres plans tirez par la ligne AE, estre perpendiculaires au plan CD. Si donc vne ligne droicte est esleuée perpendiculairement sur vn plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si deux plans esleuez perpendiculairement sur vn autre plan s'entrecoupent, leur ligne de commune section est perpendiculaire sur iceluy plan.



Soient les deux plans se couppans l'vn l'autre AB & CD, esleuez perpendiculairement sur le plan GH, & soit la ligne de leur commune section FE : ie dis qu'icelle est perpendiculaire au mesme plan GH.

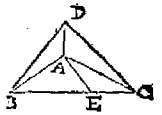
Car si elle n'est perpendiculaire au plan GH : puis que le plan AB, est perpendiculaire au plan GH, ils auront vne commune section qui sera ligne droicte: soit icelle FB ; & du poinct F pris en icelle soit menée FI perpendiculaire à la ligne FB, sur le plan CD, par la 11. p. 1. & par la 4. def. 11. conuertie, elle sera

perpendiculaire au plan GH. Tout de meſme le plan CD eſtant perpendiculaire au plan GH, ſi à leur commune ſection DF, & du poinct F, on leue la perpendiculaire FK ſur le plan CD, elle ſera auſſi par la meſme def. conuertie perpendiculaire au plan GH: ainſi FI & FK ſeroient toutes deux d'vn meſme poinct eſleuées perpendiculairement ſur vn meſme plan: ce qui eſt contre la 13. p. 11. Donc du poinct F on n'en a peu mener d'autres perpendiculaires au plan GH, ſinon vne ſeule, laquelle doit eſtre commune à tous les deux autres plans: partant il eſt euident que c'eſt leur ligne de commune ſection FE. Parquoy ſi deux plans eſleuez perpendiculairement ſur vn autre plan ſentrecouppent, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si vn angle ſolide eſt compris de trois angles plans, les deux pris comme on voudra, ſont plus grands que le troiſieſme.

Soit l'angle ſolide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB. Ie dis que deux pris comme on voudra, comme BAD & DAC ſont plus grands que le troiſ. BAC.



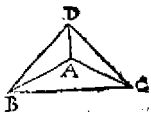
Car ſi on dict que BAC ſoit plus grand que les deux autres: au plan tiré par AB, AC, ſoit faict BAE egal à DAB par la 23. p. 1. & ſoient faictes egales les deux lignes AD, AE: puis apres au meſme plan ſoit menée par E la ligne droicte BC, couppant les lignes

AB, AC, en B & C: & soiēt tirées les lignes BD, DC. Maintenant puis que les deux costez AB & AD sont egaux aux deux costez AB & AE, & leurs angles egaux: la base DB sera egale à la base BE, par la 4. p. 1. Item puis que l'on pose l'angle BAC plus grand que les deux autres, & que le retranché BAE est egal à l'vn d'iceux BAD, le reste CAE sera plus grād que l'autre CAD: mais les deux costez EA & AC sont egaux aux deux costez AD & AC, & l'angle CAE est plus grand que l'angle DAC: & partant par la 24. p. 1. la base EC sera plus grande que la base DC: & BD estant egale à BE, il est euident que au triangle ABC le costé BC est plus grād que les deux autres: ce qui est contre la 20. p. 1. Donc l'angle BAC n'est point plus grand que les deux autres BAD, CAD. Que si on dit qu'il est egal, il s'ensuyura par le mesme discours que BC est egale à BD & CD: ce qui contrevient touſiours à la 20. p. 1. Il est donc plus petit que les deux autres. Parquoy si vn angle solide est compris de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Tous les angles plans d'vn angle solide, sōt plus petits que quatre angles droits.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans CAB, BAD, DAC. Ie dis qu'iceux trois angles plans sont plus petits que quatre angles droicts.

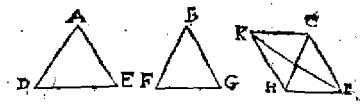


Car estans tirées les trois lignes droictes BC, CD, BD, seront constituez trois angles solides B, C, D,

desquels chacun est contenu sous trois angles plans, sçauoir B, soubs ABC, ABD, CBD: & C soubs ACB, ACD, BCD: & D soubs ADB, ADC, BDC. Et d'autant que par la 20. p. 11. de chacun d'iceux angles solides, deux angles plans pris comme on voudra sont plus grands que le troisiesme, les deux ABC, ABD, seront plus grands que le troisiesme DBC, & les deux ACB, ACD, seront plus grands que le troisiesme BCD: Item les deux CDA, & BDA, sont plus grands que BDC: & partant les six angles ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA ensemble, seront plus grands que les trois de la base triangulaire BCD, c'est à dire que deux droicts: (car iceux trois angles vallent autant par la 32. p. 1.) Mais d'autant qu'iceux six angles auec les trois qui font l'angle solide A, vallent six droicts, par la 32. prop. 1. (Car ce sont les angles de trois triangles plans ABC, ACD, ABD,) & qu'iceux six angles sont plus grands que deux droicts; il est manifeste que les trois qui font l'angle solide A, sont plus petits que quatre droicts: Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que l'autre, & les lignes droictes comprenant iceux, egales; il se peut faire que des lignes droictes qui conioignent icelles egales, soit constitué vn triangle.



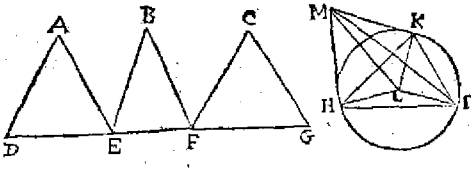
Soient trois angles plans A, B, C, cõtenus des lignes egales AD, AE, BF, BG, CH & CI: deux desquels en quelques sortes qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre. Ie dis que des trois lignes droictes DE, FG, HI, qui conioignent icelles lignes egales, peut estre constitué vn triangle.

Car puis que deux d'iceux angles pris comme on voudra sont plus grands que le troisiesme: qu'on en mette deux ensemble tels qu'on voudra, comme si à HCI, on adiouste HCk egal à FBG par la 23. p. 1. & ayant faict Ck egal à BG: on tire Ik & Hk; l'angle ICk estant plus grand que le troisiesme A, la base Ik par la 24. p. 1. sera plus grande que la base DE: (car les deux costez sont egaux) & à plus forte raison les deux IH, Hk qui par la 20. p. 1. sont plus grandes qu'icelles Ik, seront plus grandes que la troisiesme DE. Et par mesme discours on monstrera tousiours que deux d'icelles bases DE, FG, HI, prises comme on voudra, sont plus grandes que la troisiesme: Partant d'icelles on pourra faire vn triangle. Ce qui estoit à demonstrer.

PROBL. 3. PROP. XXIII.

Faire vn angle solide de trois angles plãs, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que le tiers. Mais il faut qu'iceux trois angles soient moindres que quatre droicts.

Soient trois angles plans ABC, moindres que quatre droicts, & desquels deux quels qu'ils soient sont plus grands que l'autre. Il faut faire vn angle solide de trois angles plans egaux à iceux A, B, C.



Soient posées egales les six lignes droictes AD, AE, BE, BF, CF, & CG qui comprennent les angles proposez, lesquels soient soustenus des trois bases DE, EF, FG. Donc puis que par la precedente prop. on peut faire vn triangle d'icelles lignes DE, EF, FG, soit faict le triangle HIk, ayans les trois costez egaux à icelles bases DE, EF, FG par la 22. prop. 1. lequel soit circonscrit du cercle HIk par la 5. p. 4. & du centre L soient menées les trois lignes LH, LI, Lk: & apres auoir par la 12. p. 11. esleué en l'air perpendiculairement LM, par le lemme de la 14. pr. 10. soit icelle retranchée en sorte, que son quarré auec le quarré de LH, soient egaux au quarré de l'vn des costez d'iceux angles plans: puis soient menées les lignes HM, IM, kM: Ie dis que HIMK est vn angle solide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez A, B, C.

Car les trois lignes LH, LI, Lk estans egales, & LM perpendiculaire à icelles: les trois lignes HM, IM, kM, seront egales, d'autant qu'elles peuuent autant l'vne comme l'autre par la 47. pr. 1. & puis qu'elles peuuent autant que l'vn des costez des angles plans donnez, elles seront egales aux costez

d'iceux angles plans : puis les trois baſes HI, IK, KH eſtans egales aux baſes des angles donnez, par la 8. prop. 1. les trois angles plans faiſant l'angle ſolide au poinct M, ſeront egaux aux trois donnez A, B, C. Nous auons donc faict vn angle ſolide de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si quelqu'vn obiectoit icy que la perpendiculaire LM ne peut pas touſiours eſtre retirãchée, en ſorte que ſon quarré auec le quarré de LH ſoient egaux au quarré de l'vn des coſtez des angles donnez : comme par exemple, ſi iceluy coſté eſtait egal ou plus petit que HL. Ie dis que cela n'arriue iamais, non pas ſeulement qu'il ſoit egal à HL : Car ſi HL & IL eſtoient egaux à AD & AE : & la baſe HI egale à la baſe DE, par la 8. p. 1. (& ainſi des deux autres triangles) les trois angles au poinct L ſeroient egaux aux trois angles A, B, C, chacun au ſien : ce qui eſt euidemment faux : Car touſiours par hypotheſe les trois angles A, B, C, ſont plus petits que quatre droicts ; & par le coroll. de la 15. p. 1. les trois au poinct L ſont egaux à quatre droicts.

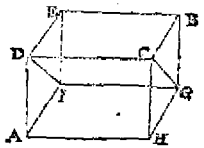
THEOR. 21. PROP. XXIV.

Si vn ſolide eſt compris de plans parallels ; les plans oppoſez d'icelles ſeront parallogrãmes ſemblables, & egaux.

Soit le ſolide AB compris de ſix plans parallels AC, FB, AG, DB, AE, HB : Ie dis que les plans oppoſez ſont parallelogrammes ſemblables, & egaux.

Car puis que les plans AC & FB ſont parallels,

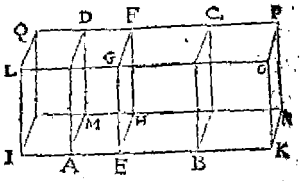
estans couppez par les plans AE & HB ; les lignes de commune section AD, FE sont paralleles : Item H C & GB, par la 16. prop. 11. par la mesme raison les plans AG & DB estans parallels, les lignes de commune section AF & DE : Item GH & BC sont paralleles : partant AE & HB sont parallelogrammes. Par le mesme discours AG, DB ; AC, FB, se prouueront estre parallelogrammes. Ie dis maintenant que les parallelogrammes opposites sont semblables & egaux. Car puis que les lignes AF, AD, sont paralleles aux lignes HG, HC, & non en mesmes plans, mais en opposez ; par la 10. prop. 11. les angles DAF, CHG, seront egaux : par mesme raison les autres angles du parallelogramme AE, seront egaux aux autres angles du parallelogramme HB. Et puis que par la 34. prop. 1. au parallelogramme AC les costez AD, HC sont egaux, comme aussi les costez AF, HG, du parallelogr. AG ; comme AD sera à AF, ainsi HC à HG, & partant comme AF à FE, ainsi HG à GB, &c. Donc les costez des parallelogr. AE, HB, au long des angles egaux, seront proportionaux : & partant ils sont parallelogram. semblables. Maintenant estans tirez les diametres DF, CG : veu que les costez AD, AF, du triangle ADF, sont egaux aux costez HC, HG, du triangle HCG, & les angles DAF, CHG aussi egaux ; par la 4. prop. 1. les triangles ADF, HCG, seront pareillement egaux : lesquels estans moitiez des parallelogram. AE, HB, par la 34. prop. 1. iceux parallelogram. seront aussi egaux entr'eux. Par mesme discours on demonstrera les autres parallelogrames opposez AG, DB ; AC, FB, estre semblables & egaux. Si donc vn solide est



compris de plans parallels, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Si vn solide parallelipipede est couppé par vn plan parallel aux plans opposez; les solides couppez seront l'vn à l'autre comme leurs bases.

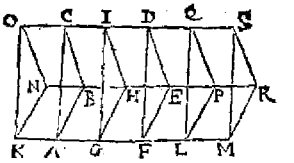


Soit le solide parallelipipede ABCD couppé par le plan EF parallel aux deux opposez AD & BC, & faisant deux solides AF & EC: ie dis qu'iceux solides seront l'vn à l'autre, comme la base AH à la base BH.

Qu'il ne soit ainsi: la ligne AB estant prolongee de part & d'autre, soient faictes egales AI à AE, & BK à BE; & soient accomplis les parallelogrammes IM & BN: Item les solides AQ & BP. Doncques puis que AI, AE, sont egales, les parallelogr. IM, AH seront aussi egaux par la 1. p. 6. & par la precedente les plans opposez LD, GD seront semblables & egaux: Item AL, AG semblables & egaux à MQ. MF, plans opposez; & ainsi des autres: & par la 9. def. de ce liure, le solide AQ est egal au solide AF. Par le mesme discours le solide BP sera egal au solide FB: partant le solide IF est autant multiplice du solide AF, comme la base IH est multiplice de la base AH: Item le solide EP est autant multiplice du solide EC, comme la base EN est multiplice de la base

BH : & partant comme la base IH sera plus grande, egale ou plus petite que la base AH, ainsi le solide IF sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide AF. Tout de mesme comme la base EN sera plus grande, egale, ou plus petite que la base BH, ainsi le solide EP sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide EC. Maintenant soient quatre grandeurs, les deux bases AH, BH, & les deux solides AF, EC : desquelles de la premiere & troisiesme, (sçauoir de la base AH & du solide AF) on a pris les equemultiplices HI base, & IF solide : Item de la seconde & quatriesme, (sçauoir de la base BH, & du solide EC) les equemultiplices EN base, & EP solide, lesquels nous auons monstré estre comme demande la 6. def. 5. plus grands, egaux ou plus petits, en quelconque multiplication qu'elles soient prinses : & partant comme la base AH à la base BH, ainsi le solide AF au solide EC. Parquoy si vn solide parallelipipede est couppé par vn plan parallel aux plans opposés, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

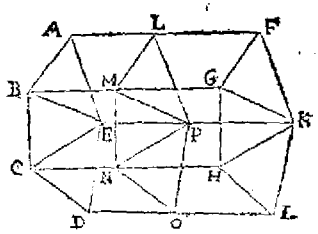
SCHOLIE.



Ceste propos. se peut accommoder à tous prismes : Car si quelconque prisme est couppé par vn plan parallel aux plans opposez ; tout ainsi que la base sera à la base, ainsi le solide sera au solide. Car soit premierement le prisme ABCDEF, duquel les plans opposez sont les triangles ABC, DEF ; & soit iceluy couppé par le plan GHI parallel aux plans opposez. Ie dis que comme la base AI est à la base FI, ainsi le solide ABCIHG est au solide

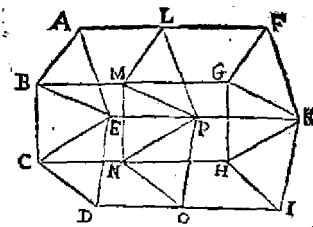
FEDIHG. Car soit imaginé le prisme ABCDEF estre prolongé de part & d'autre, tant qu'on voudra; & de AF prolongee soient prises Ak egale à GF, & FL, LM egales à FG: En apres par les poincts G, L, M, soient entendus les plans KNO, LPQ, MRS parallels aux plans ABC, GHI, FED. Donc puis que les plans parallels ABC, GHI, sont coupper par le plan AI; leurs communes sections AC, GI, seront paralleles par la 16. prop. 11. Mais à cause que AD est parallelog. AG, CI seront aussi paralleles. Donc AI est parallelog. Par mesmes raisons seront demonstrez AH, CH estre parallelog. Et pource que les costez AC, AB, du triangle ABC, sont egaux aux costez GI, GH, du triangle GHI, (car par la 34. prop. 1. AC est egal à GI, & AB à GH) & par la 10. prop. 11. les angles BAC, HGI sont aussi egaux; (pource que les lignes AB, AC sont paralleles aux lignes GH, GI, & en diuers plans) par la 4. prop. 1. les triangles ABC, GHI sont egaux entr'eux, & equiangle: Parquoy par la 4. prop. 6. les costez d'alentour les angles egaux, seront proportionnaux; & partant ces triangles seront semblables. Donc le solide ABCIHG, contenu des deux plans opposez ABC, GHI egaux, & semblables, & des parallelog. AI, IB, GB, est vn prisme. Par mesme raison ABCONK, GHIDEF, DEFLPQ, & LPQSRM seront prismes: Et pource que les parallelogrames AI, KC sont egaux & semblables, comme aussi AH, KB; & CH, OB; tous les plans du prisme ABCIHG, seront egaux & semblables à tous les plans du prisme ABCONK. Parquoy par la 9. def. 11. les prismes ABCIHG, ABCONK sont egaux. Par mesme raison les prismes GHIDEF, DEFLPQ, LPQSRM seront egaux. Partant le prisme KNOIHG sera autant multiple du prisme ABCIHG, que la base KI, de la base AI; & le prisme GHISRM autant multiplice du prisme GHIDEF, que la base GS de la base GD. Et pource que si la base KI, (multiplice de la base AI premiere gran-

deur) est egale à la base GS, (multiplice de la base GD 2. grandeur) aussi le prisme KNOIHG, (multiple du prisme ABCING 3. grandeur) est egal au prisme GHISRM, (multiple du prisme GHIDEF 4. grandeur:) Mais si la base KI est plus grande que la base GS, aussi le prisme est plus grand que le prisme; & si moindre, moindre, en quelconque multiplication: par la 6. d. 5. comme la base AI premiere grandeur, sera à la base GD 2. grandeur, ainsi le prisme ABCIHG 3. grandeur sera au prisme GHIDEF 4. grandeur. En la mesme maniere on demonstrera que le prisme est au prisme, comme la base AH est à la base GE, & comme la base GH est à la base EI. Ce qui estoit proposé.



Soit maintenant le prisme ABCDEFGHIK, duquel les plans opposez sont polygones, c'est à sçauoir pentagones, & soit couppé par le plan LMNOP. Ie dis derechef, que comme la base CM est à la base NG, ainsi est le solide ABCDELMNOP, au solide LMNOPFGHIK. Car si les plans opposez parallels sont resouds en triangles; aussi le prisme sera resoud en autant de prismes qu'il y aura de triangles és plans opposez. Parquoy comme la base BP sera à la base MK, ainsi le prisme ABEPML sera au prisme LMPKGE, par les choses demonstrees cy dessus. En la mesme maniere, comme la base CP est à la base NK, ainsi le prisme BCEPMN sera au prisme MNPkGH; & le prisme CDEPNO au prisme NOPkHI. Mais par la 1. prop. 6. comme BP est à MK; & CP à NK, ainsi est la ligne EP à la ligne PK, c'est à dire comme CN est à NH, & comme CN est à NH, ainsi est CM à NG. Donc les prismes ABEPML,

BCEPMN, CDEPNO, ont meſme raiſon aux priſmes LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, que CM à NG; & partant ont la meſme entre-eux. Mais par la 12. prop. 5. comme vn ſeul eſt à vn ſeul, ainſi ſont les trois aux trois. Donc comme le priſme BCEPMN ſera au priſme MNPKGH, c'eſt à dire comme la baſe CM à la baſe NG, ainſi le priſme ABCDELMNOP compoſé des trois ſera au priſme LMNOPFGHIK compoſé des trois. Ce qui eſtoit propoſé. Il y aura meſme demonſtration en quelconque autre priſme.



COROLLAIRE.

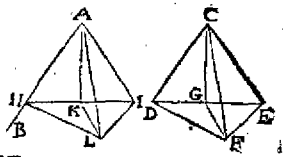
De cecy reſulte que ſi quelconque priſme eſt couppé par vn plan parallel aux plans oppoſez, que la ſection eſt vne figure egale & ſemblable aux plans oppoſez. Car il a eſté demonſtré au premier priſme que le triangle GHI eſt egal, & ſemblable au triangle ABC, & partant au triangle DEF: Et il y a meſme demonſtration en tous. Le meſme ſe doit entendre des parallelipipedes.

PROBL. 4. PROP. XXVI.

Sur vne ligne droicte, & à vn poinct donné en icelle, conſtituer vn angle ſolide egal à vn angle ſolide donné.

Soit la ligne droicte donnée AB, & le poinct en

icelle A; & il faut construire sur icelle AB, & au poinct A, vn angle solide egal à l'angle solide C compris de trois angles plans DCE, ECF, FCD.



Soit tiree de F, la ligne FG perpendiculaire au plan des lignes CD, CE, par la 11. p. 11. & soient menees les lignes DF, FE, EG, GD, CG: en apres soit prise AH egale à CD: & par la 23. propos. 1. soit faict l'angle HAI egal à l'angle DCE: & la ligne AI egale à la ligne CE. Derechef au plan tiré par AH, AI, soit faict l'angle HAk egal à l'angle DCG: & la ligne AK egale à la ligne CG: puis par la 12. prop. 11. de K soit tiree au plan auquel sont les trois AH, Ak, AI, la perpendiculaire kL: laquelle soit posee egale à FG, & soit menee la ligne AL. Ie dis que l'angle solide A, contenu des trois angles plans HAI, HAL, LAI, est egal à l'angle solide donné C.

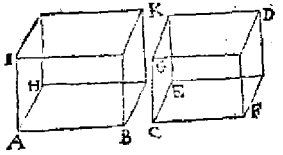
Car estans menees les lignes HK, kI, IL, LH: veu que les costez AH, Ak du triangle AHK, sont egaux aux costez CD, CG du triangle CDG, & les angles HAk, DCG egaux par la construction: les bases Hk, DG seront egales par la 4. prop. 1. Et d'autant que des angles egaux HAI, DCE, estans ostez les angles egaux HAk, DCG, demeurent egaux les angles kAI, GCE: lesquels par la construction sont compris de lignes egales; par la 4. prop. 1. les bases KI, GE, seront aussi egales. Les costez KH, KL sont aussi egaux aux costez GD, GF, & les angles HKL, DGL droicts: donc par la mesme 4. prop. 1. les bases HL, DF, seront egales. Parquoy puis que les costez AH, AL du triangle AHL, sont aussi egaux aux costez CD, CF du triangle CDF: (car les costez AK,

kL, sont egaux aux costez CG, GF, par la construction, & comprenant angles droicts : partant les bases AL, CF sont egales par la 4.p.1.) les angles HAL DCF seront pareillement egaux par la 8.p.1. finalement, pource que les costez KI, KL sont egaux aux costez GE, GF : & les angles IKL, EGF droicts ; par la 4.prop.1. les bases IL, EF sont egales : partant puis que les costez AI, AL du triangle AIL sont egaux aux costez CE, CF du triangle CEF, par la construction, les angles IAL, ECF seront aussi egaux par la 8.p.1. donc les trois angles plans HAI, HAL, LAI, composant l'angle solide A, sont egaux aux trois angles plans DCE, DCF, FCE, composant l'angle solide C ; & partant l'angle solide A est egal à l'angle solide C : ce qui estoit requis.

PROB. 5. PROP. XXVII.

Sur vne ligne droicte donnee, descrire vn solide parallelipipede semblable, & semblablement posé à vn solide parallelipipede donné.

Soit la ligne donnee AB, sur laquelle il faut construire vn solide parallelipipede sẽblable, & semblablement posé au parallelipipede donné CD.



Sur la ligne AB & au poinct A, soit faict vn angle solide egal à l'angle solide C par la 26. prop. 11. lequel soit

soit compris des trois angles plans HAI, BAI, BAH: & par la 12. propos. 6. soit faict comme CF est à CG, ainsi AB à AI, & comme CG à CE, ainsi AI à AH: & en raison egale AB sera à AH comme CF à CE. Soient maintenant paracheuez les parallelogr. BH, HI, BI, Bk, kI, kH. Ie dis que le solide AK est semblable & semblablement posé au solide CD donné.

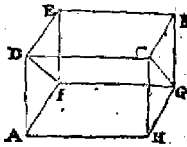
Car ils ont autant de superficies planes l'vn comme l'autre: & d'autant que AB est à AI, comme CF à CG, & l'angle BAI egal à l'angle FCG, le parallelogramme BI est semblable au parallelogr. FG: par la mesme raison le parallelog. BH sera semblable au parallelog. FE: & HI à EG. Partant trois parallelog. du solide Ak sont semblables & semblablement posez, à trois parallelog. du solide CD. Mais par la 24. prop. 11. les trois opposez sont egaux, & semblables. Parquoy les six plans du solide Ak sont semblables & semblablement posez aux six plans du solide CD: & partant par la 8. definition de ce liure les solides AK & CD seront semblables & semblablement posez. Nous auons donc sur vne ligne droicte donnée, descrit vn parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 23. PROP. XXVIII.

Si vn solide parallelipipede est couppé par vn plan passant par les diagonales des plans opposez, il sera couppé en deux egalement.

Soit le solide parallelipipede AB couppé par vn

plan passant par les diagonales des plans opposez DF, CG. Ie dis qu'il est couppé en deux egalement.



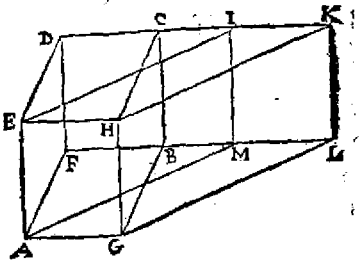
Car il est euident par la 34. prop. 1. que les triangles ADF, EFD, sont egaux : item les deux CGH & GCB ; & le plan AG egal & semblable au plan DB, & AC à FB par la 24. prop. 11. (car ils sont opposez) Partant les deux prismes ADCHGF, FEBGCD, sont compris de parallelogrammes, & de triangles opposez semblables & egaux : & par la 9. def. de ce liure iceux prismes sont egaux. Parquoy puis qu'ils composent le parallelipipede AB : icelluy sera couppé en deux egalement par le plan DCGF. Si donc vn solide parallelipipede est couppé par vn plan, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 24. PROP. XXIX.

Les solides parallelipipedes ayans mesme base, & mesme hauteur, & desquels les plans opposez à la base sont entre mesmes lignes droictes, sont egaux entr'eux.

Soient les deux solides parallelipipedes ABC DEFGH, ALKIEHGM, tous deux sur la mesme base AH, de mesme hauteur, ayans les deux plans FC & MK opposez à la base AH constituez entre les mesmes lignes droictes Dk & FL : ie dis qu'i-

ceux deux solides parallelipipedes sont egaux entr'eux.



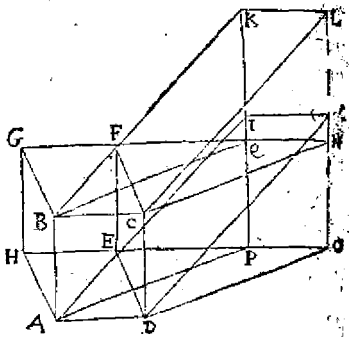
Ceste demonstration est facile à iceluy qui a bien conceu celle de la 35. prop. 1. Car ce que celle-là prouue des parallelogrãmes par les triangles egaux, ausquels on oste & adiouste: ceste-cy le prouue des parallelipipedes par les prismes egaux, desquels on retranche & adiouste vn prisme commun. Les prismes AFMIDE, GBLKGH, seront monstrez egaux par la 24. prop. 11. parce que les plans oppoſez des parallelipipedes sont semblables, & egaux: & d'iceux sont faicts les prismes. Parquoy est manifeste ce qui estoit proposé.

THEOR. 25. PROP. XXX.

Les solides parallelipipedes cõstituez sur mesme base, & de mesme hauteur, & desquels les plans oppoſez à leur base ne sont entre mesmes lignes droictes, sont egaux entr'eux.

Soient deux solides parallelipipedes ABCDEF GH, ABCDMLKI, tous deux sur mesme base

ABCD, & de meſme hauteur (c'eſt à dire que leurs plans oppoſez, & parallels à leur baſe AB CD, ſçauoir GE & KM ſoient en vn meſme plan, lequel ſoit parallel à la baſe AC) : ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux, encores que les plans GE & KM oppoſez à leur baſe commune AC, ne ſoient entre meſmes lignes droictes.



Car puis que les plans GE & KM ſont en vn meſme plan, & qu'ils ne ſont entre meſmes lignes droictes : il eſt certain que deux coſtez de l'vn eſtans continuez, coupperont deux coſtez de l'autre auſſi continuez. Soient donc les coſtez GF, HE continuez vers N & D : Item KI, LM vers P & O: elles ſe coupperont donc aux poincts Q, N, P, O, faiſant vn parallelogramme, (d'autant que les lignes continuées ſont paralleles) lequel ſera egal à la baſe plane AC: Car par la 34. prop. 1. les lignes QP & NO eſtans egales à GH, FE, elles le ſeront auſſi à BA & CD: item PO & QN eſtans egales à IM & KL, elles le ſeront auſſi à BC & AD : & apres auoir mené les quatre lignes AP, DO, BQ, CN: il eſt manifeſte que les deux ſolides AF, AN, ſont ſur meſme baſe, & de meſme hauteur; (car ils ſont entre meſmes plans) & les plans HF, PN oppoſez à la baſe AC, entre meſmes lignes droictes, & par la 29. prop. 11. ils ſont egaux.

Pareillement le solide AN se trouuera egal au solide AL, (estans sur mesme base AC, de mesme hauteur, & les plans QO, KM opposez à la base AC entre mesmes ligne droictes) & par la 1. commune sentence le solide AF sera egal au solide AL. Parquoy les solides parallelipipedes constituez sur mesme base, &c. Ce qui estoit à demonstrer.

SCHOLIE.

On conuertira tant ceste proposition que la precedente en ceste maniere.

Les solides parallelipipedes egaux ayans mesme base, soit qu'ils soient colloquez entre mesmes lignes droictes, ou non, sont en mesme hauteur.

Car si l'on dit que l'vn est plus haut, si d'iceluy on coupe vn parallelipipede de mesme hauteur que l'autre, le coupé & l'autre seront egaux, par la 29. ou 30. propos. 1. & puis que ceste autre est posé egal au tout, le coupé sera egal au tout. Ce *qui est absurde.*

THEOR. 26. PROP. XXXI.

Les solides parallelipipedes estans sur bases egales, & de mesme hauteur, sont egaux entr'eux.

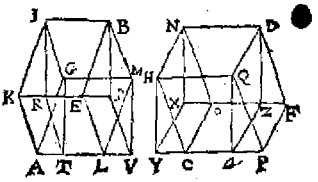
Soient les deux solides parallelipipedes AB, CD constituez sur bases egales AE & CF, & de mesme hauteur AG, CH. Ie dis qu'iceux solides sont egaux.

