Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

EVCLIDIS

MEGARENSIS MATHEMATICI CLARISSIMI ELEMENTA,

LIBRIS XV. AD GERMANAM GEOmetriæ intelligentiam è diuersis lapsibus temporis iniuria contractis restituta,

Adimpletis præter maiorum spem, quæ hactenus deerant, solidorum regularium conferentiis ac inscriptionibus.

Accessit decimussextus liber, de solidorum regularium sibi inuicem inscriptorum collationibus.

Nouissimè collati sunt decimusseptimus & decimusoctauus, priori editione quodammodo polliciti, de componendorum, inscribendorum, & conferendorum compositorum solidorum inuentis, ordine & numero absoluti.

AVTHORE

D. Franciſco Fluſſate Candalla.

AD

CAROLVM IX. CHRISTIANISSIMVM GALLIARVM REGEM.



LVTETIÆ,

APVD IACOBVM DV PVYS.

M. D. LXXVIII.

Sū ex bibliotheca Ioh. Georgij à Werdenstein

EUCLIDIS

MEGARENSIS MATHEMA-TICI CLARISSIMI ELEMENTA.

LIBRIS XV. EX GERMANICO

[illegible]

[illegible]

[illegible]

CHRISTIANISSIMO GALLIARVM REGI, CAROLO IX.

*

FRANCISCVS FLVSSAS CANDALLA ROBVR, IMPERIVM, ET PROSPERITATEM.

LIBERAS artes liberos decere viros, commune rationis efflagitat elogium, generosissime Rex: Nihil inclyto principe liberius, cuius numine natura prius astricti, liberi fiunt homines. Quod rarius prudentiæ ac integritatis specimen, quàm veri studia quæque libertate præcellentis consequendi cupiditas? veritas nimirum eatenus libera discitur, quòd ab antiquissimis absolutissima virtus, summúmque bonum comperta sit: quod nec à materia turbatur, neque corpore obruitur, nudum, conspicuum, immutabile, augustum, ac alterationis expers. Ea de causa circa materies siue ea quæ sensu deprehendi possunt, corruptioni alterationíque obnoxia, omníque constantia priuata, minime inuestigandam veritatem esse suademus: sed circa incorporea solius mentis obiecta, nulli calumniæ vel astutiæ subdita: veritas nanque contra hominum ingenia, calliditatem, & solertiam, se per seipsam tuetur, stabili compta libertate. Hæc admodum artes disciplinásque fouet liberas, indita eis religione, qua generalibus institutis nihil limitandum, reprimendum, immutandúmve cedat. Est enim radius primæ ac veræ solius essentiæ, cuius instar hæc ab humili & tenui primordio, præceptos mentis ornatus seu humanæ conditionis fulgores, in tam immensas disciplinarum eucxit copias. Quid mirabilius & præ-

ſtantius quàm quod exili puncti rudimento, tam ardua & humanis quibuſque ingeniorum viribus abſtruſa, exeramus Geometriæ arcana? Quid tanto ſublimius incremento, quàm à ſigno omnis quantitatis experte tam immenſa numeroſaque manare quantitatum theoremata, vnico veritatis ſplendore nixa? Quid ars? quid diſciplina? quàm veritatis fidus aſſecla? Non cuiuis etenim peritiæ congruit generalia præſcripta vndique veritatem adipiſci, nullis verò cogi reſtrictionibus: ſed iis ſolis, quas ideo diſciplinas, quòd diſcentes vniuerſali præſcripta lege nulla prorſus incidente reuocandi dogmatis labe doceant, propriè antiqui Philoſophiæ cultores nuncuparunt, tum etiam quòd profitentium mentes regulari matheſium cultui frequenter adnixas, infrequentiorem ſui commenſurandi habitum ac intelligentiam, ſuapte natura prouehant. Nimirum eorum qui diſciplinas perinde ſcrutantur, vt earum virtutibus & dogmatum dignitate fruituri. Non autem qui primordiis vtcunque perceptis, in plebeios ita ſæuiunt, vt ſola præfulgendi cauſa illas perluſtraſſe ſatis ſupérque propalent. Quorum itaque animi cupido eo ſplendore fuit ornata, quo genuinos diſciplinarum afflatus (quos Plato à natura humanæ menti collatos opinatur) reminiſci, ſeu intelligentiæ ſæpius conferre ſtuduerint: hi Matheſium ſimplicitatem à quouis fuco vacuam, non ſolum candoris animi teſtem, verum & eius intelligentiæ eſſe auctricem, qua Philoſopiæ legibus quæque regenda ſubeunt, ſuo commodo captant, Platonis decretum ſequuturi: qui philoſophis erudiendis ſuo lumini præſcripſerat, nullum ſine Geometria ingreſſurum, his vocibus vetans, generoſa philoſophiæ documenta à quoquam geometriæ experte ſcrutanda eſſe: præcipuos mentis apices philoſophiæ adipiſcendæ, à Geometriæ primordiis orrundos annuens: non ab his quæ agris tantùm metiendis, lineis planiſve ducendis, aut equidem ædificiis conſtruendis, cæteriſque ſenſuum præſtigiis duntaxat nituntur: verum ab hac naturæ præſtantia (quæ ab exilibus admodum geometriæ initiis, in tam immenſum mentis ornatum prodiit) quòd ſæpius conſideratis terminorum rationibus, ſæpius item rationum proportionali illa ſocietate (à qua miræ emergunt quantitatum conferentiæ, ſingulari certitudine docendi huic diſciplinæ admodum peculiari) ordine diſcendo-

rum

rum præter humanas vires longè diſpenſato, mens humana inde habitū conſequuta ſit, à frequentioribus inſtitutis adeptum. Qui quidem habitus, veritate, ratione, ſymmetria, ordine, reliquiſque geometriæ ſubtiliſſimis viribus mentem illuſtrans, tam philoſophiæ capeſſendæ, condendæ legi quibuſlibet nodis ſoluendis frugiferæ, cuiuis diſcibili aſſequendo præmunit. Quòd ſi huius habitus ad ſenſuum exequia traducendi ſint fœtus (ſenſus nanque homini veluti nuntios ac ſatellites conceſſit natura, ſeruili operæ obnoxios, tum proprio muneri incumbentes) hæc Imperio adminiſtrando, populis regendis, bellis indicendis, prælijs committendis, machinis conſtruendis, aggeribus ducendis, ac ſenſim geometrico reliquo ornatu infectos ſenſus innouat. Vitia demum (quæ ab antiquiſſimis irrationales materiæ vltores dicta ſunt) omni otio deſtituta, propria vi retundit, ac mirum in modum mentem humanam laxamentis obnoxiam & ſordeſcentem excitat, geometricarúmque virtutum ſtudio in mentem politica ac philoſophica prudentia decoratam, paſſim deuehit & excitat. Haud ſecus quàm veræ & piæ religionis ſuſcepta fides ſtabilis, animam ſuapte natura iræ ſeu exitio deuinctam, in æternum ſalutis æuum diuina clementia latam regenerat. Quæ ſingula ſui generis nouum hominem edere dicuntur. Nec eſt quòd diſciplinarum ac philoſophiæ principia à religionis conſortio explodamus. Solebant nanque veteres Ægyptij à philoſophorum cœtu, ſacerdotes ad religionem elicere: à ſacerdotum verò ſocietate, Regem. Perſæ autem ne vllum quenquam in Regem admitti patiebantur, qui non ante diſciplinam ſciētiámque magorum percepiſſet. Nec omittendum quàm profuerit propagandæ catholicæ fidei tantis patribus, præclara diſciplinarum ac philoſophiæ prudentia. Summus nanque artifex tam egregios animi ornatus, ſuo obſequio futiles eſſe non pertulit. Non parum igitur diſciplinarum ac philoſophiæ documenta conferre obſequij (Chriſtianiſſime Rex) ſenties, in diſponenda mentis ſagacitate, ad ea quę regiæ ſublimitati congruunt, religioníque capeſſendæ primordia. Ea nanque his quæ ſenſibus obaudiunt, longè præſtantiora docentur. Nam vt à maioribus traditum eſt, quæcunque ſenſus mouent, idola ſunt, & vanæ quædam adumbrationes. Quæ verò ſenſuum organa ſubterfugiunt, ad pulchrum bo-

númque pertinent, cuius beneficentia iuſtitiæ piis adiunctæ ſunt, mentem cui tota paret hominis natura decorantes. Vt igitur generoſæ menti (inclyte Princeps) libero veritatis ſtudio nitenti, artes ac diſciplinas certo & vero quibuſuis aliis præſtantes, omníque pigmento vacuas, adhibeam, Matheſes haud equidem diſcendas, quinimò (ex Platonis ſententia) reminiſcendas contemplare quæſo: oriuntur enim earum tyrocinia, ab intimis humanę intelligentię anfractibus, qua à primo mentis habitu condito deliteſcunt. Matheſium igitur pręſtantiſſima geometriç elementa ab Euclide per maiorum manus recepta, interdum tempore propulſante manca ſiue fœdata, pro viribus fideliore cura reſtituta, & præter anteceſſorum ſpem integrata, ſolidorum cœpta peracta, principia quibus totius diſciplinæ ſtatus nititur, in veram theorematum intelligentiam redacta, tuæ maieſtati defero, munus inquam exiguum, tua tamen generoſitas id perennis honoris mihi indulgeat, gratum habens: videbor nanque mihi non modicis viribus operam adoleſcere, ac plus geometrica incunabula auribus mortalium infudiſſe, ſi tantùm abs tua ſublimitate decus attingam, ſuſcepti laboris. Candor etenim tuæ virtutis, nec minus expectata à teneris annis indoles, nedum ſtudioſos dicam, ſed etiã hos quorum debiles conatus retundit geometricæ ſubtilitatis acumen, in huius diſciplinę amorem ſuſcepto munere ciebit. In hoc autem operis tuę celſitudini conſecrandi votum me rapuit (candide Princeps) non imperitæ argutiæ, non balbutientia ſcripta, non harum inuentionum obtuſi conatus, tanti Principis dignitate alieni. Sed tuæ ſublimitatis imperium ter geminis vocibus obteſtans (dum Aquitaniam tranſcurreret, qua tantùm tui viſendi mihi beneficium contigit) hos nimirum labores vtcunque perluſtratos exponi, tuæq; celſitudini dicari ſeu conſecrari. Obedientiam autem ſacrificio præſtantiorem, obſequiúmque votis edoctus, vtq; muneris indicti tantum ne recuſem decus. Quinetiam his prætermiſſis quæ præpollent, immenſus in te virtutum cumulus, necnon tua in me ineffabili beneficentia, vultus benevolus, longè vltra bene merita erga te obſequia gratus apparens. Quo non ſolùm Scythas aut barbaros, ſed etiam quàtumuis feras gentes tuo numini ſubigeres. Hoc munus tuæ amplitudini in obſequij monimentum & pignus amo-

ris

ris offero, & veluti censum quo tuò candori me deinctum profitear, rependo. Quod licet tanta maiestate sit indecens, tua clementia susceptum, dignitatis in se vires concepturum non dubito. Tuíque culminis vmbram in hæc restituta perlustranda, disciplinarum cultores pellicere quosque. Quod faxit Deus optimus maximus, tuæ maiestati perpetuam felicitatem præstolanti, vitam, imperium, ac vires sua ineffabili clementia cumulans. E Cadilliaco ad decimumnonum Calen. Septembreis, Anno reparatæ salutis 1565.

CAROLO NONO GALLORVM REGI INVICTISsimo semperque Augusto, Gulielmi Caluimontani in supremo Parisien. Senatu patroni.

Carmen.

Euclides nouus hic, quàm sit mutatus ab illo,
Vulgus quem nuper credidit esse, viden'?
Crimen erat magnum te (crede) mathematu, Princeps,
Cernere, tam longa semisepultà die.
Franciscus Flussas claidem miseratus acerbam,
Ocyus è tenebris hæc rediuiua trahit.
Ecce tuo iussu (vt par est) obtemperat: atque
In mundum redigit: mandat & illa typis.
Pellere barbariem regno, reuocare Matheses:
Gloria deuicti non minor hostis erit.
Denique quòd sit adhuc viuus tua maxima laus est,
Euclides stygijs huc reuocatus aquis.
Nanque tibi acceptum referent hoc Carle nepotes:
Autoris tua vel gloria maior erit.

AD AMPLISSIMVM ILLVSTRISSIMVMQVE Principem, D. Franciscum Flussatem Candallam, Steph. Manialdus Cleracius.

Franciſce, antiquo veniens de ſanguine Regum,
Qui ſuperas, morum nobilitate, genus.
Dum repeto titulos & auita tropæa tuorum,

Dum recolo veſtra regia ſceptra domus,
Dum quoq; ſuſpicio diuina mentis honores;
Et cultum variis artibus ingenium,
Neſcio, nobilitas an maior ſplendeat in te,
Maius an ingenium: mirror utrumque tamen.
Hoc magis admiror, tetra ambitione remota,
Publica priuatis quòd bona praetuleris.
Intentis ſtudijs veterum monumenta renaſci
Efficis, exempta ſed prius illuuie.
Iam per te Euclidis lucent στοιχεῖα, vigentq;,
Clarum decq; tuo lumine lumen habent.
Regale eſt factum, regalia ſcripta nitori
Reddere, verum hoc eſt nobilitatis opus.
Has artes quondam Reges tractare ſolebant,
Has quoque Principibus diſcere cum fuit.
Artibus his Reges magna incrementa dedêre,
Proh pudor, has artes nunc didiciſſe pudet.
Tu Fnnciſce, tuis faueant ſi numina cœptis,
Reſtitues ſtudia haec, quae iacuêre diu:
Et proceres noſtros ſimili inflammabis amore:
Quàm te fœlici Gallia ſorte tulit!
Iam numeros abaco, ſectóque in puluere metas
Te duce, deſcribit Gallica nobilitas.
Aſpice, perpetuae ſurgunt praeconia famae,
Ingenio partum eſt iam ſine morte decus.

AD EVNDEM.

Te domus imperijs & ſceptris Candalleа ſacra,
Nobilium primis inſerit ordinibus.
Te decus ingenij, mentiſq; induſtria ſolers,
Doctorum primis inſerit ordinibus.
Quid mirum, Princeps literis, atauiſq; colende,
Si doctum & verè nobile promis opus?

Φεργυίοιο τῷ Φλωσίῳ Καιδαλλέῳ
Ἀνδρεάφη.

Εὐγενέων φάος ἐσσι, Εὐκλείδου κοσμεῦ ἔργα
Φλώσιε, ἰυγλώσσου οἷς φίλος ἐυεργίης

Τῷ αὐτῷ.

Κυκλώσῃ ζωὴν ἐς φῶς ἀθανατίζεις ἀνάγκης,
Κυκλώσῃς δ' ὅσον σοι κλέος ἀθάνατον.

I. BODINI AD FRANCISCVM Fluſſatem Candallam.

Si gentile decus, ſi regum ſplendor auorum,
Priſcaq́ nobilitant venerandæ ſtemmata gentis,
Nobilitate tua vix vlla eſt clarior vſquam.
At minima eſt laudum de multis iſta tuarum:
Nam tua te virtus, & vera laudis auara
Mens, atq́ eximius, doctiſſime Candala, candor,
Et quos afflauit ſapiens tibi Pallas honores,
Illuſtrant multò melius quàm veſtra propago.
Quàm proaui claro creti de ſanguine Reges,
Aurea quàm tectis laquearia iuncta ſuperbis.

IN EVCLIDEM FRANCISCI FLVSSATIS Candallæ viri nobiliſſ. Io. Auratus.

Æternas mortalis adhuc ſi quis volet artes
Scandere, & athereos dinumerare globos.
Spernere ſi quis humum fugiente per aëra penna,
Metiriq́ modis ſydera quaque ſuis,
Si quis ad aſtra volet raptus, cœleſtibus aures
Contemplatrices inſeruiſſe choris.
Euclideorum legat hæc elementa librorum,
Nam tres ad reliquas ars facit vna gradum.
Ille ſed implicitis vt certius in labyrinthis
Poſſit inoffenſas ire, redire vias.
Franciſcus Candalla dabit, ſinuoſa viarum
Interpres cuius reddit aperta labor.
Nobilitas alijs latas ſit quærere terras,
Et fundos fundis continuare nouis.
Tu cœlum ſtellasq́ petens, tanto facis illis
Nobilius, quanto nobiliora petis.

AD FRAN

AD FRANCISCVM CANDALLAM EX ILLVSTRIS-sima Flussatum familia oriundum, de Euclide eius opera restituto, & libro de Stereometria locupletato. Carmen.

Si quid nobilitas & forti in pectore virtus,
Candale, sincera laudis habere potest,
Hæc propria est, qua tu memoraris origine, gentis
Isq; tibi à patrum stemmate manat honos.
Annam quis nescit quæ rexit Pannonis aruæ,
Francisci esse amitam, Cæsaris esse auiam?
Quis consobrinas patris, de sanguine Fuxi
Tres alias nescit prosiluisse deas?
Hinc qui nunc annis & sceptri exurgit honore
Carolus & magni Principis omen habet:
Est Annæ pronepos, dotali hæc iure Britannos
Imperio adiunxit rex Ludouice tuo.
Proxima Regina Arragonum, quæ Regia neptis
Et magni fertur Gastonis esse soror.
Gastonis illius, qui dum victricia signa
Hispano atque Italo victor ab hoste refert,
Rauenna est testis, quàm forte & nobile letum
Oppetijt, patriæ victus amore suæ.
Tertia Nauarræ est, quæ Fuxa insignia gentis
Perpetua natis lege tenere dedit.
Sic nemo illustris regni molitur habenas,
Quin tibi cognato sanguine iunctus erit.
Sunt equidem præclara isthæc, & Principe digna,
Qualia quæ passim dicere magna solent.
Nec tamen hæc quamuis sint in te regia, apud te
Pondera præcipuæ nobilitatis habent.
Sed quæ nunc tali tantum se iactat alumno
Virtutis, semper laus tibi prima fuit.
Te musæ decorant: itidem decus addere musis
Ingenij certant tot monimenta tui.
En quondam Euclides terramq; & sydera mensus,
Quà vel summa petunt, quæ vel ad ima cadunt.
Temporis attritus carie, & caligine mersus,
Difficili rerum cognitione fuit.
Sed nunc quàm facilis, quàm clarus & integer exit

Te duce

Te duce, & irradiat vindicis ora ſui.
Quin & dum ſolidi menſuram corporis addis,
Crede tibi ſolidum te peperiſſe decus.
Nam perit argentum, perit auri copia diues,
Et quicquid rerum maximus orbis habet.
Nobilitas vera eſt virtus, virtute paratur
Gloria, quæ nullo eſt interitura die.

EIVSDEM AD EVNDEM.

Nobilis is vulgò eſt ad quem labentibus annis
De claro patrum ſtemmate manat honos.
At cui virtutis laus pulchrò è pectore ſurgit,
A doctis dici nobilis ille ſolet.
Vtraque laus, Franciſcè, tua eſt: tu nobilis ergo,
Aut ſe iudicio fallit vterque ſuo.

P. ADAMSONVS SCOTVS.

DE FRANCISCI FLVSSATIS CANDALLÆ IN Euclidem commentariis, Arnoldi Puiolij in academia Burdegalenſi I. V. D. Carmen.

Dum maria, & terras radio metitur, & aſtra
Euclides campis latus in Elyſijs.
Quocum Chryſippus, quocum Plato, Pythagoraſq;
Quocum Clazomenus ludit Anaxagoras.
Ludit & Ypſicles, Archita, Theonq;, Cononq;,
Archeſilas, Zeno, Rappus, Anaximenes.
Necnon qui paruo circundedit æthera vitro,
Fecit & humana ſydera mente regi.
Fecit & vt patriæ defenſor callidus vrbis,
Incuteret magnas hoſtibus arte minas:
Ecce ſciens terra & cœlo quæcunque geruntur,
Et quæcunque mari nuntia fama venit.
Et volitans, quot habet plumas, tot lumina pandit
Oráq;, & Euclidi talia voce refert.
Ecquid opus fuerat mandare mathemata libris,
Compoſuit mira quos tuus arte labor?
Quid decuit tantùm noctu vigilare diúq;,

Iactu

Iacturámq; olei ſuſtinuiſſe grauem?
Quando tui libri mendis interpretis horrent,
Vt nunc ſi videas diffiteare tuos.
Quæ cùm dixiſſet, gemuit Megareius heros,
Signáq; triſtitiæ non dubitanda dedit.
Atque Iouem ſubitò ſupplex adit, & rogat, auum
Vt liceat paucis anteriore fruì,
Donec librorum errorem purgauerit omnem,
Quò terſi poſſint, & ſine labe legi.
Excipit Altitonans: factis extendere famam
Haud dubiè vita concomitante licet.
Morte obita ſedenim rediuiuum exurgere in auras
Mortalem fati iura ſeuera negant.
Vnum poſſe ſinunt fieri, vt cum corpore vita
Exijt, in corpus ſit reditura nouum.
Sic Rudius vates animam ſuſcepit Homeri,
Sic animam Euphorbus induit Athalidæ.
Quíq; prius piſces captabat arundine Pirrhus,
Pythagoræ in corpus transijt ille nouum.
Vnde dare vt poſſis mœſtis ſolatia rebus,
Ne ſis qui fueras, forma nouanda tibi eſt.
En ego Fluſſatum formabo ex ſemine corpus,
In quod Mercurio te decet ire duce.
Et te Franciſcum dicet quicunque videbit,
Tu tamen & tali nomine notus eris.
Hæc vbi dicta, Iouis iuſſu Cyllenius vmbram
Suſceptam Euclidis, ſumma per aſtra gerit:
Franciſciq; illam Fluſſatis corpore claudit,
In tali lætam ſede manere diu.
Inde ſua Euclides quotquot conſcripſerat, omni
Erroris vitio liberat arte libros.
Et vitio terſos offert Franciſcus eoſdem
Quiſq; ſuo terſos à genitore putet.

QVA

Qua de cauſa, quóque numinis afflatu hæc reſtituta ſint elementa, modeſto lectori Fr. Fluſſ. Candalla, Salutem.



VMANÆ conditioni olim à ſummo maximo actionum & motuum auctore conſtructæ, quanto cætera creata egregiis præcellebat muneribus, tanto receptæ dignitati tuendæ toto pectore incumbendum erat, omníque ſtudio cuncta huic aliena propulſandum, quo ritè ſuſceptis eius dignitatis ſubſidiis, expeditior fieret actionum & motuum conformis opificis numini operatio: excluderetur autem humani conſilij truculenta labes, qua ſingulæ eius vnitates, aſſidua mora admotis impensè vinculis à bonarum actionum cœptis reuocantur, & quæ ſenſibus tanquam corpora vel materies attrectantur, ſiue quæ intelligentiæ ratiocinanti ſummi opificis imagini, velut eius eſſentiæ communicant. Hanc ignorantiam, & religionis antiſtites & philoſophorum proceres, omnéſque diſciplinarum ac ſapientiæ cultores pari conſenſu denominarunt. Cuius eſſentia (ſi qua foret) inter ea quæ more eorum quæ mala ſunt, priuationi demerſa iacet, ab omni habitu, à quo veræ eſſentiæ ſplẽdorem conſequuntur, prorſus eiecta, at virtutum tamen illud vnicum culmen intelligentiam funditus euertere, ab humano conſortio delere, ac innumeris artibus abigere molitur, quibus ab æterno priuatio habitum opprimere tentat. Eſt nanque virtus, animi habitus naturæ moderationi conſentaneus. Cognitio autem, æternæ intelligentiæ radius, quæ ſua diſpenſat ſtudia inſtar ſeminis opportunè in tertam diſpoſitam ſparſi incrementum à proximis inchoat, tandem pullulante ac adoleſcente ſtipite, in gemmas turgeſcit, ac demum in frondes vicinia poſſidentes propagatur, quoad finem à conſtitutione ſibi inditum fœlix aſſequatur. Hanc ſuiipſius agnitionem, admodum veteres prudentiſſimi commendarunt, qua pateſieret aditus, ſcrutandi rerum ſuſceptarum auctorem. Qui quidem optimus ille maximus, quémque per ſuiipſius notionem quoad ſingulorum pertulerit capacitas, ſuæ cognitionis depulſa ignorantia conſortem efficiat, in his gradus ſiue differentias obſeruans, quibus quò quilibet ignorantiæ potiſſimam partem à ſe pepulerit, tanto ſe cognitioni ſeu intelligentiæ diuinæ demerſum comperiet. Nam vt à maioribus receptum eſt, ignorantia malorum origo, incuria & ignauia gignitur, negligentia verò alitur & increſcit, dilectáque ſenſibus hominum radicatur, inde tanquam ab antiquis & hæreditariis ſedibus moleſtè reuocatur, tum maximè cùm læſo cuidam cerebro prætenſa ſcientia, patentem ignorantiam inſinuat, falſis deinceps innumeris ſyllogiſmis ibidem tutandam. Veræ itaque cognitionis lumen adeuntes, per varios quoſque telorum incurſus, ignorantiæ caliginem propulſare, imploratis quæ defuerint viribus, operæ eſt precium. Qui ideo amorem clementiſſimi illius patris, munera ſummi maximi liberaliſſimíque monarchæ, diſciplinam prudentiſſimi æternæq; intelligentiæ fontis, mihi conciliare cupiebam, propellendam à me potiſſimùm curaui, virtuti ac ſtudio inſenſam ignorantiam, vt quæ, ſi tamen non radicitus euulſa, ſaltem pro viribus concuſſa, quidquam (tenue quanuis) donorum illius ineffabilis eſſentiæ contingerem, per quæ meatus aſſoret

æternæ ac immenſæ bonorum plenitudinis conſiderandæ. Nam propriæ imbecillitatis animaduerſio, præcordia in cupidinem intelligendæ æternæ virtutis extollit, eadem cauſa qua contraria contrariis curari depoſcunt: cupiditas autem, ſeu intelligendi ſtudium, propenſam animi voluntatem ac laborem vrget, labor poſtmodum etiam mediocris quædam attingit, improbus demum, ab antiquis omnia ſubigere docetur. Hæc ſingula mente voluenti, ſubiit inter moras diſcernendum, ac diſcutiendum quibus ſtudiis à ſummo omnium moderatore ſuſceptam mentem ſuſcepturúmque me quondam ingenij incrementum ſubiicerem, cui ſerio animi impetu incumbens, nullum non moui lapidem, tum ſcibilium artium ſingularum, profeſſionum, diſciplinarúmque ſcopos, vtcumque coniectos mihi propoſui, è quibus quæ virtuti & veritati coniunctiſſima fore cernerem, diuinis auſpiciis delecta proſequerer: ſeſe ab improuiſo mihi offert Iuris illa prudentia, cuius effectu (mortalium contagiis vitiato) iura quandoque iniurias mutuò ſibi mortales ingerunt: hanc pro foribus aſpectans argumentum ſeu materiam à nequitia ac humanorum ſcelerum contagione ducentem bipartitam reperi: in eam ſcilicet, cuius decreta à viris probatis conſtituta ſunt, qui à quouis tranquilli animi perturbatore liberi, rémque ſuam non agentes, illam cuius verè rationem animam eſſe fatemur iuriſprudentiam ædificarunt. Alteram autem comperimus, cuius ſanctiones à viris res ſuas agentibus editæ ſunt, & proinde his obnoxiis paſſionibus, quibus plurimum ſolēt indui, qui proprij facti cenſores aut iudices ſeſe comprobāt (mortalium nanque vt plurimum quiſque ſibi proximus adeſt). Hanc non rarò extra boni veríque conſortia degere, nempe cùm ad actum reuocandam potentiam, vtræque confunduntur, tum ius iniuriæ conglobantes, procliuius perturbatos ſuarum potentiarum effectus generant, æquúmque ſæpius perſonatum, quaſi iuſtum venerandum compellunt. Medicinam verò ſcrutans, huius originis potiſſimam cauſam, ab effrenatis cupidinibus humana corpora inſcitia alterantibus, ſcatere concepi: quare humanæ conditioni his admodum propenſæ neceſſariam fateor. Hanc artem vocari cohibet, eam præſertim quæ corpus curat, doctiſſimus ille Plato, quoniam, inquit, nullam eorum quæ affert, qualia ſint natura habet rationem, eámque coquinariam nuncupat, à gymnaſtica diſterminans: attamen illam non exigua obſeruantia, ſed ſua ductus neceſſitate ampliſſimo cultu dignam haberi reor. Rhetoricam autem non eſſe artem opinatus eſt Plato, quinimo peritiam quandam, cuius caput ac ſtudium eſt adulatio, & ideo quiddam natura turpe exiſtimat: binorum nanque rhetorum ad ſe inuicem cauſas agentium, alter vt plurimum rem turpem ſuadere aut vterque conatur. Dialecticam diſſerendi facultatem, eò quòd omnium ſcientiarum ſit vnica via, ſummopere commendat, quæ cuiuſlibet oblati verum ſcrutari docet: eam itaque cuiuis ſcientiæ neceſſario conducere fatebimur. Grammaticam demum ſatis indicat eius vnica authoritas, vſus, ratione, methodo, ordine, omníque verarum diſciplinarum energia deſtitutus. Is nanque vſus docendorum turbida & concitata quouis ordine poſtpoſito venatur elementa. Præter has perplures mihi propoſui diſciplinas arte libera æquè & mechanica quærendas, innumeráſque intelligibilium ſpecies.

Cùm itaque omnium ac ſingularum naturam datis viribus perquirerem, vt demum illas mihi deligerem, quæ animi notitiam certo veróque illuſtrarent, illúdque auditem (de mathematicis) Ciceronis à Pythagora, à numeris ſcilicet & mathematicarum initiis proficiſci omnia, ac in ſummo apud illos honore geometriam fuiſſe, itaque nihil mathematicis illuſtrius eſſe, pluréſque philoſophorum ſententias, geometriam cæterasq; matheſes ſummopere commendantes, nonnihil diuinitatis his ineſſe diſciplinis arbitratus ſum, ac aliquod numen præ ſe ferre, eis ſolis communicandum, quí intelligendi veri, non qui contentionis aut ſpectatus cupidi fuerint, ac perinde diſcentium mentes præ cæteris eouſque in virtutis & veritatis auiditatem, rapere atque præ cæteris hæ diſciplinæ certitudini & veri-

tati

tati ſunt familiares. Quapropter non arbitratus ſum has, quæ confuſo, inſtabili, incerto, aut turpi niterentur fundamento, erudiendæ mentis humanæ condignas, ſed eas præcipuè carpendas conieci, quæ virtuti & vero hærentes, animæ intelligentiam in priorem ſui ortus formam cultu perſeuerante excitant. Huiuſmodi potiſſimam haberi liquet, ſacrarum literarum lecturam, qua prior ac genuinus animæ candor, diuinæ clementiæ dono perennis reſtituitur, & obſtructus primi parentis lapſu perpetuæ felicitatis aditus, cuique mortali reſeratur. Hanc ſubſequuturas ratus ſum verò certóque illuſtratas matheſes ſiue diſciplinas, quarum intellectum natura tam mira arte genituræ animæ copulauit, vt quicquid in eis quantumuis abſtruſum obiicitur animæ diſcendum, id idem non diſcere, ſed veriùs reminiſci doceat eſſe Plato: hæ nanque diſciplinæ ex principiis eidem animæ familiaribus nullo aliunde conducto famulatu, ſua quæque conſtruunt theoremata. Quæ demum non per nouam alicuius documenti notitiam, ſed ex primordiorum iam notorum ſola reminiſcentia, menti ſeu animæ innoteſcunt. Principia nimirum ſi per ſe cuiuis ratiocinanti animæ innoteſcant, cùm menti offeruntur, non ab illa ideo diſci; ſed ſanius reminiſci dicemus, tanquam prius ſcita. Ab iis rurſus conſtructa theoremata priora, ac illorum progrediente obſequio progenita, ſola arguendi vi (cuique ratiocinanti animæ inſita) ex aſſumptis principiis fluunt. Ratiocinantis nanque animæ potiſſimus vſus eſt, ex præſcriptis antecedentibus veris, conſequentia deligere neceſſaria. Non aliud itaque à reminiſcentia diſciplinarum adeptionem eſſe fatebimur. Hæc inde animæ peculiaria inſtituta, omnis prorſus doli expertia, vero virtutéque ſedulo nixa, neglectis peritiis, quæ humanorum contagiorum innumeris anfractibus ſunt pollutæ, propenſo animo amplectendas duxi, vt olim candor ille ingenuus animæ, continuis huius vitæ illecebris opacatus, diſcendi otio reuiuiſcat, ac demũ fauſto diuinæ clemẽtiæ munere, diſciplinarum ſtructori vnico, fiat vnus. Hæc interdum mihi ingenio voluenti, ac apprimè contractam diſcendi ſitim extinguere paranti, occurrũt procellæ, quibus amicorum potiſſimum impulſu, in principum aulas me vectum cognominis neceſſitate reperi: quo loco tantũ abeſt quemquam philoſophari poſſe, vt aulicorum tam frequentes verſutiæ diſciplinarum exoſam ſimplicitatem conculcantes, potius captandi principis ingenui inſidias, quàm artium principia edoceant. Huic impedimento ſucceſſit illico negotiorum principis gerendorum apparatus, cui iugis perpetuò nectitur ſedulitas, mentem ſycophantiis ſollicitans. Confluunt inſuper innumeri vafri, & ſolertes queruli ſua tela admouentes, quibus incautam audientis mentem ſuo commodo aucupent. Quandoque pij ſupplices, quorum ſuſcipienda ſunt patrocinia principi conferenda. Rurſus ſubeunt ærarij, inuolucra proferentes, mille ſuppilandi technis obnoxia, necnon principis ſtipatus copia, ſtipis vt plurimum auida: demùm ſecretorum ſcriptores innumeris negociis expediendis onuſti: ibidem ſubit cogenda ſinagoga, rebus digerendis addicta: quę omnia tranquillam mentem ita diſcerpunt, ac variis telis impetunt, à diſciplinis non tantùm aliena, verumetiam in ipſas tanto tumultu pugnantia, vt ne qua menti ſuperſit quies, turbato concitatóque tranquilli animi motu. His tandem ſyrtibus me liberum aut expeditum fore, per tot rerum diſcrimina ratus, in deteriorem incidi ſcyllam: quæ quidem neceſſaria duro litigio redimenda cogeret, illiſque vtcunque reparandis, plus inſumptum eſt laboris, curæ, temporis, ſumptus, labefactíque ingenij, quàm poſſint longè adeptæ vtilitatis vires ſuppeditare. Quantum autem diſciplinis aſſequendis deuotam mentem diſcruciẽt tam feruentium telorum inſtructæ copiæ, philoſophiam auentibus diſcernendum refero: cùm maximè peruerſo prorſus in me ab vrgentibus ordine, rerum moderatio diſciplinarum præceſſerit tempore notitiam: atqui diſciplinæ reipublicę moderandæ præbent aditum, non autem ad diſciplinas reſpub. Turbatus ea de cauſa hic ordo, planè labores occurrente Minerua impenſos, cruciatus effecit. Nam ab adole-

ſcentia maturiſſimos ætatis annos, principum, reíque publ. temperandis rebus nulla diſciplinarum ſuſcepta notitia diſſipaui, variis quidem obnoxius inſultibus. Sed qui mihi inſultus aut cruciatus fuerunt, à quampluribus vt voluptates obuiis vlnis ſuſcipiuntur. Ab iis nimirum qui genitali horoſcopo in aulicarum illecebrarum cultus propulſi ſunt: illiſque poſt habita ratione obaudientes, ambitum, ſatellitia, primatus, diſſidia, ac huiuſce animi turbandi ſcatebras, virtutis vice venerantur. Alij nanque procliui genio iniuriis cientur impingendis, alij verò tolerandis ſuapte natura aſtringuntur, vnde fit vt diſciplinarum aſſequendarum innata vrgente genio cupiditas, tot variarum machinarum incurſibus repulſa, nõ parum morę ſeu impedimenti ſubtilioribus attingendis paſſa ſit, quæ ne annos, ne dies, ſed ne dicam ferè horulas, turbulentiores tanti temporis particulas, ſibi potuit aſciſcere: Tum præſertim quod quæque tantùm interruptiſſima his diſciplinis aſſequendis ſtudia mihi licuit adhibere, ea negato prorſus mortalium ſubuentu, turbata verò immortalium literarum cultura, vtcumque earum principia conſequi fuit operæpretium, otij cùm rara ſiuit egeſtas. Inter hæc diſciplinarum cupidus, cùm primum Euclidis limina vix è foribus ſalutarem, vt quo more, quo diſcendi apparatu, quáue mentis imagine, in hæc elementa me adigerem præſagiret animus, occurrit ingredienti hęc geometricorum elemẽtorum ſeries, à Campano & Theone expoſita, tum ordine, tum & numero principiorum ſeu penuria, quandoque eorundem luxu à ſe mutuo diſcrepantia. Quæ palam faciunt duos aut plures Euclides fuiſſe, aut equidem vnius Euclidis tantam fluxiſſe (temporis iniuria) geometricorum elementorum iacturam, quæ à ſe legata principia ac theoremata ad nos vſque migrare nõ paſſa ſit, ea præſertim puritate quæ tantùm geometriæ culmen adeptum virum decebat. Principia nanque inexpoſita extant, quandoque tranſpoſita, ſiue eorum aliquæ prætermiſſæ propriæ ſumptiones, rationum ac proportionum primarij ortus, arithmetices geometriæ cõferendę cauſa, qua diſcreti numeri confuſa continua ſunt illuſtraturi: certarum & incertarum quantitatum particularis origo, & pleraque alia paſſim occurrentia, licet his tanquam ſtabili harum diſciplinarum fundamento totius ſcientiæ nitatur flatus, qui primordiorum ſoliditate deſtitutus fluctuans, certitudinis vulgari præſtantia priuatur. Quòd ſi quiſque ſua ductus libidine principia non perſpecto totius operis contextu victurum ſe confidat, is ſæpiuſculè diſciplinæ methodum propugnans impinget in rudes ac obſtantes (inexpoſitis rectè principiis) ſcopulos, quippe diuerſas geometriæ partes, diuerſis principiis indigere conſtat, poſteriores ſemper prioribus demonſtrantes. Nihilo ſecius diſciplinas appetens, prioribus Arithmetices elementis vtcunque tum furtim, tum violentia raptas labentis temporis impendi particulas, quarum ſubſidio confuſas geometriæ quantitates diſcretione numerorum illuſtratas (quoad fas eſſet) conciperem: (continuis nanque edocendis idem confert diſcretio, quod agris arentibus letamen): ac demum Euclidi collatas temporis iniuria impoſturas in germanum geometriæ ſenſum (ab eo, vt veriſimile eſt, prius editum) reſtituerem, mihíque his artibus inſtituendo, terſa Euclidis elementa parare, quibus optatarũ diſciplinarum primordia capeſſerem. Quod pridẽ à me inſtitutũ tot terroribus retuſum, toties intermiſſum, negotiis aliud vrgentibus, deinde repetitum, aliquando tandẽ & vtcunque abſolutũ peregi, priuatis tantùm ædibus ac neceſſariis conferendum mihi proponens, cùm plus nactus eſſem otii. Sed longè aliud à cœpto coniunctorum ſuppeditant ſuffragia, qui ſedulò inſtant, cauſam agunt, ſyllogiſant, arguta ſedulitate impetunt, innumeris artibus moliuntur, hóſque ſudores lucem ſubire ſibi depoſtulant, quanuis imprudente culpa efferẽdos, vtilitati publicæ (vt aiunt) toto pectore, ſibíque, conſulentes. At ego contra ſi votis obtẽperans, ſcriptũ priuis tantùm deſtinatũ parietibus, in publicum mox proferã, prolixiori nec perluſtratũ ſtudio, imminet præſens periculum, quo cuique liceat ruſtici & inculti voluminis pro libidine cenſuram agere,

agere, ſiquidem (huic obuius) tam iugi cura dignam impendere velim operam, qua ſingulas huius cœpti repedam particulas. Impenſi laboris memor, præſciúſque futuri, rem prorſus inexpectatam, & ſupra vires ſubeo negotium: en ſubeſt ſenecta, qua frequentior corporis valetudo mala ſenſus ſubigit, lùminum concurrit imbecillitas, quæ huius ſudoris potiſſimum tempus præripuit, ex quo fit me tanto repedandi voluminis labore terreri. Quare ne quid in me durum offendat amicorum moleſtia, Chriſtianiſſimi Regis aſtrictus iuſſu, id vnum poſco, modeſte lector, nempe huius artis ſcripta, prolixiori cultu viſenda fuiſſe, reliquis quiſque ſcibilibus perſuaſum habe, éſtque demonſtrationum pertæſa vt plurimum argutia, cuius intelligentia non ſecus attentum quàm gnauum cultorem flagitat. Quocirca ſi quid ibi acquirat lectoris ſedulitas geometricam locupletãs eruditionem hactenus non viſum, huius artium vnico ſtructori referat gratias, quòd ſi ibidem rude quidpiam aut inexcultum offenderit, hæc ſibi perpendat, duros mihi huius diſciplinæ progreſſus fuiſſe, debilem conatum obſequio deſtitutum. Tandem toties intermiſſam ac interdum repetitam operam, quotuis ſeiunctis horulis vtcunque terminatam, in lapſus aliquos propenſiorem fuiſſe. Humana nimirum conditio, non modò ad ardua, verumetiam ad familiaria quandoque impingit: quamobrem hæc illi vnico ſummo concredam, cuius beneficentia longè plura quàm ritè ſuſcepta mihi collata ſunt. Quæ vtinam atque iterum vtinam illius clementis nutui morem gerant: ſuorum ſeipſos metiendorum obſequio deſeruiant: otiúmque (cui propensè humana indulget imbecillitas) ab ingeniis (diſciplinarum cultu excitatis) propulſent. Vale.

Præfatio.

QVi disciplinarum veram intelligentiam consequi velint, sibi magnopere curandum, suadeant: eas nulli humano sensui subiacere, sed solius mentis obiectum esse, cùm maximè sensus extra intelligentiam sint, ac quicquid sua opera nanciscuntur, menti seu intelligentiæ discernendum offerant, vt mentis intelligentia consors, & vnica insuper eius capax, disciplinas à certis & immutabilibus principijs nulliq; sensuum defectui obnoxijs ortas esse concipiat. Nulla planè sensuum externorum obsequia scientias optare liquet. Quod si disciplinæ potentia ad actum reuocanda sit, & quis in scientia fructus (mortalium vtilis obsequio) colligatur, scrutari cupimus, tum eam in praxim resoluentes, duros illos ac admodum inflexibiles sensus ad artis præcepta consequenda (aut verius quamproximè fas sit imitanda) flectendos esse intelligamus, vt quas artis leges infractas ac integras susceperit animus, eas quam prope insequi (licet minus præcisè adimplere) valeant sensuum opera: siquidem perfectio si qua est, intellectiua erit, heteroclitum verò sensuum exequium: neque enim solis sensibus huius defectus imponendæ sunt causæ. Sensus nanque (sensibilium ad intelligibilia veri nuncij) sine materia omnis operis sunt expertes, quæ quidem materia perfectiones intelligentiæ minimè exequi in se patitur. Scientias igitur intellectui, praxim verò earum sensibus ac materiæ conuenire, suapte natura concludemus.

Vt autem quis certarum scientiarum (quæ veræ disciplinæ dici merentur) ingressus requiratur, paucis exponamus. Earum ortum à principijs inchoari dicemus, quibus nihil prius tradi potest, à quo illa gignantur, quæ ideo tanquam disciplinarum primæ essentiæ existimari debent, quod eorum certitudo cuilibet ratiocinanti animæ sit tam familiaris & nota, vt solis vocibus illud principium resonantibus, nullo causæ præcedentis argumento illas probante requisito, sat cuique certa atque verissima sese offerant. Principiorum autem tres proferemus species, diffinitiones, petitiones, & communes sententias. Diffinitiones etenim cùm sint tantum nominum liberè rebus impositorum expositiones, illæ nihil præ se ferunt causæ eas generantis: libertas nanque suarum actionum causas præstare non cogitur. Attamen liberam denominationis impositionem illico sequitur necessarius eiusdem denominationis vsus, ne cadat in paralogysmum disciplinæ methodus. Quæ itaque libera fuit impositio, necessariam postmodum suiipsius obseruationem peperit. Petitiones verò (quas postulata dicimus) ex diffinitorum vsu partim sumptæ, verùm tam familiares vt nullus in eis appareat soluendus ratiocinanti

anima

animæ nodus, eò quòd præter vllas argumenti præstigias, postulatorum veritates annuendæ per seipsas satis supérque patent. Cõmunes verò dicemus sententias (quasi theoremata domestica) quæ causam proponunt, subsequentem effectum nulla intelligentiæ difficultate generantem: causam autem illam hypothesim esse quam sequitur sententiæ conclusio, dicimus. Has principiorum species subsequuntur theoremata ac problemata, sibipsis ante, aut posi posita, iuxta demonstrandorum exquisitam seriem, quæ idcirco vtraque propositiones dicuntur, quod ad methodum consequendam nobis proponantur, sub problematis aut theorematis specie. Theorema itaque exponemus, propositam esse orationẽ qua ex hypothesi liberè sumpta necessariam conclusionem oriri profert. Necessariam quippe dicemus, si sumpta hypothesis causa sufficiens fuerit, effectum generandi qui conclusio dicitur, non autem necessariam pro vnica & sola sumentes. Vnica etenim sumpta hypothesi diuersas generari conclusiones sæpius fas erit. At vbi in theoremate ex assumpta hypothesi aliqua sumitur conclusio, quæ, pro hypothesi sumpta, concludat eam quæ prius fuit hypothesis, hoc theorema sibi conuersum necessariò producit aliud. Nam si quæ fuit conclusio pro hypothesi sumatur, eam pro conclusione quæ prius fuit hypothesis necesse pariet; sicq; posterior prioris conuersa dicetur, priórque posterioris. His equidem conuersis sæpius vtetur Euclides, si futuris demonstrandis vtrasque præmittendas censeat, sin minus alteram tantùm partem quæ suo cœpta fuerit vtilior, educet.

Problema autem, orationem propositam esse dicemus, cuius & causam & hypothesim occultauimus, solam conclusionem proponentes, relicta genitrice causa inquirenda, quæ propositum excitet effectum. Huiusmodi etenim propositiones conuersas non habent, cùm nulla in ipsis hypothesis præponatur, quæ conclusionem conuerti possit, vt ostendimus in theoremate, sed vnica & simplex proponitur absque hypothesi conclusio, cuius intelligentia ab inquirenda causa eam generante dependet. Illas demum propositiones, quas diximus quandoque theorematum, quandoque verò problematum gerere effigiem, non ex se demonstratas asserimus, sed à notis principijs prius ortas quæ priores docentur, posteriores verò à principijs & prioribus similiter nasci patefient, quo ordine vera disciplinarum contexta methodus reperitur, eo scilicet quo priores causæ posteriores generant effectus, generale quidem in quauis disciplina ornamentum inuexa præceptum.

Quia verò Euclidis præcipuum cœptum fuit Geometriæ principia edocere, quæ cùm res communes & ideo confusas discutiant, Arithmetices principijs, vt ad faciliorem intelligentiam perducantur, fulciri appetunt: Geometriam igitur nihil aliud esse sentiemus, quàm artem qua maiora, minora, & æqualia patefit natura: eius verò Geometria vnicum esse obiectum quantitatem. Arithmeticam autem discernendi esse dicemus scientiam, qua cum Geometria commune habet diuinum illud principium, quod vnitatem nominamus. Quælibet enim Geometriæ magnitudo vna dicitur, Arithmetici verò priorem tantùm vnam denunciant, eámque insecabilem ac omni diuisione siue discretione priuatam: quia tamen confusionem sæpius parit continuum Geometriæ proprium, miscebit Euclides Geometricis principijs ea arithmeticorum principiorum elementa, quæ suæ arti geometricæ,

clarius edocendæ, facere satis apparebunt. Geometriæ etenim est vnicus scopus quantitas, quam (absque Arithmetices auxilio) tam confusam vrgẽte discretorum inopia discentibus offert, vt illis quid tantum maius, minus, vel æquale fuerit exponat, quanto quidem maius vel minus, Arithmetices relinquens subsidio. Volens igitur Euclides Geometriæ intelligendæ faciliores perquirere aditus, eiusdem principia per Arithmeticas distinctiones, vbi par erit, explanare non dedignabitur.

Quantitatem priori distinctione secuit Aristoteles in continuam & discretam, continuámque (verum Geometræ subiectum) in lineam, superficiem, solidum, tempus, & motum propriè dictas quantitates distinxit. Reliquas verò, quæ maius, minus, aut æquale proferunt, per accidens quantitates dici, non autem propriè voluit, insuper maius & minus, aut magnum & parvum, quantitatis nomine priuari. Sunt enim potius quantitatum respectus, quàm quãtitates, nec in quantitatis prædicamento ea recipi, sed in relationis vel ad aliquid prædicamento satius coaptari. Maius etenim minoris relatiuum est, & contra minus maioris. Tandem quantitatis proprium concludit æqualitatem, vel inæqualitatem esse, quod sonat veram quantitatum differentiam, quemadmodum & qualitatum, simile & dissimile differentiam proferunt. Continuam igitur dixit eam quantitatem, cuius partes copulantur aliquo cõmuni termino, quo quidem in vnicam & indiscretam magnitudinem confusè coëunt. Discretam autem quantitatem dixit Aristoteles esse numerum & vocalem orationem: earum quidem partes, nullo communi termino coniungi possunt, sed semper discretæ permanent, partes suum totum componentes, scilicet vnitates ac numeri minores, qui sunt partes maioris. Similiter & orationis prolatæ syllabæ siue dictiones totam orationem componentes, sibi inuicem distinctæ permanent, eò quòd nullum habeant communem terminum, ad quem copulatæ in vnum coëant, sed vnitatum more separatæ: quare suarum magnitudinum certiorẽm ac distinctiorem pariunt intelligentiam. Has itaque magnitudines quantitatem habere dicemus Arithmeticam, ob earum à numeris sumptam discretionem.

Cùm igitur continuarum quantitatum conceptus subtiliora discutiat negotia, scilicet eas habitudines quæ tam Geometricis quàm Arithmeticis quantitatibus conueniunt (diximus enim Geometriam & Geometricarum & Arithmeticarum magnitudinum comprehendere respectus, non tamen eam facilitatem qua per discretionem illæ exprimuntur habitudines) rudimenta geometrica à subtilioribus inchoabimus principijs, eò quòd quauis alia disciplina subtilior sit geometria: nanque lineæ, plani, ac solidi naturam docere volentes, à signo ordiemur, veluti temporis & motus ab instanti, ponderis autem à momento methodum aggrediemur. Cùm nec signum magnitudinis, nec instans temporis, neque momentum ponderis, quidpiam in se habeant, sed tantùm principia, termini, siue limites sunt, à quibus eorum nascitur intelligentia: quia verò discreta cognitioni ac intelligentiæ leuius captanda sese offerũt, nec in se aliquid habent confusum, discretorũ principia, primùm ab vnitate ordiuntur, quæ ex se determinata & planè cognita, nempe discretorum numerorum generans naturam exhibetur, discretarum quantitatum minima.

Vt autem quæ de Euclide vero Geometriæ cultui reuocanda cepimus, paucis tradamus

tradamus Euclidem in primis geometricarũ traditionum facilè principem profeſſi, eius demonſtrata ea certitudine fulcienda eſſe exiſtimauimus, qua principia. quæq́ ſic exponantur, vt ſingula ſuæ naturæ dignitatem conſeruent. Diffinitiones nempe, quibus totius diſciplinæ nititur ſtatus, in germanum ſenſum interpretandæ hactenus extant. Necnon curandum vt cum diffinitis conuerſæ progrediente diſciplina, alteri diffinito non adhæreant. Poſtulata verò vltra prius conceſſa nihil expetant. Communes autem ſententiæ adeo familiares habeantur, vt nulla argumenti optata ſpecie earum veritas propalanda ſit. Propoſitiones demùm à principijs genitæ, hoc præſcripto diſponantur, vt ſubſequentes à prioribus, non autem à poſterioribus demonſtrandæ ſint, ac earum demonſtrationes ſolis diſciplinæ legibus conſtruendæ tanta religione decorentur, ne vllum in eis demonſtrandis intercedat mechanici inſtrumenti iuuamen. Quippe Euclidis à Campano & Theone huc vſque nobis tradita quædam principia ac theoremata demonſtrationibus ornata, mathematicæ religioni repugnare cernimus: quandoque expoſitionis penuria, quandoque verò eiuſdem ſiniſtra ſumptione. Inſuper (quod præponderat) non rectè ſuſcipiuntur Arithmetices obſequia, quibus ratiocinanti lectori Geometriæ confuſas quantitates diſcernendas tradidit Euclides, numerorum prolatis quibuſdam ſelectis rudimentis: per quæ non numerorum præſertim tradendas leges ſuſcipit, ſed quantitatum confuſarũ (continui cauſa) naturã, numerorũ famulatu diſcernere conatur, vt poſtmodum per diſcretionem (quæ ſola quantitatis certitudinem menti poteſt inſerere) certas ab incertis quantitatibus, & natura & traditione longè diuerſas, ac inuicem incomparabiles eſſe proponat, nulli nempe diſcretionis communicãtes eidem, ac demum quæ de ſolidis dicta fuerint, imperfecta, nec ad optatum ab Euclide finem perducta fuiſſe, ſed manca vel heteroclita, quæ diſcentibus ab ipſo Euclide ſuſcepta prædicarunt: tanti viri decus octo theorematum, decimoquinto libro perficiendo relictorum obliuione maculantes.

Ab his itaque diſſidijs turbata Geometriæ ab Euclide relicta principia, & extra veræ diſciplinæ ſeriem diſtracta cernentes, quodque harum diſciplinarũ natura, tanta generis nobilitate, cæteras artes ſcibiliáque præcellat, vt inter eas certitudinis (quæ veritatis eſt indiuiduus comes) meritò primatum ſibi vendicet, certitudinis huius (& proinde veri) amantiſſimi, conatus viriúmque operas Euclidi reſtituendo impendere voluimus, quibus ea quæ geometricæ menti obſiſtere viſa ſunt, in veram diſciplinæ geometricæ methodum reducamus, commendata ea facilitate qua legentibus Theonis ſcripta iuxta Zamberti (Græcorum exemplarium interpretis) verſionem (quam ſibi familiarem iam conſecuti ſunt) noſtræ linguæ voces formare nitamur, diſcentibus obaudire cupientes. Textus necnon demonſtrationes ipſius diſcendi ſonum ſequentes quamproximè licebit, proferemus, ne locutionum diuerſitas difficilem conceptu demonſtrationem difficiliorem referat. Diffinitiones inſuper ea expoſitione ſociauimus, quam verum Geometriæ cultum appetere ſumus arbitrati: illæ etenim præcipuum Geometriæ fulciunt culmen. Demonſtrandi autem argumenta, à Campano ac Theone relicta, vt plurimum inſequemur, quæ ſi quandoque à Geometrica ſinceritate receſſerint, in alia demonſtrata mutantes, huius diſciplinæ integritatem tuebimur. Reliqua verò (reiectis ſuperfluis) in quam breue fas erit

compen

compendium cogentes, ne traditionis prolixitas difficili confusionem implicet, seruato attamen hoc ordine, quo cuilibet variato theoremati occasionem (si quæ fuerit) monito ad finem collato exponamus, quo & alterationis causam, & veritatis effectus, patefacere conabimur, maximè vbi vrgens variandi negotium incubuerit. Quia verò in demonstrandis theorematis occurrunt particulæ, quandoque non prius expositis primordijs demonstrandæ, corollaria sæpiusculè conculimus, aut equidem propositiones, quibus modico vel potius nullo tædio, integra sequentis theorematis concludetur demonstratio. Cùm autem ad præcipua Geometriæ rudimenta ventum erit, rationes scilicet & proportiones, his exponendis prolixiores esse cogemur, præcipuè circa diffinitiones, subtiliorum huius disciplinæ partium fundamenta tolerantes. Existimauimus etenim fœdata exemplaria Euclidis fuisse, tum quidē temporis truculentia, tum & hominum incuria, vt testatur Zambertus sua in Euclidem perspectiuè liminari, se tineis & carie lacerata comperisse Euclidis exemplaria, tanta quidem egestate, vt quæ iuxta veram huius disciplinæ mentem, suorum principiorū ordine suffultam restituenda essent, ea interpretes sub communem aliarum professionum praxim dirigenda esse rati, diffinitiones & proinde theorematum sententias in exteros sensus distrahentes, silentio non tantùm permulta vtilia, sed & necessaria prætermisere: quidam verò eorū intelligentiam ferè pertingentes, expositiones truncas, ac veluti hæsitantes protulêre. Hæc obseruantes, nec minus veræ disciplinarum intelligentiæ auidi, quàm dignitatis tanti viri cultores, quid in horum principiorum vero conceptu abstrusum esset inquirentes, quo illorum veritas à quouis calumniæ incursu tutanda esset, reperimus Euclide discreta Arithmetices exequia in auxilium continuorum exponendorum implorante, aliquos eius interpretes, Arithmetices cum Geometriæ rudimētis principia confudisse, ac vtraque eadem interpretatione elucidanda forè existimasse, discreti à continuo latam illam non venerantes discrepantiam, tum & natura, & methodo ipsis ab æterno insitam magnitudinis scilicet naturam pro actione quæ ipsi elucidandæ confertur sumentes, in id ferè delusi sunt, vt pro substantia accidens exponendum esse arbitrati sint, nempe multiplicem magnitudinem pro ipsi collata multiplicatione recipiendam esse coniecerint, ac alia plura, quæ latius posthac Altissimi nutu ostensuri sumus, ab impropria rudimentorum expositione genita.

Cæterùm tres numerorum libri sextum è regione sequentes, æquè vt reliqui ab Euclide in rudimentorum Geometricorum gratiam elucidandorum, non in Arithmeticem edocendam prolati sunt: is nanque numeros ad arcanam continuarum & ideo confusarum quantitatum intelligentiam exponendam sua discretione sumpsit, tum etiam vt illam exprimat inter quantitates naturæ distantiam, qua quantitates habitudinem certam ac perceptibilem inter se habentes, desciscunt ab ijs quæ incertum, indeterminatum, ac penitus ob omni tuta intelligentia detrusum inter se habent respectum. Quibus explicandis si quos offenderimus terminos, veram quantitatis naturam relinquentes, non verebimur aptiores intelligendæ methodo conferre: quæ etenim suo proprio difficilia sunt, per improprias voces expressa, facilè omni tuta intelligentia priuari posse credemus. Si quid igitur extra communem vsum huic adaptemus negotio, illud facilioris intelligentiæ captandæ gratia propo-

situm

ſicum eſſe exiſtimemus, non enim quæ eloquentiam, ſed quæ Geometriam aſpectant, diſcutienda ſuſcepimus. Cùm autem ad ſolida properabimus trium dimenſionum ſolido cuique propriarũ, quaſdam certis quãtitatibus, incertis alias exprimi reperiemus, certas enim elucidabunt numeri, incertas verò à certis remotas oſtendent idem, vt ſuſius decimo libro dicetur. Horum autem ſolidorum libros quinque poſt decimum deſcripſit Euclides, quorum binos priores de ſolidis in genere nunc apari voluit. Tres verò poſteriores de corporibus (vt Græco exemplari habetur): horum licet eadem ſit ferè ſubſtantia, binorum priorum attamen generalia in omnia ſolida voluit perſcribi documenta. Poſterioribus verò tribus ſolidorum regularium texturam edoceri voluit, quo quidem regularia ſolida finito numero concluſa (ſcilicet ſenario) arctiores & à reliquis ſeparatas leges, eorũ corporũ conſtructiones ſeu affinitates dicibiles amplectentes, his tribus poſtremis coëgit libris, qui itaq; de corporibus loqui dicti ſunt. Sed quia trium horum priorem tantùm tranſtulit Theon, Ypſicles verò reliquos, Campanus autem in omnes ſcripſit, veremur has diuerſitates aliquid corruptionis genera ſſe. Nam decimiquarti 18 theoremata ab Euclide profitetur ſuſcepiſſe Campanus, decimiquinti verò 13. At Ypſicles decimoquarto, quatuor, decimoquinto autem quinque tantùm ab eodem recepiſſe fatetur Euclide. Horum itaque aut certè Campani in decimumquartum luxus, in decimumquintum verò inopia, aut equidem Ypſiclis in vtroſque penuria vnde oriatur, relinquimus. Quare decimiquarti opus comparatione ſolidorum decimotertio deſcriptorum niti cernentes, quæ huic Euclidem contuliſſe arbitramur, conferemus eidem, reliqua ſi quæ neceſſaria fuerint ſuis locis reponentes. Decimiquinti autem ab Euclide neceſſariam theorematum cæptam ſeriem, vno ſcilicet & viginti concluſam problemate aggredientes. Campanum comperimus duodecimo ſeu penultimo theoremate, viginti optatarum ab Euclide inſcriptionum, duodecim tantùm demonſtrari poſſe (quas ſcilicet is demonſtrare conatus eſt) dicentem, nonnulliſque debilibus admodum argumentis illud idem confirmare cupientem. Quaſi Euclidis cæptum vires prætergredi concluderet, qui nempe viginti ſolidorum regularium demonſtrandas ſuſcepiſſet inſcriptiones, duodecim tantùm adimpleſſe potuiſſet. Inauditum ſaltem nulla fide dignum illud arbitrati, ſed potius elapſos temporis ambitus id nobis iniuriæ contuliſſe, vt quæ integra deſcripſerat Euclides, diſſecta ſeu variè vitiata ad nos perducta fuiſſe ſuaſimus. Ne igitur tantùm huius viri depereat nomen, huic decimoquinto peragendo, tam ſerio incumbemus ſudore, quo (diuina opitulante clementia) numeris omnibus abſolutum illum reſtituamus, mentem doctiſſimi illius Euclidis quamproximè licebit è veſtigio ſequentes. Ac inſuper eidem decimumſextum de ſolidorum inſcriptorum, ad circunſcripta reſpectu ſeu affinitate dicentem ſociabimus. Prius inchoatam ſolidorum regularium intelligentiam proſequentes, qua decimotertio deſcripta ſolida ſequenti decimoquarto ad ſe collata ſunt: ſic quæ decimoquinto deſcripta erunt, poſtremò decimoſexto conferenda venient. Demùm quánam arte componantur hæc regularia ſolida, compoſitáque qualia producant corpora, demonſtratis argumentis docebimus, ſubiungẽtes decimoſeptimo & decimooctauo qua ratione ea ſingulis regularibus, ſinguláque illis regularia inſcribantur admonentes. Hæc autem hactenus diſcuſſimus, vt legenti facilitas elemento

mentorum geometricorum adaugendorum pateat, ac in dies ditior sine locupletior euadat huius disciplinæ methodus. Nam quæ circa regularium figurarum latera, bases, aut solida conferri possunt habitudines, numero ferè infinitæ nascentur, eorum igitur nostro decimosexto aliqua proposuisse sufficiat. Tandem vt inter hæc perfecta solida fraternæ quidpiam noscamus insidere necessitudinis, binos libros terminando solidorum labori contulimus, quibus pulcherrimè solida in mixta seu ab ipsis composita transferantur, siue quæ & qualia coniuncta componant, solida proferamus. Tum etiã de solidorum regularium natura quædam subiunximus, sublenandis ingeniorum laboribus non parum vtilia. Reliqua studiosis huius disciplinæ miliebus adimplenda relinquentes.

ΕΜΠΕΙΡΙΑ ΤΕΧΝΗΝ, ΑΠΕΙΡΙΑ ΤΥΧΗΝ ΕΥΡΕ.

EVCLIDIS MEGARENSIS MATHEMATICI CLARISSIMI ELEMENTA GEOMETRICA LIBRIS QVINDECIM,

Ad germanam Geometria intelligentiam è diuersis lapsibus temporis iniuria contractis, restituta: adimpletis, prater maiorum spem, qua hactenus deerant solidorum regularium conferentijs ac inscriptionibus. Auctore Francisco Flussate Candalla.

DEMONSTRATIONVM EVCLIDIS LIBER PRIMVS.

DIFFINITIO PRIMA.

SIGNVM est, cuius pars nulla.

Quia Geometriam agimus, cuius vnicum obiectum est quantitas, Signum esse diffinimus, notam subintelligentes, cuius nulla est pars quantitatis, vt cum diffinito conuersa diffinitio, notam cuius nulla sit quantitatis pars, signum esse intelligat, quantitatem agens: Nullam autem partem, sed tantùm animi conceptum, cuiuslibet quantitatis partem optatam vel locum limitantem, diuidentem, aut designantem. Quod equidem in temporis quantitate instans, veluti in pondere momentum idem esse dicemus, quæ nihil metiuntur, sed tantùm limitant.

DIFFINITIO SECVNDA.

Linea verò est, longitudo non lata.

Quoniam Geometria tres recipit dimensiones, longitudinem, latitudinem, scilicet, & sublimitatem. Quę verò quantitas vnam tantùm habet dimensionẽ, ea longitudinem tantùm habet: Eapropter lineã, primam quidem omniũ dimensionem, longitudine sola, nulla verò latitudine aut altitudine dotat. Quare eius longitudo quantitas dicetur, eius verò latitudo aut sublimitas, signum tantùm recipit, hoc est

determinandi, limitandi, aut designandi virtutem: Metiendi verò solas longitudines, nullas autem latitudines, vel sublimitates suscipit negotium.

DIFFINITIO TERTIA.

Lineæ autem limites sunt, signa.

Limites lineæ signa vocat, eò quòd limitare sit alicuius quantitatis progressum terminare, quia verò longitudo lineæ cùm sit sola in linea dimensio, sumit sibi terminum limitem, siue designatorem signum, quod quidem æque vt illa vtitur reliquis dimensionibus, latitudine scilicet & altitudine, hoc est nulla. Terminatur itaque aut limitatur lineæ progressus signo.

DIFFINITIO QVARTA.

Recta linea est, quæ ex æquali sua interiacet signa.

Signa lineæ (ad eam vere rectam diffiniendam) ex æquali interiacere dicit. Cùm quæuis in oblata linea signa conceperit animus inter extremos lineæ limites, hac serie interiaceant siue interponantur, vt ex æquali & nusquam subsultando siue declinando, ab extremorum mutuo recedant aspectu, sed inter extrema lineæ signa adæquatè iaceant.

MONITVM.

Hanc diffiniuit Campanus rectam esse, quæ à puncto ad punctum breuissime extenditur, quæ diffinitio veram rectitudinis substantiam non concipit. Rectitudo etenim lineæ in declinationis priuatione, siue in eo situ quem extremorum signorum lineæ aspectus indicat, consistit, non in breuitate. Nos ideo Theonem sequemur.

DIFFINITIO QVINTA.

Superficies est, quæ longitudinem, & latitudinem tantùm habet.

Diximus secunda diffinitione, primam & vnam tantùm haberi dimensionem in linea: nunc verò superficiei secundam (quæ binas præsefert dimensiones) attribuemus, longitudinem quidem & latitudinem: quo etenim obsequio linea longitudines tantùm metitur, eodem superficies, longitudines & latitudes mensurat: sed cùm tertia careat dimensione, scilicet sublimitate, eius sublimitatem exprimet signi sublimitas, quæ nulla vtriusque est. Quòd autem ad tertiam attinet dimensionem, scilicet solidorum, prima vndecimi docebit quandoque diffinitio, prioribus his decem libris quæ tantùm ad binas priores dimensiones spectant, interdum dicturi.

DIFFINITIO SEXTA.

Superficiei extrema, sunt lineæ.

Qua ratione diximus lineæ progressum signo terminari siue limitari, sic dicemus superficiei progressum terminari vel limitari linea, eò quòd eandem habeat altitudinem cum superficie, quæ nulla est. Terminamus igitur, limitamus, aut concludimus superficiem, lineis: qui termini, extrema sunt ipsius superficiei, etsi recta fuerint, aut curua.

DIFFINITIO SEPTIMA.

Plana superficies est, quæ ex æquali suas interiacet lineas.

Huic diffinitioni maximè conducit quarta huius: earum etenim idem ferè est sensus. Qua namque arte singula rectæ lineæ signa inter extrema iacent nusquam subsultantia vel declinantia: eadem omnes in plana superficie ductæ lineæ interiacent ex æquali, hoc est, inter lineas superficiem terminantes, vt proxima diximus diffinitione,

diffinitione, nuſquam à mutuo extremarum aſpectu ſubſultantes aut declinantes, ſiue in altitudinem extra mutuum extremarum aſpectum tendentes.

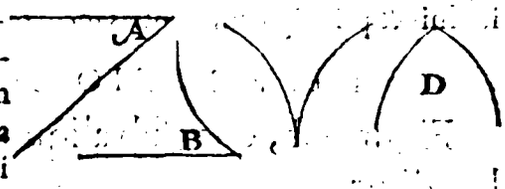
DIFFINITIO OCTAVA.

Planus angulus eſt, duarum linearum in plano ſeſe tangentium, & non in rectam iacentium, adinuicem facta inclinatio.

Quoniam his decem prioribus libris de lineis rectis & circularibus, quæ quidē in ſuperficie plana deſcribūtur, dicturi ſumus, intelligemus planum angulum eſſe, eum qui in ſuperficie plana ab his lineis ſe tangentibus, ac in ſe inclinantibus deſcribitur. Angulus etenim eſt linearum tangentium ſeſe inclinatio. Anguli verò magnitudo in ſola inclinatione conſiſtit, quæ vnicum menſorem habet circuli circa ſe ambitum, vt latius dicemus trigeſima tertia ſexti. Si autem duæ rectæ in rectam coëant ſeſe tangentes, ille contactus licet in plano ſit, nullum efficiet angulū, eò quòd nulla ſit inclinatio.

DIFFINITIO NONA.

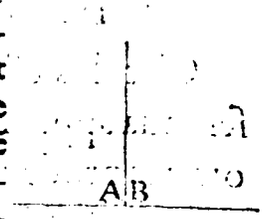
Quando autem continentes angulum rectæ lineæ fuerint, Rectilineus angulus nuncupatur.



Rectilineum angulum A rectis comprehenſum lineis vocat, vt reliquorum differentiam ab eo noſcamus. Nam B angulum mixtum dicere poſſumus à recta & curua comprehenſum: C verò curuilinium, ſimiliter & D: ſed hunc quidem concauum, illum verò conuexum. Omnes tamen plani dicuntur anguli, vt differant à ſolido, quem vndecimo libro fauente Supero, diffiniemus: horum autem infinitæ ſunt diuerſæ delineationes.

DIFFINITIO DECIMA.

Cùm verò recta ſuper rectam conſiſtens lineam, vtrobique angulos æquales adinuicem fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum, & quæ ſuperſtat recta, perpendicularis vocatur, ſuper quam ſteterit.



Proſequens anguli naturam, exponit æqualem inclinationem æquales efficere angulorum quātitates. Cùm enim dicit rectam ſuper rectam ſtantem, hoc ſitu quo æquos vtrobique formet angulos, eoſdem rectos vocitari. Id fatur, eò quòd eadē lineæ ſtantis ad propoſitam vtrobique fiat inclinatio, quæ quidem æqualis exiſtens, æquales denominat angulos, hoſque rectos. Quæ verò ſuperſtat recta, perpendicularis eò dicitur, quòd Natura duce, quæ grauia deorſum dirigit, in planum ab humanis cultum æquali vndique facta inclinatione pendeat, ac ad omnes rectas lineas in eo plano eam tangentes, angulos æquales efficiat, vt latius deſcribet vndecimus liber.

DIFFINITIO VNDECIMA.

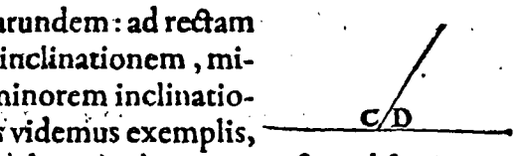
Obtuſus angulus, maior eſt recto.

DIFFINITIO DVODECIMA.

Acutus verò, minor eſt recto.

Iam oſtendimus linearum inclinationem anguli efficere magnitudinem. Sed cùm inclinationem maiorem exiſtimemus maiorem linearum acceſſum ſiue à re-

da receſſum: minorem verò, receſſum earundem: ad rectam autem accedentium, dicemus maiorem inclinationem, minorem producere angulum: & proinde minorem inclinationem, maiorem efficere angulum, vt his videmus exemplis,



rectas angulos A & B conſtituentes, eò quòd æquè adaperiantur ſiue ad ſe inclinẽt, æquos efficere A & B angulos, & ideo (per decimam definitionem) rectos. Quia verò rectæ angulum C conſtituentes, plus adaperiuntur ſiue recedunt à ſeipſis, quàm recedant illæ quæ angulum A rectum conſtituunt, ab eis factus angulus C, maior recto dicetur: quia è conuerſo angulum D conſtituentes, minus adaperiuntur, ſiue plus inclinant reliquis rectum componentibus, coactum D angulum idcirco minorem recto, acutum efficiunt, eò quòd D acutiori cuſpide, C verò obtuſiori forment.

DIFFINITIO DECIMATERTIA.

Terminus eſt, quod alicuius eſt extremum.

Quoniam cuiuſuis quantitatis extrema eam concludunt ſuis terminis: dicemus terminos eſſe ea extrema quæ magnitudinem coarctant: quem quidem terminum aliqui finem vocarunt, eò quòd ſuppoſito in oblata magnitudine motu, ab intima parte ad extremas, vbi extremum aliquod eo motu attigimus, ibi huius motus finẽ reperimus. Sed aptior eius ſubſtantiæ denominatio per extremum nuncupatur, ne in finis & principij differentias incidamus.

DIFFINITIO DECIMAQVARTA.

Figura eſt, quæ ſub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

Figuram iuxta præcedentem diffinitionem, dicimus eſſe eam quæ ſub aliquo extremo concluditur, aut equidem ſub pluribus: ſub vno tantùm extremo (hoc eſt vnica tantùm linea) concludimus circulum, coni ſectionem: in ſolidis verò, ſphæram: vnica ſuperficie, ſpheroidem, & huiuſmodi plana & ſolida: ſub pluribus verò, ſuperficies pluribus rectis ſiue curuis lineis comprehenſas, ſolida pluribus planis contenta. Quorum omnium termini ſunt, ſcilicet planorum, lineæ, ſolidorum verò ſuperficies. Quia verò ſigna lineam limitantia, nihil quantitatis concludere poſſunt, lineæ ea limites, non terminos eſſe dicemus, cùm infinita nihil componere poſſint, nec igitur concludere.

DIFFINITIO DECIMAQVINTA.

Circulus eſt, figura plana, vnica linea contenta, quæ circunferentia appellatur, ad quam ab vno ſigno introrſum exiſtente, omnes prodeuntes rectæ lineę, adinuicem ſunt æquales.

Hac diffinitione circuli nec illum rotundum, nec quidem eius ſignum medium eſſe dicit. Concludit autem neceſſariò ex ea rectarum ab vno interiori ſigno ad ambitum æqualitate, & circunferentiam in rotundum, & ſignum in medium ferri: hunc autem ambitum, circunferẽtiam denominat, quæ quidem ab vno ſigno orta, eouſque figuram circumit, donec vnde orta eſt, redeat.

DIFFINITIO DECIMASEXTA.

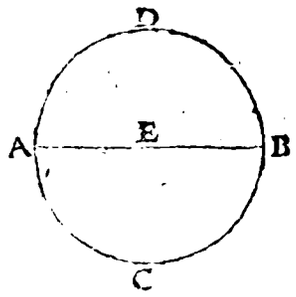
Centrum verò circuli, illud ſignum appellatur.

DIFFINITIO DECIMASEPTIMA.

Diameter circuli eſt, linea recta per centrum acta ex vtraque parte circunferentia terminata, quę circulum bifariam diuidit.

Sufficit rectam lineam per circuli cẽtrum actam eſſe in vtraſque circunferentiæ partes,

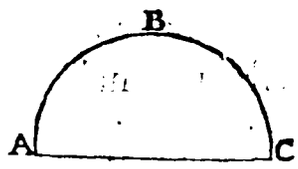
partes,vt ea circulum bifariam ſecet. Nam ea regularitas qua omnes à centro rectæ ſunt æquales, oſtendit per centrum rectas ad vtraſque partes diametri æqualiter circunferentiam attingentes, & per quaſuis areæ partes hinc & inde ſemper æquales, arearum æqualitatem neceſſariò producere. Vt à centro E ad vtraſque partes, ſcilicet C vel D diametri A B quælibet ductæ æquantur, æquales igitur areas metientes.



DIFFINITIO DECIMAOCTAVA.

Semicirculus eſt, comprehẽſa figura ſub dimetiente & ſumpta à circuli circunferentia.

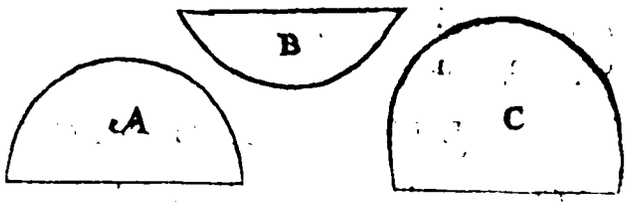
Cùm dixerimus figuram ſub terminis contineri, eam quæ ſub dimetiente & circuli circunferentia, quam tollit dimetiens à toto circuli ambitu,concipitur,ſemicirculum dicit, comprehenſum quidem his duobus terminis, ſcilicet A C diametro,& A B C circunferentia à circulo ſumpta.



DIFFINITIO DECIMANONA.

Sectio circuli eſt, comprehenſa figura ſub recta linea & circunferentiæ parte.

Hanc diffinitionem repetit Euclides tertio libro, quinta diffinitione, cui quidem plus conuenit quàm huic. Eſt enim ea figura, ſectio circuli quæ inter rectam lineam & circumferentiæ circuli partem concluditur. Campanus & Theon ac aliqui iuniores, præter græcum exemplar, dixerunt hanc intelligi maiorem aut minorem ſemicirculo, amplitudinem huius dictionis tollentes: quod alienum à vero ſenſu arbitrati ſumus, cùm æquè dimidia totius,ſectio,vt tertia vel quarta dici poſſit,vt A,B vel C.



DIFFINITIO VIGESIMA.

Rectilineę planę figurę ſunt,quę ſub rectis lineis cõtinentur.

In genere diffinit rectilineas quaſlibet à rectis lineis comprehenſas, vt particularius aliquas earum poſtmodum edoceat.

DIFFINITIO VIGESIMAPRIMA.

Trilatęrę figurę ſunt,quę ſub tribus rectis lineis cõtinentur.

DIFFINITIO VIGESIMASECVNDA.

Quadrilaterę figurę ſunt,quę ſub quatuor rectis lineis comprehenduntur.

DIFFINITIO VIGESIMATERTIA.

Multilateræ verò figuræ ſunt, quæ ſub pluribus quàm quatuor rectis lineis,comprehenduntur.

Quæ his quatuor diffinitionibus in genere expoſuit de rectilineis figuris,diſtribuet in eas potiſſimum figuras, quarum vtilitas Geometriæ plus conducere videbitur:reliquas ſub multilaterarum generali relinquens denominatione.

DIFFINITIO VIGESIMAQVARTA.

Trilaterarum porrò figurarum æquilaterum eſt, triangulum ſub tribus æquis lateribus contentum.

DIFFINITIO VIGESIMAQVINTA.

Iſoſceles autem eſt, quod duo tantum æqualia habet latera.

DIFFINITIO VIGESIMASEXTA.

Scalenum verò eſt, quod tria inæqualia habet latera.

DIFFINITIO VIGESIMASEPTIMA.

Inſuper trilaterarum figurarum, rectangulum triangulum eſt, quod habet rectum angulum.

Cùm in triangulo quouis vnus tantùm angulus rectus eſſe poſſit, ſat videtur feciſſe ſi denominet rectangulum triangulum, eò quòd vnum rectum, cùm plures habere non poſſit, poſſideat.

DIFFINITIO VIGESIMAOCTAVA.

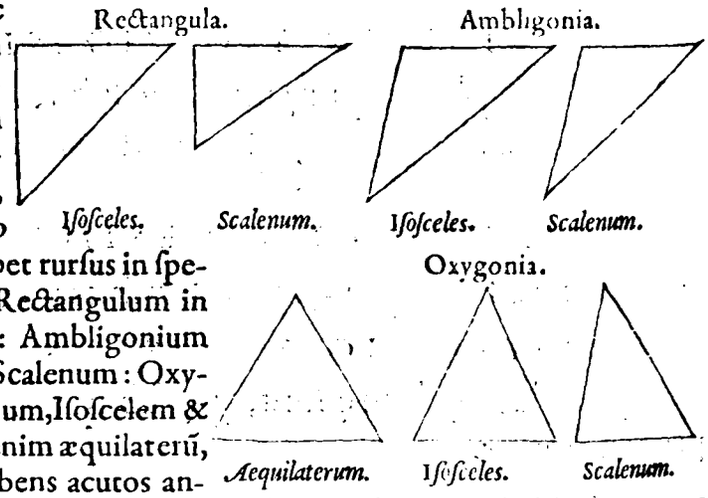
Ambligonium autem eſt, quod obtuſum habet angulum.

Fortius huic inerat argumentum. Si enim in quolibet triangulo, duo recti anguli eſſe non poſſint, difficilius duo obtuſi erunt: quippe qui maiores rectis exiſtunt. Eâ de re ab vno tantùm obtuſo, Ambligonium denominabitur à voce græca depromptum.

DIFFINITIO VIGESIMANONA.

Oxygonium verò eſt, quod tres habet acutos angulos.