Qu'ainsi ne soit: leurs hauteurs sont perpendi-

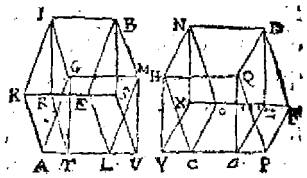
culaires, ou non : Soient premierement perpendiculaires : & apres auoir continué CP iuſques à R, & faict PR egale à KE, au plan de OP prolongé, ſoit faict l'angle RPS egal à l'angle AKE, & faict PS egale à KA : puis ſoit acheué le parallelogramme PT, ſur lequel ſoit conſtruict le parallelipipede QSTV à la hauteur de la perpendiculaire PQ. Donc puis que les coſtez PR, PS ſont egaux aux coſtez Ek, kA, & les angles RPS, EkA egaux, les parallelogrammes PT, kL ſeront egaux & ſemblables. Derechef puis que les coſtez PQ, PS ſont egaux aux coſtez kI, kA, & les angles QPS, IkA droicts par la 2. def. 11. pource qu'icelles IK, PQ ſont poſees perpendiculaires aux plans AE, PT : auſſi les parallelogrammes QS, AI, ſeront egaux, & ſemblables. Par meſme raiſon, d'autant que les coſtez PR, PQ ſont egaux aux coſtez KE, kI, & les angles RPQ, EkI droicts par la meſme 2. def. 11. pareillement les parallelogrammes PV, KB ſeront egaux & ſemblables. Parquoy puis que les trois parallelog. PT, QS, PV, du parallelipipede QSTV ſont egaux & ſemblables aux trois KL, AI, KB, du parallelip. AIBL, par la 24. p. 11. tãt ceux-là que ceux-cy ſeront egaux & ſemblables à leurs autres parallelogrammes oppoſez : & partant par la 9. definit. de ce liure les parallelipipedes AB, SV ſeront egaux entr'eux. Maintenant que FP, TS prolongees ſe rencontrent en Z : & DQ, YX, en 4, & ſoit acheué le parallelipipede ZV. Item que DN, YV prolongees ſe rencontrent en 5,

& OF, BR, en ε, & ſoit acheué le parallelipipede DR. Donc puis que les parallelipipedes SV, ZV, ont meſme baſe PV, & ſont en meſme hauteur, & que les plans SY, Zγ, oppoſez à la baſe, ſont entre meſmes lignes droictes ZT, εY : iceux ſolides ſeront egaux entr'eux par la 29. prop. 11. Mais le parallelipipede SV eſt egal au parallelipipede AB: donc le parallelipipede ZV ſera egal au meſme AB. Et d'autant que par la 35. prop. 1. les parallelogrammes PT, PB ſont egaux, & PT egal à AE, auſſi PB ſera egal au meſme AE, c'eſt à dire à CF (car AE, CF ſont poſees baſes egales): & par la 7. prop. 5. comme CF ſera à Pε, ainſi PB ſera à Pε: & par la 25. prop. 11. comme la baſe CF eſt à la baſe Pε, ainſi le ſolide CD eſt au ſolide Pδ, puis que le parallelipipede Cδ eſt couppé par le plan PD parallel aux plans oppoſez CN, Rδ: Par la meſme raiſon comme PB eſt à Pε, ainſi le ſolide ZV au ſolide Pδ, pource que le parallelipipede DB eſt couppé par le plan PV parallel aux plans oppoſez. Donc par la 9. prop. 5. les parallelipipedes CD, ZV ſeront egaux, puis qu'ils ont meſme raiſon au ſolide Pδ, ſçauoir eſt la meſme qu'ont les baſes CF, PB, à la baſe Pε. Parquoy puis que le parallelipipede ZV a eſté demonſtré egal au parallelipipede AB: les parallelip. AB & CD ſeront pareillement egaux: ce qui eſtoit propoſé.

Maintenant, ſi leurs hauteurs ne ſont perpendiculaires, ſur les baſes AE, CF, ſoient tirees des poincts (apres auoir continué les lignes AL, KE & BC, FO, tant qu'il ſera



de besoin) G, I, B, M, & H, N, D, Q, & sur les plans d'audessous d'iceux poincts les perpẽdiculaires GT, IR, BS, MV, & HY, NX, DZ, Qa, par la 11.p.11. & soient tirees RT, SV, XY, Za. Il est euident par ce qui a esté demonstré cy dessus que le solide TB est egal au solide YD, car ils sont sur bases egales GB, HD: & de mesme hauteur: Mais par la 29. prop.11. le solide TB est egal au solide AB; & le solide YD egal au solide CD: donc le solide AB sera egal au solide CD. Parquoy les solides parallelipipedes estans sur bases egales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

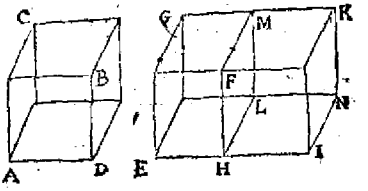
On conuertira ceste 31. prop. en ceste maniere.

Les solides parallelipipedes egaux, constituez sur bases egales, sont en mesme hauteur: & les solides parallelipipedes egaux, qui sont en mesme hauteur: sont sur bases egales, s'ils n'ont vne mesme base.

Car si on croit l'vn plus haut que l'autre: si on couppe du plus haut vn parallelipip. de mesme hauteur que l'autre: par la 31. prop. 11. le couppé sera egal à l'autre, auquel est aussi posé egal le tout: parquoy le couppé sera aussi egal au tout: ce qui est absurde. Que si les parallelipip. estans de mesme hauteur, on croit que la base de l'vn soit plus grande que la base de l'autre: si on couppe d'icelle base vne egale à l'autre, & sur icelle couppée on entend estre vn parallelipipede de mesme hauteur, nous demonstrerons en la mesme maniere, la partie estre egale au tout: ce qui est absurde.

THEOR. 27. PROP. XXXII.

Les solides parallelipipedes de mesme hauteur, sont l'vn à l'autre comme leurs bases.



Soient deux parallelipipedes de mesme hauteur ABCD, EFGH, desquels les bases soient AB, EF. Ie dis que le solide est au solide comme la base à la base.

Car si sur la ligne HF, (apres auoir prolongé le plan EF vers I) & sur l'angle FHI on construit le parallelogramme FI egal au parallelogramme AB: puis on acheue le solide IFLK; iceluy estant de mesme hauteur que le solide ABCD, & sur base egale, il luy sera egal par la 31. prop. 11. Parquoy par la 7. prop. 5. comme le solide IFkL est au solide EFGH, ainsi le solide ABCD au mesme solide EFGH. Mais par la 25. prop. 11. le solide IFkL est au solide EFGH, comme la base IF, c'est à dire AB à la base EF: Donc aussi le solide ABCD, sera au solide EFGH, comme la base AB à la base EF. Parquoy les solides parallelipipedes de mesme hauteur, sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit prouuer.

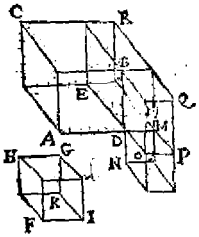
SCHOLIE.

La conuerse: si les solides parallelipipedes sont en-

tr'eux comme leurs baſes ; ils ſeront en meſme hauteur. *Car ſi l'vne des hauteurs eſt plus grande que l'autre, de la plus grande en ſoit couppée vne egale à la moindre, & puis ſoit tiré vn plan parallel à la baſe ; & par la 32. prop. 11. comme la baſe ſera à la baſe, ainſi le parallelipipede ſera au parallelipipede couppé : mais ainſi il eſtoit auſſi au parallelipipede total. Donc le couppé eſt egal au tout par la 9. p. 5. ce qui eſt abſurde.*

THEOR. 28. PROP. XXXIII.

Les ſemblables ſolides parallelipipedes, ſont l'vn à l'autre en raiſon triplée de leurs coſtez homologues.



Soiét deux ſemblables parallelipipedes ABCDBFGHIK conſtituez ſur les baſes ſemblables AE, Fk, eſquelles les coſtez homologues ſont AD, FI. Ie dis que le parallelipipede ABCDE eſt au parallelipipede FGHIK en raiſon triplée des coſtez homologues AD, FI.

Qu'ainſi ne ſoit : ſoit prolongé AD vers *M*, tellement que D*M* ſoit egale à FI, ou HG. Item BD vers N, en ſorte que DN ſoit egale à LI ou Gk : Item ED vers O, tellement que DO ſoit egale à kI ou GL : puis apres eſtans accomplis les parallelogrammes DP, MN, NO, ſoit acheué le parallelipipede NMP. Il eſt donc euident que les deux parallelipipedes FG, NP ſont ſemblables & egaux, puis qu'ils ſont compoſez de plans qui ont les angles egaux, &

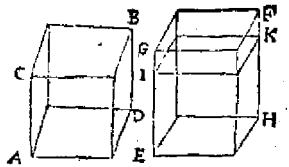
les costez au long d'iceux angles egaux, aussi egaux. Item soient construits les parallelipipedes BMOQ, & EBRM. D'autãt que les parallelipipedes ABCD, FGHI, sont semblables, comme AD est à FI, c'est à dire à DM, ainsi DE à KI, c'est à dire à DO; & BD à LI, c'est à dire à DN. Mais par la 1. p. 6. comme AD à DM, ainsi est le parallelog. AE, au parallelog. EM; & comme ED à DO, ainsi le parallelog. EM à DP; & comme BD à DN, ainsi le parallelogramme BM à MN. Donc comme AE sera à EM, ainsi EM à DP, & BM à MN. Mais par la 32. p. 11. comme la base AE à la base EM, ainsi est le parallelip. AECB au parallelip. EMRB: & comme la base EM est à la base DP, ainsi le parallelipipede EMRB est au parallelip. DPBQ: & comme la base BM est à la base MN; ainsi le parallelipipede de DPBQ au parallelipipede NP. Parquoy comme le parallelipipede AECB sera au parallelipipede EMRB, ainsi le parallelipipede EMRB sera au parallelipipede DPBQ; & le parallelipipede DPBQ au parallelipipede NP: Parrant les quatre quantitez AECB, EMRB, DPBQ, NP sont continuellement proportioneles: & par la 10. def. 5. la premiere AECB sera à la 4. NP, c'est à dire à FG, en raison triplée de la premiere AECB à la seconde FMRB. Mais par la 32. prop. 11. comme AECB est à EMRB, ainsi la base AE, est à la base EM; & par la 1. prop. 6. comme AE est à EM, ainsi AD est à DM, c'est à dire à FI. Donc par la 11. pr. 5. AECD sera à EMRB comme AD à FI: parrant la raison triplée de AECD à EMRB, sera la mesme que AD à FI; & par consequent AECD estant à FG en raison triplée de AECD à EMRB; il sera aussi en raison triplée de AD à FI. Parquoy les solides parallelipipedes, &c. Ce qu'il falloit demõstrer.

COROLLAIRE.

Par ceey eſt euident que s'il y a quatre lignes droictes continuellement proportionneles, comme la premiere eſt à la quatrieſme, ainſi le parallelipipede deſcrit ſur la premiere, eſt au parallelipipede ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la ſeconde. Puis que tant le parallelipipede eſt au parallelipip. que la premiere ligne à la quarte en raiſon triplée de la raiſon de la premiere ligne à la ſeconde, ſçauoir des coſtez homologues.

THEOR. 29. PROP. XXXIV.

Les egaux ſolides parallelipipedes, ont les baſes & les hauteurs reciproques: Et ceux qui ont les baſes & les hauteurs reciproques, ſont egaux.



Soient egaux les parallelipipedes ABCD, EFGH ſur les baſes AD, EH. Ie dis que leurs baſes & leurs hauteurs ſont reciproques, c'eſt à dire, que comme la baſe AD eſt à la baſe EH, ainſi la hauteur EG eſt à la hauteur AC.

Qu'il ne ſoit ainſi. Premierement il eſt euident que ſi les baſes AD & EH ſont egales, (eſtans les ſolides egaux) qu'il faudra auſſi que les hauteurs ſoient egales. Soient donc les baſes inegales, ſçauoir AD plus grande que DH. Ie dis que la hauteur EG doit

eſtre plus grande que CA : car elle ne peut eſtre plus petite, non pas ſeulement egale, d'autant que par la 32. prop. 11. ireux ſolides ſeroient l'vn à l'autre comme leurs baſes ; partant AB plus grand que EF, & nous les auons poſez egaux : La hauteur EG ſera donc plus grande que CA, & d'icelle ſoit retranchée EI egale à CA, & d'icelu y poinct I ſoit imaginé que le plan IK parallel à EH, coupe le parallelipip. EF : Or les deux ſolides AB & EF eſtans egaux, ils auront meſme raiſon l'vn comme l'autre au ſolide EK, par la 7. prop. 5. Mais AB & EK eſtans de meſme hauteur, ils ſeront l'vn à l'autre comme la baſe AD à la baſe EH, par la 32. prop. 11. Partant EF ſera auſſi à EK comme la baſe AD à la baſe EH. Or comme le parallelipipede EF eſt au parallelipipede EK, ainſi la baſe GL à la baſe IL, par la 25. prop. 11. & icelle baſe GL eſt à la baſe IL, comme la ligne EG eſt à la ligne EI, par la 1. prop. 6. & partant par la 11. prop. 5. le ſolide EF eſt au ſolide EK, comme EG à EL. Mais le ſolide EF eſt auſſi au ſolide EK, comme la baſe AD à la baſe EH: Donc par la 11. prop. 5. comme la baſe AD à la baſe EH, ainſi la hauteur EG eſt à la hauteur EI, ou à ſon egale AC.

Pour la ſeconde partie, ſi AD baſe eſt à EH baſe, comme EG hauteur eſt à AC hauteur. Ie dis que les deux ſolides AB, & EF ſont egaux.

Car ſi les hauteurs ſont egales, il eſt euident que les baſes ſont auſſi egales, puis qu'elles ſont poſées en meſme raiſon ; & partant par la 31. prop. 11. les parallelipipedes AB, EF ſeront pareillement egaux.

Que ſi la hauteur EG eſt plus grande que la hauteur AC, ſoit retranchée d'icelle EI, egale à AC, & par I ſoit tiré le plan IK, parallele à la baſe EH. Donc par la 32. p. 11. comme la baſe AD eſt à la baſe EH,

ainſi le ſolide AB eſt au ſolide Ek, puis que leurs hauteurs ſont egales : Et par la 1. p. 6. comme EG eſt à EI, ainſi le plan GL eſt au plan IL. Mais comme la baſe GL eſt à la baſe IL, ainſi le ſolide EF, eſt au ſolide EK : (car ils ſont de meſme hauteur,) donc cõme le ſolide AB eſt au ſolide EK, ainſi le ſolide EF eſt au meſme ſolide Ek, puis que par l'hypotheſe AD eſt à EH comme EG à AC ou EI : partant par la 9. prop. 5. les ſolides AB, EF ſeront egaux. Donc les egaux ſolides parallelipipedes, ont les baſes, & les hauteurs reciproques, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Il faut noter qu'à ceſte demonſtration & preſque à toutes les autres de ce liure, les hauteurs des ſolides doiuent eſtre perpendiculaires. Parquoy ſi elles n'eſtoient telles, les y faudroit reduire, comme nous auons faict à la fin de la 31 prop. de ce liure.

Or toutes les choſes que nous auons demonſtrées és 6. precedentes propoſitions, ſçauoir és 29 30. 31. 32. 33. & 34. conuiennent auſſi aux priſmes qui ont deux plans oppoſez triangulaires, obſeruant les ſuſdites hypotheſes. Car ſi à deux tels priſmes de meſme hauteur, & conſtituez ſur vne meſme baſe, ou ſur baſes egales, on appoſe deux autres priſmes egaux & ſemblables à iceux, ſeront faicts deux parallelipipedes de meſme hauteur, & conſtituez ſur meſme, ou baſes egales. Parquoy par la 29. 30. ou 31. prop. 11. ſeront egaux iceux parallelipipedes ; & partant auſſi les priſmes donnez, c'eſt à ſçauoir les moitiez d'iceux parallelip.

Derechef ſi aux deux priſmes ſuſdits de meſme hauteur, & conſtituez ſur diuerſes baſes, on adioinct deux autres priſmes egaux, & ſemblables à iceux, ſeront faicts derechef deux parallelipipedes de meſme hauteur : Parquoy par la 32. pr. 11. le parallelipipede ſera au parallelip. comme la baſe à la

baſe; & partant par la 15.p.5. le priſme ſera au priſme, c'eſt à ſçauoir la moitié de l'vn des parallelip. à la moitié de l'autre, comme la meſme baſe à la baſe, ſi les baſes des priſmes ſont parallelogrammes, ou comme le triangle au triangle, ſçauoir eſt la moitié d'vne baſe à la moitié de l'autre, ſi les baſes ſont triangulaires.

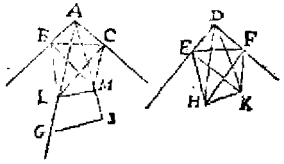
D'auantage, ſi à iceux deux priſmes ſemblables, on adiouſte deux autres priſmes egaux & ſemblables à eux ſeront conſtituez deux parallelip. ſemblables, leſquels par la 33.p.11. ſeront entr'eux en raiſon triplée des coſtez homologues. Donc auſſi par la 15.p.5. les priſmes, ſçauoir eſt les moitiez d'iceux, auront la raiſon triplée de meſmes coſtez homologues, leſquels ſont pareillement coſtez homologues des priſmes.

Finablement, ſi aux deux ſuſdits priſmes egaux, on adiouſte deux autres priſmes egaux & ſemblables à iceux, ſeront conſtituez deux parallelip. egaux de meſme hauteur que les priſmes: Parquoy par la 34.p.11. puis que les baſes, & les hauteurs des parallelip. ſont reciproques, & les baſes des priſmes ſõt les meſmes, ou les triangles moitiez d'icelles, ayant meſme raiſon par la 15.p.5. Auſſi les baſes & hauteurs des priſmes ſeront reciproques.

THEOR. 30. PROP. xxxv.

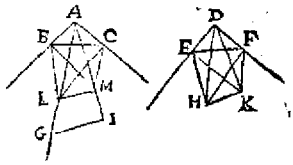
S'il y a deux angles plans egaux, aux ſommets deſquels ſoient leuées en l'air deux lignes droictes faiſant angles egaux auec les coſtez des angles premierement poſez, chacun au ſien; & d'vn poinct pris au haut de chacune des deux lignes ſont menées des lignes perpendiculaires ſur les plans

esquels sont les angles premierement posez, & des poincts où tombent icelles perpendiculaires sont tirées des lignes droictes vers les sommets des angles premierement posez: Les angles que font icelles lignes, auec les leuées en l'air sont egaux entr'eux.

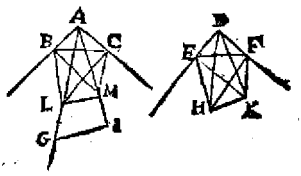


Soient les deux angles plans egaux BAC, EDF, du sommet desquels A & D, soient leuées en l'air les lignes droites AG, DH, tellement que l'angle BAG est egal à l'angle EDH: & l'angle CAG egal à l'angle FDH: & des poincts G & H pris és lignes AG, DH, soient tirées aux plans esquels sont les angles BAC, EDF, les perpendiculaires GI, HK, tombantes és poincts I, K, desquels soient menées les lignes IA, DK. Ie dis que les angles GAI, HDK, sont egaux entr'eux.

Car si les deux lignes AG, DH sont inegales, de la plus grande AG, soit retranchée AL egale à DH; & de L au plan du triangle AGI, soit tirée LM parallele à GI: laquelle LM sera perpendiculaire au plan de l'angle BAC par la 8. pr. 11. puis que GI est perpendiculaire à iceluy plan. Soient aussi tirez des poincts M, K, les lignes MB, MC, KE, KF, perpendiculaires aux lignes AB, AC, DE, DF; & soient menées les lignes BC, BL, LC, EF, EH, HF. Or d'autant que LM est perpendiculaire au plan de l'angle BAC,



BAC, elle le ſera auſſi à la ligne AM tirée au meſme plan par la 2. d. 11. partant par la 47. prop. 1. le quarré de AL ſera egal aux quarrez de AM, ML: mais par la meſme prop. le quarré de AM eſt egal aux quarrez de AC, CM, puis que l'angle ACM eſt droict par la conſtruction. Donc le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AC, CM, ML: Et par la 47. prop. 1. le quarré de CL eſt egal aux quarrez de CM, ML, puis que par la 2. d. de ce liure, l'angle CML eſt droict. Donc le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AC, CL: & partant par la 48. p. 1. l'angle ACL eſt droict. Derechef, puis que par la 47. p. 1. le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AM, ML: & le quarré de AM eſt egal aux quarrez de AB, BM, l'angle ABM eſtant droict par la conſtruction: le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AB, BM, ML: mais le quarré de BL eſt egal à iceux quarrez de BM, ML, pource que l'angle BML eſt droict par la 2. def. 11. Donc le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AB, BL: & partant par la 48. pr. 1. l'angle ABL ſera droict. On demonſtrera en la meſme maniere que les angles DFH, DEH ſont auſſi droicts. Maintenant puis que les angles ABL, LAB, du triangle ABL ſont egaux aux angles DEH, HDE, du triangle DEH, & les coſtez AL, DH auſſi egaux, par la 26. prop. 1. les autres coſtez AB, BL ſeront pareillement egaux aux autres coſtez DE, EH. Par meſme raiſon ſeront egaux les coſtez AC, CL, aux coſtez DF, FH. Parquoy les coſtez AB, AC du triangle ABC, eſtans egaux aux coſtez DE, DF du triangle DEF, & les angles BAC, EDF auſſi egaux, par la 4.



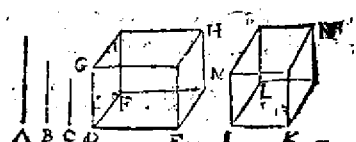
prop. 1. les baſes BC, EF, ſeront pareillement egales entr'elles, & les angles A B C, ACB egaux aux angles DEF, DFE. Mais tous les angles ABM, ACM, ſont egaux à tous les angles DEK, DFK, puis qu'ils ſont tous droicts : Donc auſſi les autres angles B M C, MCB ſeront egaux aux autres angles KEF, KFE; & partant puis que les coſtez B C, EF, ont eſté demonſtrez egaux; les coſtez BM, CM, ſeront egaux aux coſtez EK, FK, par la 26. prop. 1. veu donc que les coſtez AC, CM, du triangle ACM ſont egaux aux coſtez DF, FK du triangle DFK. & les angles ACM, DFK ſont droicts, par la 24. prop. 1. les baſes A M, DK ſeront egales. Et puis que BL, EH ont eſté demonſtrées egales, leurs quarrez ſeront auſſi egaux : Mais par la 47. prop. 1. le quarré de BL eſt egal aux quarrez de BM, ML, & le quarré de EH aux quarrez de EK, kH, pource que les angles BML, EKH ſont droicts, par la 2. def. 11. Donc les quarrez de BM, ML ſeront egaux aux quarrez de Ek, KH : & partant eſtans oſtez les quarrez de BM, EK, qui ſont egaux, les lignes BM, EK, ayant eſté demonſtrées egales; reſteront egaux les quarrez de LM, HK, & partant les lignes L M, HK ſeront egales. Parquoy veu que les coſtez AL, AM du triangle A L M, ſont egaux aux coſtez DH, Dk du triangle D H k, & la baſe LM egale à la baſe Hk; les angles LAM, HDK ſeront egaux par la 8. prop. 1. S'il y a donc deux angles plans egaux, aux ſommets deſquels ſoiēt leuees en haut deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLAIRE.

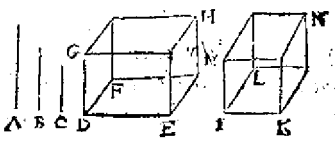
Parquoy s'il y a deux angles plans egaux, és sommets desquels soient esleuées en l'air des lignes droictes egales, lesquelles auec les lignes d'iceux angles premierement posez, contiennent angles egaux, chacun au sien; lés perpendiculaires tirées des poincts extremes d'icelles lignes esleuées en l'air, sur les plans des angles premierement posez, seront egales entr'elles. Car d'autant que les angles plans BAC, EDF, sont posez egaux, & les lignes egales AL, DH esleuées en haut constituent les angles egaux LAB, HDE; Item LAC, HDF; il a esté demonstré que les perpendiculaires LM, HK, sont egales entr'elles.

THEOR. 31. PROP. XXXVI.

Si trois lignes droictes sont proportioneles, le solide parallelipipede compris d'icelles trois lignes, est egal au solide parallelipipede compris de la moyenne, pourueu qu'iceux deux solides soient equiangles.



Soiēt trois lignes continuellement proportioneles A, B, C: & soit constitué vn angle solide D, de trois quelconques angles plans EDF, EDG, FDG, tellemēt que la ligne DE soit egale à A, & DG à B, & DF egale à C: & soit accomply le parallelipipede DH:



en apres par la 26. p. 11. sur la ligne Ik egale à B, & au poinct I soit faict l'angle solide I des trois angles plans KIL, kIM, & kIL, egaux aux trois EDF, EDG, FDG: tellement que les lignes Ik, IL, IM soient egales à la moyenne B; & soit faict le parallelipipede IN. Ie dis que les solides DH, IN sont egaux,

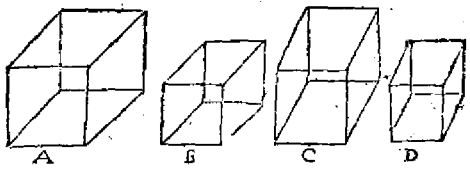
Car puis que comme DE est à Ik, ainsi IL à DF: (car DE est egale à A; IK, IL à B; & DF à C), & les angles EDF, kIL egaux, les parallelog. EF, kL seront egaux par la 14. p. 6. pource qu'ils ont les costez au long des angles egaux reciproques. Et d'autant qu'aux sommets des angles plans egaux EDF, kIL sont eſleuez en l'air les lignes egales DG, IM, lesquelles auec les lignes des angles premierement posez comprennent angles egaux, vn chacun au sien: les perpendiculaires tirées de G, M, sur les plans des bases EF, kL; (sçauoir est les hauteuſs des parallelip. DH, IN) seront egales entr'elles par le corollaire de la preced. prop. Parquoy par la 31. p. 11. les parallelip. DH, IN, seront egaux entr'eux; puis qu'ils ont les bases EF, kL egales, & pareillement les hauteurs egales. Parquoy si trois lignes droictes sont proportioneles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 32. PROP. XXXVII.

Si quatre lignes droictes sont proportioneles, les solides parallelipipedes semblables, & semblablemẽt descrits sur icelles, seront proportionaux: Et

si iceux quatre semblables solides parallelipipedes sont proportionaux; les quatre lignes sur lesquelles ils seront semblablement posez, seront aussi proportioneles.

Soient quatre lignes proportioneles, comme A, B, C, D: & soient descrits sur icelles quatre solides semblables & semblablement posez A, B, C, D. Ie dis qu'iceux solides sont proportionaux.



Car puis que le solide A est semblable au solide B: par la 33.p.11. ils seront l'vn à l'autre en raison triplée de la ligne A à la ligne B: pareillement les solides C & D seront aussi en raison triplée de C à D: mais la raison de A à B, est cõme de C à D par l'hypothese. Donc la raison triplée de A à B, sera semblable à la raison triplée de C à D; & partant par la 11. p.5. le solide A sera au solide B, cõme le solide C au solide D.

Maintenant si les quatre solides A, B, C, D sont proportionaux, la ligne A sera à la ligne B, comme la ligne C à la ligne D. Car tout de mesme le solide A sera au solide B, en raison triplée de la ligne A à la ligne B: Item le solide C au solide D, en raison tri-

plée de C à D: mais le solide A est au solide B comme le solide C au solide D: partant leur raison triplée sera semblable; & par consequent les quatre lignes A, B, C, D, seront proportioneles. Parquoy si quatre lignes droictes sont proportioneles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Nous adiousterons icy cest autre theoreme.

Si quatre lignes droictes sont continuellement proportioneles: le parallelipipede compris sous le quarré de l'vne des extremes, & sous le quarré de l'autre extreme, est egal au cube de la moyene proport. plus prochaine de la premiere extreme prise.

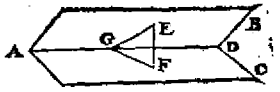
Soient quatre lignes continuellement proportioneles A, B, C, D. Ie dis que le parallelipipede compris sous le quarré de l'extreme A, & sous le quarré de l'autre extreme D, est egal au cube de la moyenne B plus prochaine de l'extreme A.

Car puis que par le corol. de la 20. p. 6. le quarré de A est au quarré de B, comme A à C, c'est à dire comme B à D: les bases auec les hauteurs seront reciproques, puis que le quarré de A est la base du parallelipipede, & la ligne D, la hauteur d'iceluy; & la base du cube est le quarré de B, & sa hauteur la mesme ligne B. Donc par la 34. p. 11. le parallelipipede & le cube seront egaux. Par mesme raison le parallelip. compris sous le quarré de l'extreme D, & sous le quarré de l'autre extreme A, sera demonstré egal au cube de la moyenne prop. C plus prochaine de l'extreme D.

THEOR. 33. PROP. XXXVIII.

Si vn plan est esleué perpendiculaire-

mẽt ſur vn autre plan, & d'vn poinct de l'vn d'iceux on meine vne ligne perpendiculaire ſur l'autre, elle tombera ſur leur commune ſection.



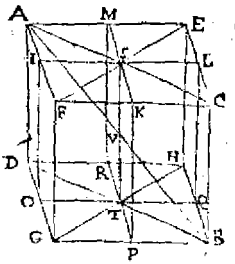
Soit le plan AB, eſleué perpendiculairement ſur le plan AC, leur ligne de cõmune ſection AD; & du poinct E pris en AB on laiſſe tomber vne perpendiculaire ſur le plan AC: ie dis qu'elle tombera ſur la commune ſection AD.

Autrement qu'elle tombe au poinct F, du plan AC, ſ'il eſt poſſible: & par la 12. prop. 1. du poinct F ſur la ligne AD ſoit menée la perpendiculaire FG; & la ligne GE faiſant le triangle GFE. Or ſi la ligne EF eſt perpendiculaire au plan AC, elle le ſera auſſi à la ligne FG: & icelle FG eſtant perpendiculaire à la commune ſection AD, elle le ſera pareillement au plan AB: & par conſequent à la ligne GE: partant au triangle GFE, les deux angles ſur la ligne GF ſeroient tous deux droicts contre la 17. prop. 1. Donc la perpendiculaire tombant de E ſur le plan AC ne tombera pas hors la commune ſection AD, mais elle tombera en icelle. Parquoy ſi vn plan eſt eſleué perpendiculairement ſur vn autre plan, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si les coſtez des plans oppoſez d'vn ſo-

lide parallelipipede, ſont couppez en deux egalement ; & on meine des plans par les ſections : la ligne de commune ſection d'iceux plans, & le diamette du ſolide parallelipipede, ſe coupperont en deux egalement.



Soit le parallelipipede AB; les plans oppoſez AC, BD, deſquels tous les coſtez ſoiēt couppez en deux egalement és poincts I, K, L, M, O, P, Q, R, par leſquels ſoient imaginez paſſer les plans IQ, K R, ſe couppans l'vn l'autre en la ligne ST : & ſoit menée la diagonale AB : Ie dis que la ligne ST, & la diagonale AB ſ'entrecouppent en deux egalement.

Car eſtans tirées les lignes S A, S C, TD, T B: ſoient conſiderez les deux triangles BQT, DOT, deſquels les deux coſtez B Q, Q T ſont egaux aux deux coſtez D O, O T, (car BQ, DO, ſont moitiez des lignes droictes egales BH, DG : & par la 34. p. 1. QT, OT, ſont egales aux deux egales BP, GP, puis que P Q, P O ſont parallelogrammes) & l'angle E Q T par la 29. prop. 1. eſt egal à l'interne DOT: partant par la 4. prop. 1. les baſes B T, D T ſeront auſſi egales : & les angles BTQ, DTO pareillement egaux : Et par la 13. prop. 1. les angles BTQ, BTO ſont egaux à deux droicts. Donc auſſi DTO, BTO ſont egaux à deux droicts: & partāt par la 14. p. 1. BT,

DT constituent vne seule ligne droicte. En la mesme maniere sera demonstré que AS, CS sont egales, & composent vne seule ligne droicte. Maintenant puis que l'vne & l'autre AD, BC est parallele & egale à FG, à cause des parallelogrammes DF, FB: icelles seront aussi egales & paralleles entr'elles par la 9. prop. 11. Parquoy AC, BD qui conioingnent les extremitez d'icelles AD, BC, sont aussi egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par consequent AS, BT moitiez d'icelles sont egales. Mais pource que AC, BD sont paralleles, les lignes AB, ST seront auec icelles en vn mesme plan, par la 7. prop. 11. & partant s'entrecouperont en vn poinct, sçauoir en V. Et d'autant que par les 29. & 15. prop. 1. les deux angles ASV, AVS du triangle ASV, sont egaux aux deux angles BTV, BVT du triangle BTV, & le costé AS egal au costé BT: les autres costez AV, SV, seront aussi egaux aux autres costez BV, TV, chacun au sien; par la 26. prop. 1. Parquoy les deux lignes AB, ST s'entrecouppent en deux egalement au poinct V. Parquoy si les costez des plans opposez d'vn solide parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

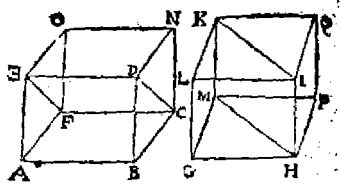
COROLLAIRE.

Par cecy est cuident qu'en tout parallelipipede, tous les diametres s'entrecouppent en deux egalement en vn seul poinct, sçauoir est au poinct V, *auquel ils diuisent en deux egalement la ligne* ST. *Est aussi manifeste que tout plan qui coupe le parallelipipede en deux egalement passe par le centre d'iceluy, sçauoir par V.*

THEOR. 35. PROP. XL.

Deux prismes de mesmes hauteur sont

egaux, si la base de l'vn triangulaire n'est que la moitié de la base de l'autre, estant vn parallelogramme.



Soient deux prismes de mesme hauteur ABCDEF, GHIkLM; & que celuy-là ait pour base le parallelogramme ABCF, double du triangle GHM base du prisme GHIkLM. Ie dis qu'iceux prismes sont egaux.

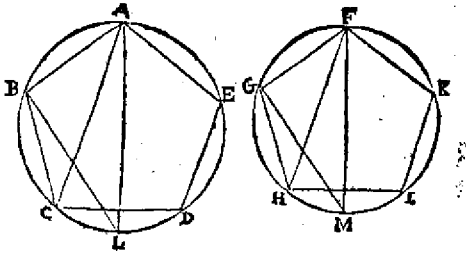
Car si on les accomplit pour estre solides parallelipipedes AN, GQ, la base en sera egale à la base BF: & estans de mesme hauteur, ils seront egaux par la 31. p. 11. & par la 28. prop. 11. les plans diagonaux CD EF, HIkM les diuiseront en deux egalement, & partant les prismes donnez au commencement estans les moitiez de choses egales, seront egaux entr'eux: ce qu'il falloit prouuer.

Fin de l'vnziesme Element.

ELEMENT DOVZIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

LEs polygones semblables inscrits aux cercles, sont l'vn à l'autre comme les quarrez descrits des diametres des cercles.



Soient deux polygones semblables ABCDE & FGHIK, inscrits dans les cercles, desquels les diametres sont AL, FM. Ie dis qu'iceux polygones sont l'vn à l'autre comme les quarrez des diametres AL, FM.

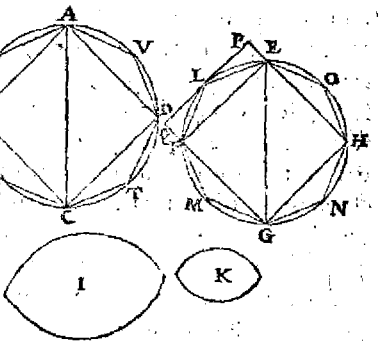
Qu'il ne soit ainsi. Soient menees les lignes AC, FH, item BL, & GM. D'autant que les pentagones sont semblables, AB est à BC, comme FG à GH, & l'angle ABC, egal à l'angle FGH; par la 6. prop. 6. les triangles ABC, FGH sont equiangles; partant l'angle BCA sera egal à l'angle FHG Mais ils sont chacũ egaux, l'vn à l'angle L, l'autre à l'angle M, par la 21. prop. 3. (car ils sont sur mesmes sections BA & FG.) Ainsi l'angle L sera egal à l'angle M: & par la 31. p. 3. les angles ABL, FGM estans droicts dans les demy cercles, & egaux, les triangles ABL, FGM seront equiangles: (car le troisiesme sera egal au troisiesme, par la 32. prop. 1.) & par la 4. prop. 6. comme AL sera à AB, ainsi FM à FG; & en permutant comme AL sera à FM, ainsi AB à FG. Parquoy par la 22. p. 6. comme le pentagone descrit sur AB sera à l'autre pentagone semblable, & semblablement posé sur FG: ainsi le quarré de AL au quarré de FM. Parquoy les poligones semblables inscrits aux cercles, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 2. PROP. 11.

Les cercles sont l'vn à l'autre, comme les quarrez descrits de leurs diametres.

Soient les deux cercles ABCD, EFGH, descrits sur les deux diametres AC & EG: Ie dis qu'ils sont l'vn à l'autre comme le quarré de AC est au quarré de EG; c'est à dire que si on imagine que comme le quarré de AC, au quarré EG, ainsi le cercle ABCD

à quelque figure quatrieſme proport. (comme I) qu'icelle figure I eſt egale au cercle E F G H.



Autremẽt elle ſera plus petite ou plus grande. Qu'elle ſoit premierement plus petite, s'il eſt poſſible: & ſoit le cercle EFGH plus grand qu'icelle de la figure K. Or par la 1. prop. 10. on peut retrancher plus de la moitié du cercle EFGH, & du reſidu plus de la moitié tant de fois qu'il demeurera en fin vne quantité plus petite que K: Soit donc dans iceluy cercle EFGH deſcrit le quarré EFGH, qui eſt plus grand que la moitié du cercle: (d'autãt que le quarré de EG, qui eſt ſon double, eſt plus grand que le cercle.) Si les quatre ſections du cercle ſont plus petite, que K, nous auons ce que nous demandons: Sinon ſoit couppé l'arc EF en deux egalemẽt au poinct L, & les trois autres arcs ſemblablement és poincts M, N, O: & ſoient tirees les lignes EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, & OE, afin d'auoir l'octogone ELFMGNHO, inſcrit dans le cercle: Il eſt euident que dans les quatre ſections egales, il y aura quatre triangles egaux, & que chacun comme ELF, eſt plus de la moitié de ſa ſection: (car le triangle Iſoſcele FLE eſt la moitié du rectangle FP de meſme hauteur, & ſur meſme baſe FE, par la 41. prop. 1. lequel rectangle eſt

plus grand que le segment F L E). Soient maintenant les huict petites figures restantes plus petites que la figure K, que si cela n'estoit, il faudroit tousiours coupper les arcs derniers, & tousiours inscrire des polygones, desquels le dernier auroit deux fois autant de costez que son precedent, & soustraire tousiours plus de la moitié de chacune section, sçauoir son triangle Isoscele : Il est certain qu'à la fin les dernieres portions seront plus petites que la figure k. Mais pour abreger soient les deuant dictes huict sections restantes plus petites que la figure k : Il est euident que l'octogone E L F M G N H O sera plus grand que la figure I, puis que les deux I & k sont egales au cercle E F G H. Soit pareillement inscrit vn octogone semblable au cercle A B C D, ce qui est facile : car il n'y a qu'à couppet en deux egalement les deux demy cercles A B C, A D C, en B & D ; puis les circonferences A B, B C, C D, A D aussi en deux egalement en R, S, T, V ; & ayant tiré les lignes droictes A R, R B, B S, S C, C T, T D, D V, & V A ; il est euident que la figure inscripte sera semblable à la figure octogone descrite au cercle E F G H. Maintenant par la 1. prop. 12. l'octogone A R B S C T D V sera à l'octogone E L F M G N H O, comme le quarré de A C est au quarré de E G : mais comme le quarré de A C est au quarré de E G, ainsi le cercle A B C D est à la figure I : & par la 11. propos. 5. comme le poligone A R B S C T D V sera au poligone E L F M G N H O, ainsi le cercle A B C D sera à la figure I. Mais le poligone A R B S C T D V est moindre que le cercle A B C D : Donc par la 14. prop. 5. le polygone E L F M G N H O sera aussi moindre que la figure I : Mais il a aussi esté demonstré plus

grand. Ce qui eſt abſurde. Donc la figure I n'eſt pas plus petite que le cercle EFGH.

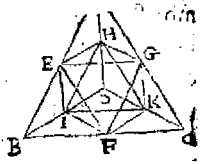
On prouuera auſſi qu'elle ne peut eſtre plus grande: Autrement s'il eſt poſſible, puis que comme le quarré de AC eſt au quarré de EG, ainſi le cercle ABCD eſt à la figure I: auſſi en changeant la figure I ſera au cercle ABCD, comme le quarré de EG au quarré de AC: mais ſoit imaginé que comme I eſt au cercle ABCD, ainſi le cercle EFGH ſoit à quelque autre figure, comme K: & par la 14. prop. 5. comme la figure I eſt plus grande que le cercle EFGH, ainſi le cercle ABCD ſera plus grand que la figure K: & par la 11. prop. 5. le cercle ABCD ſera à la figure K, comme le quarré de AC eſt au quarré de EG: ce qui contreuient à la premiere partie de la demonſtration, en laquelle nous auons demonſtré que l'vn des cercles eſtant à vne figure, en la raiſon des quarrez des diametres, qu'icelle figure ne pouuoit eſtre plus petite que l'autre cercle: Partant la figure I ne pouuoit eſtre plus grande que le cercle EFGH: ny plus petite, comme en la premiere partie: elle eſtoit donc egale à iceluy. Parquoy les cercles ſont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres: ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Par ces choſes eſt euident que le cercle eſt au cercle comme le polygone deſcrit en celuy-là eſt au polygone ſemblable deſcrit en ceſtuy-cy. Puis que par la 2. prop. 12. tant le cercle eſt au cercle, que par la 1. prop. 12. le polygone eſt au polygone, comme le quarré du diametre eſt au quarré du diametre, ainſi qu'il a eſté demonſtré.

THEOR. 3. PROP. III.

Toute pyramide ayant baſe triangulaire, peut eſtre diuiſee en deux pyramides egales, ſemblables entr'elles, & à la totale, & en deux priſmes egaux, & plus grands que la moitié de la pyramide totale.



Soit la pyramide ABCD, ayãt la baſe triangulaire A B D, & le ſommet au poinct C: Ie dis qu'elle peut eſtre diuiſee en deux pyramides egales, ſemblablables entr'elles, & à la totale: & en deux priſmes egaux, plus grands que la moitié de la pyramide donnee.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soient couppez en deux egalement, tous les coſtez des plans d'icelle pyramide, ſçauoir les trois de la baſe ABD aux poincts E, F, G, & les trois hypothenuſes AC, BC, DC aux trois poincts H, I, K, & ſoient menees les lignes FE, FG, HI, IK, KH, HG, HE, FI. Premierement la baſe ABD eſt diuiſee en trois figures; au quadrangle BEGF; & les deux triangles DGF, & EAG, leſquels ſont ſemblables entr'eux, & au tout ABC, puis que les coſtez d'iceluy ſont coupez proportionnellement, & par la 2. prop. 6. la ligne EG eſt parallele à BD, & FE à AD. Partant l'angle A eſtant commun aux deux triangles BAD,

BAD & EAG, l'angle exterieur GEA sera egal à l'opposé interieur DBA, par la 29.p.1. Et par la 32.p.1. le troisiesme sera egal au troisiesme, & par la 4.prop.6. & 1. def. 6. les deux triangles BAD & EAG seront semblables. Par le mesme discours le triangle FGD, sera semblable au triangle BAD, & par la 21. prop. 6. les deux triangles EAG, FGD, seront semblables entr'eux, & egaux, d'autant que leurs costez sont egaux. Quant au quadrangle BEGF; il est euident par la 41. prop. 1. qu'il est double du triangle FGD. (car il est sur base egale, & entre mesmes paralleles) Il est aussi manifeste que toute la pyramide ABCD, est diuisee aux deux pyramides AEGH & HIkC egales & semblables; & aux deux prismes, l'vn EHGFIB, duquel la base est le quadrangle BEGF, l'autre HIk FDG, duquel la base est le triangle FGD: & pourautant qu'ils sont de mesme hauteur, sçauoir de la hauteur du poinct H, ou du poinct k, & que la base quadrangulaire est double de la triangulaire, ils seront egaux par la 40. prop. 11.

Or que les pyramides AEHG, & HICk soient semblables, on le prouue en ceste sorte: d'autant que les costez AC, DC du triangle ACD ont esté couppez en deux egalement, par la 2. prop. 6. Hk, AD, sont paralleles, & l'angle exterieur CHk est egal à son opposé interieur HAG par la 29. prop. 1. Et AHG à HCk, & par la 32. prop. 1. le troisiesme sera egal au troisiesme; & partant par la 4. prop. 6. les triangles equiangles CHk & HAG seront semblables entr'eux, & au triangle ACD par la 21. p. 6. ils seront aussi egaux entr'eux, estans les lignes CH & HA egales. Par les mesmes raisons les triangles ICH, & EHA seront egaux, & semblables entr'eux, &

au triangle ACB. Item le triangle lkH se prouuera facilement equiangle, & semblable au triangle ABD, (car ayans leurs costez parallels se touchans en diuers plans ils ferõt angles egaux) partant aussi semblable au triangle GAE, & egal à iceluy par les 21. & 22. p. 6. Car HK est egal à GD, & GD à GA: & par la mesme raison kCl & BCD seront semblables à GHE, & KCl egal à iceluy: & par la def. des solides semblables & egaux, icelles trois pyramides ABCD, AEHG, HICK, faictes de plans semblables, seront semblables; & les deux petites AEHG, HICk seront egales, estans faictes de plans egaux.

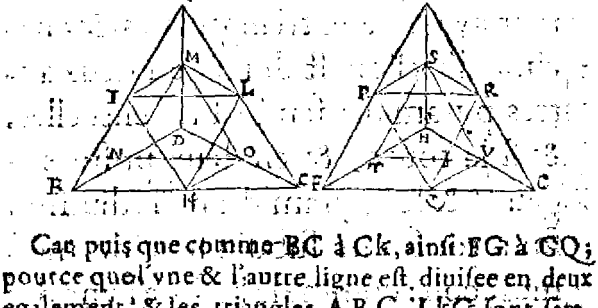
Que les deux ptismes EHGFIB, & HIKFDG soient ensemble plus de la moitié d'icelle pyramide totale ABCD, il appert ainsi: iceux deux prismes estans egaux, l'vn d'iceux EHGFIB, ayant base quadrangulaire BEGF double du triangle FGD, base de la pyramide AGHE, & de mesme hauteur qu'icelle, on en peut retrancher vne pyramide egale à icelle pyramide EAGH: partant iceluy prisme est plus grand que la pyramide, le tout que la partie: Et par consequent les deux prismes ensemble, seront plus grands que les deux pyramides AEHG, HICK ensemble. Mais iceux prismes, & pyramides font ensemble la pyramide totale ABCD: donc iceux ptismes estans plus grands qu'icelles deux pyramides, seront aussi plus grands que la moitié d'icelle pyramide totale ABCD. Parquoy toute pyramide ayant base triangulaire peut estre diuisée en deux pyramides egales, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. IV.

S'il y a deux pyramides de meſme hauteur ayans baſes triangulaires, & chacune d'icelles eſt diuiſée en deux autres pyramides ſemblables entr'elles, & à la toute, & en deux priſmes egaux; & les pyramides de la diuiſion ſont touſiours ſubdiuiſees de meſme façon: comme la baſe de l'vne des pyramides ſera à la baſe de l'autre, ainſi auſſi tous les priſmes enſemble tant de la diuiſion que ſubdiuiſion d'icelle pyramide, ſeront à tous les priſmes enſemble de l'autre pyramide.

Soient ſur les baſes triangulaires ABC, EFG, les pyramides ABCD, EFGH de meſme hauteur, deſquelles chacune ſoit diuiſee comme en la precedente propoſition en deux pyramides egales entr'elles & ſemblables à la toute, ſçauoir eſt en AILM, MNOD; EPRS, STVH; & en deux priſmes egaux IBKLMN, CKLMNO; PFQRST, GQRSTV: Et de meſme façon ſoient entendues chacunes des pyramides AILM, MNOD, EPRS, STVH eſtre diuiſees; & en continuant touſiours de meſme façon,

Ie dis que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi tous les prismes faicts en la pyramide ABCD à tous les prismes faicts en la pyramide EFGH.



Car puis que comme BC à Ck, ainsi FG à GQ; pource que l'vne & l'autre ligne est diuisee en deux egalement; & les triangles ABC, LKC sont semblables & semblablement posez: Item les triangles EFG, RQG, par le coroll. de la 4. propos. 6. pareillement par la 22. prop. 6. comme le triangle ABC au triangle LKC, ainsi le triangle EFG, au triangle RQG: & en permutant comme ABC à EFG, ainsi LKC à RQG. Mais comme LKC à RQG, ainsi est le prisme CKLMNO au prisme GQRSTV, comme nous demonstrerons incontinent: & partant ainsi aussi le prisme IBkLMN est au prisme PFQRST, puis que ceux-cy sont egaux à ceux-là: Et comme vn seul prisme, sçauoir IBkLMN est à vn seul prisme PFQRST, ainsi sont les deux prismes ensemble IBkLMN, CkLMNO, aux deux prismes ensemble PFQRST, GQRSTV par la 12. prop. 5. Donc aussi comme la base ABC à la base EFG, ainsi les deux prismes en la pyramide ABCD seront aux deux prismes en la pyramide EFGH. Nous demonstrerons en la mesme maniere, deux prismes és pyramides AILM, MNQD, faicts en la pyramide

ABCD, estre aux deux prismes és pyramides EPRS, STVH, faictes en la pyramide EFGH, comme sont les bases AIL, MNO de ces pyramides là aux bases EPR, STV de ces pyramides-cy: & ainsi continuellement, tant que la mesme diuision sera faicte. Mais comme ces bases-là sont à celles-cy, ainsi la base LkC, qui est egale & semblable à celles-là, est à la base RQG, qui est egale & semblable à celle-cy, c'est à dire ainsi la base ABC est à la base EFG. Donc aussi comme la base ABC est à la base EFG, ainsi les prismes de quelconque pyramide faicte en la pyramide ABCD, seront aux prismes de quelconque pyramide faicte en la pyramide EFGH: & partant aussi comme les prismes de la pyramide ABCD seront aux prismes de la pyramide EFGH, ainsi seront les prismes tant de la pyramide AILM, aux prismes de la pyramide EPRS, que les prismes de la pyramide MNOD, aux prismes de la pyramide STVH; & ainsi continuellement. Parquoy puis que par la 12. propos. 5. comme les deux prismes de la pyramide ABCD sont aux deux prismes de la pyramide EFGH, ainsi tous les prismes estans és pyramides ABCD, AILM, MNOD, &c. ensemble, sont à tous les prismes estans és pyramides EFGH, EPRS, STVH, &c. ensemble, si celles-cy sont egales en multitude à celles-là; pareillement comme la base ABC est à la base EFG, ainsi seront tous les prismes estans en la pyramide ABCD, à tous les prismes en la pyramide EFGH: Parquoy s'il y a deux pyramides de mesme hauteur, ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

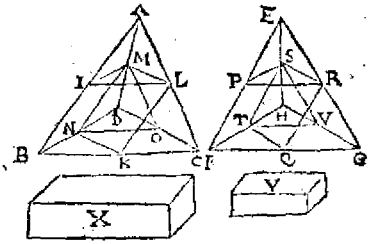
LEMME.

Or que comme LKC eſt à RQG, ainſi le priſmes CKLMNO ſoit au priſme GQRSTV, nous le demonſtrerons ainſi. Soient imaginees tombes des ſommets D, H, des lignes perpendiculaires ſur les baſes ABC, EFG, leſquelles ſeront les hauteurs egales des pyramides ABCDEFGH. Puis puis que les plans parallels ABC, MNO couppent proportionnellement par la 17. prop. 11. deux lignes droictes, ſçauoir DC & la perpendiculaire tombant de D; & DC eſt couppee en deux egalement en O: pareillement la perpendiculaire tombant de D, ſera couppee en deux egalement au poinct auquel elle rencontre le plan MNO. Par la meſme raiſon la perpendiculaire tombant de H, ſera couppee en deux egalement par le plan STV. Parquoy puis que icelles perpendiculaires ſont poſees egales, leurs moitiez, ſçauoir eſt les hauteurs des priſmes, ſeront auſſi egales: & partant les priſmes CKLMNO, GQRSTV eſtans d'egales hauteurs, ſeront entr'eux, comme les baſes LKC, RQG, par les choſes que nous auons demonſtrees ſur la 34 prop. 11.

THEOR. 5. PROP. V.

Les pyramides de meſme hauteur ayans baſes triangulaires, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

Soient les pyramides de meſme hauteur ABCD, EFGH, deſquelles les baſes ſont les triangles ABC, EFG. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe eſt à la baſe.



Autrement ſoit imaginé comme en la 2. p. 12. que comme la baſe ABC à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD à quelque ſolide, cõme X: ie dis qu'iceluy ſolide X eſt egal à la pyramide EFGH, autrement il ſera plus petit ou plus grand: & ſoit en premier lieu plus petit, comme de la quantité du ſolide Y. Ainſi nous imaginons que les deux ſolides X & Y, ſoient egaux à la pyramide EFGH. Maintenant par la 3. p. 12. on peut diuiſer vne pyramide en deux pyramides egales, & en deux priſmes egaux, leſquels ſeront plus grands que la moitié de la pyramide totale: Que ſi de la pyramide EFGH, on retranche plus de la moitié, ſçauoir les deux priſmes PFQRST, GQRSTV, & de chacune pyramide reſtante EPRS, STVH, encores plus de la moitié, ſçauoir deux priſmes, en continuant touſiours iuſques à ce que toutes les pyramides reſtantes apres le dernier retranchement, ſoient toutes enſemble manifeſtement plus petites que le ſolide Y: ce qui peut arriuer par la 1. p. 10. Ainſi tous les priſmes enſemble retranchez de la pyramide EFGH, ſeront plus grands que le ſolide X, puis que le reſte eſt plus petit que le ſolide Y. Pareillement ſoient retranchez autant de fois deux priſmes de la pyramide ABCD, cõme on en a retranché de la pyramide EFGH: il eſt euident par ce qui a eſté demonſtré en la precedente propoſition, que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi tous les priſmes retranchez de la pyramide ABCD ſeront à tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH:

Mais nous auons posé que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X. Et partant par la 11. prop. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD seront à tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH, comme la pyramide ABCD est au solide X. Or tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD sont plus petits qu'icelle pyramide: Et partant par la 14. prop. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH, seront plus petits que le solide X, & nous les auions tantost prouuez estre plus grands, en posant le solide X plus petit que la pyramide EFGH: partant icelle hypothese est fausse, qui nous a conduit à absurdité: Et le solide X n'estoit plus petit que la pyramide EFGH.

Soit donc plus grand, s'il est possible; & puis que comme la base ABC à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD au solide X, en permutant la base EFG, sera à la base ABC, comme le solide X est à la pyramide ABCD. Pareillement comme le solide X à la pyramide ABCD soit posé la pyramide EFGH estre à quelque autre solide, comme Y: Et par la 14. prop. 5. d'aurant que le solide X est posé plus grand que la pyramide EFGH, aussi la pyramide ABCD sera plus grande que le solide Y: & par la 11. propos. 5. comme la base EFG est à la base ABC, ainsi la pyramide EFGH à vn solide plus petit que l'autre pyramide: mais nous auons demonstré que cela estant, il s'ensuit vne absurdité, (çauoir que les prismes retranchez d'vne pyramide, estoient plus grands que la pyramide de laquelle ils sont retranchez: Partant le solide X ne peut estre plus grand que la pyramide EFGH, ny aussi plus petit: il sera donc egal. Parquoy puis qu'il a esté posé que comme la base ABC est à la

baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD eſt au ſolide X; & que par la 7. prop. 5. la pyramide ABCD eſt au ſolide X, comme à la pyramide EFGH egale à iceluy ſolide X; pareillement comme la baſe ABC ſera à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD ſera à la pyramide EFGH. Donc les pyramides de meſme hauteur, ayans baſes triangulaires, ſont entr'elles comme leurs baſes. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Par la conuerſe; Si les pyramides triangulaires ſont entr'elles comme leurs baſes: elles ſeront de meſme hauteur. Car ſi on croit que la hauteur de l'vne ſoit plus grande que l'autre, ſoit couppée d'icelle vne egale à la moindre, & du poinct de la ſection à tous les angles de la baſe, ſoient tirées des lignes droictes: & comme la baſe ſera à la baſe, ainſi la pyramide ſera à la pyramide n'agueres conſtituée: mais elle eſtoit pareillement ainſi à toute la pyradide. Donc par la 9. prop. 5. la pyramide conſtituée ſera egale à toute la pyramide, la partie au tout: ce qui eſt abſurde.

COROLLAIRE.

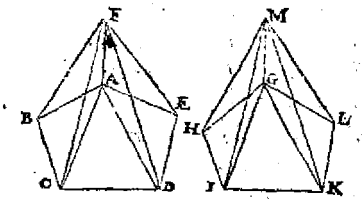
De cecy reſulte que les pyramides de meſme hauteur conſtituées ſur meſme, ou egales baſes triangulaires, ſont egales entr'elles: puis qu'elles ſont en meſme raiſon que leurs baſes, leſquelles ſont poſées egales, ou vne ſeule & meſme.

Item il s'enſuit au contraire que les pyramides triangulaires conſtituées ſur vne meſme ou egales baſes, ſont de meſme hauteur. Et que les pyramides egales, & ayans meſme hauteur, ont les baſes egales, ſi elles ne ſont vne meſme: leſquelles deux choſes nous demonſtrerons par la premiere partie du corol. par le meſme argument dont nous

auons vsé en demonſtrant la conuerſe des 30. & 31. p. 11. ſi tant ſur la hauteur, que ſur la baſe coupee eſt conſtituée vne autre pyramide, &c.

THEOR. 6. PROP. VI.

Les pyramides de meſme hauteur ayans baſes poligones, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

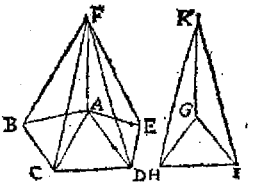


Soit la pyramide A B C D E F de meſme hauteur que la pyramide G H I K L M deſquelles les baſes A B C D E & G H I K L ſont poligones: Ie dis que comme la baſe eſt à la baſe, ainſi la pyramide eſt à la pyramide.

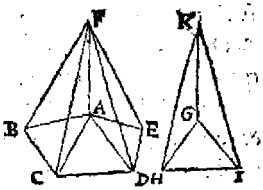
Car les baſes eſtans reduictes en triangles A B C, A C D, A D E; G H I, G I K, G K L: ſoit imaginé ſur chacun d'iceux vne pyramide de meſme hauteur que la totale. Donc puis que par la 5. prop. 12. comme la baſe A B C eſt à la baſe A C D, ainſi la pyramide A B C F eſt à la pyramide A C D F; en compoſant comme la baſe A B C D ſera à la baſe A C D, ainſi la pyramide A B C D F ſera à la pyramide A C D F: Mais derechef, par la 5. prop. 12. comme la baſe A C D eſt à la baſe A D E, ainſi la pyramide A C D F eſt à la pyramide A D E F: Donc en raiſon egale comme la baſe A B C D eſt à la baſe A D E, ainſi la pyramide A B C D F eſt à la pyramide A D E F; & partant en

composant comme la base ABCDE est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDEF est à la pyramide ADEF. Par semblable argument sera demonstré que comme la base GHIKL est à la base GKL, ainsi la pyramide GHIKLM est à la pyramide GkLM; & en changeant comme la base GkL est à la base GHIkL, ainsi la pyramide de GkLM est à la pyramide GHIKLM. Derechef puis que par la 5. prop. 12. comme la base ADE est à la base GKL, ainsi la pyramide ADEF est à la pyramide GkLM; les 4. bases ABCDE, ADE, GKL, GHIkL, seront és mesmes raisons que les 4. pyramides ABCDEF, ADEF, GkLM, GHIkLM: Parquoy en raison egale comme la base ABCDE est à la base GHIkL, ainsi la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHIkLM. Donc les pyramides de mesme hauteur ayans bases polygones, sont entr'elles comme leurs bases. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

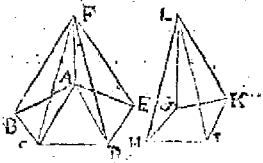


Encore que selon plusieurs Interpretes, il soit parlé en la demonstration de ceste prop. seulement des pyramides de mesme hauteur, desquelles les bases polygones ont les costez egaux en nombre: toutesfois nous demonstrerons aussi le mesme des pyramides de mesme hauteur, la base de l'vne desquelles contient plus de costez que la base de l'autre. Car soient premierement deux pyramides de mesme hauteur ABCDEF, GHIK, la base de l'vne desquelles soit polygone



sçauoir est pentagone, & de l'autre triangulaire. Ie dis que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base: Car le pentagone estant resoud en triangles, aussi la pyramide sera diuisée en pyramides egales en nombre. Et pource que par la 5. p. 12. comme la base ABC premiere quantité est à la base GHI, seconde quantité, ainsi la pyramide ABCF 3. quantité est à la pyramide GHIK 4. quantité. Et en la mesme maniere, comme la base ACD, 5. quantité est à la base GHI 2. quantité, ainsi la pyramide ACDF 6. quantité, est à la pyramide GHIK 4. quantité: par la 24. prop. 5. comme la base ABCD 1 & 5 quantitez ensemble, sera à la base GHI seconde quantité, ainsi la pyramide ABCDF 3. quantité auec la 6. sera à la pyramide GHIK 4. quantité. Derechef puis que comme la base ABCD est à la base GHI, ainsi la pyramide ABCDF est à la pyramide GHIK, comme nous venons de demonstrer: & que par la 5. prop. 12. comme la base ADE 5. quantité, est à la base GHI 2. quantité, ainsi la pyramide ADEF 6. quantité est à la pyramide GHIK 4. quantité: par la mesme 24. prop. 5 la base ABCDE sera à la base GHI, comme la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHIK: ce qui estoit proposé. En la mesme maniere faudroit touſiours proceder s'il y auoit d'auantage de triangles en la base du polygone. Or puis que comme il a esté demonstré, la base du polygone ABCDE est à la base triangulaire GHI, ainsi que la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHIK: parcillement en changeant, comme la base GHI sera à la base ABCDE, ainsi la pyramide GHIK sera à la pyramide ABCDEF. Parquoy deux pyramides, desquelles l'vne à la base polygone, & l'autre triangulaire, sont touſiours comme leurs baſes, de quelque part où l'on commence: Car encore que la

demonſtration commence au polygone & à ſa pyramide, cõme appert par la demonſtration, toutesfois en changeant il eſt permis prendre le commencement au triangle & à ſa pyramide, comme il a eſté dict.



Maintenant ſoient deux pyramides de meſme hauteur ABCDEF, GHIKL, *deſquelles les baſes ſont polygones, & sõt plus de coſtez en vne baſe qu'en l'autre: le dis derechef que la pyram. eſt à la pyramide, cõme la baſe eſt à la baſe. Car eſtant reſoud le polygone* ABCDE *és triangles* ABC, ACD, ADE: *la pyram. ſera diuiſée en autãt de pyramides. Et d'autãt que cõme la baſe triangulaire* ABC, *premiere quantité, eſt à la baſe polygone* GHIK *ſeconde quantité, ainſi la pyramide* ABCF *troiſieſme quantité, eſt à la pyramide* GHIKL *4. quantité; & comme la baſe* ACD *5 quantité eſt à la baſe* GHIK *ſeconde quantité, ainſi la pyramide* ACDF *6. quantité, eſt à la pyramide* GHIKL *4. quantité: auſſi par la 24. p. 5. comme la baſe* ABCD *premiere quantité auec la 5. ſera à la baſe* GHIK *ſeconde quantité, ainſi la pyramide* ABCDF *troiſieſme quantité auec la 6. ſera à la pyramide* GHIKL *4. quãtité. Derechef puis que comme la baſe* ABCD *premiere quantité eſt à la baſe* GHIK *ſeconde quantité, ainſi la pyramide* ABCDF *tierce quantité, eſt à la pyramide* GHIKL *4. quantité: & auſſi que comme la baſe* ADE *quinte quantité, eſt à la baſe* GHIK *ſeconde quantité, ainſi la pyramide* ADEF *ſixieſme quantité, eſt à la pyramide* GHIKL *quarte quantité: pareillement par la 24. prop. 5. comme la baſe* ABCDE *premiere quantité auec la quinte, ſera à la baſe* GHIK *ſeconde quantité, ainſi la pyramide* ABCDEF *tierce quantité auec la 6. ſera à la pyramide* GHIKL *4. quantité: ce qui eſtoit propoſé. Il faudroit touſiours proceder en la meſme maniere s'il y auoit d'auantage de triangles en la baſe.*

Or nous conuertirons tant ceſte 6. prop. que celle demonſtrée en ce ſcholie, en ceſte maniere.

Les pyramides de quelconques baſes, leſquelles ſont entr'elles comme leurs baſes, ſont en meſme hauteur.