Vt præcedens angulus græcam concepit denominationem, ſic Oxygonium ab acuto angulo denominabimus: id quidem quod tres habet acutos angulos ſiue æquales ſiue inæquales, hoc eſt, quod nullum rectum aut obtuſum habeat. Horum etenim triãgulorum omniũ tria efficiemus genera, ſcilicet Rectangulũ, Ambligonium, & Oxygonium. Quorum quodlibet rurſus in ſpecies ſubdiuiditur: puta Rectangulum in Iſoſcelem & Scalenum: Ambligonium ſimiliter in Iſoſcelem & Scalenum: Oxygonium verò in æquilaterum, Iſoſcelem & Scalenum: quodlibet etenim æquilaterũ, eſt Oxygonium, tres habens acutos angulos. Reliquorum verò vtrunque, Iſoſceles ſcilicet & Scalenum, Oxygonia, Ambligonia, vel rectangula, quandoque ſunt, vt his docetur figuris.



DIFFINITIO XXX.

Quadrilaterarum autem figurarum, quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum ac rectangulum eſt.

DIFFINITIO XXXI.

Alterolongius eſt, quod rectangulum quidem, ſed æquilaterum non eſt.

Regulares prius quadrilateras exponit figuras, incipiens à quadrato: quod cùm latera æqualia & angulos æquales habeat, rectos habere cogitur. Nam omne quadrilaterum quatuor rectis angulos æquales efficit, vt colligemus 32 primi: hæc etenim angulorum æqualitas, oppoſitorum laterum æqualitatem neceſſariò producet. Quare Alterolongius dicimus, quod æquiangulum, hoc eſt, rectangulum, ſed æquilaterum non eſt, cùm oppoſita tantùm habeat latera æqualia.

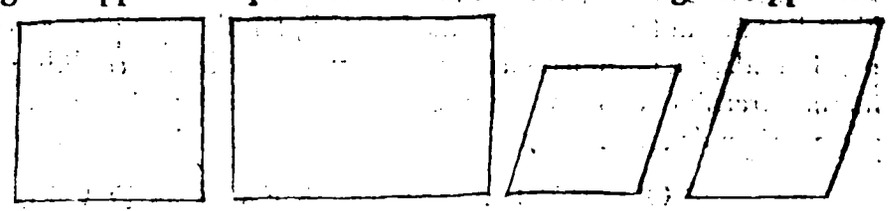
DIFFINITIO XXXII.

Rhombus eſt, quæ æquilatera, ſed rectangula non eſt.

DIFFINITIO XXXIII.

Rhomboïdes verò eſt, quę ex oppoſito latera & angulos habens æquales, neque æquilatera neque rectangula eſt.

Quoniam omnes figuræ rectilineæ quæ numero laterum triãgulum excedunt, poſſunt in variatis lateribus angulos variare. Hæ 32 & 33 diffinitiones nihil aliud à 30 & 31 immutant quàm angulorum varietatem, non variatis lateribus. Quæ etenim figura Quadratum dicta eſt, variatis tantùm angulis, Rhombus dicetur, non variatis lateribus. Quæ verò Alterolongius dicta fuit, nulla laterum, ſed tantùm angulorum varietate facta, Rhomboïdes dicetur: Quælibet enim harum latera oppoſita, & angulos oppoſitos æquales habet. Priorum autem ſingulæ oppoſitos habent æquales, vt his docetur exemplis.

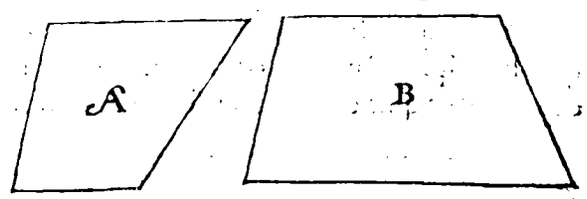


Quadratum. *Alterolongius.* *Rhombus.* *Rhomboïdes.*

DIFFINITIO XXXIIII.

Præter has autem reliqua quadrilatera, Trapeſia appellãtur.

Vltra eas de quibus locuti ſumus, quadrilateras figuras Trapeſia vocat: Ea ſcilicet plana, quæ nec æquiangula ſunt, nec parallelis comprehenſa lateribus, vt hæc A & B.



DIFFINITIO XXXV.

Parallelæ rectę lineę ſunt, quæ in eodem exiſtentes plano, & ex vtraque parte in infinitum productæ, non concurrunt.

Hæc diffinitiò notanda propter eius frequentem vſum erit. Sunt itaque parallelæ rectæ lineæ, (quas vocauit Campanus Æquidiſtantes) in eadem plana ſuperficie deſcriptæ vel conceptæ, ea tamen arte, qua ſemper & vbique, inter eas æqualis diſtantia intercipiatur. Perſpicuum igitur erit, ſi ſemper æquidiſtent, nunquam eas coniungi, vel concurrere.

DIFFINITIO XXXVI.

Parallelogrammũ eſt figura plana quatuor rectis lineis contenta: quarum quęlibet oppoſitæ ſibi inuicem ſunt parallelæ.

Hanc diffinimus figuram tanquam genus ad trigeſimam & tres eam ſequentes, quas comprehendit in ſe Parallelogrammum, & nihil inſuper: quælibet etenim earum & nullæ aliæ quadrilaterę latera oppoſita parallela habent. Qua de cauſa autem præter Euclidem, eius diffinitionem apponimus, facile patebit: eo quidem quòd ſępius hac dictione non diffinita primo libro vtitur: & tam confuſe, vt exagonum quandoque 34 primi pro Parallelogrammo ſumi poſſit, cùm eius latera & anguli, quæ ex oppoſito æquentur, & dimetiens illud bifariam ſecet, quod eſſet abſurdo abſurdius.

Sequuntur Poſtulata ſiue Poſitiones ſimplices, *à nullis præmiſſis deducta: quas concedi nobis optamus ad faciliorem artis progreſſum, quæ quidem nullo argumento poteſt mens rationalis denegare.*

POSTVLATVM PRIMVM.

AB omni ſigno in omne ſignum rectam lineam ducere.

Non inconuenit ſenſui vt ab omni ſigno mente concepto (cùm aliud non ſit) in omne aliud ſignum, lineam rectam excogitare: quod quidem æquè facile reperimus vt ſignum ipſum concipere. Nam lineam aut ſignum, qualia ars depoſcit, ſenſibus proponere non poſſumus percipienda, ſed tantùm concipienda: ea quippe nobis ars tradidit perfecta. Quæ itaque externis exequenda erunt ſenſibus, per artis intelligentiam mente conceptam dirigenda erunt, vt eam, quamproximè valeant, imitentur.

POSTVLATVM SECVNDVM.

Rectam lineam terminatam in continuum rectúmque producere.

POSTVLATVM TERTIVM.

Omni centro & interuallo, circulum deſcribere.

Hæc bina Poſtulata (veluti prius) naturam Geometricæ ſequuntur diſciplinæ: quæ licet ipſo actu aliqua difficillimè exequi poſſint, tamen earum in mente conceptio, ad ea quæ externis ſenſibus agi poſſunt, regenda ſufficiet ſat ſupérque.

Communes ſententiæ, quæ eo à Poſtulatis

differunt, quòd Poſtulata ſint poſitiones ſimplices, à nulla præmiſſa deducta, quæ rem non exiſtentem fieri poſtulent. Sententiæ verò communes, conditionalem præmiſſam neceſſariò ſequentes, rem iam exiſtentem nos ſentire cupiant: Quod prætermiſerunt Campanus & Theon: hic nanque duas inter Poſtulata miſcuit Sententias, ille verò tres, relinquentes græcum exemplar, quod noſtro iudicio approbandum videtur hoc loco.

PRIMA

PRIMA.

QVÆ eidem æqualia, & adinuicem ſunt æqualia.

SECVNDA.

Et ſi æqualibus æqualia adiiciantur, tota erunt æqualia.

TERTIA.

Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur, quæ relinquuntur, erunt æqualia.

QVARTA.

Et ſi inęqualibus æqualia adiungantur, tota erunt inęqualia.

QVINTA.

Et ſi ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua inæqualia erunt.

SEXTA.

Quæ eiuſdem ſunt duplicia, adinuicem ſunt æqualia.

SEPTIMA.

Et quæ eiuſdem ſunt dimidium: æqualia ſunt adinuicem.

Binas, ſextam ſcilicet & ſeptimam, poſuit tantùm Euclides, quibus cunctæ reliquæ quantitatum multiplicationes ſiue in augmentum ſiue in decrementum extenſæ, comprehenſæ ſint. Nam cùm ait eiuſdem duplicia æqualia adinuicem eſſe, intelligit haud ſecus eiuſdem triplicia aut quadruplicia aut alia quæuis ęquè multiplicia inter ſe æqualia eſſe. nec non dicens eiuſdem dimidia æqua eſſe, illico concludit, eiuſdem tertia, quarta, quinta aut alia quæuis idem decrementum eiuſdem multiplicantia, inter ſe æqualia eſſe, vt compendio conſulat.

OCTAVA.

Et quæ ſibimetipſis conueniunt, æqualia ſunt adinuicem.

Sibimetipſis conuenire dicuntur magnitudines, cùm earum ſingulæ quantitates ſingulis comparatæ, æquales reperiuntur, vt cuiuſlibet totius partes partibus alterius quoad quantitatem conueniant, hoc eſt rationali argumento (non autem experientia) conuenire cognita, illa ſunt æqualia, vt longitudo longitudini, latitudo latitudini, ſublimitas ſublimitati, rectarum inclinatio inclinationi, & reliqua id genus.

NONA.

Totum eſt ſua parte maius.

Reſpectiuum eſſe dicemus totum ad partem, cùm ſint ſibi relatiua: pars etenim geometrica quodlibet à toto abſtractum eſt, aliquid ei reliquens, quod latius docebimus prima diffinitione quinti.

DECIMA.

Omnes anguli recti, æquales adinuicem ſunt.

VNDECIMA.

Si in duas rectas lineas, recta incidens linea interiores & ad eaſdem partes angulos, duobus rectis minores in plano fecerit, Rectas lineas in infinitum productas, concurrere neceſſe eſt ad

eas

DIFFINITIO XXXVI.

Parallelogrammũ eſt figura plana quatuor rectis lineis contenta: quarum quęlibet oppoſitæ ſibi inuicem ſunt parallelæ.

Hanc diffinimus figuram tanquam genus ad trigeſimam & tres eam ſequentes, quas comprehendit in ſe Parallelogrammum, & nihil inſuper: quælibet etenim earum & nullæ aliæ quadrilateræ latera oppoſita parallela habent. Qua de cauſa autem præter Euclidem, eius diffinitionem apponimus, facile patebit: eo quidem quòd ſępius hac dictione non diffinita primo libro vtitur: & tam confuſe, vt exagonum quandoque 34 primi pro Parallelogrammo ſumi poſſit, cùm eius latera & anguli, quæ ex oppoſito æquentur, & dimetiens illud bifariam ſecet, quod eſſet abſurdo abſurdius.

Sequuntur Poſtulata ſiue Poſitiones ſimplices, *à nullis præmiſſis deducta: quas concedi nobis optamus ad faciliorem artis progreſſum, quæ quidem nullo argumento poteſt mens rationalis denegare.*

POSTVLATVM PRIMVM.

AB omni ſigno in omne ſignum rectam lineam ducere.

Non inconuenit ſenſui vt ab omni ſigno mente concepto (cùm aliud non ſit) in omne aliud ſignum, lineam rectam excogitare: quod quidem æquè facile reperimus vt ſignum ipſum concipere. Nam lineam aut ſignum, qualia ars depoſcit, ſenſibus proponere non poſſumus percipienda, ſed tantùm concipienda: ea quippe nobis ars tradidit perfecta. Quæ itaque externis exequenda erunt ſenſibus, per artis intelligentiam mente conceptam dirigenda erunt, vt eam, quamproximè valeant, imitentur.

POSTVLATVM SECVNDVM.

Rectam lineam terminatam in continuum rectúmque producere.

POSTVLATVM TERTIVM.

Omni centro & interuallo, circulum deſcribere.

Hæc bina Poſtulata (veluti prius) naturam Geometricæ ſequuntur diſciplinæ: quæ licet ipſo actu aliqua difficillimè exequi poſſint, tamen earum in mente conceptio, ad ea quæ externis ſenſibus agi poſſunt, regenda ſufficiet ſat ſupérque.

Communes ſententiæ, quæ eo à Poſtulatis *differunt, quòd Poſtulata ſint poſitiones ſimplices, à nulla præmiſſa deducta, quæ rem non exiſtentem fieri poſtulent. Sententiæ verò communes, conditionalem præmiſſam neceſſariò ſequentes, rem iam exiſtentem nos ſentire cupiant: Quod prætermiſerunt Campanus & Theon: hic nanque duas inter Poſtulata miſcuit Sententias, ille verò tres, relinquentes græcum exemplar, quod noſtro iudicio approbandum videtur hoc loco.*

PRIMA

PRIMA.

QVÆ eidem æqualia,& adinuicem ſunt æqualia.

SECVNDA.

Et ſi æqualibus æqualia adiiciantur, tota erunt æqualia.

TERTIA.

Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur, quæ relinquuntur, erunt æqualia.

QVARTA.

Et ſi inęqualibus æqualia adiungantur,tota erunt inęqualia.

QVINTA.

Et ſi ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua inæqualia erunt.

SEXTA.

Quæ eiuſdem ſunt duplicia,adinuicem ſunt æqualia.

SEPTIMA.

Et quæ eiuſdem ſunt dimidium:æqualia ſunt adinuicem.

Binas,ſextam ſcilicet & ſeptimam,poſuit tantùm Euclides, quibus cunctæ reliquæ quantitatum multiplicationes ſiue in augmentum ſiue in decrementum extenſæ,comprehenſæ ſint. Nam cùm ait eiuſdem duplicia æqualia adinuicem eſſe, intelligit haud ſecus eiuſdem triplicia aut quadruplicia aut alia quæuis ęquè multiplicia inter ſe æqualia eſſe.nec non dicens eiuſdem dimidia æqua eſſe, illico concludit,eiuſdem tertia,quarta, quinta aut alia quæuis idem decrementum eiuſdem multiplicantia,inter ſe æqualia eſſe,vt compendio conſulat.

OCTAVA.

Et quæ ſibimetipſis conueniunt,æqualia ſunt adinuicem.

Sibimetipſis conuenire dicuntur magnitudines, cùm earum ſingulæ quantitates ſingulis comparatæ, æquales reperiuntur, vt cuiuſlibet totius partes partibus alterius quoad quantitatem conueniant, hoc eſt rationali argumento (non autem experientia)conuenire cognita, illa ſunt æqualia, vt longitudo longitudini,latitudo latitudini,ſublimitas ſublimitati,rectarum inclinatio inclinationi,& reliqua id genus.

NONA.

Totum eſt ſua parte maius.

Reſpectiuum eſſe dicemus totum ad partem,cùm ſint ſibi relatiua:pars etenim geometrica quodlibet à toto abſtractum eſt,aliquid ei reliquens,quod latius docebimus prima diffinitione quinti.

DECIMA.

Omnes anguli recti,æquales adinuicem ſunt.

VNDECIMA.

Si in duas rectas lineas, recta incidens linea interiores & ad eaſdem partes angulos,duobus rectis minores in plano fecerit, Rectas lineas in infinitum productas,concurrere neceſſe eſt ad

eas

eas partes, in quibus anguli duobus rectis minores existunt.

Huius notitia à trigesima quinta diffinitione oritur ob inclinationem: nam si binæ lineæ rectæ, in quas recta incidit, efficiant binos interiores angulos, & ad easdem partes lineæ incidentis, duobus rectis minores, clarum est binas lineas ad se inuicem inclinare, & quanto plus in rectum longúmque producentur, plus accedent ad seipsas, quousque altera alteram secet. Quare sequitur omnem linearum rectarum inclinationem infinitè in plano productam, tandē angulum producere.

DVODECIMA.

Duæ rectæ lineę superficiem non comprehendunt.

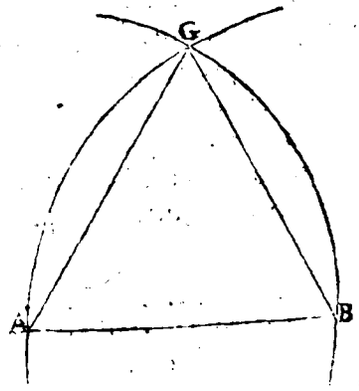
A præcedente nascitur hæc: nam vt superficiem concludant duæ lineæ, in signo concurrere eas oportet. Quod si ab eo signo in rectam continuè producantur, semper maius producent interuallum, nusquam itaque superficiem claudent.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO I. PROBLEMA 1.

SVPER data recta linea terminata, triāgulum æquilaterum constituere.

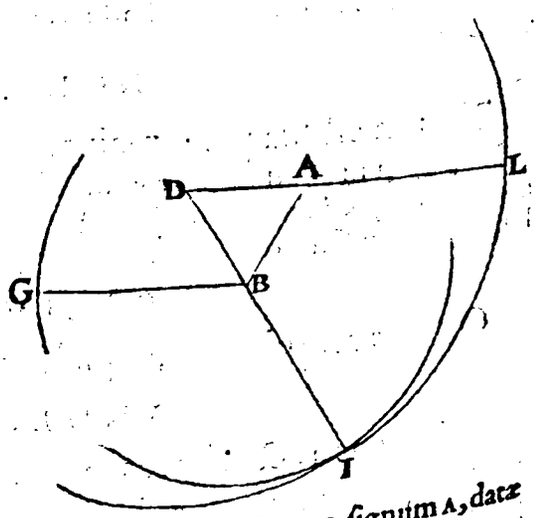
Sit proposita recta A B terminata in A & B, centro A: interuallo autem A B circulus ducatur B G, per 3 postulatum, centro item B, interuallo B A, circulus ducatur A G: iunctis A G, G B rectis: Dico triangulum A B G æquilaterum esse: Quoniam per circuli diffinitionem recta A G, æqualis est rectæ A B: & (per eandem) B G, eidem A B æqualis erit: Sequetur itaque ex prima cōmuni sententia A G, G B (eidem A B æquales) esse & adinuicē æquales. Super data itaq; recta linea terminata A B, triangulū A G B æquilaterum cōstituimus.



PROPOSITIO II. PROBLEMA 2.

Ad datū signum, datæ rectę lineę æquā rectam lineā ponere.

Esto signum datū A: data vero recta B G, ducatur A B recta, super qua (per præcedentem) triangulum æquilaterum constituatur A B D. extendatur D A in L, & D B in I, Centro B interuallo B G, circulus describatur G I, per 3 postulatum, cētro rursus D, interuallo D I, circulus fiat I L: Dico rectā A L æqualem esse rectæ G B positæ: Quoniam æquales sunt D L, D I rectæ per 15 diffinitionem. Æquales item sunt D A, D B, per præcedentem. Reliquæ igitur A L, B I æquales erunt per 3 cōmunem sententiam. At quoniā æqualis est B G, rectæ B I: per 15 diffinitionem, Rectæ A L & B G (cidē B I æquales) erunt adinuicem æquales, per 1 cōmunem sententiam. Ad datum itaque signum A, datæ rectæ lineæ B G, æquam rectam H L posuimus.

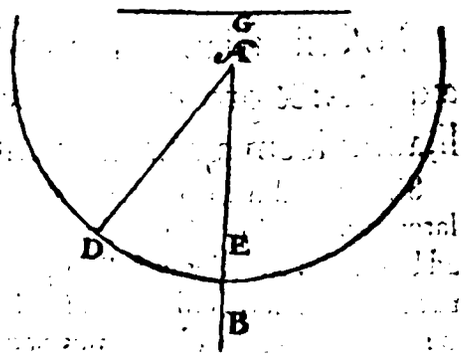


PROP

PROPOSITIO III. PROBLEMA 3.

Duabus datis inęqualibus rectis lineis, à maiori minori ęquã rectam lineam abſcindere.

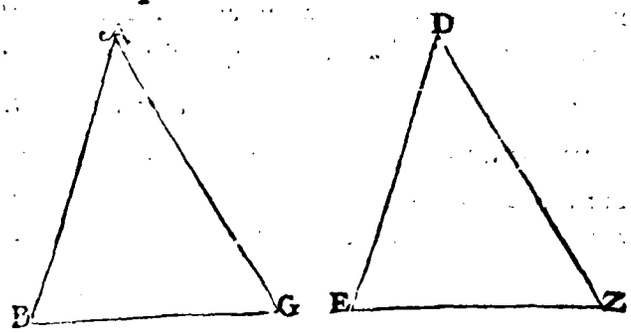
Sint datæ rectæ inæquales A B maior, & G minor, ad datum ſignum A datæ G æqualis ponatur A D, per præfatam: centro A, interuallo autem A D, circulus ducatur (per tertium poſtulat.) D E. Quia recta A B, maior eſt (per hypotheſim) interuallo A D, circulus ſecabit rectam A B: ſecet in E. Quare A E eidem A D æqualis erit, per 15 diffinitionem. Et proinde A E & G (eidem A D æquales) adinuicem æquales erũt. Duabus igitur datis A B & G inæqualibus rectis lineis, à maiori A B minori G æquam rectã lineam abſcidimus A E.



PROPOSITIO IIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, alterum alteri, & angulum angulo ęqualem, ſub ęqualibus rectis contentum, & baſim quoque baſi æqualem habebunt, & triangulum triangulo æquum erit, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri æquis lateribus ſubtenſi.

Sint triangulorum A B G, & D E Z, duo latera A B, A G, duobus D E, D Z æqualia. Inſuper anguli B A G, E D Z ſint æquales: dico baſes B G & E Z æquales eſſe, & reliquos qui ad B & G angulos, reliquis qui ad E & Z, æquales eſſe: quoniam (per hypotheſim) æquales ſunt A B & D E rectæ. Diſtãtia ſignorum A & B, diſtantiæ ſignorum D & E conuenit, necnon quia æquales ſunt A G & D Z rectæ, diſtantia ſignorum A & G diſtantiæ ſignorum D & Z conuenit. Rurſus, quia æquos angulos comprehendunt rectæ A B, A G cum rectis D E, D Z, conueniet inclinatio rectæ A G ad rectam A B inclinationi rectæ D Z ad rectam D E, per octauam diffinitionem. Nam qualitas angulorum A B inclinationum æqualitate dependet. Sequetur itaque ſignorum B ad G & E ad Z diſtantias ſeu interualla conuenire, cùm interuallorum differentia ab inclinationum diuerſitate naſcatur. Ipſa itaque ſigna B G, & E Z coniungentes rectæ æquales erunt: Nam ſi altera maior eſſet altera, & inclinatio inclinatione maior eſſet contra poſitum, quod fieri nequit, & ideo conuenient earum quantitates. Si igitur triangulorum A B G & D E Z ſingulæ quantitates ſingulis comparatæ, æquales fuerint, triangula A B G, & D E Z, ſibiipſis conueniunt, & proinde æqualia ſunt per octauam communem ſententiam. Quare & reliqui anguli qui ad B & G reliquis qui ad E & Z æquales erunt, cùm triangula ſibiipſis conueniant: Si itaque duo triangula, duo latera, duobus, &c.



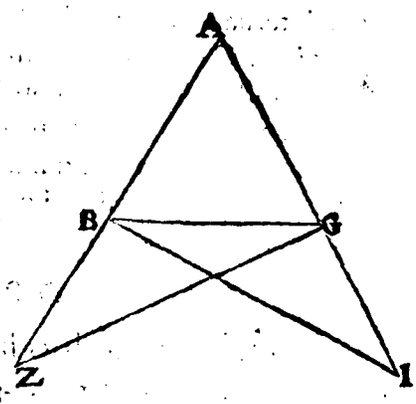
MONITVM.

Alteram demonſtrationem huic quartæ exhibere cogimur, ne præbeatur aditus, quo vlla mechanicorum vſuum inſtrumenta in demonſtrationes incidãt. Nam Campanus ac Theon hanc demonſtrantes, triangulum triangulo ſuperponunt, angulumque angulo, ſiue latus lateri, demonſtrationem potius inſtrumento palpantes, quàm

tes, quàm ratione firmantes: quod tanquam prorsus alienum à vero disciplinarum cultu reiicientes, aliam demonstrationem absque figuræ, anguli, seu lineæ transpositione protulimus, ratione elucidatam.

PROPOSITIO V.

Isoscelis trianguli qui ad basim sunt anguli, adinuicem sunt æquales: & productis æqualibus rectis, qui sub basi sunt anguli, adinuicem æquales erunt.



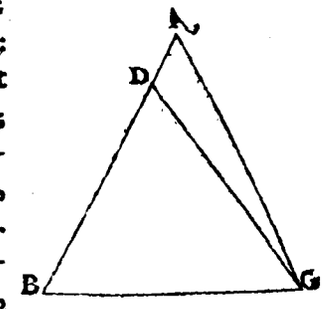
Sit triangulum Isosceles A B G, habens bina latera A B, A G inuicē æqualia: Dico angulos qui ad basim B G æquales esse: insuper, si producantur rectæ A B, A G, efficientes sub basi angulos B G I, G B Z, dico eos esse æquales. Secentur protensæ A I, A Z æquales, per tertiam huius, ducanturq; B I, G Z, æquales erunt rectæ B Z, G I, per tertiam communem sententiam. Quoniam æquales sunt A I, A B, ipsis A Z, A G per hypothesim, & angulus A communis, basis B I, basi G Z æqualis erit. Insuper anguli A I B, A Z G (per quartam huius) sunt æquales, necnon & anguli A B I, & A G Z. Quia verò triangulorum B Z G & G I B æqualia sunt latera B Z, Z G, ipsis G I, I B, & angulus B Z G, ipsi B I G, reliqui (per præcedentem) reliquis æquales erunt, scilicet Z B G, & I G B, qui sub basi B G, necnon B G Z, ipsi G B I: Si autem ab æqualibus angulis A B I, & A G Z, æquales auferantur G B I, & B G Z, reliqui A B G, & A G B, qui ad basim (per tertiam communem sententiam) erunt æquales. Isoscelis ita trianguli qui ad basim sunt anguli, adinuicem, &c.

MONITVM.

Transtulimus Isoscelium triangulorum pluralem vocem in singularem, ne incumbant discentes super comparatione angulorum plurium Isoscelium adinuicem facta, sed tantùm comparationi angulorum cuiuslibet Isoscelis & eiusdem inter se.

PROPOSITIO VI.

Si trianguli duo anguli æquales adinuicem fuerint, æquales quoque angulos subtendentia latera æqualia erunt.

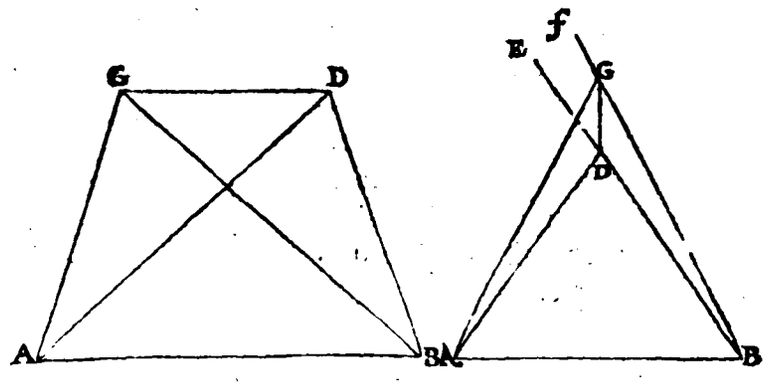


Sit triangulum G B A æquos habens angulos G B A, B G A: Dico latera A G & A B (eos subtendentia) æqualia esse: Quòd si non sint, esto aliquod eorum maius (scilicet A B) & à maiori B A recta auferatur, æqua minori A G, sitq; B D, coniungaturq; D G. Quoniam A G & D B sunt æquales, communi eis addita B G, binæ A G, G B, binis D B, B G, erunt æquales, per secundam communem sententiam. Quia verò duo triangula D B G, & A B G habent duo latera D B, B G, duobus A G, G B, æqualia, & angulum D B G, angulo A G B (per hypothesim) æqualem: bases igitur D G, & A B æquales habebunt (per quartam huius) & triangulum D B G triangulo A B G, æquum erit (per eandem) & minus, cùm sit in maiori comprehensum, quod fieri non potest. Ipsorum igitur A B & A G laterum nullum est maius, æqualia igitur sunt. Si itaq; trianguli duo, &c.

PROPOSITIO VII.

Si à limitibus alicuius rectæ lineæ duæ rectæ ad signum concurrant ab eisdem limitibus in plano & ad easdem partes, duæ

aliæ ad aliud ſignum, duabus primis altera alteri eundem finem poſſidenti, æquales non conſtituentur.



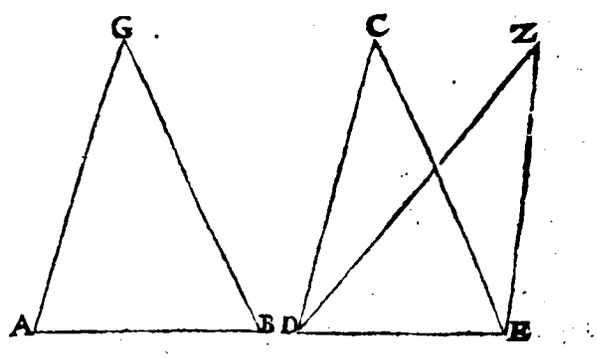
A limitibus rectæ lineæ A B, ductę rectæ lineę A G, B G, concurrant in G: inſuper ab eiſdem limitibus, ſuper eodem plano, ad eaſdem partes cõcurrant ad aliud ſignum D aliæ duæ A D, B D: Dico rectas A D, B D duabus primis A G, B G non eſſe æquales, ſcilicet alteram A D, alteri A G eundem finem poſſidenti, nec ſimiliter B G alteri B D eundem B finem poſſidenti. Ab impoſſibili enim, Si æquales dicantur ſcilicet A G, rectæ A D & B G, ipſi B D, æquales erunt (per quintam huius) anguli A G D & A D G, ſimiliter B G D, & B D G qui ad baſin Iſoſcelis. Cum autẽ angulus A D G (pars ſcilicet totius B D G) ſit æquus ipſi A G D. Idem A G D, minor erit toto B D G. Haud ſecus, cùm angulus B G D, pars anguli A G D, ſit æqualis angulo B D G, maior erit totus A G D, eodem B D G. Sed fuit minor, quod fieri nequit. Non igitur erunt æquales, ſcilicet A G, ipſi A D, & B G, ipſi B D. Quia verò poteſt cadere ſignum D intra triangulum A G B, cadat (ad ſecundam huius partem oſtendendam). Si igitur æquales credantur A G ipſi A D, & B D, ipſi B G, anguli ad baſin ſcilicet A D G, & A G D, ſunt (per quintam huius) æquales. Qui verò ſub rectarum B D, B G, baſi ſimiliter ſunt æquales, ſcilicet E D G, ipſi F G D. Totus itaque A D G maior erit angulo F G D: ſed & minor, cùm ſit æqualis ipſi A G D, parti ipſius F G D, quod fieri non poteſt. Vbicunq; igitur rectæ aliæ A D, B D conueniant, quouiſmodo ipſis A G, B G, inæquales erunt. Si itaque à limitibus alicuius rectæ lineæ, &c.

MONITVM.

Eò quòd quodammodo confuſius hoc theorema tradiderit Theon, nos aliquas eius voces faciliori compendio mutauimus, ne binas alias binis prioribus lineis æquales in genere optari putemus, ſed binas tantùm ab eodem limite lineæ ſimul exorientes, inæquales probari ſibi inuicem, ac binas reliquas ſimiliter inæquales, haud ſecus oſtendemus binas in D concurrentes ac binas in G concurrentes ſimul æquales fieri non poſſe, per inæqualitatem angulorum ad A & B neceſſariò concurrentem.

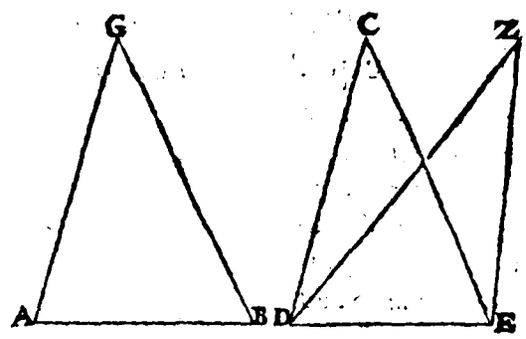
PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula, duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, & baſin baſi æqualem: angulum quoque ſub æqualibus rectis contentum æqualem habebunt.



Sint duo triangula A B G & D E C duo latera duobus lateribus æqualia habentia, ſcilicet A G, ipſi D C & G B ipſi C E, & baſin A B baſi D E æqualem: Dico angulum A G B (angulo D C E æquis lateribus contento) æquum eſſe. Ab impoſſibili autem, ſi credatur angulos G & C non eſſe æquales, ſit alius quidam ad Z ſuper baſi D E angulo qui ad G æqualis, & æquis lateribus comprehenſus, ſcilicet D Z ipſi A G, & E Z ipſi B G, ſequetur à limitibus rectæ D E datis duabus D G, & E C, alias duas ad aliud ſignum Z concurrere,

æquales primis D C E C: Nam ſupponitur D Z rectæ A G æqualis, & E Z ipſi B G, quibus ſunt æquales (per hypotheſim) D C E C. Rectis igitur D C E C æquales erunt D Z, E Z eoſdem D & E fines poſſidentes, cuius oppoſitum ait præcedens huius. Non igitur poſſunt ſuper æquis baſibus maiores aut minores concipi anguli æquis lateribus comprehenſi. Si igitur duo triangula, duo, &c.



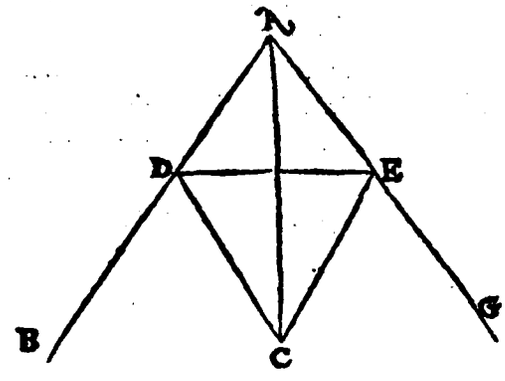
MONITVM.

Huius alteram demonſtrationis partem reſecauimus eò quòd triãguli tranſpoſitione vteretur, quod quidem mœchanicum ſpectat negotium à vera matheſi alienum, poſita anguli qui ad z hypotheſi ex quarta huius ſumpta.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA 4.

Datum angulum rectilineum, bifariam ſecare.

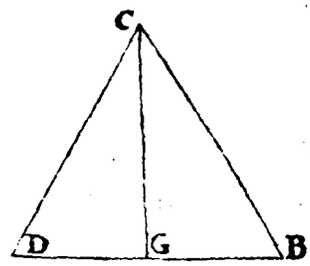
Sit angulus datus B A G, ex rectis autem A B A G, æquales adinuicem ſecentur (per ſecundam huius) A D A E, & coniuncta D E ſuper ea (per primam huius) fiat triãgulum æquilaterum D C E, coniungatur verò A C. Dico rectam A C angulum datum B A G bifariam ſecare: quoniam triangulorum A D C A E C bina latera A D, A C, binis A E, A C ſunt æqualia, & baſis D C baſi E C (per primam huius) æqualis, angulus igitur D A C angulo E A C (per præcedentem) erit æqualis. Datum igitur angulum B A G bifariam diuiſimus per rectam ſcilicet A C.



PROPOSITIO X. PROBLEMA 5.

Datam rectam lineam terminatam, bifariam ſecare.

Eſto data recta D B, ſuper ipſa verò D B (per primam huius) triangulum æquilaterum conſtituatur D C B, ſecetur baſi D B oppoſitus angulus C bifariam (ex præcedenti) per rectam C G: Dico D B rectam ſecari bifariam in G. Quoniam triangulorum D G C & B G C, duo latera D C C G duobus B C, C G, ſunt æqualia, & anguli G C D G C B, æquis lateribus contenti æquales, per conſtructionem: baſes igitur G D G B (per 4 huius) æquales erunt. Datam igitur rectam D B bifariam in G ſecuimus.

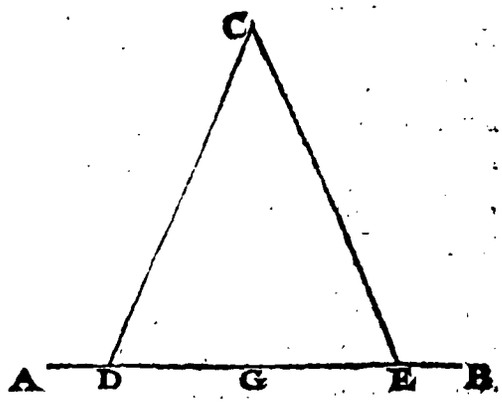


PROPOSITIO XI. PROBLEMA 6.

Datæ rectæ lineæ, à ſigno in ea dato rectam lineam ad angulos rectos excitare.

Supponatur data recta A B, in qua contingens ſignum G ſumatur, ab ipſo G verſus A & B, æquales duæ rectæ ſecentur G D G E. Super recta verò D E triangulum æquilaterum (per primam huius) conſtituatur D C E, coniuncta C G. Dico C G ad angulos rectos datæ A B excitari, cùm triangulorum D C G & E C G duo latera C D D G, duobus C E E G, ſint æqualia, & baſis C G communis per conſtructionem, perſpicuum

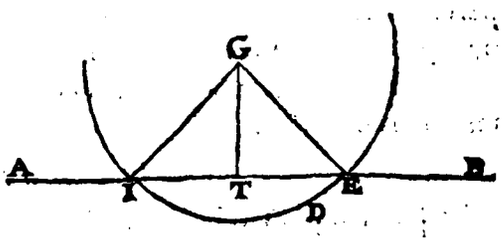
ſpicuum erit (ex octaua huius) angulum C G D angulo C G E, æquũ eſſe. Cùm enim C G recta ſuper rectam conſiſtens A B, angulos C G D C G E, vtrobique æquos fecerit, recti ſunt bini illi anguli, &c. per 10 diffinitionem huius. Datæ igitur rectæ A B, à ſigno G in ea dato rectam lineam C G ad angulos rectos excitauimus.



PROPOSITIO XII. PROBLEMA 7.

Super datam rectam lineam infinitam à dato ſigno, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere.

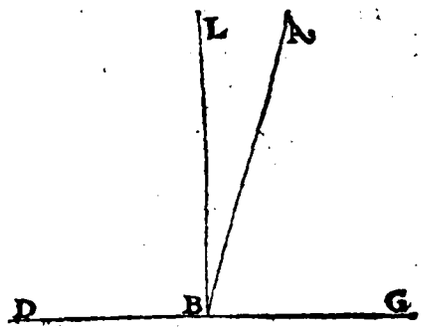
Sit data recta linea infinita A B, ſignum verò extra eam ſit G. Sumatur item contingens aliud ſignum, vltra lineam A B ad partes oppoſitas ipſi G, ſitq; D. Centro verò G interuallo G D, circulus fiat E D I, per 3 poſtulatum. Quem ſecabit recta A B, cùm ſit inter G & D poſita, ſecet in ſignis I & E, coniungantúrque G I, G E. Secetur verò ei bifariam ducta G T: Quoniam triangulorum G I T & G E T duo latera G T T I duobus G T T E ſunt æqualia, per cõſtructionem: & baſis G I baſi G E, per 15 diffinitionem. Angulus itaque G T I angulo G T E (æquis lateribus contento) æquus erit, per octauam huius. Recta igitur G T ſuper rectam A B vtrobique æquales angulos G T E, G T I efficiens, rectos efficiet, per 10 diffinitionem. Super datam igitur rectam infinitam A B à ſigno G, quod in ea non eſt, perpendicularem deduximus G T.



PROPOSITIO XIII.

Cùm recta linea ſuper rectam conſiſtens angulos fecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

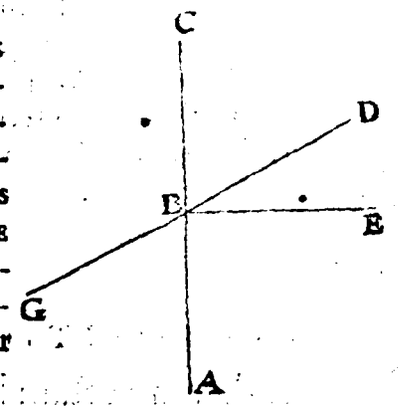
Eſto recta A B ſuper rectam D G angulos efficiens. Dico eos rectos eſſe, aut duobus rectis æquos. Quod ſi recti ſint anguli A B G A B D, petitum conſequimur. Sin minus fuerint recti, ad rectam D G & ſignum in ea B ad rectos excitetur B L per 11 huius. Quoniam recti ſunt L B D L B G anguli, angulum autem A B G excedit rectus L B G, angulo L B A: Qui quidẽ exceſſus L B A recto L B D iunctus, reliquum duorum rectorum L B G & L B D complet. Bini igitur A B G & A B D ſimul ſumpti anguli duobus rectis æquales erunt. Cùm recta igitur A B ſuper rectam D G conſiſtens angulos fecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis, &c.



PROPOSITIO XIIII.

Si ad aliquam rectam lineam atque ad eius ſignum duæ rectæ lineæ vtrobique ductæ angulos duobus rectis æquales in plano & ad eaſdem partes fecerint, in rectum ſibiipſis rectæ lineæ erunt.

Ad aliquam rectam AB & eius signum B, binæ rectæ lineæ BG & BD vtrobique ducantur. Efficiant autem ad rectam AB & easdem eius partes angulos ABG ABD, vel CBG CBD duobus rectis æquos. Dico rectas BG BD in rectum sibi ipsis esse. Si enim BD non sit in rectum ipsius BG, sit ipsi BG in rectum alia quæpiam BE. Quoniam anguli ABG ABD duobus æquipollent rectis (per hypothesim) ablato angulo DBE reliqui ABG ABE duobus rectis minores erunt. Sequetur igitur recta AB super rectam GBE consistentem, angulos duobus rectis minores efficere, quod est absurdum, ex 13 huius. Non igitur cadit alia in rectum ipsi BG quàm recta BD. Si igitur ad aliquam rectam lineam, &c.



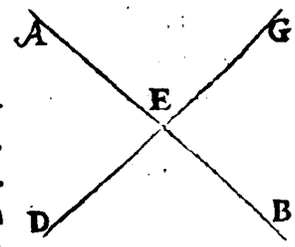
MONITVM.

Huius propositionis aliquas mutauimus particulas, scilicet ad easdem partes, vt percipiamus angulos qui duobus rectis æquari debent, fieri ex binis ductis ad easdem partes datæ AB, non autem ex duabus ad totam AB productam. Quare duas adinuicem cum data diximus. In eodem autem plano, ob solidorum à planis futuras differentias, &c.

PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ lineę sese secuerint, angulos qui circa verticem sunt oppositi, æquos adinuicem efficient.

Sint duæ rectæ AB DG sese secantes in E: Dico angulos qui ad E fiunt ex opposito, scilicet AED BEG vel AEG BED æquos esse adinuicem. Cùm enim AED AEG duobus rectis sint æquales, per 13 huius, similiter per eandem AEG GEB duobus rectis, communis auferatur AEG. Reliqui AED BEG æquales erunt, per 3 comm. sentent. Similiter patebit reliquos AEG BED æquales esse, cùm sint oppositi. Si itaque duæ rectæ lineæ sese secuerint, angulos qui circa verticem sunt oppositi, æquos adinuicem efficient.



MONITVM.

Huic addidimus particulam (oppositi) vt exprimamus qui ad verticem æquales reperirentur anguli, quod non expressit Theon.

COROLLARIVM.

Hinc sequitur binas rectas sese secantes angulos quatuor rectis æquos ad verticem efficere.

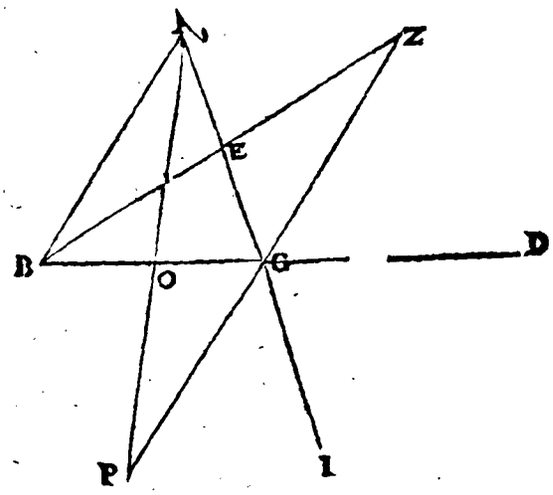
Cùm sit ad vtrasque partes recta super rectam consistens per 13 huius, & proinde quotlibet rectas in plano ad signum idem concurrentes, quatuor rectis æquos efficere. Nam binæ earum productæ ad verticem, reliquarum quodlibet inclinationes, seu angulos concludent.

PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore & opposito maior est.

Trianguli ABG, producatur latus BG in D: Dico angulum exteriorem AGD, maiorem esse quolibet interiore opposito, scilicet ipso, GAB, vel GBA. Secetur bifariam latus AG in E, ducatur BE, cui productæ in Z æqualis fiat, EZ, coniuncta ZG, quoniam triangulorum ZGE & BAE duo latera ZE, EG, duobus BE EA æquantur (per constructionem) & æquos comprehendunt angulos ZEG, BEA ad verticem,

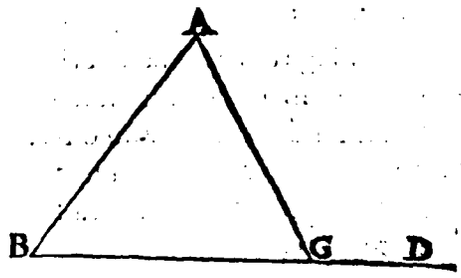
ticem, (per præcedentem.) Reliqui igitur anguli EGZ, EAB (per quartam huius) æquales erunt, & baſes, & triangulũ triangulo. Maior igitur erit totus AGD exterior, ipſo GAB interiore, (cum idem AGD ſit maior ipſo AGZ, reliquo ZGD.) Similiter patebit extenſo latere AGI ſecto BG in O, ductáque AOP & PG, reliquum angulum GBA minorem eſſe angulo AGD, hoc eſt BGI oppoſito. Haud ſecus fiet producto quouis triãguli latere. Omnis itaque trianguli vno latere producto, &c.



PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli, duobus rectis ſunt minores omnifariam ſumpti.

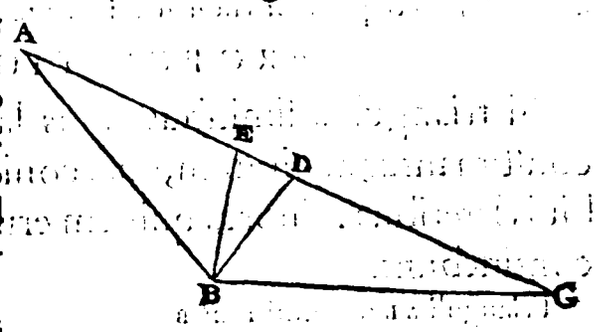
Exponatur triangulum ABG cuius latus vnum BG producatur in D, fitq; BGD: Dico binos trianguli angulos ABG & AGB duobus rectis minores eſſe. Cùm enim recta AG ſuper rectum BD conſiſtat, efficit angulos duobus rectis æquos AGB & AGD, per 13 huius. Atqui per præcedẽtem AGD maior eſt angulo ABG. Duo igitur AGB, ABG minores erunt duobus rectis (cum ſint minores ipſis AGB, AGD binis rectis æqualibus.) Similiter oſtẽdentur reliqui bini, producto eo qui circa eos latere. Omnis igitur trianguli, &c.



PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

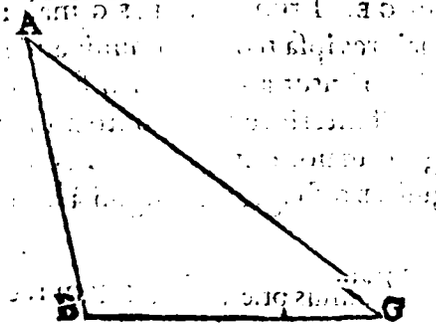
Trianguli ABG maius latus ſit AG: Dico angulum quem ſubtendit AG eſſe maiorem trianguli angulum. Ab ipſa AG ſecetur rectæ AB æqualis AD. Angulus itaque ADB reliquo ABD (per 5 huius) erit æqualis, cùm ſint ad baſin. Sed angulus ADB exterior interiore DGB maior eſt, per 16 huius. Multò igitur maior erit angulus ABG eodem DGB, cùm ſit continens ABD angulum reliquo ADB æqualem. Similiter ſi ponatur ipſi GB æqualis GE, oſtendemus angulos GBE, GEB ad baſin æquales, & exteriorem GEB interiore EAB maiorem, & proinde totum GBA, multò maiorem ipſo BAG. Maior igitur erit angulus ABG quem maius latus AG ſubtendit. Omnis igitur trianguli, &c.



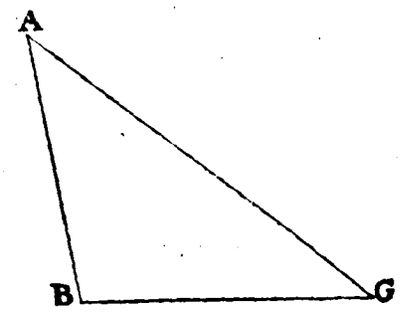
PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli ſub maiori angulo maius latus ſubtenditur.

Trianguli ABG maior angulus ſit qui ad B: Dico maius latus eſſe AG ſubtendens angulum B. Nam ſi aliud quoddam trianguli latus ſcilicet AB eſſet maius, angulus G eſſet maior (per præcedentẽ.) Similiter ſi BG eſſet maius, angulus A eſſet maior, (contra hypotheſim) quę ſupponit angu-



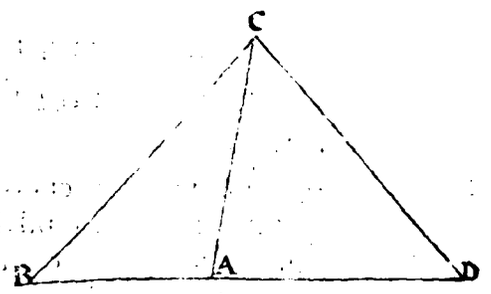
lum B maiorem. Non igitur erit aliud latus maius latere AG ſubtendente maiorem angulum, nec æquale, quoniam eſſent æquales anguli ad baſim (per quintam huius) contra poſitum ſupponens alterum maiorem. Maius itaque erit AG. Omnis igitur trianguli ſub maiori angulo maius latus ſubtenditur.



PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocumque ſumpta.

Eſto triangulum ABC. Dico duo eius quælibet latera reliquo eſſe maiora. Extendatur aliquod eius latus BA in D, ſitq; æqualis AD ipſi AC: coniuncta DC, quoniam ADC ACD anguli (per 5 primi) ſunt æquales, maior erit totus DCB angulo ACD. Trianguli igitur BDC maius erit latus BD ſubtendens maiorem angulum DCB latere BC ſubtendente angulum CDB. Sed latus BD binis BA, AC æquum fuit, poſita eſt enim AD ipſi AC æqualis. Bina igitur BA, AC reliquo BC ſunt maiora, ſimiliter patebunt reliqua. Omnis igitur trianguli duo latera, &c.



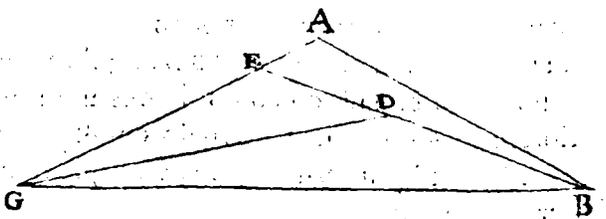
MONITVM.

Potuit breuius hanc demõſtrare Campanus per diffinitionem rectæ lineæ, cùm omnis linea recta à ſigno ad ſignum ſit breuiſſima, duo latera reliquo ſequitur eſſe maiora; ſed quia hæc deſcriptio potius quàm diffinitio fuerit, ab ea demonſtranda abſtinuimus, eò quòd eiùs non meminerimus.

PROPOSITIO XXI.

Si trianguli à limitibus vnius lateris binæ rectæ introrſum conſtituantur ad ſignum, quæ coniunguntur, reliquis trianguli binis lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.

Trianguli ABG à limitibus B & G binæ lineæ BD GD ad ſignũ D introrſum conſtituatur, & extendatur BD in E: Dico coniunctas BD, GD minores eſſe rectis BA, AG, & maiorem angulum continere. Erunt (per præcedentem) BA, AE maiores ipſa BE; communis apponatur GE. Erunt BA, AE, EG maiores ipſis BE, EG. Sed (per eandem) DE EG ſunt maiores ipſa DG, communis addatur DB, erunt GE, EDB maiores ipſis GD, DB. Multo igitur BA, AE, EG ſunt maiores ipſis BD, DG. Præterea angulus DEG maior eſt interiore & oppoſito BAE. Similiter BDG ipſo DEG, per 16 huius. Multo igitur maior erit BDG (quem conſtituunt introrſum coniunctæ) angulo BAG trianguli ABG. Si igitur trianguli à limitibus vnius lateris binæ rectæ, &c.



MONITVM.

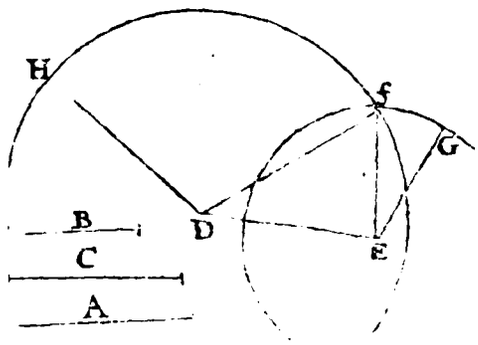
Diuinus præter hanc rectas introrſum conſtitutas, ad ſignum conſtitui: nam

nam si vsque ad trianguli educerentur latera, verè maiorem angulum quoquomodo efficerent, sed quandoque maiores essent, contra propositum, nos ideo non tantum introrsum, sed & ad signum eas constitui petimus.

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA 8.

Ex tribus rectis quæ sunt tribus datis rectis æquales, & quarum duæ quælibet reliqua sunt maiores, triãgulum constituere.

Proponantur tres rectę lineę A, C, B: alicui illarum, scilicet C, æqualis ponatur D B. Ad signum E verò ipsi B æqualis ponatur E G, ad signum verò D reliquæ A æqualis sit D H, centro autem D interuallo D H, circulus fiat H F. Centro verò E interuallo quidē E G, circulus describatur F G, & coniungantur D F, E F: Dico triangulum esse D F E ex tribus rectis ipsis A, B, C æquis constitutum. Cùm enim æqualis sit D H, rectæ A, eidem A erit æqualis D F, cùm sint D H, D F quæ ex centro, similiter quia E G ipsi E F est æqualis (per 15 diffinitionem) & eidem E G æqualis fuit B, recta E F æqualis erit ipsi B. Reliqua verò D E, reliquæ C posita fuit æqualis. Ex tribus igitur E D, D F, F E tribus datis A, B, C, æqualibus, triangulum constituimus E D F.



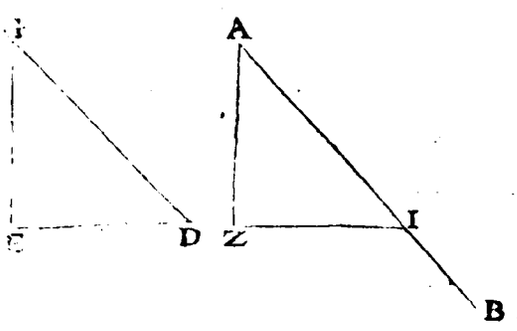
MONITVM.

Quoniam propositum absolutè problema postremo restringit, professiones incertas imitans, non autem disciplinas. Nos perficiendo problemati conditionem prætulimus anteponendam, qua statuta, proponatur problema, vt ex tribus rectis quarum duæ quæuis reliqua sunt maiores triangulum constituere. Non autem vbi ex tribus rectis triangulum constituendum esse diximus absolutè, posthac exceptionem siue restrictionem apponamus, prorsus indignum matheſi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA 9.

Ad datam rectam lineam, & eius signum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum constituere.

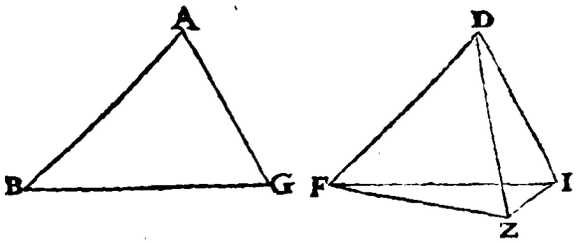
Sit data recta linea A B, angulus verò datus cui æqualis dandus est, sit E G D. Coniungatur E D, ipsi verò G D æqualis ponatur A I, per 3 huius. Ex tribus autem rectis tribus datis G D, G E, E D æqualibus, scilicet A I, A Z, Z I (per præceden) fiat triangulum A I Z. Cùm autem triangula G E D, A Z I habeant duo latera duobus, & basin E D basi Z I æqualia. Et (per 8 primi) reliquos angulos I A Z ipsi D G E æquos habebunt. Ad datam itaque rectam A B dato angulo E G D ad signum A æqualis angulus Z A I constitutus est.



PROPOSITIO XXIIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, angulum verò angulo maiorem sub æqualibus rectis comprehensum, & basin basi maiorem habebunt.

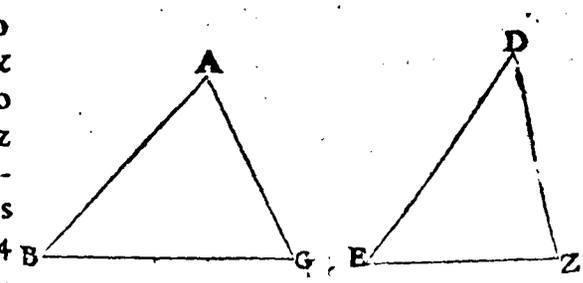
Sint duo triangula ABG, DFZ duo latera duobus lateribus æqualia habentia, ſcilicet AB ipſi DF & AG ipſi DZ, angulum verò BAG angulo FDZ maiorem. Dico baſin BG baſi FZ maiorem eſſe. Quoniam BAG angulus maior eſt FDZ angulo. Ad ſignum D per præceden. conſtituatur angulus FDI, æqualis angulo BAG dato. Et ipſi AG æqualis ſit DI, coniuncta FI IZ. Cùm autem BAG FDI anguli ſint æquales, & æquis lateribus contenti, baſes BG & FI (per 4 huius) æquales erunt. Præterea quoniam æqualis eſt DZ ipſi DI, qui ad baſim anguli DZI, DIZ (per 5 primi) ſunt æquales. Maior autem eſt angulus FZI ipſo DZI, totum ſcilicet ſua parte. Maior igitur erit ſibi æquali DIZ. Multò itaque maior erit FZI angulo FIZ minore. Maius igitur erit (per 19 huius) latus FI trianguli FZI, latere FZ. Sed FI ipſi GB eſt æqualis. Ipſa igitur GB ſubtendens maiorem angulum, reliqua FZ ſubtendente minorem maior erit. Si itaque duo triangula duo latera duobus lateribus alterum, &c.



PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, baſim verò baſi maiorem, angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum, angulo maiorem habebunt.

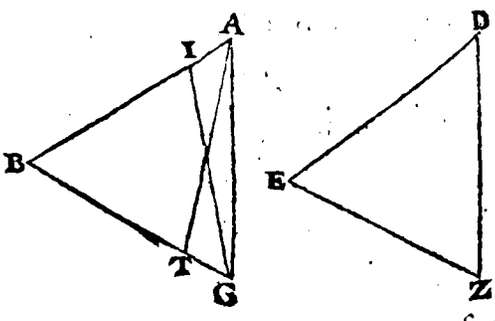
Sint duo triãgula ABG, DEZ duo latera duobus æqualia habentia, & baſin BG baſi EZ maiorem: Dico quòd angulum BAG angulo EDZ maiorem habebunt. Quòd ſi æquales eſſent BAG & EDZ anguli æquis lateribus comprehenſi, baſes (per 4 huius) æquales eſſent, contra hypotheſim, quod fieri non poteſt: Si verò BAG angulus minor credatur angulo EDZ, baſis BG baſi EZ minor erit (per præcedentem) quod ſimiliter poſito obuiaret. Non eſt igitur BAG angulus ipſi EDZ æqualis, nec minor ipſo: Ergo maior neceſſariò erit. Si itaque duo triangula, &c.



PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis alterum alteri æquales habuerint, & vnum latus vni lateri æquale, aut quæ ſimul æquis adiacent angulis, aut quę ſimul æquos ſubtendunt angulos, reliqua quoque latera reliquis lateribus alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint triangula ABG DEZ duos angulos duobus æquales habentia, ſcilicet ABG AGB ipſis DEZ DZE & vnum latus vni æquale: Sint primo ea, quæ æquis adiacent angulis, ſcilicet BG ipſi EZ latera æqualia: Dico reliqua BA ipſi ED & AG ipſi DZ necnon BAG angulum ipſi EDZ æqualia eſſe. Quòd ſi hac hypotheſi AB & DE ſint



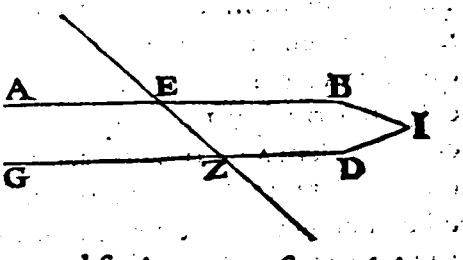
ſint æquales, ſit A B maior, & ipſi E D æqualis ponatur (per 3 primi) B I. Quoniam duo latera B I B G duobus E D E Z ſunt æqualia, & æquos angulos I B G D E Z continent, Triangulorum B I G & E D Z reliqua latera & anguli æqualia (per 4 primi) erunt: angulus igitur I G B angulo D Z E æquus erit, ſed ipſi D Z E æqualis poſitus eſt A G B: ipſi igitur A G B æquus erit angulus I G B, pars ſcilicet toti, quod eſt abſurdum. Non eſt itaq; maior aliqua ipſarum A B D E: æquales itaq; erunt. Simili deductione patebit æquales eſſe A G & D Z. Secundò verò ſupponamus latera A B & D E æquos angulos A G B, & D Z E ſubtendentia æqualia eſſe. Dico reliqua latera lateribus & angulos angulis æqualia eſſe, quod ſi non ſint, ſit B G latus maius ipſo E Z, ipſi verò E Z, æqualis ponatur B T, quoniam B T B A rectis E Z E D, & angulus B angulo B æquantur, per eandem 4 huius, triangulorum B A T E D Z latera & anguli æqualia erunt. Eſt igitur B T A angulus, ipſi E Z D æqualis, cui B G A æquus poſitus eſt: ſequetur itaque A T B exteriorem ipſi A G B interiori oppoſito æquum eſſe, contra 16 huius, quod eſt impoſſibile. Non eſt igitur aliqua ipſarum B G E Z maior altera: æquales igitur ſunt rectæ B G & E Z adinuicem. Sed quia æquales ſimiliter oſtenſæ ſunt A B & D E & anguli A B G D E Z æquales. Igitur (per 4 primi) baſes A G D Z & reliqui anguli reliquis æquales erunt. Si itaque duo triangula duos angulos duobus angulis, &c.

MONITVM.

Quoniam dicit triangula æqualia eſſe quæ duos angulos duobus æquales habent, ſi modo vnum latus lateri æquale habeant, aut quod æquis adiacet angulis, aut quod ſub vno æqualium angulorum ſubtendetur. Quod quidem analogum eſt: nam ſi in altero triangulorum latus adiaceat, in reliquo verò ſubtendat vnum æqualium angulorum, falſum erit æqua eſſe triangula: quare diximus æqualia latera ſimul adiacere, aut ſimul opponi æqualibus angulis. Hæc enim animaduerſio 10 decimitertij demonſtrandæ proderit.

PROPOSITIO XXVII.

Si in binas rectas incidens recta linea in plano angulos alternatim æquos adinuicem fecerit, parallelæ erunt ſibiipſis rectæ lineæ.



In binas rectas A B G D incidat recta E Z efficiens angulos alternos, ſcilicet A E Z, E Z D, æquales: dico rectas A B & G D eſſe parallelas. Si autem opponatur eas non eſſe parallelas, concurrent, cùm ſint in eodem plano; concurrant in I, triangulum erit E I Z, cuius exterior angulus A E Z interiori oppoſito E Z D maior eſt per 16 huius. Sed æqualis poſitus eſt ex hypotheſi, quod fieri non poteſt: non igitur concurrunt: parallelæ itaque ſunt, per 35 diffinitionem huius. Similiter oſtendetur per exteriores, & oppoſitos, vt oſtenſum eſt per A E Z & E Z D interiores oppoſitos. Nam ipſi E Z D æquus eſt exterior ad verticem (per 15 huius) nec non ipſi A E Z. Si itaque in binas rectas incidens.

MONITVM.

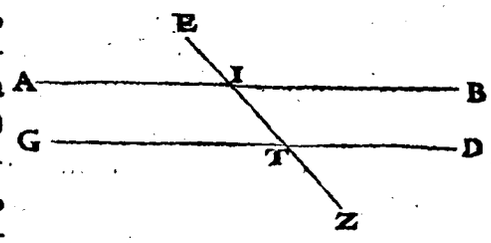
In plano huic addidimus, eò quòd licet ſeruentur reliquæ hypotheſes, ſcilicet angulos ab incidente alternos æquales effici, non tamen extra idem planum parallelæ fieri poſſent, vt videbamus diffinitione 35 huius.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in binas rectas lineas recta incidens linea in plano, exterio rem angulum interiori & oppoſito ad eaſdem partes æqualem

fecerit

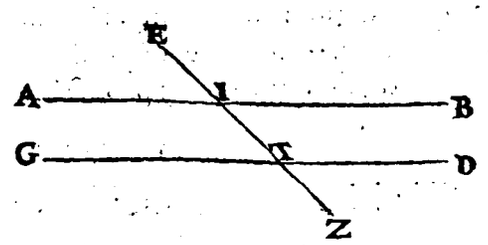
fecerit, aut interiores ad eaſdem partes duobus rectis æquales, parallelæ erunt adinuicem ipſæ rectæ lineæ.



Incidat recta E Z in binas rectas A B, G D, efficiens exteriorem angulum E I B interiori oppoſito I T D æqualem: Dico A B G D parallelas eſſe. Quoniam (per hypotheſim) angulo E I B æquus eſt I T D angulus, & eidem E I B æquus eſt A I T qui ad verticem, per 15 huius: Bini itaq; A I T & I T D æquales erunt, per 1 com. ſent. qui quidem ſunt alterni. Ipſæ igitur A B G D (per præfatam) erunt parallelæ. Ad ſecundum, Si interiores ad eaſdem partes B I T, I T D, duobus rectis ponantur æquales. Recta Z I in rectam A B cadēs, angulos A I T, B I T duobus rectis æquales efficit, per 13 huius, ſed B I T cum I T D duobus rectis æquos per hypotheſim ſimiliter efficit. Communi itaque B I T ablato, reliqui A I T I T D (alterni) erunt æquales, per 3 comm. ſentent. Parallelæ igitur (per præcedentem) erunt A B G D rectæ. Si itaque in binas rectas lineas recta incidens, &c.

PROPOSITIO XXIX.

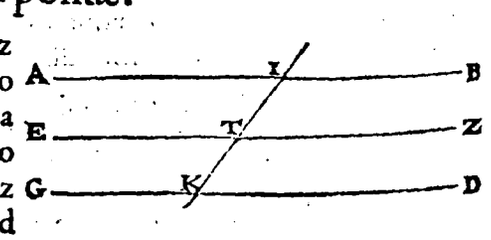
In parallelas rectas recta incidens linea, angulos alternatim ſibiipſis æquales, & exteriorem interiori oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem, ac interiores ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficit.



In parallelas A B G D incidat recta E Z, quas ſecet in I T: Dico E Z efficere angulos alternos A I T I T D æquales. Si enim non credantur, ſit aliquis eorum minor, ſcilicet I T D. Quoniam itaq; ſuper rectā A B conſiſtens Z I duobus rectis æquos efficit angulos A I T T I B: Additur autem ipſi T I B aliꝰ I T D minor ipſo A I T. Bini igitur T I B I T D duobus rectis minores efficiunt angulos. Sequetur itaque rectas A B, G D ad eas partes concurrere in quibus bini illi anguli T I B, I T D, interiores conſiſtunt, per 11 comm. ſententiam: non igitur eſſent parallelæ, contra hypotheſim, quod eſſet abſurdum. Æquales itaque ſunt A I T I T D anguli: Dico inſuper exteriorem E I B interiori oppoſito ad eaſdem partes ipſi I T D æqualem eſſe, cùm E I B æquus ſit ipſi A I T, qui ad verticem, & eidem A I T oſtenſus ſit æqualis I T D, ſequetur E I B æquari ipſi I T D, per 1. comm. ſentent. Dico præterea interiores ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficere, ſcilicet ipſos B I T I T D. Cùm enim recta Z I ſuper A B conſiſtens, angulos A I T, B I T (per 13 huius) binis rectis æquos efficiat: æquus autem ipſi A I T oſtenſus fuerit I T D: ſequetur I T D & B I T æquales binis rectis angulos producere. Duobus itaque rectis æquales erunt B I T, I T D interiores ad eaſdem partes. In parallelas igitur rectas recta incidens linea, &c.

PROPOSITIO XXX.

Quæ in plano eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, & adinuicem ſunt parallelæ, aut in rectum poſitæ.

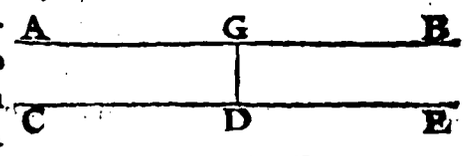


Sint rectæ A B & G D in plano eidem E Z parallelæ, non autem in rectum ſitæ: Dico A B & G D eſſe parallelas. Incidat in eas recta I T K, erit A I T angulus angulo I T Z alterno æqualis, per præcedentem. Sed idem I T Z exterior, ipſi T K D interiori oppoſito ad

eaſdem

eaſdem partes, eſt ſimiliter æqualis, per eandem. Igitur A I T & T K D (eidem I T Z æquales) adinuicem erunt æquales, per 1 comm. ſententiam, qui quidem A I T & T K D ſunt alterni. Parallelæ igitur erunt ipſæ A B G D, per 27 huius. Quæ itaque eidem rectæ lineæ parallelæ nec in rectum, poſitæ, &c.

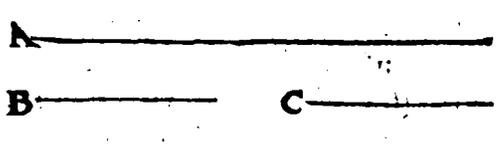
Ad ſecundum autem, ſint eidem A B parallelæ binæ C D, E D, non autem adinuicem: Dico quòd C D, E D ſunt in rectum poſitæ. Quia non ſunt parallelæ: concurrent igitur ipſæ: ſit in D. A ſigno autem D contingens recta ducatur ſecans A B, ſit ea D G, ipſa efficit angulos A G D & G D C duobus rectis æquales, per præcedentem, & A G D ipſi G D E alterno, per eandem: Anguli igitur G D C & G D E duobus rectis ſunt æquales. Si itaque ad aliquam rectam G D, duæ C D E D angulos duobus rectis æquos efficiant, ipſæ (per 14 huius) in directum erunt. Quæ igitur eidem ſunt parallelæ, & adinuicem ſunt parallelæ, aut in rectum poſitæ.



MONITVM.

Cùm omnis theorematum textura contineat binas partes, hypotheſim ſcilicet & conſequentiam. Et verè hypotheſis ea ſit natura, vt hæc vnica ſit cauſa ſufficiens ad eum effectum producendum, qui conſequentia dicitur, animaduertendum duximus huius theorematis demonſtrationem non eſſe vere ſyllogiſmum, quem vocat Ariſtoteles epiſtemonicon, hoc eſt, ſcientificum. Nam ex huius hypotheſi, qua Theon ſupponit binas rectas eidem parallelas, non neceſſarium ſequitur ſibiipſis parallelas eſſe. Poſſunt etenim binæ eidem parallelæ eſſe, & tamen concurrere, & ideo non erunt parallelæ, vt exemplo.

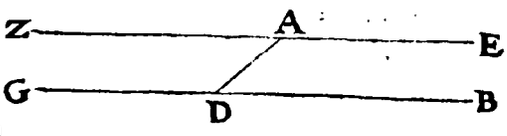
Eidem A rectæ erunt binæ B & C parallelæ, tamen productæ concurrent, ſi idem poſſideant planum: non igitur ſibiipſis parallelæ erunt. Si autem rectas B C eandem lineam dicere velimus, fallimur, cùm ſit ſectum continuum. Præterea hypotheſis ponit binas eidem parallelas eſſe, nihilq; aliud optat, tum demum vt inuicem parallelas ſtatuat ſibiipſis, nec adhuc ſciens ſi productæ concurrent. Executionem etenim debet præcedere propoſitio: ſola namq; executio cõcurſum earũ an ſit, docet: non igitur aliter quàm exequendo, an rectæ B C concurrant an non, percipiemus. Hypotheſis itaq; concluſionem generans, ea integritate debet ornari, vt cuncta, quę concluſionis neceſſitati noxia obſiſtunt, ea prudentia detrahantur, qua ſola hypotheſis poſitio, concluſionem theorematis neceſſariam exhibeat. Idem dixi mus optari planum, vt generalis fiat huius figuræ demonſtratio. Nam ablata plani hypotheſi, recta K I tres rectas propoſitas non neceſſariò ſecat, quinimo rectam E Z, forſan extra idem planum in ſublimi omitteret. Quare geometria parallelis in plano ſuppoſitis, binas ac diſiunctas adhibet concluſiones, vt in genere propoſita demonſtret. Quod ſi ſimplicem velit nec diſiunctam adhibere concluſionem, tum ab hypotheſi idem planum reiicit, vt diuino auxilio 9 vndecimi docebit, quo ſuppoſito ſimpliciter nec diſiunctim parallelas fore concludet. Alias infinitæ ſupponi debuerant rectæ parallelæ vt conſtaret theorema.



PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA 10.

Datæ rectæ lineæ infinitæ, per datũ ſignum quod in ea non eſt, parallelã rectã lineã ducere.

Sit datum ſignum A, data verò linea infinita G B. In qua ſumatur contingens ſignum D, coniuncta A D. Ad rectam autem A D, ſignumq; eius A, angulo A D B æqualis cõſtituatur in eodem plano D A Z, per 23 primi, producta Z A in E: Quoniam in binas rectas G B Z E recta A D incidens, angulos A D B D A Z alternos æquales efficit, parallelæ erunt rectæ G B Z E, per 27 huius. Datæ itaque rectæ lineæ infinitæ, per datum ſignum quod, &c.



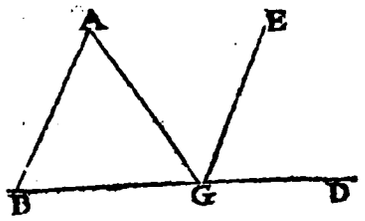
MONI

MONITVM.

Huius integritatem cõseruantes, à Theonis vocibus paululũ digredi cogimur. Inquit enim ille, per datum signum datæ rectæ parallelam rectam lineam ducere. Quid tum si in eadem proposita detur signum, aut equidem extra propositam sibi in rectum collocetur, per ea signa parallela duci minimè potest. Quare ne in rectum apponatur extra illam signum, infinitam diximus, vt autem reliqua parallela dari valeat, datum extra eam signum proposuimus.

PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus, binis interioribus & ex opposito est æqualis. Et trianguli tres interiores anguli, binis rectis sunt æquales.



Exponatur A B G triangulum, cuius vnum latus B G producatur in D: Dico exteriorem angulum A G D æquum esse binis interioribus A & B oppositis. Per signum G rectæ B A parallela fiat G E, ex præfata: in parallelas autem A B E G incidens B D, angulum E G D interiori & opposito A B G æqualem efficit, per 29 huius. Rursus in easdem, A B E G incidens recta A G, angulum A G E alterno G A B æqualem efficit, per eandem. Totus itaque exterior A G D, binis A B G G A B est æqualis, interioribus & ex opposito. Ad secundum autem: Dico tres cuiusuis trianguli interiores angulos duobus rectis æquari. Cùm enim recta A G super rectam B D consistens, angulos A G D & A G B duobus rectis æquos efficiat, per 13 huius: Sed A G D ostensus est binis qui ad A & B interioribus æqualis esse: Reliquus itaq; A G B interior (sibiipsi æquus) tres interiores trianguli angulos, binis A G B A G D æquales esse concludet, & proinde binis rectis (ex prima comm. senten.) æquos. Omnis itaque trianguli vno latere producto exterior, &c.

COROLLARIVM I.

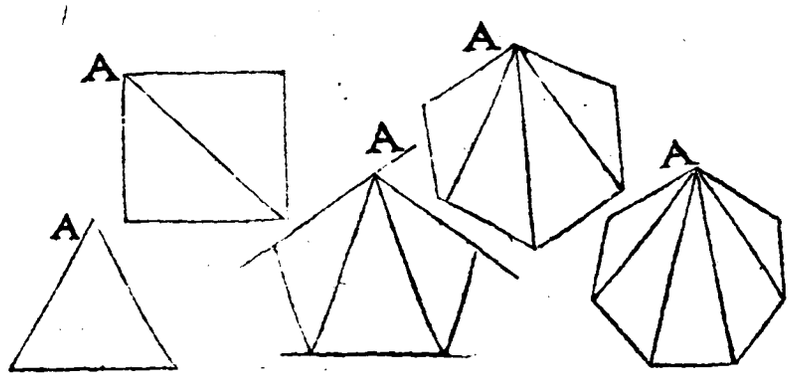
Si triangulorum bini vnius anguli, binis alterius æquales fuerint, reliquus reliquo æqualis erit.

Nam ex secunda huius parte, tres quorumuis triangulorum anguli, tribus æquales existunt, nempè vtrique duobus rectis. Ablatis itaque binis æqualibus, reliqui (per primam senten.) æquales erunt.

COROLLARIVM II.

Ex hac fœliciter elicere possumus cuiuslibet polygoni angulos tot binis rectis æquiualere, quot triangula polygonum suscipit, angulos in polygoni angulis constituentia.

Vt autem demonstremus quot polygonis incidant triangula, dicemus angulorũ Polygoni numerũ, semper binario triangulorum numerum superare. Nam cuiuslibet propo-

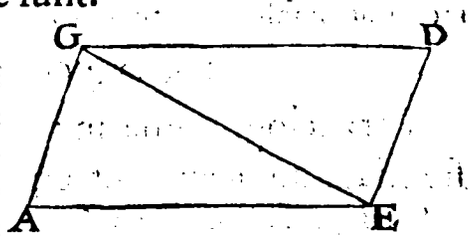


siti polygoni

siti polygoni ab vno quouis angulorum ad singulos oppositos ductis rectis, hęc describuntur triangula. Quia verò duo proximi remanent anguli non oppositi, nulla intra figuram ad illos linea duci potest, vt his patet exemplis. Quoniam in trigono nullus est oppositus angulus, nulla potest duci recta ab angulo in angulum quæ ipsum in bina aut plura secet triangula, in triangulum cadens. In quadrangulo vero, vna ducitur à signo A tantùm ad oppositum angulum, quæ in bina ipsum secat triãgula. Pentagonũ verò in tria. Hexagonum in quatuor. Heptagonũ in quinque, & sic infinitè, numero angulorum, numerum triangulorum comprehensorũ binario semper excedente angulorum numero: nempe duobus qui circa signum A, angulis in quos recta ducta polygonum cadere non potest. Quòd autem plura vel pauciora polygonis conuenire non possint triangula, hac lege præscriptis, patet. Cùm quodlibet horum triangulorum, angulis polygonorum duorum rectorum angulorum quantitatem conferat, sequetur quinque triãgula contulisse heptagono decem angulos rectos, quatuor verò hexagono octo angulos rectos, tria autem pentagono sex rectos, duo insuper quadrilatero quatuor rectos, trilatero verò vnicum duos rectos, per huius demonstrata. Quòd si plura describerentur, in ipsis polygonis triangula, eorum anguli pluribus æquipollerent rectis, sed & paucioribus: eadem itaque quantitas seipsa maior vel minor esset, quod esset absurdum. Non igitur plura vel pauciora ipsis conuenient triangula, angulos in polygonorum angulis habentia. Hæc in ĩrregularium figurarum typis docere voluimus, vt certior pateat regularium methodus. Cæterùm cùm ostenderimus angulorum polygoni numerum, semper binario numerum triangulorum excessisse, manifestum erit duplum angulorum polygoni numerum, excedere duplum triangulorum numerum (hoc est angulorum rectorum à triangulis collatorum, qui semper ipsis triangulis duplus est) duplo binarij, hoc est quaternario, vt latius quandoque demonstrabit vndecima septimi, si quidem istud demonstratione egeat. Quare sequetur angulos exteriores cuiuslibet polygoni, quatuor rectis æquales esse, vt pateat in pentagoni figura. Cùm in qualibet figura angulus interior cùm exteriore, duobus rectis æqui polleant, ex 13 huius, sequetur interiores & exteriores simul sumptos, totidem rectis ęquiualere, quotus est duplus angulorũ polygoni numerus, nam quilibet duos rectos proferet. Sed duplus numerus angulorum polygoni numerum angulorum rectorum intrinsecorum quaternario excedit. Reliqui igitur exteriores quatuor rectis æquales erunt in quouis polygono.