Ce qu'on demonſtrera en la meſme maniere, que les choſes dictes au ſcholie de la 5. pr. de ce liure, ont eſté demonſtrées.

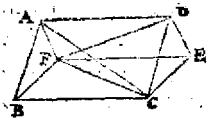
COROLLAIRE.

Il appert auſſi que les pyramides de meſme hauteur, conſtituées ſur baſes egales multilateres, ou ſur vne meſme, eſtre egales entr'elles; puis qu'elles ont meſme raiſon que leurs baſes, leſquelles ſont poſees egales, ou vne meſme.

Derechef eſt euident que les pyramides multilateres egales, & conſtruictes ſur baſes egales, ou ſur vne meſme, ont meſme hauteur. Et que les pyramides multangulaires egales, & ayans meſme hauteur, ont auſſi les baſes egales, ſi elles ne ſont vne meſme. Ce qui ſe peut demonſtrer comme nous auons dict au corol. de la 5. p. de ce liure.

THEOR. 7. PROP. VII.

Tout priſme peut eſtre diuiſé en trois pyramides egales, ayans baſes triangulaires.



Soit le priſme ABCDEF duquel les deux triangles oppoſites ABF, DCE ſont egaux & ſemblables. Ie dis qu'iceluy priſme peut eſtre diuiſé en trois pyramides egales, ayans baſes triangulaires.

Car ſi des trois parallelogrammes d'iceluy priſme, on meine les trois diametres AC, CF, FD, il eſt eui-

dent que le prisme sera diuisé en trois pyramides: monstrons qu'elles sont egales. D'autant que la diagonale AC, couppant le parallelogramme ABCD en deux egalement, les triangles ABC, ADC sont egaux: Partant la pyramide ABCF, ayant pour base le triangle ABC est egale à la pyramide ADCF, ayant pour base le triangle ADC, par la 5. prop. 12. Car icelles pyramides sont de mesme hauteur, sçauoir est de la perpendiculaire tombant du sommet F sur le plan ABCD. Par mesme raison seront egales les pyramides ADFC, EFDC, constituées sur les bases egales ADF, EFD, & soubs mesme hauteur, sçauoir de la perpendiculaire menée du sommet C sur le plan ADEF. Mais la pyramide ADCF est la mesme que la pyramide ADFC; puis que l'vne & l'autre est continuée des 4. plans ADC, ADF, ACF, DCF. Donc les trois pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ou CDEF, composans tout le prisme, sont egales entr'elles. Parquoy tous prismes peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires. Ce qu'il falloit prouuer.

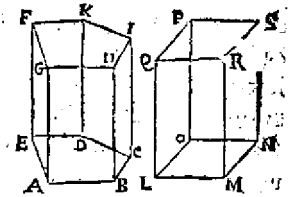
COROLLAIRE.

De cecy resulte que tout prisme est triple d'vne pyramide de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales, ou bien qu'vne pyramide est la tierce partie d'vn prisme de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales.

SCHOLIE.

Nous adiousterons icy la demonstration d'vne autre proposition, touchant les prismes qui ont au sommet les plans parallels à la base, egaux & semblables: ceste proposition est telle.

Les prismes estans sous mesme hauteur, & ayans quelcõques bases, sont entr'eux comme leurs bases.



Soïẽt deux prismes de mesme hauteur ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, *desquels les bases sont figures multilateres. Ie dis que comme la base* ABCDE *est à la base* LMNO, *ainsi est le prisme au prisme. Car si de tous les angles de chasque base on tire des lignes droictes à vn poinct du plan superieur, qui est opposé à la base, se feront deux pyramides sous mesme hauteur, ayans mesmes bases que le prisme: Et partant par le corollaire cy dessus, chaque pyramide sera la troisiesme partie de son prisme. Parquoy par la 15. prop. 5. comme la pyramide sera à la pyramide, ainsi le prisme sera au prisme: Mais la pyramide est à la pyramide, comme la base à la base, ainsi qu'il a esté demonstré à la 6. prop. Donq aussi comme la base sera à la base, ainsi le prisme sera au prisme. Ce qui estoit proposé.*

COROLLAIRE.

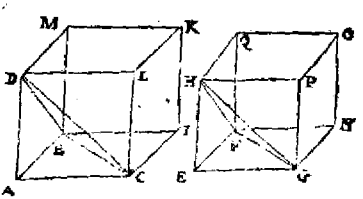
Il est manifeste par ces choses, que les prismes de mesme hauteur, & constituez sur mesme base, ou sur bases egales quelles quelles soient, sont egaux entr'eux, puis qu'ils ont mesme raison entr'eux que leurs bases, lesquelles sont vne mesme, ou bien sont egales.

Appert aussi par le contraire, que les prismes egaux, constituez sur vne mesme base, ou sur egales, sont en mesme hauteur: Et que les prismes egaux de mesme hauteur, ont aussi mesme base, ou egales. Ce qu'on demonstrera en la mesme maniere qu'a esté demonstré la conuerse de la 31. p. 11.

THEOR.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Pyramides semblables ayans bases triangulaires, sont en raison triplée de leurs costez homologues.



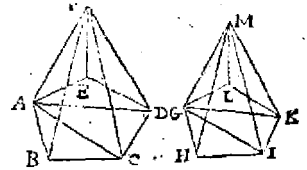
Soient les deux pyramides semblables ABCD & EFGH, ayans bases triangulaires, ABC & EFG : ie dis qu'elles sont en raison triplée des costez de mesme raison AC & EG.

Qu'ainsi ne soit. Soient acheuez les parallelipipedes Ak & EO. D'autant que les pyramides sont semblables, les trois costez AD, AB, AC, seront proportionnaux aux trois costez EH, EF, EG, & & l'angle solide A egal à l'angle solide E, par la def. des solides semblables: & par la mesme demonstration qui a esté faicte à la 27. prop. 11. les deux solides AK & EO seront semblables, ayans les trois costez AB, AD, AC, proportionnaux aux trois costez EF, EH, EG; & les oppolez seront aussi proportionaux; & par consequent les six plans proportionaux aux six plans: Mais les 2. solides Ak & EO, estans semblables, ils seront en raison triplée de leurs costez homologues AC, & EG, par la 33. proposition 11. Et comme le solide Ak est au solide EO, ainsi la pyramide

ABCD est à la pyramide EFGH : (car chacune pyramide est la sixiesme partie de son solide, d'autant que par la 28. prop. 11. chacun solide peut estre diuisé en deux prismes egaux, & chacun prisme en trois pyramides egales par la 7. prop. 12.) & partant par la 11. prop. 5. les pyramides sont aussi en raison triplée des costez de mesme raison AC, & EG. Donc les pyramides semblables ayans bases triangulaires sont en raison triplée de leurs costez homologues. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'aussi les pyramides semblables, desquelles les bases ont plus de trois costez, sont en raison triplée de leurs costez homologues.

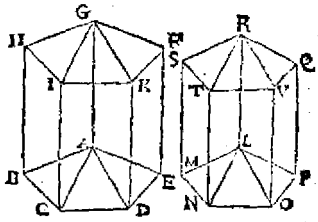


Soient les pyramides semblables A B C D E F, GHIKLM, *ayans bases rectilignes semblables de plusieurs costez. Ie dis qu'icelles pyramides sont en raison triplée des costez homologues* A B, GH. *Car si des angles* A *&* G, *on tire aux angles opposez les lignes droittes* AC, AD : GI, GK : *par la* 20 *prop.* 6. *les bases semblables seront diuisées en nombre egal de triangles semblables, sçauoir est que les triangles* ABC, ACD, ADE, *seront semblables aux triangles* GHI, GIk, GkL. *Donc puis que les pyramides sont semblables, les triangles* AFB, GMH, *sont semblables, & l'angle* FAB *egal à l'angle* MGH ; *& comme* FA *sera à* AB, *ainsi* MG *sera à* GH : *mais comme* AB *à* AC, *ainsi* GH *à* GI, *à cause de la similitude des triangles* ABC, GHI : *donc en*

raison egale, comme FA sera à AC, ainsi MG sera à GI. Derechef puis que comme AC est à CB, ainsi GI est à IH: à cause de la similitude des triangles ABC, GHI: & comme GB à CF, ainsi IH à IM, puis que à cause de la similitude des pyramides, les triangles BCF, HIM, sont semblables: aussi par raison egale, comme AC sera à CF, ainsi GI sera à IM: & partant puis que comme FA à AC, ainsi MG à GI; & comme AC à CF, ainsi GI à IM: pareillement en raison egale, comme FA sera à FC, ainsi MG à MI. Parquoy par la 5. prop. 6. les triangles AFC, GMI, seront equiangles, & partant semblables. Mais les triangles AFB, BFC, ABC sont aussi semblables aux triangles GMH, HMI, GHI. Donc par la 8. def. 11. les pyramides ABCF, CHIM, sont semblables. Par mesme raison seront semblables les pyramides ACDF, GIKM: Item ADEF, GKLM. Parquoy par la 8. p. 12. les pyramides ABCF, ACDF, ACDE, seront aux pyramides GHIM, CIKM, GKLM, chacune à la sienne, en raison triplée des costez homologues AB, CD, DE, à GH, IK, KL, chacun au sien. Veu donc qu'à cause de la similitude des bases ABCDE, GHIKL, il y a vne seule & mesme raison de AB, CD, DE à GH, IK, KL: aussi les pyramides ABCF, ACDF, ADEF, auront aux pyramides GHIM, GIKM, GKLM, vne seule & mesme raison, c'est à sçauoir triplee. Et par la 12. p. 5. comme vne seule pyramide ABCF est à vne seule pyramide GHIM, ainsi toutes les pyramides, sçauoir est la pyramide ABCDEF, est à toutes les pyramides, sçauoir est à la totale GHIKLM. Parquoy puis que par la 8. prop. 12. la pyramide ABEF est à la pyramide GHIM en raison triplée des costez homologues AB, GH; aussi la pyramide ABCDEF sera à la pyramide GHIKLM en la raison triplée des mesmes costez homologues AB, GH. Ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

Par mesme raison les prismes semblables sont en raison



triplée de leurs costez homologues. Car soient deux prismes semblables AB CDEFGHIk, LMNO PQRSTV : Ie dis qu'ils sont en raison triplée des costez homologues. Car si des angles A & L on tire les lignes AC, AD, LN, LO ; par la 20. prop. 6. les triangles ABC, CAD, DEA, seront semblables aux triangles LMN, LNO, OPL. Semblablement si des angles G & R, on tire les lignes GI, GK, RT, RV ; les triangles GHI, GIK, GKF, seront aussi semblables aux triangles RST, RTV, RVQ, & aux susdicts, puis que par la def. du prisme, tous les plans opposites des prismes sont semblables. Et d'autant qu'à cause de la similitude des prismes, les parallelogrammes CH, NS sont semblables ; comme CI sera à CB, ainsi TN sera à NM : mais comme BC est à CA, ainsi NM est à NL, à cause de la similitude des triangles. Donc par raison egale, comme CI sera à CA, ainsi TN à NL. Derechef pource que l'angle solide N, est egal à l'angle solide C, à cause de la similitude des prismes, si celuy cy est superposé à l'autre l'angle MNO conuiendra à l'angle BCD, & l'angle TNM à l'angle ICB, & l'angle TNO à l'angle ICD. Mais aussi la ligne droicte NL conuient à la ligne CA, pource que les angles LMN, BCA sont egaux. Donc les angles ICA, TNL sont egaux & partant puis que les costez d'alentour iceux, ont esté demonstrez proportionaux, les parallelogrammes CG, NR, seront semblables. Mais aussi les parallelogrammes CH, HA, sont semblables aux parallelogrammes NS, SL, & les triangles ABC, GHI, aux triangles LMN, RST. Donc les prismes ABCIGH, LMNTRS, sont semblables, par la 8. def. 11. On demon-

strera en la meſme maniere que les priſmes CDAGIK, NOLTDV, *ſont ſẽblables, cõme auſſi les priſmes* AEDKGF, LPOVRQ. *Parquoy les priſmes* ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, *par les choſes demonſtrées à la 34. p. 11. ſont aux priſmes* LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, *chacun au ſien, en raiſon triplée des coſtez homologues* BC, CD, DE, *à* MN, NO, OP; *chacun au ſien. Et partant en la meſme maniere que nous auons demonſtré cy deſſus des pyramides multangles, on demonſtrera que les priſmes* ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, *ſont en raiſon triplée des coſtez homologues* BC, MN.

De toutes ces choſes ſe collige, que les pyramides multangles ſemblables, ſe diuiſent en pyramides triangulaires ſemblables, & en nombre egal, & homologues aux toutes. Car cecy eſt manifeſte par la demonſtration du preced. corol.

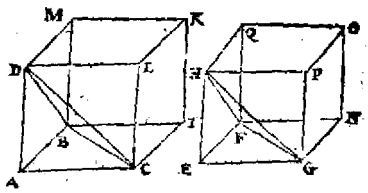
Se collige auſſi que les priſmes multangulaires ſemblables, ſe diuiſent en priſmes ſemblables, ayans baſes triangulaires, & en nombre egaux, & homologues aux tous, comme appert par la demonſtration de ce ſcholie.

THEOR. 9. PROP. IX.

Des pyramides egales, ayans baſes triangulaires, leurs hauteurs ſont reciproques aux baſes : Et les pyramides ayans baſes ttiangulaires reciproques à leurs hauteurs, ſont egales.

Soient les deux pyramides egales ABCD, & EFGH, ayans baſes triangulaires : ie dis que les baſes d'icelles ſont reciproques à leurs hauteurs, c'eſt à

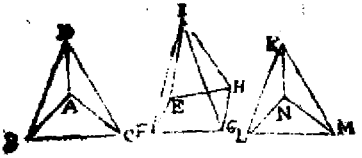
dire que comme la base ABC à la base EFG, ainsi la hauteur du point H à la hauteur du poinct D.



Qu'il ne soit ainsi. Soient achevez les parallelipipedes Ak, EO, & comme en la precedente, il sera euident que chacun d'iceux parallelipipedes sera sextuple de sa pyramide. Et les deux pyramides estans egales, iceux solides AK, EO, seront egaux: & par la 34.p.11. ils auront les hauteurs reciproques aux bases. (C'est à dire que comme la hauteur du poinct D à la hauteur du poinct H, ainsi la base EN à la base AI) Mais comme EN à AI, ainsi sa moictié le triangle EFG, à la moictié de AI, sçauoir le triangle ABC; & partant par la 11. p. 5. comme la hauteur du poinct D à la hauteur du poinct H, ainsi le triangle EFG au triangle ABC.

Pour la seconde partie: Si la hauteur du poinct D est à la hauteur du poinct H, comme le triangle EFG, est au triangle ABC: ie dis que les pyramides ABCD, EFGH seront egales. Car il est euident comme cy dessus que la hauteur du poinct D, sera à la hauteur du poinct H, comme la base EN, à la base AI (d'autant qu'elles sont doubles des triangles EFG & ABC): ainsi les parallelipipedes AK, EO, auront les hauteurs reciproques aux bases: & par la 34.prop. 11. ils seront egaux; & par consequent leurs sixiesmes parties seront aussi egales, sçauoir les pyramides ABCD, & EFGH: Parquoy des pyramides egales ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

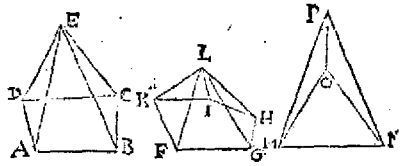
SCHOLIE.



Les pyramides egales, desquelles les baſes ne ſont triangulaires, ont auſſi les baſes & hauteurs reciproques: & les pyramides deſquelles les baſes ne ſont triangulaires, & ont leurs baſes reciproques à leurs hauteurs, ſont egales. Car ſoient premierement deux pyramides egales, l'vne deſquelles ABCD ait la baſe triangulaire, mais l'autre EFGHI ne l'ait pas. Soit faict le triangle KLM egal à la baſe non triangulaire EFGH; puis ſur iceluy triangle ſoit conſtruicte la pyramide KLMN, de meſme hauteur que la pyramide EFGHI. Or d'autant que les pyramides EFGHI, KLMN, ont les baſes egales, & meſme hauteur; elles ſeront egales, par les choſes demonſtrées au ſcholie de la 6. p. 12. Mais la pyramide EFGHI a eſté poſée egale à la pyramide ABCD; donc auſſi les pyramides ABCD, KLMN ſeront egales: Parquoy puis qu'elles ont les baſes triangulaires, par la 9. p. 12. comme la baſe ABC ſera à la baſe KLM, ou à ſon egale EFGH, ainſi la hauteur de la pyram. KLMN, c'eſt à dire la hauteur de la pyram. EFGH, ſera à la hauteur de la pyram. ABCD: & pâtrãt des pyram. egales ABCD, EFGHI, les baſes & hauteurs sõt reciproques.

Mais maintenant d'icelles pyramides, les baſes & hauteurs ſoient reciproques. Ie dis qu'icelles pyramides ſont egales. Car demeurant la meſme conſtruction faicte cy deſſus: puis que la baſe ABC eſt poſee eſtre à la baſe EFGH, comme la hauteur de la pyramide EFGHI eſt à la hauteur de la pyramide ABCD; auſſi la baſe ABC ſera à la baſe KLM, comme la hauteur de la pyramide KLMN ſera à la hauteur de la pyramide ABCD. Parquoy par la 9. p. 12. les pyramides ABCD, KLMN, ſont egales. Mais comme nous

auons demonſtré au ſcholie de la 6. prop. 12. la pyramide kLMN eſt egale à la pyramide EFGHI : donc auſſi la pyramide ABCD ſera egale à la pyramide EFGHI. Ce qui eſtoit proposé.



Soient maintenant les pyramides egales ABCDE, FGHIkL, ayãs baſes multãgulaires. Soit faict derechef le triangle MNO, egal à la baſe ABCD; & la pyramide MNOP de meſme hauteur que la pyramide ABCDE. Donc par les choſes demonſtrées au ſcholie de la 6. prop. 11. la pyramide MNOP ſera egale à la pyramide ABCDE : laquelle a eſté poſée egale à la pyramide FGHIkL : donc auſſi la pyramide MNOP ſera egale à la pyramide FGHIkL. Parquoy comme nous auons demonſtré cy deſſus, ainſi que la baſe MNO, c'eſt à dire la baſe ABCD, ſera à la baſe FGHIk, ainſi la hauteur de la pyramide FGHIkL ſera à la hauteur de la pyramide MNOP, c'eſt à dire à la hauteur de la pyramide ABCDE : Et partant des pyramides egales ABCDE, FGHIkL, les baſes & hauteurs ſont reciproques.

Mais ſoient maintenant reciproques les baſes & hauteurs d'icelles pyramides : on demonſtrera comme deſſus qu'elles ſont egales.

Or tout ce que nous auons demonſtré cy deſſus peut auſſi conuenir à quelconque priſmes. Car ſi les priſmes eſtoient egaux, auſſi les pyramides de meſme hauteur qu'iceux, ayans les meſmes baſes, ſeront egales, puis que d'iceux priſmes par le corol. de la 7. p. 12. elles ſont les tierces parties, ou les deux tierces parties par le ſcholie de la meſme

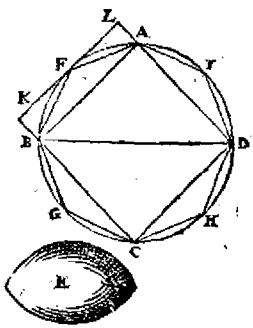
prop. Parquoy comme nous auons demonſtré n'agueres, les baſes & hauteurs d'icelles pyramides ſeront reciproques. Veu donc que ces baſes & hauteurs ſont les meſmes que des priſmes, les baſes & hauteurs des priſmes ſeront pareillement reciproques.

Derechef, ſi les baſes & hauteurs des priſmes ſont reciproques, les baſes & hauteurs des pyramides ayans meſmes baſes & hauteurs que les priſmes, ſeront auſſi reciproques. Parquoy, comme il a eſté demonſtré, les pyramides ſont egales; & partant auſſi les priſmes, puis que d'icelles pyramides ils ſont triples, ou ſeſquialtéres. Ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 10. PROP. X.

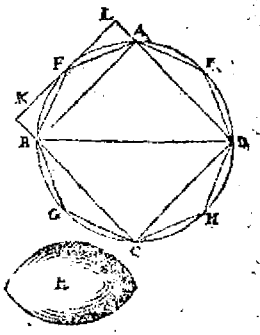
Tout cone eſt la troiſieſme partie du cylindre ayant baſe egale, & de meſme hauteur.

Soit vn cylindre & vn cone, tous deux de meſme hauteur, & ayans vne meſme baſe, ſçauoir le cercle ABC D: Ie dis que le cylindre eſt triple du cone.



Autrement il ſera plus grand, ou plus petit que le triple d'iceluy cone. Soit premieremẽt plus grand s'il eſt poſſible, ſçauoir de la quantité du ſolide E, c'eſt à dire que ſi du cylindre, ayãt pour baſe le cercle ABCD eſt retranché le ſolide E, le reſte ſera triple du cone,

ayant pour base le mesme cercle ABCD. Maintenant dans le cercle soit inscrit le quarré A B C D, diuisé en deux triangles par la diagonalle BD, & sur iceux triangles soient imaginez estre esleuez deux prismes de mesme hauteur que le cylindre: Et parce que le quarré est plus de la moitié du cercle, il est euident qu'iceux deux prismes seront plus de la moitié du cylindre. Que si les segmens restans du cylindre, (les deux prismes estans soustraits) sont encores plus grands que le solide E, sur les bases d'iceux segmens soient faicts les quatre triangles Isosceles AFB, BGC, CHD, DIA, & sur iceux soient imaginez estre esleuez quatre prismes de mesme hauteur que le cone ou cylindre, dont la base est le cercle ABCD. Il est euident qu'iceux triangles Isosceles sont plus de la moitié des bases des segmens restans du cylindre; & par consequent qu'iceux quatre prismes seront plus de la moitié d'iceux quatre segmens: Que si les huict petits segmens restans du cylindre ne sont plus petits que le solide E, soit tousiours en ceste façon soustrait plus de la moitié de ce qui restera, iusqu'à ce que par la 1. prop. 10. les segmens restans soient plus petits que le solide E. Et pour abreger soient iceux huict petits segmens plus petits qu'iceluy solide E: Il est donc manifeste que la colomne composee de ces six prismes, ayant pour base le poligone inscrit au cercle ABCD, & de mesme hauteur que le cylindre donné; sera plus que triple d'iceluy cone, par ce qui



a esté dit cy-dessus. Or d'autant que chacun prisme est triple de sa pyramide de mesme hauteur, & ayant base egale, (car il peut estre diuisé en trois telles pyramides egales par la 7. prop. 12.) il s'ensuit que tous iceux prismes faisans la colomne, ayant pour base le polygone inscrit au cercle ABCD, (c'est à dire icelle colomne de mesme hauteur que le cylindre I) est triple de toutes les six pyramides, faisant la seule pyramide, ayant le mesme poligone pour base, & de mesme hauteur qu'icelle colomne. Partant icelle pyramide sera plus grande que le cone de mesme hauteur, ayant le cercle ABCD pour base: ce qui est impossible, n'estant la pyramide que partie du cone. Donc le cylindre n'estoit pas plus grand que le triple du cone.

Soit donc plus petit, s'il est possible, sçauoir de la quantité du solide E, c'est à dire que si on retranche le solide E du cone, que le residu soit la troisiesme partie du cylindre. Maintenant du cone, ayant pour base le cercle ABCD, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de mesme hauteur, ayant pour base le quarré ABCD, & du residu, sçauoir des quatre segmens F, G, H, I, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de chacun segment, de mesme hauteur qu'iceluy segment, & ayant pour base le triangle Isoscelle en iceluy segment: soit continué ce retranchement iusques à ce que les segmens restans soient plus petits que le solide E: ce qui doit arriuer par la 1. prop. 10. Soient donc pour abreger iceux huict petits segmens plus petits que le solide E: il est donc euident que la pyramide de mesme hauteur que le cone, ayant iceluy octogone pour base, est plus grande que le tiers du cylindre donné, d'autant qu'elle est plus grande que le cone, apres que

d'iceluy on a retranché le solide E. Or iceluy cone ainsi rescinde est le tiers du cylindre donné, & la pyramide est aussi, (comme il a esté dit cy-dessus) le tiers de la colomne de mesme hauteur, ayant le mesme octogone pour base: Partant icelle colomne seroit plus grande que le cylindre donné, duquel elle est partie: Ce qui est impossible. Donc le cylindre donné n'estoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone: il faut donc qu'il soit egal. Parquoy, tout cone est la troisiesme partie du cylindre ayant base egale, & de mesme hauteur. Ce qui estoit à demonstrer.

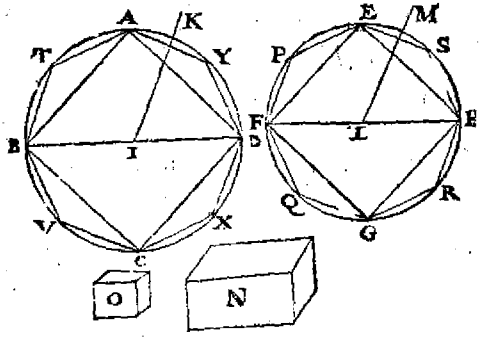
THEOR. II. PROP. XI.

Les cones, & les cylindres de mesme hauteur, sont l'vn à l'autre comme leurs bases.

Soient deux cones de mesme hauteur, desquels les bases sont les cercles ABCD & EFGH; les diametres BD & FH, leurs axes ou hauteurs IK & LM. Ie dis que comme le cercle ABCD est au cercle EFGH, ainsi le cone BK est au cone FM; c'est à dire que si on imagine que comme le cercle est au cercle, ainsi le cone BK soit à quelque autre solide, comme N: qu'iceluy solide N sera egal au cone FM.

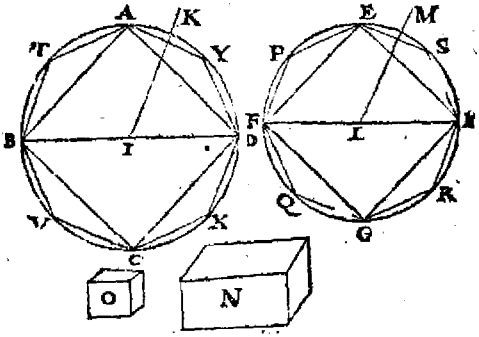
Autrement, il sera plus petit ou plus grand: Soit premierement plus petit, & s'il est possible de la quantité du solide O: ainsi les deux solides N & O seront egaux au cone FM. Maintenant du cone FM comme en la precedente, soit retranché plus

de la moitié, sçauoir vne pyramide de mesme hauteur que le cone, ayant pour base le quarré FGH E: & du residu encores plus de la moitié, sçauoir



quatre pyramides de mesme hauteur que le cone, ayans pour base les quatre triangles Isosceles EPF, FQG, FQH, GRH, HSE, en continuant touſiours iusques à ce que par la 1. propos.10. le residu soit plus petit que le solide O: & soit iceluy residu pour abreger les huicts petits segmens: il s'ensuit que la pyramide FM de mesme hauteur que le cone FM, & ayant pour base l'octogone EPFQG RHS, sera plus grande que le solide N. Dans le cercle ABCD, soit inscrit vn poligone semblable au poligone inscrit dans la base circulaire EFGH, & sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyramide de mesme hauteur que le cone Bk. Or par le corol. de la 2.propo.12.comme le cercle ABCD est au cercle EFGH, ainsi le poligone TVXY est au poligone PQRS: mais comme le cercle ABCD au cercle EFGH, ainsi le cone BK est au solide N, & par la 6.p.12. comme le poligone au poligone, ainsi la pyramide

à la pyramide de meſme hauteur que les cones: & partant par la 11. prop. 5. la pyramide ATBVCXDYk ſera à la pyramide EPFQGRHSM, comme le cone BK au ſolide N. Mais la pyramide ATBVCXDYG eſt plus petit que le cone BK, la partie que le tout: Donc auſſi par la 14. prop. 5. la pyramide EPFQGRHSM ſera moindre que le ſolide N. Mais elle a eſté demonſtrée auſſi plus grande: ce qui eſt abſurde. Donc le ſolide N n'eſtoit pas plus petit que le cone FM, puis que le poſant tel, il nous a conduit à abſurdité.



Soit donc plus grand s'il eſt poſſible: & ſoit en permutant comme le ſolide N au cone BK, ainſi le cercle EFGH au cercle ABCD: & comme iceluy ſolide N au cone BK, ſoit auſſi le cone FM à quelque autre ſolide, comme O: Et par la 14. prop. 5. puis que le ſolide N eſt plus grand que le cone FM, auſſi le cone BK ſera plus grãd que le ſolide O. Parquoy puis que comme le cercle EFGH eſt au cercle ABCD, ainſi le ſolide N eſt au cone Bk: par la 11. prop. 5. comme le cercle EFGH eſt au cercle ABCD, ainſi

le cone FM au solide O, plus petit que le cone BK: ce que tantost nous auons monstré estre impossible. Donc le solide N n'est pas plus grand ne plus petit que le cone FM, ains egal. Parquoy puis qu'on a posé la base ABCD estre à la base EFGH, ainsi que le cone ABCDk au solide N: & par la 7. propositi. 5. comme le cone ABCDk est au solide N, ainsi est le mesme cone ABCDk au cone EFGHM: pareillement comme la base ABCD sera à la base EFGH, ainsi le cone ABCDk sera au cone EFGHM.

Ce que nous auons prouué des cones de mesme hauteur, se doit aussi entendre des cylindres de mesme hauteur: d'autant que par la 10. prop. 12. le cylindre est triple de son cone de mesme hauteur, & ayant base egale. Que si le cone est au cone comme la base à la base, aussi le triple du cone sera au triple du cone, comme la base à la base par la 15. prop. 5. c'est à dire le cylindre au cylindre, comme la base à la base. Donc les cones & cylindres de mesme hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

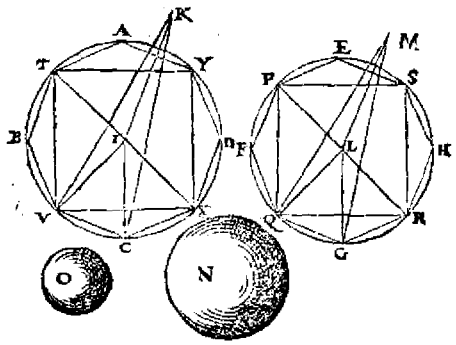
De cecy resulte que les cones & cylindres de mesme hauteur, constituez sur mesme base ou sur bases egales, sont aussi egaux.

THEOR. 12. PROP. XII.

Les cones, & les cylindres semblables, sont l'vn à l'autre en raison triplee des

diametres de leurs baſes.

Soient ſemblables cones & cylindres, ayans pour baſes les cercles ABCD, EFGH, mais les axes d'iceux ſoient IK, LM; & les diametres des baſes TV,

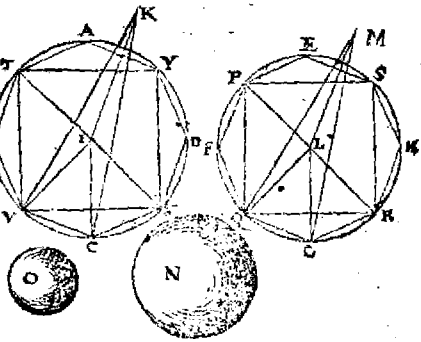


PR. Ie dis que le conê duquel la baſe eſt le cercle ABCD, mais le ſommet K, eſt au cone ayant pour baſe le cercle EFGH, & pour ſommet le poinct M, en raiſon triplee du diametre TX au diametre PR, c'eſt à dire que ſi on imagine comme aux precedentes, que le cone ABCDK ſoit à quelque ſolide, comme à N, en raiſon triplee du diametre Tk au diametre PR. Ie dis que le ſolide N eſt egal au cone EFGHM.