PROPOSITIO XXXIII.

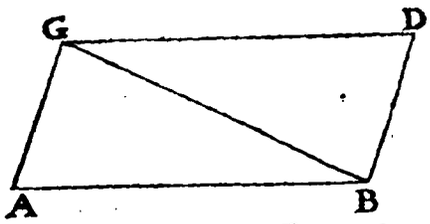
Æquas & parallelas ad easdem partes rectæ lineæ coniungentes, & ipsæ æquales & parallelæ sunt.



Sint æquales & parallelæ rectæ lineæ A E G D, coniungant autem eas ad eãsdem partes A G, ad alias verò easdem E D, coniuncta G E: Dico A G E D æquales esse, & parallelas. Quoniam in parallelas A E G D incidit G E, angulos A E G, E G D æquales efficit, per 29 huius: Triangula igitur A E G, D G E, vnum angulum A E G, vni D G E æqualem, & duo latera A E E G, duobus D G, G E æqualia habentia, efficient, per 4 primi, bases A G, E D æquales: & reliquos angulos A G E & D E G æquales. In binas itaque rectas A G, E D, recta G E incidens, angulos A G E & D E G alternos æquales efficiens, parallelas esse rectas A G E D indicat, per 27 huius. Parallelæ itaque & æquales erunt A G & E D æquas parallelas A E G D coniungẽtes. Aequas igitur & parallelas ad easdẽ, &c.

PROPOSITIO XXXIIII.

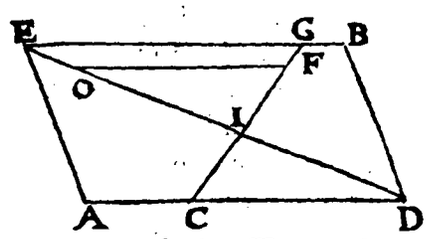
Parallelogrammorum locorum latera, quæ ex opposito & anguli, æqualia sunt adinuicem, & dimetiens ea bifariam secat.



Sit parallelogrammum ABGD, cuius latera oppoſita ſint AB GD & AG BD: Dico AB, & GD æqualia eſſe, ſimiliter & AG ipſi BD, & inſuper angulos oppoſitos æquos eſſe, ac dimetientem GB illud ſecare bifariam. Quoniam parallelę ſunt per 36 diffinit. huius AB & GD, necnon AG & BD, in eas cadens recta GB, angulos ABG, & DGB æquos efficit, inſuper AGB, & DBG alternos, per 29 huius. Et proinde totum ABD toti DGA angulum. Triangula igitur ABG & DGB duos angulos ABG AGB duobus DGB DBG æquos, & latus GB commune habentia per 26 huius ſunt æqualia, & reliquos angulos GAB GDB, ac reliqua latera GD ipſi AB & AG lateri BD habent æqualia. Parallelogrammi igitur ABGD loci latera quæ ex oppoſito, AG lateri BD, & AB ipſi GD, & angulus A angulo D, & ABD ipſi DGA, ſunt æqualia, dimetiensq; BG parallelogrammum ſecat bifariam, in ABG & DGB æqualia triangula.

COROLLARIVM.

Recta parallelogrammum quouiſmodo ſecans bifariam, & eius dimetientem bifariam ſecabit.



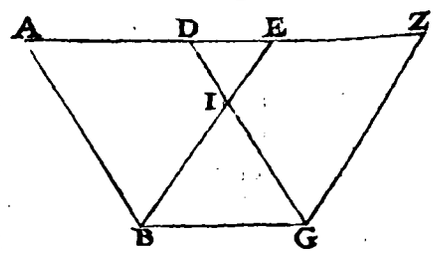
Si enim fieri poſſit rectam parallelogrammum ſecantem bifariam, dimetientem bifariam non ſecare: eſto recta GC ſecans bifariam parallelogrammum ABED, dimetientem verò eius DE inæqualiter in I. Sit autem IE maior portione ID, & rectæ ID æqualis ponatur IO, pérque O ſignum, ipſis AD BE parallela ducatur OF, per 31 huius. Triangulorum itaque FOI CDI bini anguli, binis ſunt æquales, ſcilicet IOF & IDC, per 29 primi, & FIO ipſi CID, per 15 eiuſdem, vnúmque latus ID vni IO æquale. æqualia igitur erunt triangula per 26 huius, maius itaque erit totum EIG ipſo DIC triangulo. Cùm autem dimidium parallelogrammi ſupponatur eſſe trapeſium GBDC, dimidium verò eiuſdem eſt triangulum EBD, per hanc, vt patuit. Ab æqualibus itaque GBDC & EBD, commune auferatur trapeſium GBDI, ſequetur reliquum DIC reliquo EIG æquum eſſe, ſed minus oſtenſum, quod fieri non poteſt. Recta igitur ſecans bifariam parallelogrammum, dimetientem eius inæqualiter non ſecabit. Quare æqualiter ſecabit.

MONITVM.

Hoc ideo contulimus corollarium, vt quandoque nutu diuinæ clementiæ demonſtrandis ſolidis ferat compendium.

PROPOSITIO XXXV.

Parallelogramma in eadem baſi & in eiſdem parallelis exiſtentia, adinuicem ſunt æqualia.



Sint ſuper eadem baſi BG, & in eiſdem parallelis AZ BG, parallelogramma ABDG & EBZG: Dico ea ABDG & EBZG parallelogramma eſſe æqualia. Cùm parallelogramma ſint, æquales erunt ſingulæ AD & EZ rectæ ipſi BG quæ ex oppoſito, per præcedentem, & igitur adinuicem. Cõmunis eis addatur DE, æquales erũt AE & DZ: Sed AB ipſi DG, & BE rectæ GZ (oppoſitæ) æquantur, per eandẽ. Angulus verò EAB angulo ZDG æquus eſt cùm in parallelas ABDG cadat ZA, per 29 huius. Triãgula igitur, ABE & DGZ (per 4 huius) ſunt æqualia: Communi verò ablato DIE, reliquum ADIB trapeſium reliquo ZEIG trapeſio æquum erit, per 3 comm. ſenten. Eiſdem trapeſiis autem

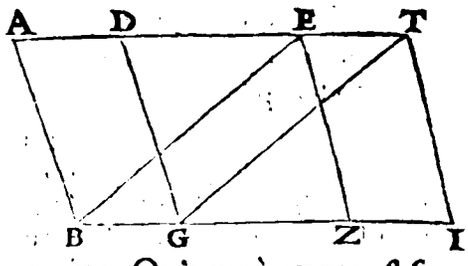
autẽ cõmune addatur B I G triangulũ, totum A B D G parallelogrãmum toti E B Z G æquum erit. Parallelogramma itaque in eadem baſi & in eiſdem parallelis, &c.

MONITVM.

Cum hac & deinceps optabit Euclides triangula & parallelogrãma in eiſdem eſſe parallelis, non in eiſdem ipſo actu intelligemus: ſed in parallelis æquali à ſe ſpatio diuulſis, quas eaſdem iure dicere poſſumus, eò quòd Geometria quantitatem, non tantùm ſitum aſpectet. Nos etenim ſitum liberè diſponimus (quod licet) ad demonſtrandorum facilitatem.

PROPOSITIO XXXVI.

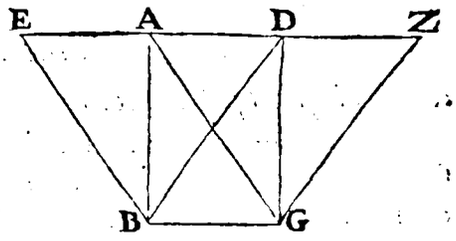
Parallelogramma in æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis exiſtentia adinuicem ſunt æqualia.



Sint in æqualibus baſibus B G, Z I, & eiſdem parallelis A T, B I, parallelogramma A B D G, & E Z I T: Dico ea eſſe æqualia. Coniungantur B E & G T rectæ. Cùm autem æquales & parallelæ ſint B G, & E T, rectæ eas coniungentes B E & G T, æquales & parallelæ erunt, per 33 huius. Parallelogrammum igitur (per 36 diffinitionem huius) erit B E T G. Quia verò B E T G eſt ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis cum parallelogrammo A B D G, ea (per præcedentem) ſunt æqualia. Similiter æquum oſtendetur B E T G ipſi E Z I T: & proinde eidem B E T G æqualia, adinuicem æqualia erunt, ſcilicet A B D G ipſi B Z I T. Parallelogramma itaque in æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis exiſtentia, &c.

PROPOSITIO XXXVII.

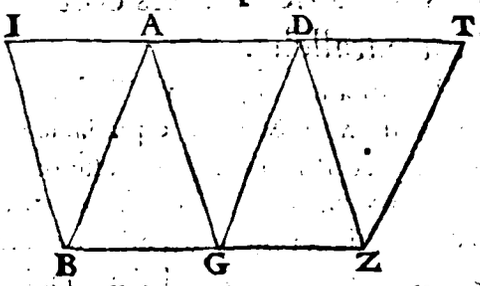
Triangula in eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, adinuicem ſunt æqualia.



Sint triangula A B G & D B G, in eadem baſi B G & eiſdem parallelis A D, B G. Dico A B G & & D B G triangula eſſe æqualia. Per ſignum G rectæ B D, parallela ducatur G Z, per B verò ipſi A G parallela fiat E B, concurrentes cum recta A D producta in ſignis Z & E. Parallelogramma erunt E G & B Z, per 36 diffinitionem huius, quę (per 35 huius) ſunt æqualia. Sed parallelogrammi E G dimidium eſt A B G triangulum. Ipſius verò B Z dimidium eſt D B G, per 34 huius: ſunt enim A B, D G dimetientes. Triangula itaque A B G & D B G æqualia ſunt adinuicem, per 7 comm. ſententiam. Triangula igitur in eadem baſi & in eiſdem, &c.

PROPOSITIO XXXVIII.

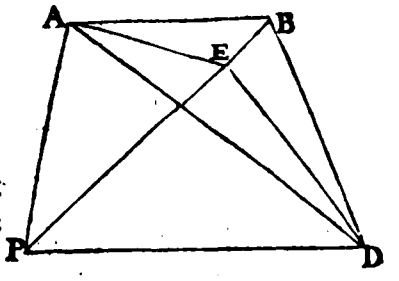
Triangula in æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis conſtituta, adinuicem ſunt æqualia.



Sint triangula A B G, D G Z, in æqualibus baſibus B G, G Z, & in eiſdem parallelis B Z, A D: Dico ea eſſe æqualia. Per ſignum Z recte G D parallela fiat Z T. ipſi verò A G parallela per B ſit I B, producta A D in T & in I. Parallelogramma erunt G T, G I, & æqualia per 36 huius. Et cùm eorum dimetientes ſint D Z & A B, parallelogrammorum æqualium, dimidia erunt triangula A B G, D G Z, per 34 huius, quæ (per 7 cõmu. ſententiã) ſunt æqualia. Triangula itaq; in æqualibus baſibus, & in eiſdẽ parallelis conſtituta, &c.

PROPOSITIO XXXIX.

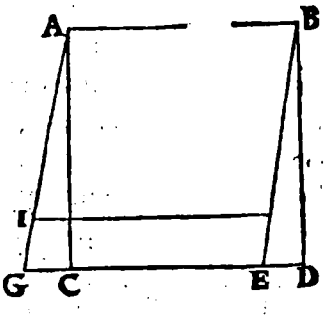
Triangula æqualia, in eadem baſi ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis.



Proponantur triangula A P D, B P D æqualia, ſuper eadem baſi P D in plano conſtituta, ad eaſdem partes A B: Dico parallelas eſſe A B & P D. Quod ſi A B non ſit ipſi P D parallela, ſit alia quædam A E ſecans B P in E per ſignum A rectæ P D parallela, coniuncta E D. Cùm autem triangula A P D & E P D ſint in eadem baſi & parallelis, ea erunt per 37 huius æqualia. Æquale igitur eſt E P D, ipſi A P D. Sed eidem A P D æquum fuit B P D, igitur B P D totum ipſi E P D parti erit æquale, quod fieri nequit. Similiter ſi E P D ſit ipſo B P D maius oſtendetur. Per ſignum igitur A ipſi P D alia quàm A B parallela non ducitur. Quare parallelæ ſunt A B, P D. Triangula igitur in eodem plano, &c.

COROLLARIVM.

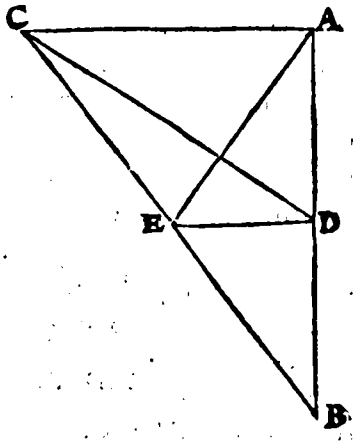
Idem ſequitur in parallelogrammis.



Nam ſi ſuper A B recta baſi fuerint parallelogramma æqualia A B C D & A B G E, neceſſe eſt ea eſſe in eiſdem parallelis. Si autem non, ſed extra, vel intus, vnum eorum conſtituitur, ipſi A B C D æquum ſit B I intus cõſtitutum. Idem igitur B I æquum eidem A D, æquale erit reliquo A B G E. Cui quidem æquum eſt A B C D, per 35 huius, & primam communem ſententiam. Pars ſcilicet toti, quod eſt abſurdum. Non igitur cadit extra vel intus. In parallelas igitur cadunt æqualia parallelogramma ſuper eadem baſi.

COROLLARIVM II.

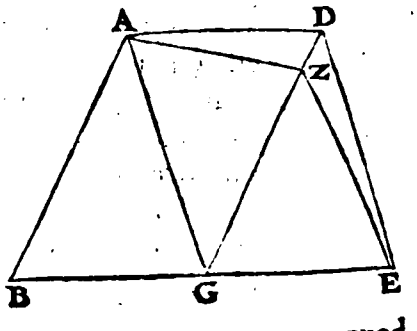
Infert ab hac Campanus, Linea ſecans bifariam duo trianguli latera, reliquo eſt parallela.



Cùm autem trianguli A B C, latera A B, B C ſecta ſint bifariam, æqualia erunt A E D & D E B, ſimiliter & C D E eidem D E B per 38 huius: igitur adinuicem erunt æqualia A E D & C D E (per 1 com. ſententiam). Sed ea ſuper eadem baſi D E conſtituuntur. In eiſdem igitur ſunt parallelis, D E & A C. Recta igitur D E ſecans bifariam A B B C duo latera, reliquo A C eſt parallela.

PROPOSITIO XL.

Triangula æqualia in æqualibus baſibus ad eaſdem partes cõſtituta, in eiſdem ſunt parallelis.



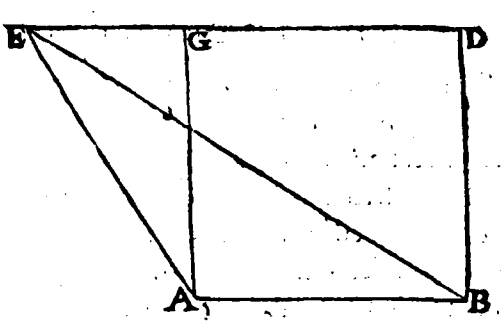
Proponantur ſuper æqualibus baſibus B G G E, triangula A B G & D G E æqualia, ad eaſdem partes in plano conſtituta. Dico ea eſſe in eiſdem parallelis A D, B E. Si verò non credatur A D eſſe parallela rectæ B E, ſit per ſignum A alia quædam A Z, ipſi B E parallela, coniuncta Z E. Triangula itaque A B G & Z G E erunt æqualia (per 38 huius) ſed eidem A G B ponitur æquum D G E triangulum. Igitur Z G E & D G E erunt adinuicem æqualia, pars ſcilicet toti,

quod

quod fieri non poteſt. Non igitur per ſignum A ipſi B E alia parallela erit quàm A D. Triangula itaque æqualia in æqualibus baſibus ad eaſdem partes conſtituta, &c.

PROPOSITIO XLI.

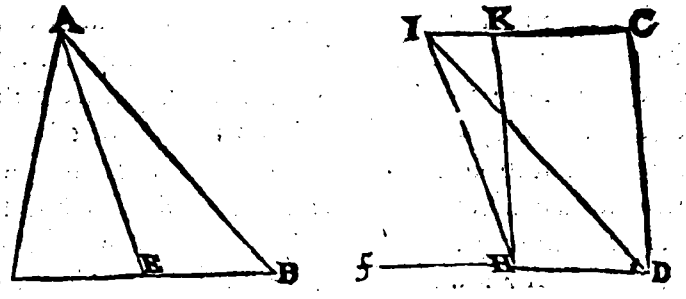
Si parallelogrammum & triangulum eandem baſin habuerint, & in eiſdem fuerint parallelis, trianguli parallelogrammum duplum erit.



Parallelogrammum A B D G & triangulum A E B eandem habeant baſin A D & in eiſdem ſint parallelis A B, E D: Dico parallelogrammum A B D G duplum eſſe trianguli A E B. Ducatur A D dimetiens parallelogrammi. Quæ quidem bifariam ſecat ipſum, per 34 huius. Duplum itaque erit A B G D trianguli A D B. Sed A D B ipſi A E B (ſuper eadem baſi) æquum eſt, per 37 huius, parallelogrammum igitur A B G D, trianguli A E D duplum eſt. Si itaque parallelogrammum & triangulum eandem, &c. Idem oſtendetur ſuper æquis baſibus, nam ſuper alia baſi æquali rectæ A B conſtitutum parallelogrammum, ipſi A B G D æquum erit (per 36 huius) & ideo trianguli A E B duplum.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA II.

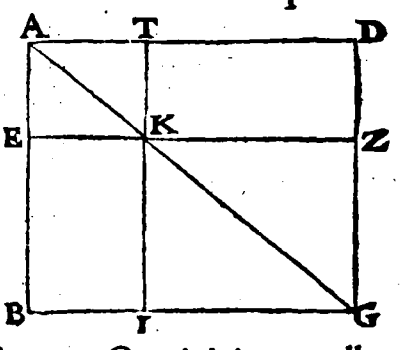
Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.



Eſto datum triangulũ A B G, datus verò angulus C D F, oportet iam in dato angulo C D F, æquale parallelogrãmum ipſi A B G conſtituere. Secetur B G bifariam in E ducta A E: ad rectam D H ſignumq; eius D, angulo E B A æqualis angulus ponatur H D I. Rectæ verò B E æqualis ſit D H, ipſi autem B A æquetur D I, iuncta I H, æqualia erunt A B E & I D H triangula, per 4 primi. Per ſignum H rectæ D C parallela ſit H K, per ſignum verò I ipſi H D parallela fiat I C, ſecans H K in K, parallelogrammum erit C D K H, per 36 diffinit. huius. Et duplum trianguli H D I, per præcedentem, cui æquum fuit A E B. Duplus igitur erit C D K H ipſius A E B, cuius duplum eſt A B G, per 38 huius: ipſa itaque A B G & C D K H ſunt æqualia, per 6 com. ſententiam. Dato igitur triangulo æquale parallelogrammum, &c.

PROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi loci eorum quę circa dimetientem ſunt parallelogrãmorum ſupplementa, ſibi inuicẽ ſunt æqualia.



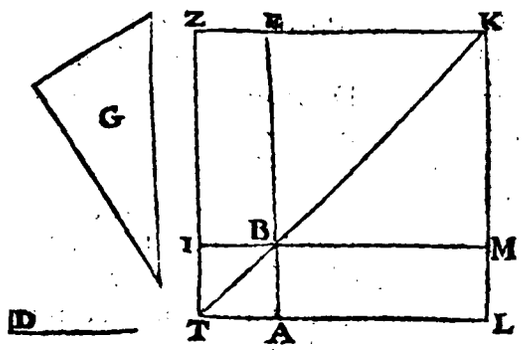
Sit parallelogrãmum A B G D, cuius dimetiens ſit A G. Circa dimetientem verò exiſtant E T I Z parallelogrãma: eorum verò ſupplementa (reliquum totius B D reſtituentia) ſint B K, K D: Dico ea eſſe æqualia, quoniam dimetiens A G ſecat bifariam parallelogramma B D, E T, & I Z, æqualia erunt A E K, A T K, adinuicẽ, & K I G ipſi K Z G, necnon A B G ipſi A D G, per 34 primi. Si igitur ab æqualibus A B G & A D G, æqualia tollantur, A E K, K I G, ipſis A T K, K Z G, reliqua B K, K D (per 3 communem ſententiam) æqualia erunt. Omnis igitur parallelogrammi loci, &c.

MONITVM.

Idem ſequetur licet quæ circa dimetientem communem angulum non habeant toti: nam ab æqualibus æqualia ablata ſemper æqualia relinquunt, quapropter communem angulum optari non diximus.

PROPOSITIO XLIIII. PROBLEMA 12.

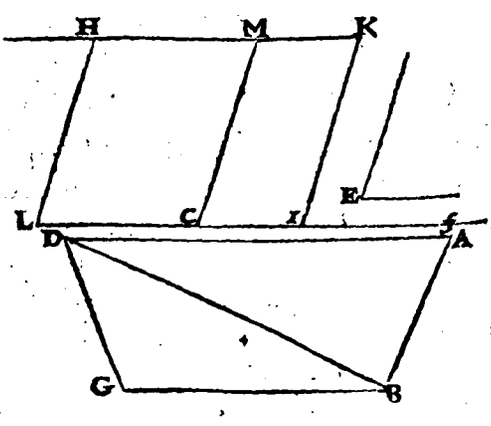
Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere, dato angulo rectilineo æquiangulum.



Sit data recta linea AB, datum verò triangulum G, datus autem angulus D: oportet ad rectam AB parallelogrãmum conſtituere, æquiangulum ipſi D, æquale verò ipſi G. Producatur AB recta in E. Ad datam rectam AB & ſignum eius B, æqualis angulus ipſi D dato ponatur (per vigeſimamtertiam huius) EBI. Dato autem triangulo G, æquale parallelogrammum ponatur in dato angulo EBI: ſitque EZIB, per 42 huius, perficiatúrque parallelogrammum AI, ſitq; AITB, coniuncta diametro TB, quæ producatur in K, in quam concurrat extenſa ZEK: ipſi verò ZK parallela ſit TL, rectæ autem ZT, parallela ſit KL, producta IB in M. Quoniam parallelæ ſunt ZEK IBM & TAL rectæ, & parallelæ item ſunt TIZ ABE & LMK: dimetiens verò TBK: parallelogramma erunt (per 36 diffinitionem) AI, LZ & ME, & circa eandem dimetientem TK (per conſtructionem) erunt AI & EM. Eorum itaque ſupplementa ZB, BL erunt adinuicem æqualia, per præcedentem: Sed ipſi ZB æquum eſt oſtenſum G triangulum. Parallelogrammum igitur AB ML (eidem ZB æquum) triangulo G æquum erit per 1. communem ſententiam. Quia verò angulus ABM, angulo EBI ad verticem æquus eſt, per 15 huius: eidem porro EBI æquus eſt datus D angulus. Ipſi igitur D dato, æquus erit ABM angulus. Ad datam itaque rectam AB, dato triangulo G, æquale parallelogrammum ABML conſtituimus, dato angulo D æquiangulum, in angulo ſcilicet ABM.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA 13.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtruere, dato angulo rectilineo æquiangulum.



Sit rectilineũ quoduis ABGD, cuius ſubtendat angulum BAD recta BD, & ſic reliquos (quotcunque fuerint) angulos, rectilineum in triãgula reſoluentes, ſcilicet ABD, BDG. Data verò recta, ſit LH, & datus angulus eſto E, oportet ad rectam LH, parallelogrammum conſtruere, æquale rectilineo ABGD, æquiangulum verò ipſi E. Ad datam rectam HL, ſignúmque eius L, æqualis ipſi E angulus ponatur HLF, per 23 huius. Dato quidem triãgulo ABD ad rectam HL, angulúmque HLF, ipſi E dato æquiangulum, æquale parallelogrammum conſtituatur HLCM, per præcedẽtem: ad rectam verò MC, angulum autem MCF, æquale ipſi BDG triangulo parallelogrammum conſtituatur ſimiliter CMKI, per eandem: quoniam enim binæ HM MK eidem LF ſunt parallelæ, & concurrunt in M, tota igitur HK in rectum ponitur, per 30 huius,

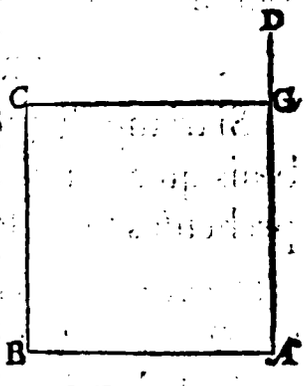
huius,& per eandem parallelæ erunt H L & K I, eidem M C parallelæ. Parallelogrammum igitur L K æquum erit binis A B D, & B D G, & proinde rectilineo A B G D, constitutum autem est in angulo H L F, dato E æquiangulum. Ad datam igitur rectam H L, dato rectilineo A B G D, æquale parallelogrammum L H K I construximus dato angulo E æquiangulum, nempe in angulo H L F.

MONITVM.

Antecedenti theoremati & huic appoſuimus figuras deſcribi in angulo, non dato, ſed ipſi dato æquiangulo. Cùm enim cogimur ad datam rectam illas applicare, perſpicuum eſt non ſemper lineam datam, ad datum eſſe angulum: quare ſufficit in 44 dixiſſe, ad datam lineam, & dato angulo æquiangulum parallelogrammum, triangulo æquum deſcribendum, vt poſtmodum eius auxilio, per hanc cuiuis recti lineo æquum parallelogrammum deſcribere poſſimus: præſtat etenim illud deſcribi ad datam rectam quàm ad datum angulum, cùm eidem ad datam rectam poſito, angulus dato æquiangulus facile coaptetur, vt geometriæ plus amplietur quàm reſtringatur facultas: id præcauentes eſſe neceſſarium ad aliquas ſexti demonſtrationes, quibus non in dato angulo, ſed ipſi æquiangulum fit parallelogrammum.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA 14.

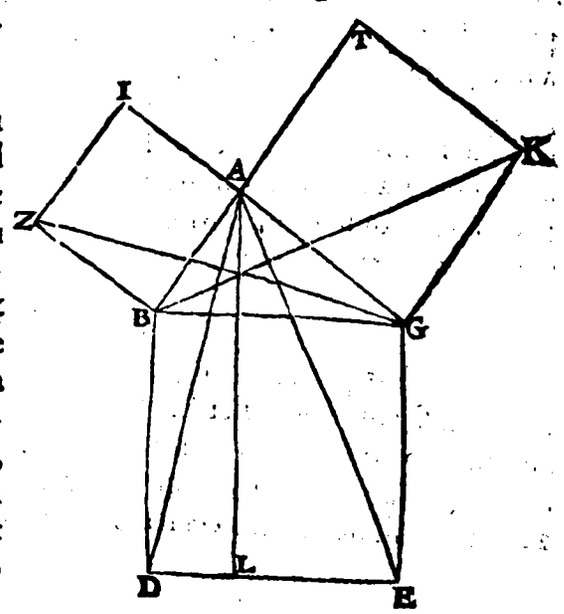
Ex data recta linea, quadratum deſcribere.



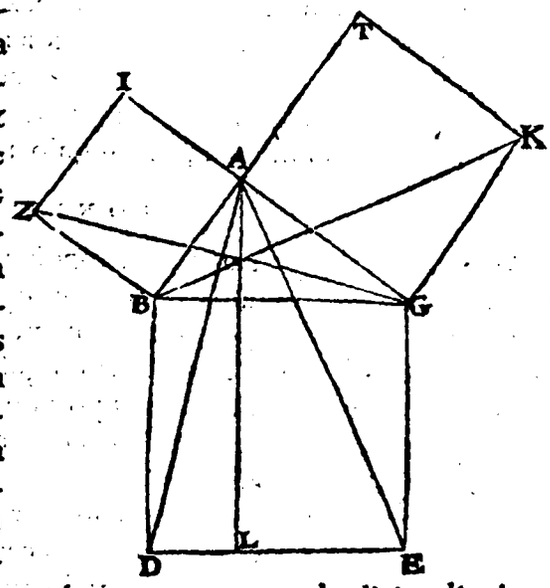
Data recta ſit A B, cui ad rectos excitetur ad ſignum A recta A D, per 11 huius, ipſi A B æqualis ponatur A G, cui per ſignum B parallela ducatur B C, ipſi verò A B, per ſignum G fiat parallela G C. Cùm enim parallelæ ſint quatuor rectæ, parallelogrammum erit (per 36 diffinitionem) & æquilaterum, per 34 huius, cùm B C, C G ſint ipſis A B, A G æqualibus, æquales. Quia verò angulus A rectus eſt, & C (per eandem) rectus erit. In parallelas autem A G, B C cadens A B, angulos A & B duobus rectis æquos (per 29 huius) efficit, rectus eſt quidem A, rectus igitur erit B, & rectus proinde A G C, ex oppoſito, per 34 huius. Atqui quadrilaterum, æquilaterum, & rectangulum eſt A B C G, quod igitur quadratum erit, per 30 diffinitionem. Ex data itaque recta A B, quadratum deſcripſimus A B G C.

PROPOSITIO XLVII.

In triangulis rectangulis, quadratum quod à latere rectum angulum ſubtendente fit, æquum eſt quadratis quæ fiunt ex lateribus rectum angulum continentibus.



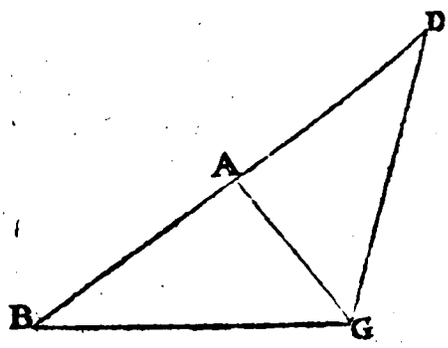
Eſto triangulum A B G, habens angulum B A G rectum: dico quadratum quod fit ex latere B G, æquum eſſe eis quæ fiunt ex lateribus A B, A G rectum angulum continentibus. Deſcribantur quadrata (per præcedentem) ex A B, A G, & B G, ſcilicet A B Z I A G K T & B G E D. Rectis autẽ B D, G E per ſignum A parallela excitetur A L, per 31 huius, parallelogramma erunt B L G L, nectantur A E, A D, B K, G Z. Quoniam triangulorum A B D & Z B G anguli A B D & Z B G ſunt æquales, cùm conſtent recto & angulo



ABG ſinguli, & æquis continentur lateribus, nempe eorũdem quadratorum lateribus AB, BD, ipſis ZB, BG æqualibus, æqualia erunt triangula ABD & ZBG. Cùm autem in rectam BA binæ GA, AI duos rectos efficiant, tota IG in rectum eſt, per 14 huius, ſimiliter reliqua BT. Cùm inſuper triangulum ABD & parallelogrammum BL, ſint ſuper eadem baſi & eiſdem parallelis BDAL, duplum eſt BL ipſius ABD trianguli (per 41 huius) quia ſimiliter triangulum ZBG & quadratum AZ ſuper eadem ſunt baſi ZB, & in eiſdem parallelis ZB, IG, duplum eſt (per eandem) AZ ipſius ZBG. Igitur BL parallelogrãmum & ZA, quadratum, æqualium triangulorum ABD, ZBG duplicia, adinuicem erunt æqualia. Simili argumento oſtendemus reliquum quadratum AGKT, rectangulo GL æquum eſſe. Bina igitur ABZI & AGKT quadrata, toti BGED erunt æqualia: & proinde quadratum quod fit ex BG æquum eſt eis quæ fiunt ex AB, AG lateribus. In triangulis itaque rectangulis quadratum quod à latere, &c.

PROPOSITIO XLVIII.

Si trianguli quod ab vno laterum quadratum, æquale fuerit binis quæ ex reliquis triãguli lateribus quadratis, angulus comprehenſus ſub reliquis trianguli duobus lateribus, rectus erit.



Sit ABG triangulum, cuius latus GB efficiat quadratum æquale binis ex reliquis lateribus AG AB quadratis: Dico angulum ſub ipſis AG AB comprehenſum ſcilicet BAG, rectum eſſe. Ad rectam GA ſignúmque eius A perpendicularis excitetur AD, quæ ſit æqualis ipſi AB, & coniungatur DG. Et quoniam AD & AG rectæ ipſis BA & AG ſunt æquales, ex ipſis AD & AG quadrata, æqualia erunt eis quæ ex BA AG quadratis. Sed eis quæ ex AD AG, æquum eſt, per præcedentem, quod fit ex GD, cùm ſit rectus DAG angulus. Ergo eis quæ ex BA AG, æquum erit idem quod ex DG. Eis autem quæ ex BA AG, æquum eſt per hypotheſim quod ex BG. Quæ igitur ex GD & BG quadrata ſunt æqualia, & proinde rectæ BG GD ſunt æquales. Triangulorum itaque ABG & AGD duo latera AD AG, duobus AB AG, & baſis DG baſi GB ſunt æqualia: angulus igitur BAG, angulo DAG recto æquus erit, per 8 huius, & itaque rectus. Si igitur trianguli quod ab vno laterum quadratum, æquale fuerit, &c.

MONITVM.

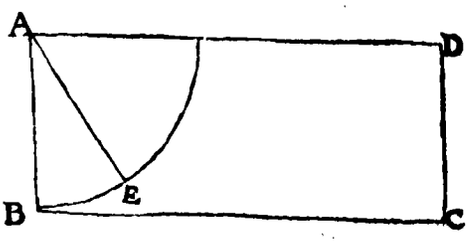
His duabus proximis propoſitionibus, innumeroſa admodum conferrentur acquiſita, ſi iam expoſuiſſet Euclides quid ſit ratio, ſiue proportio, qua namq; arte ſuper datam conſtituatur rectus angulus lineam, quid ve ſit lineæ potentia, quorum cùm ad finem ſextæ vẽtum ſit, aliqua ab his orta enarrabimus, interim his quæ ad futura demonſtranda neceſſariò exhibentur contenti.

EVCLID

EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER SECVNDVS.

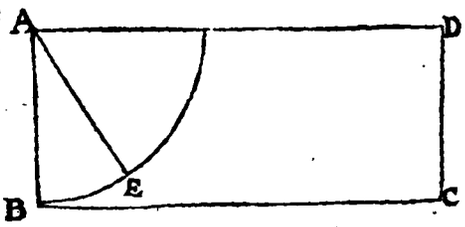
OMNE parallelogrammum rectangulum, ſub duabus rectum angulum comprehendentibus rectis lineis, dicitur contineri.

Expoſuimus 36 diffinit. primi, quid ſit parallelogrammum, genus inquam quatuor quadrilatera complectens, ſcilicet quadratum, alterolongius, rhombum, & rhomboidem. Cùm enim quadratum aut alterolongius complectimur, parallelogrammum dicimus rectangulum, eò quòd vnica ſit tantum recti anguli quantitas. Cùm verò rhombos aut rhomboides intelligimus, ea tantùm parallelogramma in genere nuncupamus. Nam nec ea ambligonia, nec quidem oxygonia dici poſſunt, cùm ex vtroque angulorum genere ſingula conſtruantur, obtuſis ſcilicet & acutis, quorum infinita eſt quantitatis diuerſitas, recti verò anguli vnica. Quare diffiniens hanc Euclides, ſub quibus menſuris determinetur ſiue exprimatur parallelogrãmum, illud exprimi dicit ſub duabus rectis angulum rectum continentibus, eò quòd earum rectarum ſemper ſimilis inclinatio (quæ anguli quantitatem efficit) æquales metiatur areæ magnitudines. Quòd ſi binæ rectæ ad obliquum angulum (acutum ſcilicet aut obtuſum) conſtituerentur, illę metiendis ſuperficiei longitudini & latitudini non conuenirent. Superficies etenim cùm per 5 diffinitionem primi exponitur, eſt, quę longitudinẽ latitudinémque habet. Cùm autem ad longitudinem comparanda erit latitudo, earum binæ menſores rectæ lineæ, ſeſe ad rectos ſecant angulos, vt dicemus 4 diffinitione tertij de diſtantia à centro, & tertiam geometriæ dimenſionem, illas vtraſque ad rectos angulos rurſum ſecare, ſcilicet ſublimitatem. Nam is rectus angulus vnica inclinatione linearum compoſitus, eandem pro ſuę lineæ longitudine exprimit latitudinis quantitatem, nihil ſibi de alia dimenſione ſumens. Quòd quidem non efficit acutus aut obtuſus, eò quòd vtriuſque eorum infinitæ ſint diuerſitates inclinationis linearum. Parallelogrammum igitur dixit Euclides rectangulum ſub duabus rectum angulum continentibus exprimi, vt altera earum longitudinem, reliqua verò eius latitudinem nulla fallacia exprimat, vt docebimus hac figura.



Cùm AB AD rectæ ad angulum rectum coëant, rectam AD longitudinem, AB verò rectanguli ABCD latitudinem exprimat. Quòd ſi eidem AB æqualem rectam ad obliquum conſtituamus angulum DAE, ipſius parallelogrammi latitudinem non exprimemus. Ipſa namque AE per angulum acutum ipſi AD copulata, eidem infinitas latitudinis quantitates (ob acutorum angulorum infinitas differentias) attribuet, & proinde incertas. Vt igitur certam datæ longitudini attribuat latitudinem, eam per rectas angulum rectum conſtituentes proferre voluit Euclides. Si verò per motum intelligere velimus. Dicemus quantum efficiet

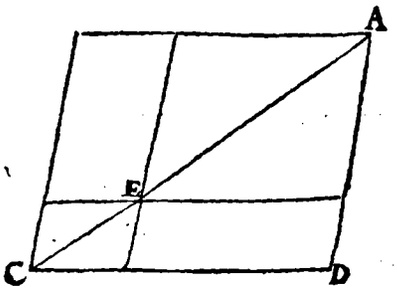
ciet motum ſignum A per lineam A B vſque ad B tantùm efficere ſimul ſingulas rectę A D partes, vſque ad rectam B C, & is motus deſcribet parallelogrammum A B C D, & rectangulum, cùm motus fiat ad rectum angulum longitudinis. Si verò per obliquum moueatur angulum vt per A E ſignum A, is motus lineæ A D, rhombum aut rhomboidem ſimiliter deſcribet. Præterea recta A E angulum obliquum ad longitudinem A D efficiens, de vtraque confusè ſibi ſumit: nam plani longitudinem ab A B ad D C in E ſigno limitat, latitudinémque ab A D in B C per idem E ſignum breuiat, ídque confusè, ac citra omnem diſcernẽdi ſpeciem, ob angulorum obliquorum infinitas numero quantitates. Quare recta ad longitudinem A D angulos obliquos efficiens, iudicandæ latitudinis penitus aliena reperitur, ſed ideo ſoli rectæ angulum rectum conſtituenti ad longitudinem A D id congruit.



DIFFINITIO II.

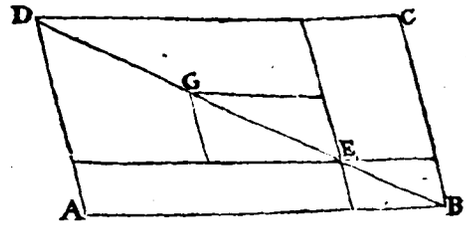
Omnis parallelogrammi loci, eorum quæ circa dimetientem angulum communem efficiunt parallelogrammorum, vnumquodque cum binis ſupplementis gnomon vocetur.

Gnomonem diffinit Euclides reliquum cuiuſuis parallelogrammi ablato parallelogrammo, circa dimetientem, & ad angulum conſtituto: vt ſi tollatur parallelogrammum E A à toto B D, reliquum E C cum binis E B, E D ſupplementis dicetur gnomon: ſimiliter ſi tollatur E C, ab eodem B D, reliquum gnomon erit. Hæc enim diffinitio omnia comprehendit parallelogramma, ſcilicet quadratum, alterolongius, rhombum, & rhomboidem.



MONITVM.

Deerat huic diffinitioni, prout eam Campanus & Theon meminerunt, parallelogrammum quod circa dimetientem eſt, angulum communem cum toto efficere, vt neceſſariò hac lege gnomonem feciſſe dicatur, quod videbimus Dei beneficio, 26 propoſ. libri ſexti. Similiter vt circa dimetientem eſſe dicatur, optari illum angulum cum toto habere communem, vt hoc exemplo parallelogrammum ſcilicet G E, circa dimetientem D B totius A C parallelogrammi, ſimile ſimilitérque poſitum eſſe videmus, & tamen quia communem angulum toti non habet, reliquum non efficit gnomonem. Vt itaque ſanior ſit huius ſententia, diximus præter Theonem & Campanum, auferendum parallelogrammum vt gnomonem relinquat, communem angulum cum toto efficere. Quia verò hæc parallelogrammi circa dimetientem ad angulum communem conſtitutio, pluribus ſexti & ſequentium demonſtrationibus inſeruiet, vtile fuit hoc prælibare, vt cùm poſtmodum de conſtitutione parallelogrammi circa dimetientem loquemur, angulum cum toto communem efficere neceſſariò, tum ſimiliter eſſe poſitum intelligemus.

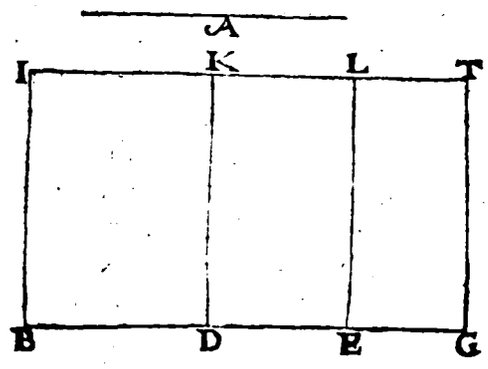


PROPOSITIO I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, quarum altera in quotcunque ſegmenta ſecetur, rectangulũ comprehẽſum ſub duabus, æquum

eſt

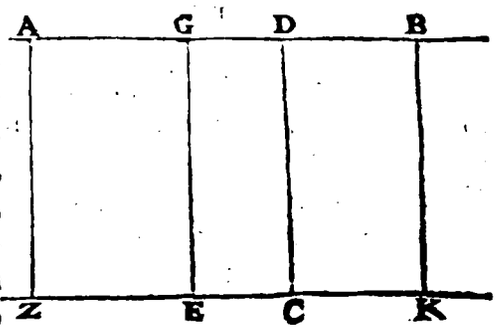
est eis quæ ab insecta & quolibet alterius segmento rectangulis continentur.



Exponantur duæ rectæ A & BG, quarum BG, secetur in D, & E: Dico rectangulum comprehensum sub A latitudine, & BG longitudine, vel contrà, æquum esse rectangulis simul sumptis, sub A & BD, sub A & DE, sub A & EG. Ad rectam BG perpendicularis excitetur BI, quæ æqualis ponatur ipsi A, rectæq; BG, parallela sit IT, per 31 primi. Ipsi verò IB parallelæ sint GT, DK, EL, rectangulum erit BT, per 34 primi, rectus est enim angulus IBD, itaque & reliqui. Cùm enim parallelæ sint IB, DK, EL, GT, per constructionem, similiter & BG, IT, parallelogrammum erit (per 36 diffinitionem primi) BK, sub BI, BD contentum, & rectangulum. Nam in parallelas BI, DK, cadens BD, angulos IBD, BDK binis rectis æquos efficit, per 29 primi. Rectus autem est IBD, & reliqui igitur oppositi recti (per 34 primi) fient. Quare rectangulum erit DL sub DK, DE, & rectangulum ET sub EL, EG comprehensa: Atqui ipsi A æqualis est BI, cui æquales ponuntur DK & EL, per 34 primi. Tria igitur rectangula BK, DL, & ET, sub A recta & quolibet segmento BD, DE, & EG continentur. Quia verò efficiunt totum rectangulum BT, sequetur, quod sub duabus A & BG rectangulum, æquum esse eis simul sumptis, quæ fiunt ab A insecta & quolibet segmento, scilicet BD, DE, EG. Si itaque fuerint duæ rectæ, &c.

PROPOSITIO II.

Si recta linea secetur vtcunque, quæ sub tota & quolibet segmentorum cõprehenduntur rectangula, æqualia sunt ei quod ex tota fit quadrato.



Secetur recta AB, vtcunque in G & D: Dico rectangula sub tota AB & quolibet AG, GD, & DB segmentorum simul sumpta æqualia esse ei quod fit ex tota AB quadrato. Ipsi AB perpendicularis & æqualis fiat AZ, perfecto ABKZ rectangulo. Ipsis porrò AZ, BK parallelæ fiant per G & D signa (ex 31 primi) rectæ GE, DC. quadratum erit AK cùm sint æquales AB & AZ. Rectangula verò erunt AE, GC, & DK, quæ sub tota AB (hoc est AZ) & quolibet segmentorũ AG, GD, DB, contenta scilicet AGEZ, GDCE, & DBKC quadratum AK, quod scilicet ex tota constituunt. Si itaque recta linea AB secetur vtcunque in G & D, quæ sub tota AB (vel AZ) & quolibet segmentorum AG, GD, DB comprehenduntur rectangula, æqualia sunt ei, quod ex tota AB fit quadrato, scilicet ipsi ABKZ. Huius breuior ex prima fiet demonstratio: quia AB, AZ sunt duæ rectæ, quarum altera AB vtcunque secatur. Et ideo rectangulum sub binis AB, AZ (hoc est quadratum ex AB) æquum est eis, quæ à tota AZ insecta, & quolibet segmentorum fiunt rectangulis AE, GC, & DK.

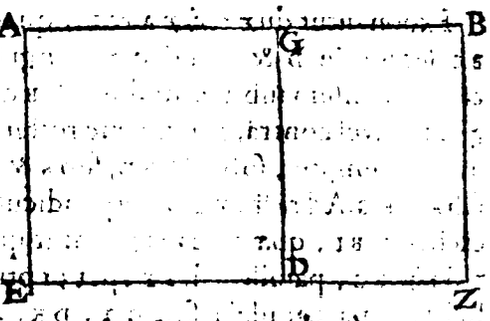
PROPOSITIO III.

Si recta linea secetur in signo, rectangulum sub tota & altero segmentorum comprehensum, æquum est ei quod sub segmen

tis comp

comprehendatur rectangulo & ei quod ex prædicto segmento fit quadrato.

Proponatur recta linea AB secta in signo G: Dico rectangulum sub ABAG comprehensum, æquum esse rectangulo sub AG, GB comprehenso, vnà cum quadrato rectæ AG. Ex AG quadratum describatur (per 46 primi) AGDE, & perficiatur rectangulum GZ, quoniam æqualis est AE ipsi AG, rectangulum sub AB, AG erit AZ. Nam recta est tota EDZ, per 30 primi: quia verò æqualis est GD, ipsi AG, rectangulum GZ erit sub segmentis AG, GB. quod vnà cum quadrato ex AG, hoc est, AD, efficit rectangulum AZ quod sub tota & AG priori segmento. Si itaque recta linea secetur in signo rectangulum sub tota, &c.



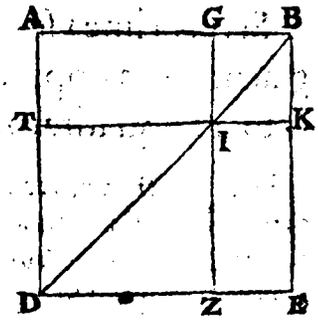
MONITVM.

Dixerat Theon rectam lineam secandam (vtcunque) quod transtulimus in has voces (in signo) ne rectam pluribus signis secare volentes, aliqui huic demonstrandæ impingerent. Quod idem in sequente obseruabimus.

PROPOSITIO IIII.

Si recta linea secetur in signo, quadratum quod fit ex tota, æquum est quadratis quæ fiunt ex segmentis, & ei quod bis sub segmentis continetur rectangulo.

Recta AB secetur in signo G: ex AB verò fiat quadratū (per 46 primi) ABED: Dico ABED æquum esse quadratis ex AG & ex GB, simulac rectangulo bis sumpto sub AG, GB segmentis. Ipsi GB æqualis ponatur BK. Per signum G ipsis AD BE parallela ducatur GZ, ipsis verò AB DE parallela sit TK, per 31 primi. Quoniam parallelę sunt omnes oppositę rectę, parallelogramma sunt GK, TZ, AI, IE, per 36 diffinit. primi. Cùm autem angulum communem habeant singula cum quadrato ABED, ipsa rectangula erunt, per primam diffinitionem huius. Cæterùm cùm æqualis sit BK ipsi GB, & AB rectæ BE, reliqua KE ipsi AG, æqualis erit, per 2 communem sententiam, eisdémque æquales erunt TI, IZ, TD, DZ, opposita latera, per 34 primi. Quadratum igitur erit GK ex recta BG, quadratum item TZ ex recta AG. Quia verò rectis GB & BK, æquales sunt AT & ZE, rectangula AI, IE sub rectis AG, GB (hoc est AG, GI, & EK, KI) contineri bis dicentur. Sed quadratum ex AB tota, hoc est ABED æquum est quadratis AG, GB, hoc est TZ & GK, & rectangulo bis sub AG, GB hoc est AI & IE supplementis. Si itaque recta linea secetur in signo, quadratum, &c.

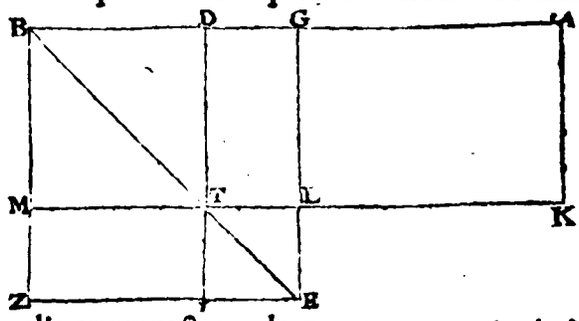


PROPOSITIO V.

Si recta linea secetur in signo bifariam, & alio signo per inæqualia, rectangulum comprehensum sub inæqualibus segmentis totius, vna cum quadrato eius quæ inter sectiones est, æquū est ei quod à dimidia fit quadrato.

Proponatur recta linea AB, secta bifariam in G, inæqualiter autem in D. Ex dimidia verò (per 46 primi) quadratum describatur, BGEZ, ipsi BD æqualis ponatur BM, perficiatúrque rectangulum BMKA parallelogrammum, per signum D rectis

rectis B Z G E (per 31 primi) parallela fiat D T I: Dico rectangulum comprehensum sub A D D B cum quadrato D G, æquum esse quadrato B E quod à dimidia B G: cùm binę D B B G binis B M B Z sint ęquales, reliquę D G M Z erunt æquales, quare & eis oppositę T L T I æquales erunt, per 34 primi. Nam parallelogramma sunt M D I L G T T Z, per 36 diff. primi. Quadratum igitur erit L I ex recta D G. Quia insuper binæ B Z B D binis B G B M fuerunt



æquales, quadratum erit D M, ac æqualia erunt rectangula B L B I, per 36 primi. Ipsi verò B L æquum est G K, per eandem: æqualia itaque erunt G K & B I: commune addatur D L. Rectangulum D K æquum erit gnomoni L B B I, ipsis rursus commune addatur I L, rectangulum D K cum quadrato I L, æquum erit eidem gnomoni & quadrato I L, hoc est toti quadrato ex B G. Sed D K est quod sub A D D B inæqualibus segmentis, cùm B T sit quadratum. I L verò est quadratum rectæ D G quæ inter sectiones est. Rectangulum itaque comprehensum sub B D D A inæqualibus segmentis, hoc est D K, vna cum quadrato rectæ D G quæ inter sectiones est, nempe I L, æquum est quadrato G Z quod à media B G. Si igitur recta linea secetur in signo bifariam & alio signo per inæqualia, &c.

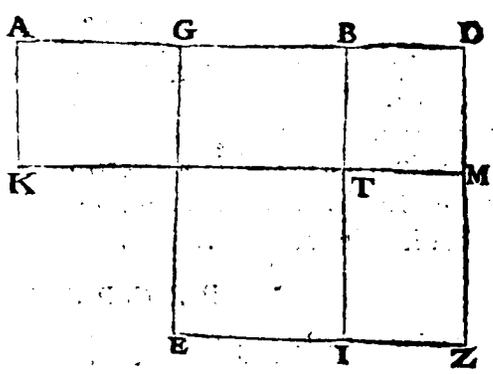
MONITVM.

Mutare cogimur aliquas demonstrandi rationes, eò quòd Theon prolixior fuerit quintam demonstrans vt inde corollarium eliceret, quo hanc demonstraret: scilicet in quadratis, quæ circa dimetientem, quadrata esse. Nos autẽ absque his compendio rem exposuimus. Insuper hanc rectam A B in signo, ac alio signo diximus secandam in æquales & inæquales partes indefinitè, ne decidat demonstratio, si in quotuis partes secandam esse putaremus.

PROPOSITIO VI.

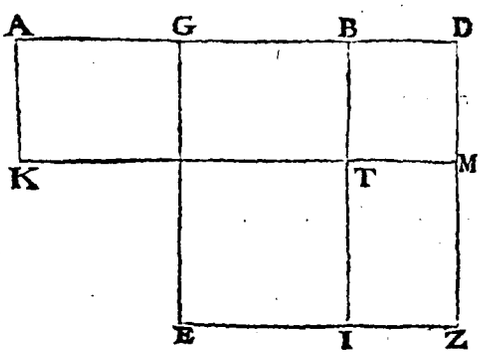
Si recta linea bifariam secetur, adiciatúrque ei alia recta in rectum, quod sub tota cum apposita & apposita comprehensum rectangulum, vna cum quadrato quod fit à dimidia, æquum est ei quod fit ex dimidia & apposita tanquam ex vna, descripto quadrato.

Sit recta A B bifariam secta per G, adiiciatur autem ei quæpiam alia B D in rectum: Dico quòd sub tota cum apposita A B D & apposita B D rectangulum, vnà cum quadrato ex dimidia G B, æquum esse quadrato quod fit ex dimidia G B & apposita B D, tanquam ex vnica G D descripto. Describatur (per 46 primi) ex G D quadratum G E Z D, ipsi verò D B appositę æqualis ponatur D M: Per signum verò M vtrisque A D E Z parallela ducatur K M. Per signum item B binis G E D Z parallelæ sint B T I & A K per 31 primi. Cùm enim rectæ B D æqualis posita sit D M, quadratúmque sit G Z, reliqua B G reliquæ M Z æqualis erit, & proinde oppositæ E L eisdem ac T L T I æquales (per 34 primi) erunt. Quadrata igitur erunt B M L I per eandem, cùm angulos D & E rectos habeant ex hypothesi. Atque rectangula T Z T G sub eorundem quadratorum lateribus comprehensa, æqualia erunt adinuicem. Sed ipsi G T



d æquale

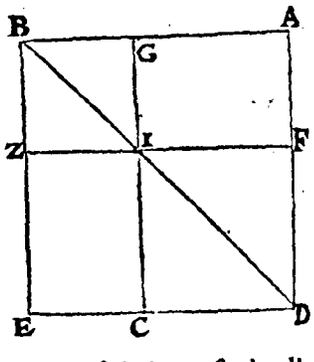
æquale eſt (per 36 primi) AL, igitur reliquo TZ æquabitur idem AL. Commune addatur GM, tum erit æquale rectangulum AM gnomoni GMMI. Vtriſque porrò addatur commune quadratum ex GB, hoc eſt LI ex LT, ipſi GB æquali, factum. Rectangulum AM ſub tota AB cum appoſita BD, & appoſita BD, hoc eſt DM comprehenſum, vnà cum quadrato LI, ex GB, dimidia æquum erit quadrato GZ, quod fit à dimidia GB & BD appoſita, tanquam ex vna deſcripto. Si itaque recta linea biſariam ſecetur, adiiciatúrque alia recta, &c.



PROPOSITIO VII.

Si recta linea ſecetur in ſigno, quæ ex tota & quouis ſegmentorum coniuncta fiunt quadrata, æqualia ſunt rectangulo bis comprehenſo ſub tota & dicto ſegmento, & ei quod à reliquo ſegmento fit quadrato.

Secetur recta AB in ſigno G: Dico quòd ex tota AB & quouis ſegmentorum BG ſimul ſumpta bina quadrata, æquari rectangulo bis ſumpto ſub AB BG, & ei quadrato quod fit ex reliquo AG ſegmento. Deſcribatur ex AB quadratum ABED, per 46 primi, ipſiq; BG æqualis ponatur BZ, per ſignum G binis AD BE parallela fiat GC, per ſignum verò Z vtriſque AB DE parallela ſit ZIF: patebit per præcedentia quadrata eſſe GZ quidem ex BG, & FC ex AG. Et inſuper rectangulum BF contineri ſub AB BG, hoc eſt BZ ſibi æquali poſita, ſimiliter & rectangulum BC, quæ quidem rectangula cum quadrato FC, quod ſcilicet fit à reliquo ſegmento AG (hoc eſt FI) ſibi æquali, idem componunt quod quadratum BD, quod ex tota AB, & aliud GZ quòd ex vno ſegmentorum GB. Quæ igitur ex tota AB, ſcilicet quadratum BD, & ex BG ſcilicet GZ, ſimul ſumpta, æqualia ſunt rectangulo ſub AB BG bis ſumpto, hoc eſt ipſis BF BC & ei FC quadrato, quod fit à reliquo ſegmento AG. Nam bina BF BC excedunt gnomonem FGE, quadrato GZ. Si igitur recta linea ſecetur in ſigno, quæ ex tota & quouis ſegmentorum coniuncta quadrata, &c.



COROLLARIVM.

Duarum inæqualium linearum quadrata, excedunt rectangula bis ſub ipſis contenta, quadrato exceſſus quo maior excedit minorem.

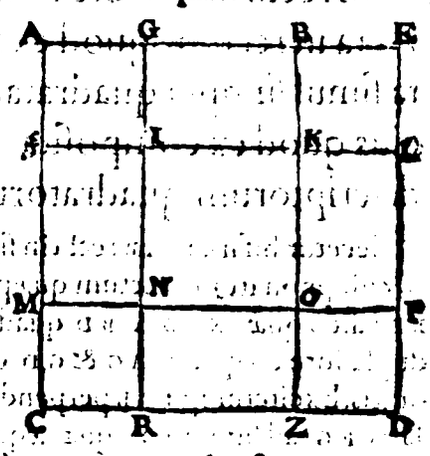
Nam ſi AB ſit maior, BG verò minor, patet quadrata ex AB BG æqualia eſſe rectangulo bis ſub AB BG contento, & inſuper quadrato ipſius AG exceſſus quo AB excedit minorem BG.

PROPOSITIO VIII.

Si recta linea ſecetur in ſigno, rectangulum comprehenſum quater ſub tota, & quouis ſegmentorum, cum eo quod ex reliquo ſegmento fit quadrato, æquum eſt ei quod fit ex tota, & priori ſegmento (tanquam ab vna deſcripto) quadrato.

Recta linea AB ſecetur in ſigno G, adiiciatur autem ei in rectum æqualis cuiuis ſegmentorum, ſitq; BE æqualis ipſi AG: Dico rectangulum ſub AB AG quater ſumptum,

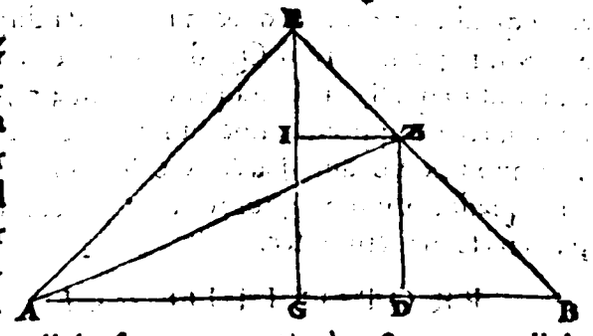
ſumptum, eum quadrato reliqui ſegmenti G B, æquum eſſe quadrato quod fit ex A E compoſita, ſcilicet ex tota A B & priori ſegmento A G cui æquatur F S. Deſcribatur ex tota A E quadratum (per 46 primi) A C D E, ipſi A G æquales ponantur A F & C M, reliqua igitur F M ipſi G B æqualis erit, per 3 commu. ſenten. Per ſigna G & B parallelę ipſis A C E D ponantur (per 31 primi) G R B S: reliquis autem A E C D per ſigna F & M parallelæ ſint F I K L & M N O P. Quoniam quadratum eſt A D, rectangula erũt per 34 primi, F B & F R. Et cum A G G B ipſis A F F M ſint æquales, ea quæ ſub ipſis æqualia erunt æquis lateribus comprehenſa, per 36 primi, ſed F B ſub A B A G (hoc eſt F A) cõtinetur, & F R ſub eadem laterum quantitate: Similiter R B & P B eiſdem F B F R oſtendentur æqualia. Cùm autem æquales ſint A B, I K, & G B I K æquales erunt, ſimiliter & reliquæ I N N O O K, eidem B G æquales erunt. Angulus autem F I R rectus eſt. Reliquus itaque R I K rectus erit, per 13 primi, ſimiliter & reliqui quadranguli I N O K, quod igitur quadratum erit, & ex reliquo ſegmento G B productum. Quod itaque quæritur ſub A B A G comprehenſum, hoc A K B P P R R F, cum quadrato reliqui ſegmenti G B, hoc eſt I N O K, æquum eſt ei quod fit ex tota A B, & priori ſegmento A G vel B E, tanquam ab vna ſcilicet ex tota A E quadrato A D. Si igitur recta linea ſecetur in ſigno, &c.



PROPOSITIO IX.

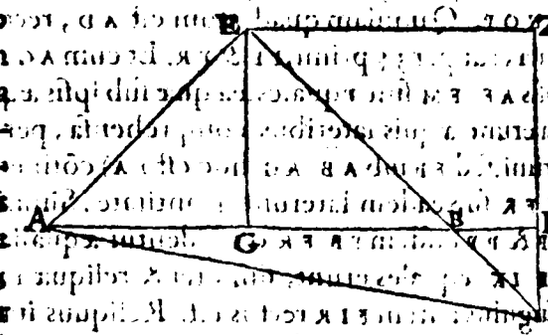
Si recta linea ſecetur bifariã, & per inęqualia, quę ab inæqualibus ſegmentis totius fiunt quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod ab ea quæ inter ſectiones eſt quadratorum.

Secetur bifariam recta A B in G, & inæqualiter in D: Dico quadrata inæqualium A D D B dupla eſſe quadrati dimidiæ A G, & eius quę inter ſectiones eſt, ſcilicet G D. Ipſi A B, ad ſignum G perpendiculatis excitetur G E, quæ quidẽ æqualis ponatur alteri rectarum A G G B. Cõiunctis autem A E, E B, per ſignum D ipſi G E parallela fiat D Z; per Z verò rectæ G D parallela ſit I Z, per 31 primi, ducta A Z. Quoniã æquales ſunt G A G E G B rectæ, qui ad baſes anguli ſunt æquales, per 5 primi, ſcilicet G A E G E A G E B G B E. Cùm autem A G E rectus ſit, reliqui G E A, G A E dimidij recti vnius erunt, per ſecundam partem 32 primi: rectus igitur erit A E B angulus. Cùm enim in parallelas E G Z D cadat B E, anguli D Z B & I E Z (per 29 primi) æquales erũt. Similiter & E Z I ipſi Z B D, cùm in parallelas G B, I Z cadat B E. Sed eidẽ Z B D æquus fuit I E Z: itaq; bini I Z E & I E Z æquales erunt, ſimiliter & reliqui D Z B, D B Z. Duo igitur latera trianguli E I Z, ſcilicet I E, I Z æqualia erũt: ſimiliter D Z, D B triãguli Z B D, per 6 primi: æquales verò ſunt I Z & G D, per 34 primi, cum parallelogrammum ſit I D, per 36 diffinit. primi. Quoniã igitur æquales ſunt A G, G E, quadratum rectæ A E duplum erit quadrati rectæ A G, per 47 primi: ſimiliter quadratum E Z, duplũ quadrati I Z ſiue rectæ G D, per eandẽ: ſed quadratis A E & E Z æquum eſt (per eandẽ) quadratũ rectæ A Z, cùm ſit rectus A E Z oſtenſus. Quadratum itaq; A Z duplum eſt quadratorum A G & G D: quadrato autem A Z æqualia ſunt quæ ex A D & D Z, vel D B ſibi æquali, quadrata, per 47 primi, cum rectus ſit Z D G angulus. Ipſa igitur ex A D, D B inæqualibus ſegmentis, dupla ſunt quadratorum ex A G dimidia & G D quæ inter ſectiones eſt. Si itaque recta linea ſecetur bifariam, & per inæqualia, &c.



PROPOSITIO X.

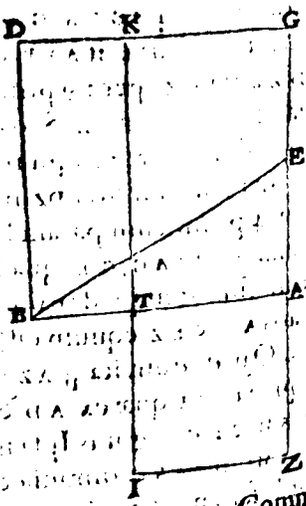
Si recta linea secetur bifariam, apponatur autem ei quæpiam recta in rectum: quod ex tota cum apposita & quod ex apposita simul sumpta quadrata, dupla sunt eius quod ex dimidia & eius quod ex composita ex dimidia & apposita tanquam vna, descriptorum quadratorum.



Secetur bifariam AB recta in signo G, cui apponatur in rectum quæpiam BD: dico quæ ex AD & BD quadrata dupla fore eis quæ ex AG & GD quadratis. Excitetur ipsi AB perpendicularis EG, ad signum G, quæ æqualis ponatur rectæ AG vel GB: parallelæ ducantur seilicet DZ ipsi GE, & EZ, ipsi BD, per 31 primi. Extendatur autem ZE in I, & æqualis sit EI ipsi DB, coniunctis AE; EB, & AI rectis. Quoniam parallelogrammi GZ, latus ZD ipsi GE, per 34 primi, est æquale: GE verò ipsi GB, sed & DI, ipsi DB, tota igitur ZI toti GD æqualis erit: & proinde ipsi EZ ex opposito. Quod igitur ex EI quadratum duplum erit quadrati EZ vel ED, per 47 primi. Nam angulus Z oppositus ipsi EGB rectus est, per 34 primi. Similiter quod ex AB quadratum duplum est (per 47 primi) quadrati ex AG. Cum autem angulus AEG sit rectus, dimidius, similiter & AEG, per secundam partem 32 primi, totus AEI rectus erit. Quia verò in parallelas GD EB cadit IZ, angulus ADI interiori & opposito EZD recto æquus erit, per 29 primi, & itaq; rectus erit ADI. Quadratis igitur ex AE & EI æquum erit quadratum ex AI, per 47 primi. Sed cum dupla sint ex AE & EI quadratorum ex AG & GD ostensa, duplum erit quod ex AI eorum quæ ex AG & GD quadratorum. Quadrato autē ex AI æqualia sunt quæ ex AD & DI (hoc est DB sibi æquali) quadrata, per eandem 47 primi. Quæ itaque ex AD tota cum apposita & DB apposita, hoc est DI, sibi æquali, simul sumpta quadrata, dupla sunt eius quod ex AG dimidia, & ex GD dimidia & apposita tanquam vna descriptorum quadratorum. Si igitur recta linea secetur bifariam, apponatur autem ei quæpiam recta in rectum, &c.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA.

Datam rectam lineam terminatam ita secare, vt quod sub tota & altero segmento comprehensum rectangulum, æquum sit ei quod fit ex reliquo segmento quadrato.

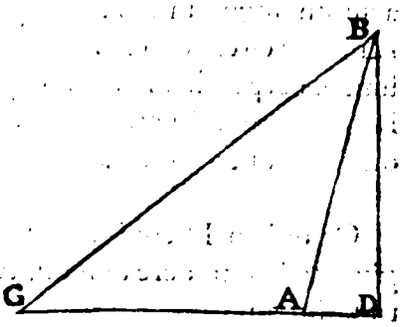


Sit data AB recta, ex qua (per 46 primi) fiat quadratum ABDC, cuius vnum latus AG bifariam secetur in E, coniuncta EB, extendatur EA in Z, & ponatur æqualis ipsi EB recta EZ: ex AZ verò describatur quadratum AZIT & producatur IT in K: Dico AB rectam ita sectam esse in T vt propositum fuit. Cum enim AG bifariam secetur in E, ipsi autem AG quæpiam AZ in rectum apponitur, rectangulum sub GZ, ZA comprehensum vna cum quadrato ex AE, æquum erit quadrato ex EZ, per 6 huius, hoc est quadrato ex EB sibi æquali. Sed quadratum ex EB eis quæ ex AB AE (per 47 primi) æquum est. Quod itaque sub GZ, ZA vnà cum quadrato ex AE, æquum est quadrato ex AB & quadrato ex

A E. Commune autem tollatur ex A E quadratum, ſequetur rectangulum B K quadrato A D æquum eſſe. A quibus rurſus commune auferatur rectangulum A K. Reliqua, ſcilicet rectangulum B K quadrato A I æquale erit. Sed rectangulum B K ſub B D, hoc eſt A B tota, & T B altero ſegmento cõprehenditur, & quadratum A I fit ex A T reliquo ſegmento. Nam B D, æqualis eſt ipſi A B, toti. Datam itaque rectam A B ita ſecamus in T, vt quod ſub tota A B & altero ſegmento B I comprehenſum B K æquum ſit ei quod fit ex reliquo ſegmento A T, quadrato A I, vt fuit poſtulatum.

PROPOSITIO XII.

In amblygoniis triangulis, quadratum quod fit à latere obtuſum angulum ſubtendente, maius eſt eis quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus quadratis, rectangulo bis comprehenſo ſub vno eorum quæ ſunt circa obtuſum angulum, & ſibi in rectum appoſita linea, inter obtuſum angulum & perpendicularem à reliquo oppoſito angulo ſibi demiſſam.



Eſto amblygonium triãgulum A B G, habens angulum A obtuſum, latus verò ſubtendens illum ſit B G. Vnum autem eorum quæ ſunt circa obtuſum angulum, ſit latus G A, in quod productum à ſigno B cadat perpendicularis B D, per 12 primi: Dico quadratum ex B G maius eſſe quadratis quæ fiunt ex G A A B, rectangulo bis comprehenſo ſub G A A D. Quoniam ſecta eſt G D in ſigno A, quadrata binarum G A A D cum rectangulo bis comprehenſo ſub ipſis G A A D, æquãtur quadrato totius G D, per 4 huius. Sed quod ex B G æquũ eſt ipſi ex G D quadrato, & ei quod ex D B, per 47 primi. Quod igitur ex B G æquũ erit tribus quadratis ex G A A D & D B, ac inſuper rectãgulo bis ſumpto ſub G A A D. Atqui A B quadratum ex his omnibus tãtùm ſumit quadrata A D D B, quibus æquale eſt, per 47 primi: G A verò ſui ipſius tantùm aufert quadratũ. Sequetur itaq; ex B G ſubtendente obtuſum angulũ quadratum excedere quadrata rectarum G A A B angulum obtuſum comprehendentium, eò quòd bis ſub vna earum G A quæ ſunt circa obtuſum angulum, G A & ſibi in rectum appoſita A D inter obtuſum angulum G A B, & perpendicularem D B à reliquo oppoſito angulo G B A ſibi demiſſam. In amblygoniis igitur triangulis quadratum quod fit à latere obtuſum angulum, &c.

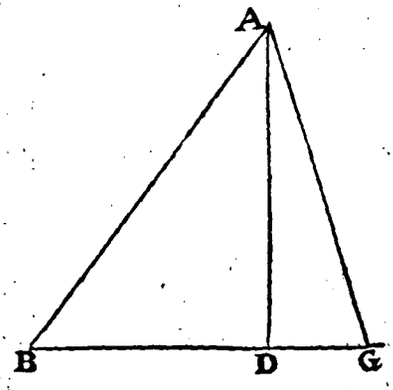
MONITVM.

Theorematis ordinem quodãmodo variauimus, eò quòd Campanus & Theon obſcurius diſcentibus tradiderint.

PROPOSITIO XIII.

In oxygoniis triangulis quod ex acutum angulum ſubtendente fit quadratum, minus eſt eis quæ ex acutum angulum comprehendentibus lateribus fiunt quadratis, rectangulo bis ſumpto ſub vno eorum quæ ſunt circa acutum angulum, & eius parte inter acutum angulum & perpendicularem ab oppoſito angulo ſibi demiſſam ſumpta.

Sit oxygonium triangulum A B G, cuius vnum acutorum angulorum ſubtendat A B, ſcilicet ipſum G. A ſigno autem A in oppoſitum latus B G (vnum quidem eorum quæ ſunt circa acutum angulum) demittatur perpendicularis A D: Dico quadratum lateris A B (angulum acutum G ſubtendentis) minus eſſe binis quadratis ex A G G B, rectangulo bis ſumpto ſub B G G D. Quoniam comparandę ſunt magnitudines quadratorum, ex A B ad quę ex A G & G B. Diſcamus prius quadratum rectæ A G (per 47 primi) æquum eſſe quadratis quæ fiunt ex A D, D G: his addamus quadratum ipſius G B, quod æquipollet (ſi quidē ei addamus quadratum D G) quadrato B D, & rectangulo bis ſumpto ſub B G, G D, per 7 huius. Binæ igitur A G, G B æquipollent (cum quadrato D G) quadratis B D, A D, & D G, & inſuper rectāgulo bis ſub B G, G D ſumpto. Ab his etenim auferamus quadratū D G, ipſis communē additū). Sequetur quadrata ex A G, G B, æquari quadratis ex A D, B D, ac inſuper rectangulo bis ſumpto ſub B G, G D. Atqui quod ex A B æquum eſt (per 47 primi) quadratis ex A D, B D, ſequetur itaque quod ex A B, ſubtendente angulum acutum G, minus eſſe binis quadratis, quæ ex A G, G B acutum angulum A G B comprehendentibus rectangulo bis ſumpto ſub vno eorum quæ circa acutum angulum, ſcilicet B G, & eius parte G D inter acutum angulum & perpendicularem ab oppoſito angulo A (ſcilicet A D) ſibi demiſſam ſumpta. In oxygoniis igitur triangulis, quod ex acutum angulum ſubtendente latere quadratum minus eſt, &c.



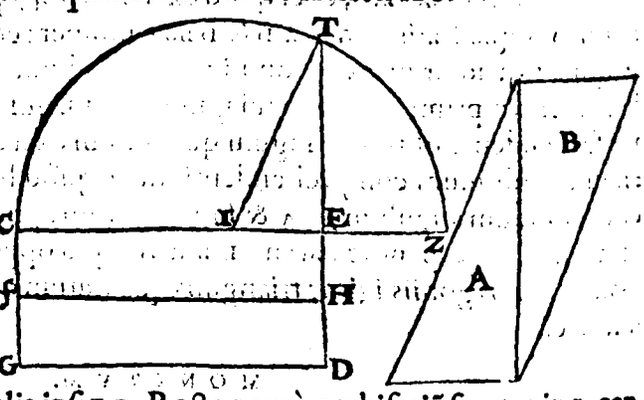
MONITVM.

Quoniam Theonis compendium potiuſquam demonſtret confundit hanc, cogimur aliam tradere non multò prolixiorem demonſtrationem eodem argumento ſuffultam.

PROPOSITIO XIIII. PROBLEMA 2.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.

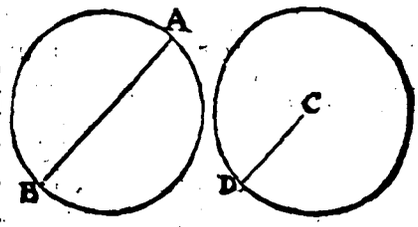
Sit datum rectilineū A B, cui æquum quadratum oporteat conſtituere. Conſtituātur binæ quæuis rectæ ad rectū angulum C G D, ad datam autem rectā G D, dato rectilineo A B C æquale parallelogrammū conſtituamus, angulo recto æqui angulum, per 45 primi, ſitq; C G D E. Extēdatur autem C E G in rectum, & ponatur E Z æqualis ipſi E D. Recta porrò C Z biſariā ſecetur in I, centro verò I interuallo I C vel I Z ſemicirculus ſit C T Z, & producatur D E verſus T cōiuncta T I. Quoniam enim recta C Z ſecta eſt biſariam in I, & per inæqualia in E; rectangulum cōprehenſum ſub inæqualibus C E & E Z, cum quadrato I E, quæ inter ſectiones eſt, æquum eſt ei quod à media C I (vel I T quæ ex centro) fit quadratō, per 5 huius. Sed ipſi ex I T quadrato æqualia ſunt ex T E & I E quadrata, per 47 primi, cùm ſit rectus T E I angulus. Quod igitur ſub C E E Z cum quadrato rectæ I E, æqualia erunt quadratis ex T E & I E. Commune auferatur quadratum ex I E, ſubeſt rectangulum ſub C E E Z æquum eſſe quadrato ex T E. Cùm enim E Z æqualis ſit ipſi E D, rectangulum ſub binis C E E Z idem erit cum rectangulo C G D. Rectangulo igitur C D æquale quadratum ex T E recta deſcriptum erit, & proinde dato rectilineo A B ipſi C D æquali poſito: Dato itaque rectilineo A B æquale quadratum conſtituimus ex T E recta.



EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER TERTIVS.

DIFFINITIO I.

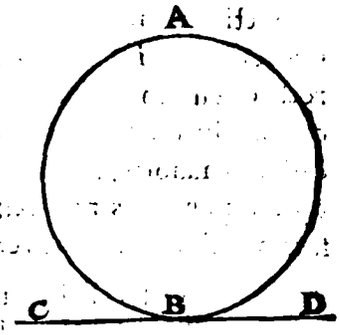
AEQVALES circuli ſunt quorum dimetientes, vel quæ ex eorum centris, ſunt æquales.



Æqualitatem circulorum A B & C D ideo ab æqualitate diametrorũ vel ſemidiametrorũ ſumit, quòd circulus vnica ſemidiametri reuolutione, manente vno eius extremo, deſcribatur. Quare ſi maior fuerit ſemidiameter, maior circulus deſcribetur, ſi minor minor, ſi æqualis æqualis. Si itaque æquales ſint quæ ex centro, neceſſarium erit circulos eſſe æquales. Nam ſi maior eſſet quæ ex centro, & circulus maior eſſet reliquo. Eadem enim comparatio ex integris diametris poteſt ſumi, non equidem poteſt dimidium augeri, ſine duplicis augmento.

DIFFINITIO II.

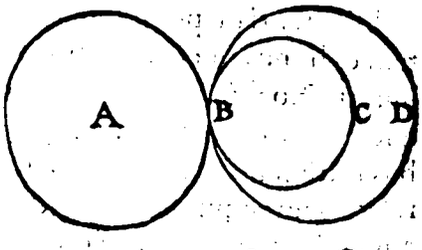
Recta linea circulum tangere dicitur, quæ circulum in plano tangens & vtrinque producta, circulum non ſecat.



Licet lineæ rectæ ad circuli circunferentiam plures poſſint incumbere inclinationum varietates, tamen eam ſolam lineæ inclinationem ad circunferentiam circulum tangere dicemus, quæ tangens & verſus contactum producta, circulum non ſecat, vt circulum A B tanget recta C B, eò quòd ea producta in D, circulum tangit in B, non tamen ſecat. Hæc eſt cuilibet circunferentiæ vnica inclinatio lineæ rectæ: nam reliquæ omnes inclinationes lineæ C B, immoto ſigno B circulum ſecabunt.

DIFFINITIO III.

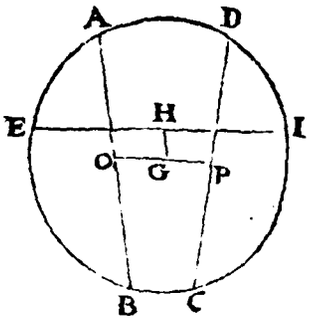
Circuli ſeſe adinuicem in plano tangere dicuntur, qui tangentes ſeſe inuicem non ſecant.



Idem in contactu circulorũ mutuo quod de lineæ ad circulum contactu dicit, vt circulus A B circulum B D tangere dicetur, eò quòd in ſigno B tantum concurrant, in eodem exiſtentes plano. Similiter B C ipſum B D tangere dicetur, eò quòd tangens non ſecat. Si enim ſeſe ſecarent, fieret ſuperficierum contactus, vel potius communitas, non tantum vnius ſigni. Quare circuli tactus ſolum vnicum commune admittit cum tangente ſignum, vt B.

DIFFINITIO IIII.

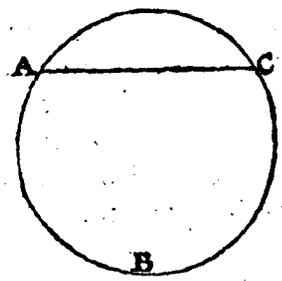
In circulo æquè, vel magis à centro rectæ lineæ distare dicuntur, cùm à centro in eas perpendiculares æquales vel maiores fuerint.



Distantiam siue latitudinem metitur Euclides per longitudinem rectæ lineæ rectos efficientis angulos ad propositam, vt in circulo A B C D infinitæ possunt describi lineæ, quarum vna æquè plus vel minus à centro distabit reliqua. Id tantùm intelligamus rectam distare magis, quæ maiorem, æquè autem quæ æqualem, à centro suscipiet demissam perpendicularem, vt A B æquè à centro G distat ipsi D C, eò quòd à centro G in eas perpendiculares G O G P sint æquales, magis verò distat eadem A B reliqua E I, quia in A B, maior cadit à centro perpendicularis G O, quàm in E I cadat G H. Similiter mensus est Euclides prima diffinitione secundi rectanguli latitudinem, per lineam quæ ad longitudinem efficit rectos angulos, vt ibi diximus. Quæ autem obliquum efficiunt angulum rectę huius mensuræ ob angulorum instabilitatem sunt incapaces.

DIFFINITIO V.

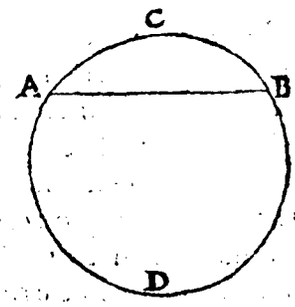
Sectio circuli est, figura sub recta linea & circuli circunferentiæ parte comprehensa.



Resumit hoc tertio Euclides sectionis circuli diffinitionem, 19 primi diffinitione expositam, vt facilius subsequantur proximæ diffinitiones. Quid scilicet sit sectionis & in sectione angulus. Quia verò 19 primi eam exposuimus, nulla (præter hæc) prolixitate vtemur.

DIFFINITIO VI.

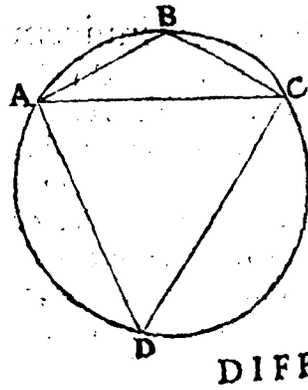
Sectionis autē angulus est, qui comprehenditur sub eadem recta linea, & circuli circunferentiæ parte.



Sectionis angulus dicitur, is quem efficit sectio sola, scilicet est ea inclinatio lineæ curuæ quam efficit cum recta circulum secante, vt C A curua ad A B rectam vel D B curuam in B A rectam, efficiunt angulum sectionis, hæ quidem maioris, illæ verò minoris sectionis. Variatur autem hic angulus per sectionum variationem, vt maior sectio maiorem, minor verò minorem efficiat angulum.

DIFFINITIO VII.

In sectione angulus est, qui continetur sub duabus rectis à finibus rectæ secantis ad aliquod circunferentiæ signum concurrentibus.



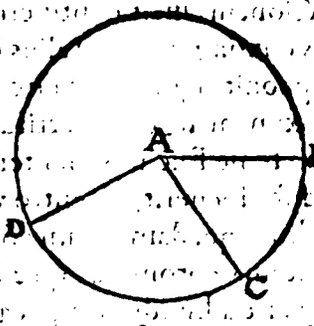
Differentiam ponit inter angulum sectionis præfatum & hunc, quem in sectione esse dicimus, eò quòd hunc sectio suscipiat, à limitibus rectæ A C secantis, in quoduis circunferentiæ A B C signum, à concurrentibus rectis A B & C B comprehensum. Similiter in maiori sectione reliquus A D C dicetur angulus, hi equidem anguli iuxta sectionum varietatem reciprocè variantur vt maior sectio minorem, minor verò maiorem concipiat angulum.

DIFFI

DIFFINITIO VIII.

Cùm verò continentes angulum à centro rectæ, aliquam ſuſcipiunt circunferentiam, in illa anguli magnitudo eſſe dicitur.

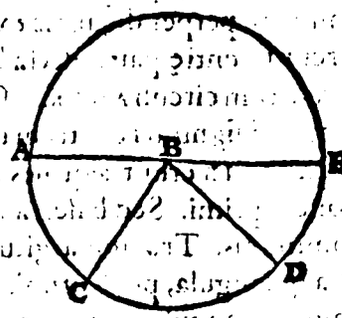
Tres angulorum ſpecies diffinit, ſcilicet ſectionis, & in ſectione angulum, in circunferentia cõſtitutos, hunc verò in centro circuli exiſtentem, diffinit quo pacto anguli dicatur magnitudo, quæ circunferentiam circuli vnicam recipit ſuæ quantitatis comitem, eam ſcilicet quam ſuſcipiunt rectæ angulum in centro conſtituentes, vt angulus B A D tanto maior angulo B A C dicetur, quanto circunferentia B C D ab eo ſuſcepta, maior erit reliqua B C à minori angulo B A C ſuſcepta. In his etenim angulis angulorum differentiæ, differentiam ſuſceptarum circunferentiarum ſequuntur, quod ſecus eſt in proximè diffinitis, ſectionis ſcilicet & in ſectione, quæ quidem, licet ſequantur ſectionum exceſſum, non tamen exceſſus differentiam. Anguli itaque magnitudo ea erit quæ per circunferentiæ ſuſceptæ exprimetur magnitudinem, vt perfectè docebimus 23 ſexti theoremate.



DIFFINITIO IX.

Sector autem circuli eſt, figura contenta ſub duabus in centro rectis angulum conſtituentibus, & circunferentia ab eis ſumpta.

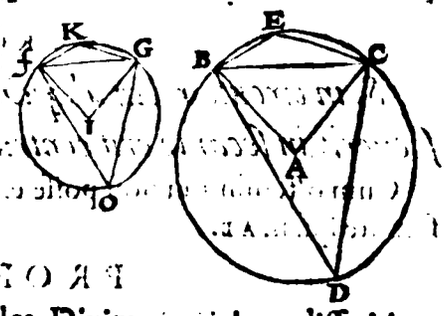
Huius & præcedentis veram demonſtrabit intelligentia 33 ſexti. Nam ſector circuli nihil aliud eſt quàm figura ſiue pars ea circuli, quam ſuſcipiunt rectæ in centro angulum conſtituentes, & ab eis circunferentia ſuſcepta, vt trigonus A B C vel A B D. Qui quidem ſector ſemper ſemicirculo minor exhibetur, alias ſi ſcilicet æqualis aut ipſo maior eſſet, nulla fieret ad eas partes linearum A B D ſ inclinatio, nec proinde angulus vt A B E D C, comprehenſus ſub dimetiente A E & ſemicircunferentia A C D E, hic quoque ſector ſequetur circunferentiarum ſuſceptarum differentias, quemadmodum & angulus, vt exponet eadem 33 ſexti.



DIFFINITIO X.

Similes ſectiones circuli, ſunt quę angulos æquos ſucipiunt, vel in quibus anguli inuicem ſunt æquales.

Similes ſectiones bitariam diffinit, prius quidem eas quæ angulos æquos ſuſcipiunt, ſcilicet primum angulos ſectionis ex diffinitione 6 à circunferentia & ſubtendẽte interceptos: vel à centro circuli ſectionem capientes: vt cùm anguli B A C & F I G æquales erunt, tunc ſectiones B C E & F G K ſimiles dicentur eſſe, ſiue B D C & F O G ſuſcipientes ſimiles erunt. Secundò autem diffinit ſimiles ſectiones in quibus anguli erunt æquales. Diximus etenim 7 diffinitione, quis ſit in ſectione angulus, eius namque ad alterum æqualitas, ſectionum ſimilitudinem pronunciat, ſiue inter æquales vel inæquales circulos reperiatur, vt cùm in ſectionibus F G K, B C E anguli F K G, B E C fuerint æquales, ſectiones illæ ſimiles erunt, ſimilites & reliquæ F G O & B C D, cùm anguli F O G & B D C fuerint æquales, in quouis circunferentiæ ſigno exiſtant.

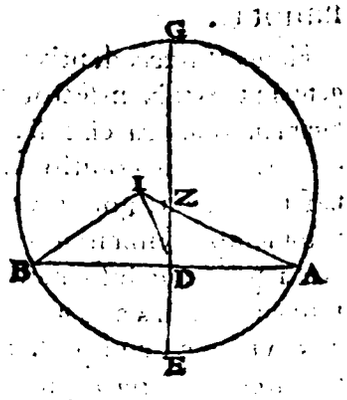


MONITVM AD DIFFINITIONES.

Secunda diffinitione diximus lineæ ad circulum contactum in eodem fieri plano. Reliquis diffinitionibus aliqua transtulimus, maximè sexta, qua diximus angulum sectionis eadem recta quæ circulum secat, & eadem circunferentiæ parte quæ sectionem efficit, contineri; ne intelligatur sub recta & circuli circunferentia angulus contingentiæ vel alius quilibet ab hoc angulo. Et insuper octaua per quã Theon supponit angulum in circunferentia fieri. Campanus verò eundem in certo, quod maximam arguit incertitudinem huius intelligentiæ. Quare existimantes eam non fuisse Euclidis mentem, cùm iam quę ad angulos in circunferentia expectant 7 diffi. docuerit, in centro verò satis docebit 9 diffinit. Sed quæ angulorum magnitudines quadam earum cõmuni habitudine patefaceret, per circunferentiæ quantitatem deprompta, quæ vnica angulorum respectus siue quantitates lucidius & præcisè admodum explicat; hanc anguli magnitudinem à circunferentia contineri diximus, non angulum. Circunferentia etenim angulum in centro constitutum continere nõ posset, sed anguli magnitudinem ea necessariò metietur & sola. Eius namque augmentum vel decrementum, semper cum augmẽto anguli vel eiusdem decremento, idem esse reperitur, vt docebimus 33 sexti, fauente supremo artium moderatore. Quę autem præter hæc mutauimus pauca sunt ob faciliorem circulorum intelligentiam.

PROPOSITIO I. PROBLEMA I.

Dati circuli centrum inuenire.



In dato circulo A G B E, producatur contingens aliqua recta A B, quæ secetur bifariam in D, eíque per signum D perpendicularis excitetur G E, ad vtrasque circunferentię partes: secta bifariam G E in Z, dico esse Z centrum circuli A G B E. Quod si non sit, supponatur aliud signum I centrum esse coniunctis I A, I D, I B, rectæ I A, I B prunt æquales adinuicem, per 15 diffinitionem primi. Sed bases A D, B D sunt æquales, & I D communis. Triangula igitur I A D, I D B sunt æqualia, & æquiangula, per 8 primi. Æqualis igitur erit I D B angulus, angulo I D A, per eandem: rectus igitur erit vterque, per 10 diffinitionem primi. Atqui I D B rectus minor G D B recto esset, I D A verò rectus maior G D A recto, contra decimam communem sententiam, quòd est absurdum. Non itaque extra rectam G E, potest supponi centrum. siquidem supponatur in recta G E aliud quàm Z signum, ab eo signo ad G & E ductę rectæ inæquales essent, quod per 15. diffinitionem fieri non potest. Dati itaque circuli A G B E, centrum Z inuenimus.

COROLLARIVM.

Si in circulo, recta aliquam rectam bifariam & ad angulos rectos secuerit, in secante erit centrum circuli.

Cùm ostensum sit non posse esse alibi quàm in recta G E, bifariam & ad rectos secante ipsam A B.

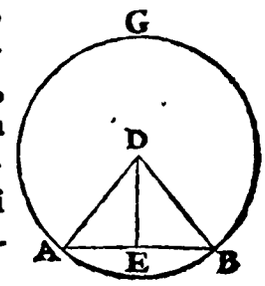
PROPOSITIO II.

Si in circuli circunferentia duo signa vtcunque sumantur, ea coniungens recta intra circulum cadit.

In circunferentia circuli A B C, duo vtcunq; signa A, B, sumpiantur, quę coniungat recta A B: Dico eam rectam intra circulum cadere. Circuli A B G (per præsatam) centrum sit D, coniunctis D A, D B, angulus verò A D B bifariam secetur ducta D E,

per

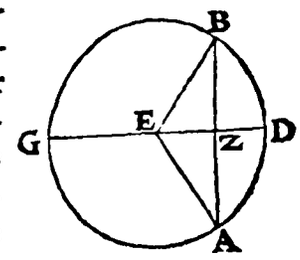
per 9 primi: quoniam enim binæ D A, D E, binis D B, D E, & angulus A D E angulo B D E, ſunt æquales, triangulorum D A E & D B E anguli D E B, D E A (æquis lateribus ſubtenſi) æquales erunt, per 4 primi. Recti igitur erunt, per 10 diffinitionem primi, maior ideo erit D E B angulus angulo D B E, per 17 primi. Maius itaque erit latus D B latere D E, per 19 primi. ſed D B eſt ex centro, recta igitur D E minor ea quæ ex centro, intra circulum cadit. Nam ſi extra caderet, eſſet maior. Si verò in circunferentia, æqualis, per 15 diffinit. primi, & proinde recta A E B intus cadit. Si igitur in circuli circunferentia duo ſigna, &c.



PROPOSITIO III.

Si in circulo recta per centrum extenſa, rectam per centrum non extenſam bifariam ſecuerit, ad angulos rectos eam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, & bifariam ſecabit.

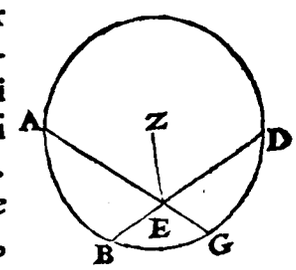
In circulo A B G D, recta G D per centrum E extenſa, rectam B A non per centrum extenſam bifariam in Z ſecet: Dico G D ad angulos rectos ſecare rectam A B: coniungantur E A, E B rectæ. Cùm enim æquales ſint rectæ Z B, E Z, rectis Z A E Z, & quę à cẽtro baſis B E baſi A E, angulus E Z B angulo A Z E æquus erit, per 8 primi. Rectus erit igitur vterque G Z B & G Z A, per 10 diffinitionem primi. Recta itaque G D reliquam A B ad rectos ſecat. Ad ſecundum autem, ſecet eam ad rectos: Dico G D bifariam ſecare rectam A B. Nam trianguli A E B qui ad baſin anguli E B A E A B, ſunt (per 5 primi) æquales. Sed E Z A & E Z B ſunt (per hypotheſim) æquales. Reliquus igitur reliquo (per 26 primi) & latus A Z ipſi B Z triangulorum E B Z & E A Z æqualia erunt. Recta itaque G D rectam A B in Z ſecat bifariam. Si igitur in circulo recta per centrum extenſa, rectam, &c.



PROPOSITIO IIII.

Si in circulo binæ rectæ non per centrum extenſæ ſeſe inuicem ſecuerint, ſeſe bifariam non ſecabunt.

In circulo A B G D binæ rectæ appoſitæ A G B D non per centrum extentæ ſeſe inuicem ſecent in E: Dico eas non ſecare ſeſe bifariam. Suſcipiatur (per primam huius) circuli A B G D centrum Z, coniuncta Z E. Ab impoſſibili enim, ſi aliquæ duci poſſint, quæ bifariam ſeſe ſecent, ſint A G B E. Ad earum ſectionem E coniuncta recta Z E, efficiet (per præcedentem) angulos Z E B & Z E A rectos, & igitur æquales, per 10 communem ſententiam. Maiorem quidem Z E B minori Z E A, quod eſt impoſſibile. Cadit enim Z E, quæ per centrum in vtraſque rectas A G B D, non igitur aliquæ bifariam ſeſe ſecabunt. Idem oſtendimus ſi altera tantùm bifariam ſecetur, nam hæc ſola rectum efficiet ei quæ per centrum angulum, reliqua verò maiorem vel minorem recto. Si igitur in circulo binæ rectæ non per centrum extenſæ, &c.

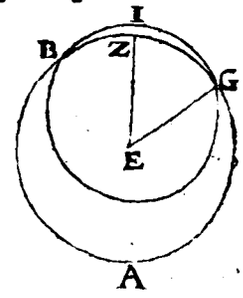


PROPOSITIO V.

Si binæ circunferentiæ in plano ſe inuicem ſecuerint, non erit earum idem centrum.

Proponantur

Proponantur binæ circunferentię A B G & I B G circulorum ſeſe in eodem plano ſecantium in B & G: Dico non eſſe earum idem centrum. Quod ſi poſſibile fuerit idem eſſe, ſit E centrum vtriuſque, & coniungatur E G, & inter G & B ducatur alia quæuis, ſecans binas circunferentias in Z & I, ſitq; E Z I. Quoniam E G eſt ex centro circuli A B G, ea æqualis erit ipſi E Z. Quia verò eadem E G eſt ex centro circuli I B G, ea erit æqualis rectæ E I, per 15 diffinitionem primi. Rectæ igitur E Z E I eidem E G æquales, adinuicem æquales erunt, maior ſcilicet minori, quod fieri non poteſt. Non erit igitur earum idem centrum. Si itaque binæ circunferentiæ in eodem plano ſe, &c.



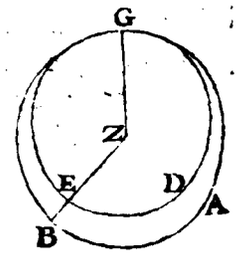
MONITVM.

Quoniam agimus tantùm de circulorum circunferentiis hoc & ſequenti theoremate, diximus loco circulorum, circunferentias ſeſe ſecari, & inſuper in eodem plano præter Theonem & Campanum dicẽdum eſſe curauimus. Quod omiſſum efficit binos circulos vel circunferentias ſeſe poſſe ſecare, licet idem centrum habeant, veluti circuli maiores in ſphæra mundi, ſcilicet horiſon, meridianus, coluri, & reliqui quotcunque idem mundi cẽtrum habentes. Hoc errore ſæpiuſcule poſthac abutetur Theon, circulum ſcilicet pro circunferentia ſumens, hoc eſt ſuperficiem pro linea, quæ quàm diſſideant, iudicanda relinquimus.

PROPOSITIO VI.

Si duæ circunferentiæ ſe inuicem tetigerint, non erit earum idem centrum.

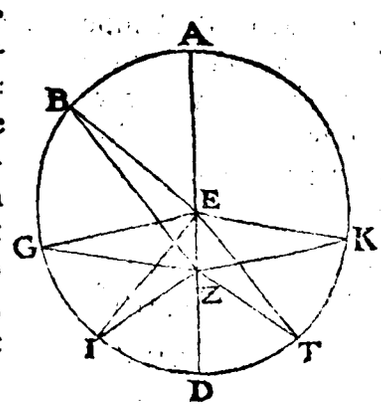
Binæ circunferentiæ A B G & D E G ſeſe tangant in G: Dico non eſſe earum idem centrum. Quod ſi idem credatur eſſe centrum, ſit Z, & coniungatur Z G & alia quædam à centro Z, ſecans binas circunferentias in E & B. Quoniam Z eſt cẽtrum circuli A B G, recta Z B ipſi Z G æqualis erit. Quia ſimiliter idem Z eſt centrum circuli D E G, recta Z E eidẽ Z G æqualis erit per 15 diffinitionem primi: ipſæ itaque Z E Z B, eidem Z G æquales, adinuicem erunt æquales, pars ſcilicet toti, quod fieri non poteſt. Non erit igitur eorum idem centrum. Si ergo duæ circunferentiæ, &c.



PROPOSITIO VII.

Si in diametro circuli aliquod ſumatur ſignum, quod centrum circuli non ſit, ab eóque in circunferentiam aliquæ rectæ procidant, maxima erit in qua centrum, minima verò reliqua. Aliarum autem proxima centro, remotiore maior eſt. Binæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales, ab eodem ſigno in circunferentiam cadunt, ad vtraſq; diametri partes.

In diametro A Z D, circuli A B G D, ſumatur centrum E, & aliquod ſignum Z, quod centrum non ſit: ab ipſo verò Z in circunferentiam plures cadant rectæ, ſcilicet Z B Z G Z I Z D: Dico omnium rectarum, à ſigno Z productarum, maximam eſſe A Z in qua eſt E centrum, minimam verò reliquam Z D, & inſuper Z B proximiorem centro E, quauis remotiore maiorem eſſe. Quoniam productis E B E G E I, trianguli B E Z duo latera B E E Z reliquo B Z ſunt maiora, per 20 primi, quibus æqualis eſt recta A E Z.

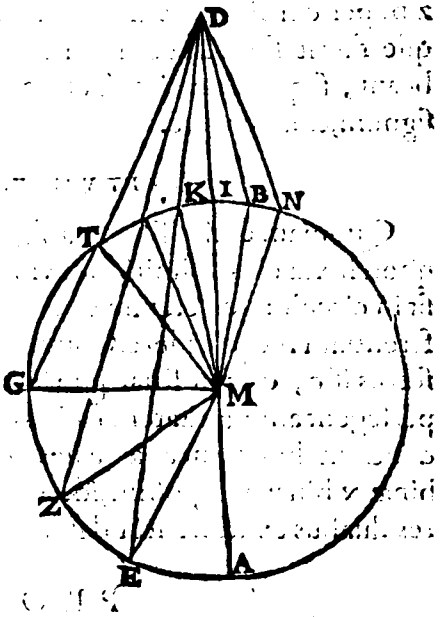


Recta

Recta igitur A E Z maior est ipsa B Z, & similiter maior erit reliquis G Z I Z, & quibuscunque à signo Z ductis: semper enim binis triãguli lateribus est ęqualis. Quia verò binæ B E E Z binis G E E Z sunt æquales, angulus verò B E Z. angulo G E Z maior est, basis itaque B Z basi G Z maior erit, per 24 primi, similiter & G Z maior erit ipsa I Z. Quia autem latus I E binis I Z Z E minus est, ipsi verò I E æqualis est D E, ipsa igitur D E minor est binis I Z Z E. Communi verò ablata Z E, sequetur Z D minorem esse qualibet alia à signo Z producta. Quæ igitur per centrum scilicet Z A maxima, reliqua verò Z D minima erit, aliarum verò quælibet centro proximior, remotiore maior ostensa est, vt B Z maior recta G Z, eadem verò G Z maior alia Z I, &c. Ad vltimum autem, ad rectam Z E signúmque eius E angulo I E Z æqualis constituatur, per 23 primi, Z E T, coniuncta Z T. Cùm igitur æquales sint I E Z & T E Z anguli, binæq; I E E Z binis T E E Z, & bases Z I Z T ad vtrasque partes diametri æquales per 4 primi erunt. Sed ipsi I Z nulla alia ab ipsa Z T potest dari æqualis. Nam si detur alia quæuis Z K ipsi Z I æqualis, ea æquabitur eidem Z T, quod fieri non potest: erit enim remotior vel proximior centro: non igitur erunt æquales, vt ostensum est. Si itaque in diametro circuli aliquod sumatur signum, &c.

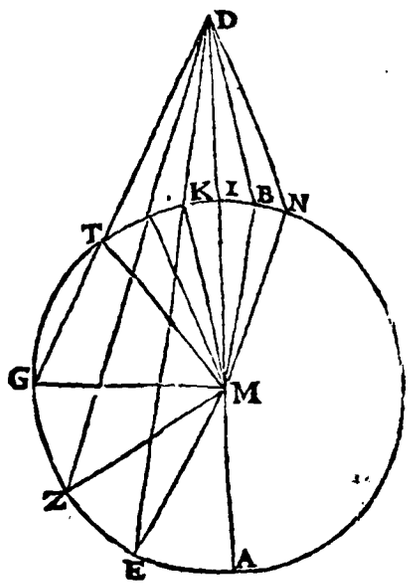
PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum suscipiatur in plano aliquod signum, ab eóque in circunferentiam ducantur aliquæ rectæ, quarum quidem vna per centrum extendatur, reliquę verò vtcunque in cauam circunferentiam cadentium rectarum, maxima est quę per centrũ ducitur. Aliarum autem semper ei quæ per centrũ transit propinquior remotiore maior est. In curuam verò circunferentiam cadentium rectarum, minima est eius quæ per centrum pars exterior. Minimæ verò propinquior semper remotiore minor est, binæ autem tantùm rectæ lineæ ab eo signo in circunferentiam cadunt æquales ad vtrasque partes diametri.



Sumatur extra circulum A B G signum D, à quo in circulum ducantur aliæq; rectæ, quarum vna per centrum transeat D A, secans circunferẽtiam in I, & centrum sit M, reliquæ verò vtcunq; sint D K E D L Z D T G, cõiunctæ M K M L M T M G M Z M E. Quoniã D A est æqualis binis D M M E, quæ quidem sunt maiores ipsa D E per 20 primi, ipsa igitur D A reliqua D E maior est. Rursus cùm æquales sint binæ D M. M E binis D M M Z & angulus D M E maior angulo D M Z, & basis D E basi D Z (per 24 primi) maior erit. Et eadem de causa D Z ipsa D G maior erit, proximior quidem remotiore earum quæ in cauam cadunt circunferentiam. Cæterùm cùm D K, K M sint vnica D M maiores, ab ipsis autem æquales tollantur K M & I M, reliqua igitur D I pars exterior eius quæ per centrum, ipsa D K minor est, similiter & minor ipsis D L D T ostenditur. Et quia trianguli D L M à limitibus vnius lateris D M, binæ rectæ introrsum ad signum K constituuntur M K D K. Ipsæ reliquis minores sunt, per 21 primi, æqualis autem est M K. ipsi M E. Igitur D K minor erit reliqua D L, & hac lege D L minor ipsa D T, propinquior semper ipsi

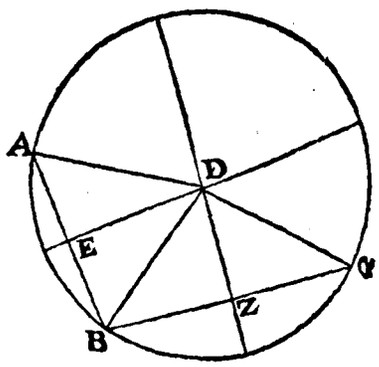
D I remotiore quauis alia. Ad vltimum autem, ad rectam D M ſignúmque eius M, angulo D M K æqualis conſtituatur D M B, coniuncta D B, binę D M M B binis D M M K æquales, efficiunt (per 4 primi) baſes D B D K æquales, ad vtraſque diametri D I A partes, nec alia vlla ipſis æqualis datur, qualis eſſet D N: nam D N remotior aut propinquior eſſet rectæ D I quàm ſit D B vel D K, non igitur eſſet æqualis, vt oſtendimus. Binæ itaque tantùm dantur æquales rectæ ad vtraſque diametri partes, vt D B ipſi D K & D N ipſi D L &c. Si igitur extra circulum ſuſcipiatur, &c.



PROPOSITIO IX.

Si in circulo ſuſcipiatur aliquod ſignum, & ab eo in circunferentiam cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales, ſuſceptum ſignum centrum eſt circuli.

Eſto circulus A B G, in quo ſucipiatur ſignum aliquod D, à quo in circunferentiam plures quàm duæ rectæ ductę D A D B D G ſint æquales adinuicem: Dico ſignum D eſſe circuli centrum. Coniungantur A B B G rectę, quæ ſecentur biſariam in in E & Z: Producantur autem E D & Z D quantumuis. Quoniam bina latera A E, D E binis B E D E, & baſis A D baſi D B æquantur, anguli A E D & B E D (per 8 primi) ſunt æquales, igitur & recti erunt, per 10 diffinitionem primi, ſimiliter & anguli D Z B D Z G. Recta igitur D E ſecans rectam A B in circulo biſariam & ad rectos, in ſe habet centrum circuli. Haud ſecus dicemus de recta Z D, per corol. primę huius: in vtraque igitur E D & Z D erit centrum. Si igitur vtrique fuerit ſignum commune centrum, & ſolam ſectionem D communem habeant, ſequetur D circuli eſſe centrum. Si itaque in circulo ſuſcipiatur aliquod ſignum, & ab eo, &c.



MONITVM 7. 8. ET 9. PROPOSITIONIS.

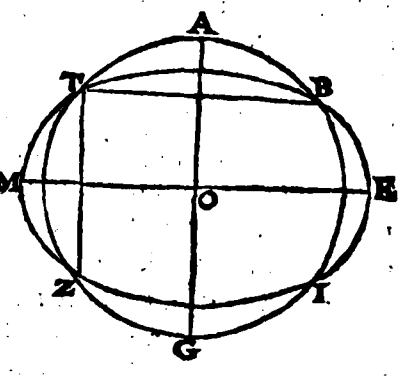
Quoniam dixit Theon à ſigno in circulo exiſtente in circulum rectam duci, quod iuxta eius diffinitiones videtur ridiculum, cùm iam illud ſignum ſumptum ſit in circulo: loco etenim circunferentiæ circulum ſumpſerat. Diximus in circunferentiam rectas cadere. Communis verò fuit huius & duarum præcedentium defectus iſte, quo poſthac pluries abutetur. Vt autem qui textus ſolos quandoque perlegent ambiguitatem facilius euitent, diximus poſtrema parte duarum præcedentium, binas lineas æquales, non autem duas, eò quòd plures duabus æquales binæ & binæ dari poſſint, ideo diximus binas, vt coniunctim duæ non diuiſim plures duabus exiſtimentur dari æquales.

PROPOSITIO X.

Circunferentia circunferentiam circuli in pluribus duobus ſignis non ſecat.

Eſto circunferentia A B G: Dico nullam hanc aliam ſecare in pluribus ſignis duobus.

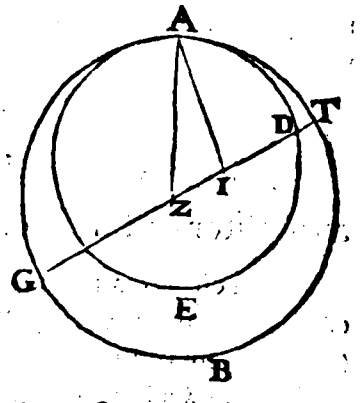
duobus. Si enim fieri poſſit oppoſitum, ſecet circunferentiam A B G, circunferentia E B M in B T Z I, coniunctis B T T Z, quas bifariam & ad rectos ſecent rectę A G E M, per 10 & 11 primi, ſeſe autem ſecent in O. In ipſis igitur A G E M erit centrum vtriuſque circuli, per corollarium primæ huius. Cùm T B & T Z bifariam & ad rectos ſectæ, in vtroque ſint circulo. Igitur O centrum erit circuli, communis namq; earum A G & E M eſt concurſus. Binarum itaque circunferentiarum ſeſe ſecantium idem erit centrum, contra 5 huius, quod fieri non poteſt. Non poteſt igitur circunferentia circunferentiam ſecare in pluribus duobus ſignis. Circunferentia igitur circunferentiam, &c.



PROPOSITIO XI.

Si binæ circunferentiæ in plano ſeſe introrſum tetigerint, recta linea coniungens earum centra eiecta, in contactum circunferentiarum cadit.

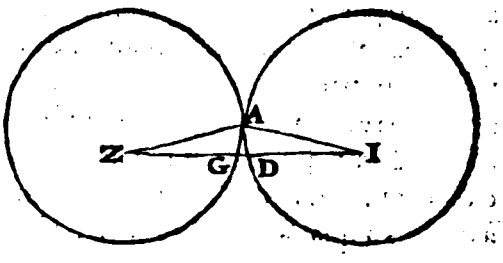
Binæ circunferentiæ A B G & A D E in ſigno A ſeſe introrſum tangant, ſuper idem planum. A ſigno autem A ad vnius earum A B G centrum, ſcilicet Z, producatur recta A Z quantumuis: Dico in recta A Z eſſe vtrumque earum centrum. Quod ſi non credatur, ſit reliquum centrum ipſius A D E extra A Z in I, producta Z I in G Z I D T ac recta A I. Quoniam binæ A I, I Z, maiores ſunt reliqua A Z, per 20 primi, I A verò & I D, quæ à centro ſunt æquales. Tota igitur D I Z æqualis binis A I I Z erit, & proinde tota D I Z maior erit ipſa A Z. Sed & minor, cùm ſit pars rectæ Z T, quæ æqualis eſt ipſi A Z, quæ ex centro, quod fieri non poteſt. Reliquæ igitur circunferentiæ A D E centrum, non eſt extra rectam A Z. in ipſa itaque A Z erit vtrunque earum centrum. Si igitur binæ circunferentiæ in plano ſeſe introrſum tetigerint, &c.



PROPOSITIO XII.

Si binæ circunferentiæ ſeſe exterius in plano tetigerint, centra earum coniungens recta per contactum tranſit.

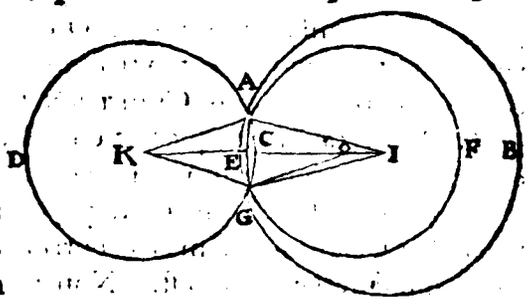
Binæ circunferentiæ A D & A G, ſeſe exterius tangant in A ſuper plano: Dico rectam eorum centra coniungentem per A ſectionem tranſire: ſi autem non, tranſeat per G D, ſitq; Z G D I recta, Z & I verò ſint centra, coniunctis Z A, I A, triangulum erit A Z I, habens duo latera A Z A I reliquo Z I maiora, per 20 primi. Sed Z A ipſi Z G (quæ ex centro) eſt æqualis, I A verò ipſi I D. Binæ igitur A Z A I (binis Z G I D) æquales, recta Z I minores ſunt, reſiduo G D, & maiores oſtenſæ ſunt: quod eſt abſurdum. Non poteſt igitur recta coniungens centra circunferentiarum Z I, alibi quàm per contactum A tranſire. Si itaque binę circunferentię, &c.



PROPOSITIO XIII.

Circunferentia circunferentiam non tangit in pluribus ſignis vno, etſi extra, etſi intus tangat.

Sint duæ circunferentiæ A B G & A D G, quæ ſeſe tangant ſi fieri poſſit, in pluribus ſignis A & G, & coniungatur recta A G, ipſa in circulos vtroſque cadet, per 2 huius. Circunferentiæ itaque D G A & B G A ſeſe ſecant in G A, non igitur tangunt. Aliàs, ducemus à centro K ad centrum I rectam, quæ per contactum tranſit, per 12 huius, qui ſit E vel C. Eſto, ſi fieri poſſit, alius contactus in A; coniunctis I A, I G, K A, K G. Quoniam igitur circunferentiæ A B G & A D G ſeſe tangunt in

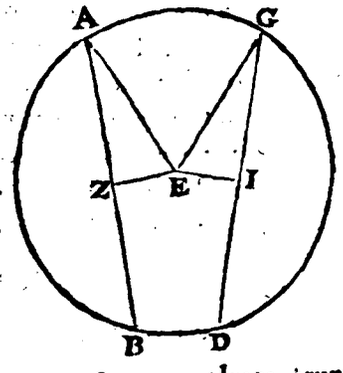


A & G, rectę I C C K, binis I A A K ſunt æquales, cùm ſint ex centris: Trianguli igitur A K I duo latera A K A I reliquo K I non erunt maiora, contra 20 primi, quod fieri non poteſt. Non igitur ſeſe tangunt extra in pluribus ſignis, ſed in vno tantùm. Si verò credantur ſeſe tangere intus in pluribus ſignis, tangant ſe in A & G ſignis circuli A B G & A F G, quorum centra ſint I & O, per primam huius. Per O verò ducatur recta I O, ipſa in contactum cadet, per 11 huius, qui ſit E. Binę igitur O E O G ex centro ſunt æquales. Communis addatur I O, tota I E binis I O G O erit æqualis. Atqui ipſi I E æqualis eſt I G, quę ex centro circuli A B G. Trianguli itaque G O I latus I G, binis reliquis I O G O non eſt minus, contra vigeſimam primi, quod fieri non poteſt. Nec igitur intus ſeſe tangent circunferentiæ in pluribus ſignis vno. Circunferentia itaque circunferentiam non tangit in pluribus ſignis vno, &c.

PROPOSITIO XIIII.

In circulo, æquales rectæ æqualiter diſtant à centro, & quæ æqualiter diſtant à centro, æquales adinuicem ſunt.

Sint in circulo A B D G rectę A B D G ęquales: Dico eas A B & G D æqualiter diſtare à centro. Suſcipiatur (per primam huius) centrum E, à quo perpendiculares in ipſas A B & G D demittantur E Z E I, per 12 primi, ipſæ (per tertiam huius) bifariam ſecabunt rectas A B & G D. Rectæ itaque A Z & G I erunt æquales. Sed ex A E & E G quadrata quæ ex rectis fiunt æqualibus, æquantur (per 47 primi) quadratis ex A Z Z E, & ex G I I E, cùm anguli A Z E & G I E ſint recti. Ab æqualibus autem ex A Z Z E ipſis ex G I I E quadratis, æqualia auferantur quæ ex A Z & G I quadrata. Reliqua ex Z E & I E quadrata, erunt æqualia, per 3 communem ſententiam. Et proinde rectæ Z E & I E æquales erunt, quare & ipſæ A B & G D ęqualiter diſtabunt à centro, per 4 diffinitionem huius. Ad ſecundam partem conuerſo argumento, cõuerſum ſequetur. Scilicet, diſtent æquè à centro rectæ A B G D: Rectæ Z E & E I erunt æquales, per 4 diffinitionem huius, ſed A E & G E quæ ex centro ſunt æquales. Et ipſarum quadrata, æquantur eis quæ ex A Z Z E, & G I I E. Æqualia igitur ſunt ex A Z Z E quadrata, eis quæ ex G I I E, à quibus æqualia quæ ex Z E E I ablata, relinquunt æqualia ex A Z & G I. Quare A Z & G I ſunt æquales & dimidiæ ipſarum A B G D (per 3 huius), bifariam enim ſecantur à perpendicularibus à centro. Totæ igitur A B & G D ſunt æquales. In circulo itaque, æquales rectæ æqualiter diſtant à centro, & quæ æqualiter, &c.

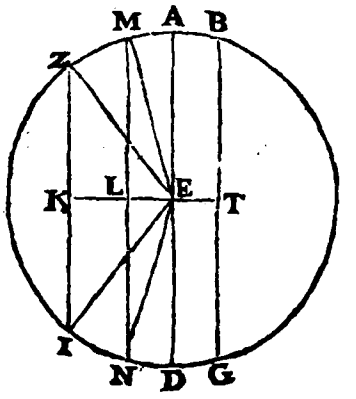


PROPOSITIO XV.

In circulo maxima quidem eſt dimetiẽs, reliquarum autem, ſemper propinquior centro remotiore maior eſt.

In circulo A B G D ſit dimetiens A D, centrum vero E, cui propinquior ſit recta B G quàm Z I: Dico rectarum in circulo ſubtenſarum maximam eſſe A D, reliquarum verò

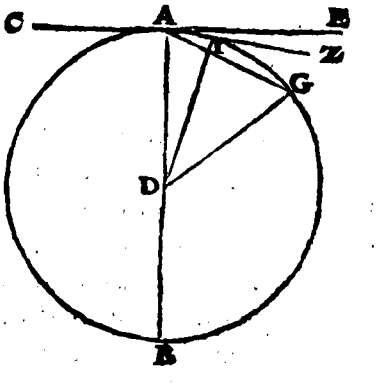
rum verò proximiorem centro (hoc est rectam B G) maiorem esse Z I remotiore. à centro E perpendiculares mittantur, in B G & Z I, quæ sint E T E K. Quia verò E K maior est (per 4 diffinitionem huius) reliqua E T, ab ea æqualis ipsi E T abscindatur E L, cui per signũ L perpendicularis agatur M L N. Coniunctis E M E Z E I E N. Quoniam æquales sunt E T & E L, æquales erunt (per 14 huius) B G & M N. Quia verò trianguli M N E bina latera M E E N reliquo N M (per 20 primi) sunt maiora. Rectis autem M E E N æqualis est D E A dimetiens, dupla namque eius quæ ex centro. Igitur D A dimetiens maxima erit, cuiuis rectæ comparata in circulo. Cùm autem triangula M E N & Z E I duo latera M E E N duobus Z E E I æqualia, angulum verò M E N angulo Z E I maiorem habeant, & basin M N basi Z I remotiore maiorem (per 24 primi) habebunt. Ostensa est autem ipsi M N æqualis B G. Ipsa igitur B G proximior centro, reliqua Z I remotiore maior erit. In circulo igitur maxima quidem est dimetiens, &c.



PROPOSITIO XVI.

Quæ à diametri circuli extremitate ad angulos rectos in plano ducitur, extra ipsum circulũ cadit, & in locum inter rectam lineam & circunferentiam, altera recta linea non cadet. Et semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est, reliquus autem minor.

Ducatur super extremitate diametri A B circuli A G B ad angulos rectos, linea recta C A E: Dico rectam C A E extra circulum cadere, & inter A E rectam & A G circunferentiã, nullam rectam cadere lineam. Et insuper angulum B A G esse maiorem omni angulo rectilineo acuto, reliquum verò G A E esse minorem omni quoque angulo rectilineo. Sit centrum D. Ad primum autem quæ ad rectos angulos ad extremitatem diametri ducitur, extra circulum cadit. Nam si intra caderet vt recta A G, cõiuncta D G trianguli A D G Isosceles, qui ad basin anguli essent æquales, scilicet D A G & D G A, per 5 primi. Atqui rectus est D A G, rectus igitur esset D G A, & proinde duo anguli alicuius trianguli duobus rectis æquales essent, quod est absurdum, ex 17 primi. Non igitur cadit recta ad angulos rectos super extremitate diametri constituta intra circulum. Quare cadet extra vt recta C A E.



Secundo inter rectam A E & circunferentiam A G, nulla recta linea ad signum A constitui potest. Si enim fieri aliter possit, esto recta A Z. A centro autem D in ipsam A Z perpendicularis mittatur D I. Quoniam enim angulus D I A rectus est, erit (per 18 primi) maior D A ipsa D I. Sed D I, à centro circunferentiam penetrat, D A verò attingit: quare minor est D A. Fuit autem maior, quod fieri non potest. Nulla igitur recta inter A E & A G cadet. Tertio quod angulus B A G sub dimetiente & circunferentia contentus, maior sit omni acuto rectilineo patet. Nam quilibet acutus rectilineus angulus minor erit recto D A E, per 12 diffinitionem primi. Si itaque sit maior idem acutus, angulo semicirculi G A D, is secabit rectum D A E per rectam inter A E & circunferentiam G A constitutam. Quod impossibile ostensum est. Si verò sibi æqualis credatur, recta circunferentiæ in pluribus signis congruens, non ex æquali sua interiaceret signa contra 4 diffini. primi. Non erit igitur aliquis acutus rectilineus angulus maior angulo semicirculi, nec proinde reliquo G A E con-

tingentiæ minor, nec quidem æqualis. Erit igitur angulus ſemicirculi maior omni acuto rectilineo, & itaque angulus contingentiæ minor omni eodem acuto. Quæ igitur à diametri circuli, &c.

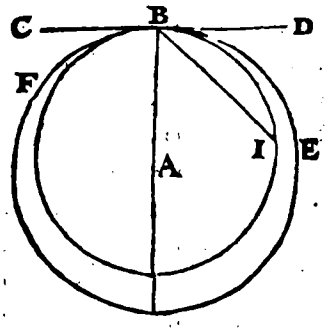
COROLLARIVM.

Hinc aſſequimur rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos erectam, circulum tangere in vno tantùm ſigno.

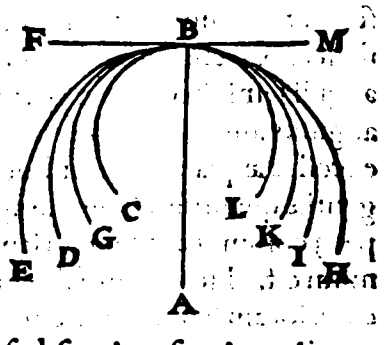
Nam ſi in duobus tangeret ipſa circulum ſecaret (per 2 huius) eò quod intus caderet.

MONITVM.

Quoniam cognitio ſiue huius contingentiæ anguli intelligentia aliquos latuit, quædam animaduerſione digna huc adducenda eſſe arbitrati ſumus. Campanus iunioribus reliquit anxium quid de anguli contingentiæ natura ſentirent, cùm dixit non valere argumentum, hoc tranſit à minori ad maius per omnia media, ergo tranſit per æquale, non animaduertens qua de re tacuerit Euclides huius anguli naturam, cùm dicit, rurſus nec valere hoc argumentum, contingit reperire maius & minus eodem, ergo contingit reperire æquale, Euclides etenim his prioribus libris linearum, angulorum, ſuperficierum ac figurarum originem tantùm edocens, quid ad naturæ eorum ſcrutandæ, præter hæc requiratur, poſterioribus conſeruabat documentis. Pluráque prædocet quorum naturam inquirentes eouſque curiosè, vt ne quidem contenti ſuis dictis fuerimus, reperiemus quamplura inter ſe nulla quantitatis diſcretione nobis propalari poſſe, ob naturæ diſtãtiam, quæ quidem naturę diuerſitas, vnico ſui operis decimo libro traditur, vt iuxta methodi naturã, fortiora quæque præſata debiliora ſubſequantur, idq; expectãdum maximè diſcentibus conuenit. Nam cùm edocet Euclides parallelogrammorum conſtructionem (libro primo ac ſecundo) lateribus ac dimetientibus ornatam, ſi quis vellet eorum laterum ac dimetientium quantitates cõparare adinuicem, cùm ſint omnes lineæ, ſæpius decideret. Rectæ lineæ item (vndecimo ſecundi theoremate ſectæ) ſectionem aliquam toti comparantes, qui've hunc contingentiæ angulum rectilineo cuidam, qui inſuper plures in circulo ſubtenſas dimetienti, ſiue eiuſdem figuræ diuerſa latera, adinuicem ita comparare velit, vt eius comparationis perfectam intellectui præſtet cognitionem, is profectò mathematicarum methodum verè ignorare fatebitur. Quid enim, antequã quale aut quantum ſit aliquid, prius diſcendum eſt. Quare qui quantitatum diuerſitatem naturæ audire cupient, decimum conſulant: illic enim patebit, diuerſarum ſpecierum quantitates cognita comparatione non coniungi. Vt igitur Campani diſſoluamus nodum. Sit ę B D recta perpendicularis ad extremum A B dimetientis circuli E B F, ducta intra circulum recta B I. Patet angulum ſemicirculi A B E conferri binis rectilineis, vni quidem maiori ſcilicet A B D recto, reliquo verò minori ſcilicet A B I acuto. Nulli verò rectilineo æquali, eò ſcilicet quòd maioris & minoris confuſa cõparatio ſit generalis, ac penitus indeterminata, æqualitas verò abſque determinatione fieri non poteſt. Nam licet A B I angulus minor oſtẽdatur ipſo A B E, non tamen quanto minor oſtenditur, nec ſimiliter A B D quanto eodem A B E maior. Exceſſus etenim quantitatum vel defectus qui ſque numeris non expreſſus, confuſus erit & incognitus ſiue indeterminatus, qui incertus libro decimo dicetur. Sed cùm curuarum inclinationes linearum, omnino à rectarum linearum inclinationibus, & natura & actu differant, perſpicuum eſt angulos ab his inclinationibus productos, diuerſas induere naturas. Et proinde ea comparatione quæ intellectu patula exiſtat penitus incomparabiles. Angulo itaque ſemicirculi A B E, quamuis rectilinei comparentur A B D quidem maior,

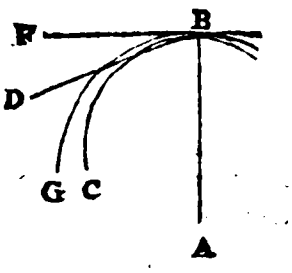


dem maior,& A B I minor,confusè tamen & sine excessus aut defectus expressione. Non sequetur ipsi A B E rectilineũ æqualem dari posse,nam æqualitas omnium certarum & cognitarum affinitatum siue comparationum certissima & cognitissima existit,& solas eiusdem & generis & naturę coniungit quantitates. Excessus verò & defectus cùm generaliores existant,non semper inter eiusdem naturę quantitates contingunt:Sed eas tantùm quæ vnius sunt generis coniungunt:vt latiùs videbimus tertia quinti diffinitione. Ad Campani igitur argumentum dicemus:Non ideo hanc philosophiæ legem destruendam esse, quæ dato maiori & minori dari docet & æquale,si quãtitates eiusdem generis & naturæ, iuxta veræ geometriæ intelligentiam sumpserimus. Ipsi nanque angulo A B E æqualis facilè dabitur angulus A B F, qui quidem eiusdem generis ac naturæ ipsi A B E reperietur esse. Ab hac angulorum diuersarum naturarum comparatione, opinati sunt aliqui recentiores,angulorum quantitates inter rectilineos tantùm versari, eò quòd minimo rectilineo angulo minorem inuenerit Euclides angulum contingentiæ. Atqui inter quantitates minimam dari non est receptum. Eum itaque contingentiæ angulum qui minima existat quantitas,non tantùm angulum non esse,sed nec igitur vllam habere in se anguli quantitatem asseruerunt. non animaduertentes in hac quantitatum angulorum comparatione,variari angulorum speciem siue naturam. Maximus etenim omnium contingentiæ angulorum minimo rectilineo minor existit, non tamen ideo existimandum erit quantitatis rectilineorum angulorum minimam datam fuisse,cùm datur angulus cõtingentiæ. Nam ipse idem contingentiæ angulus, per alios plures angulos rursus infinitè secari potest,vt hoc typo elucidatur.



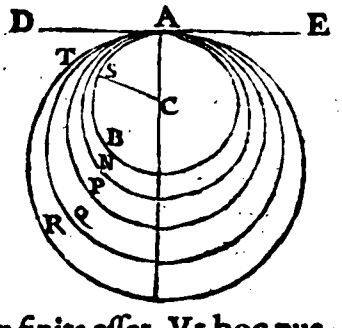
Angulus etenim F B C infinitè minui potest in angulos F B G, F B D, F B E, &c. quotcunque descriptis maioribus circulis, eò quòd omnes sint eiusdem denominationis,hoc est cõtingentię anguli. Non igitur rectilineorum angulorum quantitatis, angulum contingentiæ minimam esse existimemns, cùm sint diuersæ angulorum species. Sed speciem specie minorem cẽsere possumus. Minimus etenim camelorum, culicum maximo citra omnem admirandi stuporem maior credetur, non itaque quantitatem quantitate,sed speciem specie maiorem dicemus. Præterea concludemus angulum contingentiæ, angulum dici, ex anguli plani diffinitione, qui est duarum linearum sese in plano tangentium inclinatio. Anguli verò quantitatem præ se ferre velut & rectilineum, cùm iuxta eam maior minor aut æqualis alteri conferri possit, ac in totidem infinitas diuisiones secari possit vt rectilineus. Concludemus itaque,vbi excessuum vel defectuum faciendæ sint comparationes, quæ generales & confusæ ac incertæ proponuntur, liberum nobis erit ad diuersarum specierum (sub eodem genere) quantitates discurrere. Vbi verò de æqualitate aut certo excessu vel defectu agẽdum erit,tunc sub eisdem quantitatum & genere & specie sistendum erit,eò quòd certa optetur affinitas siue comparatio:vt si angulum rectilineum infinitè diminuere velimus, huius diminutionem ad angulos contingentiæ mutata specie tandem ducere poterimus. Infinitum ad diuersas diuisionum species duci, non autem ad vnicam arctari censentes,non aliàs indefinita esset diuidendi facultas,sed ea restricta infinitè nomine priuaretur. Si verò angulum contingentiæ è contra augere velimus, conuersa metho do per augmentum in angulos rectilineos tandem deuenire possumus,semper augentes. Angulo igitur contingentiæ datus est maior rectilineus, minor verò alius contingentię angulus,æqualis demum sibi oppositus. Secus verò fit vbi exoptatur æqualitas, vel excessus aut defectus determinati & certi. Illæ etenim comparationes (vt diximus) sub eadem fouentur quantitatum specie, quam aliquando commensurationem dicemus. An verò omnes anguli contingentiæ sint eiusdem speciei, alibi differendum est. Sufficiat tantùm huic negotio, æquales reperisse E B F ipsi H B M, & D B F ipsi I B M, &c. ac insuper eisdem maiores & minores. Præterea

repugnantiam primæ propoſitionis decimi, in hoc theorema commiſiſſe Euclidem exiſtimarunt, ſi angulus contingentiæ anguli quantitatem haberet. Ait enim Euclides duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à maiori auferatur maius quàm dimidium, & eius quod relictum eſt maius quàm dimidium, idq; ſæpe fiat: relinquetur tandem magnitudo minor, minore magnitudine expoſita. Inferentes angulum A B F per rectilineos angulos, ſemper pluſquam eius ac relicti dimidium tollentes diuiſum nuſquam magnitudinem minorem angulo C B F (qui fuit minor magnitudo expoſita) relinquere.



Qui in id genus Charybdis à Scylla inciderũt, loquentẽ Euclidem attendere debuerunt. Præcipit enim à maiore expoſitarum pluſquam dimidium tolli, exceſſum quidem confuſum, liberum, ac indeterminatum, vt tandem pariat relictum, minus minore magnitudine expoſita, quod hoc doceamus exẽplo, propoſitis angulis A B F maiori, & F B C minori. Ab angulo etenim recto A B F plus dimidio tollemus (angulum quidem A B D) à reliquo item D B F, plus dimidio tollemus, angulum G B F relinquentes. Nam is eſt omni rectilineo minor oſtenſus. Relinqui videmus angulum, F B G minorem angulo F B C contingentiæ: ſiquidem totum ſua parte maius exiſtat. Permiſit enim Euclides liberos ac incertos vltra dimidium exceſſus. Licuit itaque quantitatum ſpecies variare, vt quauis arte minor minore quantitas exhibeatur.

Dixerunt inſuper ſemicirculorum angulos quoſque, æquales eſſe adinuicem, ſcilicet eos qui fiunt à dimetiente & circunferentia, principium illud deſtruentes, ſcilicet partem toto minorem eſſe. Patet enim angulum ſemicirculi A B C reliqui anguli ſemicirculi A B G partem eſſe, & igitur minorem. Sed cùm quilibet rectus angulus angulum ſemicirculi ſolo angulo contingentiæ excedat. Atqui ſi omnes exceſſus æquales fuerint hoc ſuppoſito, quod ſcilicet nulla ſit angulorum contingentiæ quantitas, ſequetur igitur, angulos reliquos ſemicirculorum æquales eſſe, per 3 communem ſententiam. Ex falſis igitur ſuppoſitis, falſum colligere facillimum eſt. Hoc igitur falſo ſuppoſito plura æquè falſa ſequentur, ſcilicet angulum exteriorem ſemicirculi æqualem eſſe interiori. Angulos item circulorum ſeſe tangentium, intus vel extra, æquos eſſe, nempe nihil quantitatis habere, abſurdè concludunt.



Tandem extollunt Cardani paralogiſmum geometrico viro indignum: ſcilicet rectam à ſigno C verſus D productam in circulum A B ſcilicet C S, poſtmodum verò in circulum A M, tandẽ in quotuis circulos (qui quidem infinitè deſcribi poſſunt) vt C T, rectam dici infinitè verſus D productam, cùm in infinitas circulorum deſcriptiones producitur, & tamen nuſquam in D cum recta A D concurrere, licet ipſæ parallelæ non ſint, hinc inuentum elicientes, vt ipſi putant, mirum, ſcilicet rectam C T infinitè productam, minorem eſſe recta C D, quæ finita eſſet. Vt hoc puerile diſſoluamus obiectum. Concipiemus rectam C T per infinitas circulorum deſcriptiones, productam tantùm eſſe, & ideo eius productionem à circulorum deſcriptionibus arctari, & non igitur infinitam eſſe lineæ C T productionem: ſed circulorum deſcriptionem, numero infinitam concipi poſſe. Quare lineæ huius C T productioni infinitudo (ſi quæ dici poſſit) aſcribi non poterit, ſed tantùm circulorum multitudini ea aſcribetur. Non itaque dicemus rectam C T infinitè productam, quinimo circulis terminatam.

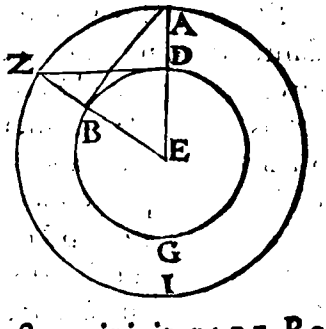
Cur autem ſemper reperietur minor angulus contingentiæ (quamuis omnium contingentium maximus) quolibet minimo angulo rectilineo dicemus. Cùm anguli rectilinei ab eiſdem lineis (aut equidem eiuſdem naturæ, nempe rectis) maiores vel minores quantumuis ad idem ſignum effici poſſint, non mutata rectilinei

denominat

denominatione, cuiuis dato rectilineo minor adhiberi poteſt. Diuerſa namque inclinatione, eaſdem rectas copulare ad idem ſignum licet, cùm inclinatio rectarum (anguli quantitatem efficiens) in ſitu, non in linearum natura conſiſtat. Angulus verò contingentiæ, ab eiſdem lineis, ad idémque ſignum, maior vel minor effici non poteſt, eò quòd eius quantitas (quæ inclinatio dicta fuit) non à linearum ſitu, ſed ab eius natura, ſiue denominatione contingentiæ dependeat. Quare ab eiſdem lineis eouſque neceſſaria ſit huius anguli quantitas, quòd nulla arte in maius vel minus traduci poſſit, quin contingentiæ depereat nomen, illico in ſectionis denominationem cadens. Vnde neceſſarium ducemus, diuerſas curuas, diuerſas angulorum contingentiæ producere quantitates, ab inclinationum diuerſitate ortas. Huius inſuper anguli denominatio, ſectionem linearum impedit, nempe contingentia: Si enim adeſſet ſectio, non diceretur contingentiæ angulus. Si verò ad ſignum tangentes immoto contactu mouerentur, in ſectionem deuenirent vtrinque productæ, vt oſtenſum fuit. Contingentiæq; nomine priuaretur angulus, linearum motu ſua denominatione expulſus. Si itaque ad aliquam rectam propoſitam, curua angulum contingentiæ concludens, quolibet dato rectilineo minorem efficiat. Eundem verò angulum recta & curua componentes alium & minorem efficere non valeant, cùm motus illarum contingentiam expellat: perſpicuum fit inter eas rectam cadere non poſſe, cadens nimirum (ſua varietate motus) ſectionem produceret ad ſignum contingentiæ, nec proinde rectilineum angulum illo mixto minorem fieri poſſe. Sed ablata contingentiæ hypotheſi, liberè linearum inclinationi indulgentes, hoc eſt quãtitati (quæ fuit inclinatio) liberas habenas laxantes. Tum ex eiſdem mixtis lineis, angulus conſtituetur ſuper eodem ſigno, maior rectilineo aut minor vt libuerit. Eò quòd anguli quantitas non fuerit per cõtingentiam libertate priuata, ſed tantùm eius denominatio ſeu qualitas; quare non fuit heroicum, quantitatis libera tollentes exequia contingentiæ denominatione, illud proferre, non poſſe dari rectilineum minorem mixto, qui ſua denominatione vnicam & ſibi particularem neceſſariò induit quantitatem, quæ quidem quantitas licet in aliis angulis rectilineis per liberas inclinationes liberè variari poſſit, in huiuſmodi mixto, denominatio contingentiæ quamlibet aliam quantitatem (inclinationum varietate genitam) penitus fugat, quocirca quantitati liberè angulorum (hoc eſt linearum inclinationi) incumbentes, facilè ex eiſdem lineis rectis aut curuis liberæ quantitates inclinatione genitæ proferentur. Prolata verò hypotheſi contingentiæ, angulus dabitur eiuſdem ſpeciei, maior, minor, aut æqualis: ſcilicet maior & minor, diuerſis ad contactum circulorum adiectionibus, æqualis verò contingentiæ angulo, perhibetur illi oppoſitus, vt proximo diximus. Quare qui paralogiſmos ſiue emergentes diſciplinarum nodos diſſoluere cupiunt, attendant potiſſimum actionum operantium libertatem nulla fraude tolli, ſine earum exequia nullo vinciri hypotheſis ſubtili clauſtro.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA 2.

A dato ſigno dato in plano circulo, tangentem rectam lineam ducere.

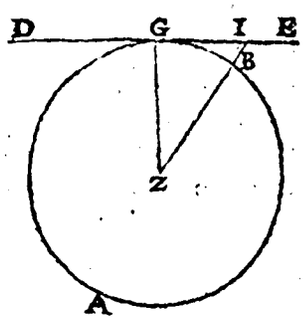


A dato ſigno A circulo D B G in eodem plano, tangentem rectam ducamus. A centro circuli quod ſit E, recta coniungatur E A ſecans circulum in D, centro verò E, interuallo autem E A circulus ducatur A Z I. Ad rectam autem A E ſignúmq; D perpendicularis excitetur Z D, & coniuncta Z E ſecet circulum D B G in B ducta A B: Quoniam æquales ſunt A E E B binis Z E E D (quæ ex centro) & angulum E communem habent: reliqui itaq; anguli A B E Z D E (per 4 primi) æquales erũt. Rectus eſt autem Z D E, rectus erit igitur A B E. Recta itaq; A B ſuper extremitate diametri E B ad rectos cõſtituta, circulum D B G (per coroliarium præcedentis) tangit in B. A dato itaque ſigno, &c.

PROP

PROPOSITIO XVIII.

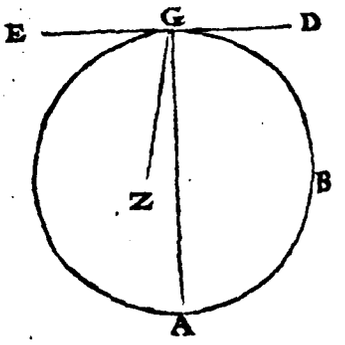
Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à centro autem in contactum ducta fuerit recta linea, ipsa ducta perpendicularis erit tangenti.



Tangat recta D E circulum A B G, cuius centrum sit Z, per I huius, & à centro Z, in contactum G aliqua Z G ducatur. Dico Z G perpendicularem esse ipsi D G E tangenti, sin minus, sit alia quædam Z I ipsi D E perpendicularis, ab ipsa Z G cadente in contactum: quoniam rectus (si id esset) fieret angulus Z I G trianguli G Z I, & ideo maior. Latus G Z illum subtendens, maius esset reliquo Z I, per 18 primi, & minus, cùm sit æquale ipsi Z B, quæ ex centro, quod esset absurdum. Non erit igitur rectæ D E tangenti, alia à centro perpendicularis, quàm G Z, in contactum cadens. Si igitur circulum tetigerit aliqua recta linea, &c.

PROPOSITIO XIX.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem ipsi tangenti ad angulos rectos alia recta linea circulum secans excitetur, in excitata erit centrum circuli.



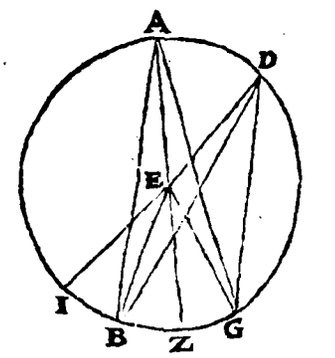
Tangat circulum A B G, aliqua recta D E in G. A contactu autem G aliqua ad rectos angulos excitetur G A circulum secans: Dico in ipsa G A excitata esse cẽtrum circuli A B G. Quòd si alibi esse putetur, sit in Z, ducta Z G: erit igitur (per præcedentem) angulus Z G E rectus: Sed & minor angulo A G E (per hypothesim) recto, quod fieri nequit. Non erit igitur alibi centrum quàm in excitata A G. Si itaque circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c.

MONITVM.

Addidimus huic theoremati has voces (circulum secans) vt citra contentionem fiat theorema. Nam à contactu posset ad rectos tangenti perpendicularis excitari, non capiens circuli centrum, si extra circulum excitaretur.

PROPOSITIO XX.

In circulo angulus qui ad centrum, duplus est eius qui ad circunferentiam, quando anguli eandem circunferentiam habuerint basin.



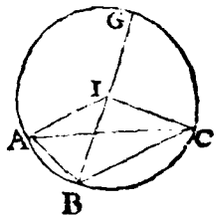
Esto circulus A B G in quo ab eadem basi B G subtendantur duo anguli, scilicet B E G ad centrum, & B A G ad circunferentiam: Dico B E G ad centrum duplum esse, ipsius B A G ad circunferentiam. Quoniam trianguli A E B duo anguli E A B, E B A sunt (per 5 primi) æquales, eisq; binis æquus est B E Z exterior, per 32 primi. Igitur B E Z ipsius B A Z dupl⁹ erit: similiter G E Z ipsius G A Z duplus ostendetur. Totus igitur B E G totius B A G duplus erit. Si verò centrũ E sit extra rectas angulũ continẽtes, vt sumpto angulo B D G: Dico similiter B E G duplũ esse anguli B D G. Patet enim (ex 32 primi) ducta D E I recta, angulum I E G (exteriorem) æquum esse binis E D G, E G D, & proinde duplum ipsius

ipſius E D G. Sed & I E B ſimiliter duplus erit ipſius I D B, per eandem. Tollatur autem I E B duplus ab I E G duplo, necnon I D B ſimplex, ab I D G ſimplici. Reliquus B E G reliqui B D G duplus erit. In circulo itaque angulus qui ad centrum, &c.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur, ſi baſis angulos ſubtendens dimidiam excedat circunferentiam, angulos qui ad centrum, duplum efficere eorum qui ad circunferentiam.

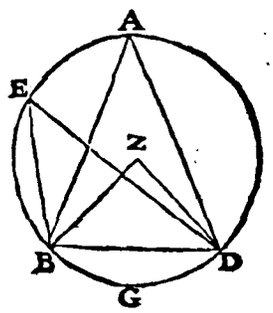
Si enim A G C circunferentia ſubtendat binos angulos A I G & G I C ad centrum, & eadem A G C ſubtendat angulum A B C ad circunferentiam, cùm oſtenſus ſit A I G duplus anguli A B G, necnon G I C duplus ipſius G B C, bini A I G & G I C ad centrum, duplum efficient totius A B C ad circunferentiam.



PROPOSITIO XXI.

In circulo qui in eadem ſectione ſunt anguli, ſibi inuicem ſunt æquales.

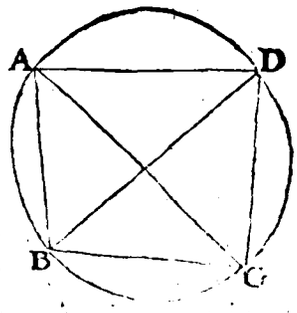
Eſto circulus A B G D, eius verò ſectio ſit B E A D, in qua ſint anguli B E D B A D: Dico eos eſſe æquales. Suſcipiatur (per 1 huius) centrum quod ſit Z, coniunctis Z B, Z D. Quoniam anguli B E D & B A D eandem circunferentiam baſin habent (ſcilicet B G D) cum angulo B Z D qui ad centrum, ipſi (per præcedentem) ſunt eiuſdem B Z D dimidij, & igitur (per 7 comm. ſententiam) æquales. In circulo igitur qui in eadem ſectione ſunt anguli, &c.



PROPOSITIO XXII.

In circulis quadrilaterorum exiſtentium, anguli qui ex oppoſito duobus rectis ſunt æquales.

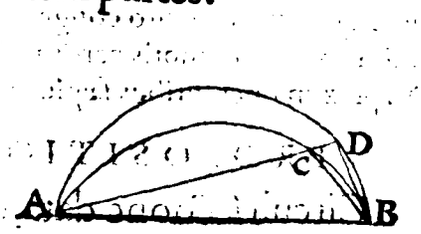
Sit in circulo A B G quoduis quadrilaterum A B G D: Dico angulos oppoſitos quadrilateri huius, ſcilicet B A D & B G D, ſiue A B G, & A D G, binis rectis æquos eſſe. Quoniam in eadem ſectione ſunt anguli A D B & A G B, ipſi ſunt (per præcedentem) æquales: ſimiliter B A G ipſi B D G. Bini itaque A D B & B D G binis A G B & B A G ſunt æquales, ſuper eiſdem baſibus conſtituti, & proinde totus A D G binis B A G A G B trianguli A B G æquus erit, quare bini A D G & A B G oppoſiti (tribus trianguli A B G, angulis æqui) duobus rectis æquales erunt, per 32 primi. Similiter æquales oſtendentur binis rectis reliqui B A D & B G D. In circulis igitur quadrilaterorum exiſtentium anguli qui ex oppoſito, &c.



PROPOSITIO XXIII.

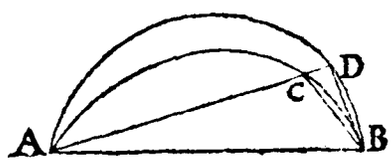
Super eadem recta linea, duæ ſectiones circulorum ſimiles & inæquales, non conſtituentur ad eaſdem partes.

Eſto recta A B: Dico ſuper ea duas ſectiones circulorum ſimiles & inæquales conſtitui non poſſe ad eaſdem partes. quòd ſi poſſe credatur, ſint A G B & A D B ſuper A B recta ſectiones inæquales & ſimiles, & ad eaſdem partes. Producatúrque recta A G in D, coniunctis B G, B D, cùm ſint ſimiles



ſectiones,

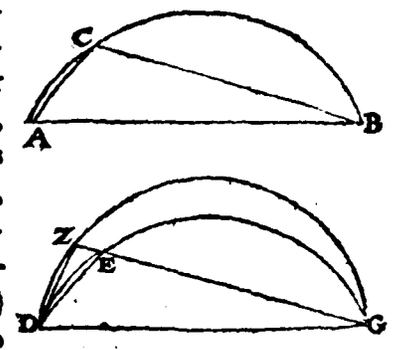
ſectiones, anguli A G B & A D B erunt (per 10 diffinitionem huius) æquales, exterior quidem A G B interiore oppoſito G D B, quod opponeretur 16 primi, & igitur abſurdum eſſet. Non itaque erunt ſuper recta A B ſimiles & inæquales ſectiones. Super eadem itaque recta linea, duæ ſectiones, &c.



PROPOSITIO XXIIII.

Super æqualibus rectis ſimiles circulorum ſectiones, æquales adinuicem erunt.

Super æqualibus rectis A B & G D ſimiles conſtant ſectiones A B C, D E G: Dico ſuper ipſis ſimiles & inæquales non poſſe conſtitui: ſi enim ſuper altera earum aliqua maior eſſe poſſit & ſimilis, eſto D Z G (excedens D E G) ſimilis & æqualis A C B ſectioni: coniungantur autem A C, C B, D E, E G, productáque G E in Z iungatur Z D. Quoniam ſimiles ſupponuntur A B C & D G E ſectiones, anguli A C B & D E G erunt (per 10 diffinitionem huius) æquales. Quia item ſimilis ponitur D Z G ſectio ipſi A C B, æqualis erit (per eandem) D Z G angulus A C B angulo. Atqui eidem A C B æquus fuit D E G angulus, ſequetur igitur angulum D E G exteriorem angulo D Z G vel D Z E interiori & oppoſito trianguli E D Z æquum eſſe, contra 16 primi, quod fieri non poteſt. Super rectis itaque A B & G D ſimiles ſectiones inæquales non erunt. Aequales igitur erunt. Super æqualibus ergo rectis, &c.



MONITVM.

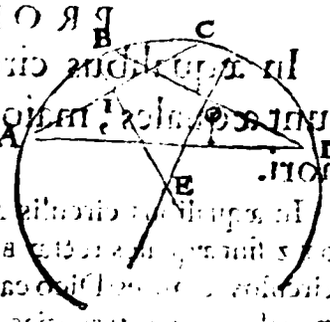
Quoniam Theon & Campanus hanc demonſtrare conati ſunt, aut hi à quibus demonſtrationes ſumpſerunt, inſtrumento ferè mechanico, nempe coaptata figura ſupra figuram, quod indignum traditione mathematica ſupramodum exiſtimatur, demonſtrandi nouam rationem aperire cogimur. Theon item hanc per 20 tertij, loco decimæ voluit oſtendere (fruſtra tamen.) Poterant enim ſuper eadem recta duæ deſcribi ſectiones circulorum, in pluribus duobus ſignis ſe non ſecantium, quare non neceſſariò concludit hoc ſuppoſito, quod videlicet congruentibus rectis, licet ſectiones circulorum non congruant, ſectionum circulos ſeſe in pluribus duobus ſignis ſecari, maximè ſi concurrant ſectiones tantùm ad extrema lineæ ſubtendentis ſigna, tunc in duobus illis ſeſe tantùm ſecabunt ſignis. Campanus verò vnam ſectionem per puram alterius ſuperpoſitionem, tanquam inſtrumento mechanico metitur vt æqualem probet, quod eſſe argumentum verè mechanicum patet. Aliquas inſuper demonſtrationes quaſdam hac via demonſtrare conati ſunt (veluti 4 & 8 primi, &c.) ſub octauæ communis ſententiæ quidem prætextu, per quam quæ ſibimetipſis congruunt vel conueniunt, æqualia adinuicem eſſe dixit Euclides, cupiens artem non artis praxim deſcribere. Quare non intelligit figuras ſuperponendas figuris vt æquales aut inæquales percipiantur, ſed figurarum aut aliorum quorumuis ſubiectorum quantitates, ratiocinante argumento conuenire cognitæ, adinuicem ſibimetipſis illæ quantitates æquales dicentur, non autẽ quæ experimento congruere palpantur, illæ æquales dici debeant. Matheſis enim ex præaſſumptis certis neceſſariò concludit, non autem ex ſenſibus externis praxim operantibus ſæpius fallacem.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA 3.

Circuli ſectione data, deſcribere circulum cuius eſt ſectio.

Data

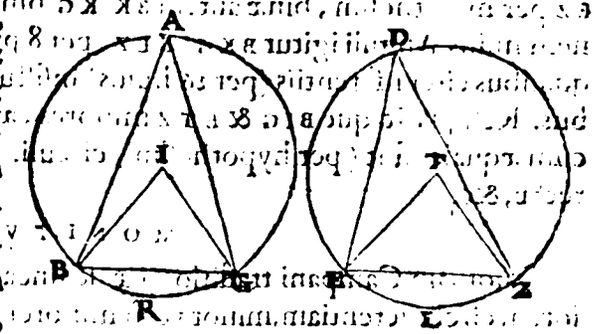
Data circuli ſectio ABC, in qua duæ rectæ nō parallelæ vtcunque ducantur AC & BD quibus bifariam in I & O ſectis, excitentur perpendiculares IE & OE. Sequetur (per coroll. 1. huius) in vtraſque eſſe centrum circuli ABCD, cōmune ſcilicet ipſis ſignum E: centro igitur E interuallo verò EA vel DE circulus perficiatur, per 3 poſt. Circuli igitur ſectione data deſcripſimus circulum cuius eſt ſectio.



PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis, æquales anguli in æqualibus circunferentiis conſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad circunferentias conſiſtant.

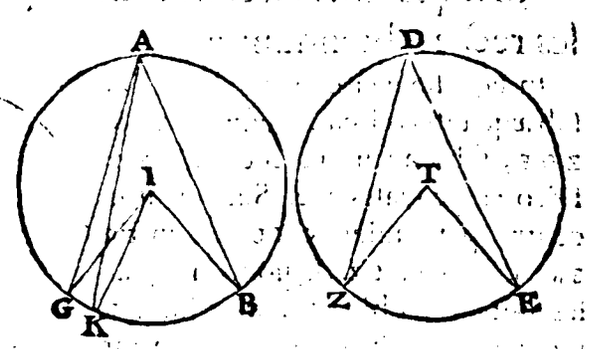
Sint æquales circuli ABG & DEZ, & in eorum circunferentiis BG & EZ ſint æqualium angulorū BIG & ETZ qui ad cētra magnitudines, per 8 diffinit. huius. ad circunferentias autem ſint BAG & EDZ æquales: Dico circunferentias BG & EZ æquales angulos ſubtendentes eſſe æquales. Cum per hypotheſim æquales ſint circuli, binę IB IG binis TE TZ, per 1 diffinit. huius, ſunt æquales. Sed & anguli qui ad I & T ſunt æquales, per hypotheſim: baſes igitur BG & EZ erunt (per 4 primi) æquales. Quia verò æquales ſunt anguli BAG & EDZ, nempe æqualium I & T dimidij, per 20 huius, ſimiles erunt circulorum ſectiones BAG & EDZ, per 11 diffinitionem huius. Super æqualibus autem rectis BG & EZ exiſtentes, erunt igitur æquales ſectiones BAG & EDZ, per 24 huius. Reliquæ itaque BRG & ELZ circunferentiæ, erunt (per 3 commun. ſententiam) æquales. In æqualibus igitur circulis, æquales anguli, in æqualibus circunferentiis, &c.



PROPOSITIO XXVII.

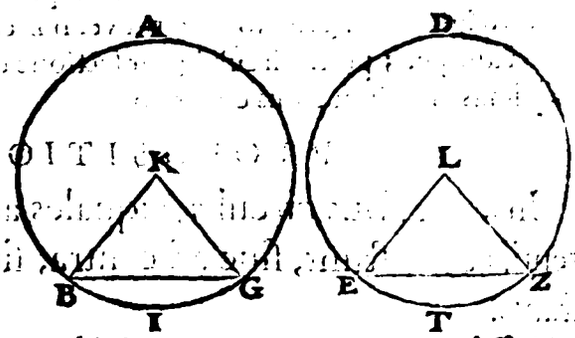
In æqualibus circulis ſuper æqualibus circunferentiis conſiſtentes anguli, ſunt æquales adinuicem, etſi ad centra, etſi ad circunferentias conſiſtant.

In æqualibus circulis ABG DEZ, ſuper æqualibus circunferentiis GB & ZE, conſiſtant anguli GAB ZDE ad circunferentias, ad centra verò GIB ZTE: Dico GAB & ZDE angulos æquales eſſe, ac GIB & ZTE ſimiliter æquos. Si enim non credantur, ſit alter ZTE minor ipſo GIB. Ad rectam autem BI ſignúmque I, dato ETZ angulo æqualis conſtituatur BIK, per 23 primi. Erit igitur æqualis BK circunferentia ipſi EZ, per præcedentem. Sed ipſi EZ æqualis eſt ſimiliter (per hypotheſim) BG circunferentia: ipſa igitur BK minor, ipſi BG maiori æqualis erit, quo nihil abſurdius. Non igitur eſt aliquis angulorum ZTE & GIB altero minor: æquales igitur ſunt. Et proinde GAB & ZDE ad circunferentias æqualium dimidij, per 20 huius, æquales erunt adinuicem, per 7 commun. ſententiam. In æqualibus igitur circulis ſuper æqualibus circunferentiis conſiſtentes anguli, &c.



PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis æquales rectæ circunferentias auferunt æquales, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.



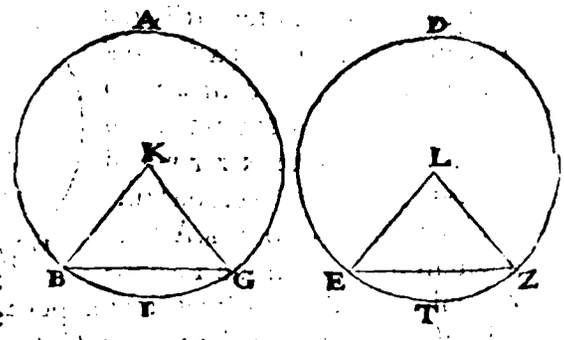
In æqualibus circulis A B G & D E Z sint æquales rectæ B G & E Z, circulos secantes: Dico eas auferre æquales circunferentias, scilicet maiorẽ B A G maiori E D Z, & minorem B I G minori E T Z. Suscipiantur, per 1 huius, centra circulorum K & L, coniunctis K B K G L E L Z. Quoniam æquales sunt B G & E Z per hypothesim, binæ autem B K K G binis E L L Z æquantur, per 1 diffinitionem huius. Anguli igitur B K G E L Z (per 8 primi) æquales erunt. Ipsi igitur in æqualibus circunferentiis (per 26 huius) insistunt, scilicet in B A G ipsi E D Z, maioribus. Reliquæ itaque B I G & E T Z minores, æquales erunt, per 3 commun. sentent. cùm æquales sint (per hypothesim) circuli. In æqualibus igitur circulis æquales rectæ, &c.

MONITVM.

Quoniam Campani traditio, quæ de linearum diuersitate loquitur, vt maior maiorem circunferentiam, minor verò minorem auferat, Theonis traditionem, de lineatũ diuersitate, apud aliquos discentes, sumi eodem modo forsan doceret, transposuimus tantùm hanc dictionem (*æquales*) addita particula *quidem*, vt lineæ æquales intelligantur, cùm verò maiorem & minorem dicit, circunferentias inter se comparari intelligemus. Plus enim nobis arrideret Theonis sententia huius theorematis, quàm Campani, dicentis maiorem lineam maiorem circunferentiam indistinctè auferre in æqualibus circulis, quod potest esse falsum, cùm quælibet recta in circulo tensa, binas subtendat circunferentias, maiorem scilicet & minorem, dempta diametro subtendente æquales. Si igitur maiori lineæ deputetur minor semicirculo arcus, minori verò rectæ maior, patebit maiorem rectam minorem arcum subtendere, & minorem rectam maiorem arcum, quod producet absurdum. Nos igitur Theonem veriorem sequutum esse viam existimantes, in hoc imitabimur.

PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, sub æqualibus circunferentiis æquales rectæ subtenduntur.

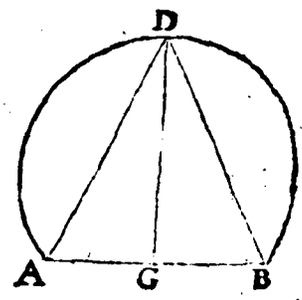


In æqualibus circulis A B G & D E Z, sub æqualibus circunferentiis G A B & Z D E, subtendantur rectæ B G & E Z: Dico eas æquales esse. Suscipiantur centra (per 1 huius) K & L, coniunctis B K, K G, E L, L Z. Quoniam æquales sunt circuli, binæ B K K G binis E L L Z (per 1 diffinitionem huius) erunt æquales. Quia verò circunferentiæ B A G & E D Z æqualium circulorum sunt æquales, reliquæ B I G E T Z, erunt æquales, quare anguli B K G & E L Z (per 27 huius) erunt æquales. Basis igitur B G (per 4 primi) basi E Z æqualis erit. In æqualibus igitur circulis sub, &c.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA 4.

Datam circunferentiam bifariam secare.