Autrement, il ſera plus grand ou plus petit. Soit premierement plus petit, ſçauoir de la quantité du ſolide O: Donc les deux ſolides O & N ſeront egaux au cone EFGHM: & comme en la precedente ſoit faicte detraction de plus de la moitié du cone EFGHM, & du reſidu encore plus de la moitié, iuſques à ce que par la 1. prop. 10. les reſtes (c'eſt à ſçauoir pour abreger les huict petits ſegmens, qui ſont à l'entour

de

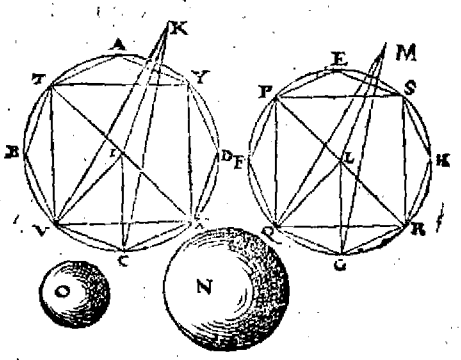
de la pyramide à la base octogone EPFQGRSM, ou de plus s'il est besoin) soient plus petits que le solide O: Il est euident qu'icelle pyramide à la base poligone FM, sera plus grande que le solide N. Maintenant dans le cercle ABCD soit inscrit vn mesme poligone que le plus grand qui soit inscrit au cercle EFGH, sçauoir ATBVCXDY; & sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyramide de mesme hauteur que le cone BK, & ayant tiré les lignes VI, CI; QL, GL; soient menees les lignes QM, CM; VK, CK, afin d'auoir les deux pyramides VCIk, QLGM. Il est manifeste que la pyramide ATBVCXDYK est composee d'autant de pyramides egales, qu'il y a de costez au poligone inscrit dans le cercle, (c'est à sçauoir qu'icelle pyramide totale VICk est composee de huict pyramides egales & semblables à la pyramide de mesme hauteur



que la totale.) Le mesme se peut dire que l'autre pyramide totale EPFOGRHSM est composee de huict pyramides egales & semblables à la pyramide QLGM, de mesme hauteur que sa totale. Mais d'autant que les cones Bk & FM sont semblables par

la definition des cones semblables, comme le diametre TX est au diametre PR; & partant par la 15. prop. 5. comme le demy diametre VI est au demy diametre QL, ainsi l'axe Ik est à l'axe LM: & en permutant comme le demy diametre VI sera à l'axe Ik, ainsi le demy diametre QL est à l'axe LM: & les angles VIK & QLM estans droicts, (car les cones sont posez droicts; & par consequent les axes d'iceux, sont aussi à droicts angles sur leurs bases) par la 6. prop. 6. le triangle VIk sera equiangle au triangle QLM. Item CIk sera aussi equiangle à GLM, & par la 4. prop. 6. ils auront les costez proportionaux, & seront semblables. Item VI est à CI comme QL à GL, (estans chacun egaux) & l'angle I egal à l'angle L, (ayans chacun la huictiesme partie de sa circonference pour base) & partant par la 6. propos. 6. les triangles VIC, QLG, seront equiangles: partant semblables: Item VC est à VI, comme QG à QI, (d'autant que les triangles VIC, & QLG sont semblables) & pour la mesme raison VI est VK comme QL à QM; & en raison egale VC sera à VK, comme QG à GM: Et par mesme discours VC est à CK, comme QG à GM: Et les egales VK & Ck, seront l'vne à l'autre, comme les egales QM à GM: Et partant par la 5. propos. 6. les triangles VkC, QMG, seront equiangles, & semblables: & par la deff. des pyramides semblables, les deux pyramides VICK, & QLGM, seront semblables: Et par la 8. prop. 12. elles seront en raison triplee de leurs costez homologues, sçauoir des demy diametres VI & QL. Par mesme discours on prouuera les sept autres pyramides de la totale ATBVCXDYK, proportioneles à vne chacune des sept autres pyramides de la totale EPFQGRHSM: Et partant par la 12. prop. 5. les toutes

seront aux toutes, comme l'vne d'icelles est à l'vne d'icelles: C'est à dire que toute la pyramide BK est à toute la pyramide FM, en raison triplee du demy diametre VI au demy diametre QL, ou bien du diametre TX, au diametre PR; puis que comme VI est à QL, ainsi TX est à PR, par la 15. prop. 5. Mais par nostre hypothese le cone BK est au solide N, aussi en raison triplee des deux diametres TX, PR: Et partant par la 11. prop. 5. le cone BK sera au solide N, comme la pyramide TBVCXDYk à la pyramide EPFQGRHSM. Parquoy puis que le cone Bk, est plus grand que la pyramide BK, le tout que la partie, aussi par la 14. p. 5. le solide N sera plus grand que la pyramide FM: & il a esté demonstré estre aussi moindre. Ce qui est absurde. Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cone FM, puis que le posant tel il nous a conduit à l'absurdité.



Soit donc maintenant le solide N, plus grand que le cone EFGHM, s'il est possible. D'autant qu'on a posé que le cone ABCDK est au solide N en raison triplee du diametre TX au diametre PR, & la pyramide BK est à la pyramide FM en raison triplee

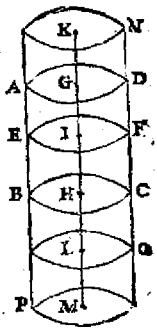
des mesmes diametres, comme nous auons demonstré par la 11. prop. 5. comme le cone Bk sera au solide N, ainsi la pyramide Bk à la pyramide FM : & en permutant comme N au cone Bk, ainsi la pyramide FM à la pyramide Bk. Parquoy puis que par le corol. de la 8. prop. 12. la pyramide FM est à la pyramide Bk en raison triplee des costez homologues QG à VG : c'est à dire du diametre PR au diametre TX : pareillement le solide N sera au cone BK en raison triplee des mesmes diametres PR à TX. Soit posé que comme N est au cone BK, ainsi le cone FM au solide O. Donc aussi le cone FM sera au solide O en raison triplee du diametre PR au diametre TX. Et puis que le solide N. a esté posé plus grand que le cone FM : par la 14. prop. 5. le cone BK sera aussi plus grand que O. Parquoy le cone FM sera au solide O moindre que le cone Bk, en raison triplee du diametre TR au diametre TX : ce qui est absurde. Car il a esté demonstré cy dessus qu'vn cone ne peut estre à vn solide moindre qu'vn autre cone, en raison triplee des diametres des bases d'iceux cones. Donc le solide N n'est pas plus grand ny plus petit que le cone E F G H M : il est donc egal. Parquoy par la 7. propos. 5. le cone ABCDK à mesme raison au cone EFGHM qu'au solide N. Et partant puis qu'on a posé le cone ABCDK estre à N en raison triplee des diametres TX & PR : le cone ABCDk sera aussi au cone EFGHM en la raison triplee des mesmes diametres.

Ceste preuue se doit aussi entendre des cylindres semblables : car leurs cones estans en raison triplee des diametres, par la 15. propo. 5. les cylindres qui sont triples d'iceux cones, seront aussi l'vn à l'autre en raison triplee de leurs diametres. Donc les

cones, & les cylindres semblables sont l'vn à l'autre en raison triplee des diametres de leurs bases. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si vn cylindre est couppé par vn plan parallel, aux plans opposez d'iceluy cylindre, les segmens du cylindre sont l'vn à l'autre comme les segmens de l'axe.



Soit le cylindre ABCD, couppé par le plan EF, parallel aux deux plãs opposez AD & BC, lequel couppe l'axe GH en I. Ie dis que le segment de cylindre AEFD, est au segment de cylindre EBCF, comme l'axe GI, est à l'axe IH.

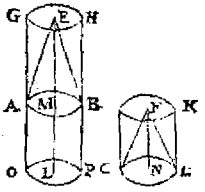
Qu'il ne soit ainsi : apres auoir continué l'axe GH de part & d'autre, soit faicte Gk egale à GI : & de l'autre costé HL, LM egales à IH: Et soit imaginé le cylindre ABCD, continué d'vn costé iusques au poinct k, & de l'autre iusques au poinct M. Il est euident que tous les cylindres AN, ED, BF, BO, PO, sont tous sur bases egales: & par le corol. de la 11. propos. 12. les deux qui ont les axes egaux Gk, GI, (c'est à dire qui sont de mesme hauteur) sont egaux entr'eux : Item les trois BF, BO, PO, estans de mesme hauteur, sont aussi egaux entr'eux : Ainsi il est euident que l'axe Ik est

autant multiplice de l'axe IG, que le cylindre EN, est multiplice du cylindre ED. Pareillement que l'axe IM est autant multiplice de l'axe IH, que le cylindre PF, est multiplice du cylindre BF; & partant si l'axe IK (multiplice de IG premiere grandeur) est egal, plus grand, ou plus petit que l'axe IM, (multiplice de IH seconde grandeur) aussi le cylindre EN (multiplice du cylindre ED troisiesme grandeur) sera egal, plus grand, ou plus petit que le cylindre PF, (multiplice du cylindre BF 4. grandeur) & ce en quelconque multiplication: & partant par la 6. def. 5. l'axe GI sera à l'axe IH, comme le cylindre ED au cylindre BF. Parquoy si vn cylindre est couppé par vn plan parallel aux plans oppoſez d'iceluy cylindre, &c. Ce qui estoit à demonstrer.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Les cones, & les cylindres ayans baſes egales, sont l'vn à l'autre, comme leurs hauteurs.

Soient sur baſes egales AB, CD, les deux cones ABE, CDF; & les deux cylindres ABGH, CDIK, desquels les axes & hauteurs soient ME, NF. Ie dis que le cone ABE est au cone CDF; & le cylindre ABGH au cylindre CDIK, comme la hauteur ME est à la hauteur NF.



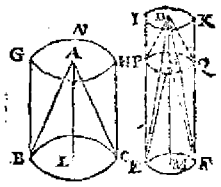
Qu'il ne soit ainsi: Soit continué l'axe EM, iusques au poinct L, & soit faicte ML egale à FN; &

soit imaginé le cylindre AH cõtinué iusques au plan OP parallel à AB, & passant par le poinct L. Et d'autant que le plan AB couppe le total cylindre OPGH, estant parallel aux deux plans oppoſez OP, GH par la 13. prop. 12. les cylindres AH, AP, seront l'vn à l'autre comme les axes EM & ML : Mais ML est egal à FN, & la base AB egale à la base CD : Donc par le corol. de la 11. p. 12. le cylindre AP sera au cylindre Ck : Partant comme EM sera à NF, ainsi le cylindre AH au cylindre Ck. Et d'autant que par la 10. prop 12. les cones ABF, CDE, sont tierces parties des cylindres AH, Ck; ils auront meſme raiſon qu'iceux cylindres, par la 15. p. 5. Et partant le cone ABE sera pareillement au cone CDF, comme la hauteur ME à la hauteur NF. Donc les cones & cylindres conſtituez ſur baſes egales, ſont entr'eux, comme leurs hauteurs. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEOR. 15. PROP. XV.

Aux cones, & aux cylindres egaux, les hauteurs ſont reciproques aux baſes: Et les cones & cylindres ſont egaux, deſquels les hauteurs ſont reciproques aux baſes.

Soient egaux les cones ABC, DEF; & les egaux cylindres BGHC, EIKF, deſquels les baſes ſoient BC, EF; leurs axes ou hauteurs AL, DM. Ie dis que les baſes ſont reciproques aux hauteurs; c'eſt à dire que comme la baſe BC eſt à la baſe EF, ainſi la hauteur DM à la hauteur AL.



Car premierement si DM est egale à AL ; les cylindres estans egaux, il est euident par la 11. prop. 12. que la base sera egale à la base. Que si MD est plus grande que AL, soit retranchee MO egale à AL ; Et soit coupé le cylindre EK, par le plan PQ, parallel à EF, & passant par le point O. Donc par la 14. prop 12. le cylindre EK sera au cylindre EQ, comme la hauteur MD à la hauteur MO : & partant par la 7. & 11. prop. 5. le cylindre BH egal à iceluy EK, sera au cylindre EQ, comme MD est à MO : & par la 11. prop. 12. comme le cylindre BH est au cylindre de mesme hauteur EQ, ainsi la base BC à la base EF : Et partant par la 11. prop. 5. comme la base BC à la base EF, ainsi la hauteur MD à la hauteur MO, ou LA son egale. Donc les cylindres egaux BH, EK ont les bases & les hauteurs reciproques.

Par mesme discours on prouuera que les bases & hauteurs des cones egaux ABC, DEF, sont reciproques ; si on construit deux cones sous les hauteurs MO, OD, comme appert en la figure.

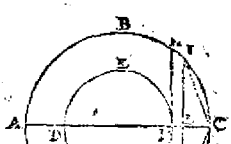
Maintenant, soient les bases reciproques aux hauteurs : Ie dis que les cylindres BH & EK sont egaux. Car ayant construict comme dessus, puis que la base BC, est à la base EF, comme la hauteur MD à la hauteur LA, ou MO son egale : Et par la 11. prop. 12. comme la base BC, à la base EF, ainsi le cylindre BH au cylindre de mesme hauteur EQ : Item par la 14. propo. 12. comme la hauteur MD à la hauteur MO, ainsi le cylindre EK au cylindre EQ : par la 11. prop. 5. les deux cylindres BH & EK, auront mesme

raiſon au troiſieſme EQ, l'vn comme l'autre: Et par la 9. p. 5. ils ſeront egaux.

Quant aux cones qui ont auſſi leurs baſes & hauteurs reciproques, ils ſeront par le meſme diſcours demonſtrez egaux. Ce qui eſt toutesfois aſſez euident, puis qu'ils ſont par la 10. p. 12. tierces parties des cylindres. Parquoy aux cones, & aux cylindres egaux, les hauteurs ſont reciproques aux baſes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBL. 1. PROP. XVI.

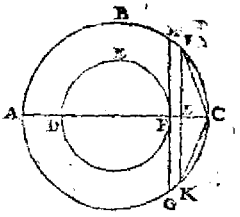
Deux cercles inegaux eſtans à l'entour d'vn meſme centre; inſcrire au plus grand cercle vn polygone equilateral, ayant le nombre des coſtez pair, & lequel ne touche point le plus petit cercle.



Soient deux cercles inegaux A B C, & D E F, tous deux ſur vn meſme centre: Il faut dans le plus grand ABC, inſcrire vn polygone equilateral, duquel les coſtez ſoient nombre pair, & ne touchent point la circonference du plus petit cercle DEF.

Soit mené par le centre d'iceux cercles le diametre commun AC, couppant le petit cercle au poinct F: Et d'iceluy poinct ſoit menée HFk perpendiculaire au diametre DF, rencontrant la circonference du

grand cercle aux poincts H & G : & laquelle touchera le cercle DEF en F par le corol. de la 16. prop. 3. Item soit couppée la demy circonference ABC en deux egalement ; Et la moitié encores en deux egalemẽt, en continuant touſiours iuſques à ce qu'on vienne à vn arc plus petit que l'arc HG : ce qui eſt poſſible par la 1. prop. 10. Soit donc iceluy plus petit arc IC, & ſoit tirée la ligne droicte ſubtendante IC. Ie dis qu'icelle ligne droicte IC eſt vn coſté du polyg. requis. Car puis que le demy cercle & autres arcs d'iceluy ont touſiours eſté diuiſez par moitié iuſques à l'arc IC : il eſt euident qu'iceluy arc eſt contenu preciſément certain nombre de fois en la circonference du cercle, & en nombre pair ; & par conſequent que la ligne droicte IC ſera certain nombre de fois egalement dans iceluy cercle ABC, & en nombre pair. Partant ſera deſcrit dans le cercle ABC vn polygone equilateral & de coſtez pair. Et qu'il ne touche le cercle DEB, on le demonſtre ainſi : De I ſoit menée IK perpendiculaire à AC, couppant icelle AC en L. D'autant que les angles HFC, ILF ſont droicts, les lignes GH, IK ſeront paralleles par la 28. propoſit. 1. Parquoy puis que la ligne droicte GH touche le cercle DEF au ſeul poinct F ; la ligne droicte IK ſera totalement hors iceluy cercle, & ne le peut iamais toucher, puis que iamais elle ne conuiendra auec la ligne droicte GH : Donc à plus forte raiſon la ligne droicte IC, qui eſt moindre & plus eſloignée d'iceluy cercle que Ik, ne le touchera pas ; ny partant auſſi les autres coſtez du polygone inſcrit, puis



qu'ils ſont eganx à I C, & par conſequent egalement diſtans du centre d'iceluy cercle par la 14. prop. 3. Parquoy deux cercles inegaux eſtans à l'entour d'vn meſme centre, nous auons inſcrit au plus grand d'iceux vn polygone equilateral, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

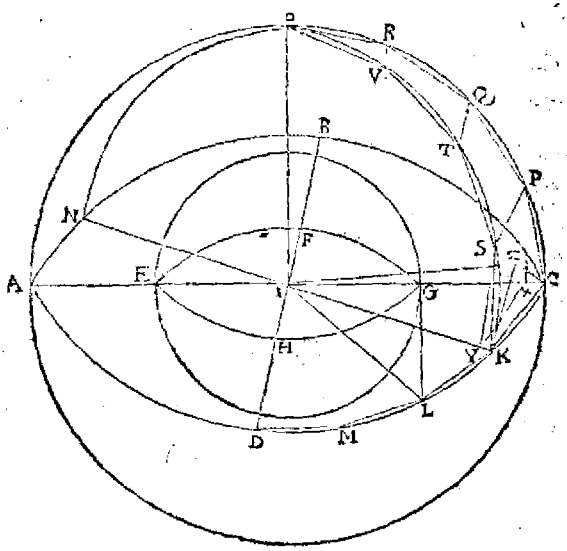
De cecy eſt manifeſte, que ſi à l'extremité du coſté du polygone inſcrit, lequel conuient auec le diametre, on tire vne ligne perpendiculaire à iceluy diametre, qu'elle ne peut toucher le moindre cercle, mais que elle tombera toute dehors. Car telle eſt la ligne IK, laquelle du poinct I extreme du coſté IC conuenant auec le diametre AC, eſt tirée perpendiculairement ſur iceluy diametre AC, & a eſté demonſtré qu'elle ne touche pas le cercle DEF.

PROBL. 2. PROP. XVII.

Deux ſpheres inegales eſtans ſur vn meſme centre ; inſcrire en la plus grande vn polyedre, duquel les plans ne touchent point la ſuperficie de la petite ſphere.

Soient les deux ſpheres inegales ABCD, EFGH, à l'entour d'vn meſme centre I : & il faut dans la plus grande ABCD inſcrire vn ſolide polyedre ou de pluſieurs coſtez, lequel ne touche la ſuperficie de la moindre ſphere EFCH.

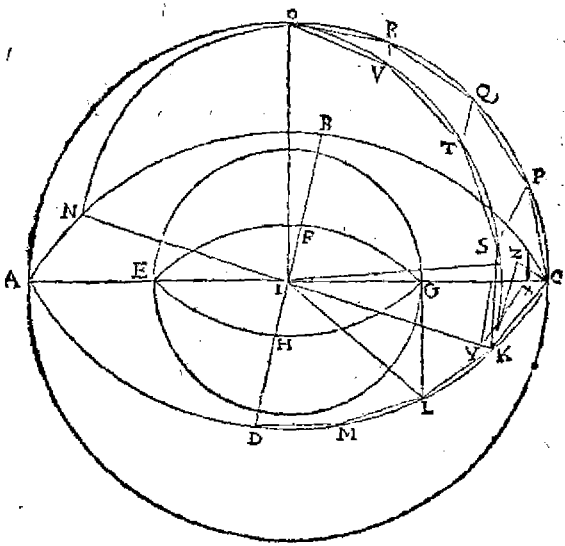
Soient les deux spheres couppées par quelque plan passant par le centre I : il est euident par la def. de la sphere, (qui est faicte par la circonduction du demy cercle) que les communes sections seront cercles, & les plus grãds de toute la sphere : d'autant qu'ils ont pour diametre le diametre de la sphere, puisque le plan couppant passe par le centre de la



sphere: soient donc icelles communes sections, sçauoir en la plus grande sphere, le cercle ABCD, & en la plus petite, le cercle E F K H : & soient leurs diametres AC & BD se couppans en angles droicts au centre I : Et dans le cercle de la plus grande sphere A B C D, soit inscrit vn polygone, ne touchant point le moindre cercle EFkH, par la 16. prop. 12. duquel les costez de la quarte CD, soient C k, K L,

LM, MD : Et soit menée la ligne kI, continuée iusques au poinct N : Item par la 12. pr. 11. du centre I soit menée IO perpendiculaire sur le plan des cercles AB CD, EFGH, rencontrant la superficie de la plus grande sphere en O: Pareillement, par les lignes AC, IO, & Nk, OI, soiẽt tirez les plans AOC, NOk. Ils seront (par ce qui a esté dit cy dessus) les demy cercles AOC, NOK, tres-grands en la sphere, (d'autant que leurs diametres passent par le centre I.) Et d'autant que la ligne IO est esleuée perpendiculairement sur le plan du cercle ABCD, les deux demy cercles AOC, NOk, seront par la 18. prop. 11. esleuez perpendiculairement sur le plan d'iceluy cercle. Et puis que les trois demy cercles ADC, AOC, NOk sont egaux (ayans les diametres egaux), aussi leurs moitiez seront egales, sçauoir les quartes DC, OC, OK: Partãt autãt qu'il y aura de costez du polygone en la quarte CD, on en pourra inscrire autant en chacune des quartes OC, OK. Soient iceux CP, PQ, QR, RO; & kS, ST, TV, VO: & soient menées les lignes SP, TQ, VR: Item des poincts P & S soient menées par la 11. prop. 11. les perpendiculaires PX, SY: par la 38. prop. 11. elles tomberont sur les lignes IC, Ik, qui sont les communes sections des quarts de cercles IOC, IOk esleuez perpendiculairement sur le quart IDC. Soit aussi menée la ligne XY. Maintenãt puis que les arcs & les cordes PC & SK sont egales: les angles PXC, SYk droicts, & les angles PCX, SKY egaux: car ils insistent sur les peripheres egales AOP, NOS: les deux angles PCX, PXC du triangle PCX, & le costé PC, sont egaux aux deux angles SKY, SXK, & au costé SK du triangle SKY: partant par la 26. prop. 1. les autres costez PX, XC seront egaux aux autres costez SY, YK. Par-

quoy puis que les deux diametres AC, Nk sont egaux: & les segmens XC, Yk aussi egaux; les segmens AX, NY seront pareillement egaux: partant comme IX est à XC, ainsi IY est à Yk; & par la 2. p. 6. YX sera parallele à kC. Item les deux perpendiculaires PX, SY estans egales, sont aussi paralleles par la 6. p. 11. & par la 33. prop. 1. SP, YX, seront egales



& paralleles: & par la 9. prop. 11, SP & kC seront paralleles, & par la 7. prop. 11. SK & PC seront au mesme plan d'icelles. Partant tout le quadrilatere Ck, SP, est en vn mesme plan. Par mesme discours on monstrera aussi que les quadrilateres E P V Q, & le triangle V O R ont chacun toutes leurs parties en vn mesme plan. Que si des poincts O, P, R, S, T, V, on imagine des lignes menées vers le centre I, on se re-

preſentera vne figure ſolide, compriſe entre OC & Ok, compoſée de quatre pyramides, deſquelles le sõmet eſt au centre I, & leurs baſes ſont les quadrilateres SC, TP, VQ, & le triangle VOR: Et ſi on conſtruict pareillement ſur les coſtez KL, LM, & MD, comme on a faict ſur Ck : Et ſemblablement ſur toutes les autres quartes, on aura inſcrit vn poliedre en la ſphere donnée.

Ie dis d'auantage, qu'iceluy polyedre ne touche la petite ſphere EFGH. Car ſi du centre I on meine la ligne IZ perpendiculaire ſur le plan SC : Ie dis qu'elle ſera plus grande que IG demy diametre de la petite ſphere.

Car ayant pour l'inſcription du polygone tiré du poinct G la ligne GL perpendiculaire à AC, laquelle eſt manifeſtement plus grande que Ck coſté d'iceluy polygone inſcrit, ſoit tirée IL ; & auſſi CZ, KZ. D'autant que par la 2. d. 11. les angles IZC, IZk ſont droicts, le quarré de IC ſera egal aux quarrez de IZ, CZ, & le quarré de IK egal aux quarrez de IZ, ZK : Parquoy les quarrez des demy diametres egaux IC, IK, eſtans egaux, les quarrez de IZ, CZ, ſeront egaux aux quatrez de IZ, ZK : oſtant donc le quarré de IZ commun, reſteront egaux les quarrez de CZ, KZ ; & par conſequent les lignes CZ, KZ ſont egales. On demonſtrera en la meſme maniere, eſtant tirées des lignes de Z à P & S, qu'elles ſeront egales, tant entr'elles qu'à icelles CZ, KZ : Parquoy ſi du centre Z, & de l'interuale de l'vne d'icelles, on deſcrit vn cercle, il circonſcrira la quadrilatere CKSP : duquel les trois coſtez Ck, CP, kS qui ſouſtiennent arcs egaux de cercles egaux eſtãs egaux, & l'autre coſté SP plus petit ; (car les triang. ICK, IXT eſtans ſemblables, & le coſté IC plus grand que le

costé IX, aussi le costé Ck sera plus grand que le costé XI, qui a esté demonstré egal à SP) il est euident que l'angle CZK sera plus grand qu'vn droict; & par consequent le plus grand du triangle CZk: & par la 19. prop. 1. Ck sera plus grand costé que CZ. Parquoy GL estant plus grande que CK, sera aussi plus grande que CZ; & par consequent le quarré de GL plus grand qu'iceluy de CZ. Et d'autant que par la 47. prop. 1. les quarrez de IG & GL, sont egaux aux quarrez de IZ, CZ, (estans chacuns egaux au quarré du demy diametre de la grande sphere, d'autant que les triangles IGL, ICZ sont rectangles) & le quarré de GL, est plus grand que le quarré de CZ; le quarré de IZ, sera plus grand que le quarré de IG; & par consequent la ligne IZ, plus grande que la ligne IG. Le plan CkSP ne touche donc pas la petite sphere EFGH. On prouuera par mesme raison que tous les autres plans du polyedre inscrit en la grande sphere ne touchent pas la petitie sphere EFGH. Donc estans dõnees deux spheres inegales à l'entour d'vn mesme centre, nous auons inscrit en la plus grande vn polyedre, qui ne touche par la superficie de la petite sphere. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

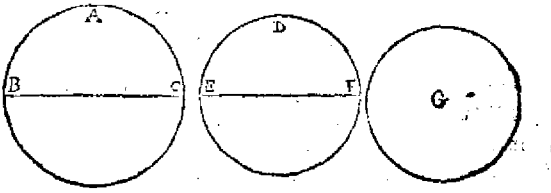
Des choses cy dessus demonstrées resulte que si en vn autre sphere on inscrit vn polyedre semblable au polyedre cy dessus descrit, qu'iceux polyedres seront en raison triplée des diametres des spheres, ausquelles ils seront inscrits. Car iceux polyedres estans semblables par la deff. des solides semblables, ils auront en leur connexité autant de plans semblables l'vn comme l'autre: partant ils se pourront diuiser en autant de pyramides semblables l'vn comme l'autre, ayant toutes le dem-

demy diametre de leur sphere pour vn de leurs costez : Partant prises vne à vne, elles seront en raison triplee des costez homologues, sçauoir est des demy diametres des spheres, par le corol. de la 8. prop. 12. Et les toutes aux toutes, pareillemẽt en raison triplee des mesmes demy diametres, par la 12. p. 5. Et par la 15. p. 5. en raison triplee des diametres entiers.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Les spheres sont l'vne à l'autre, en raison triplée de leurs diametres.

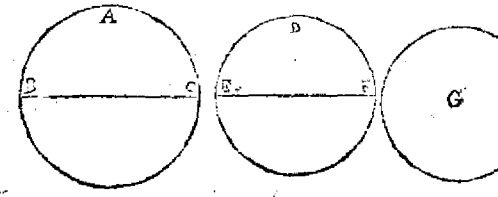
Soient les deux spheres ABC, DEF, desquelles les diametres sont BC, EF. Ie dis qu'elles sont l'vne à l'autre en raison triplée du diametre BC, au diame-



tre EF : C'est à dire que si on imagine que comme la raison triplée de BC à EF, ainsi la sphere BAC, à quelque autre sphere, comme G : icelle sera egale à la sphere DEF.

Autrement, elle sera plus grande ou plus petite. Soit premierement la sphere G, plus petite que la sphere DEF, s'il est possible : Elle pourra estre enfermée dans icelle, si on les met toutes deux sur vn

meſme centre : Et partant dans la ſphere DEF, peut eſtre inſcrit vn polyedre qui ne touchera point la plus petite ſphere G par la 17. pr. 12. Et dedans l'autre ſphere pourra eſtre pareillemẽt inſcrit vn ſemblable polyedre par la meſme prop. Et par le corol. d'icelle, ce polyedre cy ſera à celuy-là, en raiſon triplée du diametre BC au diametre EF : mais en telle raiſon, la ſphere BAC eſt poſée eſtre à la ſphere G, & par la 11. pr. 5. comme la ſphere BAC à la ſphere G, ainſi le polyedre de la ſphere BAC, ſera au polyedre de la ſphere DEF. Or la ſphere BAC, eſt plus grande



que ſon polyedre, n'eſtant que partie d'icelle : donc par la 14. prop. 5. la ſphere G eſt plus grande que le polyedre de la ſphere DEF : ce qui eſt impoſſible, n'eſtant que partie d'iceluy. Donc la ſphere BAC, ne peut eſtre en raiſon triplée des diametres BC & EF, à vne autre ſphere plus petite que DEF.

Soit donc la ſphere G plus grande que DEF, ſ'il eſt poſſible : Et puis qu'on a poſé que comme la ſphere ABC à la ſphere G, ainſi la raiſon triplée du diametre BC au diametre EF, en changeant la ſphere G ſera à la ſphere BAC, en raiſon triplée du diametre EF, au diametre BC. Item on peut imaginer que comme la ſphere G à la ſphere BAC, ainſi la ſphere DEF, à vne quatrieſme proportionele : la-

quelle ſera plus petite que BAC par la 14. prop. 5. d'autant que G eſt poſée plus grande que DEF: Et partãt icelle quatrieſme pourra eſtre inſcrite en la ſphere BAC: Et ſi par la 11. pr. 5. la ſphere DEF, ſera à icelle quatrieſme inſcrite dans BAC, en raiſon triplée du diametre EF au diametre BC, ce que nous auons demonſtré eſtre impoſſible. Donc la ſphere G, n'a peu eſtre plus grande, ne plus petite que la ſphere DEF, mais egale: & par conſequent les ſpheres ſont l'vne à l'autre en raiſon triplée de leurs diametres. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, qu'vne ſphere eſt à vne ſphere, comme le polyedre deſcrit dans celle-là, eſt au polyedre ſemblable deſcrit en ceſte cy: pource que tant les ſpheres que les polyedres ſont en raiſon triplée des diametres d'icelles ſpheres, comme il a eſté demonſtré.

Fin du douzieſme Element.

ELEMENT TREZIESME.

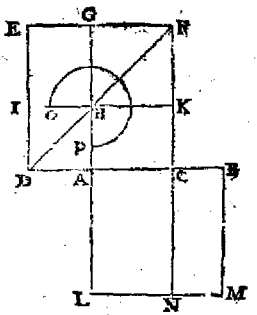
THEOR. 1. PROP. I.

SI VNE ligne droite est couppée en la moyenne & extreme raison : le quarré de la moictié de la toute, & du plus grand segment comme d'vne seule ligne, est quintuple du quarré de la moictié d'icelle ligne totale.

Soit la ligne droicte AB, couppée en la moyenne & extreme raison au poinct C, à laquelle on adiouste AD, ligne egale à la moictié de la totale AB : ie dis que le quarré de DC est quintuple du quarré de DA.

Car soit descrit sur CD le quarré CE, & tiré le diametre DF ; puis soit menée AG parallele à DE, couppant le diametre DF en H, par lequel poinct soit tirée Ik parallele à CD. En apres ayant prolongé GA, & accomply le quarré AM, soit produicte

FC iusques en N. Premierement par le corollaire de la 4. prop. 2. les quadrilateres AI, Gk seront quarrez des lignes DA, AC. Et puis que AB est couppée en la moyenne & extreme raison en C, comme AB sera à AC, ainsi AC est à CB; & par la 17. prop. 6. le rectangle CM, soubs AB, CB, est egal au quarré de AC, sçauoir GK.