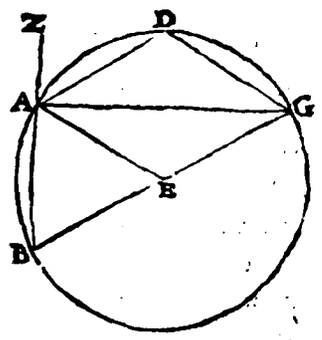
Esto data A D B circunferentia, quam oportet bifariam secare. Subtendat eam A B, cui bifariam in G sectæ, perpendicularis excitetur G D, cõiunctis A D D B. Quoniam æquales sunt binæ A G G D binis B G G D, & circum æquales angulos D G A D G B, per constructionem. Basis A D basi B D, per 4 primi, æqualis erit. Et proinde arcus A D arcui B D, per 28 huius, æquus erit (minor scilicet minori). Datam itaq; circunferentiam A D B bifariam in D secuimus.



PROPOSITIO XXXI.

In circulo angulus qui in semicirculo rectus est, qui autem in maiori sectione recto minor, qui verò in minore maior est recto, & insuper angulus maioris sectionis recto quidem maior est, minoris autem sectionis minor est recto.

In circulo B A D G cuius centrum sit E, angulus in semicirculo sit G A B, ducta diametro B E G. In maiori verò sectione sit angulus A B G, in minore autem sit A D G angulus. Maioris verò segmenti angulus, contineatur à circunferentia B A & recta A G, minoris verò segmenti, à circunferentia D A & eadem recta A G: Dico G A B rectum esse, A B G verò recto minorem, A D G autem recto maiorem. Angulum verò maioris sectionis G A B recto maiorem. Minoris verò G A D recto minorem esse. Extendatur B A in Z, ducta A E.



Quoniam quæ ex centro E A E B E G sunt æquales, anguli E A B E B A æquales erunt, similiter & anguli E A G E G A, per 5 primi. Totus itaque B A G binis, A B E A G E æquus erit. Sed binis A B E A G E est æqualis Z A G exterior, per 32 primi. Idem igitur Z A G toti B A G æquus erit, per 1 commu. senten. Recta igitur G A super rectam B Z angulos æquos efficiens, rectos efficiet, per 13 primi, rectus igitur erit B A G in semicirculo. Qui itaque in maiori sectione A B G, recto minor ostensus est, & insuper angulus sectionis G A B rectum B A G continens, maior est recto per 9 commun. sententiam: minoris verò sectionis angulus G A D, minor est recto G A Z, per eandem. Quia verò in circulo A G B existit quadrilaterum B A D G. angulos oppositos, A B G & A D G duobus rectis habet æquales, per 22 huius. Atqui A B G minor est recto, reliquus igitur A D G (in minori segmento) maior erit recto. In circulo itaque angulus qui in semicirculo rectus est, qui autem, &c.

COROLLARIVM.

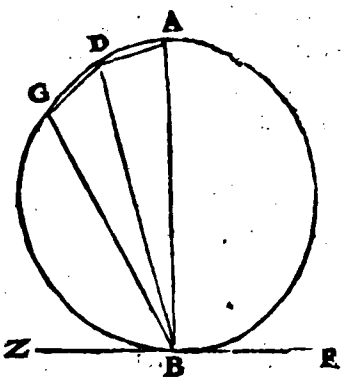
Hinc patet, Si trianguli angulus vnus, duobus reliquis fuerit æqualis, ipse rectus erit. Si verò contrà rectus sit, & binis æquus erit.

Trium enim trianguli angulorum dimidium vni recto æquipollere fatetur 32 primi.

PROPOSITIO XXXII.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem ducta fuerit quædam recta linea circulum secans, anguli quos efficit ad tangentem, æquales sunt eis qui in alternis circuli sectionibus consistunt angulis.

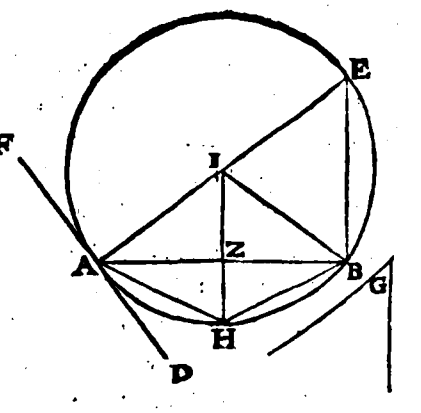
Circulum A D G B tangat recta E Z in B. A contactu autem B ducatur B D circulum secans: Dico angulos quos D B efficit ad E Z tangentem, scilicet D B Z, æquari ei qui in alterna sectione D A B reperietur, D B E verò ei qui in alterna sectione D G B consistit. Esto ipsi Z E ad signum B perpendicularis A B, coniunctis A D, D G, G B. In recta A B erit centrum circuli, per 19 huius. Angulus igitur A D B (in semicirculo) rectus erit, per præcedentem, & proinde reliquis D A B, D B A æqualis, per coroll. præced. Bini igitur D A B, D B A vni A B Z recto sunt æquales, communis auferatur D B A, reliquus D B Z (ad tangentem) reliquo D A B (in sectione alterna) æquus erit. Cæterùm quia quadrilaterum est in circulo A D G B, anguli D A B, D G B oppositi, duobus rectis sunt æquales, per 22 huius, sed duobus item rectis æquales sunt D B Z, D B E, per 13 primi. Bini itaque D A B, D G B binis D B Z D B E sunt æquales, atqui D A B alterno D B Z æqualis ostensus est. Reliqui igitur scilicet D B E (ad tangentem) & D G B (in sectione alterna) erunt æquales, per 3 commun. senten. Si itaque circulum tetigerit aliqua recta linea, &c.



PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA 5.

Super data recta linea, describere sectionem circuli capientem angulum æqualem, dato angulo rectilineo.

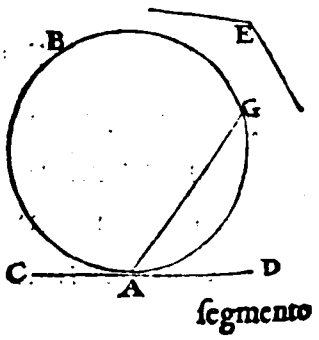
Esto data recta A B, datus verò angulus G, ad datam A B & signum eius A, dato angulo G, æqualis constituatur angulus B A D (per 23 primi) producta D A in F. Ad signum A rectæ D F perpendicularis excitetur A E. Ipsi verò A B bifariam diuisæ in Z, perpendicularis fiat I Z, quæ secabit rectam A E, cùm A D & A B non sint parallelæ, secet igitur in I, coniuncta I B, centro verò I, interuallo autem I A circulus describatur A B E, circa dimetientem A E. Quoniam æquales sunt A Z, Z I ipsis B Z, Z I, & angulus angulo, bases A I & I B æquales erunt, per 4 primi. Cadit igitur circulus in B, per decimamquintam diffinitionem primi: producta autem I Z in H, iungantur H A, H B, B E: quia D F ad rectos diametro A E constituitur, ipsa (per coroll. 16 huius) circulum tangit, & proinde (per præcedentem) B A D ad tangentem angulus, ipsi A E B in sectione alterna æquus erit. Et igitur angulus G (ipsi B A D per hypothesim æqualis) eidem A E B æquus erit, si autem obtusus fuerit datus G angulus. Similiter ad B A F applicatus, ostendetur æqualis alterno A H B: Si autem rectus proponatur datus G, ad datam A B semicirculus describatur, ea etenim sectio circuli rectum capit angulum. Super data itaque recta linea, &c.



PROPOSITIO XXXIIII. PROBLEMA 6.

A dato circulo sectionem abscindere, capientem angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Esto datus circulus A B G, datus verò angulus sit E, circulum verò A B G tangat recta C D (per 17 huius) in A. Ad rectam autem C D & signum eius A, dato angulo E æqualis constituatur C A G ad tangentem, per 23 primi, ipse C A G æquus erit ei qui in segmento A G angulo, per 32 huius. Haud secus ostendetur, si datus angulus æqualis ponatur angulo D A G, eum æqualem esse ei qui in alterno

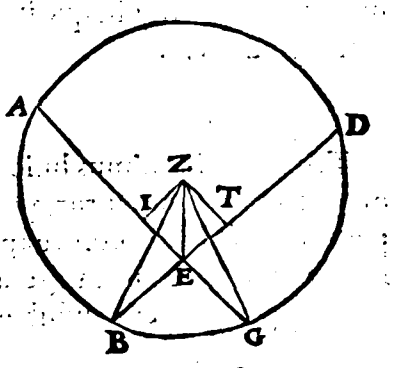


segmento

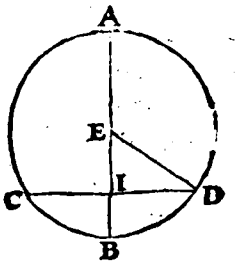
ſegmento A B G. A dato igitur circulo A B G ſectionem abſcidimus A G, vel G B A, capientem angulum dato angulo E rectilineo æqualem.

PROPOSITIO XXXV.

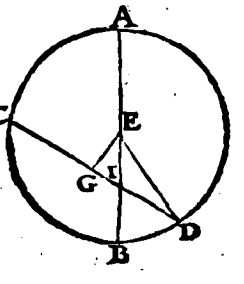
Si in circulo duæ rectæ ſeſe ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquum eſt ei quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur rectangulo.



In circulo A B G D, cuius centrum ſit Z, duæ rectæ A G & D B, ſeſe ſecent in E, & primò non per centrum extenſæ: Dico rectangulum ſub D E, E B, æquum eſſe rectangulo ſub A E, E G comprehenſo. A centro Z perpendiculares in vtramque A G & D B demittantur Z I Z T, coniunctis Z B, Z E, & Z G. Quoniam Z I, & Z T rectæ, ſecant bifariã (per 3 huius) rectas A G & D B, Z E verò ſecat eas inæqualiter. Erit (per 5 ſecũdi) rectangulum ſub A E, E G cũ quadrato ex I E, æquum ei quod ex I G dimidia quadrato. Quia verò (per 47 primi) quadrata ex I G & I Z, æquantur ei quod ex Z G, ſequetur rectangulum ſub A E E G vnà cum quadratis I E & I Z, æquari ei quod ex Z G. Cùm autem quæ ex I E & I Z ſint æqualia ei quod ex Z E, per eandem 47 primi, rectangulum ſub A E E G; cum quadrato Z E, æquum erit quadrato ex Z G. Haud diſſimili argumento patebit, rectãgulum ſub D E E B, cum quadratis ex T E T Z, hoc eſt, cum ſolo ex Z E, æquum eſſe quadrato ex Z B. Sed cum Z G & Z B ſint (quæ ex centro) æquales, & proinde ex ipſis quadrata æqualia, ſequetur rectangulum ſub A E E G cum quadrato ex Z E æquum eſſe rectangulo ſub D E E B cum eodem quadrato ex Z E. Quare cõmuni ex Z E ablato, reliquum ſcilicet rectangulum ſub A E E G ſectionibus vnius, æquum erit rectangulo ſub D E E B ſectionibus alterius. Hæc autem cùm binę inæqualiter ſeſe ſecant non per centrum extenſæ, dicta ſint.

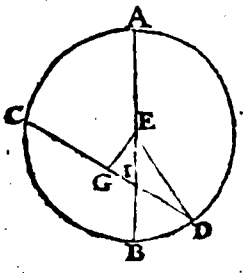


Secundò cum vna bifariam, altera verò per centrum extenſa, inæqualiter ſecatur, vt in circulo A C B D, cuius centrum ſit E, recta A B dimetiens inæqualiter ſecta, bifariam ſecat rectam C D in I, coniuncta E D, quoniam bifariam ſecat A B rectam C D, & ad rectos eam ſecat, per 3 huius. Per præaſſumptam itaque quintam ſecundi rectangulũ ſub A I I B cum quadrato ex E I, æquum eſt ei, quod à dimidia E B, vel E D ſibi ex centro æquali: ſed eidem ex E D quadrato æquum eſt rectangulum ſub C I I D (hoc eſt, quadratum ex I D, eſt enim ſecta bifariam C D) cum quadrato E I, per 47 primi. Communi igitur ex E I quadrato ablato, rectangulum ſub A I I B, æquum erit rectangulo ſub C I I D, hoc eſt quadrato ex C I vel I D æqualibus facto.



Tertiò autem cùm ea quæ per centrum extenſa, inæqualiter reliquam per centrum non extenſam ſecat, vt A B dimetiens ſecat C D, & ab ea ſecatur inæqualiter in I, demittatur perpendicularis à centro E in C D, quæ ſit E G, & iungatur E D, ipſa E G ſecat (per 3 huius) bifariam rectam C D. Quod igitur ſub C I I D rectangulum, cum quadrato ex G I, æquum eſt quadrato ex G D, per 5 ſecundi. Addatur commune quadratum ex G E. Erit quod ſub C I I D cum quadratis ex G I & G E æquum eis quæ ex G D G E, quadratis: ſed ex G I & G E quadrata, ei quod ex E I ſunt (per 47 primi) æqualia. Quod itaque ſub C I I D cum quadrato ex E I, æquum erit eis quæ ex G D G E quadratis. Atqui (per eandem quintam ſecundi) quod ſub A I I B cum quadrato ex E I, æquum eſt quadrato ex E B, hoc eſt, ex E D ſibi æquali. Quod autem ſub

tem ſub C I I D cum quadrato ex E I æquum fuit quadratis ex G D G E, hoc eſt, eidem quadrato E D, per 47 primi. Quod igitur ſub C I I D cum quadrato E I, æquum erit ei quod ſub A I I B cum eodem quadrato E I. Communi verò ablato quadrato ex E I, ſupereſt quod ſub C I I D ſectionibus vnius, æquum eſſe ei quod ſub A I I B ſectionibus alterius rectangulo. Si verò quartò vtraque per centrum ſiue bifariam ſeſe ſecent, ſub earum ſectionibus rectangula quadrata erunt, & cùm ſint quæ ex centro æqualia, ea rectangula quadrata producent. Si itaque in circulo duæ rectæ ſeſe ſecuerint, rectangulum, &c.

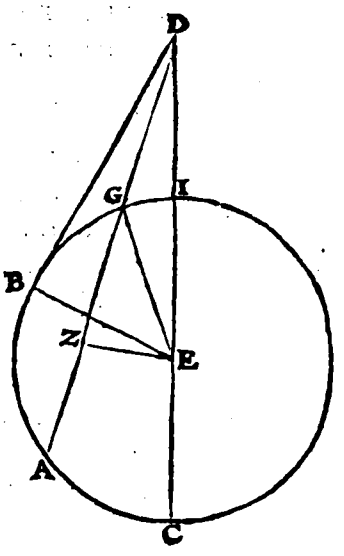


MONITVM.

Triplicem intulimus huic demonſtrationem, eò quòd lineæ variis ſecandi modis in circulo coaptentur, quorum tantùm Theon vnum, ſcilicet cùm nulla earum per centrum deſcribitur, expoſuit, reliquos omittens, duos ſcilicet quibus lineæ ſeſe ſecantes, vel earum altera centrum occupat, propriis figuris demonſtrandos, quibus quartus facilis exhibetur, & ſine figura, nulla ambiguitate propalatus.

PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum ſumatur ſignum, ab eóque duæ rectæ lineæ cadant, & earum altera circulum ſecet, altera verò tangat, quod ſub tota ſecante & eius parte extrinſecus ſumpta comprehenditur rectangulum, æquum eſt ei quod fit ex tangente quadrato.

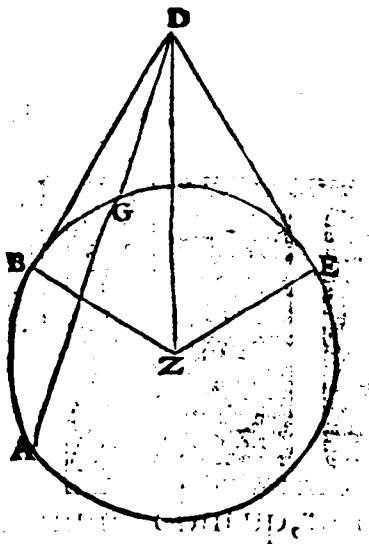


Extra circulum A B G C ſumatur aliquod ſignum D, à quo duæ producantur lineæ, quarum altera circulum tangat vt D B, altera verò ſecet vt D C, ſed primò per centrum quod ſit E: Dico rectangulum ſub tota ſecante D C & eius parte D I extra circulum ſumpta comprehenſum, æquari ei quod fit ex D B tangente quadrato. Coniungatur E B: ipſa erit rectæ B D perpendicularis, per 18 huius, quoniam (per 6 ſecundi) quod ſub C D tota cum appoſita & D I appoſita rectangulum, cũ eo quod à dimidia E I (vel E B) fit quadrato, æquum eſt ei quod ex dimidia & appoſita E D fit quadrato: ſed quadrato ex E D æqualia ſunt quę ex D B, E B (per 47 primi.) Commune autem tollatur quadratum ex E B, ſupereſt rectangulum ſub C D & parte D I æquum eſſe quadrato quod fit ex D B tangente. Ad ſecundum autem recta ſecans ſecet non per centrum, ſitq; illa D G A, cui perpendicularis à centro E deſignetur E Z, ea bifariam ſecabit rectam A G (per 3 huius). Coniuncta E G, quoniam (per eandem 6 ſecundi) quod ſub A D, G D cum quadrato G Z æquum eſt quadrato D Z. Ipſis commune addatur quadratum Z E. Erit quod ſub A D, D G, cum quadratis G Z, Z E (hoc eſt cum quadrato G E per 47 primi) æquale quadratis D Z Z E, ſed quadratis D Z, Z E æqualia ſunt quadrata D B, B E, cùm ſint vtraque æqualia ei quod ex D E, per 47 primi: quod igitur ſub A D, D G cum quadrato G E (hoc eſt B E ex centro ſibi æquali) æquum erit quadratis D B, B E. Commune autem tollatur ex B E quadratum: ſequetur rectangulum ſub tota A D ſecante & parte D G extrinſecus ſumpta contentum, æquum eſſe ei quod fit ex D B tangente quadrato. Si itaque extra circulum ſumatur ſignum ab eo, &c.

PROP

PROPOSITIO XXXVII.

Si extra circulum ſumatur aliquod in plano ſignum, & ab eo in circulum duæ incidant rectæ, quarum altera circulum ſecet, altera verò incidat. Sit autem quod fit ſub tota ſecante & extrinſecus ſumpta eius parte, æquale ei quod fit ex incidente, incidens circulum tanget.



Sumatur extra circulum ABE aliquod ſignum D in eodem plano, à quo duæ procedant ad circulum rectæ, quarum altera ſcilicet DGA circulum ſecet, altera verò DB incidat. Sit autem quod ſub tota AD & eius parte extrinſecus ſumpta DG rectangulum, æquum ei quod fit ex DB incidente quadrato: Dico ipſam DB incidentem, circulum tangere. ſuſcipiatur (per primam huius) circuli centrum Z. A dato vero ſigno D tangens ducatur DE, per 17 huius, coniunctis ZB, ZD, ZE. Cùm autem rectangulum comprehenſum ſub AD, DG æquum ſit (per hypotheſim) quadrato quod fit ex DB incidente, & (per præcedentem) æquum ſit quadrato DE tangentis, ipſæ DB, DE erunt æquales. Quia verò binæ DB, BZ binis DE, EZ ſunt æquales, baſis autem DZ communis, angulus DBZ angulo DEZ recto æquus erit, per 8 primi. Rectus igitur erit DBZ angulus, & proinde ad extremum diametri BZ rectos efficiens DB incidens, circulum tanget, per coroll. 16 huius. Si itaque extra circulum ſumatur aliquod ſignum, &c.

COROLLARIVM.

Si à ſigno extra circulum ſumpto, plures rectæ circulum ſecuerint, rectangula comprehenſa ſub ſingulis & earum parte extrinſecus ſumpta, erunt ſibi inuicem æqualia.

Nam quodlibet eorum, quadrato quod fit à tangente æquum oſtenditur, inſuper à quouis ſigno binæ tangentes, in circulum ductæ ſibi inuicem ſunt æquales. Cùm ſint ſingularum quadrata, æqualia rectangulo ſub tota ſecante, & eius parte extrinſeca ſumpto.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER QVARTVS.

DIFFINITIO I.

FIGVRA rectilinea plana in plana rectilinea inſcribi dicitur, quando vnuſquiſque inſcriptæ figuræ angulus, vnumquodque latus eius in qua inſcribitur tangit.

DIFFINITIO II.

Figura autem circa figuram deſcribi dicitur, quando vnumquodque latus circunſcriptæ, vnumquemque angulum eius circum quam deſcribitur, tangit.

Hæc figurarum rectilinearum inſcriptio & circunſcriptio, ad eas tantùm colligitur figuras, quæ rectilineæ deſcriptæ æquiangulæ & æquilateræ exiſtunt. Omnis nanque figura plana rectilinea totidem angulis quot & lateribus vallatur. Ea de cauſa præcipit, vnius angulos totidem alterius coaptari lateribus. Secus erit in figuris ſolidis, quarum ſæpius baſes, anguli, & latera eiuſdem figuræ, diuerſis exprimuntur numeris. Quare alia diffinitione libro vndecimo elucidabuntur.

DIFFINITIO III.

Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, quando vnuſquiſq; inſcriptæ figuræ angulus circuli circunferentiam tangit.

DIFFINITIO IIII.

Circulus verò circa figuram rectilineam deſcribi dicitur, quando circuli circunferentia vnumquemque eius circum quam deſcribitur, angulum tangit.

DIFFINITIO V.

Circulus autem in figura rectilinea inſcribi dicitur, quando circuli circunferentia vnumquodque latus eius in qua deſcribitur, tangit.

DIFFINITIO VI.

Figura verò rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando vnumquodque latus circunſcriptæ, circunferentiam tangit.

Licet circulum ingrediantur ac contineant ſæpius trapezia, & aliæ quorumuis polygonorum irregulares ſpecies, quorum angulos quoſq; circunferentiam tangere

gere ſufficit, quamuis inæquales ſint ſibiipſis: quia tamen quæ circulum ambiunt æquilatera, ea proinde ſequetur eſſe æquiangula, quæ verò trapezia aut alia quęuis irregularia circulum ambiunt, angulorum regulam non ſequuntur, veluti inſcripta oſtendimus ſequi 22 tertij. Sola æquiangula & æquilatera diſcutiet hoc quarto Euclides, ob eorum regulatam methodum.

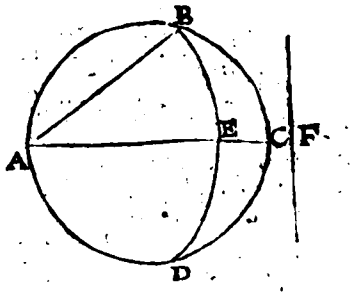
DIFFINITIO VII.

Recta linea circulo congruere dicitur, quando eius extrema in circuli circunferentiam cadunt.

Cùm lineam circulo congruere, coaptari, ſubtendere, deſcribere, duci, &c. huius ſignificationis voces, quibus videmur iam antea prioribus demonſtrandis vſi eſſe, idem ſonent, putarent aliqui hanc diffinitionem fruſtrà ab Euclide poſitam eſſe, ſcilicet qui terminos diffiniret, poſt eorum cœptum vſum: Dicemus itaque lineas quas antea circulo adaptauimus, indeterminatas eſſe, ac cõfuſas, nec datas quidem ſua cõſtantes & propoſita longitudine, ſiue ea certa fuerit, ſiue incerta. Quas verò hac diffinitione explicamus, eas intelligamus eſſe quaſcunque nobis propoſitas diametrum circuli non excedentes, dato circulo coaptatas: illę etenim ei circulo verè congruere dicuntur, eò quòd earum propoſita quantitas, dato circulo quadam demonſtrandi facultate, non autem caſu coaptetur, inter duo eius circunferentiæ ſigna producta, vt proxima & huius prima patefaciet propoſitio.

PROPOSITIO I. PROBLEMA 1.

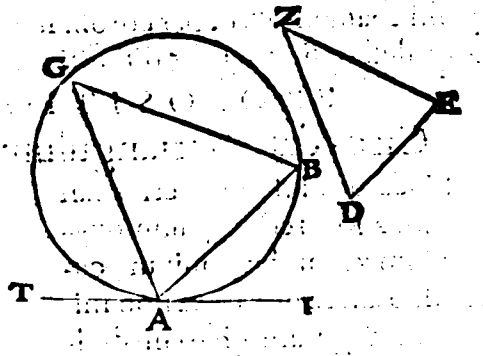
Intra datum circulum, datæ rectæ lineæ diametro non maiori æquam rectam lineam coaptare.



Sit datus circulus A B C D, cuius dimetiens ſit A C, data verò recta eſto F, oportet iam ipſi F dato circulo, coaptare æqualem. Siquidem F diametro æqualis exiſtat, petitum adeſt. Si minor fuerit F, ex A C diametro datæ F æqualis tollatur A E. Centro verò A, interuallo autem A E, circulus B E D deſcribatur. Coniuncta A B (per diffinitionem 15 primi) æqualis erit ipſi A E, & proinde ipſi F datæ. Recta verò A B cùm minor ſit dimetiente, in circunferentiam cadit. Recta igitur A B circulo A B C D, coaptata eſt, per 7 diffinitionem huius.

PROPOSITIO II. PROBLEMA 2.

In dato circulo, dato triangulo æquiangulum triangulum inſcribere.



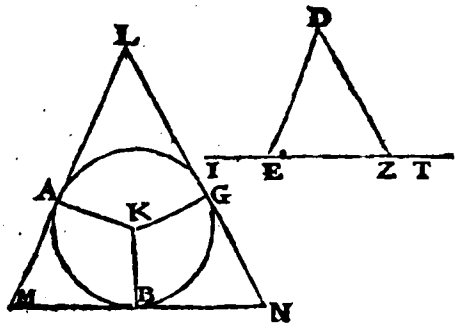
Eſto datus circulus A B G, datũ verò triangulum ſit D E Z. Dato A B G circulo tangẽtem lineam (per 17 tertij) ducamus T A I. Ad rectam autẽ T I ſignum verò eius A (cõtactum) ipſi D E Z æqualis angulus cõſtituatur T A G, angulo D Z E æqualis ſit I A B, per 23 primi, coniuncta G B. Quoniam à contactu A recta A B circulum ſecat, angulus T A G (ad tangentem) æquus erit angulo A B G in alterna ſectione per 32 tertij. Eodem igitur argumento æqualis erit I A B angulus, angulo A G B in reliqua ſectione. Sed T A G ipſi D E Z æqualis poſitus eſt: I A B verò angulo D Z E. Anguli igitur A B G A G B ſinguli, ſingulis D E Z D Z E æquales erunt. Et proinde (per coroll. 32 primi) reliquus G A B reliquo Z D E æquus erit, nempe duorum rectorum reſidui. Aequiangulum itaque erit A B G triangulum dato D Z E triangulo, & circulo A G B inſcriptum, per 3 diffinit. huius. In dato itaque circulo A G B dato triangulo D E Z, æquiangulum triangulum A B G inſcripſimus.

PROP

PROPOSITIO III. PROBLEMA 3.

Circa datum circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum describere.

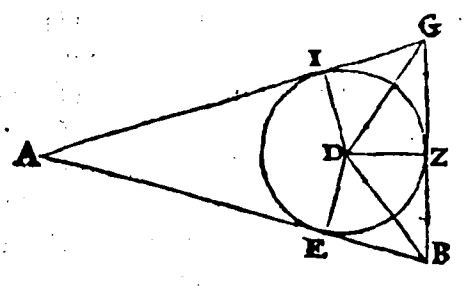
Esto datus circulus A B G datum verò trian gulum sit D E Z, cuius vnum latus E Z producatur vtrinque, in I & T. Suscipiatur centrum circuli (per 1 tertij) sitq; K: ad signum autem K dato I E D angulo, æqualis constituatur A K B, dato verò D Z T æqualis sit B K G, per 23 primi. Ad signa verò A B G tangentes, per 17 tertij du cantur M A L M B N & N G L. Quoniam autem quadranguli A K B M quatuor anguli qua tuor rectis sunt æquales, per corol. 32 primi, quorum bini oppositi K A M K B M sunt recti. Reliqui itaque A M B A K B duobus rectis sunt æquales. Sed duobus itidem rectis æquales sunt I E D D E Z, per 13 primi. Bini itaq; A M B A K B binis I E D D E Z æquales erunt. Ab æqualibus igitur æquales tollantur I E D & A K B positi. Reliquus A M B reliquo D E Z æquus erit. Eodem argumento ostendemus G N B ipsi D Z E æquum esse. Cùm bini G K B G N B & bini D Z T D Z E duobus rectis æquipolleant, &c. Trianguli igitur M N L reliquus qui ad L, reliquo qui ad D triãguli E D Z æquus erit, per coroll. 32 primi. Circa datum itaque circulum A B G dato triangulo D E Z æquiangulum L M N triangulum descripsimus, per 6 diffini. huius.



PROPOSITIO IIII. PROBLEMA 4.

In dato triangulo, circulum describere.

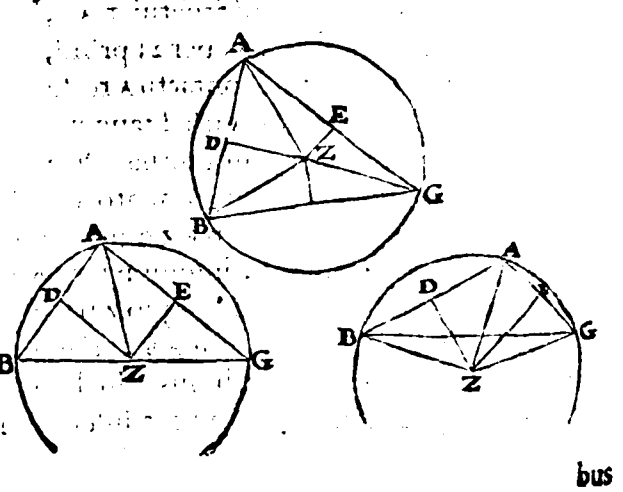
Proponatur triangulum A B G, cuius duo B & G anguli bifariam secentur per 9 primi, ductis G D, B D rectis, sese in D secantibus. A signo autem D in singula trianguli latera per pendiculares agantur, D E D I D Z, per 12 primi. Quoniam triangulorum D B E D B Z duo anguli D E B D Z B recti sunt æquales, per constructionem, & D B E ipsi D B Z, per 7 com munem senten. vnúmque latus D B commune, quod æquos subtendit angulos. Reliqua igitur latera D E & D Z æqualia erunt, per 26 primi. Similiter ostendemus D Z & D I æquales esse eisdem de causis. Centro itaque D, interuallo autem D Z, circulus ducatur E Z I. A b eodem signo D tres rectæ æquales in circunferentiam circuli cadent, signum igitur D centrum erit circuli E Z I, per 9 tertij, qui tanget latera propositi trianguli A B G, per coroll. 16 tertij. In dato igitur triangulo A B G circulum E Z I descripsimus, per 5 diffinitionem huius.



PROPOSITIO V. PROBLEMA 5.

Circa datum triangulum, circulum describere.

Sit datũ cuiusuis generis trian gulum A B G, rectangulum, oxygonium vel amblygonium, cuius duo latera quę circa non minorem angulum bifariam diuidantur, scilicet A B & A G in D & E: ab ipsis porrò signis, D & E perpendiculares excitentur rectis A B A G, sintq; E Z D Z concurrentes in Z, coniunctis Z A Z B Z G. Perspicuum est (ex constructione) duo latera Z D D B, duo-



bus

bus Z D D A, & angulos Z D B Z D A (rectos) esse adinuicem æqualia. Et proinde (per 4 primi) basin Z B basi Z A æqualem esse. Similiter triangulorum A E Z G E Z bases Z A Z G æquales ostendentur. Tribus igitur rectis Z B, Z A Z G æqualibus duo tis, centro Z, interuallo autem Z A circulus describatur, A B G. Cùm à signo Z plures duabus in circunferentiam rectę ducantur, ipsum Z centrum erit circuli, A B G verò circunferentia (per 9 tertij) per trianguli angulos A B G ducta Circa datum itaque triangulum A B G circulum A B G descripsimus, per 4 diffinitionem huius.

COROLLARIVM.

Hinc sequitur centrum circuli triangulum rectangulum ambientis, in latus trianguli cadere, oxygonium verò ambientis intra triangulum cadit. Amblygonium autem ambientis extra triangulum esse.

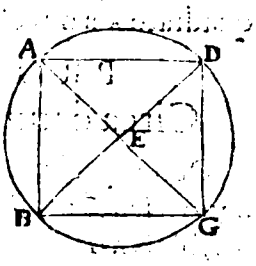
Nam rectus angulus semicirculum possidet, acutus verò plus semicirculo, obtusus autem minus semicirculo complet (per 31 tertij.) Tres itaque sunt sectiones, quarum in semicirculo linea secans habet centrum, in maiori verò sectione centrum est intus, in minori autem extra sectionem, & igitur extra triangulum insectione constitutum.

MONITVM.

Triangulorum tria genera diuersas inscribendi leges exigentia, vnica methodo tribus simul figuris deseruienti, circulo inscribi demonstrauimus paruula hac sumpta hypothesi, qua bifariam secamus duo latera trianguli, quæ circa nõ minorem angulum: hoc enim assumptum reliqua necessariò sequuntur.

PROPOSITIO VI. PROBLEMA 6.

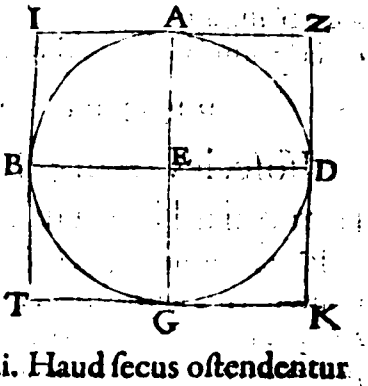
In dato circulo, quadratum inscribere.



Circulus datus sit A B G D, eius centrum E, diameter verò A G, cui ad angulos rectos excitetur ad signum E recta B D per 11 primi, coniunctis A D, D G, G B, B A, quoniam centrum est E, æquales sunt rectæ E A, E B, E G, G D, & angulos æquos comprehendunt, nempe rectos. Bases itaque A B, B G, G D, D A (per 4 primi) sunt æquales, sed anguli A B G, B G D, G D A, & D A B sunt in semicirculo, cum A G & B D sint dimetientes, & igitur recti, per 31 tertij: quadrilaterũ itaque rectãgulum est & æquilaterum A B G D, & igitur quadratum, per 30 diffin. primi. In dato itaque circulo A B G D quadratum A B G D inscripsimus.

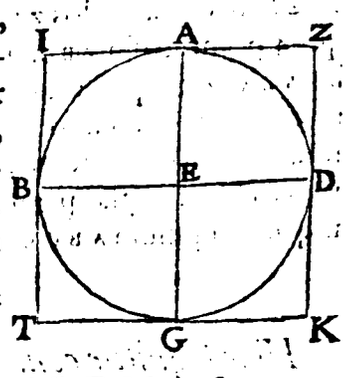
PROPOSITIO VII. PROBLEMA 7.

Circa datum circulum, quadratum describere.



Sit circulus A B G D, cuius centrum sit E (per 1 tertij) dimetiens verò A G, cui ad rectos excitetur per E recta B E D, per 11 primi. Ad signa autem A B G D tangentes circulum ducantur, I Z, Z K, K T, T I, per 17 tertij, cùm autem recti sint (per hypothesim) qui ad E anguli & (per 18 tertij) qui ad A recti, parallelæ sunt B D & I Z (per 28 primi) simili argumento item parallelæ erunt, T K, & B D, ac binæ I T, Z K, ipsi A G Parallelæ igitur erunt I Z & T K, necnon I T & Z K, cùm non sint in rectum posite (per 30 primi: quia verò parallelogrãmum est A G, I T, dimetienti A G æqualis erit I T, per 34 primi. Haud secus ostendentur reliquæ T K, K Z, Z I dimetienti æquales esse. Quadrilaterum itaque æquilaterum erit

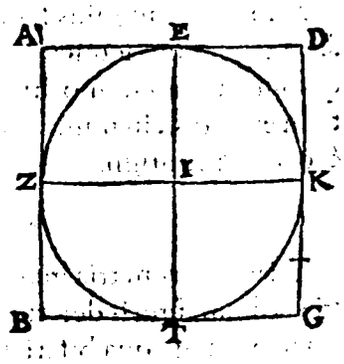
rum erit I T K Z: cùm autem angulus A G T sit rectus, & (per 34 primi) rectus erit A I T, & eadem causa reliqui qui ad T K & Z recti erunt. Rectangulum igitur erit N T, K Z, & æquilaterum, & proinde quadratum, per 30 diffinitionem primi, cuius quidem latera tangunt circulum in signis A B G D, per coroll. 16 tertij. Circa datum itaque circulum A B G D quadratum I T K Z descripsimus, per 6 diffinitionem huius.



PROPOSITIO VIII. PROBLEMA 8.

In dato quadrato circulum inscribere.

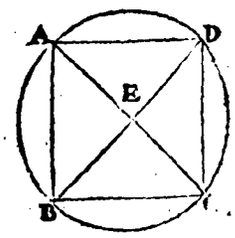
Esto datum quadratum A B G D, cuius duo latera A B & A D bifariam secentur in E & Z, ductis parallelis scilicet E T ipsis A B & D G, & Z K rectis A D & B G, per 31 primi. Parallelogramma igitur erunt A I, I G, E K, Z T, per 36 diffinitionem primi, recta igitur I E ipsi A Z (dimidiæ lateris quadrati, per 34 primi) æqualis erit, similiter & reliquæ I Z, I T, I K eidem dimidię lateris, æquales ostẽdentur. Quare adinuicem æquales erunt. Centro I interuallo I E circulus describatur per E Z, T K, qui non secabit rectas A D, D G, G B, B A super extremitate diametri, ad rectos constitutas, per 16 tertij, sequetur ab vno signo I plures duabus rectis in circunferẽtiam cadere, scilicet I E, I Z, I T, I K, quare signum I centrum erit circuli E Z T K, per 9 tertij, circunferentia autem tangit quadrati singula latera in E Z T K, per coroll. 16 tertij. In dato itaque quadrato A B G D circulum E Z T K inscripsimus, per 5 diffinitionem huius.



PROPOSITIO IX. PROBLEMA 9.

Circa datum quadratum circulum describere.

Detur quadratum A B G D, excitatis dimetientibus A G B D, in signo E sese secantibus. Quoniam bina latera A G A B, & basis B G, binis A G A D, & basi D G sunt (per diffinitionem quadrati) æqualia, angulus G A B angulo G A D (per 8 primi) æquus erit. Triangulorum itaq; A E B A E D bina latera A E A B, binis A E, A D æqualia æquos comprehendunt angulos E A B, E A D, bifariam rectum D A B secantes. Bases itaque E B, E D (per quartam primi) sunt æquales. Similiter æquales ostendentur reliquæ A E, E G rectæ, ac reliqui anguli recti bifariam secari. Quare æquales angulos E A B, E B A subtendendentia latera E B, E A æqualia erunt, per 6 primi, quibus æqualia fuerunt E D, E G. Centro igitur E interuallo E A, circulus per A B G D ducatur, singulos quadrati A B G D angulos tangens. Sequetur, circa datum quadratũ A B G D circulum A B G D descriptum esse, per 4 diffinitionem quarti.



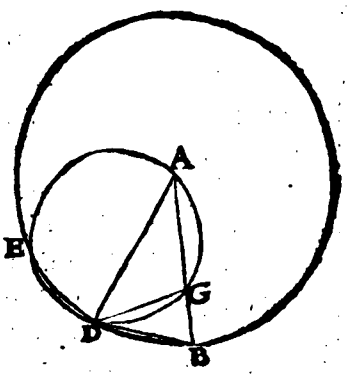
PROPOSITIO X. PROBLEMA 10.

Isosceles triangulum constituere, habens vnumquemque eorum qui ad basin sunt angulorum, duplum reliqui.

Proponatur recta A B, quæ (per 11 secundi) ita secetur in G, vt quod sub tota A B & altero segmentorum G B, comprehensum rectangulum: æquum sit ei quod fit ex A G quadrato. Centro verò A, interuallo autem A B, circulus describatur B D E, ipsi porrò A G æqualis applicetur recta circulo, sitq; B D, per 1 huius. Et coniunctis G D & A D, circa triangulum A G D, circulus describatur A G D E per 5 huius. Et quia

quod

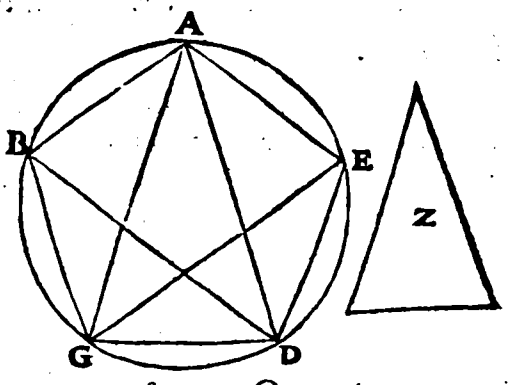
quod ſub A B & B G æquatur quadrato ex A G, idem æquabitur quadrato ex B D, quę ipſi A G ponitur æqualis. Et cùm recta B A circulum A G D ſecet, B D verò eidem circulo incidat, ipſa B D per 37 tertij ducta à ſigno B extra circulum ſumpto, circulum tanget. Angulus igitur B D G, ad tangentem, angulo D A G (in alterna ſectione) æquus erit, per 32 tertij. Communis ponatur G D A. Bini itaque B D G G D A, binis G A D G D A æquales erunt. Sed binis G A D G D A interioribus ex oppoſito æquus eſt exterior B G D, per 32 primi. Angulus igitur B G D binis B D G G D A (hoc eſt toti B D A) æquus erit: & proinde angulo A B D, qui eſt ipſi B D A æqualis (per 5 primi) eſt enim iſoſceles A D B, & itaque G D recta ipſi B D (angulum æqualem ſubtendenti) æqualis erit per 6 primi, necnon rectæ A G, cui B D æqualis eſt poſita. Cùm autem G D & A G ſint æquales, anguli G D A, G A D ſunt (per 5 primi) æquales: ſed ipſi G D A, æqualis fuit B D G. Totus igitur B D A, ipſius G A D duplus erit, ſimiliter & D B A eiuſdem G A D duplus erit: eſt enim A D B ipſi A B D æqualis poſitus: iſoſceles itaque triangulum conſtituimus A B D, habens vnumquemque eorum, qui ad baſin ſunt angulorum A B D, A D B, duplum reliqui B A D.



PROPOSITIO XI. PROBLEMA 11.

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

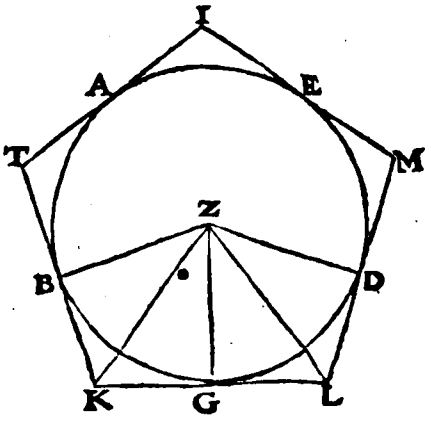
Proponatur circulus A B G D E, ſumatúrque triangulũ iſoſceles (iuxta prędecentẽ) quod ſit Z, ipſi verò Z æquiangulum triangulum circulo inſcribatur A G D, per 2 huius. Erunt itaque eius anguli qui ad baſin A G D A D G ſinguli dupli anguli G A D, ex præfata: ſecentur bifariam anguli A G D, A D G per B D & E G, per 9 primi, coniunctis, A B, B G, A E, E D, rectis. Erunt igitur quinque æquales anguli G A D, A D B, B D G, A G E, & E G D. Quare (per 26 tertij) circunferentiæ A B, B G, G D, D E, & E A æquales erunt. Et (per 29 eiuſdem) ſub eis æquales ſubtenduntur rectæ. Aequilaterum itaq; erit pẽtagonum A B G D E. Cæterùm cùm circunferentiæ ſingulæ, ſingulis ſint æquales, binæ binis æquales erunt, vt B G D ſectio, G D E ſectioni, ſimulac ipſis G B A, B A E, A E D, ſingulis ſectionibus, quæ (per 21 tertij) æquales continent angulos. Aequiangulum igitur & æquilaterum erit pentagonum. In dato itaque circulo A G D, pentagonum æquilaterum & ęquiangulum A B G D E inſcripſimus.



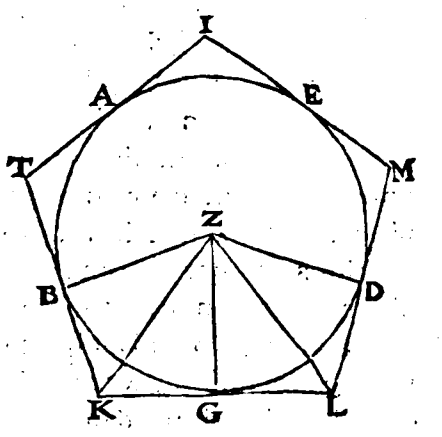
PROPOSITIO XII. PROBLEMA 12.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus A B G D, in quo (per prędecentem) ſumantur quinque ſigna, angulos inſcripti pentagoni deſignãtia, A B G D E. Per ea verò ſigna tangentes circulum ducantur T I T K K L L M M I, ductis à centro quod ſit Z rectis, Z B Z G Z D Z K & Z L. Quoniam (per 18 tertij) recti ſunt Z B K Z G K anguli, recta Z K vtroſque ſubtendens, efficit quadratum (per 47 primi) æquum eis quæ ex Z G G K. Similiter eis quæ ex Z B B K. Qui itaque ex Z G G K



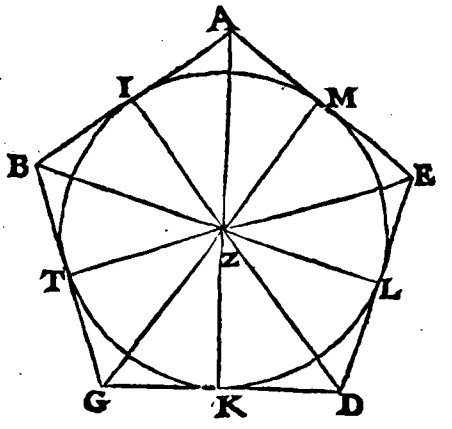
æquantur quadratis ex z b & b k. Ab iis porrò æqualia auferantur ex z b & z g (quæ ex centro) quadrata. Reliqua ex b k & ex g k erunt æqualia, & proinde lineæ b k & g k atque (per 8 primi) anguli b z k g z k erunt æquales. Haud secus ostendentur æquales g l l d, & anguli g z l d z l adinuicem. Quia verò totus b z g toti g z d est (per 27 tertij) æqualis, super æqualibus b g g d ex hypothesi circunferentiis, dimidius k z g dimidio l z g æquus erit. Aequiangula igitur erũt triangula g z k g z l, & reliqua b z k d z l quotcunque. Et vnum latus (quod scilicet ex centro) vni lateri æquale. Bases igitur (per 26 primi) b k, k g, g l, l d, d m æquales erunt. Duplæ igitur earum t i t k k l l m m t rectæ æquales erunt. Aequilaterum igitur est pentagonum i t k l m. Cæterùm quia angulus b k g constat ex binis b k z g k z æqualibus ipsis g l z d l z, totus b k g toti g l d æqualis erit, similiter eisdem æquales erunt reliqui d m e e i a a t. Aequiangulum igitur erit i t k l m quinquangulum. Circa datum itaque circulum a b g d pentagonum, æquilaterum & æquiangulum i t k l m descripsimus.



PROPOSITIO XIII. PROBLEMA 13

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere.

Sit datum pentagonum æquilaterum, ac æquiangulum a b g d e, cuius b g d, g d e anguli bifariam diuidantur, per 9 primi, ductis g z, d z rectis: à z autem (earum concursu) in reliquos angulos rectæ ducantur z e, z a & z b. Quoniam autem binæ b g, g z binis d g, g z & anguli b g z & d g z æquantur, bases b z & d z æquales erunt. Similiter ostendentur g z & e z æquales, per 4 primi, & æqualia & æquiangula triangula b z g, g z d, d z e. Et proinde reliqua e z a, a z b eodem argumento eisdem æqualia erunt, & æquiangula. Cæterùm ducantur à signo z in pentagoni latera perpendiculares z i, z t, z k, z l, z m. Triangulorum z t g, z k g, duo anguli z t g, z g t, duobus z k g, z g k æquales sunt, per constructionem, & vnum latus z g commune: reliqua igitur z t, z k latera erunt æqualia, per 26 primi, ac eadem via z l, z m, z i ipsis z k & z t ostendentur æquales. Centro itaque z interuallo verò z i ductus circulus, per eque distantia à signo z alia signa circunducetur i t k l m, in lateribus pentagoni existentia, quæ latera circulum tãgunt, per corol. 16 tertij, super extremitate diametri ad rectos constituta. In dato itaque pentagono æquilatero & æquiangulo a b g d e, circulum i t k l m inscripsimus.



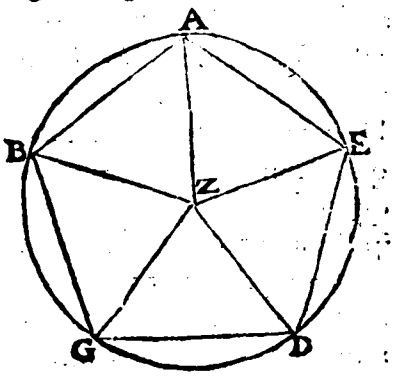
PROPOSITIO XIIII. PROBLEMA 14.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

Esto datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum a b g d e, cuius duo anguli b g d & g d e bifariam (ex 9 primi) secentur, per rectas g z, & d z. A concursu autem z ducantur z a, z b, z e. Quoniam binæ b g, g z, binis d g, g z, & anguli b g z, & d g z æquantur, ex hypothesi, reliqua latera b z, & d z æqualia erunt, &

triangula

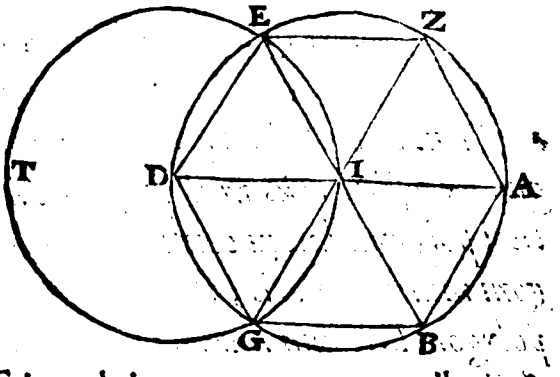
triãgula B G Z G D Z æqualia,& æquiangula,per 4 primi, necnon E D Z eiſdem eodem argumẽto,æquabitur.Quia verò Z G D & Z D G anguli,æqualium dimidij,ſunt æquales,rectæ Z G & Z D æquales erunt, haud ſecus eiſdem Z B, & Z E reliquæ, per 6 primi, erunt æquales.Angulus igitur A B Z dimidius erit anguli A B G, nam A B G (pentagoni) eſt reliquis E D G, B G D æqualis poſitus.Sed bini A B Z & G B Z æquales, continentur æquis lateribus A B, B Z ipſis G B, B Z, baſes igitur G Z, Z A (per 4 primi) ſunt æquales. Rectæ itaque A Z, B Z, G Z, D Z, & E Z erunt æquales, centro quidem Z interuallo Z A circulus A B G D E, per ſingulos angulos pentagoni ductus tranſit,nec aliquod eius latus ſecabit, per 2 tertij, cùm intra circulum cadunt. Circa datum itaque pentagonum æquilaterum & æquiangulum,circulum deſcripſimus.



PROPOSITIO XV. PROBLEMA 15.

In dato circulo hexagonum,æquilaterum & æquiangulum, inſcribere.

Datus circulus ſit A E G, cuius centrum I,dimetiens verò A I D, centro D interuallo D I circulus deſcribatur E I G T, coniunctis E I B, G I Z, item A B, B G, G D, D E, E Z, & Z A. Quoniam rectæ E D, G D, æquantur rectæ D I, cùm ſint omnes ex centro circuli E I G T,& rectæ E I, G I eidem D I ſint æquales,cùm ſimiliter à centro circuli A E G oriantur:adinuicem igitur erunt ipſæ E D, G D, E I, G I & D I æquales. Triangula itaque E I D, I D G æquilatera & æquiangula erunt,per 1 primi,quia verò tres trianguli interiores anguli duobus rectis æquantur,per 32 primi, E I D angulus, duorum rectorum tertiæ parti æquipollet:ſimiliter & D I G, quare & reliquo tertio duorum rectorum æquiualet G I B angulus. Nam recta G I ſuper E I B rectam conſiſtens duobus rectis æquos efficit,per 13 primi. Aequales igitur ſunt E I D, D I G, G I B anguli,& igitur B I A, A I Z, & Z I E (qui ad eorũm verticem per 15 primi) erunt eis æquales & adinuicem. Et æqualibus rectis(quæ ex centro) comprehenſi. Sequetur igitur (per 4 primi) baſes A B, B G, G D, D E, E Z,& Z A eſſe æquales.Aequilaterum itaque erit A B G D E Z hexagonum. Cùm autem A Z E & Z E D anguli & reliquorum ſinguli, ex binis æqualibus A Z I, E Z I, ipſis Z E I, D E I (qui æquantur duorum rectorum duobus tertiis) fiant, ipſi erunt æquales adinuicem. Aequiangulum igitur & æquilaterum erit hexagonum A B G D E Z. In dato itaq; circulo A E G hexagonum æquilaterum, & æquiangulum A B G D E Z inſcripſimus.



COROLLARIVM.

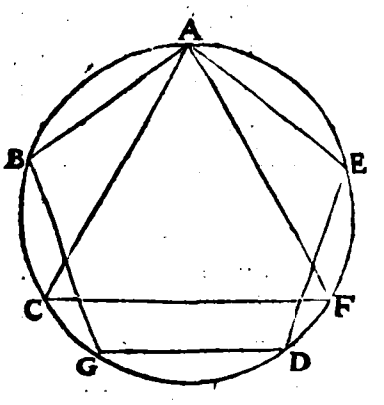
Hinc aſſequimur latus hexagoni æquum eſſe ei quæ ex centro circuli id ambientis.

Quòd ſi hexagoni reliquas circulo inſcriptiones & circunſcriptiones inquiramus,pentagoni methodum ſectemur,12.13.14.præcedentibus expoſitam,per rectas ſcilicet perpendiculares à centro in baſes, circulum illi inſcribemus, circulo verò exagonum circunſcribemus per tangentes,&c.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA 16.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum,& æquiangulum inſcribere.

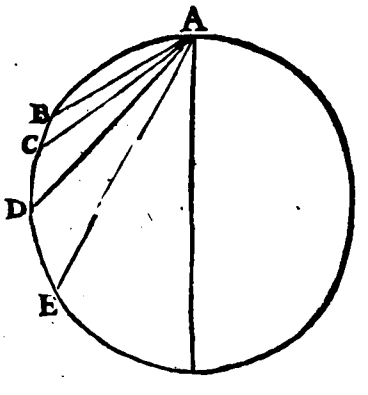
Esto datus circulus A C D, cui per 11. huius inscribatur pentagonum A B G D E, & eidem per 2 huius ad signum A inscribatur triangulum æquilaterum A C F. Quoniam totius circunferentiæ tertiam partem subtendit A C, hoc est quinque quindecimas. Duo verò pentagoni latera A B B G, earumdem quindecimarum circũferentiæ subtẽdunt sex, cùm quodlibet quintum tres sumat quindecimas. Si ab ipsis A B B G subtendentibus sex, ipsam A C subtendentem quinque tollamus, supererit C G, vna quidem pars quindecima totius circunferentiæ: coaptemus igitur rectam G E; & ipsi reliquas æquales, circulo A C D (per 1 huius) ipsæ æquales circunferẽtias subtendent, per 28 tertij, & igitur circuli quindecimas. Quin decagonum igitur æquilaterum inscriptum est circulo A C D. Et quoniam binæ rectæ angulos quindecagoni constituentes, æquales sumunt circuli sectiones, in his sectionibus æqualibus, anguli (per 27 tertij) æquales erunt. Aequiangulum igitur, & æquilaterum est quindecagonum circulo A C D inscriptum. Cùm autem huic circulum inscribere, vel circunscribere, vel eidem circulo hunc circunscribere curabimus, ars pentagonorum, vt in exagono diximus, imitanda erit.



ADDITIO AD INVENTIONEM INFINITORVM POLYGONORVM.

Si in circulo duorum polygonorum latera coaptentur ab vno signo, excessus arcus maioris supra minorem, cõprehendet arcum tot futuri polygoni latera continentem, quot vnitatibus denominatio polygoni minoris lateris, denominationem maioris excedet: futuri autem polygoni laterum numerus, ex multiplicatione denominationem prædictorum polygonorum consurget.

Vt exemplo elucidemus in circulo A B E coaptentur latera hexagoni quidẽ A B per 15 huius, pentagoni A C per 11 huius, tetragoni A D per 6 huius, triãguli verò æquilateri A E per 2 huius: Dico A D arcus excessum supra areũ A B scilicet B D arcum, continere tot latera optati polygoni, quot vnitatib⁹ denominator ipsius A B hexagoni, denominatorem A D quadrati excedit. Quia verò is excessus est 2 vnitatum, duo erunt in B D latera. Optati verò polygoni denominator, ex multiplicatione denominationum polygonorum consurget, scilicet ductis 6 per 4 fiet 24 denominans polygonum, cuius duo latera subtẽdent arcum B D. Qualium etenim tota circunferentia est 24, earum partium est A B subtendens 4 & A D sex. Si itaque ex A D sex partes subtendente tollantur quatuor, quas subtendit A B, supererunt ipsi B D duę, qualium quidem tota est 24. Ex hexagono igitur & quadrato, fit polygonum 24 laterum. Similiter ex hexagono A B & pẽtagono A C, fiet polygonum 30 laterum, cuius vnum latus subtendet arcum B C. Nam A B ipsam A C denominationem vnitate tantùm excedit, similiter quoniam A B excedit ipsius A B denominationem ternario, arcus B E continebit tria latera polygoni 18 laterum. Hac eadem seruata methodo, infinita polygonorum latera perscrutari licebit.



IN

IN QVINTVM ET SEXTVM EVCLIDIS, PROOEMIVM.

VERAM *philosophiæ legem sectantes, quæ successiuè fieri motum edocemur, quæ liquidiora & percipiendæ geometriæ rudiora essent, quatuor prioribus Euclidem tradidisse libris, iam anteà docuimus. Namque primo linearum situs, triangula & parallelogramma ita disposuimus, vt priores eorum naturæ partes, discentibus captandæ nullo negotio forent. Secundo linearum admirabiles sectiones. Tertio eius perfectissimæ figuræ circularis incredibiles virtutes, & penè naturæ legibus incomprehensas. Quarto demum regularium, planarumque figurarum picturas circuli virtute sæpius astructas, quibus discentium mentes planè sublimiora totius geometriæ principia (hoc quinto inchoata) recepturæ, disponantur. Quocirca id obseruandum est, Euclidem post linearum & planorum constructionem traditam, methodica lege eorum inter se habitudinem siue respectum, illico nobis offerre, vt adinuicem facta comparatione siue relatione, quæ quantitatum alterationes, aut variationes producant, nobis sit notum. vt autem facilior præbeatur aditus habitudinis earum seruandæ, præcensendum est geometriam solas magnitudinum quantitates, nullas verò earum respicere qualitates, eásque vnitas & insolutas, ita vt discentium ingenijs earum integritas necessariò confusionem (discretionis vrgente penuria) pariat. Maximè cùm duplicem quantitatum naturam magnitudinibus attribuat geometria, certam scilicet & incertam, quas alieno nomine dicunt aliqui decimo libro, rationalem, & irrationalem, sane horum principiorum legibus arctatam earum vtramque. Quia verò harum quantitatum subest tanta respectus diuersitas, qua aliæ commensurabiles, aliæ verò (opposita denominatione) incommensurabiles dicantur. Certarum siue commensurabilium certis quantitatibus methodum, à numerorum facilitate accipere non dedignabitur, ac eorum obsequio tanta facilitate, confusas ex se & continuas quantitates distribuet, qua non solùm exactas habitudines certarum, sed incertarum respectus quadam lege dijudicandos aperiet, id quidem vnica multiplicandi lege, ab Arithmeticis implorata. Geometræ etenim nullam multiplicationem vnica magnitudine comprehendere possunt, propriam arithmeticis, eùm hi discreta, illi verò continua & insecta semper discutiant, eousque confusa, quod citra discretorum obsequium ad continuorum respectus seu affinitates explicandas fluctuantes, palari cogantur. Quare quicquid multiplex aut multiplicatum siue quauis arte discretum, sub vnica quantitate denominabitur, id arithmetica lege factum oportet existimari. Hoc enim vnicum his quinto & sexto ab arithmetica exposcit geometria, scilicet multiplicationem, cuius adminiculo quantitatum respectus patefaciet. Quippe hoc vnum tibi præcinam, decernens Euclidis elementa, à tam varijs tantísque naufragijs temporum iniuria susceptis eripere, ac in germanum geometriæ dogma quibusuis postpositis interpretum sententijs (vt par erat) restituere: le-*

ctorem, ſi quæ non hactenus vulgaria à reliquiſque tradita emerſerint obteſtamur, non prius re planè perſpecta acimente concepta cenſuram agere. Geometricas namque confuſiones intelligentiæ conferendas diſcernere, non exiguum fuiſſe debili noſtro conatui negotium, interpretúmque diſſidia propalare. Quæ orta ſunt non concepta Euclidis mente, in adaptandis numerorum principijs, cùm ad confuſa continua numerorum diſcretione elucidanda ventum eſt, quorum præcipuum iuuamen multiplicationem comperit. Ea tamen ſolertia, vt æquè magnitudines, multiplicato quantitatum augmento, adaugeat, quàm, multiplicato earundem quantitatum decremento, ipſas minuat: ſemper autem maiori numero, maiorem actionem exprimens, ſiue augmentum fuerit, ſiue decrementum. Maior etenim augmenti actio, magnitudinem maiorem deprimet, maior ſimiliter decrementi actio, magnitudinem minorem producet. Cupientes itaque confuſas & ſua continui ſorte latentes geometriæ magnitudines, diſcentium ingenijs faciliori intelligentia infundere, earum quantitates propria natura continuas, hypothetica ſolutione ab arithmeticis deſumpta, ſæpiuſculè diſcernemus. Ea quidem quæ per frequentem eius magnitudinis ſumptionem aut per eiuſdem frequentem detractionem, vel equidem permixtam, ſcilicet frequentem partim ſumptionem, partim verò detractionem producetur, vt ſatis ſuperque norunt, qui arithmetices limina ingreſſi fuêre. Omnimodè tamen illam multiplicationem vocauit Euclides, qua latius vtetur tribus ſextum ſequentibus libris: nulla autem partitione, cuius intelligentia per multiplicationis oppoſitum ſeſe ſenſibus offert. Quam etenim, qui praxim ſequuntur arithmeticam, vocant partitionem, eandem decrementi multiplicationem, hoc eſt, partium frequentem ſolutionem dicemus: nam ab vtraque idem oritur effectus. Cæterùm geometricas quantitates diſcutiens Euclides, certarum intelligentiam ab incertarum quantitatum notione, diſtare, numeris in obſequium vocatis exponere cogitur. Quod autem tradendum ſuſcipit, more regularis diſciplinæ inſerendum diſcentibus ſe nititur. Cuius quidem diſciplinæ quo ampliora ac generaliora fiunt præcepta, eo magis locuples, ac fœta reperitur methodus. Nam diſciplinarum vires circa infinitum verſantur: infinitæ namque certarum quantitatum fiunt inter ſe conferentiæ. necnon incertarum inter ſe totidem, quæ mortalium ſententijs nulla arte præterquam per numeros ſubijci poſſunt. Numerorum itaque leges inquirendæ ſunt, quæ infinitos præ ſe ferant actus, quibus infinitæ illæ collatarum adinuicem quantitatum diuerſitates, à ſeipſis recedere certa intelligibiliq; diſcrepantia notari poſſint. Arithmeticen igitur ſcrutatus Euclides, vt quod in ea generalius liberiusq; præceptum, ſuo negotio decens ſibi foret ſumendum perquireret. Bina ſibiipſis conuerſa offendit principia, multiplicationem ſcilicet, & diuiſionem, reliqua totius ferè arithmetices in ſe primordia fouentes. Multiplicatio etenim omnes augendorum numerorum in ſe complectitur facilitates, diuiſio verò minuendorum. Sub augmento autem, æqualitate, ac decremento cunctæ teguntur habitudinum alterationes (nam æqualitas nulli obnoxia exiſtit alterationi.) Binarum rurſus (multiplicationis & diuiſionis) altera tantùm infinitos præ ſe fert actus, ſcilicet multiplicatio: omnis namque numerus per omnem multiplicari poteſt, diuidi autem nequaquam. Inſuper omnis numerus infinitè multiplicari poteſt, contra verò diuidi tantùm poteſt numerus ad vnitatem vſque. Non igitur huic negotio diuiſionem, ob finitam eius potentiam vtilem comperit Euclides,

ſed

ſed ideo multiplicationem aſciuit, vt per infinitas eius operationes, infinitas ſuarum geometricarum magnitudinum comparationes propalaret. Quam quidem multiplicationem ea ſagacitate in diuiſionis contorſit obſequium, vt eiſdem multiplicantibus numeris, propoſitam Geometricam magnitudinem decreſcat, frequentibus ſuipſius partium detractionibus, quibus eandem increuit collatis frequentibus ſuipſius repetitionibus. Sed partium frequens detractio nihil aliud quàm diuiſio operatur, quæ quidem frequentia, per liberam vnitatum multitudinem, concipi poteſt. Diuiſionem igitur, quam arithmetici finitam limitatamq; patiuntur, multiplicatione perficit Euclides, quæ infinita conferendis quantitatibus profert exequia.

Hac ideo de cauſa multiplicationem tantùm ſibi ſociauit Euclides, vt potiſſimè infinitorum propoſitorum infinita eſſent, ſiue in augmentum, aut equidem in decrementum obſequia. Cùm autem his quinto & ſexto, vtraque & certarum, & incertarum quantitatum leges præſcribendæ ſint, generalia tantùm proferemus elementa, æquè in certas vt in incertas quantitates imperantia, nullo earum perſpecto diſcrimine, quouſq; ad decimum librum præfatis prius arithmeticorum elementorum tribus libris nos conferamus. Sed quia incertarum quantitatum methodus, ex certarum traditione patefieri debet, ſuſcipiet hoc quinto Euclides comparandas per multiplicationem, ſeu æquè multiplicia, magnitudines: quibus adminiculis quantitatum reſpectus, ſiue reſpectuum naturam propalabit, collatis quidem maioribus ad minores, aut certè minoribus ad quantitates maiores, præfata multiplicandi lege. Quánam verò arte fiant hæ decrementi multiplicationes, ſeptimo libro dicturi ſumus, ac binis eum ſequentibus, vt tandem decimum attingentes, quantitates numeros recipientes, à quantitatibus numeros non recipientibus ſecernamus: interdum quæ vtriſque conuenient fundamenta iacientes.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER QVINTVS.

DIFFINITIO I.

PARS, eſt magnitudo minor, quæ à maiore ſumitur.

Receptum eſt omne analogum prius diſtinguendum quàm eſſe diffiniendum: diſtinguemus itaq; hanc geometricam partem, à parte arithmetica. Cùm etenim geometricæ denominationes quantitatem ſonent confuſam, Arithmeticæ verò quantitatis denominationem, numeris diſtributam proferant. Partem hanc geometricam eſſe dicemus, non tantùm (vt aliquibus placuit) eam quæ ſæpius repetita totum præcisè conſtituit, quæ arithmeticis peculiaris exiſtit. Sed præter id eam quæ quouiſmodo à maiore ſumpta maioris quantitatem ſui facta ad reliquum comparatione exprimat. Confusè autem hanc diffinimus partem, geometricum imitantes morem, eò quòd omnis quantitas minor à maiore detracta, pars eius liberè dici poſſit. Detractiones autem illæ in varias incidentes quantitatum naturas, ob immenſam geometrię in magnitudines potentiam, quid producant, ſuis locis (Supero fauente) narrabimus, inchoantes interdum ab iis, quæ huic ſeſe offerunt diſcutienda negotio. Pars itaque ea dicetur magnitudo, quæ ad totum relata, ab ipſóq; detracta, aliquid reſiduum relinquit. Siue ea pars ſæpius repetita totum præcisè conſtituat, ſiue per non præciſas repetitiones, illud idem componat. Aut equidem per partis ablatæ reaſſumptionem idem totum reintegret: vt quandoque decimo dicturi ſumus. Ea ſemper minor à maiore quauis arte ſumpta, maioris pars apud geometras dicetur.

MONITVM.

Huius diffinitionis voces aliquas tranſtulimus, cùm dixiſſet Theon partem eam eſſe quæ totum metitur, non exiſtimantes huic ſententiæ Euclidem ſubiacere. Quippe qui futuro decimo incertam magnitudinem à certa propoſita detrahere (vt incertam eam propalet) ſibi futurum eſſe præuidet. Et proinde incertam veluti totius certæ abſtractum, eiuſdem certæ partem fore concludit, ſuo toti penitus incommenſurabilem: nihilominus partem diffiniſſet eam, quæ maiorem vel totam metitur magnitudinem (licet toti certè incommenſurabilem futuram eſſe ab illa detractam, apotomen ſe oſtenſurum expectaret, 73 decimi, ac ſectæ 11 ſecundi rectæ ſectiones, partes eſſe videret) non credimus, obſtante horum elementorum ac totius geometriæ immaculata methodo, cuius facultas ad commenſurabiles & incõmenſurabiles defertur quãtitates. Non igitur Euclidem eius arithmeticæ partis diffinitionẽ geometriæ deſtinaſſe credemus. Quam ideo ſcripſit Theon partis diffinitionem, arithmeticis relinquemus. Is namque vtriuſque diſciplinæ diffinitiones commiſcuit, immemor quanto abinuicem diſtent. Nos itaque diſciplinarum dignitatem obſeruantes, quæq; cuiuis competant, ſeorſum explicanda eſſe conſulimus,

limus,ne cùm ad decimum peruenerimus(vtriuſque certæ ſcilicet ac incertæ quantitatis præcepta docentem) fœdata extet huius matheſis immaculata methodus, exceptionibus,limitationibus, reſtrinctionibus, ampliationibus, & huiuſce cautelis incertarum profeſſionum cultioribus ornamentis. Sed ſibi perpetuo conſtans certis valletur principiis. Et tandem commune illud 9 eloquium (totum ſcilicet ſua quauis parte maius haberi)veneremur.

DIFFINITIO II.

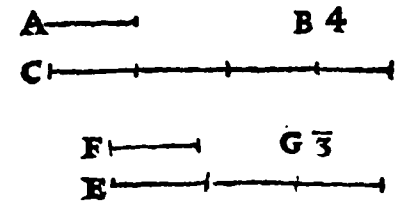
Multiplex eſt maior minore,quando eam metitur minor.

Hanc multiplicis vocem à numeris ſubfuratur Euclides,cuius relatiuam ſimplicem eſſe dicemus,non autem partẽ,vt Campanus & Theon aſſeruerunt. Totum namque parti relatiuè collatum,generaliora his exiſtunt.Omne etenim multiplex ſimplicis eſt totum,ſimpléxque multiplicis pars. Sed non à conuerſa omne totum eſt ſuæ partis multiplex, cùm omne totum ad partem habitudinem numerorum non recipiat, quam multiplex ad ſimplicem magnitudinem ſuſcipit. Et ideo eam dicit eſſe maiorem, quam minor metitur, quia per numerum maiorem multiplex, per minorem verò(aut verius vnitatem)ſimplex denominatur. Atqui omnem numerum metitur vnitas:facilè igitur cõceptu erit,ſimplicem metiri multiplicem. Vt autem hæc ſuo ordine diſtribuamus, geometriæ imprimis quantitates continuas ac confuſas, ſola vnitate denominari iampridem ſuſcepimus. Quæ vnitas nullam ſectionem aut multitudinem in ſe patitur. Similiter geometrica quantitas multitudine,aut quauis ſectione caret,& eapropter nihil multiplicare poteſt.

Quemadmodum enim quantitas vnitate denotata in partes ſecta, relicto vnitatis nomine, ſuſcipit numeri partium nomen:Sic & geometrica quantitas, vnica,ſiue continua,adueniente ſectione diſcreti nomen, relicto continui nomine, ſuſcipit.Cùm autem multiplicis denominatio à multiplicatione dependeat, multiplicatio verò à numeris,multiplex(numerorum legem proſequentes)dicemus operationem illam ſeu effectum multiplicandi, aut equidem eam actionem, qua numerus ſimplicẽ quantitatẽ ſua diſcretione ita in augmentũ vel decrementũ alterat, ſuarũ quidẽ vnitatum repetitione, quod ab hoc effectu procreata quantitas, reſpectũ in ſimplicẽ ab alterante numero denominatũ concipiat. Multiplex namque nec maius aut minus à magnitudinis quantitate dici poteſt, ſed ab actionis quantitate à maiori vel minori vnitatum frequentia genita. Quare non quantitati multiplicationem ineſſe putemus, ſed tantùm ei actioni ſeu operationi,qua per alterantem numerum ex ſimplici producitur multiplex. Quia igitur alteratio illa numero exequium parat,ſimplex verò vnitatis denominatione tegitur,manifeſtum erit multiplex illud exequium maius ſimplice exhiberi, cùm ſemper numerus vnitate maior exiſtat,ac numerum vnitas ſemper metiatur. Minor itaque ſimplex vnitate concluſa,quæ per vnitates alterantis numeri multiplicem producit, dicetur eam multiplicem, & ideo maiorem, per vnitates alterantis numeri metiri, & eiuſdem dicetur pars, aut partes arithmeticæ, quæ ad multiplex arithmeticum ſunt relatæ,non autem pars geometrica,cùm non ſemper geometrica pars,multiplex totum componens ſub numerorum reſpectu ſuſcipere poſſit. Quare hanc multiplicis vocem, non ad omnes geometricas magnitudines ſumpſit Euclides,ſed ad eas tantùm quæ reſpectum inter ſe ſeruant quem numeri. animaduertendum autem eſt, geometriæ leges æquè in infinitum quantitatum decrementũ,vt in infinitum incrementũ ſua dilatare dominia. Quælibet namque magnitudo infinitè minui, vt infinitè augeri poteſt. Cùm igitur multiplicandum propoſitæ quantitatis augmentum ſuſcipimus, multiplex maiorem producet quantitatem multiplicata. Si verò decrementum, minorem multiplicata producet. Eorum tamen multiplicium vtrumque(vt iam diximus) à maiori denominatur numero: eò quòd ſemper multiplicatũ quouis expreſſum numero pro vnitate tanquam vnum ſumatur, augendum quidem vel minuendum. Multiplicationem verò denominans,ſemper eſt numerus, à quo

dictus

dictus multiplex, ſemper ſimplici multiplicato maior erit. Nam dictio multiplex actionem multiplicandi, non autem quantitatem ſonat, vt exemplo, Augmentum magnitudinis A per vnitates numeri B multiplicãtes producemus C, multiplex ipſius A augmentum, ſcilicet quadruplum à multiplicante B numero denominatum. Si verò alicuius magnitudinis E decrementum multiplicantes, per vnitates numeri G (decrementum ſignificantis) producamus F, erit idem F multiplex decrementum magnitudinis E, ſcilicet $\frac{3}{3}$ hoc eſt tertium à numero G ($\frac{3}{3}$ decremẽtum multiplicante) denominatum, vt de his latius cùm de numeris peculiari traditione ſeptimo libro dicturi ſumus 16 diffinit. proprium agentes negotium, Supero propitio, tres multiplicandi diſcutientes differentias.



Manifeſtum itaq; relinquitur magnitudinẽ C (vnicę A magnitudinis augmẽtum) maiorẽ eſſe augmenti denominatione, magnitudine A ſimplice, ſcilicet quadruplã: nam cùm augmẽtum agimus, quæ huius augmenti plus exprimit actionẽ, maioris meretur denominationem. Similiter quia F maius expreſſit decrementum ſimplice propoſita E, ſuſcepto decrementi negotio, ea quæ maius indicat decrementum, ſeu maiorem decreſcendi actionem, eadem lege maioris meretur denominationem, ſcilicet effectus non quantitatis. Diximus enim multiplex effectui, actioni, vel operationi, non autem quantitati propriè adhærere. Vtraque igitur via cùm multiplex ſiue decrementum, ſiue fuerit augmentum numero exprimatur, multiplicanda verò quantitas vnitate, perſpicuum erit multiplex illud ſemper maius eſſe, & inſuper minorem vnitate ſignificatam, ſemper metiri multiplicem numero ſignificatam. Hanc confirmabit multiplicandi methodum 10 diffinit. huius, ac poſtmodum theoremata. Cùm itaque multiplex ſit à numeris ſumpta denominatio, ea tantùm ad quantitates habitudinem ſeu reſpectum numerorum habentes pertinet. Quare cùm multiplicem denominabimus aliquam magnitudinem, non ſubſtantiam eius, non qualitatem, aut equidem eius quantitatem conſiderabimus, cùm hæc arithmetica non conſideret. Sed tantùm vnitatum frequentiam maiorem vel minorem (quam vocant arithmetici numerum) per quam illa propoſita magnitudo plus vel minus optatum à geometria finem conſequitur, hoc eſt augmentum, æqualitatem, vel decrementum. Maior igitur vnitatum frequentia magnitudinem augens, eam maius efficit multiplex. Veluti maior vnitatem frequentia eandem minuens, maius multiplex dicetur, aliud quidem incrementum, aliud verò decrementum.

DIFFINITIO III.

Ratio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis, quoad quantitatem facta adinuicem habitudo.

Quoniam quantitatis proprium dixit Ariſtoteles eſſe ſecundum quam quid æquale maius, vel minus, dicitur, diffiniemus rationem geometricam eam eſſe, quæ habitudinem ſiue reſpectum vnius magnitudinis ad alteram (quoad quantitatem comparatæ) in ſe habet. Quoad quantitatem præcipuè dicimus, cùm inter quaſuis magnitudines, non ſequatur rationem haberi, ſed tantùm inter eas quæ commune habent quantitatis genus, licet diuerſa in ſe patiantur quædam accidentia. Illud nanque genus exprimi patitur quæ earum maior, minor, aut æqualis fuerit, tanquam verum geometriæ ſubiectum, vt lineæ ad lineam, plani ad planum, ſolidi ad ſolidum, motus ad motum, temporis ad tempus, numeri ad numerum, ſoni ad ſonum, ſeu interualli (ſonorum rationem exprimentis) ad interuallum: quæ ſingula ita quantitati ſubiiciuntur, vt quælibet magnitudo reliqua poſſit maior, minor, aut æqualis dici. Nihil item refert eas magnitudines diuerſas informare naturas, ſiue accidentium ſpecies, dum tamen inter eas illud quantitatis idem ſit vinculum, quo

hæc

hæc illa maior,minor,aut æqualis dici valeat,vt veram rationem ſubeant geometri cam. Diuidemus tamen hanc magnitudinum eiuſdem generis rationem in cognitam & confuſam ſeu ſurdam. Nam magnitudines rationem ſiue reſpectum inter ſe habentes,quam habent numeri,ad ſe inuicem rationem cognitam, certam, ac determinatam habere dicentur,eò quòd numerorum comparatio ſit ſemper patula ob diſcretionis eorũ luculentiam. Quæ verò eam habent affinitatẽ aut reſpectum, qui nullis exprimi poteſt numeris, & proinde rationem numerorum non habent. Illæ rationem confuſam, ignotam,ſiue ſurdam habere dicentur, quarum naturam (Deo duce) decimum exponentes, latius ſcrutabimur. Cùm enim ſola diſcretio (quæ numeris eſt propria) quantitatum continuarum nobis adaperiat habitudinem,manifeſtum erit quantitates diſcretione numerorum priuatas, & intelligentia ideo priuari. Has enunciarunt Euclidis interpretes, libro decimo Irrationales: ſed impropriè à negatiua priuante. Irrationales nanque ratione carentes, ſiue priuatas propriori voce denominari poterant. De his porrò(quas incertas dicimus rationes) ſuperſedendum ad decimum vſque librum erit. Interdum rationes cognitas, certas, ac determinatas(morem præcedentium Euclidis interpretum referentes)ſubdiuidemus,in rationes maioris inæqualitatis,minoris inęqualitatis,ac æqualitatis. Minoris autẽ inæqualitatis ſunt rationes, quarũ antecedens maius eſt cõſequẽte. Maioris verò inæqualitatis,quarũ antecedens minus eſt cõſequente. Aequalitatis demũ, quarum antecedens cõſequenti eſt æquale,hæc enim nullas in ſe patitur ſubdiuiſiones:maioris quidẽ inęqualitatis rurſus quinque fient ſpecies,ſcilicet multiplex, ſuperpartiens,ſuperparticularis,multiplex ſuperpartiens, & multiplex ſuperparticularis. Multiplex ratio eſt, cuius antecedens ſæpius in ſe repetit, ſiue multiplicat conſequens, vt 6 ad 2 (tripla)quia 6 continet in ſe ter binarium. 8 ad 2 quadrupla, quia 8 continet in ſe quater binarium, &c. Superpartiens eſt cùm antecedens continet in ſe ſemel conſequens & aliquas eius arithmeticas partes, vt 5 ad 3(ſuperbipartiens tertias),continet enim 5 ſemel ternarium & inſuper ternarij duo tertia, & 7 ad 4 (ſupertripartiens quartas)&c. Superparticularis eſt cuius antecedens continet ſemel conſequens & vnam eius arithmeticam partem, vt 5 ad 4 (ſeſquiquarta)cõtinet enim 5 ſemel 4 & vnum ipſius quartum, 4 ad 3(ſeſquitertia) & 3 ad 2(ſeſquialtera) &c. Multiplex ſuperpartiens ex multiplici & ſuperpartiente compoſita,ea eſt cuius antecedens pluries in ſe capit conſequens,& inſuper plures eius arithmeticas partes, vt 12 ad 5 (dupla ſuperbipartiens quintas) nam 12 continet 5 bis,& duo eius quinta,& 8 ad 3,(dupla ſuperbipartiens tertias)cõtinet enim 8 bis 3, & duo eius tertia. Multiplex ſuperparticularis eſt cuius antecedens continet pluries conſequens, & inſuper ipſius vnam arithmeticam partem, vt 5 ad 2 (dupla ſeſquialtera) continet enim 5 bis binarium & vnam eius partem dimidiam, & 7 ad 3 dupla ſeſquitertia,continet 7 bis ipſum 3,& tertiam eius partem.

Minoris autem inæqualitatis totidem aſſignarunt ſpecies,eodémque digeſtas ordine,mutatis ſcilicet antecedentibus in conſequentes terminos ſiue quantitates. Cùm enim mutantur multiplicis rationis termini, fit ratio ſubmultiplex, vt 2 ad 6, & 2 ad 8. Cùm mutantur ſuperpartientis termini, fit ratio ſubſuperpartiens, vt 3 ad 5,& 4 ad 7. Cùm mutantur ſuperparticularis termini, fit ſubſuperparticularis ratio, vt 4 ad 5,& 3 ad 4. Mutatis verò multiplicis ſuperpartientis terminis, fit ratio ſubmultiplex ſuperpartiens,vt 5 ad 12,& 3 ad 11. Mutatis demum multiplicis ſuperparticularis terminis, fiet ſubmultiplex ſuperparticularis,vt 2 ad 5, & 3 ad 10. Harum mĩnoris ad priores maioris inæqualitatis nihil eſſe dixerunt,diſtantiæ, dempta ſola particula(ſub) denominationi præpoſita. Reliqua eis communia eſſe profeſſi ſunt, quicquid vni conueniret,alteri conuenire dicentes.

Vnde proſpiciens plures quoſdam in lapſus decidiſſe, quantitatem rationum minoris inæqualitatis ignorantes,prænoſcens inſuper cœptum Euclidis per numerorum libros peragendum:rationem nimirum certam, quæ inter diſcreta & cõtinua ceciderit, ab ea que inter diſcreta tãtùm cadet, lata differentia ob theorematũ integritatem fouẽdam obſeruaturum, cùm hæc pura arithmetica, illa autẽ partim

geometr

geometrica cõplectatur elementa: ſi quidẽ diſcreti ad continuum reſpectũ partim geometricũ arbitremur, quemadmodũ diſcretæ ad diſcretã arithmeticam iudicamus affinitatẽ. Hac de cauſa tẽpus ac operam redimentes rationẽ certam breuiori diſtributione ſecãtes, per æqualitatis & inæqualitatis proferemus ſpecies. Rationẽ æqualitatis leui admodũ cura prætermittẽtes, quæ ſuiipſius multiplicẽ parit denominationẽ, nulli alterationi obnoxiam, vnitate nempe ſignificatam reponemus, rationũ inæqualitatis ſpecies ſequuturi. Rationẽ igitur inæqualitatis in binas maioris & minoris inæqualitatis rationes diuidemus. Maioris rurſus inęqualitatis rationes in duas ſpecies. Multiplicem ac ſuperpartientẽ diſcernemus. Minoris autem inæqualitatis rationes proximarũ conuerſas, in binas totidẽ diſtribuemus ſpecies, Particularem ſcilicet & partientem. Harum rationum ſingulas exponentes dicemus, æqualitatis rationem, eam quæ ab vnitate denominata antecedentis in conſequẽs multiplicationem per vnitatem denominãtem perficit, quę ſecando aut multiplicando propriam quantitatem ſuapte natura alterare non valens neceſſariò antecedens conſequenti perpetuo relinquet æquale, vt 4 antecedens per vnitatem ductum in incrementum, ſiue decrementũ ſemper producere eundem 4 multiplicem, ſuo ſimplici æqualem cernemus, quæ quidem terminorum æqualitas æqualitatis rationem ſuæ conuerſæ æqualem eſſe cogit.

Inæqualitatis rationem verè multiplicem compellabimus. Eius namque denominatio per numerum expreſſa, antecedentis in conſequens multiplicationem ac alterationem pronunciat, ſiue in augmentum, aut in decrementum, aut etiam in vtrumque pergat multiplicatio, quæ quidem numero non vnitati conuenit.

Hæc itaque per repetitionem conſequentis in antecedente exprimetur. Illius verò repetitionis denominatio per vnitates numeri multiplicantis facta, in augmentum, vel decrementum, rationis antecedentis ad conſequens quantitatem perfectè reſonat. Huius inæqualitatis rationem, quam in genere multiplicem diximus, in binas denuo diſcindemus rationes. Maioris inæqualitatis ſeu incrementi, & minoris inæqualitatis ſeu decrementi.

Maioris inæqualitatis ratio ſeu incrementi ea eſt, cuius antecedens ad conſequens incrementum habet, vel cuius antecedens maius eſt conſequente. hanc in binas diſtribuimus ſpecies, multiplicem ac ſuperpartientem.

Multiplex ratio ſui peculiari intelligentia hæc erit, cuius antecedentis quantitas pluries in ſe repetit conſequentis quantitatem. Nec non ea quæ inter numeros & vnitatem cadit, aut equidem quæ diſcretum continuo confert. Hæc quandoque inter diſcreta, quum eius termini numeris exprimẽtur, reperiri poteſt, non tamen illi id eſt proprium, terminorum nempe eius affinitas ad eam quæ inter diſcretum & continuum decidit affinitatem, tandem reducitur. Huius multiplicis exempla, ſunt veluti 2 ad 1. 3 ad 1. 7 ad 1. 10 ad 1. ſicque numeri diſcreti ad vnitatem cõtinuam quouis exẽplo cernimus conferentiam. Quod ſi 21 ad 3 rationem multiplicem, ac alias ſimiles numeris expreſſas inter diſcretas dixerimus reperiri quantitates. Ad hæc, rationem his numeris 21 ad 3 expoſitam non eſſe puram numerorum, ſed diſcreti ad cõtinuum, nempe 7 ad 1, hoc eſt ſeptenarii diſcreti ad vnitatem cõtinuam & inſolutam, ſiue numeri ad vnitatem ad quam cunctæ cõueniunt tandem multiplices, ad minimas ſuæ rationis partes reductæ.

Superpartientẽ verò rationem eam eſſe diffiniemus, cuius conſequentis quãtitas antecedẽtis quantitatẽ præciſa repetitione ſuiipſius integrare nequit. Cùm autẽ hæc ſit maioris inæqualitatis, antecedentẽ conſequente maiorem poſſidet. Non tamen in ſe plures repetitiones conſequentis præciſas recipientem, hac de cauſa conſequentis quantitas neceſſariò diſcreta permanet. Hæc itaque ſuperpartiens relicta priori multiplici, reliquas quatuor ab antiquis proditas, in ſe complectitur, cunctas ſcilicet vnica copulans eſſentia, qua diſcretum maius minori diſcreto confertur, ſiue numerus numero, nuſquam inter continua, aut inter diſcretum & continuum neceſſariò reducenda, vt 3 ad 2, 5 ad 3, 12 ad 5, &c. quas ad vnitatem & numerum reducere nequaquam fas eſt. His itaq; ſuperpartiente & multiplici, quaſiis

maioris

maioris inæqualitatis concludemus ſpecies certas.

Minoris autem inæqualitatis binas totidem prioribus oppoſitas ſiue earundem conuerſas ſtatuimus, particularem, & partientem.

Particularem rationem multiplicis conuerſam diffiniemus eam eſſe, cuius antecedentis quantitas pluries ſumpta conſequentis quantitatem producit, à conſequente ſumens vnicam tantùm particulam. Hæc ideo multiplicis dicitur conuerſa, quòd illius antecedens huius fiat conſequens, ac è contra, huius antecedens illius fiat conſequens, vt 1 ad 3, 1 ad 7, 1 ad 10, 6 ad 24, vel 1 ad 4, quæ idem ſonant, ad minimas partes reductæ.

Partientem verò rationem eam dicemus, cuius cõſequens plures ſumit antecedentis partes diſcretas, nuſquam autem integrum antecedentem componentes. Hæc ſuperpartientis vera eſt conuerſa, vt 2 ad 3, 3 ad 5, 5 ad 12, quæ nulla arte ad continuas reduci poſſunt, eò quòd antecedens eum reſpectum quem vnitas in aliquem numerum, ad conſequentem habere nequeat.

Hac breui rationum diuiſione cunctas inæqualitatis rationes complectimur, multiplici ſcilicet ac eius conuerſa particulari continui ad diſcretum quaſlibet, ſuperpartiente autem & partiente reliquas quę inter diſcreta quæq; cadunt, concludentes. Quæ videtur omnes rationes inæqualitatis, quas certas dicere auſi ſumus, referre. Nam ſi continui ad continuum rationes relinquere diceremur, has in priorem rationum ſectionem, ſiue diuiſionem decidiſſe, qua certas ab incertis diuiſimus rationes, memores eſſe conueniret. Continui namque ad continuum reſpectus incertas æquè vt certas complecti poteſt rationes. Ratio namque geometricorum continuorum æquè rationes numerorum arithmeticorum ſiue certas continet, ac incommenſurabilium quantitatum, ſiue incertas vnica continuorum habitudine, quæ ſemper actione qua antecedentis quantitas in conſequentis quantitatem operatur, exprimenda venit. In diſcretis quidem per numerorum multiplicationem, in continuis verò inexpreſſa, numeris obſiſtit.

Ratio certa diuiditur in rationes

Æqualitatis vt inter 4 & 4.

Inæqualitatis

- *Maioris Inæqualitatis*
  - *Multiplex* — *6 ad 2 Tripla.*
  - *Superpartiens* — *5 ad 3 Superbipartiens tertias.*
  - *Superparticularis* — *5 ad 4 Seſquiquarta.*
  - *Multiplex ſuperpartiens* — *8 ad 3 Dupla ſuperbipartiẽs tertias.*
  - *Multiplex ſuperparticularis* — *7 ad 3 Dupla ſeſquitertia.*
- *Minois Inæqualitatis*
  - *Submultiplex* — *2 ad 6 Tertia.*
  - *Subſuperpartiens* — *3 ad 5 Tripartiens quintas.*
  - *Subſuperparticularis* — *4 ad 5 Quadripartiens quintas.*
  - *Submult. ſuperpartiens* — *3 ad 8 Tripartiens octauas.*
  - *Submult. ſuperparticularis* — *3 ad 7 Tripartiens ſeptimas.*

Breuior rationum inæqualitatis diuiſio.

Inæqualitatis	*Maioris Inæqualitatis*	*Multiplex*	*6 ad 2*	*3 ad 1*
		Superpartiens	*5 ad 3*	*5 ad 4 8 ad 3 7 ad 3*
	Minoris Inæqualitatis	*Particularis*	*2 ad 6*	*1 ad 3*
		Partiens	*3 ad 5*	*4 ad 5 3 ad 8 3 ad 7*

Qua de cauſa omniũ harum rationum antecedentes termini conſequentiũ dicãtur multiplices, cõſequentéſq; antecedentiũ ſimplices, ſiue in augmentũ, ſiue in decrementũ, licet ipſis conſequentibus fuerint maiores, vel minores, illud triplici multiplicandi forma fieri declarabimus, cùm ad numeros (ad quos verũ ſpectat negotium) venerimus, interdum in habentibus rationem certã aut diſcretam, quamlibet antecedentis quantitatem cuiuſlibet conſequentis quantitatis multiplicem haberi poſſe profitebimur, binis quidem operationibus, aut qua numerus vnitatem multiplicat, aut equidem qua numerus numerum multiplicat, expreſſam, ſiue in augmentum, ſiue in decrementum peragatur multiplicatio, aut in vtrumque. Cùm itaque omnimodas rationes certas à multiplicantibus numeris exprimi dixerimus, rationem verè exprimere poſſumus per denominationem multiplicationis, qua antecedens multiplicat cõſequentis augmentum, vel decrementum, ita quòd hac lege multiplicatio rationem, ſiue magnitudinum habitudinem exprimit. Non tamen ab ea maior vel minor dicitur ratio, eò quòd ratio non vnitatum frequentiam, ſed quantitatum reſpectum tantùm conſideret: multiplicatio verò vnitatum multiplicantium frequentiam, non magnitudinum quantitatem, cuius multiplicationis denominatio, rationis præcipuam ſubſtantiam profert. Quia verò rationis quantitas à magnitudinum propoſitarum quãtitate dependet, reperiemus quauis facta multiplicatione, rationem eſſe maiorem, cuius antecedens plus de conſequente ſumit, hoc eſt, cuius antecedens pluries in ſe continet cõſequens, aut plures eius partes ſeu partes maiores, inde conſequimur denominationẽ quãtitatis rationum, nõ à ſimplicibus pẽdere numeris, ſed per multiplices exprimi numeros, eò quòd à multiplicatione ſint producti. Nam ſenarij ad binariũ rationem multiplicẽ, triplã nominantes, eam multiplici denominauimus numero, (nempe triplici) & duplam duplici, quadruplam quadruplici, & reliquas huiuſce certitudinis rationes numerorum reſpectu copulatas, non ſimplicibus, ſed multiplicibus numeris denominari concludemus, oſtẽdentes eam habitudinem, quæ ratio dicitur, à ſola prodire multiplicatione. Sicuti enim ſimplex numerus ſimplici per additionem coniungitur, ita multiplex rationis denominator, multiplici rationis denominatori, multiplicatione copulatur. Additio igitur multiplicium ſola fit multiplicatione, eáque rationum erit additio: at quantitatum additio per ſimplicium numerorum magnitudines ſignificantium additionem, producitur. Rationem itaque dicemus eſſe, reſpectum ſeu habitudinem, quem inter ſe habent duæ magnitudines, idem genus quantitatis habentes. Qui quidẽ reſpectus in certis rationibus, per eam multiplicationẽ qua antecedens conſequentis multiplicat augmentum, vel decrementum, exprimitur. In incertis verò nulla multiplicandi diſcretione reſpectus ille patefit, ſed ſurdas & penitus inexpreſſas denominari eas rationes, ea de cauſa cogit, quod nullis numerorum diſcretionibus vti valeant, ſed tantùm confusè maiores, aut minores reliquis oſtendi poſſint. Affinitatem tamen ſibi ſumunt à muta illa ſumptione, qua antecedens plus vel minus de conſequentis quantitate repetit, nõ ſecus quàm certæ aut diſcretæ. Quare ſurdas rationes æquè à ſurda multiplicatione (ſi fas ſit dici) denominari, & certas ea quæ inter diſcreta cadit, exiſtimabimus.

DIFFINITIO IIII.

Rationem habere adinuicem magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ, poſſunt ſe inuicem excedere.

Vbi expoſitum eſt quid ſit ratio, ſiue quantitatum habitudo, præponenda fuit hæc diffinitio, exponens inter quas magnitudines hæc habitudo dicta ratio cadat. Ait autem magnitudines inter ſe rationem habere dici, quæ multiplicatæ, hoc eſt, per aliquas numeri vnitates ſumptæ, ſe inuicem excedere poſſunt: illud præaſſumptum (quantitates rationem habituras eiuſdem optati generis) ſequitur Euclides: Si igitur idem habeãt quantitatis genus, facilè frequens vnius repetitio, aliam non

repetitam ſuperabit,adepta namque per repetitionem maiori quantitate. Quòd ſi diuerſa quantitatis habeant genera, inter eas facta habitudo, rationis nomine priuabitur,vt proxima expoſitum eſt diffinitione. Nec inſuper repetitæ illæ diuerſorum generum quantitates,quibuſuis numerorum vnitatibus ſeſe excedere poterunt,eò ſcilicet quod ad ſe inuicem comparari nequeant, veluti ſonus ad motum, tempus ad pondus, linea ad ſuperficiem,& cæteræ huiuſcemodi differentiæ. Hora etenim per quemuis numerum in menſes & annos producta, ſtateræ ciclum nuſquam excedet,necnon & ciclus in quotuis talenta productus, horam nuſquam excedere dicetur, cùm quantitatum quoad genus diuerſitas nullam inter eas haberi ſinat collationem, à qua ratio poſſit oriri, vnde propria denominatione,irrationales inter ſe à rationis priuatione dici poſſunt.Quòd ſi opponatur(vt à quibuſdam) angulum contingentiæ 16 tertij deſcriptum,nulla multiplicatione rectilineum angulum excedere, ac proinde nullam ad rectilineum conſequi rationem: dicemus illius anguli contingentiam non eſſe quantitatis denominationem,ſed naturæ, ſeu potius qualitatis. Quare quantitatis anguli denominationem (quæ fuit linearum inclinatio) multiplicantes, hoc eſt,eaſdem lineas immoto contactu à ſeipſis remouentes, angulum producemus aliquo rectilineo maiorem, ac ideo inter eos angulos ratio quidem erit,ſed incerta ſiue incognita.Concludemus itaque magnitudines idem genus habentes quantitatis (quam ſolam intuetur geometria) ſeſe per multiplicationem excedere poſſe:ideóque inter eas tantùm rationem haberi. Nec facilius iuxta quantitatis proprium,quid maius dici poteſt altero,quàm per multiplicationis exceſſum, nec quid minus, quàm per multiplicationis decrementum. Quæ igitur magnitudines multiplicatæ ſeſe excedũt,rationem adinuicem habent.

MONITVM.

In hac diffinitione dictionem (*poſſunt*) tranſtulimus,ne ſint qui huic verbo hęrentes, magnitudines ſe adinuicem multiplicandas exiſtiment, quod longè abeſt, cùm ſint geometricæ magnitudines, ideóque continuæ ac vnitate denominatæ, omni multiplicandi vi priuantur. Non itaque dicemus, quæ poſſunt multiplicatæ inuicem, excedere, ſed multiplicatæ (ſcilicet quouis numero cuius eſt proprium multiplicare) ſeſe poſſunt excedere.

DIFFINITIO V.

In eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam qua tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æquemultiplicia, ſecundæ & quartæ æquemultiplicia iuxta quamuis multiplicationem,vtraque vtramque vnà excedunt, vnà æquales ſunt,vel ſimul deficiunt ſumptæ adinuicem.

Dicto quid ſit ratio,deinde inter quas magnitudines ratio haberi dicatur, nunc poſtremò quæ eandem habent rationem exponendæ ſunt.Eo quidem ordine,quo primæ ad ſecundam ratio quonam pacto rationi tertiæ ad quartam aſſimiletur, ſit inquirendum.Tum,inquit Euclides,eadem erit ratio,cùm æquemultiplicia primę & tertiæ,ſimul excedent, ſimul deficient, aut ſimul æquabuntur multiplicibus ſecundæ & quartæ,à quouis alio multiplicante æquemultiplicatis, vt exemplo proponamus ſciſcitandum quánam arte prima A ad ſecundam B in eadem ſit ratione,qua tertia C ad quartam D. Proferamus primæ & tertiæ A & C æquemultiplicia, hæc E & F. Inſuper ſecundæ B & quartæ D alia quæuis æquemultiplicia ſint G H.Si etenim multiplici E excedente multiplex G, quauis facta multiplicatione,reliquum F excedat H,& ſi æquetur,æquetur,ſi deficiat,deficiat: eorum æquemultiplicium ſimplices,A prima ad ſecundam B, erit vt tertia C ad quartam D.

E	A	B	G
18	6	3	15
F	C	D	H
12	4	2	10

Quod ſi (vt cum diffinito diffinitionem conuertamus) eadem fuerit ſimplicium ſuppoſita ratio, ſcilicet primæ ad ſecundam quæ tertiæ ad quartam: ſequetur primæ & tertię æquemultiplicia, ſimul excedere, deficere, aut æquari ſimul ęquemultiplicibus ſecundæ & quartæ quauis multiplicatione progeniti. Cæterùm ad negatiuam properantes, vt vtroſque huius diffinitionis aggrediamur intellectus, in eadem ratione magnitudines dicentur non eſſe, prima ad ſecundam, qua tertia ad quartam. Quando primæ & tertiæ æquemultiplicia non ſimul excedent, deficient, aut æquabuntur, æquemultiplicibus ſecumdæ & quartæ, quauis multiplicatione progenitis: Quam prioris inſtar conuertentes dicemus. Quòd ſi eadem non fuerit ratio primæ ad ſecundam, quæ tertiæ ad quartam, ſequetur primæ & tertiæ æquemultiplicia, non ſimul excedere, æquari aut deficere, à multiplicibus æquis ſecundæ & quartæ, quauis multiplicatione genitis. Hanc diffinitionem eouſque locupletem oſtendere voluimus, quòd eius intelligentia non parum conferat momenti ſublimioribus attingendis. Sed quia hæc diffinitio omnimodam exoptat multiplicationem, antequam communes exceſſus, defectus, aut æqualitates, æquemultiplicium pariat, cuius quidem multiplicationis generalitas, à ſingularum multiplicationum ſcrutinio depẽdere videretur: vt tamen non crucientur ingenia in diſquirenda huiuſmodi multiplicandi lege, proximam conferemus methodum, qua aliquam multiplicationem æquemultiplicia ſimul æqualia producentem comperiemus: argumentum inde ducentes ab ea, qua maior multiplicatio æquemultiplices ſimul excedere, minor verò eoſdem ſimul deficere coget. Propoſitis iiſdem primæ ad ſecundam, ac tertiæ ad quartam rationibus, dentur bini in eadem ratione numeri. Conuerſim autem numerus antecedens conſequentia multiplicet, conſequens verò antecedentia. Tum neceſſariò æqui orientur multiplices, vt olim (cor. 17. ſeptimi) oſtenſuri ſumus. Scilicet primæ & ſecundæ inter ſe, necnon tertiæ & quartæ inter ſe, vt aperiemus exemplo. Eſto prima A ad ſecundam B vt tertia C ad quartam D. Sit eorum ratio quæ numerorum 9 ad 3. Conuerſim autem 9 antecedens, vtraſque multiplicet conſequentes B & D. Conſequens verò 3, vtraſque multiplicet antecedentes A ſcilicet & C. Sequetur binas A B per binos eiuſdem rationis numeros, conuerſim ductas, æquales producere multiplices, E & G. Necnon binas C & D æquales producere F & H. Si igitur E & F primæ A & tertiæ C æquemultiplices æquentur ſimul æquemultiplicibus ſecundæ B & quartæ D, ſequetur alia quauis oblata æquamultiplicatione ipſorum E & F ſimul excedere ipſos G & H, ſcilicet ſi maior propoſita fuerit multiplicatio. Siquidem minor, eoſdem E & F ſimul deficere ab ipſis G & H: præter has autem nullæ fiunt multiplicationes. In quauis igitur multiplicatione id faciendum putabimus, huius inuenti facilitatem demonſtrata veritate (vt diximus) confirmabit corollarium 17. ſeptimi, interdum ſufficiet hanc eſſe huius diffinitionis intelligentiam. Concludemus itaque eandem magnitudinum propoſitarũ eſſe rationem, quando æquemultiplicia antecedentium ſimul excedent, deficient, aut ſimul æquabuntur, æquemultiplicibus conſequentium, id quidem quauis multiplicatione genitis, & è conuerſo, haud ſecus ad negatiuam. Eandem ſcilicet magnitudinum propoſitarum non eſſe rationem, quando æquemultiplicia antecedentium non ſimul excedent, deficient, aut non ſimul æquabuntur, æquemultiplicibus conſequentium, quauis multiplicatione productis.

E	A	B	G
18	6	2	18
F	C	D	H
9	3	1	9

9 3

Ante paucos annos obiectum fuit in hanc Euclidis diffinitionem, à quodam aliàs peritiſſimo huius figuræ argumentum, Antecedentium 6 & 5 æquæmultiplicia 18 & 15 ſimul excedunt conſequentium 4 & 3 æquemultiplicia 8 & 6: tamen ſimplices 6 ad 4, non ſunt in ratione 5 ad 3. ad hæc proponentem oblitum eſſe quauis multiplicationem vt diximus. Nam optat Euclides hos cõmunes æque-

multiplicium

multiplicium exceſſus æqualitates,aut defectus, non tantum in quadam propoſita reperiri multiplicatione, ſed iuxta quamuis id fieri poſtulat multiplicationem:quare ſi antecedentia binario ducamus, fient 12 & 10, ſi conſequentia ternario fient 12 & 9: tum excedente vno ſcilicet 10 reliquum 9, non excedet alter, hoc eſt 12 ad 12. Quare per conuerſam diffinitionis ſimplices non erunt in eadem ratione:videmus itaque multiplicium exceſſus, æqualitates, vel deffectus, non ſimul procedere facta quauis multiplicatione, vt ſaltem hoc patuit exemplo, quod quidem ad vniuerſalem diſtribuendam ſufficit. Licet namque cuiuis,primam & tertiam eouſque multiplicare, quod vtraque reliqua excedat æquemultiplicia, atque hac vſque in decrementum, quod vtramque à reliquis æquemultiplicibus ſimul deficere cogat, non tamen id in quauis multiplicatione comperimus vt fieri iubet Euclides, ad conſeruandam vniuerſalis diſtributiuæ veritatem. Nam ex Ariſtotele negatiua vniuerſalem diſtribuit, vt non tantùm in aliqua ſed in quauis id faciendum præcipit multiplicatione.

18	6	4	8
15	5	3	6

MONITVM.

Campanus expoſuit has magnitudines in eadem eſſe ratione, quando earum æquemultiplicia in eadem erunt ratione. Dixit enim exceſſum hunc æquemultiplicium non intelligi de exceſſu quantitatis,ſed rationis, quam proportionem vocat, idem per idem exponens. Nec id mirum, tacuit enim præcipuam diffinitionis ſubſtantiam,ſcilicet hanc quamuis multiplicationem,inſuper continuam proportionem priori imponens,ac geometricam libertatem maculans. Nam in vtramque æquè diſcontinuam vt continuam poſſunt hæ diffinitiones, quicquid deprauati dicant codices. Qua de re autem Euclides ſimplicium magnitudinum rationem ex æquemultiplicium cognitione deprehendere voluerit, non autem ex earum ſimplicium inſpectu. Illud(ſaniorum ſalua ſententia) mihi occurrit. Cùm ratio inquirenda duarum inter ſe magnitudinum,à quantitatis earum cognitæ comparatione dependeat: Geometricæ verò magnitudines eò quòd ſint continuæ & confuſæ, nullam proferunt menti quantitatis intelligentiam ſiue diſcretionem, qua poſſint adinuicem comparari quantitatum vires. Cùm autem geometricas continuas & vnicas adhibita multiplicatione, per earum frequentem repetitionem plures efficit,illæ in quantitates diſcretas tranſeunt,numerorum ſpeciem induẽtes, & perinde ſenſui non veluti continuum,ſed diſcretum(intelligentiæ familiare)ſeſe offerũt diſcernendæ. Nec omittendum inſuper, quòd maiorum magnitudinum eandem rationem habentium differentiæ, multo maiores ſunt, & ideo plus intelligibiles. Perſpexit etenim Euclides futurum eſſe, æquemultiplices ſimplicium magnitudinum eandem habere rationem ſe demonſtraturum,& quaſlibet magnitudines proportionales in permutatam rationem deuenturas oſtenſurum:ab his namque duabus orta eſt huius diffinitionis inuentio,ſcilicet à 15 & 16 huius quinti theorematis. Concludemus itaque,ſi hic præfatus exceſſus,æqualitas,aut defectus,iuxta quamuis multiplicationẽ accidat, ſimplices eandem habere rationem. Si autem è conuerſo ſimplices eandem habuerint rationem, id iuxta quamuis multiplicationem accidet: contra verò ſi exceſſus ille iuxta quamuis multiplicationem productus, non ſemper accidat, nec ſimplices eandem habebunt rationem. Econuerſo ſi non habeant ſimplices eandem rationem, illud non accidet,iuxta quamuis multiplicationem, iuxta eas ſaltem quæ fiunt per numeros habentes conuerſam rationem propoſitorum ſimplicium(vt diximus proxima methodo) licet iuxta quamplures alias accidat.

DIFFINITIO VI.

Proportio verò eſt rationum ſimilitudo.

Diximus his proximis duas rationes ſimiles, hoc eſt eaſdem, poſſe (vt ſæpius) inter diuerſas quantitates cadere, illa quippe rationum ſimilitudo proportio appellatur, vt ſi dicamus eandem eſſe rationem magnitudinum A ab B quam aliarum C ad D, has proportionem habere dicemus. Siue plures fuerint, nempe ſi eandem eis rationem habeat E ad F, ſex magnitudines proportionem dicentur habere. Proportionum autem aliam continuam, aliam dicemus diſcontinuam. Continuam quidem eam dicemus, cuius rationes ſimiles ſequuntur, ſiue iunguntmagnitudines nullo omiſſo interuallo, vt in datis A B C D magnitudinibus, ſi ea fuerit ratio A ad B quæ B ad C & eadem quæ C ad D nullo relicto interuallo.

A	B	C	D	E	F
1	2	3	6	4	8

A	B	C	D
1	2	4	8

Diſcontinuam verò eam dicemus, quæ licet eiſdem ſiue ſimilibus conſtet rationibus, tamen aliquod omittit interuallum, vt ſi dicamus eam eſſe rationem A ad B, quam C ad D, non autem quàm B ad C, quæ cùm continuum videatur diſſoluere, diſcontinua dicitur proportio: hæc autem cadere poteſt inter duo vel plura quantitatum genera. Poſſumus namque conferre pondus ponderi, in ea ratione qua lineam lineæ conferemus, quáque tempus tempori, planum plano: erunt igitur octo quatuor generum magnitudines proportione diſcontinua coniunctæ. Prior verò quæ continua dicta eſt, vnicum recipit magnitudinum genus quantitatis, cum prima ſecundæ, eadem verò ſecunda tertiæ, tertia verò quartæ (& ſic quantumuis) eadem ratione copulentur: quæ quidem ratio eadē duas tantùm eiuſdem generis cogitur connectere. Sunt alij plures qui rationē vocant proportionē, proportionē verò proportionalitatem, licet Euclides rationem dixerit λόγον, proportionem verò ἀναλογίαν, quæ ſimilitudinē ſonat rationum. Et proportionem dicunt proinde maiorem vel minorem, acſi maior vel minor daretur rationum ſimilitudo, quod diſſonum admodum cenſentes, potius eligemus Euclidis verba ſectari, diſciplinæ nuncia. Proportionem igitur non eam magnitudinum affinitatem, quæ ratio dicitur, ſed rationum ſimilitudinem eſſe dicemus, vt perfectè ſonat proxima diffinitio ſequens.

DIFFINITIO VII.

Eandem autem habentes rationem magnitudines proportionales vocentur.

Vocat eas magnitudines proportionales, quarum interualla ſuſcipiunt ſimiles rationes, vel eaſdem (quod idem eſt hoc loco) ſiue continuè ſiue diſcontinuè ſuſcipiant, quotquot tamen aderunt ſimilibus, ſiue eiſdem coniunctæ rationibus, ſub proportionalium nomine comprehendentur.

MONITVM.

Ad hanc ſeptimam (Theonis ordinem tranſponentes) conuenimus. Poſuit enim Theon proportionis diffinitionem, quæ ex rationum ſimilitudine deprehenditur ante eas diffinitiones, quæ quid ſit rationem habere, quídve in eadem eſſe ratione interpretātur. Non igitur ex prioribus poſteriora, ſed ex poſterioribus priora edocerentur. quam igitur quartam reperimus (vt ſuo congrueret loco) ſextam ordine tranſtulimus diffinitionem.

DIFFINITIO VIII.

Quando verò æquemultiplicium, multiplex primi exceſſerit multiplex ſecundi, multiplex autem tertij iuxta quamuis multiplicationem non exceſſerit multiplex quarti, tunc primum

ad ſecund

ad ſecundum maiorem rationem habere dicetur, quàm tertium ad quartum.

Quinta huius expoſuimus quid ſit in eadem ratione eſſe, nunc autem quid maiorem rationem habere intelligamus, dicendum eſt. Supponit hæc eandem haberi multiplicium legem, ei quam quintam ordine expoſuimus, ſcilicet primum & tertium æquè multiplicari. Secundum verò & quartum alia quauis æquamultiplicatione duci: tunc autem, ſi multiplex primi excedat multiplex ſecundi, aliqua multiplicatione verò facta, multiplex tertij nõ excedat multiplex quarti. Primum ad ſecundum maiorem habebit rationem, quàm tertium ad quartum. & è conuerſo, ſi primum ad ſecundum maiorem rationem, habeat quàm tertium ad quartum, multiplice primi excedente multiplex ſecundi, aliqua fiet multiplicatio quamultiplex tertij, non excedet multiplex quarti.

Aperiamus exemplo poſitis quatuor A B C D, quarum primæ A, & tertiæ C ſint æquemultiplicia E & F, ſecundæ verò B & quartæ D alia quæuis G & H. Patet E multiplice primę A excedente G, multiplex ſecundæ B, tertiæ C multiplex F, iuxta quamuis multiplicationem non excedere multiplex H, quartæ D, nempe iuxta hanc propoſitam, à numeris conuerſam rationem habentibus ortam. Prima itaque A ad ſecundam B, maiorem rationem habet, quàm tertia C ac quartam D. Ac è cõuerſo, ſi prima A ad ſecundam B maiorem habeat rationem, quàm tertia C, ad quartam D, ſequetur multiplice E primæ A excedente multiplex G ſecundæ B, & multiplex F tertiæ C iuxta aliquam multiplicationem non excedere multiplex H quartæ D. Ad minorem ac eius conuerſam modico negotio ſub eadem pictura quantitatum peruerſo ordine. ac ſi dicamus: Si multiplice F primæ C, non excedente H multiplex ſecundæ D, multiplex E tertiæ A excedat G multiplex quartæ B, quauis facta multiplicatione: Prima C ad ſecundam D minorem habet rationem, quàm tertia A ad quartam B: haud ſecus in eius conuerſa. Si prima C ad ſecundam D minorem habeat rationem quàm tertia A ad quartam B, multiplice F primæ C, non excedente multiplex H ſecundæ D, ſequetur multiplex E tertiæ A, iuxta aliquam multiplicationem excedere multiplex G quartæ B. Quatuor huius diffinitionis expoſuimus ſumptiones, licet vnã tantùm receperimus. Id ſanè vt cum diffinito diffinitionem conuerti doceremus, præcipuum illud ab Euclide ſuſceptum quinta diffinitione huius memorãtes, iuxta quamuis multiplicationem hos exceſſus fieri aut non fieri. Nam ſi Campani & Theonis inſtar hanc prætermiſiſſemus particulam, diffinitionis huius conuerſione caruiſſemus, vt hoc exẽplo:

E 18	A 6	B 2	G 8
F 12	C 4	D 3	H 12

Si prima A ad ſecundam B maiorem habet rationem, quàm tertia C ad quartã D, multiplice E primæ A excedente, multiplex G ſecundæ B, ſequetur multiplex F tertiæ C non excedere multiplex H quartę D: cuius oppoſitum patet, niſi in quauis multiplicatione dixerimus. Cùm enim intelligat Euclides ſi facta quauis multiplicatione is exceſſus non accidat, perſpicuum fuit hãc vniuerſalem, (*quamuis*,) per negatiuam diſtribui, vt ſi dixerit: Tertium autẽ aliqua facta multiplicatione quartum non excedat, vt veram huius ac ſimilium diffinitionum integritatem tueamur, ab innumeris exemplorum incurſibus, vniuerſalis illius penuria labefactatã. Inde colligemus antecedentis augmentum rationem augere, eius verò decrementum rationem minuere. E conuerſo autem, conſequentis augmentum rationem minuere, ac eiuſdem decrementum rationem augere. Auctis itaque vel diſtractis ſimplicibus, æquè multiplicium incrementa generari liquet vel decrementa.

E 12	A 6	B 2	G 4
F 8	C 4	D 3	H 6

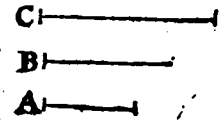
MONITVM.

Huic à quinta voces, *iuxta quamuis multiplicationem* contulimus, vt diffinitionum more cum diffinitis conuerterentur, quod præter has voces fieri minimè poterat, vt oſtendimus quinta diffinitione huius, vltimóque huius diffinitionis exemplo, quo diſcuſſimus diſiunctiuam illam, ſi multiplex tertij non exceſſerit multiplex quarti, abſque vniuerſali (*quamuis*) diſtributa in aliquam, huius diffinitionis fore ruinam. Quare hanc vniuerſalem (*quamuis*) à quinta diffinitione affirmatiua ſumptam, huícque poſtremæ parti negatiuæ collatam, in particularem ſcilicet (*aliquam*) diſtribuimus. Ac ſi dicat Euclides. Multiplex autem tertij, iuxta quamuis multiplicationem non exceſſerit multiplex quarti, licet iuxta aliquam excedat, vt patuit exemplo: tum prima ad ſecundam maiorem rationem habet quàm tertia ad quartam, vel ſi aliqua fieri poſſet multiplicatio æqua ſecundi & quarti: qua multiplice primi excedente multiplex ſecundi, multiplex tertij non excedat multiplex quarti, licet iuxta quamuis multiplicationem is exceſſus non accidat. Tum erit maior ratio, &c.

DIFFINITIO IX.

Proportio in tribus quantitatibus ſaltem conſtituitur.

Cùm proportionem ſexta diffinitione dixerimus eſſe rationum ſimilitudinem, duæ ſaltem conficiendæ proportioni optantur rationes. Quia verò rationem diximus eſſe duarum magnitudinum reſpectum, qui earum interuallo concipitur. Ad binas igitur rationes duo ſaltem requiruntur interualla: quæ quidem interualla non minus quàm tribus concluduntur quantitatibus. Intelligemus itaque proportionis minimum numerum magnitudinum ſiue quantitatum ternario claudi, hoc eſt, tres ſaltem in proportione conſtituenda requiri quantitates. primæ etenim ad ſecundam ratio fit vna, ſecundæ verò ad tertiam, ſit altera: quæ rationes cùm ſint ſimiles, proportionem conſtituunt vt A ad B eam habeat quam B ad C rationem. Ipſæ A B C tres quantitates proportionem in minimo quantitatum numero conſtituunt.



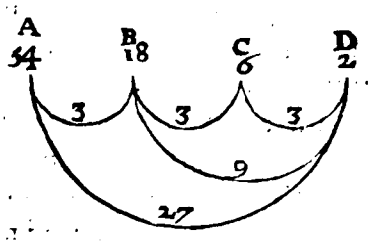
MONITVM.

Huic diffinitioni duarum dictionum (*terminis* & *minima*) improprias voces à Theone deſcriptas tranſtulimus. Terminos enim cuiuſlibet rationis ſiue argumenti antecedens, & conſequens vocamus, quare duæ rationes, ſaltem quatuor exigunt terminos. Proportio igitur binas complexa rationes, tribus terminis non poteſt conſtare tantùm, ſed quatuor. Quòd ſi obiiciatur terminos dici magnitudines, & ideo tres magnitudines proportionem efficere: Dicemus magnitudines nomen antecedentis aut conſequentis, non pro quantitatis reſpectu, ſed pro ſitus adeptione recipere. Nam magnitudo B non ideo eſt antecedens, & conſequens quòd quanta ſit, ſed ſitum ipſi A poſtremum, ipſi verò C priorem ſortita, ex binorum adeptione ſituum antecedentis & conſequentis, binas meretur denominationes: eius etenim B quantitas ſine ſitu nulla antecedentis vel conſequentis denominatione poteſt nuncupari. Quia verò dixit Theon proportionem minimam eſſe, tranſtulimus dictionē (*minima*) in aduerbium *ſaltem*, ne ſint aliqui qui proportionem maiorem vel minorem aliquam reliqua eſſe credant: cùm ſit enim rationum ſimilitudo, nulla poterit dici maior vel minor ſimilitudo reliqua. Quare autem Campanus & alij proportionem ſæpius maiorem, vel minorem dicant, dicemus illos proportionem pro ratione (ſatis tamen impropriè) ſumere, quæ quidem ratio maius & minus recipit. Proportio itaque tres ſaltem magnitudines optat, quatuor terminis expreſſas, binis ſcilicet antecedentibus, & binis conſequentibus.

DIFFI

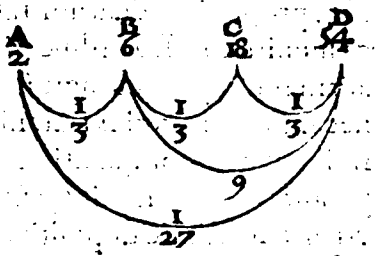
DIFFINITIO X.

Quando tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicem rationem habere dicetur, eius quæ ad ſecundam. Quando autem quatuor fuerint, prima ad quartam triplicem rationem habere dicetur, eius quæ ad ſecundam. Et ſem per ordine vna plus, quouſque abſoluatur proportionalium numerus.



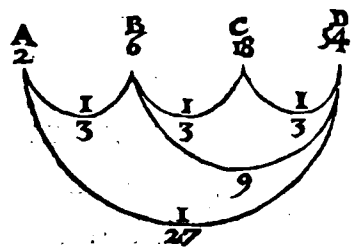
Hanc diffinitionem tantùm in proportione continua intelligentes, reſumemus quod tertia huius diffinitione diximus, Rationem verè exprimi denominatione multiplicationis, qua antecedens multiplicat conſequens apud certas quantitates. Cùm igitur quælibet ratio tantùm in multiplicatione conſiſtat, duplicem rationem dicere poſſumus, duplicem eius denominationis multiplicationem, vt exẽplo ratio C ad D eſt tripla, hoc eſt C multiplicat D ter. Sed ratio B ad C rurſus eſt tripla, id eſt B multiplicat ipſum C ter. Si igitur tripla ipſius B ad C, triplam ipſius C ad D concipiat, ipſa B ad D nocuplam pariet. Cõſtabit igitur ratio magnitudinũ ad D duabus æqualibus, ſcilicet tripla B ad C & tripla C ad D. Duplam igitur habebit prima B ad tertiam D rationem, rationis quam habet idem B ad ſecundam C, ſcilicet triplam bis ſumptam, quæ (quoniam multiplicatione non autem additione copulantur rationes) dupla triplæ, nocuplam efficiet, non autem ſextuplam: rationis enim denominator numerus, non ſimplex ſed multiplex exquiritur. ea igitur de cauſa rationum denominatores, multiplicatione, non autem ſimplicium numerorum additione iunguntur. Similiter progrediemur ſi fuerint quatuor magnitudines: nam ſi præferatur A ipſi B in eadem ratione, ſcilicet tripla, dicemus, quoniã A eſt ipſius B tripla, B verò ipſius D nocupla, quæ multiplicatione copulatæ producent 27, ipſius A ad D rationis denominatorem: quæ cùm in ſe concipiat tres rationes, A ad B, B ad C, C ad D æquales, ſua copulatione rationem A ad D producentes, ratio A ad D tripla dicetur cuiuſlibet earum.

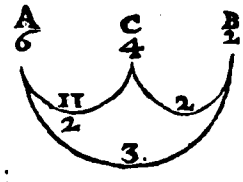
Prima igitur A ad quartam D triplicem habet eius quam habet ad ſecundam B. Similiter in infinitum gradientes, ſi quinque ponantur quantitates, prima ad quintam quadruplam rationem habebit quam ad ſecundam. Et eo ſeruato ordine ſemper quotquot proponentur quantitates, tot vna minus denominationem ſequi rationis primæ ſcilicet ad vltimam, ſupra rationem primæ ad ſecundam. Multiplices etenim rationes, à numero interuallorum denominantur, atqui quantitatum numerus, interuallorum numerum ſemper vnitate excedit. Quantitatum itaque numerus eius rationis denominationem vnitate ſemper excedet. Videmus etenim trium quantitatum bina eſſe interualla, quatuor verò quantitatum tria, & ſic ordinatim. Vt autem oſtendamus ea quæ hac diffinitione diximus in rationibus maioris inæqualitatis, ſimiliter conſequi in rationibus minoris inæqualitatis, apponemus exemplum prioris conuerſum, tranſlatis tantùm terminorum quantitatibus. Geometria etenim eadem facilitate minorum ad maiores exponit habitudines, qua maiorum ad minores. Eadem igitur qua diximus methodo, videmus rationem C ad D eſſe tertiam, cùm C magnitudo ipſius D magnitudinis decremẽtum per $\frac{1}{3}$ multiplicet. Rurſus autem B ipſius C decrementum per $\frac{1}{3}$ multiplicat, vnius igitur tertiæ decrementum per $\frac{1}{3}$ multiplicatum, vnam producet nonam: nona itaque vnius tertiæ erit dupla, ſcilicet ratio



ipſius

ipſius B ad D ($\frac{1}{3}$), dupla erit rationis B ad C, ſcilicet ($\frac{1}{1}$) haud ſecus, ſi quatuor fuerint magnitudines, primæ A ad quartam D ratio, tripla erit rationis eiuſdē A primæ ad B ſecundam, hoc eſt ex ratione ipſius A ad B ter multiplicata producta: ratio enim B ad C multiplicans rationem C ad D, hoc eſt $\frac{1}{1}$ per $\frac{1}{3}$ producit $\frac{1}{3}$, rationem ipſius B ad tertiam D, ratio verò B ad D per rationem A ad B, ducta, hoc eſt $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{3}$ producet $\frac{1}{12}$, rationem quippe ipſius A ad D, triplam rationis A ad B. Similiter in his quatuor E F G H, ratio E ad H octaua, erit tripla rationis E ad F dimidiæ. Vnde patet multiplex quandoque minorem quantitatem magnitudinis præ ſe ferre, non autem numeri, nam maior eſt octonarius denominator decrementi E ad H, binario denominatore decrementi E primæ ad ſecundam F. Et proinde multiplex eius maius illo erit, licet minorem ſignificet quantitatem, maius autem decrementum. Hinc ſequetur rationes extremorum ex quorumlibet mediorum conſtare multiplicatis rationibus, hoc eſt rationum denominatoribus. Proponatur inquirenda ratio magnitudinum A ad B, inter ipſa A & B aliqua ponatur quantitas C, ſit autem ipſius A ad C ratio ſeſquialtera, reliquæ verò C ad B dupla, ducantur autem earum rationum denominatores adinuicem, ſcilicet 1 denominator rationis A ad C per 2, denominatorem rationis C ad B, fiet 3 denominator multiplicatæ rationis, ipſius quidem A ad C, quæ conſtitit ex ratione A ad C & C ad B, hæc autem ratio A ad B non dicetur dupla ipſius A ad C rationis, cùm non conſtet ex duabus æqualibus, rationi A ad C, ſed maior dupla æquè poteſt eſſe ſicut & minor quandoque, vt latius dicemus quinta ſexti diffinitione: tantùm ſuperſit Euclidem dixiſſe in continuè proportionalibus, rationem primæ ad tertiam, duplam eſſe rationis primæ ad ſecundam: primæ verò ad quartam triplam eiuſdem primæ ad ſecundam rationis; ſiue ea multiplex ratio primæ ad tertiam aut quartam, maior fuerit multiplicata, ratione primæ ad ſecundam, ſiue eadem fuerit minor. Et proinde multiplex quandoque maiorem, quandoque verò minorem ſuo multiplicato concipere quantitatem, licet ipſum multiplex maius ſemper (hoc eſt, maiori multiplicante numero) denominatum ſubſiſtat.





DIFFINITIO XI.

Similis rationis dicuntur magnitudines, antecedentia antecedentibus, & conſequentia conſequentibus.

Quoniam diximus eſſe rationem habitudinem vnius magnitudinis ad reliquam, exponemus magnitudines dici ſimilis rationis, eas quarum ſingula antecedentia ad ſingula conſequentia eandem habent habitudinem, ideo dicit antecedentia antecedentibus ſimilem ad conſequentia habere reſpectum, & è conuerſo conſequentia conſequentibus ſimiles pati antecedentium reſpectus. Ratio etenim ſemper ea dicitur, quæ reſpectum antecedentis ad conſequens indicat. Non autem conſequentis ad antecedens, nec antecedentis ad aliud antecedens, ſiue conſequentis ad aliud conſequens, vel omnimodæ aliæ eorum mixtiones, nempe cùm proponitur duarum rationum quatuor quantitates copulantium inueſtiganda ſimilitudo. Eo ordine diſponendæ erunt magnitudines, quo ſemper ea quæ in aliam multiplicando agit, ſit antecedens. Reliqua verò quæ patitur ſit conſequens, nec minus in alterius rationis reliquis duobus terminis fiet. vnde ſequetur: Si binæ rationes quatuor quantitates (ſcilicet duo antecedentia & duo conſequentia) copulantes ſimiles fuerint, cùm quantitates illæ eo ordine diſponuntur, ſimiles eſſe etiam alio ordine diſpoſitis eiſdem quantitatibus, hoc eſt, mutatis antecedentibus

in conſeq

in conſequentia vel aliquibus eorum variæ pro natura proportionis, vt ſequentibus diffinitionibus extabit. Quauis tamen variatione propoſita, ſemper ea quæ in aliam multiplicando agit, antecedentis nomen ſibi vendicat, reliqua verò conſequentis.

DIFFINITIO XII.

Permutata ratio eſt, acceptio antecedentis ad antecedens, & conſequentis ad conſequens.

Hanc à prima terminorum variatione inchoat: quæ etenim quantitates prius fuerunt antecedentes binarum ſimilium rationum, ita transferuntur, vt, manente prioris rationis antecedente, ſecundæ rationis antecedens vice conſequentis primæ rationis fungatur, & primæ rationis conſequens, eiuſdem antecedentis ſecundæ locum ſubeat, vel breuius, antecedentis ſecundæ & conſequentis primæ rationis fit commutatio. Eam terminorum tranſpoſitionem vocat proportionem permutata ratione compoſitam. Hæc autem ideo permutata dicetur, tanquam reſpectiuè ſumpta ad præcedẽtem, cuius quantitatum ordinem permutauit. Sed vbi vim proportionis iam adepta eſt, ab ea æquè alia poteſt oriri permutata, vt à priori hæc orta dicetur permutata. Omnes nanque veræ erunt proportiones, vt patebit in theorematis harum diffinitionum ſenſus demonſtrantibus, vt exemplo adaperiamus. Sint A B C D, quarum A antecedens ſit ad B conſequens, ſimili ratione qua C antecedens ſecundæ rationis, ad D conſequens. Ratio permutata dicetur ea, quæ commutatis conſequente primæ & antecedente ſecundæ, dicet eſſe A ad C, vt B ad D.

A B C D
A C B D

DIFFINITIO XIII.

Conuerſa ratio eſt, acceptio conſequentis, tanquam antecedentis ad antecedens tanquam conſequens.

Conuerſam rationem ſuppoſitæ ſimilis rationis relatiuam, vt permutatam diximus concipere neceſſe eſt. Suppoſitis igitur alicuius proportionis rationibus, cùm in priori ratione transfertur antecedens in conſequens, & è conuerſo: in poſteriori verò ratione idem fit: hæc terminorum prius data proportione diſpoſitorum conuerſio, proportionem à conuerſa ratione denominat, vt ſi in propoſita proportione fuerit A ad B vt C ad D, erit conuerſim B ad A vt D ad C.

A B C D
B A D C

DIFFINITIO XIIII.

Compoſita ratio eſt acceptio antecedentis cum conſequente, tanquam vnius ad ipſum conſequens.

Compoſitam rationem veluti præmiſſas à ſuppoſita proportione oriri vult, ſcilicet, ſi primæ rationis antecedens & conſequens coniuncta, eidem conſequenti comparentur: ſecundæ quoque rationi ſimile fiat, hæc proportio à compoſita denominabitur ratione, vt ſi ſuppoſita proportione fuerit A ad B vt C ad D, erit compoſita ratione A B ſimul ad B, ſicut C D ſimul ad D.

A B C D
A B B C D D

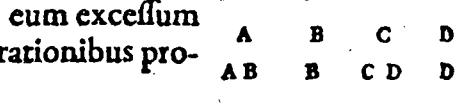
DIFFINITIO XV.

Diuiſio rationis eſt, acceptio exceſſus quo antecedens excedit conſequens, ad ipſum conſequens.

Quia hæc eſt præcedentis conuerſa, ex eiuſdem figuræ typo eam iudicabimus.

Dixit

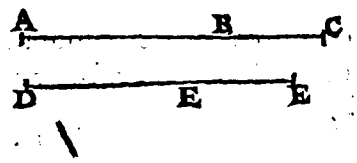
Dixit enim compoſitam fieri coniunctis antecedente & conſequente ſimul, quod quidem tanquam vnicum antecedens comparatum fuit conſequenti. Et ideo verum fuit antecedens compoſitum, excedere ſimplex conſequens, ſimplici antecedente. Quare comparantes exceſſum antecedentis compoſiti ad ſimplex conſequens, reperimus eum exceſſum eſſe prius antecedens ſimplex, ſimplici conſequenti comparatum, vt ſumamus ordine conuerſo à poſteriori proportione incipientes. Si fuerit vt A B ſimul ad ſimplex B, ſic C D ſimul ad ſimplex D, erit diuiſa ratione A exceſſus quo A B excedit B, ad ipſum B, ſicut C exceſſus quo C D excedit D ad ipſum D, hoc eſt, erit A ad B vt C ad D, quæ fuit prior ſuppoſita proportio, ad quam reuertimur. Non tamen intelligamus eum exceſſum determinatum eſſe, ſed liberum quemuis, rationibus proportionis coniunctum.



DIFFINITIO XVI.

Conuerſio rationis, eſt acceptio antecedentis ad exceſſum, quo excedit antecedens ipſum conſequens.

Hæc ferè præcedenti opponitur. Cùm autem fit comparatio antecedentis conſequente maioris ad conſequens, ſicut aliud antecedens ad aliud conſequens, hac poſita ratione per conuerſionem rationis ſequetur, antecedens eam rationem habere ad ſuiipſius exceſſum, quo excedit ſuum conſequens, quam aliud antecedens ad ſuum exceſſum quo excedit conſequens, vt ſi fuerit A C ad A B ſicut D F ad D E, erit ſicut A C antecedens ad B C exceſſum, quo excedit ipſum A B conſequens, ſic D F antecedens ad E F exceſſum, quo excedit ipſum D E conſequens.



DIFFINITIO XVII.

Æqua ratio eſt, pluribus exiſtẽtibus magnitudinibus, & aliis eis æqualibus multitudine, binis ſumptis in eadem ratione. Quando fuerit ſicut in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ſic in ſecundis prima ad vltimam, vel aliter acceptio extremorum per ſubſtractionem mediorum.

Ad hanc proportionem exponendam, binos magnitudinum ordines ſupponit Euclides, æquales quidem & multitudine & rationum ſimilitudine, ſi hac lege fuerit in primo ordine, prima ad vltimam: ſic in ſecundo, prima ad vltimam, vel ſi extremæ ordinis vnius eandem inter ſe habeant rationem, quam extremæ alterius totidem ſubtractis mediis: hæc proportio dicitur æqua ratione conſtituiꝰ: vt exemplo: Sint duo ordines totidem magnitudinum A B C D & E F G H: ſumanturq; binæ rationes eædem ſcilicet A ad B vt E ad F, & binæ B ad C vt F ad G, & C ad D vt G ad H. Quando autẽ fuerit in primo ordine A prima ad D vltimam, ſic in ſecundo ordine E prima ad H, vltimam, vel cum ablatis totidem mediorum rationibus, rationes A ad D & E ad H extremorum æquales erunt, hæc proportio æqua ratione copulabitur. Huius autem neceſſitas à 10 huius dependet. Cùm enim rationes interuallorum A B, C D & E F G H vel A ad D, vt E ad H ſint æquales, neceſſariò rationes extremorum (ex eiſdem rationibus mediorum conſtantes) æquales erunt.

A	B	C	D
8	6	4	2
E	F	G	H
12	9	6	3

DIFFINITIO XVIII.

Ordinata proportio eſt quando fuerit ſicut antecedens ad

conſequens

conſequens, ita antecedens ad conſequens, ſit autem conſequens ad rem aliam ſicut conſequens ad rem aliam.

Hæc binos quantitatum ordines requirit. Diſponit enim prius quatuor proportionales, binis æquis rationibus coniunctas, quarum binas conſequentes efficit antecedentes, ad alias conſequentes ſibi relatas, eadémque coniunctas ratione, vt exemplo, ſi fuerit A ad B vt C ad D, ſit autem B conſequens ad E rem aliam, ſicut D conſequens ad F rem aliam, hæc rationum diſpoſitio ordinata dicetur proportio, eò quòd prioris ordinis ratio prior, priori ſecundi, poſterior verò poſteriori æqualis ſit, & ſic quotcunque fuerint rationes, tãdem ad æquam extremorum rationem peruenientes.

A	B	E
6	3	12
C	D	F
4	2	8

DIFFINITIO XIX.

Perturbata proportio eſt, quando tribus exiſtentibus magnitudinibus, & aliis eis æqualibus multitudine ſit, ſicut in primis magnitudinibus antecedens ad cõſequens, ſic in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequens. Sicut autem in primis conſequens ad rem aliam, ſic in ſecundis res alia ad antecedens.

Hæc ſimiliter quatuor proportionales ſupponit, vt cùm primæ rationis conſequens ad aliquã magnitudinẽ eam ſeruabit rationem, quam aliqua alia magnitudo ad ſecundæ rationis antecedens, hic ordo rationum perturbata vocetur proportio: vt exemplo: Eſto A ad B, vt C ad D, ſit verò B primæ rationis conſequens ad rem aliam E, ſicut quædam alia res F ad C antecedens ſecundæ rationis. hic rationum ordo licet perturbatus ſit, nihilominus verè proportionalis eſt: nam bini ordines binas rationes aliis binis æquales habent: eſt enim A ad B eadem rationi C ad D: ſed B ad E eſt eadem rationi F ad C: ipſorum ordinum igitur binæ rationes, binis æquales exiſtunt. Oſtendit hac diffinitione, nihil referre an prioris ordinis ratio, poſteriori rationi ſecundi ordinis æqualis fuerit, perturbato hoc ordine. Dum tamen quilibet ordo totidem rationes contineat, ſingulas ſingulis æquales, licet non ordinata proportione, ſed perturbata ſerie. Id quidem vt tandem inter extremas eadem reperiatur ratio, ex eiſdem mediis rationibus conſtans, ſiue ordinata ſiue perturbata ſerie diſpoſitis, æquam rationem conſtituentibus.

A	B	E
6	3	2
F	C	D
12	8	4

MONITVM.

Binas inſuper apponit præter has diffinitiones Zambertus, quas eaſdem cum binis præcedentibus vltimis reperientes, data opera omiſimus. Non enim eas Euclidem ſcripſiſſe fuit veriſimile, nec forſan omnes ab Euclide ſcriptas, ad nos perueniſſe credibile. Diſſentiunt etenim Theon & Campanus, non tantùm ordine, & theorematum numero, ſed quandoque & ſenſu, vnde verum fuiſſe arbitramur Zamberti ſcriptum in liminari ad perſpectiuam, eum ſcilicet quandoque reperiiſſe Euclidem, in vetuſtiſſimis & tineis accarie contritis græcis codicibus. Non igitur difficile videbitur multa ad nos temporis iniuriam heteroclita detuliſſe. Cùm itaque coniiciamus Euclidem multas alias proportionum varietates, quàm ab his receperimus, reliquiſſe, tamen has demonſtrandis futuris elementorum theorematibus ſufficere rati, ſtudioſis, ſi quas præter has diſquirere cupiant, relinquimus exequendum. His igitur nouem ab vndecima quid conueniat exponere volentes, dicemus has geometricas proportiones omnibus quantitatum generibus inſeruire, diuerſis quidem reſpectibus. Nam licet vndecima ſimiles antecedentium ad conſe-

quentia proferens rationes, omni quantitatum generi copuletur, cùm in diuerſis genere ſimiles poſſint dari rationes, attamen duodecima permutata, rationes eaſdem extra idem quantitatis genus eſſe non ſinit. Nam primæ rationis antecedens ad ſecundæ rationis antecedens comparatum, priores binas rationes ſuppoſitas inter eiuſdem generis quantitates cecidiſſe cogit, conuerſa verò binas rationes in bina quantitatum genera cadere patitur, nihil enim priorum cum poſterioribus miſcet, quod idem operatur & compoſita ratio, necnon diuiſio rationis: eas inſuper inſequitur conuerſio rationis: illæ etenim, quatuor magnitudinum numero quæque clauduntur. Æqua verò ratio ſex aut plures poſtulans magnitudines binis ordinibus diſpoſitas, diuerſa quantitatum genera cuilibet ordini ſcilicet proprium genus ineſſe patitur. Ordinata autem duo quantitatum genera ſimiliter defert, cui fit conſors perturbata, cùm earum ſingulæ binos quantitatum ordines præ ſe ferant, ſi libeat duobus quantitatum generibus obnoxios. Cùm enim rationem dixerimus eſſe reſpectum ſiue habitudinem, qua prior duarum oblatarum magnitudinum, poſteriorem ſua quantitate multiplicat, multiplicationiſq; huius quantitatem rationis itidem quantitatem denominare, illud præmonendum duximus: quòd ſcilicet cùm rationis alicuius expreſſio, nil aliud ſit quàm antecedentis ad conſequens multiplicatio, per multiplicationum comparationes ordietur hoc quinto Euclides, rationum aperire inter ſe differentias, habitudines ſiue reſpectus, illæ etenim cùm ſuas quantitates non ſimplicibus ſed multiplicibus exprimant numeris, per multiplicium quantitatum additionem, detractionem & æquationem, ipſarum quantitates æquemultiplicibus inter ſe comparatis magnitudinibus edocebit, præcipuè ſex prioribus huius quinti theorematis. Quicquid enim de multiplicatione vnius in alteram dicet quantitatis, idem de ratione dictum poſtre mò patebit. Cùm autem binæ quantitates binarum æquemultiplicant augmentum, hæc multiplicationis æqualitas, æquales inter eas denunciat rationes, maior maiores, minor verò multiplicatio, minores eſſe rationes edocet. Quia verò augmenti verum eſt oppoſitum decrementum, conuerſo argumento dicemus, binas quantitates binarum decrementum multiplicantes æqua multiplicatione, æquales ad eas rationes habere, veluti in augmenti diximus multiplicatione: ſed cùm in augentibus maior multiplicatio maiorem rationis quantitatem aſſerat, perſpicuum erit in minuentibus maiorem decrementi multiplicationem, plus rationis decreſcere denominationem, & proinde maius decrementi multiplex, minorem præ ſe ferre rationem exiſtimemus: maiori tamen expreſſam numero, vt idem quod de quantitatibus diximus rationibus conferri poſſit. Diximus enim quantitates per decrementi earum multiplicationem minui, maiori verò (quanto minores fient) exprimi numero, vt percipiamus totius geometriæ legem in augmento, æquatione, vel quantitatum decremento conſiſtere. Cùm enim æquatio nulla egeat multiplicatione, eò quòd vnitati aſſimiletur, reliquas geometriæ partes (quæ ab ea hinc inde recedunt) per numerorum auctas multiplicationem, plus ab ea æqualitate recedere fatemur, vt quæ plus in augmentum tendant maiori numero, maiores demonſtrentur, quæ verò in decrementum maiori numero, minores effectæ noſcantur, quod idem rationũ quantitatibus conuenire deduximus. Poſtmodum 7 huius incipit magnitudinum rationes in genere quidem, vt quæ maiores, minores, aut certè æquales dicantur, illico quædam particulariora ſubnectens. A 16 verò proportionum variationem nouem vltimis diffinitionibus expoſitam demonſtrat, vt illę arguendi ſpecies prius diffinitæ, geometrica demonſtratione firmentur.

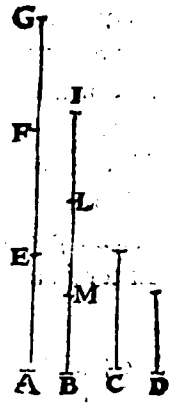
PROPOSITIO I.

Si fuerint quotcunque magnitudines totidem magnitudinum ſingulæ ſingularum æquemultiplices, quotuplex eſt vna

vnius

vnius magnitudo, totuplices erunt omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines A & B, totidem magnitudinum C & D æquæmultiplices, ſingulæ ſingularum: Dico omnes A & B, omnium C & D totuplices eſſe, quotuplex eſt vna A vnius C. Quoniam A eſt multiplex ipſius C: ſumantur in A quotcunque ſint magnitudines ipſi C æquales, ſcilicet A E, E F, F G. Similiter in B ipſi D æquales B M, M L, L I. quot igitur ipſius C erunt in A, tot ipſius D erunt in B. ſed binæ magnitudinum A & B partes binis C & D ſunt æquales, quot autem ſunt in A ipſius C, tot ſunt in A & B ipſarum C & D. Binæ igitur A & B, toties repetunt ipſas C & D, quoties A repetit ipſam C. Quotuplex eſt itaque A vna vnius C, totuplices erunt omnes A B ſimul ſumptæ omnium C D ſimul ſumptarum. Hoc oſtendimus exemplum in multiplicantibus augmentum. Idem proinde oſtendetur in multiplicantibus decrementum, conuerſo quantitatum ordine, multiplicet C ipſius A decrementum æquè ac D multiplicat ipſius B decrementum. Quoties igitur C diminuet ſui diſtractione A, toties D diminuet ipſum B. Diminuant per magnitudines A E, E F, F G, & B M, M L, L I, quoties C aufert ad ipſius A decrementum, ſcilicet E F d, toties D aufert ad ipſius B decrementum M L I. Toties igitur vtrumque C D vtriuſque A B decrementum auferet ſcilicet E M, F L, & G I: quotuplex igitur erit C ipſius A decrementum, totuplex erunt omnes C & D ſimul ſumptæ decrementum, omnium A & B ſimul ſumptarum. Si fuerint itaque quotcunque, &c.



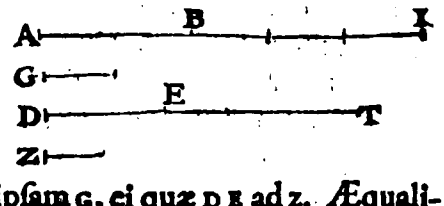
MONITVM.

Hanc priorem in æquemultiplicantibus decrementum oſtendere voluimus eadem abſolui opera, qua in augmentum multiplicantibus prius oſtendimus. Cùm enim decrementum multiplicantes numeri, æquè propoſitorum poſſint eſſe multiplices, vt hi qui augmentum multiplicant, ſufficiet (vt tædium vitemus) futuris demonſtrandis, alterum tantùm æquemultiplicium vel multiplicandi genus proferamus, augmenti quidem aut decrementi, vt contrariorum eadem intelligatur eſſe diſciplina: haud ſecus æquemultiplices reperiemus, vtraque ſeu mixta propoſita multiplicatione: ea namque ex binis ſigillatim operantibus conſtat. Nam quæ ſingulatim ad alias idem habebunt incrementum, idémque decrementum, ſequetur eas ſimul ad vtraſque eodem incremento ac decremento eſſe æquemultiplices: hæc ſuccincta animaduerſione quodammodo digna putauimus, licet Euclides (ſola multiplicatione vſus) demonſtrarit alterum tantùm, ſcilicet incrementum, veluti plus familiare primordia guſtantibus. Sed ne in paralogiſmum decidamus, huius memores ſub voce multiplicis hinc inde quoduis multiplex ſuſcipiamus, ſcilicet increſcens, decreſcens, ac mixtum vtroque conſtans.

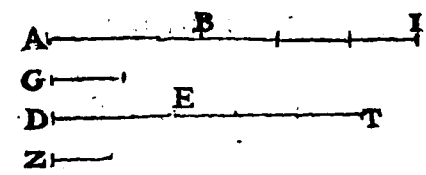
PROPOSITIO II.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, vt tertia quartæ: fuerit autem quinta ſecundæ æquemultiplex, vt ſexta quartę, compoſita prima cum quinta æquè erit ſecundæ multiplex, vt tertia cum ſexta quartæ.

Sit prima A B ſecundæ G æquemultiplex, vt tertia D E quartæ Z: ſit inſuper quinta B I eiuſdem ſecundæ G æquemultiplex vt ſexta E T quartæ Z: Dico compoſitam A I æquè eſſe ſecundæ G multiplicem, vt compoſita D T quartæ Z. Quoniam æqualis eſt multiplicatio A B ad ipſam G, ei quæ D E ad Z. Æqualibus illis



bus illis æquales addantur ipſius B I ad G, & E T ad Z multiplicationes: igitur omnes A B prima & B I quinta ad G ſecundam: omnibus D E E T tertiæ & ſextæ ad Z quartam, erunt (per ſecundam commun. ſentent.) æquales multiplicationes. Si igitur prima ſecundæ æquè fuerit multiplex vt tertia, &c.

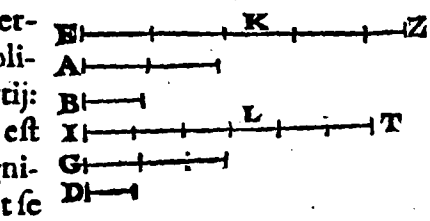


Vel aliàs quoties A B capit G, tot ſunt in D E ipſius Z: ſed quot ſunt in B I ipſius G, totidem ſunt in E T ipſius Z. Cùm igitur in A B B I tot ſint ipſius G, quot in D E E T ipſius Z: prima A B & quinta B I æquemultiplex erit ipſius G ſecundæ, quotuplex tertia D E & ſexta E T ſimul ſumptæ, quartæ Z. Si igitur prima ſecundæ, &c.

PROPOSITIO III.

Si primum ſecundi æquè fuerit multiplex, vt tertium quarti, ſumantur autem æquemultiplicia primi & tertij: æqueſumptorum vtrumque vtriuſque æquè erit multiplex, alterum quidem ſecundi, alterum autem quarti.

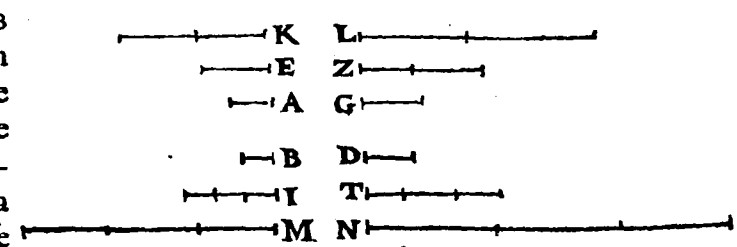
Sit primum A ſecundi B æquemultiplex, vt tertium G quarti D: ſumantur autem æquemultiplicia, E Z quidem ipſius A primi, vt I T ipſius G tertij: Dico totuplex eſſe E Z ſecundi B, quotuplex I T eſt ipſius D: ſecentur E Z quidem in totidem magnitudines æquales ipſi A (quæ ſint E K K Z) in quot ſe cabitur I T æquales ipſi G, ſcilicet I L, L T, cùm ſint æquemultiplicia ſingula ſingulorum. Quia verò æquemultiplex eſt A ipſius B vt G ipſius D, æquemultiplex erit E K prima ſecundæ B, vt tertia I L quartæ D. Similiter reliqua Z K quinta eiuſdem B, vt reliqua ſexta L T quartæ D, æquè erit multiplex. Sunt enim æquales ipſæ E K I L, rectis A & G, ipſarum B & D æquemultiplicibus, etiam ſi pluries repetant ipſas A & G. Sequetur itaque (per præcedentem) totam E K, K Z compoſitam à prima & quinta, æquemultiplicem eſſe ipſius B ſecundæ, vt tertia & ſexta I L, L T ipſius D quartæ: ſed ipſa E Z & I T ſunt æqueſumpta multiplicia ipſorum A primi, & G tertij. Aequeſumptorum igitur vtrumque, vtriuſque ſcilicet E Z, ipſius B ſecundi, vt I T ipſius D quarti, æquemultiplex erit. Si itaq; primũ ſecundi æquè fuerit multiplex, vt tertium quarti, ſumantur autem, &c.



PROPOSITIO IIII.

Si primum ad ſecundum eandem habuerit rationem quam tertium ad quartum, æquemultiplicia primi & tertij ad æquemultiplicia ſecundi & quarti, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem ſumpta adinuicem.

Sit A primum ad B ſecundum vt G tertium ad D quartum. Sintque ipſorum A & G æque multiplicia E & Z, ipſorum verò B & D alia quæuis I & T: Dico eſſe vt E ad I ſic Z ad T. Sint rurſus ipſorum E & Z æquemultiplicia K & L, ipſorum verò I & T alia quæuis M & N. Et cùm E primum ſecundi A ſit æquemultiplex, vt Z tertium quarti G: Sint autem æquè ſumpta K & L primi & tertij æquemultiplicia: Ipſa K & L æquemultiplicia erunt ipſorum A & G, per præcedentem. Et eadem cauſa



ſa M & N ipſorum B & D. Sed cùm A ad B ſit vt G ad D, ipſæ K & L ſimul excedent vel deficient ab ipſis M & N, per conuerſam 5 diffinitionis. Si autem ſimul excedant K & L, vel ſimul deficiant ab ipſis M & N: quia ſunt K & L æquemultiplices ipſarum E & Z, & aliæ quæuis M & N ipſarum I & T, erit (per 5 diffinitionem) E prima ad I ſecundam, vt Z tertia ad T quartam. Si igitur primum A ad ſecundum B eam habuerit rationem quam tertium G ad quartum D: æquemultiplicia E & Z primi & tertij, ad I & T æquemultiplicia ſecundi & quarti, iuxta quãuis multiplicationem, eandem habebunt rationem ſumpta adinuicem.

COROLLARIVM.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & conuerſim proportionales erunt.

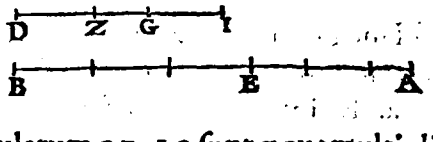
Nam ſi K & L ſimul excedentes vel deficientes ipſis M N, efficiant E ad I ſicut Z ad T, ſequetur conuerſim, quod M & N ſimul excedentes vel deficientes ipſis K & L, efficient I ad E ſicut T ad Z. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & conuerſim proportionales erunt. Hoc corollarium exponit 13 diffinitionem.

MONITVM.

Quoniam Campanus diffinitionum quintæ & octauæ huius neceſſariam veritatem non expoſuit: Theon verò tacuit eius expoſitionem, per quintam hanc (ea non expoſita) demonſtrantes, an demonſtrata ſit, iudicandum relinquunt. Nam quintam prius exponens Campanus diffinitionem, ſimilem 15 huius theoremati efficit. Quare hoc monitum præferendum arbitrati ſumus, vt huius potiſſimè veritatem, à diffinitionis quintæ conuerſa, à nobis expoſita conſtare præuideamus: id enim cauſæ fuit, cur prolixiores in ea & octaua diffinit. exponendis euaſerimus, vt perfectè hanc & plures ſequentes ipſius quintæ & octauæ obſequio demonſtrandas, certis prælibatis concluderemus.

PROPOSITIO V.

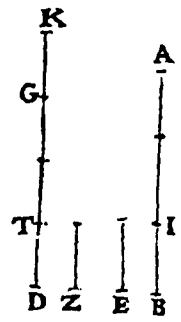
Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, vt ablata ablatæ. Et reliqua reliquæ æquè erit multiplex, quotuplex eſt tota totius.



Sit tota A B totius G D æquemultiplex, vt ablata A E ablatæ G Z: Dico reliquam E B reliquæ Z D æquè eſſe multiplicem, vt tota A B totius G D. Ponatur E B æquemultiplex ipſius I G, vt A E ipſius G Z. Quoniam ſingulæ A B E B ſingularum G Z I G ſunt æquemultiplices, vt vna A E vnius G Z, vel E B ipſius I G, tota A B totius I Z æquè erit multiplex, vt vna A E vnius G Z, per primam huius, ſed (per hypotheſim) quotuplex A B eſt ablatæ G Z, æquemultiplex eſt tota A B totius G D. Tota igitur A B æquè erit multiplex ipſius I Z, vt ipſius G D: æquales igitur ſunt G D & I Z. Communis auferatur G Z, reliquæ I G & Z D erunt æquales. Quotuplex erit igitur E B ipſius I G, totuplex erit & ipſius Z D ſibi æqualis. Sed quotuplex E B ipſius I G, totuplex fuit A E ipſius G Z, & A B ipſius G D, per hypotheſes. Quotuplex itaque erit tota A B totius G D, vel ablata A E ablatæ G Z, totuplex erit reliqua E B reliquæ Z D. Si igitur magnitudo, &c.

PROPOSITIO VI.

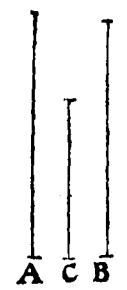
Si duæ magnitudines, duarum magnitudinum æquè fuerint multiplices, & ablatæ aliquæ, earundem æquè fuerint multiplices, etiam reliquæ eiſdem vel æquales ſunt, vel æquè ipſarum multiplices.



Sint duæ magnitudines A B G D, duarum E & Z æquemultiplices, ſint inſuper ablatæ aliquæ ab ipſis, ſcilicet G T A I, earundem E & Z æquemultiplices: Dico reliquas L B & T D eiſdem E & Z æquales, vel ipſarum æquemultiplices eſſe. Oſtendamus primo cùm altera reliquarum æqualis erit, & reliquam æqualem eſſe. Sit reliqua I B ipſi E æqualis: Dico proinde T D ipſi Z æquam eſſe. Ponatur G K æqualis ipſi Z. Quoniã autem æquemultiplex fuit A I ipſius E, & G T ipſius Z: æqualis verò eſt I B ipſi E, & K G ipſi Z, æquè igitur multiplex erit tota A B prima & quinta, ipſius E ſecũdæ, & K T tertia & ſexta ipſius Z quartæ, per 2 quinti. Quotuplex autẽ eſt A B ipſius E, totuplex eſt G D ipſius Z: quotuplex itaq; erit K T ipſius Z, totuplex eiuſdem erit & G D: æquales igitur ſunt K T & G D, per 2 communem ſententiam. Communis auferatur G T, reliqua T D reliquæ K G æqualis erit. Et proinde K G (ipſi Z æqualis) efficit T D eidem Z æqualem. Reliquæ igitur I B & T D eiſdem E & Z ſunt æquales. Similiter oſtendemus eas eſſe æquemultiplices ſiue augmento, ſiue decremento. Si ponamus K G æquemultiplicem ipſius Z, vt I B ipſius E, ſequetur T D eiuſdem Z totuplicem eſſe, quotuplex fuit K G eiuſdem: & proinde quotuplex fuit I B ipſius E. Si itaque duæ magnitudines duarum, &c. Hęc noſtram multiplicis expoſitionem neceſſariò concludit.

PROPOSITIO VII.

Æquales ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales.



Proponantur æquales magnitudines A & B, ipſis autem alia quædam exponatur C: Dico æquales A & B eandem habere rationem ad C: & contra, C ad ſingulas earum A & B, eandem habere rationem. Cùm enim ratio ſit (per 3 diffinitionem huius) magnitudinum reſpectus quoad quantitatem, ſed A & B magnitudinum æqualium ad eandem C magnitudinem, æquales ſunt quoad quantitatem reſpectus: ipſarum igitur A vel B ad eandem C æquales erunt rationes. Erit igitur vt A ad C ſic B ad C. Et proinde contra (per coroll. 4. huius) C ad A vt C ad B. Æquales itaque ad eandem, eandem, &c.

MONITVM.

Hanc poteramus ampliori apparatu per 5 diffinitionem oſtendere. Sed non arbitrati ſumus eam quintam eſſe, vſque adeò huic intelligentiæ vicinam vt fuit tertia. Et inſuper breuius & familiare admodum fuit hoc argumentum. Nam Theon & Campanus per primam communem ſententiam hanc & præcedentem nituntur demonſtrare: quod facilius per ſecundam abſoluetur. Omnis enim æqua multiplicatio æqualium quantitatum, fit per æquales æqualiter additas magnitudines, quas ſecunda ſententia docet æquales producere.

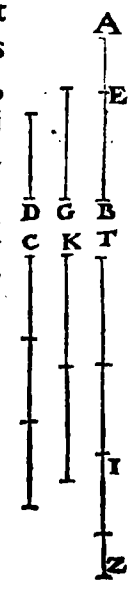
PROPOSITIO VIII.

Inæqualium magnitudinum, maior ad eandem maiorem rationem habet quàm minor, & eadem ad minorem maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.