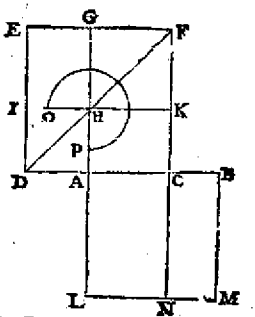


Et puis que AB est posée double de DA; & AL est egale à icelle AB; & AH à AD; aussi AL sera double de AH. Mais comme AL est à AH, ainsi le rectangle AN est au rectangle AK, par la 1. prop. 6. Donc AN est double de AK. Et puis que par la 43. p. 1. Ak est egal à IG; AN sera egal aux deux IG, Ak; adiouſtant donc ces egaux aux egaux CM, KG, le quarré AM sera egal au gnomon OP. Parquoy puis que par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré AM est quadruple du quarré AI, aussi le gnomon OP sera quadruple du mesme quarré AI: & partant si au gnomon OP est adiousté le quarré AI; CE quarré de DC sera quintuple de AI quarré de DA. Si donc vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 2. PROP. 11.

Si le quarré d'vne ligne droicte est quintuple du quarré d'vne partie d'icelle: le double d'icelle partie estant coup-

pée en la moyenne & extreme raiſon, le plus grand ſegment ſera l'autre partie de la donnee.



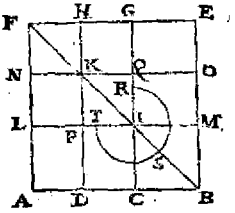
Soit la ligne droicte DC diuiſée au poinct A, en ſorte que le quarré de la toute, ſçauoir EC, ſoit quintuple du quarré de la plus petite partie DA, ſçauoir AI: & ſoit priſe AB double d'icelle AD: Ie dis que ſi on diuiſe AB en la moyẽne & extreme raiſon, que le plus grand ſegment ſera AC, autre partie de la totale DC.

Car ayant acheué la conſtruction cõme en la precedente: les quadrilateres AI, GK ſeront quarrez par le corol. de la 4. pr. 2. Et puis que AB, c'eſt à dire AL, eſt double de DA, ou AH ſon egale, le rectangle AN ſera double du rectangle AK par la 1. prop. 6. ou egal aux deux AK, IG qui ſont egaux par la 43. pr. 1. Or par le ſcholie de la 4. pr. 2. le quarré AM eſt quadruple du quarré AI; & le quarré EC eſt quintuple du meſme par l'hypotheſe: il eſt donc euident que le quarré AM eſt egal au gnomon OP, duquel les deux rectangles AK, IG, ſont egaux au rectangle AN. Il faut donc que le rectangle CM, ſoit egal au quarré Gk, faict ſur vne ligne egale à AC: & partant par la 17. p. 6. comme BM, c'eſt à dire AB eſt à AC, ainſi AC à CB. Parquoy par la 3. d. 6. la ligne AB ſera couppée en la moyenne & extreme raiſon au poinct C: & AC autre partie de la totale DC, eſt le plus grand ſegment d'icelle. Parquoy ſi le quarré

d'vne ligne droicte eſt quintuple, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droicte eſt couppée en la moyenne & extreme raiſon: le quarré du plus petit ſegment & de la moictié du plus grãd ſegment, cõme d'vne ſeule ligne, eſt quintuple du quarré de la moitié du plus grand ſegmẽt.

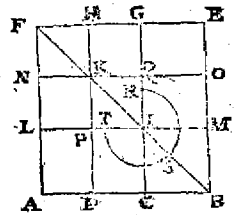


Soit la ligne droicte AB, couppée en la moyenne & extreme raiſon au poinct C, de laquelle le plus grãd ſegment AC eſt couppé en deux egalemẽt en D: ie dis que le quarré du petit ſegment & de la moictié du grand, ſçauoir de BD, eſt quintuple du quarré de DC, moictié du grand ſegment AC.

Qu'il ne ſoit ainſi: ſur AB ſoit deſcrit le quarré AE, & ayant mené ſon diametre BF, des poincts C & D ſoient menées CG, DH paralleles à AF, couppans le diametre BF és poincts I & K, par leſquels ſoient menées LM, NO peralleles à AB, leſquels couppent CG, DH en P & Q: Et par le corol. de la 4. p. 2. les quadrilateres LG, PQ, DO ſeront quarrez des lignes AC, CD, DB: ie dis donc que le quarré DO eſt quintuple du quarré PQ.

Car puis que comme AB à AC, ainſi AC à CB, par

la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB & CB (ſçauoir AM) eſt egal au quarré de la moyenne AC, ſçauoir LG, lequel eſtant par le ſcholie de la 4. pr. 2. quadruple du quarré PQ, le rectangle AM ſera auſſi

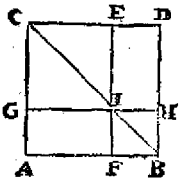


quadruple de PQ: mais AP & DI eſtans ſur baſes egales, ſont egaux par la 1. prop. 6. Et DI eſtant egal à IO, par la 43. prop. 1. le gnomon RST ſera egal au rectangle AM quadruple du quarré PQ: ainſi il eſt euident que le quarré DO, eſt quintuple du quarré PQ: Si donc vne ligne droicte eſt couppée en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si vne ligne droicte eſt couppée en la moyenne & extreme raiſon, le quarré de la toute, & le quarré du petit ſegment enſemble, ſont triples du quarré du plus grand ſegment.

Soit la ligne droicte AB, couppée en la moyenne & extreme raiſon au poinct F; ie dis que le quarré de la toute AB, & le quarré de FB plus petit ſegmẽt, ſont triples du quarré de AF plus grand ſegment.



Car soit descrit sur AB le quarré AD, auquel estant tiré le diametre BC, soit menee de F la ligne EF parallele à AC, couppant BC en I, par lequel soit menee GH parallele à AB. Par le corol. de la 4. prop. 2. les parallelogrammes GE, FH seront quarrez des lignes AF, FB: Et puis que comme AB est à AF, ainsi AF est à FB, par la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB, FB, sçauoir AH est egal au quarré de la moyenne AF, sçauoir GE. Veu donc que AH & FD sont egaux, le gnomon EBG auec le quarré FH, sera egal au double du quarré GE: & partant adiouſtant le quarré GE; AD quarré de AB, auec FH quarré de FB, sera triple de GE quarré de AC. Si donc vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, & à icelle on adiouste directement le plus grãd segment; la toute composee, sera couppee en la moyenne & extreme raison, & la toute simple sera le plus grand segment.

Soit la ligne droicte AB, couppee en la moyenne & extreme raison au poinct C, & à icelle on adiouste directement AD egale à AC grand segment: ie dis que



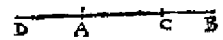
DB est aussi couppee en la moyenne & extreme raison au poinct A, & que la toute donnee AB est le plus grand segment.

Car puis que comme AB est à AC, c'est à dire AD, ainsi AC est à CB; en changeant comme DA sera à AB, ainsi BC à AC: & en composant comme DB sera à AB, ainsi AB à AC, c'est à dire à AD. Donc par la 3. def. 6. la ligne DB est couppee en la moyenne & extreme raison au poinct A, & le plus grand segment est la ligne AB proposee au commencement. Si donc vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte rationele est couppee en la moyenne & extreme raison: l'vn & l'autre segment est ligne irrationele, appellée residu.

Soit la ligne rationele AB, couppee en la moyenne & extreme raison au poinct C: ie dis que AC & BC sont irrationeles & residus.



Car si au plus grand segment AC on adiouste directement DA, egale à la moitié de AB. D'autant que par la 1. prop. 13. le quarré de DC est quintuple du quarré de la ligne DA, il est à iceluy comme nombre à nombre. Parquoy par la 6. prop. 10. les quarrez de DC, DA seront commensurables, & par consequent les lignes DC, DA, sont aussi commensu-

rables, au moins en puissance. Or AD est rationele, puis qu'elle est moitié d'vne rationelle AB; Donc aussi DC sera rationele. Et d'autant que les quarrez de DC, DA ne sont comme nombre quarré à nombre quarré: (comme il appert par le coroll. de la 24. propos. 8. car ils sont comme 5 à 1, ou 25 à 5) les lignes DC, DA, seront incommens. en longitude, par la 9. prop. 10. & partant rationeles commensurables en puissance seulement. Parquoy si de DC rationele on oste DA commensurable en puissance seulement, par la 74. prop. 10. le reste AC sera irrationele, appellee residu.

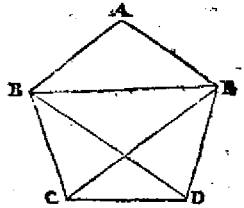
Derechef AB estant couppee en la moyenne & extreme raison en C, le quarré de AC sera egal au rectangle de AB, CB par la 17. prop. 6. Or le quarré du residu AC applicqué sur la rationele AB, doit faire l'autre costé CB residu premier, par la 98. prop. 10. Donc les segmens AC, CB, sont lignes irrationeles appellees residus. Si donc vne ligne droicte rationele est couppée en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si en vn pentagone equilateral, trois angles pris comme on voudra sont egaux: il sera equiangle.

Soit le pentagone equilateral ABCDE, duquel trois angles pris comme on voudra sont egaux, sçauoir A, C, D, ie dis qu'iceluy pentagone est equiangle.

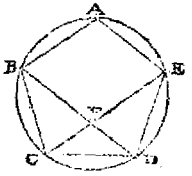
Car eſtans tirees à iceux angles egaux A, C, D, les lignes ſubſtendantes BE, BD, CE, elles ſeront egales par la 4. prop. 1. (eſtans tous les coſtez egaux.) Item les deux triangles DBC & DEC, ayans les trois coſtez egaux aux trois coſtez, chacun au ſien, les deux angles DBC & DEC ſeront egaux par la 8. propoſit. 1. Item BAE eſtant Iſoſcele, les deux angles ſur la baſe BE, ſeront egaux par la 5. propoſit. 1. Pareillement les deux triangles CBE & DEB, ayans les trois coſtez egaux aux trois coſtez, chacun au ſien, ils auront l'angle CEB egal à l'angle DBE, par la 8. prop. 1. Partant le total angle B eſt egal au total angle E. Mais d'autant que CBE eſt triangle Iſoſcele, & que BAE à les trois coſtez egaux au trois coſtez du triangle DEC chacun au ſien, l'angle ABE ſera egal à l'angle DCE par la 8. prop. 1. Parquoy le total C ſera egal à l'angle total B, & par la 1. commune ſentence ils ſeront tous egaux entr'eux. Partant le pentagone ſera equiangle. Ce qui eſtoit à demonſtrer.



THEOR. 8. PROP. VIII.

Si deux lignes droictes ſubtendent deux angles d'vn pentagone equiangle & equilateral, leſquels ſoient d'ordre: icelles ſubtendantes ſe coupperont l'vne l'autre en la moyenne & extre-

me raison, & leurs plus grands segmens seront egaux à vn costé du pentagone.



Au Pentagone ABCDE equiangle & equilateral soient deux lignes droictes BD, CE, subtendantes les angles C, D, qui sont d'ordre, lesquelles s'entrecouppent en F. Ie dis qu'elles seront ainsi couppees en la moyenne & extreme raison, & que leurs plus grands segmens BF, EF seront egaux à quelconque costé du pentagone.

Car ayant descrit par la 14. propos. 4. vn cercle à l'entour du pentagone, les arcs AB, BC, CD, DE, & EA seront egaux par la 28. prop. 3. Et d'autant que les triangles CBD, CED, ont deux costez egaux, & l'angle compris par iceux aussi egal par l'hypothese; les bases BD, CE, & les angles CDB, DCE seront pareillement egaux par la 4. prop. 1. Et partant veu qu'au triangle CFD, les deux angles DCF, CDF, sont egaux, & par la 32. prop. 1. l'angle externe BFC est egal à iceux: iceluy BFC sera double de DCE. Mais par la 33. propoſit. 6. l'angle BCE est aussi double du mesme DCE, pource que l'arc BAE est double de l'arc DE: Donc les angles BFC, BCF sont egaux: & partant par la 6. prop. 1. BF est egale au costé du pentagone BC. Et d'autant que par la 26. prop. 3. les angles DBC, ECD, insistans sur arcs egaux, les deux angles DBC, CDB du triangle BCD sont egaux aux deux angles DCF, FDC du triangle CFD: & partant les deux triangles BCD, CFD seront equiangles par

la 32. prop. 1. Parquoy par la 4. prop. 6. comme BD sera à DC, c'est à dire à BF, ainsi CD ou BF sera à FD: & partant la subtendante BD est couppee en F, en la moyenne & extreme raison, & le plus grand segment BF est egal à BC costé du pentagone. Par mesme raison on demonstrera CE estre couppee en la moyenne & extreme raison en F, & que le grand segment EF est egal à DE costé du pentagone. Parquoy si deux lignes droictes subtendent deux angles d'vn pentagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Dounot a traduict ceste proposition ainsi.

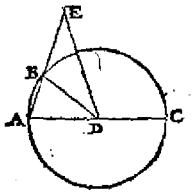
Si deux lignes droictes sont tirees d'angle en angle en vn pentagone equiangle, & equilateral, elles se coupperont l'vne l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs plus grands segmens seront egaux aux costez du pentagone.

Ce qu'estant ainsi, la proposition ne seroit vniuersellement vraye: Car il est cuident que si on tire deux lignes droictes de l'angle A, aux angles C *&* D, *ou de l'angle* B *aux angles* D *&* E, *&c. Icelles lignes droictes ne se coupperont point.*

THEOR. 9. PROP. IX.

La ligne droicte composee du costé de l'hexagone, & du costé du decagone, tous deux inscrits en vn mesme cercle, est couppee en la moyenne & extreme raison, de laquelle le

plus grand segment est le costé de l'hexagone.



Dans le cercle A B C soit inscrit le costé du decagone AB, auquel soit adiousté directement le costé de l'hexagone BE qui peut estre inscrit dans le mesme cercle, c'est à dire que BE soit egale au demy diametre du cercle, (car le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle auquel il est inscrit par le coroll. de la 15. p. 4.) Ie dis que AE est couppee en la moyenne & extreme raison, & que BE costé de l'hexagone est le plus grand segment.

Car ayant mené de A par le centre D le diametre AC, & tiré les lignes DB, DE: l'arc AB estant la 10. partie de la periphere du cercle, sera la 5. de l'arc A C: & partant l'arc BC sera quadruple d'iceluy AB: Parquoy par la 33. prop. 6. aussi l'angle BDC sera quadruple de l'angle ADB: & par la 32. propos. 1. BDC estant exterieur, il vaudra les deux DAB, DBA: lesquels estans egaux par la 5. prop. 1. parce que le triangle ABD est Isoscele l'vn ou l'autre sera double de ADB: mais l'vn d'iceux DBA estant exterieur, est egal aux deux opposez interieurement DEB & BDE, (lesquels sont egaux, estant le triangle DBE Isoscele, pource que DB demy diametre, & BE sont egaux par la construction) ainsi l'angle DBA sera double de l'angle E: lequel par ce moyen sera egal à l'angle ADB: ainsi les deux triangle AED, ADB seront equiangles, ayans l'angle A commun, & l'angle E

egal à l'angle ADB, par la 32. prop. 1. le tiers sera egal au tiers : & par la 4. prop. 6. comme AE est à AD ou BE son egale, ainsi AD, ou BE est à AB : partant AE est couppee en la moyenne & extreme raison en B : & BE costé de l'hexagone est le plus grand segment. Donc la ligne droicte compotée du costé de l'hexagone & du costé du decagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

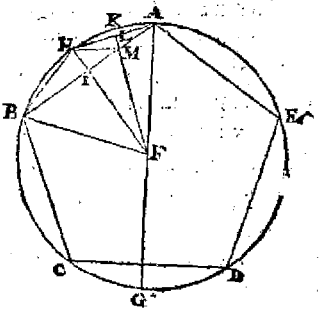
De cecy est euident que le costé de l'hexagone estant couppé en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment est costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car si de BE *costé de l'hexagone on couppe vne partie egale à* AB : *comme la toute* AE *sera à la toute* BE, *ainsi la retranchee* BE *sera à la retranchee de* BE, *c'est à dire à* AB : *& partant par la 19 propos. 5. le reste sera au reste, comme la toute à la toute, ou la retranchee à la retranchee. Parquoy* BE *sera semblablement couppee que* AE *en la moyenne & extreme raison par la 3. def. 6. dont le plus grand segment sera* AB *costé du decagone.*

THEOR. 10. PROP. X.

Le quarré du costé du pentagone equilateral inscrit en vn cercle, est egal aux deux quarrez des costez du decagone, & de l'hexagone, inscrits au mesme cercle.

Au cercle ABCDE, duquel le centre est F, soit inscrit

inscrit vn pentagone equilateral, vn costé duquel est AB. Ie dis que le quarré d'iceluy costé AB est egal aux deux quarrez des costez de l'hexagone, & du decagone inscrit au mesme cercle.



Car ayãt tiré le diametre AFG, & ioinct FB, soit couppé l'arc AB en deux egalement par la ligne FH, laquelle couppe aussi la ligne AB en I; & soient tirees les lignes droictes AH, BH; & AH sera costé du decagone, & FB costé de l'hexagone: En apres soit couppé l'arc AH en deux egalement en K, par la ligne FK, laquelle couppe aussi la ligne AH en L, & la ligne AB au poinct M, auquel soit menee la ligne HM. Veu donc que les arcs AH, BH sont egaux, aussi seront egaux les angles AFH, BFH, par la 27. propos. 3. Parquoy les costez AF, FB estans egaux, & FI commun aux deux triangles AFI, BFI, la base AI sera egale à la base BI, par la 4. propos. 1. & les angles AIF, BIF aussi egaux, & partant droicts. Par mesme raison seront egales les lig. AL, HL, & les angles ALF, HLF droicts. Or si des demy cercles egaux ABCG, AEDG, on oste arcs egaux ABC, AED, resteront egaux les arcs CG, CD, & partant l'arc CG sera moitié de l'arc CGD. Mais aussi l'arc AH est moitié de l'arc AHB: donc puis que les arcs AB, CD sont egaux, les arcs AH, CG moitiez d'iceux, seront aussi egaux: & partant l'arc AH estant double de l'arc HK, aussi le sera CG. Et puis que

les arcs AB, BC sont egaux, & l'arc AB est double de l'arc BH, l'arc BC sera pareillement double du mesme arc BH. Parquoy les arcs CG, BC sont equemultiplices, sçauoir est doubles, des arcs HK, BH, & partant par la 1. prop. 5. tout l'arc BG sera double de l'arc BK: & par consequent l'angle BFG aussi double de l'angle BFK, par la 33. proposit. 6. Mais par la 20. prop. 3. le mesme angle BFG au centre, est double de l'angle FAB: donc les angles BFM, FAB seront egaux, & partant l'angle ABF estant commun aux deux triangles ABF, FBM, & le tiers au tiers, par la 32. prop. 1. iceux triangles seront equiangles; & par la 4. prop. 6. comme AB sera à BF, ainsi BF à BM: & partant par la 17. prop. 6. le rectangle de AB, BM sera egal au quarré de BF. Derechef puis que les costez AL, LM du triangle ALM sont egaux aux costez HL, LM du triangle HLM, & les angles contenus d'iceux aussi egaux, sçauoir droicts, par la 4. prop. 1. les bases AM, HM, & les angles LAM, LHM seront egaux. Mais par la 5. prop. 1. l'angle LAM est egal à l'angle HBA, pource que les costez HA, HB sont egaux: Donc aussi l'angle LHM sera egal au mesme HBA: & partant par la 32. proposition 1. les triangles ABH, AHM seront equiangles, puis qu'ils ont les angles ABH, AHM egaux, & l'angle HAM commun. Parquoy par la 4. proposit. 6. comme AB sera à AH, ainsi AH à AM: & par la 17. proposit. 6. le rectangle de AB, AM sera egal au quarré de AH. Mais il a esté demonstré que le rectangle de AB, BM, est egal au quarré de BF: donc les rectangles de AB, AM, & de AB, BM ensembles, sont egaux aux deux quarrez de AH, BF. Mais par la 2. p. 2. iceux rectangles sont egaux au quarré de AB: donc le quarré

de AB costé du pentagone est egal aux deux quarrez des lignes BF, AH, costez de l'hexagone, & du decagone. Ce qui estoit à prouuer.

COROLLAIRE.

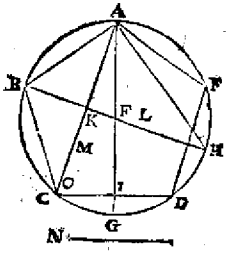
Par cecy est manifiste qu'vne ligne droicte tiree du centre, & laquelle diuise en deux egalement vn arc, diuise aussi la ligne subtendante d'iceluy arc en deux egalement, & a angles droicts.

Est aussi euident que le diametre du cercle tiré de l'angle du pentagone, diuise en deux egalement l'arc que le costé oppose à iceluy angle subtend, comme aussi iceluy costé opposé, & à angles droicts. Car il a esté demonstré que le diametre AG tiré du poinct A, diuise en deux egalement l'arc CD, lequel le costé opposé CD subtend: Parquoy par ce que dessus, il couppera aussi en deux egalement & à angles droicts iceluy costé CD. La mesme demonstration sera en tout polygone equilateral inscrit au cercle, le nombre des costez estant impair.

THEOR. 11. PROP. XI.

Si dans vn cercle ayant le diametre rationel, on inscrit vn pentagone equilateral: le costé du pentagone est irrationel: appellé ligne mineure.

Soit le pentagone equilateral ABCDE, inscrit dans le cercle ABCDE, duquel le diametre est rationel: ie dis que AB costé du pentagone est irrationel, appellé ligne mineure.



Car ſoient menez par le centre F les diametres AG, BH, deſquels AG couppera le coſté CD en deux egalement en I, & à angles droicts par le coroll. de la preced. ſoient auſſi tirees les lignes AC, AH, deſquelles AC ſera couppee par le diametre BH en deux egalement en K par le coroll. de la preced. Partant eſt manifeſte que les deux triangles ACI & AkF ſont equiangles: car l'angle du poinct A eſt commun à tous les deux, & le droict AkF egal au droict AIC; le tiers ſera egal au tiers par la 32. prop. 1. Et par la 4. prop. 6. comme IC à CA, ainſi kF à FA. Item du demy diametre FH (lequel eſt rationel & egal à FA) ſoit retranchée FL egale au quart de FA, laquelle FL ſera rationele, eſtant le quart d'vne ligne rationele, & par la 16. pr. 10. BL compoſee des deux BF, FL, & commenſurable à chacune d'icelles, ſera auſſi rationele. Item de AC ſoit retranché CM quart d'icelle ligne: Et par la 15. prop. 5. CI ſera à CM quart de CA, comme kF à FL quart de FA: Que ſi on double les deux CI & CM par la 15 p. 5. CD ſera à CK (car elle eſt la moitié de CA & double de CM) comme KF à FL: & en compoſant comme les deux CD & Ck enſemble à CK, ainſi kL à FL. Et par la 22. prop. 6. le quarré de la compoſee de CD & CK ſera au quarré de Ck, comme le quarré de kL au quarré de FL. Mais d'autant que la ligne AC eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon (ſçauoir eſt eſtant tiree la ligne droicte BD) par la 8. prop. 13. ſon plus grand ſegment eſt egal au coſté du pentagone, ſçauoir à iceluy CD; par

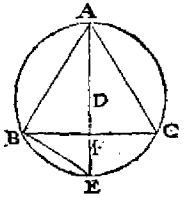
la 1. prop. 13. le quarré de la composee de CD plus grand segment, & CK moitié de la toute CA, sera quintuple au quarré de Ck moitié de la toute: partant aussi le quarré de KL, sera quintuple du quarré de FL. Mais la ligne B L est aussi quintuple de FL, estant FL quart de IB: donc comme BL à FL, ainsi le quarré de KL, au quarré de FL; c'est à dire en raison doublee de kL à FL: dont s'ensuit que KL sera moyenne proportionele entre BL & FL: Partant par la mesme raison doublee de la 10. deffinit. 5. & 20. proposition du 6. le quarré de BL sera au quarré de K L, comme BL à FL: c'est à dire que le quarré de BL sera quintuple du quarré de KL: Partant iceux quarrez seront entr'eux comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré (comme il appert par le corol. de la 24. prop. 8.) Parquoy par la 9. prop. 10. les lignes BL & kL, seront commensurables en puissance seulement: desquelles BL estant rationele, BL, & KL seront rationeles commensurables en puissance seulement; & par la 74. prop. 10. BK sera residu. Maintenant que la ligne BL puisse plus que la ligne kL, du quarré de la ligne N. Donc puis que BL est rationele commens. en longitude à la rationele proposee BF: (car elles sont entr'elles comme 5. à 4.) Et que BL peut plus que KL, du quarré de la ligne N qui luy est incommensurable en longitude; (car la puissance de la ligne BL estant quintuple de la puissance de la ligne kL, le quarré de N, qui reste apres auoir osté le quarré de KL de celuy de BL; sera au quarré de BL comme 4. à 5. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré: & partant par la 9. proposition 10. BL qui peut plus que KL du quarré de la ligne N, est incommensurable en longitude à icelle

N.) par la 4. des tierces def. du 10. BK sera residu quatriesme.

Finalement pource que par le corol. de la 8. p. 6. AB est moyenne proportionele entre BH, BK (car le triangle BAH, à l'angle droict, duquel est tiree A k perpend. à la base BH) le quarré de AB sera egal au rectangle de BH, BK. Parquoy puis que la ligne droicte AB peut la superficie contenuë de la rationele BH, & du residu 4. BK: par la 95. proposit. 10. icelle AB sera ligne mineure. Parquoy si dans vn cercle ayant le diametre rationel, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XII.

Le quarré du costé du triangle equilateral inscrit dans vn cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.



Soit le triangle equilateral ABC inscrit en vn cercle ABC, duquel le centre est D. Ie dis que le quarré de AB costé d'iceluy triangle, est triple du quarré du semidiametre.

Car estant tiré le diametre AE, lequel couppera par le corol. de la 10. propos. de ce liure, l'arc BC en deux egalement en E; & aussi la ligne droicte BC en deux egalement & à angles droicts: veu que l'arc BEC est le tiers de toute la circonference, BE sera la sixies-

me partie : partant estant tiree la ligne droicte BE, elle sera le costé de l'hexagone & egal au demy diametre DE, par le corol. de la 15. prop. 4. Or le quarré du diametre AE sera quadruple du quarré de BE egale, au demy diametre, par le scholie de la 4. prop. 2. & par la 47. prop. 1. Il est aussi egal aux deux de BA & BE : il est donc manifeste qu'il sera triple du quarré de BE, ou ED son egal. Parquoy le quarré du costé du triangle equilateral inscrit dans vn cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

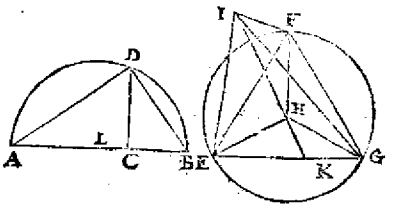
CROLLAIRE.

Il s'ensuit de ce que dessus que le quarré du diametre d'vn cercle est au quarré du costé du triangle equilateral inscrit en iceluy cercle, en raison sesquitierce, c'est à dire comme 4. à 3. Car puis qu'il a esté demonstré que le quarré du costé AB est triple du quarré du demy diametre AD ; posant le quarré de AB 3. le quarré de AD sera 1 ; & le quarré de AF quadruple d'iceluy sera 4. Parquoy le quarré de AE sera au quarré de AB comme 4. à 3.

Et pource que par le corol. de la 8. p. 6. comme AE est à AB, ainsi AB à AF perpendiculaire tombant d'vn angle sur vn costé ; pareillement le quarré de AB sera au quarré de AF, comme 4. à 3. On peut aussi facilement colliger que le semidiametre DE est couppé en deux egalement en F par le costé du triangle BC. Car puis que le quarré de AB est triple du quarré de BE ; si on pose iceluy quarré de AB estre 12. le quarré de BE sera 4, & le quarré de BF 3 ; & par consequent le quarré de EF sera 1. par la 47. prop. 1. Partant le quarré de BE, c'est à dire de DE son egale, sera quadruple du quarré de FE. Parquoy par le scholie de la 4. prop. 2. la ligne DE sera double de FE ; & par consequent DE est couppee en deux egalement en F.

PROB. 1. PROP. XIII.

Dans vne ſphere donnee, inſcrire vne pyramide equilaterale : & monſtrer que le quarré du diametre d'icelle ſphere, eſt en raiſon ſeſquialtere au quarré du coſté d'icelle pyramide.

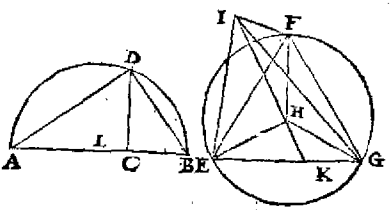


Soit la ligne AB, diametre de la ſphere donnee, diuiſee en C, de ſorte que AC ſoit double de BC : Et apres auoir deſcrit ſur AB le demy cercle A D B, leué la moyenne proportionele CD, & mené les lignes DA & DB : Soit deſcrit le cercle EFG, duquel le demy diametre HE ſoit egal à CD: & apres auoir inſcrit en iceluy le triang. equilateral EFG, du centre H ſoit leuee la perpendiculaire HI par la 12. prop. 11. laquelle ſoit egale à AC : puis ſoient menees les lignes IE, IF, IG. Ie dis premierement que la pyramide EFGI eſt equilaterale : puis qu'elle peut eſtre inſcrite en la ſphere, de laquelle le diametre eſt AB : & que le quarré du diametre AB, eſt en raiſon ſeſquialtere au quarré du coſté EG.

Que la pyramide ſoit equilaterale: il appert en premier lieu que le triangle EFG, eſt equilateral: Itẽ que

les trois lignes IE, IF, IG, ſont auſſi egales entr'elles: (d'autant que par la 47. prop. 1. le quarré d'vne chacune d'icelle eſt egal au quarré de la perpendiculaire IH, & au quarré de l'vne des trois lignes HE, HF, HG, leſquelles ſont egales.) Et d'autant que les coſtez AC, DC du triangle ADC ſont egaux aux coſtez HI, HE du triangle IHE: & les angles qu'ils comprennent egaux; la baſe AD ſera egale à la baſe EI par la 4. pr. 1. En la meſme maniere ſera demonſtré AD eſtre egale à FI, GI. Et veu que le quarré de AC, eſt double du quarré de CD (car ils ſont l'vn à l'autre comme AC à CB par le corol. de la 20. pr. 6, eſtans les trois lignes AC, CD, CB continuellemẽt propotrioneles) le quarré de AD, qui eſt egal à tous les deux, ſera triple du quarré de CD, ou de ſon egale HE: Mais par la 12. prop. 13. le quarré de EF eſt auſſi triple du quarré de HE; Partant EF, & AD ſont egales: & par la 1. commune ſent. EF & EI ſeront egales. Parquoy puis que AD eſt auſſi egale à FI, GI, les quatre triangles EFG, EFI; FGI, GEI ſeront equilateraux, & egaux entr'eux. Et par conſequent la pyramide EFGI, eſt equilaterale.

Qu'elle puiſſe eſtre inſcrite à la ſphere, ayant pour diametre AB, il appert; Soit continuée la ligne perpendiculaire IH par deſſous la baſe de la pyramide iuſques en k: Et ſoit faicte Ik egale à AB, & ſoit imaginé eſtre poſé le demy cercle ADB à l'entour de la pyramide: ſçauoir le poinct A, au poinct I; le poinct B au poinct k: & puis que AC & BC ſont egales à IH, & HK; & HG egale à DC, faiſant angle droict auec IH, auſſi bien que leurs egales AC & CD, il eſt euident que le poinct D, du demy cercle tombera ſur le poinct G. Partant le diametre demeurant immobile, ſi le demy cercle faict vne reuolution, il



touchera les deux autres angles de la pyramide E & F; (eſtans les lignes HE, HF, HG egales) ainſi la pyramide eſt inſcrite en la ſphere donnée.