Sint inæquales magnitudines A B maior & G minor, ſit & alia quædam D: Dico A B ad D, maiorem habere rationem quàm G minor ad eandem D, & inſuper ipſam D ad G minorem, habere maiorem rationem quàm ad A B maiorem. Auferatur à maiori A B, æqualis ipſi G, ſitq; B E, ipſarum autem B E & G æquemultiplices ſint T I & K. Reliquæ itẽ A E æquemultiplex ponatur I Z, tali quidem multiplicatione qua minor ipſarũ T I I Z excedat ipſam D. Augeatur autem D multiplicatione ea, qua

quampri

quamprimũ excedat K,& ſit C. Quoniã minor ipſarum T I & I Z excedit ipſam D,reliqua K (ipſi T I æqualis)excedet eandẽ D. Ipſa autẽ C excedẽs quãprimum K,minor erit ipſa T Z. Sit ergo prima A B, ſecũda D, tertia G, & quarta eadẽ D. Quia æquemultiplicium (T Z & K) primi A B, & tertij G,& iuxta quamuis multiplicationem (C bis ſumptum) ſecundi & quarti D bis ſumpti,multiplex primi,ſcilicet T Z, excedit C multiplex ſecundi:multiplex verò tertij K,non excedit multiplex quarti C,aliqua ſecũdi & quarti facta multiplicatione. Sequetur(per 8 diffinitionẽ)primum A B maiorem habere rationem ad ſecundum D,quàm tertium G ad quartum idem ſcilicet D. Inæqualium igitur A B & G, maior A B maiorem rationem habet ad eandem D,quàm minor G. Conuerſo verò argumento ſecunda pars primæ conuerſa fiet nota. Namque poſitis D prima,G ſecunda,D rurſus tertia,& A B quarta,patebit C æquemultiplex primæ excedere K æquemultiplex ſecundæ. Idem verò C æquemultiplex tertiæ, non excedere T Z multiplex quartæ. Prima igitur D ad ſecundam G minorem,maiorem habebit rationem, quàm eadem D tertia, ad A B quartam & maiorem. Inæqualium itaque magnitudinum,maior ad,&c.



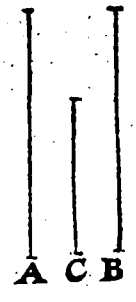
MONITVM.

Huius demonſtrationis inuentio ab eo oritur, quo minor duarum magnitudinum liberè æquemultiplicetur cum maiore, quouſque horum multiplicium differentia excedat tertiam magnitudinem ſcilicet D, id quidem, vt fieri poſſit ipſius D, talis multiplicatio,quæ ipſum K excedens,ab ipſo T Z deficiat.

PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandem,eandem habent rationem,æquales adinuicem ſunt,& ad quas eadem eandem habet rationem, ipſæ ſunt æquales.

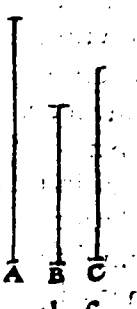
Hæc ex præcedente breuiſſimè deducitur:habeant enim binæ A & B ad eandem C, eandem rationem: Dico A & B eſſe æquales. Si quidem non eſſent, maior ad ipſam C, maiorem rationem haberet, quàm minor,per 8 huiũ,ſed eandem habent rationem: æquales itaque erunt A & B. Rurſus ad ſecundum: habeat eadem C ad ſingulas A & B eandem rationem: Dico A & B eſſe æquales. quod ſi inæquales eſſent, eadem C ad minorem, maiorem haberet rationem,quod eſſet contra hypotheſim.Non ſunt igitur inæquales A & B. Quæ itaque ad eandem, eandem habent rationem,æquales, &c.



PROPOSITIO X.

Ad eandem rationem habentium, maiorem rationem habens, illa maior eſt. Ad quam autem eadem maiorem rationem habet,illa minor eſt.

Ad eandem C rationem habeant A quidem maiorem, B verò minorem: Dico A maiorem eſſe ipſa B. Non eſt enim minor A ipſa B: nam ſi minor eſſet,minorem haberet rationem ad ipſam C, per 8 huius. Nec quidem æqualis,nam æqualem haberet rationem, per 7 huius, quod eſſet oppoſitum ſuppoſito,cùm A maiorem habeat ad C quàm B, rationem ex hypotheſi.maior igitur erit A ipſa B. Ad ſecũdam verò partem, habeat eadem C ad B maiorem rationem quàm ad A:Dico B eſſe minorem ipſa A. Si enim credatur maior B ipſa A, magnitudo C ad B maiorem, haberet minorem rationem (per 8 huius) quàm ad A, contra hypotheſim.



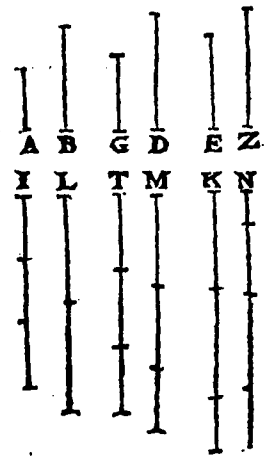
Si verò æqualis credatur B ipſi A, eadem C ad B eandem haberet rationem quàm ad A, per 7 huius: quod opponeretur ſimiliter hypotheſi, nam per eam c, habet ad B maiorem quàm ad A rationem. Non itaque maior aut æqualis eſt: igitur B minor eſt ipſa A. Ad eandem itaque rationem habentium, &c.



PROPOSITIO XI.

Quæ eidem eædem ſunt rationes, & adinuicem ſunt eædem.

Supponantur rationes A ad B & G ad D eſſe eædem rationi E ad Z: Dico rationes A ad B & G ad D eſſe eaſdem adinuicem. Dentur ſingulis antecedentibus A G E æque multiplicia I T K. Singulis verò conſequentibus B D Z alia quæuis æquemultiplicia L M N. Quoniam A eſt ad B in eadem ratione qua E ad Z, ſed primæ & tertiæ A & E ſumpta ſunt æquemultiplicia I & K, ſecundæ verò & quartæ B & Z alia quæuis L & N. Sequetur per conuerſam quintæ diffinitionis, ſi I ſit maius ipſo L, & K eſſe maius ipſo N, ſi æquale, æquale, ſi verò minus, minus. Similiter cùm ſit G ad D ſicut E ad Z, eodem argumento ſi T excedat M, & K excedet N: ſi æquale, æquale, ſi autem minus minus, per eandem conuerſam. Si igitur I excedente L, K excedat N, ipſo verò K excedente N, T excedat M, à primo ad vltimum liquet I excedente L, T excedere M, ſi æquale, æquale, & ſi minus minus. Eorum itaque multiplicium ſimplices A ad B & G ad D in eadem erunt ratione, per 5 diffinitionem huius. Quæ itaque eidem eædem ſunt rationes, & adinuicem ſunt eædem.



MONITVM.

Hæc & ferè omnes præcedentes huius quinti, eouſque per ſe notæ exiſtunt, vt potius principia quàm demonſtranda theoremata dici debeanta. Qua autem de cauſa Euclides eas difficiliori demonſtratione petat, mea eſt ſententi: quòd hæc theoremata generali quadam maieſtate in omnes geometricas quantitates commenſurabiles ſcilicet & incommenſurabiles imperant, quarum quidem habitudo, nullo modo poteſt exhiberi patula: per quantitatis earum cognitionem, vt fieret ſi omnes tantùm commenſurabiles eſſent. Ac inſuper quia multiplicationis diſcretio confuſas geometriæ quantitates elucidat.

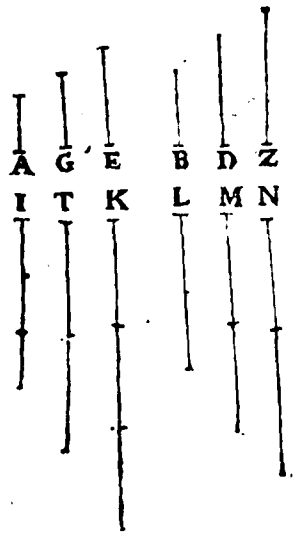
PROPOSITIO XII.

Si fuerint quotcunque magnitudines proportionem habentes, erit ſicut vna antecedentium ad vnam conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionem habentes, ſcilicet A ad B vt G ad D, vtq; E ad Z: Dico eſſe ſicut vna antecedentium A ad vnam conſequentium B, ſic omnes A G E antecedentes, ad omnes B D Z conſequentes, ſumantur ipſarum antecedentium A G E æquemultiplicia I T K. Reliquarum verò conſequentium B D Z alia quæuis æquemultiplicia L M N. Quoniam quotuplex eſt I ipſius A, tam multiplices ſunt I T K ſimul ſumptæ ipſarum A G E ſimul ſumptarum, per I huius. Similiter quotuplex erit L ipſius B, totuplices erunt omnes L M N omnium B D Z, ſimul ſumptarum, per eandem. Quatuor igitur ordine diſponantur magnitudines, ſcilicet A, B, A G E, B, D Z. Quia verò ſingulæ antecedentes A G E, ad ſingulas B D Z conſequentes, eandem habent rationem, ſequetur (per conuerſionem

5 diffinitio

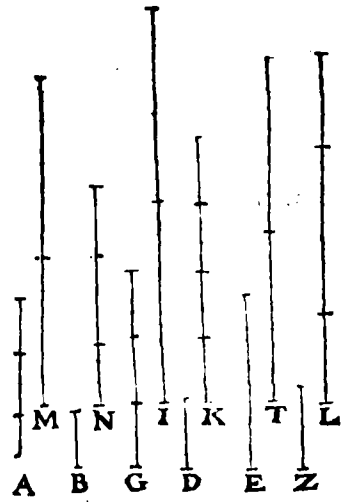
5 diffinitionis) 1 multiplici primæ A excedente L multiplicem ſecundæ B, ipſam T excedere M, & K ipſam N. Igitur ſi 1 multiplex ipſius A excedat L multiplicẽ ipſius B, omnes I T K excedent omnes L M N, ſi æquales æquales, ſi minores minores erunt. Ipſæ igitur quatuor A ad B vt A G E ad B D Z proportionales erunt, per 5 diffinitionem huius. Si fuerint itaque quotcunque magnitudines, &c.



PROPOSITIO XIII.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem & tertia ad quartam, tertia autem ad quartã maiorem rationem habeat, quàm quinta ad ſextam, prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit quàm quinta ad ſextam.

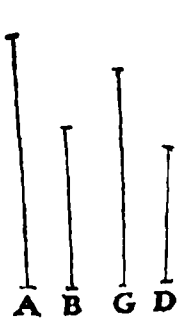
Habeat prima A ad ſecundam B eam rationem quam tertia G ad quartam D, tertia verò G ad quartam D maiorem rationem habeat quàm quinta E ad ſextam Z: Dico primam A ad ſecundam B maiorem rationem habere, quàm quinta E ad ſextam Z. Aſſumantur antecedentium A G E æquemultiplicia M I T, conſequentium verò B D Z, ſumantur alia quæuis æquemultiplicia N K L: quoniam A & B in eadem ratione ſunt ei, quæ G ad D: ſequetur (per conuerſionem quintæ diffinitionis) M excedente N & I, excedere K: quia verò G ad D maiorem rationem habet quàm E ad Z, aliqua fiet multiplicatio qua I excedente K, T non excedet L, per conuerſionem octauæ diffinitionis. Sequetur itaque M excedente N, aliqua multiplicatione facta, T non excedere L, & ipſorum A & E æquemultiplices ſunt M & T. Ipſorum verò B & Z aliæ quæuis æquemultiplices ſunt N & L. Igitur A ad B maiorem rationem habebit quàm E quinta ad Z ſextam, per octauam diffinitionem. Si itaque prima ad ſecundam eandem habuerit, &c.



PROPOSITIO XIIII.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam, prima verò tertia maior fuerit, & ſecunda quarta maior erit, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor.

Prima A ad ſecundam B eam habeat quam G ad D rationem, ſitq; A maior ipſa G: Dico B eſſe maiorem ipſa D, & ſi æqualis æqualem, & ſi minor minorem. Quoniam A eſt maior tertia G, ipſa ad B maiorem rationem habet quàm G (per 8 huius) ſed eſt vt A ad B ſic G ad D: igitur G ad D maiorem habet quàm G ad B. Maior eſt igitur B ipſa D, per ſecundam partem decimæ huius. haud ſecus patebit ſi ſupponatur A æqualis ipſi G, ſecundam B æquari quartæ D, per ſeptimam, & ſecundam partem nonæ huius: ſi verò A ſupponatur minor G, & B ipſa D minor oſtendetur, per octauam, & ſecundam partem decimæ, vt prima parte. Si itaque prima ad ſecundam, &c.

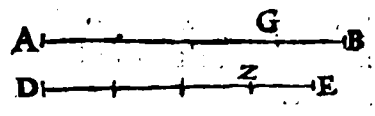


PROP

PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium, eandem rationem habent ſumptæ adinuicem.

Sint G B & E Z partes magnitudinum A B & D E ſuarum æquemultiplicium: Dico eſſe ſicut A B ad D E, ſic G B ad E Z. Quoniam quot ſunt in A B magnitudines G B, totidem in D E ſunt ipſius Z E, ſingulæ ad ſingulas eandem rationem habentes, cùm ſint æquales. Sicut igitur B G vna antecedentium ad E Z vnam conſequentium, ſic (per 12 huius) erunt A B omnes antecedentes ad D E omnes conſequentes. Similiter oſtendemus ſi ipſarum A B, D E multiplicia decrementa ſint G B & Z E, conuerſa ratione, per coroll. 4. huius, cùm ab ipſis A B & D E quælibet ablatæ, æquales ſint ipſis G B, Z E. Eandem habebunt igitur rationem, A B ad D E, vt G B ad Z E (per eandem duodecimam huius.) Partes itaque eodem modo multiplicium, &c.



MONITVM.

Hoc theoremate oſtendit Euclides amplam, quam expoſuimus, multiplicandi legem, cùm dicit partes æquemultiplicium: nam ſi tantùm eas partes quæ totum præcisè metiuntur intelligeret, per primam diffinitionem, ab hac geometriæ lege, potiſſimam rationum multitudinem abſtraheret, nempe quatuor maioris inæqualitatis ſpecies, ſcilicet ſuperparticularem, ſuperpartientem, multiplicem ſuperparticularem, & multiplicem ſuperpartientem. Nos igitur æquemultiplices qualibet rationis ſpecie copulatas, huic adſcribemus theoremati, vt earum ſimplices eandem eis habeant rationem, non autem multiplices tantùmquas ſimplices metiuntur ſua repetitione præcisè, vt plures voluerunt.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

Sint proportionales (ſiue in eadem ratione) A ad B qua G ad D: Dico eſſe viciſſim (hoc eſt permutata ratione) A ad G vt B ad D. Sint ipſarum A & B æquemultiplices E & Z: Ipſarum verò G & D aliæ quæuis æquemultiplices I & T. Cùm autem ſit A ad B vt G ad D, erit (per præcedentem) E ad Z ſicut I ad T (æquemultiplices enim ſunt): quia verò proportionales ſunt, ſi E maior fuerit ipſa I, & Z ipſa T (per 14 huius) maior erit, ſi minor minor, & ſi æqualis æqualis: variato igitur ordine, ſit A prima, G ſecũda, B tertia, & D quarta. Quoniã igitur E multiplici primę excedẽte I multiplex ſecũdæ, ſequitur Z multiplex tertiæ excedere T multiplex quartæ, æquali verò exiſtente æquale, minori autem minus. Simplices A prima ad G ſecundam erunt, vt B tertia ad D quartam. Sunt enim primæ A & tertiæ B æquemultiplicia, ſecundæ verò G & quartæ D alia quæuis æquemultiplicia ſumpta, per quintam diffinitionem huius. Si quatuor itaque, &c.

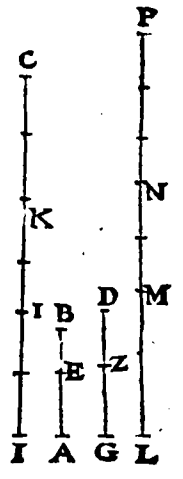


PROPOSITIO XVII.

Si compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, diuiſæ quoque proportionales erunt.

Sint

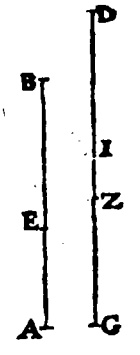
Sint compoſitæ magnitudines, ſcilicet AB ex AE EB, & DG ex GZ ZD: Sítque ſicut compoſita AB ad BE, ſic compoſita GD ad DZ: Dico diuiſas eſſe AE ad EB vt GZ ad ZD. Sumantur æquemultiplices ipſarum AE, EB, ſintq́, IT TK. Ipſarum verò GZ ZD, ſint LM MN, ſingulæ ſingularum. Per primam igitur erunt omnes IK & LN omnium AB & GD æquemultiplices: rurſus quæuis aliæ æquemultiplices ipſarum EB & ZD ſumantur KC & NP. Cùm enim TK prima ſit ſecundæ EB æquemultiplex vt tertia MN quartæ ZD, quinta verò KC ſit eiuſdem EB ſecundæ, vt ſexta NP, quartæ ZD: æquemultiplex erit tota TC eiuſdem EB, vt tota MP ipſius DZ, per 2 huius: eſt autem AB ad BE vt GD ad DZ. Si igitur IK multiplex primæ AB excedat, æquetur, vel deficiat TC multiplici ſecundæ EB, & LN tertiæ multiplex, excedet, &c. NP multiplicem quartæ DZ, per conuerſam 5 diffinit. huius. Quare ablatis communibus TK & MN, ſequetur IT multiplici ipſius AE excedente KC multiplicem EB, & LM multiplicem GZ excedere, æquari, vel deficere ipſi NP multiplici ipſius ZD. Erunt igitur ſimplices AE ad EB vt GZ ad ZD, per quintam diffinitionem huius. Si itaque compoſitæ magnitudines, &c.



PROPOSITIO XVIII.

Si diuiſæ magnitudines proportionales fuerint, compoſitæ quoque proportionales erunt.

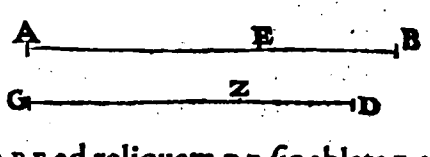
Sint diuiſæ magnitudines AE ad EB ſicut GZ ad ZD: Dico eas compoſitas AB ad BE eſſe vt GD ad DZ. Quod ſi opponatur, erit vt AB ad BE ſic GD ad aliquam maiorem vel minorem ipſa DZ: ſit prius ad minorem quæ ſit DI. Quoniam enim compoſitæ AB ad BE ſunt vt GD ad DI, erunt (per præcedentem) diuiſæ AE ad EB ſicut GI, ad ID: ſed ſicut AE ad EB ſic ſupponitur GZ ad ZD: erit igitur ſicut GI ad ID ſic GZ ad ZD. Sequetur itaque (per 14 huius) ſi prima GI tertia GZ maior fuerit, & ſecunda ID quarta DZ maior erit, ſed & minor ſupponitur, quod eſt abſurdum. Non igitur habet GD ad minorem ipſa ZD, rationem quam AB ad BE. Similiter oſtendetur quòd nec ad maiorem, nam ZD inueniretur maior alia maiore ſuppoſita, quod fieri non poſſet: igitur AB ad BE rationem habet quam GD ad DZ. Si itaque diuiſæ magnitudines proportionales, &c.



PROPOSITIO XIX.

Si fuerit ſicut totum ad totum, ſic ablatum ad ablatum & reliquum ad reliquum, erit ſicut totum ad totum.

Sit tota AB ad totã GD vt ablata AE ad ablatam GZ, erit viciſſim (per 16 huius) BA ad AE vt DG ad GZ: ſed ſi coniunctæ BA ad AE fuerint vt DG ad GZ, erunt (per 17 huius) diuiſim BE ad EA vt DZ ad ZG. Rurſus igitur erit viciſſim, vt reliqua BE ad reliquam DZ, ſic ablata EA ad ablatam ZG. Et proinde (per 11 huius) vt tota AB ad totam GD. Si itaque fuerit ſicut totum ad totum, ſic ablatum, &c.



COROLLARIVM.

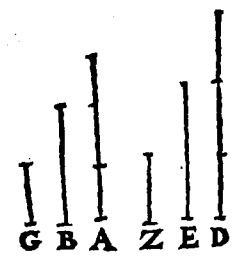
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & rationis conuerſione, proportionales erunt.

Cùm enim ſit vt AB ad GD ſic BE ad DZ, erit viciſſim vt AB ad BE, ſic GD ad DZ: ſed

ſed cùm fuerit antecedens A B ad conſequens A E, ſicut antecedens G D ad conſequens G Z, & conuerſione rationis erit antecedens A B ad E B exceſſum quo excedit ſuum conſequens A E, ſicut antecedens G D ad exceſſum Z D quo excedit ſuum conſequens G Z, per 16 diffinitionem huius.

PROPOSITIO XX.

Si fuerint quotcunque magnitudines, & aliæ eiſdem æquales numero, binæ ſumptæ in eadem ratione, æqua autem ratione in primis prima vltima maior fuerit, & in ſecundis magnitudinibus prima vltima maior erit, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor.



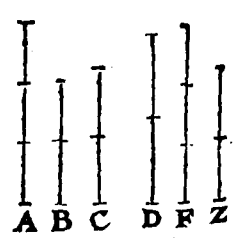
Sint quotcunque magnitudines A B G, totidémque D E Z, ita binæ in eadem ratione, vt ſcilicet A ad B ſic D ad E, vtq; B ad G ſic E ad Z, ſit autem A maior quàm G: Dico D maiorem eſſe ipſa Z, ſi minor minorem, ſi verò æqualis æqualem. Cùm autem (per hypotheſim) A ſit maior ipſa G, erit (per 8 huius) maior ratio A ad B quàm G ad eandem B: ſed cùm ſit vt B ad G ſic E ad Z, erit conuertendo (per corol. 4 huius) vt G ad B ſic Z ad E. Atqui rationes A ad B & D ad E cùm ſint eædem, maiores igitur ſunt quàm G ad B & Z ad E, ſingulæ ſingulis. ad eandem igitur E rationem habentium D & Z, maiorem rationem habens D, ipſa maior eſt (per 10 huius) reliqua Z. Haud ſecus concludemus D ipſi Z æqualem eſſe, ſi A ipſi G æqualis fuerit (per 9 huius). Et ſi A, ipſa G minor fuerit, reliquam D, vltima Z, minorem eſſe, per eandem 8 huius. Si itaque fuerint quotcunque magnitudines, &c.

MONITVM.

Huic liberam facultatem apponentes, diximus præter Euclidem (*quotcunque*) non tantùm tres magnitudines: nam ſi quotuis aliæ ponantur inter A & G cum totidem inter D & Z, ſemper A maior, maiorem ad ſingulas earum habebit rationem quàm G minor. Quia verò D & Z ad ſingulas reliquarum inter eas poſitarum, eandem ex hypotheſi habent rationem, & per allegata, D ſimiliter ipſa Z maior erit, & ſi A ipſi G æqualis, & D ipſi Z æqualis, & ſi minor, minor. Præterea quotcunque fuerint magnitudines, ex tribus ſemper fiet demonſtratio.

PROPOSITIO XXI.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ totidem binæ ſumptæ in eadem ratione, fuerit autem perturbata earum proportio, æqua ratione verò prima, tertia maior fuerit, & quarta ſexta maior erit, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor.



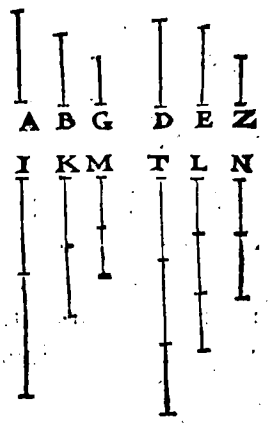
Sint tres magnitudines A B G aliæq; totidem ſint D E Z, binæ autem in eadem ratione perturbatim conſtituantur, vt ſcilicet A ad B ſic E ad Z, vtq; (per 19 diffinitionem huius) B ad G ſic D ad E: Dico ſi A maior fuerit tertia G, & quarta D maior erit vltima Z, & ſi minor, minor, & ſi æqualis, æqualis. Quoniam eſt B ad G vt D ad E, erit conuerſum (per coroll. 4 huius) G ad B vt E ad D. Sed cùm G minor ſit ipſa A, ea habet ad B minorem rationem quàm A ad eandem B, per 8 huius, qua re ratio E ad D (quæ eſt eadem ipſi G ad B) erit minor ratione eiuſdem E ad Z, quæ eſt eadem rationi A ad B: erit igitur (per ſecundam partem decimæ huius) D quarta maior ipſa Z ſexta, nempe A fuit maior tertia G. Si autem A fuerit ipſi G æqualis, eadem B ad A & ad G

eandem

eandem habebit rationem, per 7 huius, similiter E ad D & Z, sunt enim eædem rationes: si autem minor sit A ipsa G, similiter ostendetur (per 10 huius) D esse minor ipsa Z. Si fuerint igitur tres magnitudines, & aliæ totidem, &c.

PROPOSITIO XXII.

Si fuerint quotlibet magnitudines, & aliæ eisdem æquales numero, binæ sumptæ in eadem ratione, fuerit autem earum ordinata proportio, & æqua ratione proportionales erunt.



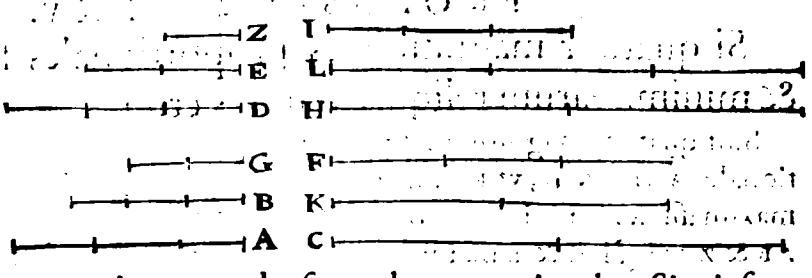
Sint quotuis magnitudines A B G, aliæq; totidem sint D E Z, binæ sumptæ & ordinatim in eadem ratione, vt scilicet A ad B sic D ad E, vtq; B ad G sic E ad Z, & sic consequenter quotcunque fuerint: Dico esse, æqua ratione primam A ad vltimam G, sicut primam D ad vltimam Z: Sumantur ipsarum A B G æquemultiplicia I K M: ipsarũ verò D E Z alia quæuis æquemultiplicia T L N. Cùm enim simplicia sint in eadem ratione A ad B vt D ad E & B ad G vt E ad Z: erunt (per 15 huius) eorum multiplicia I ad K & K ad M vt T ad L & L ad N. Quotuis igitur magnitudines I K M & aliæ totidem T L N binæ sumuntur in eadem ratione: quarum (per 20 huius) prima vltimam in vtroque ordine simul excedunt, æquantur, vel simul deficiunt. Earum igitur simplices (per 5 diffinitionem huius) A ad G erunt vt D ad Z. Si itaque fuerint quotlibet, &c.

MONITVM.

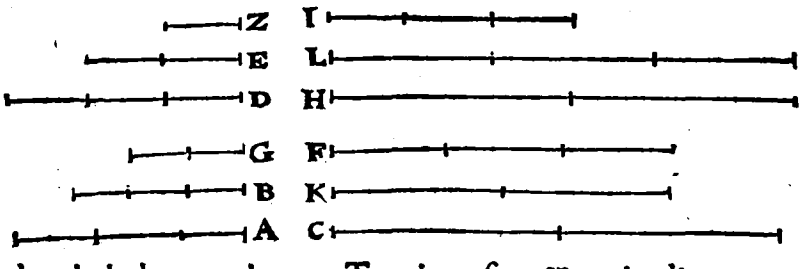
Apposuimus huic ordinatam proportionem, non ad cogenda theorematis verba huic ordinatæ proportioni, nam ex se idem sonant: supponuntur etenim similes rationes, eodem situ in vtroque magnitudinum ordine, haberi. Sed vt æquam rationem 17 diffinitione expositam, in ordinata proportione, hoc theoremate intelligi, vt in perturbata proximè succedenti, ostensuri sumus, locum obtinere percipiamus. Fuit autem haud iecus liberum 20 propositioni eam ordinatam accommodare, aut non: nam ea communi acceptione de ordinata, intelligenda est, veluti hæc, vt præfatis 20 & 21 ostenderemus, æquam rationem simul maiores, minores, vel æquas effiecre magnitudines, in ordinata vt perturbata proportione: postmodum 22 & 23 eandem æquam rationem in vtraque ordinata, & perturbata proportionales efficere extremas, ostensuri, decimam octauam diffinitionem elucidantes.

PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ totidem, binæ sumptæ in eadem ratione, fuerit autem perturbata earum proportio, & æqua ratione proportionales erunt.



Sunto tres magnitudines A B G, tres item aliæ D E Z, in proportione perturbata, A quidem ad B vt E ad Z, B verò ad G vt D ad E dispositæ: Dico esse æqua ratione vt A ad G sic D ad Z proportionales: Sint ipsarum A B D æquemultiplices C K H, reliquarum verò G E Z aliæ quæuis æquemultiplices F L I, cùm sit vt A ad B, sic E ad Z, erit (per 15 huius) vt C ad K, sic L ad I; quia verò est



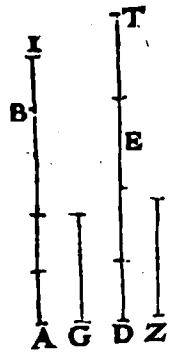
B ad G vt D ad E, eadem ratio: primi & tertij B & D æquemultiplicia K & H, ad ſecundi & quarti G & E æquemultiplicia F & L (per quartam huius) eandem habebunt rationem. Tres itaq; ſunt magnitudines C K F, & totidem aliæ H L I in perturbata ratione proportionales, vt ſcilicet C ad K ſic L ad I, vtq; K ad F ſic H ad L. Si igitur C excedit F, H excedet I, æquabitur, vel deficiet, per 21 huius. Id propterea earum ſimplices A ad G erunt (per 5 diffinitionem huius) vt D ad Z æqua ratione proportionales. Si fuerint itaque tres magnitudines, & aliæ totidem binæ ſumptæ, &c.

MONITVM.

Quia demonſtrauit hanc Theon permutatæ rationis obſequio, potiorem & compendioſam elegimus demonſtrandi viam, vt poſſint (ſi libeat) ſumi tres magnitudines vnius generis, tres verò alterius generis quoad quantitatem, quod non patitur permutata ratio. Hac etenim arte libera cedet facultas huic theoremati, æquè magnitudines diuerſorum, ac eiuſdem generis complectendi.

PROPOSITIO XXIIII.

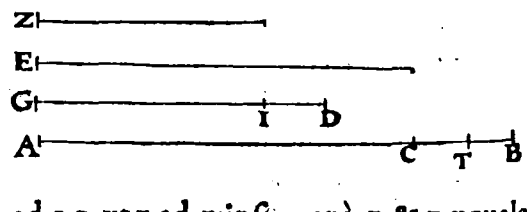
Si primum ad ſecundum eandem habuerit rationem quam tertium ad quartum, habuerit autem quintum ad ſecundũ, eam rationem quam ſextum ad quartum, etiam primum & quintum compoſita, ad ſecundum, eandem habebunt rationem, quam tertium, & ſextum, ad quartum.



Sit primum A B ad ſecundum G, vt tertium E D ad quartum Z, ſit etiam B I quintum ad G ſecundum, vt E T ſextum ad Z quartum: Dico compoſita A B B I ita eſſe ad G ſecundum, vt D E E T ad Z quartum. Quoniam eſt B I ad G vt E T ad Z, erit (per coroll. 4 huius) vt G ad B I ſic cõtra Z ad E T. Cùm autem ſint tres magnitudines A B, G & B I, & tres item aliæ D E, Z & E T, binæ in eadem ordinata ratione, ſcilicet A B ad G vt D B ad Z, & G ad B I vt Z ad E T, æqua igitur ratione erunt A B ad B I vt D E ad E T, per 22 huius. Et quoniam diuiſæ A B ad B I ſunt vt D E ad E T, cõiunctæ (per 18 huius) erunt vt A I ad I B ſic D T ad T E. Rurſus æqua ratione tres A I, I B, G, & tres aliæ D T, T E, Z, ſunt ordinatim in eadem ratione binæ ſumptæ. Æqua igitur ratione erunt (per 22 huius) vt A B I compoſita primum & quintum ad G ſecundũ, ſic D E T cõpoſita tertium & ſextum ad Z quartũ. Si itaq; primum ad ſecundum eandẽ, &c.

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima earum reliquis maiores erunt.



Sint quatuor magnitudines proportionales A B ad G D, vt E ad Z, quarum maxima ſit A B, minima verò Z: Dico A B & Z reliquis G & E maiores eſſe. A magnitudine enim A B æqualis ipſi E abſcindatur A T, ab ipſa verò G D æqualis ipſi Z tollatur G I. Cùm autem ſit A B ad G D, vt E ad Z: ipſis verò E & Z æquales poſitæ

positæ sint A T & G I, erit vt A B ad G P, sic A T ad G I. Reliquum igitur T B ad reliquum I D erit (per 19 huius) vt totum A B ad G D. Maius igitur erit T B, ipso I D, per 14 huius. A maiori ergo T B minori D I æquum auferatur B C, quod quidem ablatum ipsi Z copuletur, quia G I ipsi Z, I D verò ipsi B C æquales sunt, tota Z & B C ipsi G D æqualis erit. Sed A T ipsi E posita est æqualis, binæ igitur A T & Z cùm B C ipsis E & G D æquales erunt. Superest autem ipsi A C magnitudo C T: binæ igitur A B maxima & Z minima, reliquis E & G D maiores erunt relidua C T. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c.

MONITVM.

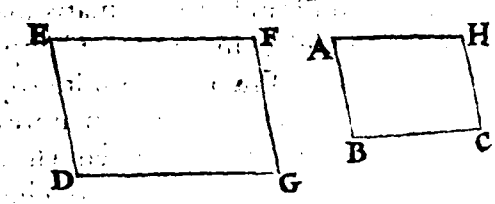
Vbi expositi Euclides simplicium & continuarum magnitudinum rationes, per æquemultiplicia: earum rationum, interdum sex varias proportiones, quas duodecima & quinque eam sequentibus diffinitionibus diffiniuit, propositionibus ac corollariis demonstrauit. Hæ etenim sex species eam quæ 11 diffinita est sequuntur necessariò positam. Nam si quatuor magnitudines sint similis rationis antecedentia antecedentibus & consequentia consequentibus, sequetur eas esse proportionales, permutata ratione, per 16; conuersa per corollarium 4 huius: composita per 18: diuisa per 17: conuersione rationis, per corollarium 19: æqua verò (cuius sunt duæ species, ordinata scilicet & perturbata) per 22 & 23 huius. Quæ quidem sex species sunt modi arguendi, ex rationum similitudine concluſi, & demonstrationibus propalati. Decem verò priores diffinitiones, nulla egent demonstratione, sed ampliori expositione, vt eas diffinitis conuerti cernamus. Nusquam tamen in demonstrandis theorematis alia acceptione qua diffiniuimus eas sumentes, vt extet inuiolata methodus. Campanus autem nouem ex Euclide sumptas, præter expositas à Theone apponit propositiones, quas data opera prætermimus. Per octo etenim priores ostendit maiores rationes his omnibus argumentis sequi maiores, sicut ostēdimus similes sequi similes rationes, quod nulla eget demonstratione. Si enim similis ratio similē concludat, maior (sibi similem concludens) maiorem propositā concludet, & proinde in conuersis maior minorē concludens, ostendit similiter minorem, concludere maiorē. Haud dissimiliter transfert Campanus, primæ propositionis huius æquemultiplicationem, in maiorem multiplicationem sua 34 seu vltima, supponens priores rationes maiores subsequentibus, vt concludat omnium antecedentium simul sumptorum, ad consequentia simul sumpta, maiorem rationem haberi aliqua posteriorum rationum: quæ cùm facile ex demonstratis percipiantur, atque ad sequentia demonstranda nulla necessitate exquirantur, potius Campani quàm Euclidis fuisse arbitramur inuenta: laudanda quidem, sed non necessaria; quæ per ea quæ diximus, super octaua huius diffinitione, facile colligentur: scilicet antecedentium augmentum rationes augere, decrementum verò minuere. E contra consequentium augmentum rationes minuere, decrementum verò augere. Cùm igitur quæ ad sequentia demonstranda requirantur, tantùm exprimere ab Euclide sumpta decreuerimus, reliqua saltem non necessaria studiosis pro suis quisque viribus adaperienda relinquimus.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER SEXTVS.

DIFFINITIO I.

SIMILES figuræ rectilineæ ſunt, quæ ſingulos angulos ſingulis æquales habent, & quę circa angulos æquales ſunt, latera proportionalia.

Similes figuras rectilineas eſſe dicit, cùm ſinguli anguli vnius, ſingulis angulis alterius ſunt æquales, vt ſi figuras A B C & E D G ſimiles eſſe dicat, cùm anguli, ſcilicet A ipſi E, B verò ipſi D, C autem ipſi G, & H ipſi F erunt æquales, & inſuper quando latera æqualibus angulis terminata erunt proportionalia, vt A B ad E D, ſit ſicut B C ad D G, & ſic in quibuſuis rectilineis, dum tamen ſinguli anguli ſint ſingulis æquales,

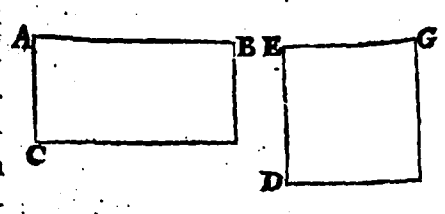


& latera proportionalia. Inſuper quantumuis inæquales extiterint figuræ, tamen ſimiles erunt: Illud tamen notandum perhibemus, quòd in figuris ſimilibus & æqualibus, quæcunque partes ſimiles erunt, æquales reperientur. In figuris verò ſimilibus & inæqualibus partes ſimiles proportionales erunt, quemadmodum vidimus 35 36 & 42 primi, diſſimiles ſæpius æquales fieri. Similiter autem poſitæ ſunt figuræ ad datam rectam, quæ datam rectam ſimilis rationis cuilibet alterius datæ habent, aut quæ circum æquales angulos latera parallela, aut in rectum conſtituunt. Quod præferendum fuit ad ſequentium vſus intelligentiam, non tamen pro diffinitione traditum, cùm cuiuis ſatis ſe offerat intellſgendum nulla principij authoritate decoratum.

DIFFINITIO II.

Reciprocæ figuræ ſunt, quando in vtraque figura antecedentes & conſequentes rationum fuerint.

Hæc prędcedentem inſequitur quoad proportionem laterum, & æqualitatem angulorum, ſed prior vtroſque proportionis antęcedentes in vna, & conſequentes in alia diſpoſuit figura. Hæc autem vni figuræ antecedentem vnius rationis, conſequentem verò alterius appoſuit. Reliquæ demum figuræ, reliquos attribuens terminos: quare ait, in vtraque figura eſſe antecedens & conſequens rationum, vt A B ad E G, ſicut E D ad A C: ea proportionis diſpoſitio dicitur reciproca, ſiue reciprocæ figuræ ea proportione diſpoſitæ.



MONIT

MONITVM.

Huius diffinitionis texturam alterare cogimur: longe etenim à vero eam descripsit Zambertus, dicens, reciprocas figuras, quarum termini rationales (cuius vice græca vox *rationum* loco *rationes* scribit) fuerint, nec quid sit rationalem esse dixit, quare loco pluralis nominatiui λόγω, genitiuum λόγων dixisse debuerat, vt binarum rationum antecedens & consequens, vtramque figuram possiderent, scilicet antecedens primæ & consequens secundæ, priorem, consequens verò primæ & antecedens secundæ rationum, posteriorem figuram designarent, vt diximus in quatuor lateribus circum æquales angulos constitutis, esse primum & quartum proportionale circa latus vnius figuræ: secundum verò & tertium, circa latus alterius.

DIFFINITIO III.

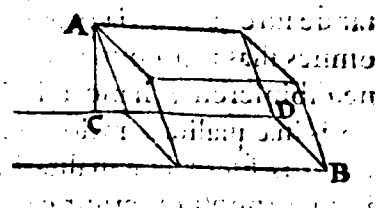
Extrema & media ratione recta linea diuidi dicitur, quando fuerit sicut tota ad maius segmentum, sic maius ad minus.

Hanc diffinitionem absoluit 11 propositio secundi, alio quidem sectionis prætextu ibi demonstrato: extrema autem & media eo dicitur, quòd trium propositarum maior in se binas, extremam ac mediam, contineat quantitates, vel maior binis reliquis æquetur.

DIFFINITIO IIII.

Altitudo vniuscuiusque figuræ, est à vertice ad basim perpendicularis acta.

Quod enim hîc vocat figuræ altitudinem, vocauit 35 primi, & sex eam sequentibus, in eisdem esse parallelis rectilineas figuras. Nunc autem non tantum planas figuras, sed & solidas intelligemus altitudinem suam metiri, per perpendicularem à vertice in basim demissam, quæ semper æqualis erit, distantiæ parallelarum, planam vel solidam figuram comprehendentium. Quia verò non semper à vertice ad basim perpendicularis agi potest, sequemur parallelarum doctrinam, scilicet extendentes basim vndique, quæ perpendicularem possit demissam recipere, vt in solido A B, vel in plano A D, perpendicularis A C in basim n c extensam cadens, altitudo eius figuræ dicetur.



DIFFINITIO V.

Ratio ex rationibus constare dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

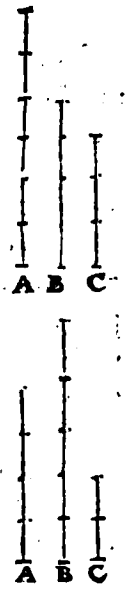
Exposuimus tertia quinti diffinitione quid sit ratio, ibidem enim eam esse reperimus, veram quantitatem habitudinis duarum magnitudinum per multiplicationem, qua antecedens multiplicat consequens, expressam. Cùm igitur rationis quantitas à multiplicatione pendeat, merito voluit Geometer rationes simul iungi multiplicatione, vt ex his composita prodeat, quæ composita ex simul coniunctis constare dicetur: sic rationes sesquialteram, & sesquitertiam dicemus componere per multiplicationem suarum denominationum, rationem duplam: nam ratio 6 ad 4 sesquialtera denominatur ab 1 & $\frac{1}{2}$: reliqua verò 4 ad 3 sesquitertia, per 1 $\frac{1}{3}$: illæ igitur rationum quantitates, scilicet 1 $\frac{1}{2}$: per 1 $\frac{1}{3}$ multiplicatæ inuicem, producunt 2 quantitatem, scilicet duplam rationis 6 ad 3 extremarum. Cùm autem tertia quinti diffinitione diximus, rationis minoris inæqualitatis quinque species, sub duabus quantitatis denominationibus arctari, particulari scili-

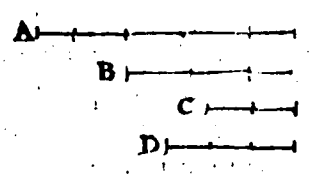
1 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{3}$
6 4 3
2

cet & partiente, vt ab his veram Euclidis mentem deducamus, earum rationum quantitates multiplicãtes, ac cõpoſitas productas (iuxta huius diffinitionis methodum) exerentes rationes, oſtendamus qua lege hoc abſoluatur negotium. Quoniam geometrarum eſt quantitates comparare. Arithmeticorum verò comparationem eam numeris diſcernere, vbi cadant numerorum vires, ſeruata tamen vera diſcrepantia quantitatis rationum maioris inæqualitatis, à minoris inæqualitatis rationum quantitate, maximè in rationibus componendis. Nihilo ſecius plures fuerũt arithmetici, rationes minoris inæqualitatis ab eiſdem numeris eas denominantibus exprimi, quibus earum cõuerſæ maioris inæqualitatis (præpoſita tantùm particula ſub) aſſerentes, vt triplæ ſubtriplam opponẽtes, ſeſquialteræ verò ſubſeſquialterã, ſuperbipartienti verò tertias, ſubſuperbipartientẽ tertias: duplę verò ſeſquialterę ſub duplam ſeſquialteram. Triplæ autem tripartiẽti quartas, ſubtriplam tripartientem quartas, vnde aliqui ex harum denominationum numeris, per hanc diffinitionem, rationum quantitates conſtare arbitrati ſunt, cenſentes rationem 4 ad 6 ſubſeſquialteram nominari, eò quòd eius conuerſa 6 ad 4 maioris inæqualitatis ſeſquialtera nũcupetur, ac proinde eandem earum eſſe quantitatem, vt quicquid vni conueniat, alteri conuenire dixerint. Cùm autem obſequendum fuit (horum more (huius diffinitionis imperio, ſcilicet omnes rationum cõpoſitiones, per multiplicationem abſolui, propoſita fuit ratio 4 ad 2 conſtare ex ratione 4 ad 6, quæ ab eis nuncupata fuit ſubſeſquialtera, & 6 ad 2 tripla: ſubſeſquialteram verò $1\frac{1}{2}$ per triplam 3 multiplicantes reperetunt $4\frac{1}{2}$ (productum rationis 4 ad 2 denominatorẽ) longè à vero diſtare. Quónam pacto autem iuxta Euclidis verba, hanc 4 ad 2 rationẽ, ex rationibus mediis 4 ad 6 & 6 ad 2 reſtituerent inquirentes, quàm abſurdum & Euclidis præcepto penitus oppoſitum protulerunt inuentum, ſcilicet denominatorem rationis maioris inæqualitatis 6 ad 2, qui fuit 3, per minoris denominatorẽ quẽ dicunt $1\frac{1}{2}$ diuidentes, vt tandẽ iure vel iniuria producant 2 denominatorẽ, 4 ad 2 extremorũ, licet Euclides omnes illas rationum compoſitiones multiplicatione produci iubeat, non diuiſione, ſubinferentes hanc diffinitionem, tantùm in omnino maioris vel omnino minoris inæqualitatis rationibus intelligi, non autem quando altera maioris, alia verò minoris fuerit inæqualitatis. Nam id per multiplicationem iubente Euclide adimplere non potuerunt, ea namque de cauſa quòd denominationes rationum maioris, pro denominationibus rationum conuerſarum minoris inæqualitatis impropriè ſumpſerant. Et cùm binæ denominationes inter ſe ad incrementum aut decrementum multiplicatæ, idem producant denominans, incremento aut decremento referendum, eas ideo confundi ac rationes incrementi (vel maioris inæqualitatis) eadem denominationis quantitate, qua ipſis conuerſas rationes decrementi (ſeu minoris inæqualitatis) nuncupari putarunt, maximè cùm idem produci viderint, ſi quantitatem per aliquem numerum diuidamus, aut equidem ſi eandem per eundem numerum in decrementum multiplicemus, ſumentes autem binarum denominationum, alteram in incrementum, alteram verò in decrementum multiplicandas, non idem ac ſi binas multiplicarent, aut binas diuiderent, produci perceperunt. Quare vt idem producant, rationem incrementi ſeu maioris inæqualitatis, per rationem decrementi, ſeu minoris inæqualitatis diuidi iuſſerunt: hácque lege huic diffinitioni multiplicationem quandoque & diuiſionem quandoque aſcripſerunt, contra Euclidis mentem, qui ſola multiplicatione eius abſolui præcepit operam, quapropter nos improprias rationum maioris inæqualitatis denominationes abſtulimus, eas ſcilicet, quæ earum conuerſis conuenirent, vt diximus tertia quinti diffinitione: proprias eis denominationes ex habitudinis vera ſubſtantia deprehenſas aſcribentes, vt ex his quælibet rationis determinata quantitas, per multiplicationem quantitatis mediarum depromatur, nulla adducta diuiſionis alteratione. Euclidémque per multiplicium legem ſua edocendi propoſita capacem

ſatis

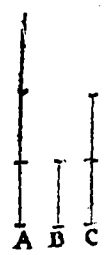
ſatis ſupérque fuiſſe demonſtremus. Quod exemplo, in omnino maioris, omnino minoris, & mixtis oſtendamus rationum compoſitionibus. Sit componenda ratio A ad C, ex binis A ad B, & B ad C, maioris inæqualitatis rationibus, ſcilicet A ad B ſeſquialtera 1 ½ & B ad C ſeſquitertia 1 ⅓ inuicem multiplicatis producentibus 2, dicemus A ad C rationem duplam eſſe. Sit rurſus eadem figura in rationibus omnino minoris inæqualitatis componenda ratio C ad A, ex binis ſcilicet C ad B, tripartiente quartas ¾, & B ad A bipartiente tertias ⅔, ductis ¾ per ⅔ producemus ½, dimidiam rationis C ad A denominatricem. Haud ſecus in mixtis. Sit componenda ratio, A ad C ex ratione A ad B minoris inæqualitatis (nempe bipartiente tertias) & ex ratione B ad C (maioris ſcilicet tripla) multiplicatis earum quantitatibus ⅔ per 3 fiet 2, denominator quippe quantitatis rationis ipſius A ad C duplæ. Si etenim ex pluribus duabus componendæ ſint rationes extremarum quantitatum, idem fiet, vt exemplo in his quatuor magnitudinibus A, B, C, D. Sint inter extremas A & D tres rationes, ſcilicet A ad B ſeſquialtera 1 ½ B ad C dupla (2) C verò ad D bipartiens tertias (⅓) prima (1 ⅓) per ſecundam 2 ducta, fiet 3, rurſus 3 per reliquã ⅓ ducta fiet 2, denominator quippe rationis extremarum A ad D. Hac etenim lege quaſuis rationum compoſitiones, ſola multiplicatione (Euclidis ſcripta ſeruantes) complebimus. Ac veras rationum quantitatibus denominationes præſtabimus, præcipuam earum quantitatis affinitatem ſonantes. Licet aliqui rationi quantitatem ineſſe negauerint, non animaduertentes rationem ab Euclide dici maiorem, minorem, vel æqualem, ad alteram, veram quantitatis ineſſe demonſtrante eſſentiam. Ididem quantitati proprium aſſerit Ariſtoteles, ſecundũ quam quid maius, minus, aut æquale dicatur. Quoniam hæc rationum compoſitio à decima diffinitione quinti orta eſt, qua rationem primæ ad tertiam multiplicem ait Euclides rationis primæ ad ſecundam, ſcilicet duplam, primæ verò ad quartam triplicem eiuſdem primæ ad ſecundam, vt percipiamus rationes extremarum (primæ ſcilicet & tertiæ) ex rationibus mediarum, inuicem multiplicatis, produci, vt hac diffinitione denunciat. Quæ quidem multiplicatio ſi per ſeipſam fiat, duplam producet: ſi quidem per aliam fiat multiplicatio, aliud producet conſurgens, nec duplum, nec triplum, quadruplumve, vt oſtendimus exemplis rationum quæ numeris exprimi poſſunt multiplicandæ. Quod attamen locum obtinet in reliquis rationibus eouſque ſurdis, quæ numeris exprimi non valeant, vt patebit 30 propoſitione huius, per lineam extrema & media ratione ſectam, tres rectas proportionales efficientem: nam primæ ſeu totius ad tertiam ſiue minus ſegmentum ratio, dupla eſt rationis primæ ad maius ſegmentum, per 10 diffinitionem quinti, & igitur multiplex. Nihilominus illarum trium linearum rationes nullis exprimi valent numeris, tamen per multiplicationem rationis primæ ad ſecundam, in ſe neceſſariò conſurgit primæ ad tertiam ratio, quamuis ignota penitus exiſtat huiuſmodi multiplicatio, nobis non autem naturæ, cuius proprium eſt ea multiplicatione ignota, nobis ſimiles ſurdas producere rationes, æquè vt reliquas, nobis ob numerorum facilitatem familiares. Ratio itaque quæuis ſiue ſurda, ſiue numeris expreſſa conſtat (inter extremas quaſuis quantitates eiuſdem generis) ex multiplicatione rationum mediarum quarumcunque. Illud idem affirmat Euclides 23 huius, dicens æquiangula parallelogramma, ex rationibus laterum conflare rationem. Quod abſoluit demonſtratio ex rationibus mediorum, componens rationes extremorum, iuxta harum diffinitionum methodum.





MONITVM.

Ex his neceſſarium prodit, rationem extremarum ex rationibus quotcunque mediarum quantitatum naſci. quia licet ratio A ad B excedat rationem extremarum A ad C, & ſit maior: Ratio tamen reliqua B ad C tanto minor reperietur, vt exceſſum quem habuit A ad B ſuper A ad C præcisè minuat & auferat. Quare ſi media quantitas vtraque extremarum minor fuerit, rationum componentium prior, maioris, poſterior verò minoris erit inæqualitatis. Si verò media quantitas maior fuerit, prior ratio minoris, poſterior verò maioris inæqualitatis erit: ſic in quotlibet terminis mediis, prior etenim extremorum, proportionem inchoans, & vltimus eam concludens, cogunt rationes mediorum nulla arte extremorum rationem variare poſſe: ſed ſemper ad extremorum rationis quantitatem redire, quod per numeros facilè demonſtratur. Sint extremi 4 & 3, & quotcũq; medij 6 & 8, licet vltimus 3 ſit minor primo 4: tamen videmus 6 addere ad 4 binarium: rurſus 8 addere ad 6 binarium: ſunt igitur iam priori addita duo binaria, quæ videmus per 3 auferri ab vltimo medio, vt ea tantùm ſuperſit vnitas, qua 4 prior excedit 3 vltimum, ac ad veram ipſius 4 ad 3 habitudinem, ſiue rationem fiat reductio. Quare quantæcunque fiant mediarum rationum additiones, vel quantitatum ſubtractiones, illæ nihilominus per extremorum reſpectum ea arte cogentur, vt omnes ſimul ſumptæ mediorum rationes, ad extremorum rationis quantitatem reducantur, id equidem facta earum rationum inter ſe multiplicatione. Ideo diximus inter ſe eas multiplicandas eſſe rationum quantitates, ne iuxta Theonis verba hac quinta ſexti per quemuis multiplicantem eas ducere liceret, veluti licuit ex quarta diffinitione quinti magnitudinem quouis multiplicante excedentem, rationem habere, dici. Sed adinuicem multiplicandæ ſunt rationes. Si verò media quantitas inter extremas, maior vna, minor verò reliqua conſtituatur, vtraque ratio aut maioris, aut ſimul minoris erit inæqualitatis, vt 4 6 8, minoris, & 8 6 4, maioris. Illic enim dimidia ratio, 4 ad 8 ex bipartiente tertias, & tripartiente quartas, colligitur, hîc verò dupla 8 ad 4 ex ſeſquitertia & ſeſquialtera componitur, vbique ſeruata multiplicatione, iuxta diffinitionis veram mentem.

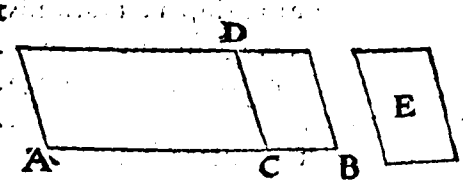


4 6 8 3

DIFFINITIO VI.

Deficere ſpecie parallelogrammo ſimili dato, dicitur parallelogrammum ad rectam lineam applicatum, quando applicatum ad totam lineam occupandam deficit, parallelogrammo ſimili dato: excedere verò quando excedit ſimili dato.

Vt ſi A D ad rectam A B applicatum, deficit ipſo D B ſimili dato E, vel ſi ad rectam A C applicatum excedit eodem D B ſimili dato E, dicetur deficere ſpecie ſimili dato, aut excedere.



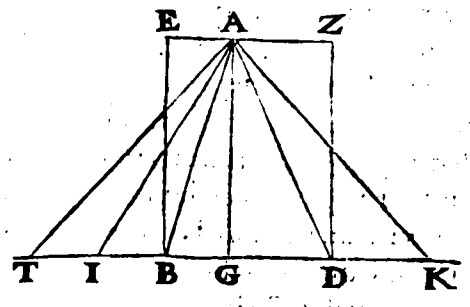
PROPOSITIO I.

Triangula & parallelogramma quæ ſub eadem ſunt altitudine, ad ſe inuicem ſunt vt baſes.

Sint bina triangula A B G, A G D ſub eadẽ altitudine A G. Sint item bina parallelogramma A E B G & A G D Z, ſimiliter ſub eadem altitudine A G vel E B, per 4 diffinitionem huius: Dico eſſe vt G B baſis ad G D baſin, ſic A G B triangulum ad A G D triangulum, ſicq; E G parallelogrammum ad G Z parallelogrammum. Sint ordine

quatuor

quatuor magnitudines, ſcilicet B G & G D baſes prima & ſecũda: A B G & A G D verò triangula tertia & quarta. Producatur recta B D ad vtraſq; partes verſus T & K, ipſi G D æqualis ſit D K, ipſi verò B G quotcunque æquales fiant, I B T I, cõiunctis A T A I A K: Quoniam per 38 primi, æqualia ſunt ſingula A T I & A I B triangula ipſi A B G. Similiter & A D K ipſi A G D. Totidem erunt triangula ipſi A B G æqualia, quot & baſes ipſi B G æquales: ſimiliter totidem erunt triangula ipſi A G D æqualia, quot & baſes ipſi G D æquales, cùm ſuper qualibet baſi vnum conſtitutum ſit triangulum. Primæ & tertiæ igitur ſcilicet baſis B G & trianguli A B G æquemultiplicia, ſcilicet tota T G, & totum A T G triangulum, ſecundæ & quartæ ſcilicet baſis G D & trianguli A G D æquemultiplicia (totam ſcilicet G K, & totum A G K triangulum) ſimul excedunt, æquantur, vel deficiunt; hoc eſt, ſi T G excedat G K, triangulũ A T G excedet A G K, ſi deficiat, deficiet: ſi æquetur, æquabitur per 38 primi. Quatuor igitur ſimplices prima B G ad ſecundam G D baſes, erunt ſicut tertia A B G ad quartam A G D triangula. Quia verò ea triangula dimidia ſunt parallelogrammorum A E B G & A G D Z, per 41 primi, quæ per 15 quinti ſunt in eadem ratione partium, ſcilicet triangulorum A B G & A G D. Erunt & parallelogramma in eadem ratione baſium B G & G D, per 11 quinti. Potuerunt per æquemultiplicia demonſtrari parallelogramma, veluti triangula. Triangula igitur & parallelogramma quæ ſub eadem ſunt altitudine, ad ſe inuicem ſunt vt baſes.



COROLLARIVM I.

Si binarum rectarum altera ſecetur vtcumque, rectangula ſub integra & quolibet ſegmento ſecta comprehenſa ad ſe inuicem ſunt vt ſegmenta.

Nam rectangula ſub A G integra & ſegmentis B D ſectæ, ſcilicet B G, G D ad ſe inuicem ſunt, vt B G ad G D ſegmenta, ſic B A ad A D rectangula quotcunque fuerint.

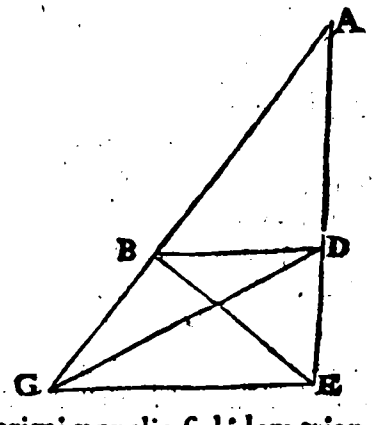
COROLLARIVM II.

Super eadem baſi triangula & parallelogramma, ſunt vt vertices.

Vt docuimus ſuper eadem baſi A G triangula A D G, & A K G, ad ſeſe vt vertices D G, ad K G. Idem in parallelogrammis A D ad A B, ſicut vertices D & ad G B.

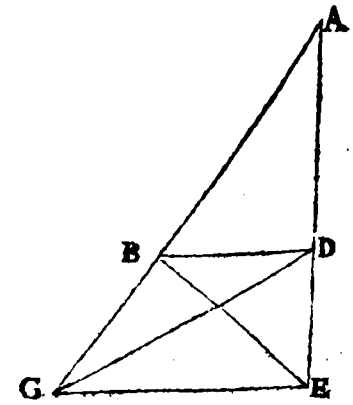
PROPOSITIO II.

Si trianguli ad vnum laterum acta fuerit aliqua recta linea parallela, proportionaliter ſecat ipſius trianguli latera: & ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, per ſectiones ducta linea recta, parallela erit ad reliquum triãguli latus.



Sit triangulum A G E, ad cuius vnum laterum G E parallela B D ducatur introrſum: Dico B D ſecare reliqua latera A G & A E proportione A B ad B G vt A D ad D E. Quoniam enim triangula B D E & B D G ſuper baſi B D & eiſdem parallelis exiſtẽtia, ſunt per 37 primi æqualia: ſed idem triangulum

gulum ABD ad æqualia ſcilicet BDE & BDG eandem rationem habet per ſeptimam quinti, & per præcedentem, eam habet ABD ad DBE quàm AD ad DE, & ABD ad BDG, quam AB ad BG habet. Sequetur igitur per 11 quinti eſſe AB ad BG, ſicut AD ad DE. Ad ſecundam autem partem ſupponantur latera ſecta AB ad BG ſicut AD ad DE: Dico BD eſſe ipſi GE parallelam: cùm autem ſit AB ad BG vt AD ad DE, erit (per præcedentem) ABD ad DBE, ſicut idem ABD ad BDG. Ad quas igitur eadem ABD magnitudo, eandem habet rationem, ipſæ (per 9 quinti) ſunt æquales. Triangula igitur DBG & BDE erũt æqualia. Super eadem itaque baſi BD exiſtentia, in eiſdem ſunt parallelis BD GE, per 39 primi. Si itaque trianguli ad vnum laterum acta fuerit aliqua recta linea, &c.



COROLLARIVM.

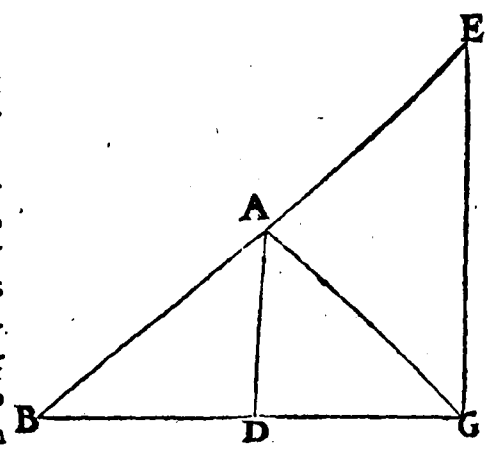
Si parallela vni laterum trianguli triangulum ſecuerit, ſimile toti à toto tollet.

Nam proportionales ſecat, vt patuit AG ad AB vt AE ad AD, erit igitur viciſſim (per 16 quinti) AG ad AE vt AB ad AD: proportionalia igitur ſunt circa communem ad A angulum latera, ſed æquiangula: nam ABG ADE rectæ, cadunt in parallelas, quare angulos ADB ipſi AEG & ABD ipſi AGE æquales efficient, (per 29 primi.) Similia igitur erunt, ABD ablatum, & AGE totum (per primam diffinitionem huius.)

PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam ſecetur, diſpeſcens autem angulum recta ſecuerit & baſin, baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, reliquis ipſius trianguli lateribus. Et ſi baſis ſegmenta eandem habuerint rationem reliquis ipſius trianguli lateribus, à vertice ad ſectionem coniuncta recta, bifariam ſecat ipſius trianguli angulum.

Trianguli ABG angulus A bifariam ſecetur ducta AD, per 9 primi, ſecante baſin BG in D: Dico eſſe BD ad DG ſicut BA ad AG. Per ſignum G parallela excitetur ipſi AD, ſitq; GE. Extendatur autem recta BA in E, in parallelas autem AD EG cadens BE, angulum BEG angulo BAD æqualem (per 29 primi) efficit: in eaſdem rurſus parallelas cadens AG, alternatim AGE & GAD angulos æquos efficit, per eandem, ſinguli igitur AEG, AGE anguli ſingulis BAD & GAD ſunt æquales. Et igitur ad inuicem, cùm ipſi BAD & GAD ſint per hypotheſim æquales. Latera igitur AE, AG æquis angulis ſubtenſa (per 6 primi) æqualia erunt: quia verò ad vnum laterum trianguli BEG acta eſt parallela AD, proportionaliter erit BD ad DG ſicut BA ad AE (per 2 huius) hoc eſt ad AG ſibi æqualem. Ad ſecundam verò partem, ſi fuerit BD ad DG vt BA ad AG: Dico à vertice A ad ſectionem D coniunctam, angulum BAG bifariam ſecare.

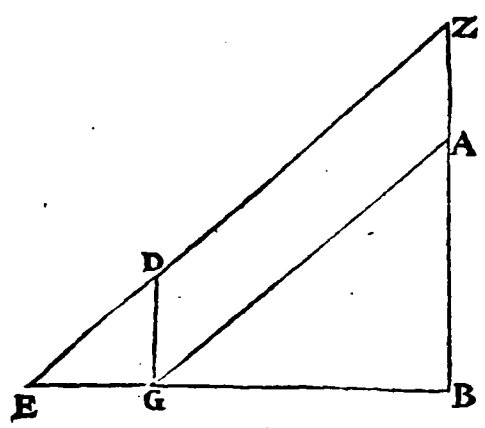


Diſponantur

Disponantur B E & G E vt prius. Quoniam est B D ad D G, sic B A ad A G. At (per præcedentem) B D ad D G erunt vt B A ad A E: æquales igitur sunt A E, A G rectæ, & proinde (per 5 primi) anguli A E G, A G E (qui ad basin) similiter æquales: sequetur igitur (per 29 primi) B A D ipsi A E G & G A D ipsi A G E esse æquales, & adinuicem igitur æquales erunt D A B, D A G, cùm sint æqualibus æquales. Bifariam itaque secuit recta A D angulum B A G. Si igitur trianguli angulus, &c.

PROPOSITIO IIII.

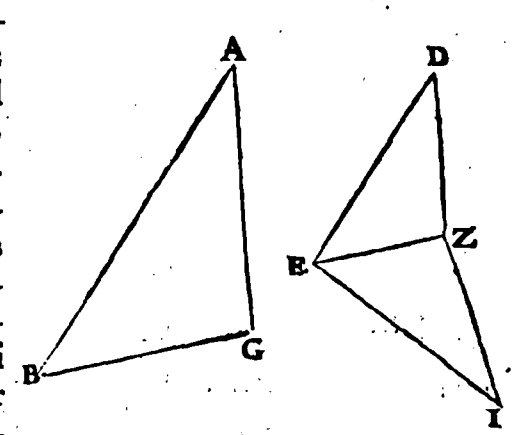
Æquiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, & similis rationis sunt, quæ æqualibus angulis latera subtenduntur.



Sint triangula æquiangula A B G, D G E, habentia angulos æquales A B G ipsi D G E, & A G B ipsi D E G, ac B A G ipsi G D E: Dico ea proportionalia habere latera, A B ad D G vt B G ad G E, vtq; A G ad D E æqualibus angulis subtensa. Ponatur trianguli D E G (vel similiter descripti) latus E G in rectam ipsius G B, quoniã anguli A G B & D E G sunt æquales, per 28 primi, parallelæ erunt E D & G A, quia verò anguli A B G & D G E sunt æquales, erunt (per eandem) parallelæ A B & D G. Compleatur igitur parallelogrammum A G D Z, in rectam cadent E D, D Z, per 30 primi, cùm sint eidem A G parallelę, & concurrant in D, similiter B A, A Z, cùm parallelæ sint ipsi G D. Cùm autem trianguli B E Z ad vnum latus B Z acta sit parallela D G, erit E G ad G B sicut E D ad D Z, hoc est, ad G A sibi æqualem. Similiter quia ad vnum rursus latus E Z acta est parallela A G, erit B G ad G E sicut B A ad A Z, hoc est G D sibi æqualem, sicut igitur conuersim (per corol. 4. quinti) B G ad G E, sic A G ad D E, & sic fuit A B ad D G. Aequiangulorum itaque triangulorum proportionalia sunt, &c.

PROPOSITIO V.

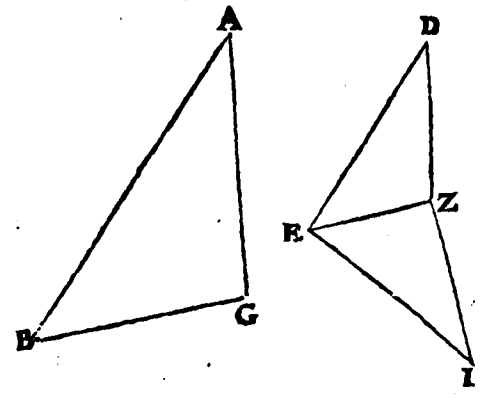
Si duo triangula latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, sub quibus eiusdem rationis latera subtenduntur.



Sint duo triangula A B G & D E Z, quorum latera sint proportionalia A B ad A G vt D E ad D Z, vtque A B ad B G sic D E ad E Z, & sicut A G ad G B sic D Z ad Z E: Dico ea triangula esse æquiangula, & æquales habere angulos, quos eiusdem rationis latera subtendunt, scilicet A ipsi D, & B ipsi E, ac G ipsi Z. Super rectam E Z ad signum E angulus angulo B æqualis constituatur Z E I, ad signũ verò Z æqualis ipsi G sit E Z I, per 23 primi, reliquus igitur Z I E reliquo A est æqualis, per corollarium primum 32 primi. Æquiangula igitur sunt A B G & I E Z triangula. Erunt itaque (per præcedentem) circa A & I (æquales angulos) latera proportionalia, A B ad A G vt I E ad I Z, & A B ad B G vt I E ad E Z, & A G ad G B vt I Z ad Z E, sed sicut A B ad

B G sic

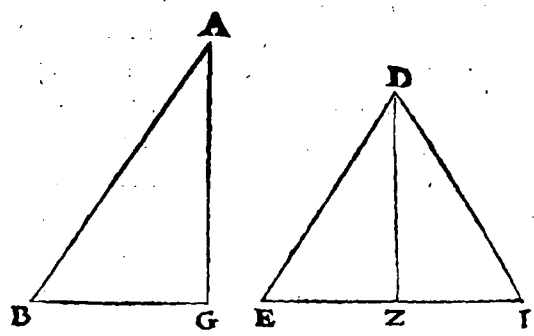
B G ſic fuit D E ad E Z, igitur I E & D E ad eandem E Z eandem rationem habentes, ſunt (per 9 quinti) æquales, ſimiliter D Z & I Z æquales erunt. Sequetur itaque (per 8 primi) cum D E D Z ipſis I E I Z & baſes ſint æquales, æquiangula eſſe D E Z & I E Z triangula, ſed ipſi A B G triangulo æquiangulum fuit I E Z. Per primam igitur communem ſententiam, eidem A B G æquiangulum erit D E Z triangulum, & æquales erunt anguli B A G ipſis E D Z eiuſdem rationis lateribus ſubtenſis. Si igitur duo triangula latera proportionalia habuerint, &c.



PROPOSITIO VI.

Si bina triangula vnum angulum vni angulo æqualem habuerint, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos ſub quibus eiuſdem rationis latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula A B G & D E Z, vnũ angulum A vni angulo D æqualem habentia: circum eos autem angulos, latera B A ad A G, ſicut E D ad D Z: Dico reliquos angulos ſcilicet B ipſi E & G ipſi Z (eiuſdem rationis lateribus ſubtenſos) æquos eſſe. Ad datam rectam D Z ſignúmq; eius Z ipſi G, æqualis angulus conſtituatur D Z I: ad ſignum autem D ipſi A æqualis fiat Z D I, reliquus itaq; B reliquo I æquus erit per corollarium 32 primi. Æquiangula igitur erunt A B G & D I Z triangula, & proinde (per 4 huius) erit A B ad A G, ſicut D I ad D Z. Suſceptum eſt autem vt B A ad A G, ſic D E ad D Z: ſicut igitur (per 11 quinti) D E ad D Z, ſic D I ad D Z: æquales igitur ſunt (per 9 quinti) D E & D I. Sed trianguli E D Z duo latera E D, D Z duobus I D D Z, & angulus E D Z angulo I D Z ſunt æqualia. Æquiangula igitur, per 4 primi, erunt triangula E D Z, I D Z, & æqualia: æquiangula proinde erunt, per primam communem ſententiam, A B G & D E Z: quia verò, per hypotheſim, æqualis fuit angulus B ipſi I, & eidem I æquus oſtenſus eſt E, & ideo E ipſi B æquus erit, ſimiliter Z ipſi G, reliqui quidem ſub quibus eiuſdem rationis latera ſubtenduntur. Si igitur bina triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c.

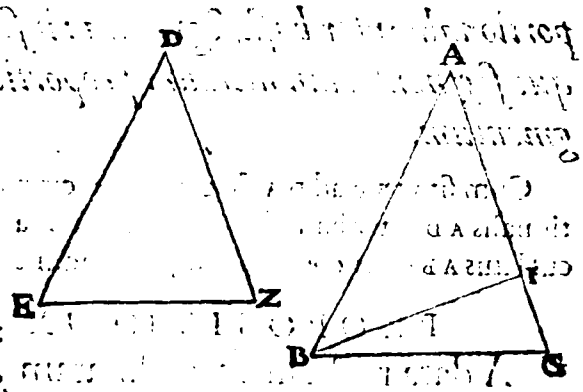


PROPOSITIO VII.

Si bina triangula vnum angulum vni angulo æqualem habuerint, circum autem alios angulos latera proportionalia: Reliquorum verò vtrumque ſimul aut minorem aut non minorem recto, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.

Sint

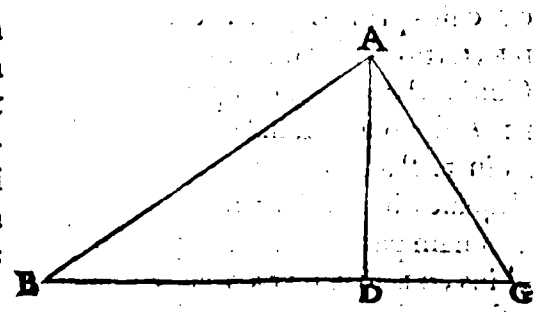
Sint duo triangula A B G, & D E Z, angulum A angulo D æqualem habentia, circa verò alios angulos B & E latera proportionalia A B ad B G, vt D E ad E Z. Reliquorum verò G & Z sit primo minor recto quilibet eorum: Dico æquiangula esse triangula A B G & D E Z, & æquales habere angulos B & E, circum quos proportionalia sunt latera. Quod si nō sint æquales B & E, sit B maior. Ad signum B rectæ A B, per 23 primi, constituatur ipsi E æqualis angulus A B I: Cùm enim æquales sint A ipsi D & A B I ipsi D E Z anguli, reliquus A I B reliquo Z æquus erit, per corollar. 32 primi. Sicut igitur D E ad E Z, sic erit A B ad B I, per 4 huius: sed sicut D E ad E Z, sic fuit A B ad B G, sicut proinde A B ad B I sic A B ad B G. Aequales igitur sunt B I & B G, per secundam partem 9 quinti. Anguli itaque B I G B G I (ad basin) sunt æquales, per 5 primi: quia verò iidem B I G & B G I sunt (per 17 primi) duobus rectis minores, ipso B I G existēte vno recto minore, reliquus A I B vno recto maior erit, per 13 primi. Et ostensus est æqualis ipsi Z angulo, recto quidem minori posito, quod fieri non potest. Neuter itaque angulorum A B G & D E Z altero maior est: æquales igitur sunt. Sit rursus secundo non minor recto quilibet angulorum G & Z: Dico A B G & D E Z æquos esse: Si autem non, sit B maior, & (vt prius) sit A B I æquus ipsi D E Z. Reliquus B I A reliquo Z æquus erit, per coroll. 32 primi. Et tandem anguli B I G & B G I æquales erunt, sed B G I non minor recto supponitur, bini igitur B I G & B G I eiusdem trianguli anguli, duobus rectis non sunt minores, contra ostensum 17 primi, quod est absurdum. Qualibet igitur via B & E anguli sunt æquales, circum quos proportionalia sunt latera, & proinde (per præcedentem) æquiangula sunt triangula A B G & D E Z. Si itaque bina triangula vnum angulum vni angulo, &c.



PROPOSITIO VIII.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis agatur, quæ ad perpendicularem triangula, similia sunt toti & adinuicem.

Sit triangulum A B G habens angulum rectum A, à quo perpendicularis in basin demittatur A D: Dico triangula A B D & A D G similia esse toti A B G, & adinuicem. Triangulorum A B G & A B D recti sunt anguli, scilicet per hypothesim B A G, & per demissam A D angulus A D B, communis verò est B angulus. Reliqui igitur B A D & A G D (per corollarium 32 primi) erunt æquales: quia similiter triangulorum B A D & A G D duo anguli B D A A D G recti sunt æquales, & duo alij B A D A G D fuerunt æquales, reliqui (per idem coroll. 32 primi) A B D G A D æquales erunt. Æquiangula igitur erunt triangula A B G A B D & A G D: Circum igitur æquales angulos latera proportionalia erunt, per 4 huius. Et proinde (per primam diffinit. huius) similia erunt, scilicet A B D & A G D (quæ ad perpendicularem) adinuicem, & toti A B G. Si itaque in triangulo rectangulo, &c.



COROLLARIVM.

A trianguli recto angulo in basin perpendicularis media est pro-

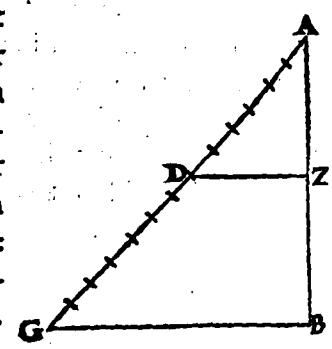
portionalis inter baſis ſegmenta: inſuper inter baſim & vnumquodque ſegmentorum medium proportionale, eſt latus quod ad idem ſegmentum.

Cùm ſit vt B D ad D A, ſic D A ad D G circum æquales angulos, media eſt proportionalis A D inter baſis ſegmenta. Præterea erit medium latus A G inter B G G D, ſicut latus A B inter G B B D, comprehendunt enim eoſdem angulos, ſcilicet G & B.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA 1.

A data recta linea, ordinatam partem abſcindere.

Proponatur A B recta, à qua imperemus aliquam partem abſcindi, ſcilicet ſex tertiaſdecimas vel $\frac{6}{13}$ vt omni geometricæ parti conuenire hæc oſtendatur iuxta primam quinti diffinitionem. Concurrat cum A B recta quædam A G ad ſignum A in acutum angulum, rectæ verò A G quotcunque propoſitæ ſignentur partes ſcilicet 13, ad ſextam autem ſit A D. Tredecim verò habeat A G, coniunctæ autem G B parallela fiat D Z: Ipſa ſecat trianguli A B G latera A B A G proportionaliter, per 2 huius. Sicut itaque G D ad D A ſic B Z ad Z A. Et componendo ſicut tota G A ad ordinatam partem A D ſic B A ad ordinatam partem A Z, per 18 quinti. A data igitur recta A B ordinatam partem A Z abſcidimus.



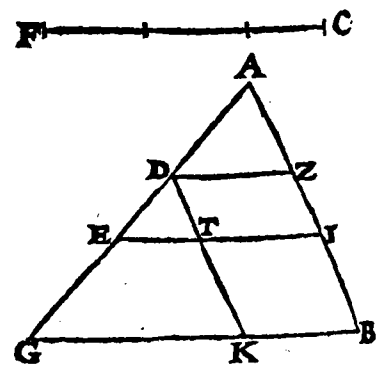
MONITVM.

Similiter ſi abſcindere à data A B ordinatam incertam velimus, ſecetur A G, per 11 ſecundi in D. Tum ſimilis fiet A Z pars rectæ A B, qualis fuerit A D rectæ A G, quæ tamen incertæ erunt, vt quandoq; latius. Hac de cauſa hæc incerta æquè pars ordinata erit rectæ A B, vt alia quæuis diſcreta.

PROPOSITIO X. PROBLEMA 2.

Datam rectam lineam non ſectam, datæ rectæ lineæ ſectæ ſimiliter ſecare.

Eſto data recta A B non ſecta, data verò ſecta eſto C F, cuius primo ſegmento æqualis ſit A D, ſecundo D E, tertio verò E G, quotquot fuerint in recta C F. Coniunctæ autem G B parallelæ ducantur D Z & E I. A ſigno D parallela ipſi A B ducatur D K ſecans E I in T. Parallelogramma igitur ſunt D I T B D B. Æquales itaque ſunt D T Z I & T K I B rectæ. Et quoniam parallela eſt E T I ipſi G K B, erit, per 2 huius, G E ad E D vt K T ad T D, vel ſicut B I ad I Z ipſis æquales. Et cùm D Z ſit parallela ipſi G B, erit (per eandem) vt G D ad D A ſic B Z ad Z A. Eſt igitur B I ad I Z vt G E ad E D & I Z ad Z A ſicut E D ad D A. Datam igitur rectam lineam A B non ſectam, datæ rectæ C F lineæ ſectæ ſimiliter ſecuimus.



COROLLARIVM.

Hinc fit datam rectam lineam in datarum rectarũ ratione, ſecare.

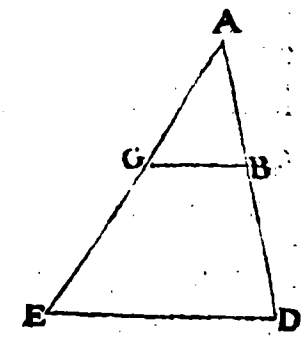
Nam coniungantur in rectam lineam angulum cum data recta efficientem, datę rectæ rationes habẽtes, veluti A D D E E G, nam hoc theoremate data A B in earum rationes habentes A Z Z I I B rectas, ſecta eſt.

PROP

PROPOSITIO XI. PROBLEMA 3.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

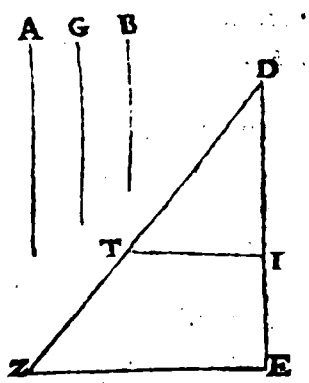
Sint binæ rectæ A B A G ad angulum A dispositæ, quæ producantur in rectum ad E & D: Rectæ verò A G æqualis ponatur B D, & coniunctæ B G parallela fiat D E. Quoniam trianguli A D E ad vnum latus D E parallela existit B G, erit (per 2 huius) A B ad B D sicut A G ad G E. Sed A G & B D sunt æquales: erit igitur sicut A B ad A G, sic eadem A G ad G E. Duabus igitur datis A B A G rectis, tertiam G E proportionalem reperimus.