Finablement que le quarré du diametre AB, ſoit ſeſquialtere au quarré du coſté AD, qui eſt egal à chacun coſté de la pyramide, il appert: Car puis que AB eſt triple de BC; & AC double de la meſme BC; AB ſera en raiſon ſeſquialtere à AC. Mais par le corol. de la 8. prop. 6. les trois lignes AB, AD, AC ſont proportioneles: Et partant par le corol. de la 20. prop. 6. comme AB ſera à AC, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de AD. Donc auſſi le quarré de AB ſera au quarré de AD en raiſon ſeſquialtere. Nous auons donc inſcrit vne pyramide equilaterale dans vne ſphere donnée, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De *ces choſes on peut facilement colliger, que la puiſſance du diametre de la ſphere eſt quadruple ſeſquialtere de la puiſſance du ſemidia. du cercle deſcrit à l'entour de la baſe de la pyramide. Car puis que AB diametre de la ſphere, a eſté demonſtré ſeſquialtere en puiſſance à EF coſté de la pyramide, le quarré de EF ſera de 6. parties, telles que le quarré du diametre AB en contiendra 9, & le quarré de la ligne HE 2, pource que le quarré de EF eſt triple du quarré de HE, par la 12. prop. 13. Donc de*

9. telles parties que le quarré de AB contiendra, le quarré de HE en contiendra 2 : Et partant le diametre AB eſt quadruple ſeſquialtere en puiſſance au ſemidiametre HE, puis que la raiſon des quarrez eſt comme 9 à 2.

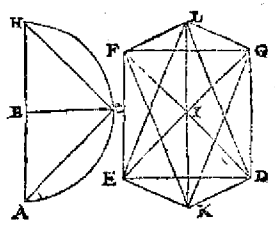
Auſſi la perpendiculaire tirée au centre de la ſphere au plan de la baſe de la pyramide eſt la ſixieſme partie du diametre de la ſphere, & la tierce partie du ſemidia. Car L ſoit le centre du demy cercle ADB : L ſera pareillement le centre de la ſphere. Ie dis que la ligne LC, (qui eſt la perpend. tirée du centre de la ſphere à la baſe EFG : puis que AC eſt egale à HI, & partant le poinct C, le meſme que H, ainſi auſſi L eſt le meſme que le centre de la ſphere.) eſt la 6. partie du diametre de la ſphere, ſçauoir eſt de AB, & la tierce partie du ſemid. AL. Car puis que AC eſt double de CB, de telles 4 parties qu'eſt AC, 2 telles ſera CB : & partant 6 telles ſera la toute AB, & 3 le ſemidia. AL. Parquoy ſi AC eſt 4, & AL 5 ; LC ſera 1 : & partant LC ſera la ſixieſme partie de AB, & la tierce de AL.

Semblablement la hauteur de la pyramide HI ſera deux tierces parties du diametre de la ſphere. Car HI eſt la meſme que AC, laquelle par la conſtruction eſt deux tierces parties d'iceluy diametre.

Auſſi de 9 telles parties que ſera le quarré d'iceluy diametre le quarré de la hauteur de la pyramide en ſera 4. Car la raiſon de 9 à 4, eſt la raiſon doublée de 3 à 2.

PROBL. 2. PROP. XIIII.

Dans vne ſphere donnée, inſcrire vn octaedre : Et monſtrer que le quarré du diametre de la ſphere, eſt double du quarré du coſté de l'octaedre.



Soit le diametre de la ſphere dõnée AH, coupé en deux egalement au poinct B : & apres auoir conſtruict le demy cercle A C H ; leué la perpendiculaire B C, & mené les lignes C A, CH, leſquelles ſeront egales entr'elles par la 4. prop. 1. ſur la ligne DE egale à l'vne d'icelles AC, CH, ſoit conſtruit le quarré DEFG, dans lequel ſoient menées les deux diagonales DF, G E ſe couppans au poinct I, duquel poinct par la 12. prop. 11. ſoit eſleuée la ligne IL, perpendiculairement ſur le quarré GE; laquelle ſoit auſſi continuée perpendiculairement par deſſoubs iceluy plan, & ſoit icelle Ik, laquelle ſoit faicte egale à AB; & IL auſſi à AB : Item des poincts L & K, ſoient menées aux angles du quarré les lignes LD, LE, LF, LG, KD, KE, KF, kG.

Ie dis maintenant que la figure ſolide DLFK, eſt enuironnée de huict triangles equilateraux; & que c'eſt vn octaedre. Car le quarré DEFG, ayant les coſtez egaux à AC; Il eſt euident que les diagonales EG, FD ſeront egales à AH : partant leurs moitiez à AB. Mais les deux lignes IL & IK ſont auſſi egales à AB : & par conſequent elles ſeront egales à vne chacune d'icelles demy diagonales; & par la 4. p. 1. les huict lignes ID, LE, LF, LG, KD, kE, KF, kG, ſeront toutes egales entr'elles : & aux quatre du quarré DEFG par la meſme 4. prop. 1. (eſtans les demy diagonales egales aux perpendiculaires IL & IK, en conſtituant des angles droicts au poinct I, milieu du quarré). Et puis que tous les coſtez ſont egaux, tous les triangles ſeront equilateraux, ſçauoir les quatre

au dessus du quarré DEFG, & ayans leurs bases sur les quatre costez d'iceluy quarré, & se terminans au poinct L : & quatre autres au dessoubs du mesme quarré, ayans aussi leurs bases sur les costez du quarré, & se terminans au poinct k : ainsi le solide DLFK compris de huict triangles equilateraux, sera octaedre.

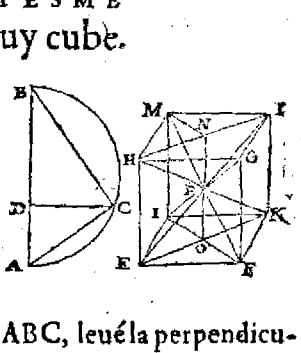
Ie dis d'auantage qu'iceluy octaedre est inscriptible en la sphere donnée. Car il est euident que la ligne LK, est egale au diametre AH, & que l'angle LDk est droict : (d'autant que les deux lignes LI, ID estans egales ; les angles sur la base LD seront egaux, & demy droicts, pource que l'angle LID est droict : Et par mesme raison l'angle IDk est demy droict ; & partant le total LDk sera droict.) Partant le demy cercle ayant pour diametre Lk, & faisant vne reuolution à l'entour de l'octaedre il touchera le poinct D : Et par mesme discours il touchera aussi les trois autres E, F, G, desquels les angles sont egaux à l'angle D.

Finablement, il est euident par la 47. prop. 1. que le quarré du diametre de la sphere AH ou Lk, est egal aux deux quarrez de LD, Dk, lesquels sont egaux ; & partant iceluy quarré de LK diametre de la sphere, sera double du quarré de l'vn d'iceux costez de l'octaedre. Nous auons donc inscrit vn octaedre dans vne sphere, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 3. PROP. XV.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn cube : & monstrer que le quarré du diametre de la sphere, est triple au quar-

ré dui costé d'celuy cube.



Soit le diametre de la sphere donnée AB, lequel soit couppé au poinct D, en sorte que BD soit double de AD, c'est à dire que AB soit triple d'icelle AD: Puis, apres auoir construict le demy cercle ABC, leué la perpendiculaire DC, & mené les deux lignes AC, & BC: sur EF egale à BC, soit faict le quarré EFGH, sur lequel soient esleuées par la 12. pr. 11. les quatre lignes perpendiculaires EI, EK, GL, HM, qu'on fera egales à EF: puis soient menées les quatre lignes IK, KL, LM, MI. D'autant que les lignes EI, FK sont perpendiculaires au plan EFGH: elles seront paralleles par la 6. pr. 11. Mais elles sont aussi egales: donc par la 33. prop. 1. EF, IK seront pareillement egales & paralleles; & partant EFKI est vn parallelogramme ayant les quatre costez egaux. Mais il a aussi par la 34. prop. 1. les 4. angles droicts, puis que les angles EIK, FKI sont opposez aux droicts KFE, IEF: donc EFKI est quarré. Par mesme raison FKLG, GLMH, HMIE seront quarrez: & partant IKLM sera aussi quarré, puis que par la 24. prop. 11. il est egal & semblable au quarré opposé EFGH: Car EL est vn solide parallelipipede: pource que par la 15. prop. 11. les plans opposez d'iceluy sont parallels, estans tirez par lignes paralleles qui s'entretouchent. Parquoy EL sera vn cube: lequel ie dis estre inscriptible en la sphere donnée. Car ayant mené les diametres EK, FI, HL, GM, des plans opposez EFKI,

HGLM, soient imaginez estre tirez par iceux diametres, les plans EkLH, FIMG, lesquels par la 28. prop. 11. coupperont le cube en deux egalement, & passeront par le centre d'iceluy, sçauoir par le poinct P, auquel par le corol. de la 39. prop. 11. tous les diametres dudit cube s'entrecoupperont aussi en deux egalement: & partant la commune section d'iceux plans, sçauoir NO, passera par le mesme centre P. Mais il est euident qu'iceux plans EKLH, FIMG sont rectangles egaux: & que par consequent leurs diametres & semidiametres seront aussi egaux. Parquoy estant descrit vn cercle du centre P, sur le diametre EL: il est euident qu'iceluy demy cercle faisant vne reuolution à l'entour du cube, descrira vne sphere passant par tous les angles du cube: laquelle ie dis estre egale à celle du diametre AB. Car puis que par la 47. prop. 1. le quarré de Ek est egal aux quarrez des lignes egales EF, Fk, & partant double du quarré de EF, ou de kL: les quarrez de Ek, kL seront triples du quarré de kL. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de EL est egal aux quarrez de Ek, KL: donc aussi le quarré de EL sera triple du quarré de kL, c'est à dire du quarré de AC: duquel est aussi triple le quarré de AB (car par le corol. de la 8. prop. 6. AB, AC, AD sont prop. & partant par le corol. de la 20. prop. 6. comme AB est à AD, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AC: Veu donc que AB est triple de AD, aussi le quarré de AB sera triple du quarré de AC.) Parquoy les quarrez de EL, AB sont egaux: & par consequent les lignes EL, AB, diametres des spheres: comme aussi les spheres d'iceux diametres, sont pareillement egales.

Or il a esté demonstré que le quarré du diametre

EL eſt triple du quarré du coſté du cube KL. Parquoy nous auons faict tout ce qui eſtoit propoſé.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte que le quarré du diametre de la ſphere, ou du cube, eſt egal aux quarrez du coſté du tetraedre & du cube pris enſemble. Car par la 47. prop. 1. le quarré de AB diametre de la ſphere, eſt egal aux deux quarrez de AC, BC coſtez du cube, & du tetraedre.

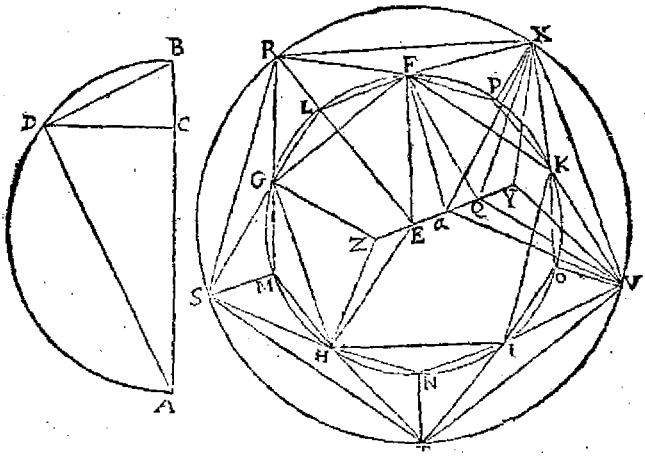
Eſt auſſi euident que tous les diametres du cube ſont egaux entr'eux, & qu'ils ſe diuiſent en deux egalement au centre de la ſphere: & pareillement que les lignes droictes qui conioignent les centres des quarrez oppoſez, ſe couppent en deux egalement au meſme centre de la ſphere.

PROBL. 4. PROP. XVI.

Dans vne ſphere dõnee, inſcrire vn icoſaëdre: Et monſtrer que ſon coſté eſt ligne irrationele, appellee ligne mineure.

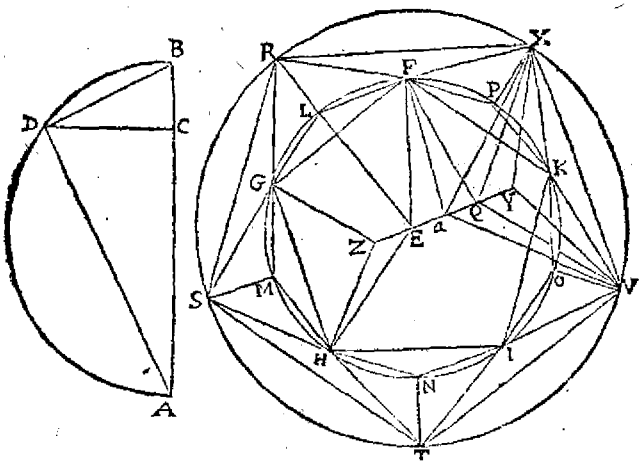
Soit le diametre de la ſphere donnée AB, lequel ſoit diuiſé, au poinct C, en ſorte que AC ſoit quadruple de BC, & apres auoir couſtruit le demy cercle, leué la perpendiculaire CD, & mené les lignes AD, DB; du centre E, & interual EF, egale à BD; ſoit faict vn cercle, dans lequel ſoit inſcrit le pentagone equilateral FGHIk, & puis dans le meſme cercle, ſoit auſſi inſcrit vn decagone equilateral, (ce qui ſe fera en couppant en deux egalement l'arc d'vn

d'vn chacun costé du pentagone.) En apres par la 12. prop. 11. du centre E, & des poincts L, M, N, O, P, soient leuées les lignes EQ, LR, MS, NT, OV, PX perpendiculaires au plan du cercle FGHIK, lesquelles soient posées egales à EF ou BD, & par la 6. prop. 11. elles seront paralleles entr'elles: & partant les lignes droictes conioignant icelles, sçauoir



EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV, EP, QX, (toutes lesquelles toutesfois nous n'auons tirées pour euiter confusion) seront egales & paralleles entr'elles, par la 33. prop. 1. Donc puis que EL, EM, &c. sont egales au semidiametre EF; aussi QR, QS, QT, QV, QX seront egales tant entr'elles qu'à iceluy demy diametre EF, ou à la ligne BD. Et pource que par la 15. pr. 11. le plan mené par les lignes QR, QS est parallel au plan FGHIK tiré par les lignes EL, EM: Et que pour la mesme raison le plan tiré par les lignes QS, QT, est parallel au mesme plan FGHIK, tiré par les lignes EM, EN; mais que le

plan tiré par les lignes QR, QS conuient auec le plan mené par les lignes QS, QT, en la ligne droicte QS; il eſt euident par les choſes demonſtrées à la 16. p. 11. que ces deux plans en font vn ſeul. On demonſtrera en la meſme maniere, que le plan tiré par QT, QV, auec celuy-cy en faict vn ſeul, & auſſi celuy tiré par QV, QX, & par QX, QR: tellement donc que les 5 li-



gnes QR, QS, QT, QV, QX ſont en vn meſme plan; & partant ſi de Q & de l'interuale QR, on deſcrit vn cercle en iceluy plan, il paſſera par les autres poincts S, T, V, X, & ſera egal au cercle FGHIk. Soient tirées les lig. droictes RS, ST, TV, VX, XR. Et d'autãt que LR, PX ſont egales & paralleles; ſi on imagine eſtre tirée vne ligne droicte LP; auſſi par la 33. p. 1. LP, RX ſeront egales & paralleles: & partant par la 28. prop. 3. de cercles egaux, elles prennent arcs egaux: Mais LP prẽd la 5. partie du cercle FGHIk, ſçauoir

deux 5. parties LF, FP: Donc auſſi RX, prend la 5. partie du cercle RSTVX. Par meſme maniere nous conclurons que chacune des autres lignes droictes RS, ST, TV, VX, prend la 5. partie d'iceluy cercle. Parquoy RSTVX eſt vn pentagone equilateral, ayant tous les coſtez egaux à ceux du pentagone FGHIK. Soient tirées des angles du pentagone RSTVX, aux angles du pentagone FGHIk, les lignes droictes RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, Vk, Xk, XF. Donc puis que la perpendiculaire LR eſt egale au demy diametre EF, c'eſt à dire au coſté de l'exagone du cercle FGHIk; & LF eſt coſté du decagone par la 10. prop. 13. le quarré du coſté du pentagone du meſme cercle, eſt egal aux quarrez de LR, LF. Mais le quarré de FR, par la 47. prop. 1. eſt egal à iceux quarrez de LR, LF. Donc le quarré de FR eſt egal au quarré du coſté du pentagone; & par conſequent la ligne RF ſera egale à LP coſté du pentagone, ou à FG, c'eſt à dire à RX. Par la meſme raiſon, les autres lignes RG, SG, &c. ſeront egales aux autres coſtez de chaſque pentagone: & partant les 10. triangles REX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIk, VKX, XkF, ſeront equilateraux, & egaux entr'eux. Maintenant ſoit prolongée de part & d'autre la perpendiculaire EQ, tellement que QY, EZ ſoient egales au coſté du decagone, & ſoient tirées les lignes VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. D'autant que QX eſt ſemy-diametre du cercle RSTVX, c'eſt à dire coſté de l'exagone, & QY eſt coſté du decagone de meſme cercle; par la 10. prop. 13. le quarré de XV coſté du pentagone, ſera egal aux quarrez de QX, QY. Mais par la 47. propoſition 1. à iceux quarrez de QX, QY, eſt auſſi egal le quarré de XY (car

l'angle XQY eſt droict, eſtant EQ perpendiculaire à l'vn & l'autre plan des cercles parallels.) Donc le quarré de XY eſt egal au quarré de XV; & partant la ligne XY egale à la ligne XV. Par meſme raiſon XV ſera demonſtrée egale à VY; & partant le triangle VYX eſt equilateral. Par meſme maniere, (eſtãs tirées les lignes RY, SY, TY, leſquelles ne ſont tirées pour euiter confuſion) les quatre triangles RYX, RYS, SYT, TYV, ſeront demonſtrez equilateraux, & egaux au triangle VYX, c'eſt à dire aux dix premiers triangles, puis que tous leurs coſtez ſont egaux aux coſtez du pentag. Par sẽblable argument ſera prouué que le triangle GZH eſt equilateral; cõme auſſi les 4. autres triang. HZI, IZk, kXF, FZG, (deſquels toutesfois nous n'auons auſſi tiré les lignes, à fin d'euiter la confuſion) tous leſquels ſeront egaux aux 15. precedans. Veu donc que tous ces 20. triangles ſont equilateraux, & egaux, & qu'ils ſe conioignent les vns aux autres par lignes droictes; ſera conſtitué d'iceux vn Icoſaedre: lequel ie dis eſtre inſcriptible en la ſphere donnée, de laquelle le diametre eſt AB. Car ayant couppé en deux egalement EQ en a, & tiré les lignes a F, a X, a V, les coſtez a Q, QV du triangle a QV ſeront egaux aux coſtez a Q, QX du triangle a QX, (car QV, QX, ſont ſemy-diametres du cercle RSTVX) & les angles a QV, a QX ſont droicts: & partant par la 4. p. 1. les baſes a V, a X ſeront egales. Par la meſme raiſon, ſi on tire des lignes de a & Q à R, S, T, les lignes a R, a S, a T ſeront demonſtrées egales entr'elles, & à icelle a V, a X. Et puis que les coſtez a Q, QX du triangle a QX, ſont egaux coſtez a E, EF du triangle a EF, (pource que QX, EF sõt demy diametres de cercles egaux, & EQ eſt couppée en deux ega-

lement en α,) & les angles α QX, α EF ſont auſſi egaux, ſçauoir droicts; par la 4. prop. 1. les baſes α X, α F, ſeront auſſi egales. Par meſme raiſon, ſi de α & E on tire des lignes droictes à G, H, I, K, on demonſtrera les lignes α G, α H, α I, α K, eſtre egales à icelles α X: & partant les dix lignes droictes tirées de α aux dix angles F, G, H, I, k, R, S, T, V, X, ſont egales. Et d'autant que QE eſt ſemidiametre, c'eſt à dire coſté de l'exagone du cercle FGH1K; & EZ coſté du decagone du meſme cercle; par la 9. prop. 13. QZ ſera diuiſée en la moyenne & extreme raiſon en E, & le plus grand ſegment ſera QE. Parquoy par la 3. prop. 13. le quarré de AZ ſera quintuple du quarré de E α. Mais le quarré de α F eſt auſſi quintuple du meſme quarré de E α: Car le quarré de EF eſtant quadruple du quarré de E α par le ſcholie de la 4. prop. 2. pource que EF eſt pouble de E α; les quarrez de EF, E α, ſont le quintuple du quarré de E α. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de α F eſt egal à iceux quarrez de EF, E α: donc auſſi le quarré d'icelle α F ſera quintuple d'iceluy quarré de E α.) Donc les quarrez de α Z, α F, ſont egaux: & par conſequent les lignes α Z, α F ſeront egales. Et puis que α E, α Q, & EZ, QY ſont egales, auſſi α Z, α Y ſeront egales; & toutes les lignes droictes tirées de α, à tous les angles de l'iſcoſaedre pareillement egales. Parquoy la ſphere deſcrite à l'entour du diametre ZY, paſſera par tous les angles de l'Iſcoſaedre. Car d'autant que par la 15. prop. 5. comme α Z eſt à α E, ainſi YZ à QE, & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de α Z eſt au quarré de α E, ainſi le quarré de YZ au quarré de QE, & que le quarré de α Z a eſté demonſtré quintuple du quarré de α E: pareillement le quarré YZ ſera quintuple du quarré de

QE, c'eſt à dire du quarré de DB ſon egale. Mais auſſi le quarré de AB eſt quintuple du meſme quarré de BD : car AB, BD, BC eſtans proportionaux par le corol. de la 8. prop. 6. le quarré de AB ſera au quarré de BD, comme AB à BC par le corol. de la 20. pr. 6. & partant AB eſtant quintuple de BC, auſſi le quarré de AB ſera quintuple du quarré de BD.) Donc les quarrez de YZ, AB ſont egaux ; & partant les lignes YZ, AB, & les ſpheres deſcrites à l'entour d'icelles ſeront egales.

Ie dis finablement que le coſté de l'icoſaedre eſt ligne irrationele, appellée ligne mineure : ce qui eſt euident par la 11. prop. 13. eſtant par la 6. prop. 10. le demy diametre EF, ou ſon egale *BD*, ligne rationele commenſurable en puiſſance à la poſée rationele AB, de laquelle nous auons monſtré que le quarré eſtoit quintuple du quarré de BD. Nous auons donc faict ce qui eſtoit propoſé.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte que le quarré du diametre de la ſphere eſt quintuple du quarré du ſemidiametre du cercle comprenant 5 coſtez de l'icoſaedre.

Et auſſi qu'iceluy diametre de la ſphere eſt composé du coſté de l'hexagone, & de deux coſtez du decagone, deſcrit en vn meſme cercle.

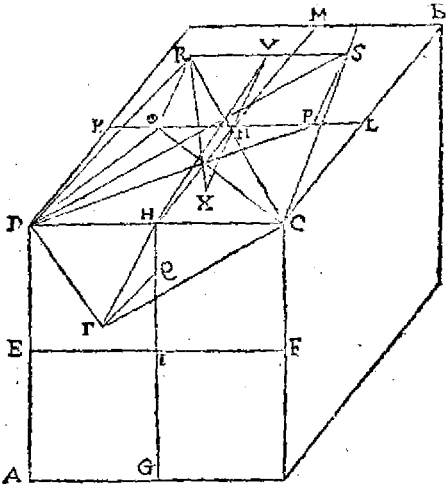
Et encore que le coſté de l'icoſaedre eſt egal au coſté du pentagone, par le moyen duquel eſt conſtruit iceluy icoſaedre.

PROL. 5. PROP. XVII.

Dans vne ſphere donnée, inſcrire vn

dodecaedre: Et mõſtrer que ſon coſté eſt ligne irrationele, appelee reſidu.

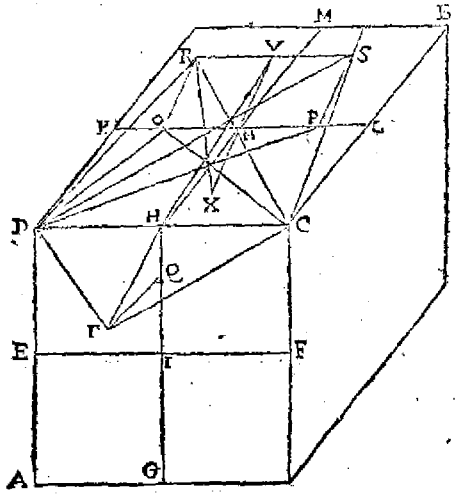
Soit le cube AB, & d'iceluy les deux plãs exterieurs AC, & DB, ſe rencontrans à droits angles à la ligne de commune ſection DC: & d'iceux plans tous les



coſtez ſoient couppez en deux egalement, ſçauoir AC, par les deux lignes EF, GH ſe couppans au poinct I; & DB, par les lignes kL & HM ſe couppans au poinct N. Item, ſoient les trois lignes kN, N L, H I couppées en la moyenne & extreme raiſon aux poincts O, P, Q, deſquelles les plus grands ſegmens ſoient O N, N P, I Q: Et par la 12. prop. 11. ſoient leuées les deux lignes O R, P S perpendiculaires au plã DB: mais QT au plan AC, leſquelles ſoiẽt poſées égales aux trois ſegmens ON, N P, I Q. Puis ſoiẽt menées les lig. DR, RS, DT, CS, CT. Ie dis que

DRSCT est pentagone equilateral constitué sur mesme plan, & equiangle.

Car soient menées les lignes DO, DP, DS: & d'autant que KN est couppée en la moyenne & extreme raison au poinct O, & que ON est le plus grand segmẽt, par la 4. p. 13. les deux quarrez de KN, kO seront triples du quarré de ON: Et KN estant egale à kD & ON à OR, les deux quarrez de kD, & kO, ou par la 47. prop. 1. le seul de DO, est triple du



quarré de OR: & le quarré de DR, qui est egal à tous les deux, par la 47. prop. 1. sera quadruple du seul de RO: Et d'autant que RS est double de RO, son quarré, par le scholie de la 4. prop. 2. sera aussi quadruple du quarré de OR, aussi bien que le quarré de DR: Partant les lignes DR, RS seront egales. Par mesme discours on mõstrera l'egalité des trois autres costez SC, CT, TD tant entr'eux qu'aux deux DR, RS: donc le pentagone est equilateral.

Ie dis maintenant qu'il eſt en vn meſme plan. Soit menee NV, parallele à OR: Item les deux TH & HV. Ie dis qu'icelles deux lignes ſe rencontrent directement, & font vne ſeule ligne droicte THV. Car pour autant que HI eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct Q; IH ſera à IQ, comme IQ à QH. Mais HN eſt egale à HI, & NV à IQ, & QT à QI: donc comme HV eſt à NV, ainſi QT à QH. Parquoy puis que les triangles NVH, QTH, ont deux coſtez proportionaux à deux coſtez, & ſont compoſez à vn angle H, tellement que les coſtez homologues ſont paralleles par la 6. prop. 11 ſçauoir HN & TQ, qui ſont perpendic. au plan du quarré AC: & NV, QH qui ſont à angles droicts ſur le plan DB: par la 32. prop. 6. THV ſera vne ſeule ligne droicte. Or par la 1. prop. 11. toute ligne droicte eſt en vn meſme plan: par conſequent le pentagone DRSCT eſt en vn meſme plan.

Ie dis encores qu'il eſt equiangle: Car puis que kN eſt couppee en moyenne & extreme raiſon, eſtãt ON plus grand ſegment, par la 5. prop. 13. en adiouſtant KN à NP, egale au plus grand ſegment ON; la toute BP ſera couppee en la moyẽne & extreme raiſõ au poinct N, & ſera KN le plus grand ſegment: & partant par la 4. propoſ. 13. les quarrez de KP & NP (ou PS ſon egale) ſont triples du quarré de KN, (ou de ſon egale KD.) & en adiouſtant le quarré de KD auec les deux de KP & PS, iceux trois quarrez ſeront quadruples dù ſeul de kD (ou par la 47. propſ. 1. au lieu des deux de kP & kD, le ſeul de DP auec celuy de PS, ou encore le ſeul de DS, ſera quadruple du quarré de kD) duquel le quarré de DC eſt auſſi quadruple par le ſcholie de la 4. p. 2. eſtant DC double de kD: partant les deux lig. DC & DS ſeront egales:

Mais auſſi eſtans tous les coſtez du pentagone egaux, les deux triangles D CT, DSR auront les trois coſtez egaux aux trois coſtez chacun au ſien : Et par la 8.propoſ. 1. l'angle au poinct R ſera egal à l'angle au poinct T. Et ſemblablement nous monſtrerons que l'angle RSC eſt egal à l'angle DTC : ainſi trois angles du pentagone ſeront egaux, & par la 7. prop. 13. il ſera equiangle. Il eſt auſſi equilateral, & ſur DC l'vn des coſtez du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que ſi on veut conſtruire de meſme façon vn pentagone, ſur chacun des vnze coſtez reſtans, on trouuera vne figure ſolide enuironnee de douze pentagones equiangles & equilateraux: Et par les def. ſera dodecaedre.

Ie dis d'auantage qu'il eſt inſcriptible en la ſphere donnee. Car ſi on prolonge VN, qui eſt perpendic. ſur le centre du quarré DB : il appert par la 39. prop. 11. qu'elle couppera la diagonale du cube en deux egalement : qu'elle la couppe donc au poinct X, auquel poinct ſera le centre de la ſphere enuironnant le cube par le coroll. de la 15. prop. 13. & NX eſt egale au demy coſté du cube : Soit menee la ligne RX. Or nous auons tantoſt monſtré par la 4. prop. 13. que les quarrez de KP & NP ſont triples du quarré de KN: Mais VX eſt egale à kP ; & RV à NP : (car NX eſt egale à KN : & VN à NP). Partant les deux quarrez de RV, XV, ou le ſeul de RX, par la 74. prop. 1. eſt triple du quarré de kN : Mais par la 15. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere circonſcripte au cube, eſt triple du quarré du coſté d'iceluy cube: Et par la 15. prop. 5. le quarré du demy diametre eſt triple au quarré du demy coſté. Or KN eſt le demy coſté du cube: Partant RX ſera le demy diametre de la ſphere circõſcrite au cube AB, duquel le centre eſt X. Par

meſme diſcours nous monſtrerons que du poinct X toutes les lignes menees vers les autres angles du dodecaedre, ſont egales au demy diametre de la ſphere circonſcripte au cube. Partant vne meſme ſphere pourra eſtre circonſcripte au cube & au dodecaedre.

Ie dis finalement que le coſté du dodecaedre eſt ligne irrationele appellee reſidu. Car d'autant que les deux demy coſtez du cube KN, NL ſont chacun couppez en la moyenne & extreme raiſon: par la 15. prop. 5. toute la ligne KL ſera aux deux plus grands ſegmens enſemble, ſçauoir à OP, comme iceux plus grands ſegmens ſont aux plus petits enſemble, ſçauoir à la compoſee de KO & PL. Parquoy ſi KL coſté du cube eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, le plus grand ſegment ſera OP. Mais la toute KL ainſi conppee eſt rationele: (car ſon quarré eſt commenſurable au quarré du diametre de la ſphere, lequel eſt poſé rationel: puis qu'il eſt le tiers d'iceluy par la 15. prop. 13) Donc par la 6. p. 13. le plus grand ſegment OP, c'eſt à dire RS coſté du dodecaedre qui luy eſt egal, eſt ligne irrationele, appellee reſidu. Nous auons donc faict tout ce qui eſtoit propoſé.

COROLLAIRE.

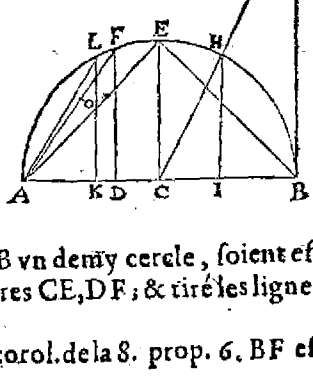
De cecy reſulte que le coſté d'vn cube eſtant couppé en la moyenne & extreme raiſon, le plus grand ſegment ſera le coſté du dodecaedre inſcrit en vne meſme ſphere.

Auſsi que le coſté du cube eſt egal à la ligne droicte ſubtendant vn angle du pentagone du dodecaedre. Et d'autant qu'icelle meſme ligne eſtant couppée en la moyenne & extreme raiſon, par la 8. prop. 13. le plus grand ſegment eſt coſté

d'vn pentagone: & partant par la 5. prop. 13. la ligne droicte composee d'icelle, c'est à dire du costé du cube, & du plus grand segment, c'est à dire du costé du dodecaedre, est semblablement diuisee, & le moindre segment est costé du dodecaedre, mais le plus grand est costé du cube: Il s'ensuit que si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, & que le moindre segment soit costé du dodecaedre: le plus grand segment sera costé du cube inscrit en la mesme sphere.

PROB. 6. PROP. XVIII.

Le diametre d'vne sphere estant donné; trouuer les costez des cinq figures inscrites en icelle; & les comparer entr'eux.



Soit le diametre d'vsphere donnee AB; & il faut premierement trouuer les costez des cinq figures inscriptibles en icelle sphere.

Soit diuisé le diametre AB en deux egalement au poinct C; mais au poinct D, tellement que AD soit la tierce partie de AB; puis ayant descrit sur AB vn demy cercle, soient esleuees les perpendiculaires CE, DF; & tirés les lignes AE, AF; BE, BF.

D'autant que par le corol. de la 8. prop. 6. BF est

moyenne proportionele entre AB, BD ; par le córol. de la 20. prop. 6. comme AB ſera à BD, ainſi le quarré de AB au quarré de BF. Mais AB eſt à BD en raiſon ſeſquialtere : (car par conſtruction AB contient 3 telles parties que AD 1, & BD 2) Donc auſſi le quarré de AB eſt au quarré de BD, en raiſon ſeſquialtere: & partant puis que par la 15. propoſ. 13. le quarré du diametre de la ſphere eſt en raiſon ſeſquialtere au quarré du coſté de la pyramide equilaterale ou tetraedre : BF ſera le coſté du tetraedre inſcrit en la ſphere du diametre AB.

Derechef puis que par le meſme coroll. de la 8. p. 6. AE eſt moyenne prop. entre AB, AC : & partant comme AB eſt à AC ainſi le quarré de AB au quarré de AE par le corol. de la 20. prop. 6. & AB eſt double de AC : auſſi le quarré de AB ſera double du quarré de AE. Parquoy puis que par la 14. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere eſt double du coſté de l'octaedre, AE ſera coſté de l'octaedre inſcrit en la ſphere du diametre AB.

Et pour autant que par les meſmes coroll. de la 8. propoſ. & 20. prop. 6. le quarré de AB eſt au quarré de AF, comme AB à AD, & que par la conſtruction AB eſt triple de AD, le quarré de AB ſera triple du quarré de AF. Parquoy veu que par la 15. p. 13. le quarré du diametre de la ſphere eſt triple du quarré du coſté du cube, AF ſera le coſté du cube inſcrit en la ſphere du diametre AB.

Et d'autant que AF eſt coſté du cube, ſoit iceluy couppé en la moyenne & extreme raiſon au poinct O, duquel le plus grand ſegment ſoit AO : iceluy (par le corol. de la 17. prop. 13.) ſera le coſté du dodecaedre inſcrit en la meſme ſphere que le cube, qui eſt celle-là meſme qui a pour diametre AB.

quant au costé de l'icosaedre, soit leuée la perpendiculaire BG egale à AB: & apres auoir mené la ligne CG couppant la circonference du demy cercle en H, d'iceluy poinct soit menee HI perpendic. à AB par la 12. prop. 1. Or BG estant egale à AB, elle sera double de BC: & partant par la 4. prop. 6. HI sera double de IC: (car les triangles sont equiangles, pource qu'ayans l'angle C commun, & ceux des poincts B & I droicts: le tiers G sera egal au tiers H par la 32. prop. 1.) & par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré de HI sera quadruple du quarré de IC: & partant le quarré de HC (ou de son egale AC) qui par la 47. prop. 1. est egal à tous les deux, sera quintuple du quarré de CI. Mais d'autant que AD est le tiers du diametre AB, & AC sa moitié, DC sera le demy tiers: & partant AC sera triple de DC; & son quarré vaudra neuf fois le quarré de DC, par la 20. prop. 6. Or iceluy quarré de AC n'est que quintuple du quarré de CI: donc la ligne CI sera plus grande que DC. Soit prise CK egale à CI, & apres auoir leué la perpendiculaire kL, soit menee la ligne AL. Puis donc que le quarré de AC est quintuple du quarré de CI, par la 15. prop. 5. le quarré de AB, (la double de AC) sera quintuple du quarré de Ik (la double de IC.) Or par le corol. de la 16. propo. 13. le quarré du diametre de la sphere circonscrite à l'Icosaedre est quintuple au quarré du demy diametre du cercle circonscriuãt 5. costez de l'Icosaedre: donc CK sera semidia. c'est à dire costé de l'hexag. d'iceluy cercle, lequel costé de l'hexagone auec deux fois le costé du decagone inscrit dans le mesme cercle, est egal au diametre de la sphere AB, par le coroll. de la mesme 16. prop. 13. Il faut donc que Ak. & IB lignes egales, soient les deux costez du decagone inscrit dans le mesme cercle,

dans lequel kI est le costé de l'hexagone. Mais KI & kL sont egales : (car KL est egale à IH, pour estre en mesme distance du centre C, laquelle estant double de CI sera egale à kI.) Partant KL sera costé de l'hexagone, & AK du decagone: & par la 47. prop. 1. & 10. prop. 13. AL sera le costé du pentagone inscrit au mesme cercle. Donc il sera aussi le costé de l'Icosaedre, par la 16. prop. 13.

Nous auons donc trouué les costez des 5. figures regulieres inscriptibles en vne mesme sphere.

Maintenant pour le regard de la comparaison d'iceux costez trouuez. D'autant qu'il a esté demonstré que le quarré du diametre de la sphere est sesquialtere au quarré du costé de la pyramide : mais double de celuy du costé de l'octaedre, & triple du quarré du costé du cube ; il est euident que le quarré du diametre de la sphere estant 6. celuy du costé du tetraedre sera 4. celuy du costé de l'octaedre 3. & celuy du costé du cube 2. Partant le quarré du costé de la pyramide est sesquitierce au quarré de l'octaedre : mais double de celuy du costé du cube. Item le quarré du costé de l'octaedre est sesquialtere à celuy du costé du cube. Parquoy les quarrez des costez d'icelles trois figures, & celuy du diametre de la sphere, sont entr'eux comme nombre à nombre : & partant par la 6. prop. 10. Iceluy diametre de la sphere, & costez d'icelles figures sont lignes commens. & rationeles, pource que le diametre est posé rationel. Mais les susdits quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ainsi qu'il appert par le corol. de la 24. prop. 8. Donc icelles lignes (sçauoir le diametre de la sphere, le costé de la pyramide, le costé de l'octaedre, & celuy du cube,) sont incommens. en longitude par la 9. propost. 10.

& partant elles sont rationeles commensurables en puissance seulement.

Et quant aux, costez de l'icosaedre, & dodecaedre: pource qu'ils sont lignes irrationeles, il est euident que ils sont incommensur. tant entr'eux, qu'au diametre de la sphere, & aux costez des autres figures.

Or lesquels d'iceux costez sont les plus grands, nous le rendrons manifeste ainsi: d'autant qu'il a esté demonstré cy dessus que le quarré de AB est triple du quarré de AF: mais quintuple du quarré de kl, c'est à dire de KL son egale; trois quarrez de AF seront egaux à 5 quarrez de kL. Et puis que AF est couppée en la moyenne & extreme raison en O, & AO est le plus grand segment, il est euident par la 1. p. 6. que le rectangle compris de AF, AO sera plus grand que le rectangle de AF, OF: & partant iceux deux rectangles ensemble, seront plus grands que le double du rectãgle de AF, OF: Mais à iceux deux rectangles ensemble, est egal le quarré de AF, par la 2. prop. 2. & au double du rectangle de AF, OF, est egal le double du quarré de AO: (car par la 17. prop. 6. le simple rectangle de AF, OF est egal au simple quarré de AO.) Donc aussi le quarré de AF sera plus grand que deux fois le quarré de AO: & par consequent trois quarrez de AF, ou cinq quarrez de KL leurs egaux, seront aussi plus grands que 6. quarrez de AO. Parquoy vn seul quarré de kL sera plus grand qu'vn seul quarré de AO: & par consequent la ligne kL sera plus grande que AO: Partant AL qui est plus grande qu'icelle KL, sera beaucoup plus grande que la mesme AO costé du dodecaedre. Nous auons donc faict ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

Or outre les cinq figures solides cy dessus declarees, on n'en peut

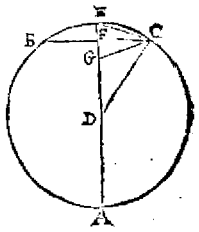
peut trouuer d'autres compriſes de ſuperficies planes, equiangles, & equilaterales. Car de deux triangles, ou deux autres ſuperficies planes, on ne comprendra aucun ſolide, ne pouuant conſtituer vn angle ſolide. De trois triangles equilateraux, eſt conſtitué l'angle de la pyramide: de quatre, l'angle de l'octaedre: de cinq, l'angle de l'icoſaedre: de ſix triangles equilateraux on ne conſtituera aucun angle ſolide: car iceux ſont egaux à quatre angles droicts, & tous les angles plans d'vn angle ſolide, doiuent eſtre plus petits que quatre angles droicts par la 21. prop. 11. Partant on ne pourra conſtituer vn angle ſolide de plus de ſix angles plans. De trois angles droicts eſt compoſé l'angle ſolide du cube: de quatre angles droicts on ne fera aucun angle ſolide: car ce ſeroit touſiours contreuenir à la 21. prop. 11. l'angle ſolide du dodecaedre eſt compris de trois pentagones equiangl. De quatre pentagones, il ſera impoßible: eſtans iceux plus grands que quatre droicts. Et de pas vn autre polygone equiangle, on ne pourra conſtituer aucun angle ſolide, d'autant qu'il s'enſuyuroit abſurdité. Partant il eſt euident qu'outre les cinq figures regulieres cy deſſus declarées, on n'en trouuera point d'autres,

Fin du treziesme Element.

ELEMENT QVATORZIESME.

THEOR. 1. PROP. 1.

LA ligne droicte perpendiculaire menee du centre vers le coſté du pentagone inſcrit au cercle, eſt la moitié des deux coſtez de l'hexagone, & decagone enſemble, inſcrits au meſme cercle.



Soit dans le cercle ABC, le coſté du pentagone BC, & du centre D ſoit menee la ligne DF, tombant perpendiculairement ſur iceluy coſté BC; & icelle eſtant prolongee de part & d'autre iuſques en A & E, elle couppera l'arc BEC en deux egalement, comme la ligne BC par la 3. propoſ. 3. ainſi eſtant tiree la ligne EC, elle ſera le

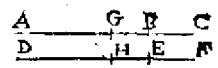
costé du decagone, & DE costé de l'hexagone. Ie dis que la perpendiculaire DF est la moitié des deux costez ensemble EC & DE.

Qu'il ne soit ainsi, Apres auoir pris FG egale à FE, soit menee la ligne GC. Puis que l'arc BEC est la cinquiesme partie de la circonference du cercle, EC sa moitié sera la cinquiesme partie de la demy circonference ACE: Et partant l'arc AC sera quadruple de CE, & par la 33.prop.6. l'angle CDA sera quadruple de CDE au centre, & double de DEC à la circonference par la 20.prop.3. lequel par ce moyen sera double à CDE: mais par la 4.prop.1. la base CE est egale à le base CG: & par la 5.propos.1. les deux angles sur la base EG seront egaux: & FGC sera double de GDC: & iceluy FGC estant par la 32.prop.1. egal à tous les deux opposez interieuremẽt, les deux angles sur la base DC seront egaux entr'eux: & par la 6.prop.1. GC & GD seront egales; & EC à chacune d'icelles. Parquoy les deux GF & FE estans egales, la seule FD, sera egale aux deux FE, EC ensemble: & partant les trois ensemble DF, FE, EC, c'est à dire les deux ensemble DE, EC, seront egales au double de la seule DF: & par consequent icelle DF perpendiculairement tiree du centre sur le costé du pentagone, sera moitié des deux ensemble DE, EC, costez de l'hexagone, & du decagone. Parquoy la ligne droicte perpendiculaire menée du centre vers le costé du pentagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 2. PROP. 11.

S'il y a deux lignes droictes couppees en

la moyenne & extreme raiſon; elles ſeront ſemblablement couppees.



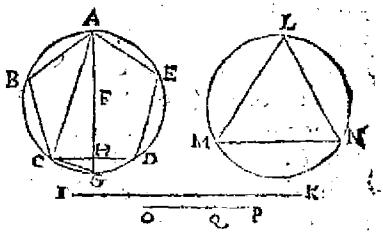
Soient les deux lignes AB & DE couppees en la moyenne & extreme raiſon aux poincts G & H: leurs plus grands ſegmens ſoient AG & DH. Ie dis qu'icelles lignes ſont ſemblablement couppees: c'eſt à dire que comme AB eſt à DE, ainſi AG à DH, & GB à HE: Item comme AG à GB, ainſi DH à HE, &c.

Car par la 17. prop. 6. comme le rectangle de AB, & GB, ſera egal au quarré de AG, ainſi le rectangle de DE & HE ſera egal au quarré de DH: & partant quatre fois le rectangle de AB & GB ſera au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE au quarré de DH: & en compoſant (apres auoir adiouſté directement BC egale à BG; & EF egale à EH quatre fois le rectangle de AB & GB auec le quarré de AG (ou par la 8. propoſit. 1. le ſeul quarré de AC) eſt au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE, auec le quarré de DH, (ou le ſeul quarré de DF) eſt au quarré de DH: Parquoy par la 22. prop. 6. comme AC à AG, ainſi DF à DH: Et en compoſant comme la compoſee de AC, AG, c'eſt à dire la double de AB, eſt à AG, ainſi la compoſee de DF, DH, c'eſt à dire la double de DE, eſt à DH: & en permutant comme la double de AB eſt à la double de DE, ainſi AG à DH: Et par la 15. prop. 5. comme la double de AB eſt à la double de DE, ainſi AB à DE. Donc comme AB ſera à DE, ainſi AG à DH: & partant par la 19. prop. 5. ainſi ſera

auſſi le reſte GB au reſte HE. Parquoy comme AG à DH, ainſi ſera GB à HE, puis que l'vne & l'autre raiſon eſt comme AB à DE: & en permutant comme AG ſera à GB, ainſi DH ſera à HE: & ainſi ſelon toutes les autres manieres d'argumenter és proportions, on demonſtrera toutes lignes, & parties d'icelles eſtre proportioneles entr'elles. Parquoy s'il y a deux lignes droictes couppees en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 3. PROP. III.

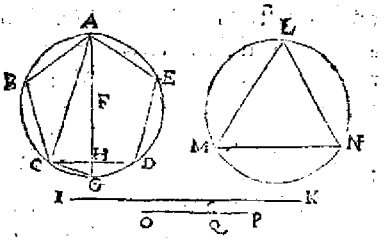
Vn meſme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icoſaedre inſcrit en vne meſme ſphere.



Auparauãt que d'expliquer ceſte prop. il conuient demonſtrer que le quarré du coſté du pentagone auec le quarré de la ligne qui ſouſtient vn angle d'iceluy, eſt quintuple du quarré demy diametre du cercle dans lequel eſt inſcrit iceluy pentagone.

Soit le coſté du pentagone inſcrit dans vn cercle CD, la ligne qui ſouſtient vn angle d'iceluy pentagone CA, le demy diametre FG; lequel couppe en

deux egalement, tant l'arc CGD que le costé CD, par le corol. de la 10. prop. 15. Ie dis que les deux quarrez de CA & CD sont ensemble quintuples du quarré de FG.



Car si on meine CG, ce sera le costé du decagone: & par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré de AG, sera quadruple du quarré du demy diametre FG; & par consequent les deux de AC, CG, qui par la 47. prop. 1. sont egaux au quarré de AG, seront aussi quadruple d'iceluy quarré de FG. Parquoy les trois de AC, CG, & GF, seront ensemble quintuples du seul de GF: Mais les deux de CG, & GF, costez de l'hexagone & decagone sont ensemble egaux aux quarre de CD costé du pentagone, par la 10. propos. 13. partant les deux quarrez de AC & CD sont quintuples du quarré de GF. Ce qui estoit proposé.

Pour la proposition. Soit IK le diametre de la sphere comprenant le dodecaedre & l'Icosaedre; & d'iceluy dodecaedre soit vn pentagone AFCDE, & le l'Icosaedre soit le triangle equilateral LMN: ie dis qu'vn mesme cercle circonscrit le pentagona ABCDE, & le triangle LMN; c'est à dire que les cercles ABCDE, LMN, qui les circonscriuent sont egaux.

Car estant tiree AC subtendante de l'angle du pentagone B, ce sera le costé du cube inscrit en la mesme sphere, par le corol. de la 17. prop. 13. & soit exposee la ligne droicte OP, telle que le quarré de IK diametre de la sphere, soit quintuple du quarré

d'icelle OP : laquelle OP sera egale au demy diametre du cercle, dans lequel on construit l'Icosaedre par le corol. de la 16. prop. 13. soit icelle OP couppee en la moyenne & extréme raison en Q ; & le plus grand segment OQ sera costé du decagone inscrit au mesme cercle, dont OP est costé de l'hexagone ou semi-diametre, par le corol. de la 9. prop. 13. Mais par la 7. proposit. 13. lors que CA est diuisee en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment est AB : Donc par la 2. proposit. 14. comme la toute AC sera à la toute OP, ainsi le plus grand segment AB sera au plus grand segment OQ : partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de AC sera au quarré de OP, ainsi le quarré de AB sera au quarré OQ ; & par la 4. prop. 5. comme le triple du quarré de AC est au quintuple du quarré de OP, ainsi le triple du quarré de AB est au quintuple du quarré de OQ. Mais le triple du quarré de AC est egal au quintuple du quarré de OP : (pource que le quarré de lk diametre de la sphere, est egal, tant au triple du quarré de AC costé du cube, par. la 15. propo. 13. que au quintuple du quarré de OP par l'hypothese.) Donc aussi le triple du quarré de AB sera egal au quintuple du quarré de OQ. Or par le coroll. de la 16. prop. 13. ML costé du triangle de l'Icosaedre, est egal au costé du pentagone inscrit dans le cercle, dont OP est demi-diametre : & partant puis que par la 10. propos. 13. le quarré d'iceluy costé est egal aux deux quarrez de OP, & OQ, costez de l'hexagone & du decagone ; cinq quarrez de ML, seront egaux à cinq quarrez de OP, & à cinq de OQ : ou à trois de BA, & trois de AC. Parquoy les deux quarrez de BA, & AC, estans quintuples du quarré du demi-diametre FA, (comme nous auons demonstré au

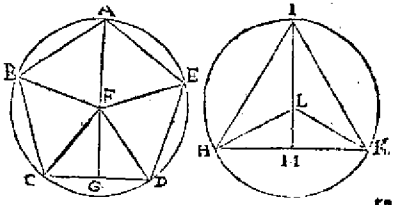
commencement de ceſte propoſition) trois quarrez de AB, & AC ſeront egaux à quinze quarrez du demy diametre FA. Mais cinq quarrez de ML, coſté du triangle equilateral, ſont auſſi egaux à quinze quarrez du demy diametre du cercle LMN: (car chacun quarré de ML eſt triple du quarré du demy diametre, par la 12. propoſit. du 13.) Donc les trois de BA & AC, eſtans egaux aux cinq de ML, les quinze du demy diametre FA, ſeront egaux aux quinze du demy diametre du cercle LMN: Partant vn quarré d'iceux ſera egal à vn quarré, & le demy-diametre au demy-diametre, & par conſequent les cercles ABCDE, LMN ſeront egaux. Donc vn meſme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 4. PROP. 1111.

Si du centre du cercle circonſcriuant le pentagone du dodecaedre, on meine vne ligne droicte perpendiculaire ſur vn coſté d'iceluy pẽtagone; trente fois le rectangle compris de la perpendiculaire, & du coſté du pentagone, ſont egaux à toute la ſuperficie du dodecaedre.

Soit le cercle ABCDE circonſcriuãt vn pẽtagone d'vn dodecaedre, & le centre d'iceluy cercle ſoit F, duquel ſoit tiree FG perpendiculairement ſur le coſté CD. Ie dis que trente fois le rectangle compris de la perpendiculaire FG & coſté CD, ſont egaux à la ſuperficie du dodecaedre.

Car ayant tiré les lignes FA, FB, FC, FD, FE: il eſt euident par la 41. prop. 1. que le rectangle compris de FG, CD, eſt double du triangle CFD. Or en la ſuperficie du dodecaedre, il y a douze pentagones egaux, & chaſque pentagone a cinq pareils triangles que CFD, qui ſont en tout ſoixante triangles, deſquels ſoixante rectangles, ſeroient le double: Donc trente rectangles de FG, & CD, leur ſeront egaux.



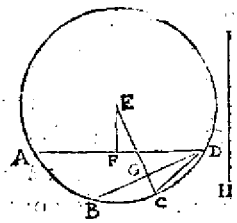
Nous demõſtrerõs ſemblablement, que ſi vn triangle equilateral, cõme HIk, eſt inſcrit en vn cercle, du centre duquel L, on tire ſur le coſté Hk la perpendiculaire LM: trente fois le rectangle de LM & HK, ſeront egaux à la ſuperficie de l'Icoſaedre. Car icelle ſuperficie contient vingt triangles equilateraux ſemblables à HIK; & chacun d'iceux ſe diuiſe en trois egaux entr'eux, & ſemblables & egaux à HLk, qui ſont en tout ſoixante triangles comme HLk: mais le rectangle de la perpendiculaire LM & du coſté HK, eſt double du triangle HLK, par la 41. p. 1. Et par conſequent ſoixante rectangles ſeroient doubles de ſoixante triangles: Donc trente rectangles de LM & Hk ſeront egaux à la ſuperficie totale de l'icoſaedre. Si donc du centre du cercle circonſcriuant le pentagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte, par la 15. prop. 5. que comme vn ſeul rectangle de FG & CD, eſt à vn ſeul rectangle de LM & Hk, ainſi la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie de l'icoſaedre.

THEOR. 5. PROP. V.

Comme la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'Icosaedre; ainsi le costé du cube est au costé de l'icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.



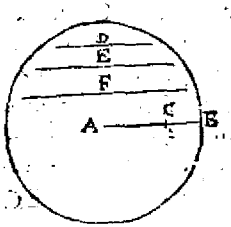
Dans le cercle donné A BCD soit pris AD le costé du triangle equilateral de l'icosaedre, & dans le mesme cercle le costé du pentagone du dodecaedre (ce que nous auons monstré estre possible par la 2. prop. 14. qu'vn mesme cercle comprend & le triangle de l'icosaedre, & le pentagone du dodecaedre.) Soit donc iceluy costé du pentagone BD, & du centre E soient tirees sur AD, BD les perpendiculaires EF, EG: & icelle EG estant prolongee iusques à la circonference, elle couppera l'arc BCD en deux egalement en C: & estant tiree la ligne droicte CD, ce sera le costé du decagone: & finalement soit exposee la ligne droicte H costé du cube inscrit en la mesme sphere. Ie dis que la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'Icosaedre, comme H costé du cube, est à AD costé de l'Icosaedre.

Car d'autant que EC est costé de l'hexagone, & CD costé du decagone inscrit en vn mesme cercle;

la composée d'iceux costez, sera couppée en la moyenne & extreme raison, dont le plus grand segment sera EC par la 9. prop. 13. & par la 1. prop. 14. la moitié d'icelle composée est EG; & par le corol. la 12. prop. 12. la moitié d'iceluy plus grand segment est EF: Et partant puis que par la 15. prop. 5. les toutes sont aux toutes, comme les moitiez aux moitiez: il est euident que la moitié EG estant couppée en la moyenne & extreme raison, la moitié EF sera le plus grand segment (car la moitié du plus grand segment, & la moitié du plus petit faict la moitié de la toute.) Mais par le corol. de la 17. prop. 13. H costé du cube estant aussi couppé en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment sera BD costé du dodecaedre. Donc par la 2. prop. 14. comme la toute H, sera à BD son plus grand segment, ainsi la toute EG sera à EF son plus grand segment: Et partant par la 16. prop. 6. le rectangle compris des extremes H, EF, sera egal au rectangle des moyennes BD, EG. Et pource que par la 1. pr. 6. comme H est à AD, ainsi le rectangle de H, EF, est au rectangle de AD, EF: aussi comme H sera à AD, ainsi le rectangle de BD, EG (lequel est egal à celuy de H, EF) est au mesme rectangle compris sous AD, EF. Parquoy puis que par le corol. de la preced. comme le rectangle compris sous BD, EG, est au rectangle compris de AD, EF, ainsi la superficie du dodecaedre est à la superficie de l'icosaedre: pareillement comme H costé du cube sera à AD costé de l'icosaedre, ainsi sera la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte eſt couppée en la moyenne & extreme raiſon; comme les deux quarrez de la toute & du plus grand ſegment, ſont aux deux quarrez de la toute & du plus petit ſegment, ainſi le quarré du coſté du cube, eſt au quarré du coſté de l'icoſaedre inſcrit en vne meſme ſphere.



Soit le cercle comprenant & le triangle de l'icoſaedre, & le pentagone du dodecaedre, duquel le demy diametre AB, ſoit couppé en la moyenne & extreme raiſon en C, le plus grãd ſegment ſoit AC, lequel ſera le coſté du decagone inſcrit dans le meſme cercle par le corol. de la 9. prop. 13 Item ſoient priſes trois lignes, D coſté du dodecaedre, E coſté de l'icoſaedre, & F coſté du cube: Ie dis que le quarré de F, eſt au quarré de E, comme les deux quarrez de AB & AC ſont aux deux quarrez de AB & CB.

Car D eſtant le coſté du pentagone, & E coſté du triangle tous deux inſcrits dans le cercle donné; lors que F coſté du cube eſt diuiſé en la moyenne & extreme raiſon, D eſt ſon plus grand ſegment,

par le corol. de la 17. prop. 13. Donc E eſtant le coſté du triangle inſcrit au cercle donné, ſon quarré ſera triple du quarré du demy-diametre AB par la 12. prop. 13. & par la 4. prop. 13. les deux quarrez de AB & CB ſont triples du quarré de AC: Ainſi le quarré de E, eſt au quarré de AB, comme les 2. quarrez de AB, CB ſont au quarré de AC: Et en permutant le quarré de E, ſera aux deux quarrez de AB, CB, comme le quarré de AB au quarré de AC. Mais comme le quarré de AB au quarré de AC, ainſi le quarré de F au quarré de D: (car par la 2. prop. 14. comme la toute AB eſt à ſon plus grand ſegment AC, ainſi la toute F à ſon plus grand ſegment D; & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de AB au quarré de AC, ainſi le quarré de F ſera au quarré de D) donc par la 11. prop. 5. comme le quarré de E aux quarrez de AB & CB, ainſi le quarré de F, au quarré de D: & en permutant comme le quarré de E au quarré de F, ainſi les quarrez de AB & CB, ſont au quarré de D, coſté du pentagone: lequel par la 10. prop. 13. eſt egal aux deux quarrez de AB & AC coſtez de l'hexagone & decagone inſcrits en vn meſme cercle; & par conſequent le quarré de F coſté du cube eſt à E coſté de l'Icoſaedre, comme les deux quarrez de AB & AC, ſont aux deux quarrez de AB, & CB. Si donc vne ligne droicte eſt couppée en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Comme le coſté du cube eſt au coſté de

l'icosaedre, ainsi le dodecaedre est à l'icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.

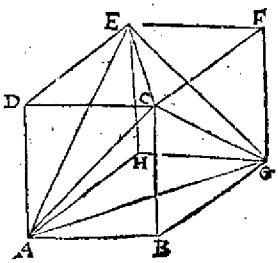
Ceste demonstration est facile, les precedentes estans bien entendues : car puisque par la 3. prop. 14. le pentagone du dodecaedre, & le triangle le l'icosaedre sont inscrits dans vn mesme cercle : il est euident qu'iceux triangle & pentagone seront equidistans du centre de la sphere. Parquoy si on diuise le dodecaedre & l'icosaedre en pyramides, toutes icelles pyramides tant de l'vn que de l'autre solide seront de mesme hauteur: Et par les 5. & 6. prop. 12. elles seront l'vne à l'autre, comme leurs bases ; c'est à sçauoir douze pyramides du dodecaedre à vingt pyramides de l'icosaedre, comme douze pentagones à vingt triangles: C'est à dire que comme la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre, ainsi tout le dodecaedre à tout l'icosaedre. Mais par la 5. prop. 14. icelles superficies sont l'vne à l'autre, comme le costé du cube au costé de l'icosaedre : donc par la 11. prop. 5. comme le costé du cube au costé de l'icosaedre, ainsi le dodecaedre à l'icosaedre. Ce qui estoit à prouuer.

Fin du quatorzieſme Element.

ELEMENT QVINZIE'SME.

PROBL. 1. PROP. 1.

DAns vn cube donné, inſcrire vne pyramide.



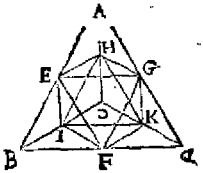
Soit le cube donné AF, dans lequel il faut inſcrire vne pyramide. Soient menez les diagonales AE, EC, EG, & des extremitez d'icelles A, C, G, ſoient auſſi menees les diagonales AG, ACGC: Toutes leſquelles diagonales ſont egales entr'elles, parce que les ſix quarrez dans leſquelles elles ſont menees ſont egaux par la definition du cube : Partant les quatre triangles compoſez d'icelle AGE, ACE, ACG, ECG, ſont equilateraux, & egaux entr'eux: & partant par la pyramide AEGC conſtituee d'iceux triangles eſt inſcrite au cube donné AF, par la 30. deff. 11. Car tous

les angles d'icelle pyramide ſont colloquez és angles d'iceluy cube AF. Nous auons donc inſcrit vne pyramide dans le cube donné. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 11. PROP. 11.

Dans vne pyramide donnee, inſcrire vn octaedre.

Soit la pyramide donnee ABCD, dans laquelle il faut inſcrire vn octaedre. Soient couppez tous les coſtez d'icelle pyramide en deux egalement aux poincts E, F, G, H, I, k. Et ſoient menees les lignes EF, FG, GE, HI, Ik, kH, EI, IF, FK, KG, GH, HE. Toutes leſquelles lignes ſont egales entr'elles par la 4. prop. 1. eſtant toutes les lignes couppées egales, & les angles des triangles plans de la pyramide egaux: Et partant le quadrilatere EGkI a les quatre coſtez egaux, & les quatre triangles EHI, IHk, KHG, GHE, commençans ſur iceluy quadrilatere, & finiſſans au poinct H, ſont tous equilateraux & egaux entr'eux. Item les quatre autres triangles IFE, EFG, GFK, KFI commençans au deſſous du quadrilatere, & finiſſans au poinct F, ſont auſſi equilateraux & egaux tant entr'eux qu'aux 4. precedans. Parquoy la figure EIKGHF compoſez d'iceux 8. triangles eſt vn octaedre, par la 26. def. 11. & par la 30. def. 11. il eſt inſcrit dans la pyramide donnee ABCD puis que tous les angles d'iceluy touchent les coſtez d'icelle pyramide. Nous auons donc faict ce qui eſtoit requis.



PROBL.