PROPOSITIO XII. PROBLEMA 4.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalē inuenire.

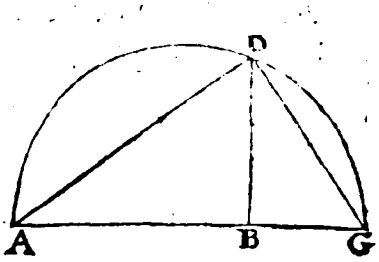
Exponantur tres rectæ, scilicet A B G, oportet iam ipsis quartam inuenire proportionalem, sint binæ rectæ D E D Z contingentem angulum constituentes. Rectæ verò A æqualis ponatur D T, ipsi B verò æqualis sit T Z. At ipsi G æquetur D I, coniunctæ T I parallela fiat Z E, producta D I in E. Trianguli itaque D Z E ad vnum laterum Z E acta est parallela T I. Proportionales igitur erunt (per 2 huius) quatuor rectæ, D T ad T Z sicut D I ad I E, ipsis autem D T T Z D I æquales sunt A B G; erit igitur sicut A ad B sic G ad I E. Tribus itaque datis rectis lineis, quartam inuenimus proportionalem.



PROPOSITIO XIII. PROBLEMA 5.

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

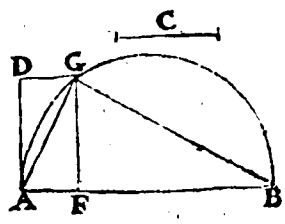
Proponantur binæ datæ rectæ, A B B G in rectum, quibus mediam inquiramus proportionalem. Super tota A G semicirculus describatur A D G, ad signum verò B ipsi A G perpendicularis excitetur B D, coniunctis A D D G rectis, triangulum A D G rectangulum erit, per 31 tertij. Cùm autem ab angulo recto D in basin A G sit demissa perpendicularis D B, ipsa est media proportionalis inter segmenta A B B G basis A G, per coroll. 8. huius. Duabus igitur datis rectis A B B G mediam proportionalem D B inuenimus.



COROLLARIVM.

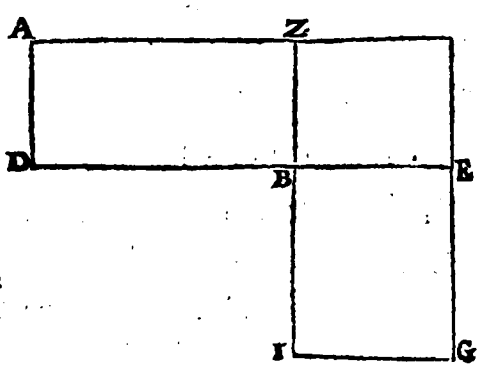
Hinc assequimur data recta linea, aliam rectam (duplum eius excedentem) in binas extremas proportionales illi secare.

Sit C data, cuius duplum excedat A B, ad signum A perpendicularis fiat D A, quæ æqualis ponatur datæ C: super A B verò semicirculus describatur A G B, ipsi verò A B parallela sit D G quæ circulum secabit, cùm sit minor semidiametro, per hypothesim, perficiatur parallelogrammum D F coniunctis G A G B: Æqualis igitur erit G F ipsi A D, & quia perpendicularis est ad datā A B (per constructionem) ipsa G F, tectā A B datam secabit in extremas sibi proportionales A F F B, per corol. 8. huius.



PROPOSITIO XIIII.

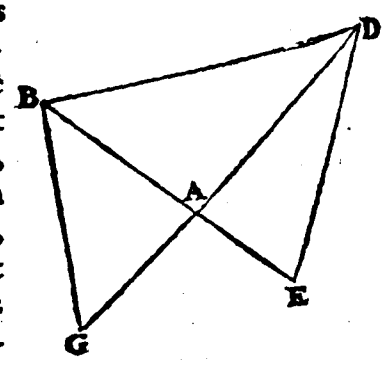
Æqualium & vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum vni æqualem habentium angulum, reciproca ſunt latera quæ circum æquales angulos, ea quoque ſunt æqualia.



Sint æqualia parallelogramma AB & BG vnum angulum DBZ vni angulo IBE æqualem habentia: Dico latera DB ad BE eſſe reciprocè, ſicut IB ad BZ circum æquales angulos, cùm anguli DBZ & IBE ſint æquales: ponatur IB in rectum ipſius BZ, reliqua DB erit in rectum ipſius BE, ſunt enim ad verticem, perficiatur parallelogrammum ZE, erit (per 7 quinti) ſicut AB ad ZE parallelogramma, ſic BG ad idem ZB, ſunt enim æqualia AB & BG, ſed ſicut AB ad ZE ſic recta DB ad BE, per primam ſexti, ſicútque BG ad ZB ſic IB ad BZ, per eandem, ſunt enim adinuicem vt baſes: ſicut igitur (per vndecimam quinti) DB ad BE latera, ſic reciprocè IB ad BZ. Continet enim vnum parallelogrammum antecedens & conſequens, conſequentis & antecedentis alterius, per ſecundam huius diffinitionem. Similiter econuerſo oſtendetur ſecunda pars, ſcilicet ſi latera DB ab BE ſint reciprocè, vt IB ad BZ: Dico parallelogramma AB BG eſſe æqualia, cùm ſit eadem ratio (ex hypotheſi) DB ad BE, rationi BI ad BZ, eadem erit (ex prima ſexti) parallelogrammorum AB ad ZE, quæ BG ad idem ZE. Ipſa igitur AB & BG ſunt (per 9 quinti) æqualia. Æqualium itaque & vnum vni æqualem habentium, &c.

PROPOSITIO XV.

Æqualium & vnum vni æqualé habentium angulum triangulorum, reciproca ſunt latera quæ circum æquales angulos. Et quorum vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, ea quoque ſunt æqualia.

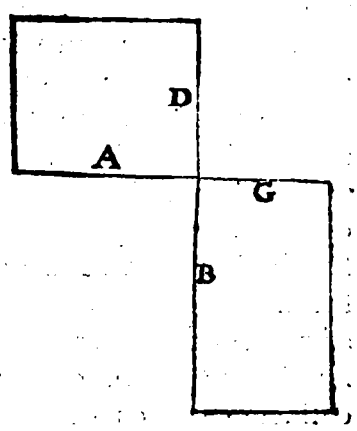


Triangula ABG & ADE ſint æqualia, & angulos BAG & DAE æquales habeant, ad verticem ſcilicet: Dico circa eos angulos latera eſſe reciprocè GA ad AD, ſicut EA ad AB. Cùm autem anguli ſint ad verticem, in rectum erunt BAE & GAD rectæ, triangula itaque ABG ABD (cùm ſint ſub eadem altitudine) ad ſe inuicem ſunt vt baſes GA ad AD, per 1 huius. Similiter triangula ADE & ADB ſunt ſicut AE ad AB, baſes. Sed cùm ex hypotheſi ABG & ADE triangula ſint æqualia, & ad idem ABD rationem habeant, eandem habebunt rationem, per 7 quinti. Rectæ igitur GA ad AD, & EA ad AB (eandem ipſis triangulis habentes rationem) adinuicem eandem habebunt, per vndecimam quinti. Alternatim igitur erunt proportionales GA ad AD, vt EA ad AB, per 2 diffinitionem huius. Ad ſecundam autem partem ſupponantur eſſe reciprocæ GA ad AD, ſicut EA ad AB: Dico trian

co triangula A B G & A D E esse æqualia: quoniam enim est eadem ratio G A ad A D, quæ E A ad A B, sed vt G A ad A D, sic A B G ad A B D triangula, per primam sexti, sicutque E A ad A B, sic similiter A D E ad A D B. Eadem igitur erit ratio A B G trianguli ad A D B, quæ ipsius A D E ad idem A D B. Æqualia proinde erunt A B G & A D E triangula, per 9 quinti. Æqualium igitur & vnum vni æqualem habentium, &c.

PROPOSITIO XVI.

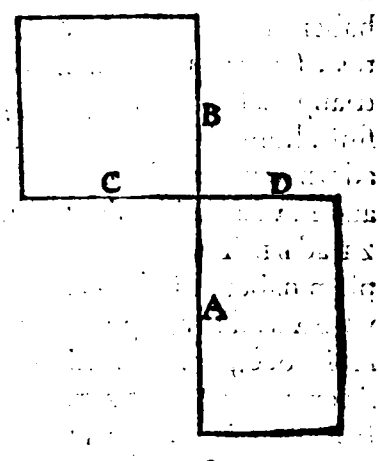
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis cõprehensum rectangulum, æquum est ei quod sub mediis continetur rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquum fuerit ei quod sub mediis continetur rectangulo, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint quatuor lineæ proportionales A ad G, vt B ad D: Dico comprehensum rectangulum sub extremis A & D æquum esse, ei quod à mediis B & G fit rectangulo. Fiat ex A & D rectangulũ, item ex B & G aliud rectangulum: Quoniam parallelogrammorum A D & B G reciproca sunt latera, A quidem ad G, sicut B ad D, ea sunt æqualia, per 14 huius. Rursus ad secundam partem, & si supponamus sub extremis A & D contentum, æquum esse ei quod sub mediis B G continetur: Dico ipsas quatuor A ad G esse vt B ad D. Cùm æqualia sint rectangula A D & B G latera habebunt reciproca: erit igitur A ad G vt B ad D (per eandem 14 huius). Si itaque quatuor rectæ lineæ proportionales, &c.

PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis comprehensum rectangulum, æquum est ei quod à media quadrato. Et si quod sub extremis comprehẽsum rectangulum æquum fuerit ei quod à media quadrato, ipsæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



Proponantur tres rectæ lineæ proportionales A, B, D scilicet A ad B, sicut B ad D, ex A & D verò fiat rectangulum A D, & ex B quadratum B C fiat: Dico æquum esse rectangulum A D quadrato B C: cùm enim sint æquales B & C, erit sicut A ad B, sic C ad D: quatuor igitur sunt rectę proportionales A, B, C, D: sub extremis itaque earum A & D rectangulum, æquum est (per præcedentem) rectangulo sub mediis B C comprehenso, quod quidem est quadratum ipsius B mediæ. Æquum est igitur rectangulum A D quadrato B C: si verò è contra rectangulum æquum fuerit quadrato B C, ipsæ A, B, C, D (per præcedentem) erunt proportionales: sed cùm B & C sint æquales, erit sicut A ad B, sic B ad D. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, quod, &c.

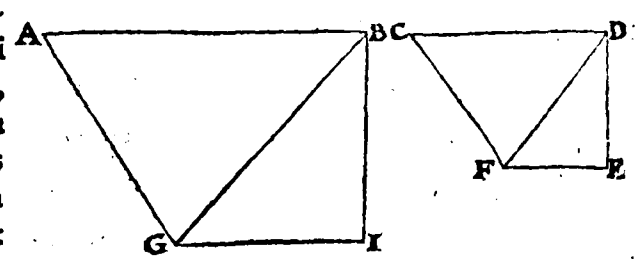
COROLLARIVM.

Hinc assequimur, quamlibet rectam esse mediam proportionalem,

lem, inter quasuis duas rectas, æquale suipsius quadrato rectangulum constituentes.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA 6.

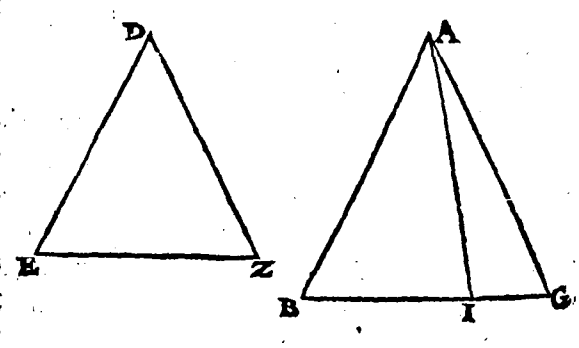
A data recta linea, dato rectilineo simile, similitérque positum rectilineum describere.



Esto data recta AB, à qua describendum sit rectilineum simile similiterq; positũ ipsi CDFE, subtendat angulum C recta DF, & sic quotcunque angulos rectilinei subtendamus, ipsum in triangula resoluentes, scilicet CDF, DFE: Ad signum A & datam rectam AB, æqualis constituatur angulus ipsi DCF, sitq; BAG, per 23 primi, & ipsi CDF æquus fiat ABG, reliquus AGB reliquo CFD (per corollarium 32 primi) æquus erit. Aequiangulum itaque est triangulum ABG triangulo CDF: simile igitur similitérq; erit positum, sicútq; FD ad GB, sic erit CD ad AB, per 4 huius. Ad rectam autem BG similiter describatur triangulum BGI ipsi DFE, quia verò æquales sunt bini anguli ABG, GBI binis CDF, FDE, totus CDE toti ABI æquus erit, similiter AGI ipsi CFE, necnon E ipsi I. Erit itaque FD ad GB, sicut DE ad BI. Sed fuit FD ad GB sicut CD ad AB, erit itaque CD ad AB, vt DE ad BI, circum æquales angulos: similiter ostendetur CF ad AG, vt CD ad AB, & FE ad GI. Totum itaque ABGI rectilineum toti CDFE rectilineo simile similitérque positum est, & circum æquales angulos latera proportionalia habet. A data itaque recta linea dato rectilineo, &c.

PROPOSITIO XIX.

Similia triangula, adinuicem in dupla sunt ratione laterum similis rationis.



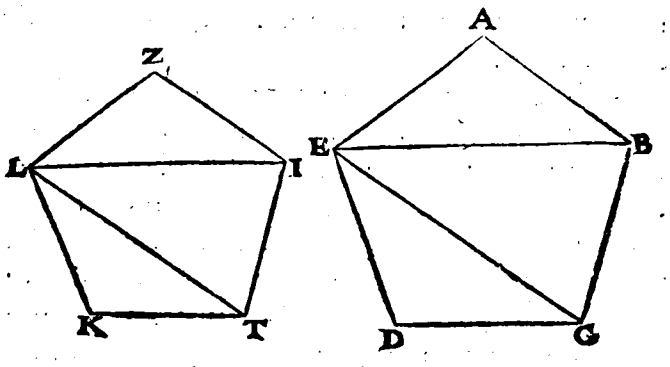
Sint bina triangula ABG maius & DEZ minus similia, angulos A, G, B angulis D, Z, E æquos habentia: Dico triangulum ad triangulum duplam habere rationem, quam latus ad latus, scilicet BG ad EZ. Quoniam triangula sunt æquiangula, per 1 diffinit. huius, proportionaliter erit AB ad DE sicut BG ad EZ per 4 huius. Sit autem vt BG ad ZE sic (per 11 huius) ZE ad BI. Tres itaque proportionales erunt, quarum prima BG ad tertiam BI duplam habet rationem, quam ad secundam EZ per 10 diffinitionem quinti. Quia verò AB ad DE supponitur vt BG ad EZ, & vt EZ ad BI. Erit AB ad DE vt EZ ad BI reciprocè, per 2 diffinitionem huius. Quare (per secundam partem 15 huius) æqualia erunt ABI & DEZ triangula, cùm anguli E & B sint æquales. Est autem BG ad BI basin, vt triangulum ABG ad ABI per primam huius. Est igitur BG ad BI vt ABG ad triangulum DEZ, æquum ipsi ABI. Sed BG ad BI duplam ostensa est habere rationem, quam latus BG ad latus EZ. Triangulum igitur ABG ad triangulum DEZ, duplam habet rationem quam latus BG ad latus EZ, & proinde quam similis rationis reliqua latera. Eadem est enim ratio (per 1 diffinitionem huius (laterum.

Similia

Similia itaque triangula, adinuicem in dupla sunt ratione, &c.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona in similia triangula diuiduntur, æqualia numero, & proportionalia totis. Polygonum autem ad polygonum, duplam habet rationem, quam similis rationis latus, ad similis rationis latus.



Sint similia polygona ABGDE & ZITKL: Dico ea diuidi in similia triangula & æqualia numero. Et singula ad singula, esse vt totum ad totum polygonum. Polygona verò adinuicē habere duplam rationem laterū similis rationis, scilicet quam AB ad ZI, vel aliud ad aliud similis rationis latus. Cùm (per hypothesim seu figuratū similitudinem) æqualis sit BAE angulus IZL angulo. Et circum æquales angulos proportionalia latera, scilicet BA ad AE sicut IZ ad ZL. Coniunctis BE & LI rectis, æquiangula erunt, per 6 huius, triangula AEB & ZLI, & angulus ABE angulo ZIL æquus erit. Sed cùm per constructionem totus ABG toti ZIT angulo sit æquus, & ablatus ABE ablato ZIL, reliquus EBG reliquo LIT æquus erit, per decimānonam quinti: iunctis autem EG & LT rectis, quoniam est vt EB ad AB sic LI ad ZI circa æquales angulos. Et sicut AB ad BG sic ZI ad IT, æqua ratione (per 22 quinti) erit vt EB ad BG sic LI ad IT. Atqui cùm EBG angulus LIT angulo, ostensus sit æqualis, æquiangula & proinde similia erunt EBG & LIT triangula, per 6 huius. Quoniam enim æqualis est angulus BGD angulo ITK, & EGB ipsi LTI, reliquus EGD reliquo LTK æquus erit. Et eodem argumento patebit angulos DEG & KLT æquos esse, & proinde (per hypothesim & sextam huius) triangulum EGD triangulo LTK æquiangulum esse. Polygona igitur in similia triangula, & numero æqualia diuisa sunt. Cæterùm, quia singula triangula singulis sunt similia, erit vt AB ad BE sic ZI ad IL. Permutatim verò (per 16 quinti) vt AB ad ZI sic EB ad LI. Sit autem EB commune latus triangulorum AEB BEG. Similis verò rationis sit latus LI, commune triangulorum ZLI ILT. Duplam habent igitur rationem (per præfatam) singula triangula AEB ad ZLI, & EBG ad LIT adinuicem, quam habent similis rationis latera EB ad LI. Eandē itaque adinuicem (per sextam communem sententiam) habebunt. Idem ostendetur de triangulis EGD & LTK eandem habere quam EBG ad LIT, scilicet duplam communium EG ad LT laterum. Sed sicut AB ad ZI sic fuit EB ad LI. Duplam igitur habebunt singula triangula ad similia rationem quam AB ad ZI. Totum igitur polygonū ABGDE ad totum ZITKL, eandem habens rationem (per 12 quinti) quam triangula similia, duplam habet rationem quam AB ad ZI similis rationis latera. Similia itaque polygona in similia triangula diuiduntur, & æqualia numero, & proport. &c.

COROLLARIVM I.

Hinc assumitur, omnes rectilineas figuras similes, duplam habere laterum similis rationis rationem.

Omnes enim figuræ rectilineæ similes in similia resoluuntur triangula, perque id demonstratum est.

COROLLARIVM II.

Tribus datis lineis rectis proportionalibus, erit sicut prima ad ter-

tiam, ſic quod à prima rectilineum, ad illud quod ex ſecunda ſimile, ſimilitérque deſcriptum rectilineum.

Nempe in dupla ratione primæ ad ſecundam.

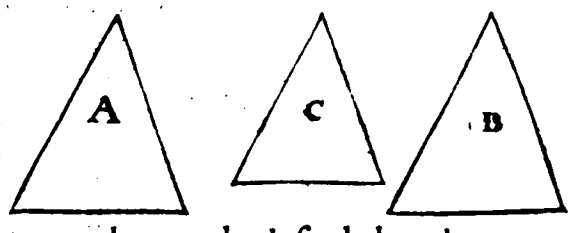
MONITVM.

Supereſt huic theoremati obiectum imminens diſcutiendum. Ait namque ſecunda pars ſimilia polygona duplam habere laterum rationem. Quid tum cùm æqualia & ſimilia fuerint polygona? quánam arte duplam habebunt laterum rationem, iuxta huius ſententiam? Quinimò potius eandem habere non duplam comperimus.

Ad hæc, rationis duplæ aut cuiuſuis multiplicis ortum, à ſuiipſius per ſe ducta quãtitate, propalant decima quinti necnon quinta huius diffinitiones: atqui æqualitatis ratio, vnitate denominata ſuiipſius quãtitatem, hoc eſt vnitatẽ vnitate multiplicans in ſeipſam denuò incidit, eò quòd nulli ſit alterationi obnoxia. Qua de cauſa vnitatis duplam, triplam, aliámque multiplicem per ſe productam, ab vnitate nuſquam receſſuram arbitremur: In rationibus nimirum duplæ triplæ aut aliæ quæuis multiplices ſimplicis in ſe ductu giganuntur, non per quantitatum additionem ſiue vnitatum repetitionem vt apud arithmeticos, quod latius his diffinitioni bus expreſſimus. Idcirco rationem æqualitatis ab vnitate denominauimus, quod ea vnicum ſit interſtitium, inter inæqualitatum exceſſus incremento genitos, aut defectus decremento prolatos. Exceſſus quidem integris numeris vnitatem in incrementum iterantibus, defectus verò fractis eandem in decrementum repetentibus, æqualitatem autem vnitate, nulli alterationi ſubdita, incremento ſcilicet aut decremento iandudum expoſuimus: quare æqualitatis rationem ſuiipſius multiplicem veluti vnitatem dicere non verebimur.

PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & ad inuicẽ ſunt ſimilia.



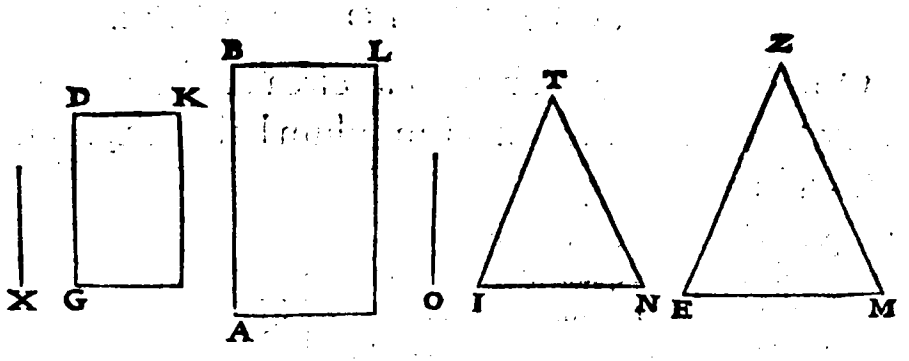
Sint eidem rectilineo c ſimilia rectilinea A & B: Dico ipſa A & B eſſe ſimilia. Cùm enim A & B ſint ipſi c ſimi lia, æquales ipſi c habent angulos, per primam diffinitionem huius, ergo & adinuicem (per primam communem ſententiam) æquales: quia verò circum æquales angulos ipſi c habent latera proportionalia, hoc eſt, eiuſdem rationis, per primam diffinitionem, & adinuicem circumæquales angulos, latera habebunt eiuſdem rationis, per vndecimam quinti. Quæ itaque eidem rectilineo ſunt ſimilia, & adinuicem (per primam diffinitionem huius) erunt ſimilia.

PROPOSITIO XXII.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quæ ab eis rectilinea ſimilia, ſimilitérque deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi quæ ab eis rectilinea ſimilia, ſimilitérque deſcripta proportonalia fuerint, ipſæ quoque rectæ lineæ proportionales erunt.

Exponantur quatuor rectæ lineæ proportionales, A B ad G D vt E Z ad I T: Dico rectilinea ex A B & G D ſimilia, eam adinuicem ſeruare rationem, quam rectilinea ſimilia ſimilitérque deſcripta, ex E Z & I T ad ſe ſeruant: Datis A B G D tertiam X, ipſis verò E Z I T tertiam O proportionalem (per vndecimam huius) inueniamus. Erit igitur ſicut prima A B ad tertiam X, ſic A B L, à prima deſcriptum, ad G D K à ſecunda

cunda de ſcriptũ ſimile rectilineũ, per ſecundum corollariũ vigeſimæ huius, & per idem



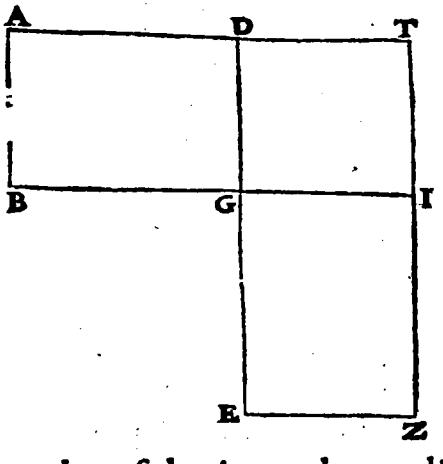
corollarium E Z ad O ſicut E Z M rectilineum ad I T N: ſed cùm ſit A B ad G D vt E Z ad I T, & G D ad X vt I T ad O, erit æqua ratione (per vigeſimam ſecundam quinti) vt A B ad X ſic E Z ad O. Sicut itaque A B L ad G D K ſic E Z M ad I T N, per vndecimam quinti: quæ ab eis itaque rectilinea ſimilia proportionalia erunt. Sed iam ad ſecundum, ſunto quæ ex A B & G D ſimilia (A B L & G D K (in ea ratione qua ex E Z & I T ſimilia, E Z M & I T N: Dico ipſas A B ad G D eſſe vt E Z ad I T: cùm enim ea rectilinea ſint in eadem ratione, per hypotheſim, & rationem habeant laterum A B ad G D, & E Z ad I T duplam per corollarium vigeſimæ huius, ipſa laterum ratio (per ſeptimam communem ſententiam) eadem erit, ſcilicet A B ad G D vt E Z ad I T. Si itaque quatuor rectæ lineæ, &c.

MONITVM.

Subnectit Theon huic theoremati lemma ſecundæ parti huius obaudiens, cui obiicit oſtendendam eſſe æqualitatem laterum, cùm rectilinea ſunt æqua & ſimilia quod ab huius theorematis ſententia ſecernitur, quæ tantùm ſimiles rationes non laterum exceſſus, æqualitates aut defectus exoptat, illæ vtique ſimiles ſub generali proportionalium demonſtratione ſatis ſupérque fouentur. Non enim æqua & ſimilia eſſe poſſunt abſque æqualium rectarum deſcriptione. Id equidem lemma non inconſulto prætermiſimus, tanquam minimè neceſſarium. Sed potiori obiecto occurrentes, prælibatæ vigeſimæ monitum impendimus, quo periculum ex æquis ſimilibus emergens erumpamus.

PROPOSITIO XXIII.

Æquiangula parallelogramma, rationem adinuicem habent, compoſitam ex lateribus.

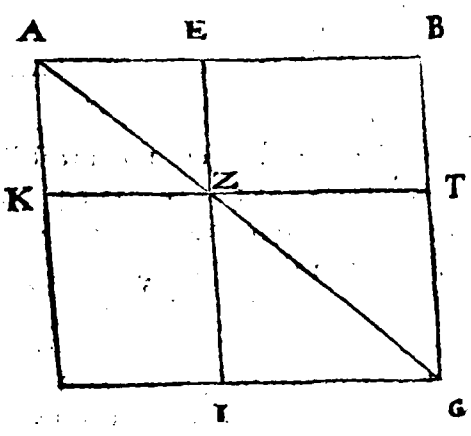


Quia demonſtrauimus decima diffinitione quinti, & quinta huius extremorũ rationes ex mediorum rationibus conſtare, proponamus bina parallelogramma æquiangula, quorum ſinguli æquales anguli in G concurrant, ſintq; A B G D & G E Z I, ſit autem in rectum B G I, recta reliqua E G D (per conuerſam 15 primi) in rectum erit, & perficiatur parallelogrammum G T: Dico rationem A G ad G Z parallelogrammorum, cõponi ex rationibus laterum B G ad G I & D G ad G E. Quoniam tres ſunt magnitudines A G G Z & earum media G T, ratio extrema rum A G ad G Z cõſtat ex rationibus mediis, per quintã diffinitionẽ huius, ſcilicet A G ad G T & G T ad G Z, ſed ratio A G ad G T eadẽ eſt rationi B G ad G I laterũ, per primam huius: ipſius verò G T ad G Z ratio, eadem eſt rationi alterius lateris D G ad reliquum G E, per eandem. Conſtat igitur ratio A G ad G Z parallelogrammorum, ex rationibus laterum B G ad G I & D G ad G E. Aequiangula igitur parallelogramma rationem, &c.

PROP

PROPOSITIO XXIIII.

Omnis parallelogrammi quæ circa dimetientem sunt parallelogramma, communem ei angulum habentia, similia sunt toti, & adinuicem.



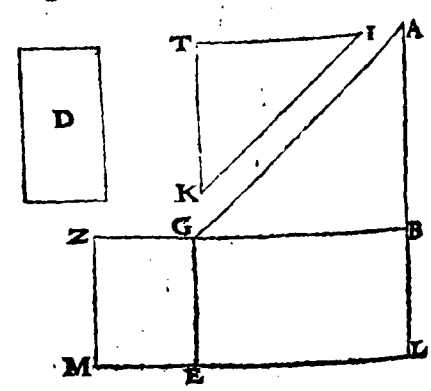
Sit parallelogrammum A B G D, cuius dimetiens esto A G, circa quam existant parallelogramma E K & T I communes ei angulos habentia ad A & G: Dico ea scilicet E K, T I similia esse toti D B, & adinuicem. Quoniam parallelogramma sunt B D, E K & T I, in parallelas A E B, K Z T & D I G siue A K D, E Z I, B T G cadens A Z G recta, anguloſ E A Z ipsi K Z A, E Z A ipsi K A Z, T Z G ipsi Z G I, T G Z ipsi I Z G, B A G ipsi A G D, ac B G A ipsi D A G æquos (ex 29 primi) efficit; reliquos itaque B ipsi D, E ipsi K, & T ipsi I (per 1 coll. 32 primi) æquales, haud secus faciet. Aequiangula igitur & ideo similia sunt triangula A B G ipsi G D A, A E Z ipsi Z K A, & Z T G ipsi G I Z, sicut ideo A B ad B G sic A E ad E Z, ac Z T ad T G: sub iis itaque rectis comprehensa parallelogramma A B G D, E K, T I similia sunt, ex prima diffinitione huius. Omnis itaque parallelogrammi quæ circa dimetientem sunt, &c.

MONITVM.

Ampliori fastu hanc per 2 huius, & per 16 & 18 quinti, demonstrare potuissemus, sed facilitati consulentes, compendium prolixitati prætulimus. Insuper contulimus illud (communem ei angulum habentia) tanquam necessarium conclusioni generandæ: nam absque communi angulo deperit eorum necessaria similitudo, vt proxima 26 patebit.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA 7.

Dato rectilineo simile, & alij dato æquale, idem constituere.

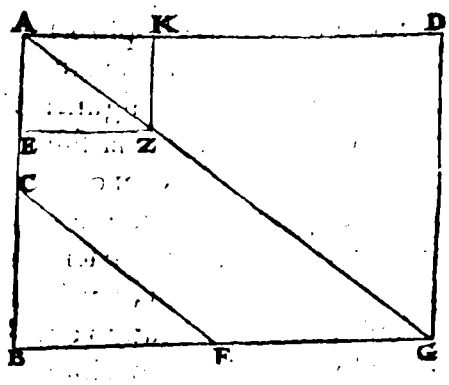


Esto datum rectilineum A B G, cui oporteat simile constituere, & ipsi D dato æquale. Ad datam rectam B G dato A B G, æquale constituatur rectangulum B G E L, per 45 primi, producta verò B G in Z ad rectam G E angulúmque Z G E ipsi D, æquum rectangulum sit G E Z M. Rectis porrò B G G Z media proportionalis inueniatur I T, per 13 huius: à recta I T dato A B G simile describatur rectilineum K I T, per 18 huius: Dico K I T simile dato A B G, æquũq; esse dato D. Cùm sint tres proportionales B G, I T, G Z rectæ, erit B G ad G Z tertiam, dupla ratio quam eiusdem B G, ad secundam I T, per 10 diffinitionem quinti. Sicut B G ad G Z, sic per primam huius rectangula B E ad G M. Ipsa igitur B E & G M duplam habent rationem quam B G ad I T, sed duplam quam B G ad I T habẽt, A B G & K I T, per 20 huius. sicut igitur B E ad G M, sic A B G ad K I T, vicissim igitur erit B E ad A B G vt G M ad K I T, per 16 quinti. Aequale est autem B E ipsi A B G, æquale igitur erit (per 14 quinti) G M ipsi K I T: eidem verò G M æquum fuit D datum, ipsi itaque D dato æquũ erit K I T, simile autem descriptum ipsi A B G dato. Dato igitur rectilineo simile, & alij dato æquale idem constituimus.

PROP

PROPOSITIO XXVI.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem angulum habens ei, circum eundem dimetientem eſt toti.



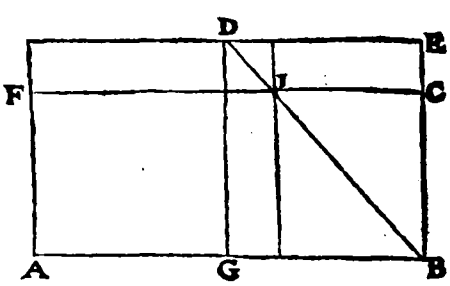
A parallelogrammo A B G D parallelogrammum auferatur A E Z K, ſimile & ſimiliter poſitum toti A B G D, & inſuper communem habens angulum A, cum toto: Dico vtriuſque dimetientem A Z & A Z G eandem eſſe rectam: ſectis bifariam A B & B G lateribus in C & F, iuncta C F parallela erit rectæ A G, per corollarium ſecundum 39 primi, quare anguli B A G & B C F æquales erunt per 29 primi, atqui angulo B A G æquus eſt E A Z angulus, ex parallelogrammorum poſita ſimilitudine. Idem itaque E A Z angulus angulo B C F æqualis erit, exterior interiori oppoſito: parallelę igitur erunt A Z & C F, per 28 primi, ſed A Z & A G eidem C F parallelæ concurrunt in A: ipſæ itaque in rectum ſunt poſitæ, per 30 primi. Parallelogramma ideo A B G D & A E Z K circa eandem ſunt dimetientem. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, &c.

MONITVM.

Demonſtrationem huius mutauimus, eò quòd plures ab impoſſibili eam demonſtrant negatiuam deſtruentes. Nos autem affirmatiuam probatam plus congruere rati, hanc breui admodum argumento cõcluſimus, vt inſuper ad parallelogramma externa ſimilia ſimiliter poſita, ac ad idem A ſignum angulos habentia, extendatur. Semper enim figurarum ſimilitudo, & ſimilis poſitio efficit angulos A Z E & A G B æquales, vt prima huius diffinitione diximus, & proinde ad rectam E Z cadentes rectas A Z Z G, per 14 primi vnicam efficere rectam.

PROPOSITIO XXVII.

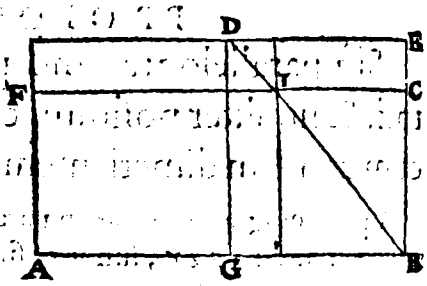
Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum deficientiúmque ſpecie parallelogrammis ſimilibus ſimilitérque poſitis, ei quod à dimidia deſcriptum eſt, maximum id eſt, quod ad dimidiam applicatum parallelogrammum, ſimile exiſtens ei quo deficit.

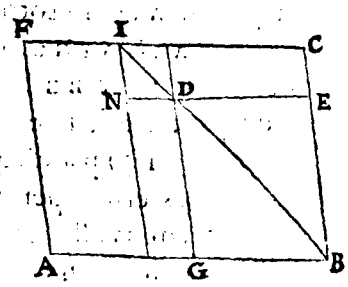


Secetur A B recta bifariam in G, ad dimidiam autem G B aliquod applicetur parallelogrammum G E, cuius dimetiens ſit D B: quoniam parallelogrammum, quo deficere debet aliud applicatum, eſt ſimile ipſi G E (quod à dimidia) & ſimiliter poſitum, ipſum erit circa eundem dimetientem D B, per præcedentem. Nam eorum communis angulus eſt B, quare vt applicatum ad rectam A B, deficiat à recta A B ſimili ipſi G E, à ſigno A, vſque ad dimetientem id deſcribi neceſſe eſt. Sit igitur applicatum A I, id verò quo deficit ad complementum rectæ A B, ſit I B ſimile exiſtens ipſi G E, quod ſcilicet ad dimidiam: Dico omnium parallelogrammorum ad ipſam A B ſic applicatorũ inter A & rectam D B, maximum eſſe id quod applicatur ad dimidiam, ſcilicet A D vel G E ſibi æquale. Si enim applicatum tangat rectam D B inter D & E, ſit A I: Dico A D maius eſſe ipſo A I.

Cùm

Cùm IE & IG ſupplemẽta ſint æqualia, per 43 primi, FD verò & DC (per 36 primi) ſunt ſimiliter æqualia. Eſt autem FD maius ipſo IE, cùm ſit æquũ ipſi DC, maius igitur erit FD ipſo IG. Commune addatur FG, maius itaque erit AD ipſo AI. Sed ipſi AD æquum eſt GE per 36 primi, igitur GE maius eſt ipſo AI, parallelogrãmo quidem DI. Si verò AI tangat DB extrinſecus, ſit vt in ſequenti figura: Dico GE, maius eſſe ipſo AI. Cùm enim æqualia ſint FG, GC, per 36 primi, & æqualia ſunt DC NG (per 43 primi), ſupplementa. Ab æqualibus itaque FG, GC, æqualia auferantur NG DC. Reliquum ſcilicet AI cum quadrangulo ID, ſimul ſumptum, æquũ erit reliquo GE quod ad dimidiam GB applicatum eſt. Eodem igitur quadrangulo ID maius erit GE ipſo AI. Omnium itaque parallelogrammorum, ad eandem, &c.





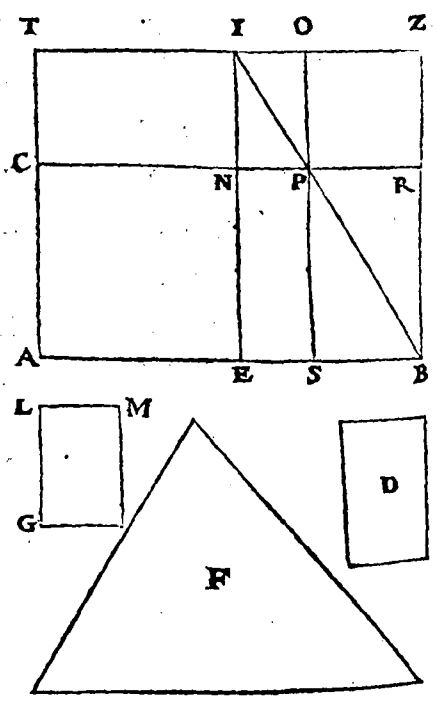
MONITVM.

Voces propoſitionis (græcum imitantes) variauimus, vt proiectum ad lineam applicatum intelligatur, ſumptum verò, quo in fine vtitur, id quo deficit proiectũ cenſendum eſt.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA 8.

Ad datam rectam lineam parallelogrammum applicare, deficiens ſpecie parallelogrammo ſimili dato, æquale autem rectilineo, non maiori eo quod ad dimidiam ſic applicatur, vt id cui expedit ſimile deficere.

Recta linea AB biſariam ſecetur in E. Oportet iam ipſi AB applicare parallelogrammum deficiens ſpecie parallelogrammo ſimili ipſi D dato. Æquale autem rectilineo F, quod quidem non eſt maius eo parallelogrãmo quod ſuper dimidiã AB ſic applicatur, vt ipſum D, ſimile ſimilitérque poſitum. Ad rectam igitur EB ipſi D ſimile applicetur EBZI, per 18 huius, & perficiatur TB. Quoniam autem F (cui æquale expedit applicare) non eſt maius eo quod ad dimidiam AE applicatur, ſcilicet ipſo AI. Si fuerit ei æquale, conſequimur optatum. Nam ad rectam AB applicatum eſt AI, deficiens ſpecie ipſo EZ ſimili dato D, æquale autem eſt AI dato F rectilineo, non maiori (ſed ex hypotheſi æquali) eò quòd ad dimidiam AE ſic quidem applicatur, vt D, cui expedit ſimile EZ deficere. Si verò F, cui æquũ applicandũ eſt, ſit minus ipſo AI, cui æquum eſt EZ, ſit minus aliquo rectilineo: ei porrò rectilineo æquum, ſimile verò ipſi EZ (per 25 huius) deſcribatur GLM: rectæ autem LM æqualis ſit IO ipſi verò LG æquetur IN, & perficiatur parallelogrammum IP. Quod quidem eſt æquum ipſi GM, ſimile verò ipſi EZ toti, ſimilitérque poſitum.

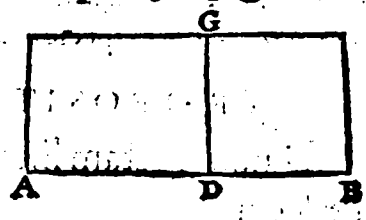


Quare

Quare circum eundem dimetientem est toti E Z, per 26 huius: coniungatur recta I P B dimetiens ipsis E Z N O communis, producantur O P quidem in S, & N P in O & R latera parallelogrammi T B: Dico A P esse applicatum ad rectam A B, deficiens specie ipso S R simili ipsi D, æquum autem ipsum A P dato F rectilineo. Cùm autem B Z excedat (per hypothesim) rectilineum F ipso G M, hoc est ipso N O. Æquum erit B gnomoni N S S Z. Quia verò A N N B sunt (per 36 primi) æqualia, si eis æqualibus æqualia N S & P Z (per 43 primi) addas, totum A P, gnomoni N S S Z æquum erit, per 2 commun. sententiam. Et proinde ipsi F, eidem gnomoni æquo ostenso. Æquum igitur erit A P ipsi F. Quoniam autem à parallelogrammo E Z parallelogrammum S R aufertur, circum eundem dimetientem, simile erit S R ipsi E Z, per 24 huius: & proinde ipsi D eidem E Z simili positóque similiter. Ad datam igitur rectam A B parallelogrammum A P applicauimus, deficiens specie ipso S R simili dato D. Æquale autem (ipsum A P) dato F rectilineo, non maiori eo (scilicet A I) quod ad dimidiam A B sic applicatur, vt id (scilicet D) cui expedit simile deficere S R.

COROLLARIVM.

Colligemus, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens specie quadrata, ipsum applicatum æquum erit, ei quod sub segmentis per applicationem factis propositæ rectæ continetur.



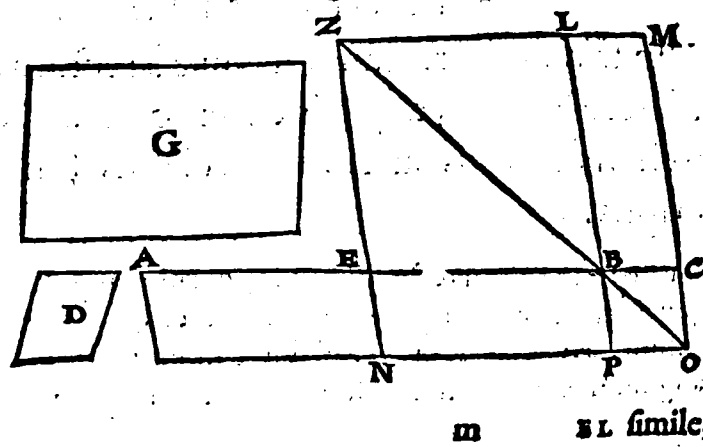
Nam reliquum lineæ segmentum æquum est, reliquo parallelogrammi applicati lateri. Cùm sint latera eiusdem quadrati, vt A G constat ex A D, D B, vel D G.

MONITVM.

Diximus parallelogrammum applicandum non maius optari, eò quòd ad dimidiam sic applicatur, vt id cui expedit simile deficere, vt Campani & Theonis dicta clarius resonemus, atque ad dimidiam applicatum E Z, similiter applicandum fuisse, vt id D cui expedit simile deficere scilicet S R, similiter ipsi D positum intelligentes, ne possit defectus S R transponi, manente F maiore applicato E Z, ipsum verò F eodem E Z non maius: nam si tantùm simile non autem similiter positum proponeremus, quandoque ob situum differentiam, non supereresset locus inter A & dimetientem I B, ad applicandum ipsi F æquum, specie deficiens simili ipsi D dato: quod minimè intelligentes quidam dixerunt hanc in errorem posse inducere, etiam bene exercitatos, licet nihil admirandæ difficultatis extet geometriæ rudimenta intelligentibus. Insuper, liberiora sunt problemata theorematis, necessariam hypothesim sequentibus.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA 9.

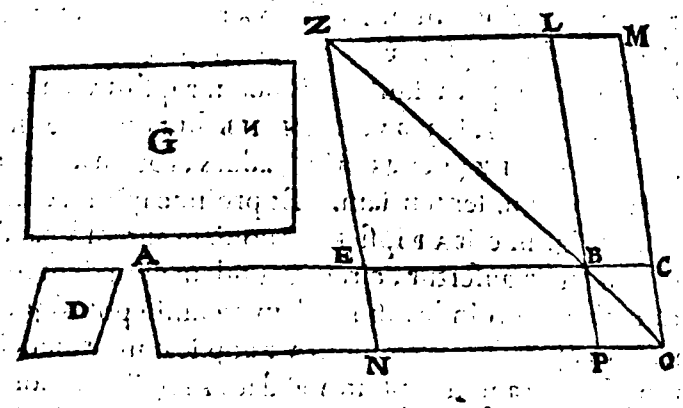
Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum comparare, excedens specie parallelogrammo simili dato.



Esto data recta A B, quæ bifariam in E secetur, datum verò rectilineum cui æquale comparandum est, sit G: cui verò simili excedet sit D. Ad rectã E B simile (per 18 huius) ipsi D ponatur E B Z L. binis autem E L & G æquale, ipsi verò D vel

m B L simile,

E L ſimile, ad angulum Z ponatur (per 25 huius) Z M O N, & ducta L B in P, ac I B in C, dimetiẽtiq; Z B O perficiatur N A parallelogrammum: quoniam æquale eſt totum M N binis E L & G, cõmuni ablato E L, reliquum G reliquo gnomoni E P M æquum erit: ſed quia (per 43 primi) M B ipſi B N ſupplemento, & (per primam huius) B N ipſi A N ſunt æqualia; erit B M ipſi A N æquale, & proinde totum A O gnomoni E P M æquum erit. Atqui eidem gnomoni æquale oſtenſum eſt rectilineum G: æquum igitur erit A O eidem G rectilineo: cùm autem ſimilia ſint E L & N M parallelogramma, circa eandem erunt dimetientem, per 26 huius, reliquum igitur P C, quod circa eandem dimetientem eſt toti N M, eidem ſimile erit, per 24 huius, & proinde ipſis E L vel D ſimile erit P C. Ad datam itaque rectam A B, dato rectilineo G, æquale parallelogrammum comparauimus A O, excedens ſpecie recta A B parallelogrammo P C ſimili dato D.

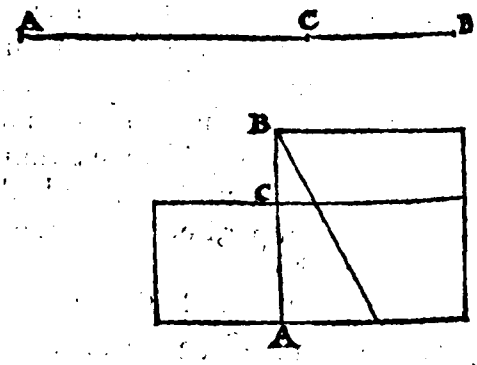


PROPOSITIO XXX. PROBLEMA 10.

Datam rectam lineam terminatam, extrema & media ratione ſecare.

Secetur recta linea A B (per 11 ſecundi) in C, erit quod ſub A B B C æquum ei quod ex A C. Tres igitur A B A C & B C ſunt (per ſecundam partem 17 huius) ſicut tota A B ad maius ſegmentum A C, ſic maius A C ad minus B C. Recta itaque A B extrema & media ratione ſecta eſt in C, per 3 diffinitionem huius.

Poterat hæc admiranda ſectio prolixius demonſtrari, applicato ad rectam A B parallelogrammo excedente quadrata ſpecie, æquali quadrato ſuiipſius per 29 huius. ſupererit in quadrato ex A B rectãgulum ſub tota A B & minori ſegmento C B, æquum quadrato excedenti, ſcilicet ei quod ex maiori ſegmento A C, quorum latera reciprocè (per 14 huius) totam ad maius, vt maius ad minus ſegmentum proportionales efficiunt. Hanc ſic oſtenderunt plurimi.



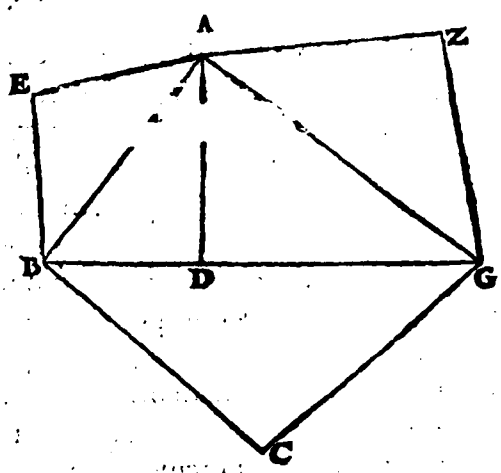
PROPOSITIO XXXI.

In triangulis rectangulis quæ à rectum angulum ſubtendente latere ſpecies, æqualis eſt eis quæ à rectum angulum comprehendentibus lateribus ſpeciebus ſimilibus ſimilitérque deſcriptis.

Eſto triangulum rectangulum A B G, cuius angulus ſit rectus: Dico quæuis polygona ſimilia ſimilitérque deſcripta, à lateribus A B, A G, rectum continentibus angulum, æqualia eſſe ei, quod ſimile ſimilitérque deſcribetur, à latere B G rectum angulum ſubtendente. Demittatur ab angulo A recto in baſin perpendicularis

A D: quon

A D: quoniam (per 8 huius) similia sunt triãgula A B G, A D G & A D B, erit B G ad B A vt B A ad B D. Quod igitur à prima B G similiter descriptum, ad id quod à secunda B A, erit (per coroll. 20 huius) sicut prima B G ad tertiam B D, simili argumento quod ex eadem B G, erit A D quod ex G A, sicut B G ad G D. Nam G A est media inter B G G D, per corol. 8. huius. Conuertendo igitur (per coroll. 4. quinti) erit quod ex B A ad quod ex B G, sicut B D ad B G, & sicut insuper quod ex A G ad quod ex B G, sic G D, ad B G. Sex igitur sunt magnitudines, quod ex B A prima, ex B G secunda, B D tertia, B G quarta, quod ex A G quinta, & G D sexta: composita itaque prima & quinta scilicet quæ ex A B & A G, ad secundam ex B G, erunt vt tertia & sexta B D G D rectæ, ad quartam B G, per 24 quinti, sed B D G D sunt ipsi B G æquales, cùm sint partes totius: quæ igitur ex A B & A G ei quod ex B G speciei similiter descriptæ, æquales erunt species. In triangulis itaque rectangulis, quæ à rectum angulum, &c.



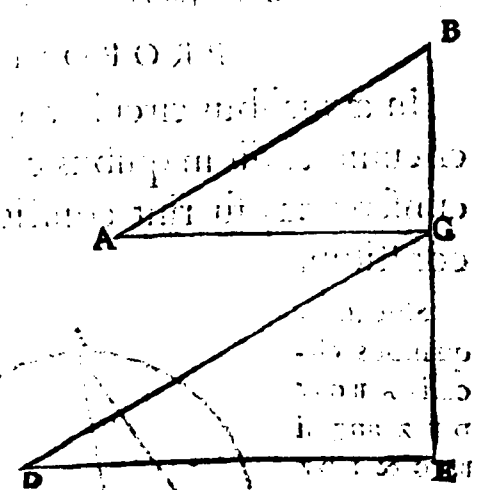
ALITER.

Vt autem noscamus hanc originem à 47 primi duxisse, per eam hanc demonstrabimus compendio. Cùm enim ex A B A G quadrata, ei quod ex B G quadrato, sint æqualia, per 47 primi. Sed ab ipsis rectis similes descriptæ species, quadratorum habent rationem, per 20 sexti: nempe duplam similis rationis laterum. Ergo ab ipsis A B A G similes species ei quæ ex B G simili æquales sunt speciei, per 11 quinti.

PROPOSITIO XXXII.

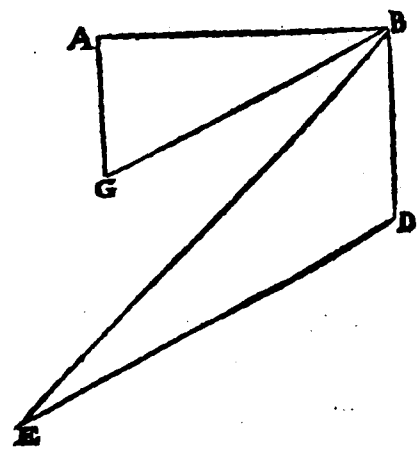
Si inter duo triangula eorum bina latera angulum componant, eáque binis reciproca fuerint & parallela, reliqua triangulorum bina latera, in rectam lineam erunt.

Triangulorum A B G & D G E bina latera A G, G D angulum A G D componant. Sintq; ea latera binis aliis lateribus reciproca & parallela, scilicet, ipsis A B, D G, sicut quidem D G ad A B, sic D E ad A G, parallelæ verò A G, D E inuicem, & G D, A B adinuicem: Dico reliqua triangulorum A B G, D E G latera, scilicet B G, G E, in rectam esse lineam. Cùm parallelę sint A B, D G, in eas cadens A G, angulos B A G A G D, efficit æquales, per 29 primi. Quia verò parallelæ sunt A G D E in eas cadẽs D G angulos A G D G D E, similiter æquos efficit, per eandem. Aequales igitur erunt B A G, G D E adinuicem, eidem namque A G D, æquales. Circum autem æquales angulos latera proportionalia D G ad A B, vt D E ad A G ostensa sunt. Aequiangula itaque erunt A B G, D G E triangula, per 6 huius, & angulum D G E, ipsi A B G, æquum habebunt. Quare & totum A G E angulum binis A & B angulis æquum, & proinde binos A G E & A G B duobus rectis æquales, per 32 primi, cùm sint æquales tribus trianguli A B G angulis: quia igitur ad rectam aliquam A G, duæ rectæ B G, G E, duobus rectis æquales efficiunt angulos, ipsæ B G G E in rectam lineam erunt per 14 primi. Si igitur duorum triangulorum bina latera, &c.



MONITVM.

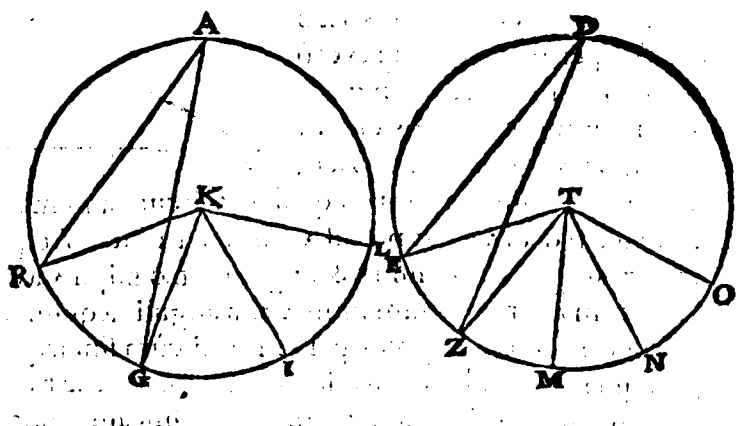
Hoc theorema reperimus velut confusum, cuius licet ponãtur à Theone sumptæ hypotheses, non semper sequetur haberi necessariam conclusionem: supponit quidem triangula componi ad vnum angulum, cùm debeat tantùm duo triangulorum latera, inter quæ nullum aliud cadit latus, angulum componentia proferre. Bina etenim triangula (si quidem Theonem insequamur) ad vnum angulum absque angulorum communitate componi non possunt: si verò ad signum concurrere intelligat, nec id subsistet. Duo nanque triangula ABG DBE componuntur ad vnum angulum B, duo latera AG, GB duobus BD, DE proportionalia habentia, vtq; eiusdem rationis latera sint parallela, scilicet AG ad BD & GB ad DE. Hucusque seruata hypothesi incorrupta, nihilominus abest conclusio, scilicet reliqua latera AB, BE esse in rectum posita. Campanus autem nulla supponit in hypothesi triangula, & tamen postmodum triangula concludit, super eandem rectam constitui, quæ confusiones eos hanc quodammodo intellexisse fatentur, posteris autem tradidisse minimè. Qua de re, quod Geometriæ plus conducere arbitrati sumus Euclidem sensisse diximus. Duo quippe triangula duobus singulorum lateribus vnicum angulum componere, & insuper ea angulum componentia latera singula, singulis aliis parallela esse, eáque eadem ad sibi parallela latera rationes habere reciprocas. Nam id cogit triangula tandem æquiangula fieri: si etenim angulum constituentia, ad parallelas similes haberent rationes, reliquæ in rectam non caderent lineam. Ea quippe de causa videmus Theonem sua demonstratione tacuisse angulum, ex hypothesi memoratum, scilicet AGD, cùm eius anguli latera similem non habeant ad parallela, sed reciprocam rationem. Assumitur autem hoc theorema demonstrandis post vndecimum librum propositis maximè decimo septimo decimi tertij ac aliis pleriſque.



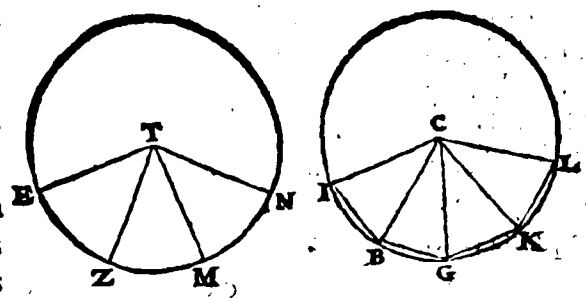
PROPOSITIO XXXIII.

In æqualibus circulis anguli, eandem habent rationem ipsis circunferentiis in quibus consistunt, & si ad centra, & si ad circunferentias fuerint constituti, tum etiam sectores ad centra constituti.

Sint in æqualibus circulis ABG & DEZ anguli BAG & EDZ ad circunferentias. Sint autem ad centra BKG & ETZ: Dico esse vt BG arcum ad EZ arcum, sic angulum BKG ad ETZ, sicq; BAG ad EDZ. Ponantur ipsi BG æquales GI & IL.



& I L. Ipſi verò E Z æquales ſint quotuis Z M M N N O per 28 tertij, coniunctis K I K L T M T N T O. Quoniam æquales ſunt arcus, æquales erunt qui eis inſiſtunt anguli, per 26 tertij. Quotuplex itaque eſt totus B K L angulus, ipſius B K G anguli, totuplex erit totus B L arcus ipſius B G. Similiter quotuplex erit O T E anguli E T Z, totuplex erit E O ipſius E Z arcus. Quare ſi B L arcus excedat E O arcum, B K L angulus, excedet E T O angulum, ſi deficiat deficiet, & ſi æquetur æquabitur. Quatuor igitur ſunt magnitudines, ſcilicet B K G & E T Z anguli, B G & E Z arcus, quarum primæ & tertiæ æquemultiplicia, ſcilicet B K L angulus, & B G L arcus, ſimul excedunt, æquantur, vel deficiunt à multiplicibus ſecundæ & quartæ, E T O angulo & E M O arcu. Eorum igitur ſimplices B K G angulus ad E T Z angulum, ſunt vt B G arcus ad E Z arcum, per quintam diffinit. quinti. Quia verò qui ad circunferentias anguli B A G & E D Z dimidij ſunt ipſorum B K G & E T Z, per 20 tertij, illi eandem ipſis habebunt rationem, per 15 quinti, & ideo eam quam arcus: Dico inſuper ſectorem I C B ad ſectorem E T Z ſic eſſe, vt arcum I B ad arcũ E Z, ducãtur æquales rectæ I B B G G K K L, quæ æquales ſubtendant arcus, per 28 tertij, & æquales angulos ad C centrum, per 27 eiuſdem. Æqualia igitur erunt triangula I C B C B G C G K & C K L per 4 primi. Æquales item erunt ſectiones I B B G G K K L æqualibus rectis ſubtenſæ, cùm ſint ſimiles per 24 tertij. Quæ æqualibus additæ triangulis, efficient ſectores, I C B B C G G C K K C L ex ipſis compoſitos æquales, per 2 commun. ſentent. Similiter & adinuicem æquales erunt reliqui E T Z Z T M M T N ſectores. Quotuplex igitur erit arcus L G I ipſius I B arcus, totuplex ſector I C L ſectoris I C B erit. Similiter quotuplex E Z N arcus ipſius E Z arcus, totuplex erit E T N ſector ipſius E T Z ſectoris. Quatuor itaque magnitudinum I B E Z arcuum, & I C B E T Z ſectorum ſumuntur æquemultiplicia primæ & tertiæ, ſcilicet L G I arcus & I C L ſector. Secundæ item & quartæ æquemultiplicia, E Z N arcus & E T N ſector. Si igitur multiplex primæ excedat multiplex ſecundæ, multiplex tertiæ excedet multiplex quartæ: ſi deficiat, deficiet: ſi æquetur, æquabitur. Earum itaq; ſimplices magnitudines I B arcus, ad E Z arcum erunt vt I C B ſector ad E T Z ſectorem, per quintam diffinitionem quinti. In æqualibus itaque circulis, &c.



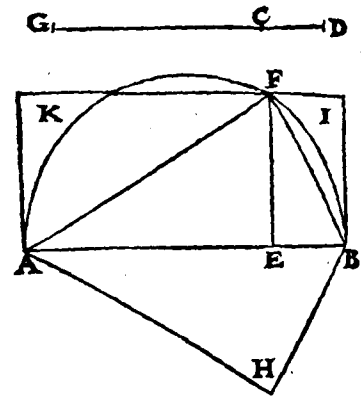
MONITVM.

Hoc theorema planè demonſtrat quod diximus nos exhibituros duodecima diffinitione primi, & octaua diffinitione tertij, magnitudinem ſcilicet anguli (quæ ſola eſt linearum inclinationis varietas) vnicum habere menſorem, arcum illi ſubtenſum, æqualibus quidem rectis contentum. Videmus namque angulorum & eos ſubtendentium arcuum, eaſdem eſſe rationes, quæ quantitatum ſunt maximè affinitates.

Cæterùm, primi libri quadrageſimam ſeptimam & quadrageſimam octauam exponentes, à quibus originem duxit 31 huius, multa earum obſequia data opera reliquimus, eò quòd illuc vſque nihil de rationibus ſeu proportionibus diſcuſſum erat, ne id quod eadem facilitas compendio poteſt edocere, faſtuoſa potius quàm vtili theorematum numeroſitate tradamus, eorum, quæ ab eadem 47 primi nata ſunt, pauca exponentes.

PROPOSITIO XXXIIII. PROBLEMA II.

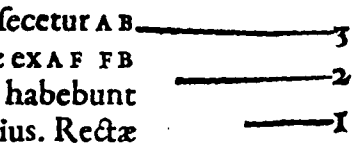
Dato rectilineo bina æqualia rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, datam rationem habentia, exhibere.



Esto datum rectilineum A B H, data verò ratio sit rectarum G C C D. Secetur A B similiter ipsi G D in E, per 10 huius. Super A B autem fiat semicirculus A F B. A signo verò E rectæ A B perpendicularis excitetur E F. Coniunctis A F F B, ex singulis earum similia similitérque describantur rectilinea ipsi A H B, sintq; A K F & F I B per 18 huius: Dico rectilinea A K F & F I B rationem habere datam quam G C ad C D, æqualia autem esse, ei quòd ex A B simili similitérque descripto. Quoniam semicirculus est A F B rectus erit A F B angulus, per 31 tertij, perpendicularis autem est F E. Triangula igitur A F E F B E, similia sunt toti A F B & adinuicem, per 8 huius. Sicut igitur A F ad F B sic A E ad E F, & E F ad E B circumæquales angulos, per 4 huius. Sicut igitur quod ex A F ad quod ex F B, sic quod ex A E ad id quod fit ex E F simile, per 22 huius. Sed sicut quod ex A B prima ad ex E F secunda, sic prima A E ad tertiam E B per 2 coroll. 20 huius. Quod itaque ex A F ad id quod ex F B, sic A E ad E B. Sed sic fuit ratio data G C ad C D. Sicut itaque G C ad C D sic quod ex A F ad simile ex F B similitérque descriptum. Quæ autem ex A F & ex F B æqualia sunt similiter descripto ex A B, per 31 huius. Dato itaque rectilineo bina æqualia rectilinea, &c.

COROLLARIVM I.

Datum rectilineum in bina rectilinea similia ex rectis rationem datam habentibus resoluere.



Nam si in ratione proposita dentur tres rectæ, & secetur A B in ratione primæ ad tertiam proportionalem, quæ ex A F F B (rationem sectionum A E ad E B habentia) duplam habebunt quam A F ad F B rationem, per primum coroll. 20 huius. Rectæ igitur A F & F B dimidiam eorum rationem habentes, erunt sicut trium prima fuit ad secundam, nam prima ad tertiam (A E ad E B) duplam habet quam ad secundam ex decima diffinitione quinti.

COROLLARIVM II.

Hinc assequimur, A dato rectilineo ordinatam partem auferre, reliquum simile toti relinquentes.

Nam si secetur à recta A B pars ordinata E B, per 9 huius, erit sicut A E ad E B, sic simile ex A F ad quod ex F B: ablato igitur ab eo quod ex A B, eo quod ex F B, reliquum quod ex A F supereſt, simile similitérque positum toti quod ex A B dato.

COROLLARIVM III.

Bina similia rectilinea in simile ac eisdem æquale rectilineum componere.

Constituantur eorum similia latera ad angulos rectos, vt A F F B, tum quod à subtendente A B simile similitérque positum reliquis (per 18 huius) fiet, æquum erit per 31 huius binis.

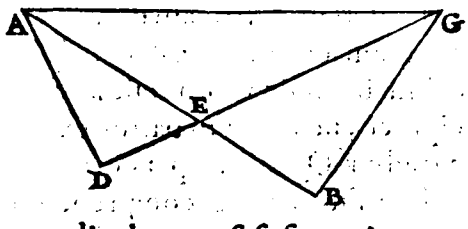
MONITVM.

Cur autem non deduxerit Euclides modum proportionis similium rectilineorum, velut de lineis dixit decimo huius & tribus eam sequentibus. Id equidem absoluit 22 huius. Nam duobus datis rectilineis similibus tertium scrutari proportionale. Item duobus datis medium perquirere. Tribus quoque datis quartum simile similitérque descriptum; & id genus proportionum per linearum proportiones

tiones reperiemus. Si binis ſimilis rationis lateribus tertiũ demus proportionale, per 11 huius, ex eo rectilineum deſcriptum tertium erit proportionale, per 22 huius. Siquidem binis lateribus medium proportionale (per 13 huius) detur latus. Ex eo deſcriptum, medium proportionale rectilineum ſimiliter erit. Haud ſecus ſi tribus datis quartum latus, per 12 huius, detur proportionale, ex ipſo deſcriptum rectilineum ſimile, quartum erit proportionale. Nam ſi rectæ lineæ ſint proportionales, ex eis deſcripta ſimilia (per 22 huius) proportionalia erunt. Licet tamen ea vigeſima ſecunda quatuor proponat rectas, idem ſentiendum eſt de tribus, nempe cùm bis repetetur media, fient quatuor, quod vnum ac idem eſt hoc loco. Horum vltimum reliquit Euclides, ſcilicet binis datis, bina media continuè proportionalia ſcrutandum, diſcentibus ſimul ac docentibus, vt ludant eorum ingenia in huiuſmodi problemate diſquirendo, quouis vſu mechanico poſtpoſito. Quoniam autem pauca propoſuit Euclides de ratione reciproca, quam diffinientes Campanus & Theon longè à vero ſenſu traditam reliquerunt, nos diſcentium exercitio conſulentes, aliqua theoremata huius rationis enunciata ſelegimus.

PROPOSITIO XXXV.

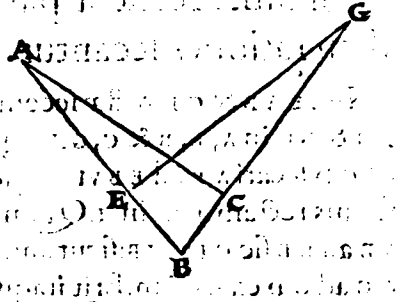
Si binæ rectæ lineæ ſeſe ad obtuſum angulum ſecuerint, à ſecantium autem limitibus perpendiculares ſibi inuicem demittantur, quæ inter limites & perpendiculares, reciprocè proportionales ſe ſecant.



Sint binæ lineæ AB GD angulum obtuſum in ſectione E efficientes: ab ipſarum autem ſecantium limitibus A & G ſibi inuicem perpendiculares demittantur, ſcilicet à ſigno A in rectam G D, quæ ſit A D, & à ſigno G in rectam A B quæ ſit G B: Dico rectas AB GD inter A limitem & B perpendicularem, & G limitem & D perpendicularem, ſeſe ſecare in E reciprocè, A E ad E D, ſicut G E ad E B: quoniam recti ſunt A D E G B E anguli, & igitur æquales. Sed A E D G E B, qui ad verticem ſunt (per decimam quintam primi) æquales. Reliqui igitur E A D E G B (per corollar. 32 primi) erunt æquales. Æquiangula itaque erunt A E D G E B triangula, quæ circum æquales igitur angulos latera proportionalia, per 4 ſexti, A E ad E D vt G E ad E B. Si itaque binæ rectæ lineæ ſeſe ad obtuſum angulum, &c.

PROPOSITIO XXXVI.

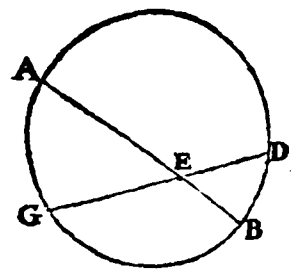
Si duæ rectæ lineæ angulum acutum componant, ab earum autem limitibus in ſeipſas perpendiculares ſecantes mittantur, ipſæ vt ſegmenta quæ circa angulum ſunt, reciprocè erunt proportionales.



Sint binæ rectæ A B G B, angulum acutum A B G componentes: à ſignis autem A & G perpendiculares ipſas ſecantes mittantur A C & G E; Dico ipſas A B ad G B vt ſegmenta C B ad E B, quæ circa angulum ſunt, reciprocè proportionales eſſe. Quoniam recti A C B, G E B anguli ſunt æquales, communis autem eſt A B G triangulorum A B C, G B E, reliqui itaque B A C, E G B æquales erunt, per corollariũ 32 primi. Aequiangula igitur ſunt A B C & G B E triangula: circum æquales igitur angulos latera proportionalia, A B ad B C, ſicut G B ad B E, per 4 ſexti. Viciſſim igitur erit A B ad G B, ſicut C B ad E B, per 16 quinti. Si duæ itaque lineæ rectæ, &c.

PROPOSITIO XXXVII.

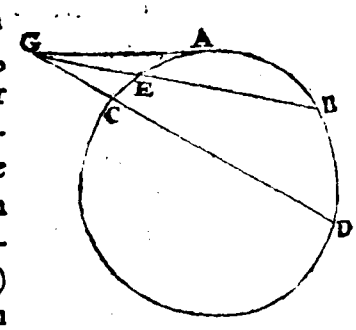
Si binæ rectæ in circulo seſe secuerint, vnius sectiones ad alterius sectiones reciprocè proportionales exiſtunt.



In circulo A G B binæ A B G D rectæ seſe secent in E: Dico esse sicut A E ad E D, sic reciprocè G E ad E B. Quoniam(per 35 tertij)quod sub A E E B, æquum est ei quod sub G E E D rectangulum, sed æqualium parallelogrammorum rectangulorum reciproca sunt latera circum æquales angulos,per 14 sexti. Erit igitur A E ad E D, sicut G E ad E B,reciprocè,per secundam diffinitionem sexti. Si itaque binæ,&c.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si à dato extra circulum signo in circuli circunferentiam cauam binæ rectæ lineæ in plano ducantur,ipsæ suis partibus extra circulum sumptis reciprocè proportionales exiſtunt:& inter totam & exterius segmentum media proportionalis,est quę à signo ducta circulum tangit.

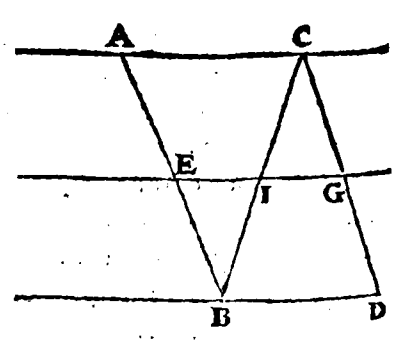


Proponatur circulus A B D signum verò G,à quo in circunferentiam cauam cadant binæ rectæ G B, G D, circulum secantes in E & C, sitq; recta G A tangens circulum in A:Dico lineas esse adinuicem G B, ad G D reciprocè, sicut earum partes extra circulum sumptæ G C ad G E. Quoniam(per corollarium 36 tertij)rectangulum sub G B G E comprehensum est æquum rectangulo sub G D G C cõprehenso, erit (per 14 sexti) reciprocè, sicut G B ad G D, sic G C, ad G E, sunt enim latera circum æquales angulos: Dico insuper inter G B & G E, vel inter G D & G C mediam esse proportionalem rectam G A tangentem. Cùm enim sub G B G E comprehensum,æquum sit ei quod à recta G A fit quadrato,per 36 tertij, sequetur inter extremas G B G E mediam esse G A tangentem,per secundam partem decimæseptimæ sexti,cùm ipsæ G B, G A, G E, sint proportionales. Similiter ostendetur de rectis G D G C & quibusuis aliis,per eadem. Si igitur à dato signo in circuli,&c.

Plures aliæ insuper possunt addi hac methodo demonstrationes, sed de his hactenus sufficiat.

PROPOSITIO XXXIX.

Si binæ rectæ à parallelis rectis secentur, ab eisdem in eadem rationes secantur.



Binæ A B & C D rectæ secentur à parallelis A C E G & B D in A, E, B & C, G, D signis. Dico rectas A B & C D secari A E ad E B vt C G ad G D. Iungatur C B secans rectam E G in I. Quoniam per 2 huius est A E ad E B sic C I ad I B: sicut autem C I ad I B, sic est C G ad G D ex eadem: Erit itaque, per 11 quinti, A E ad E B sic C G ad G D. Si igitur binæ rectæ à parallelis rectis secentur, ab eisdem in eadem rationes secantur.

COROLLARIVM.

Si recta linea inter parallelas secuerit rectas à parallelis sectas, in easdem rationes, ipsa parallelis parallela erit.

Nam si E G secuerit A B & C D proportionaliter, ipsa similiter secabit C B vt patuit: quare E I vel I G reliquis A C & B D est parallela per 2 huius.

IN SEPTIMVM, OCTAVVM ET NONVM EVCLIDIS, PROOEMIVM.

GEOMETRIAM *liberarum artium ampliſsimam & præcipuam edocturus Euclides, eius facultatem in vtraſq; dilatari quantitates ſupponit, in eas ſcilicet quæ rationem ſiue habitudinem habent numerorum, quas inter ſe commenſurabiles aliquando vocabimus: & inſuper in eas quæ inter ſe nullo numerorum reſpectu copulantur, quas incommenſurabiles dicemus. Magnitudinum autem commenſurabilium ſiue numererum reſpectum habentium intelligẽtiam præſtare cupiens, haud ſanius quàm per numerorum obſequia id exequi potuit, vt præciniuimus proximis quinto & ſexto, partes ſcilicet geometricas à ſuis totis confusè detractas per multiplicationem à numeris ſubſuratam, qua ratione ſuis totis copulentur lucidius eum expoſuiſſe. Nimirum per eam multiplicationis arithmeticæ legem geometricis quantitatibus adaptatam, alteram geometriæ partem edocturus, eam ſcilicet quæ operationes habentes numerorum rationem cõtinet, quarum quidem cognitionem, vt latius diſcentibus eroget, his tribus ſequentibus libris, quæ ex arithmeticis elementis, huic operationum generi deſeruire opinatus eſt, exegit principia, vt tandem cognitis inter ſe numerorum habitudinibus, eoſdem quantitatum (numerorum affinitatem ſeruantium) noſcamus adeſſe reſpectus, qui quidem ob numerorum diſcretam & intelligentiæ familiarem naturam, non minus quàm ipſi numeri diſcentibus familiares ſeſe offerent. Et demum prælibata commenſurabilium intelligentia, incommenſurabilium notitiam (cùm maximè ad eam ventum ſit) faciliùs adaperiat, illud equidem decimo libro hos tres proximè ſequenti efficiet. Quæ igitur his ſeptimo, octauo, & nono præponit elementa, non pura arithmetica eſſe cenſeamus, ſed quandoque geometrica, quandoque verò arithmetica, geometriæ tamen obſequio deſponſa: ea namque de cauſa ſumpſit numerorum leges, tantùm ſuis quantitatibus commenſurandis ac deſignandis neceſſarias. Non ideo volumus lectorem arbitrari, nos arithmeticam ſub geometria confundere, numerus namq; tantùm ſolis quantitati non accommodatur, ſed pluribus alijs exiſtentijs, quas geometria minimè complectitur, & idcirco geometriam complecti arithmeticam non dicemus, ſed ea duntaxat quæ ſibi*

ſibi ex arithmeticis vtilia perſpexerit angariare, obſequia fatemur, reliquas verò geometricæ ditioni nulla arte obnoxias arithmeticæ facultates eſſe conſtabit. Vt autem quam legem incommenſurabilibus quadam arte proportionandis imponat numerorum diſcretio, dicamus, per commenſurabilium methodum, ab ea numeri parte ordiemur, quæ ſola geometricam ſectatur naturam, ob indiuiſibilem ſuæ magnitudinis compactionem. Hacq; via futuræ illæ magnitudines geometrica natura continuæ ſiue ita compactæ, quòd abſque arithmeticarum diſcretionum ſubuentu confuſionem pariant, & diſcentibus penitus denegent intelligentiam, facilitate quadam percipientur. Tum maximè cùm arithmeticæ exequias numeris diſcernentibus in continuas quantitates confuſas, proferemus, quas licet numeris ſignificemus, non tamen hi ſignificantes numeri vera numerorum denominatione donari poſſunt, ſed hi tantùm qui in numeros quantitates ſignificantes arithmeticas exercent operationes, verè arithmetici nuncupandi ſunt. Cùm itaque quantitates numeris ſignificabimus, inter eos numeros omnes numeri partes recipiemus, eò quòd omnis quantitatis pars ſit quantitas, ſi verò operationes ſeu arithmetices exequias ſignificemus numeris, tum ſolos numeros diſcernentes, numerorum appellatione ſuſcipiemus, vnitatem verò ab his excludemus, eò quòd ea ſit continua, nullámque ſignificans diſcretionem, cuius naturam exponentes ſic eam diffiniendam eſſe ratiſumus.

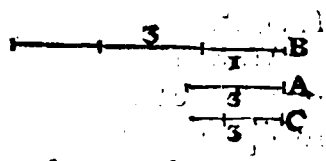
EVCLID

EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER SEPTIMVS.

DIFFINITIO I.

VNITAS est qua vnumquodque eorum quæ sunt, vnum dicitur.

Quoniam arithmeticorum numerorum obsequium multis aliis præter geometriam conuenire diximus, quæ tractanda suscipimus, ex arithmeticis elementis sumpta in quantitatum denotandarum auxilium implorabimus. Vnitatem ergo diffiniemus esse eam significationē, qua siue secundum quam omnium existentium vnumquodque, vnum dicitur. Quia tamen quantitati illud accommodamus significatum, vnum illud idem ita continuum, & compactum intelligemus, vt secundum eam vnitatem nulla in eo concipi possit scissura aut sectio, sed vnica quantitas continua geometriæ legibus obnoxia, scilicet quamdiu aliqua quantitas vnitate denominabitur, eam insolutam haberi existimemus. Quod si ea quantitas vnitate significata (non autem ipsa vnitas) per augmenti vel decrementi multiplicationem alteranda sit, non vnitatem, sed quantitatem vnitate significatam alterari concipiemus. Cùm itaque vnitas per se diuidi aut multiplicari non possit, substantiam denotat, nec sectam, nec sibi additis partibus compositam constare, sed ita alterandam vt facta illico ipsius solutione, aut per suiipsius additionem multiplicatione, vnitatis nomine priuetur, discretæ quantitatis susceptura nomenclaturam, quæ quidem numerus dicetur, siue per frequentes significatæ substantiæ sumptiones, siue per plures eiusdem integræ substantiæ factas solutiones productus fuerit. Hac igitur de causa videmus vnitatem frangi non posse. Cùm enim significata per eam res frangitur, eo ipso vnitatis nomen illa relinquit, statim numeri suscipiens denominationem, rursusq; eiusdem numeri pars minima vna dicetur. Similiter nec multiplicem esse: vbi namque multiplicis induit speciem, illico numeri non vnitatis nomine denunciatur, vt exemplo A magnitudo vnitate denominata per suiipsius frequentem sumptionem multiplicem efficit B, à ternario numero denominatam, non ab vnitate. Similiter eadem A vnitate denominata, per frequentem eius solutionem producente C discretam magnitudinem, videmus ç vnitatis priuari nomine, ac statim numeri nomine denunciari (nēpe tribus tertiis) qui rursus minimam partem vnum denominat tertium, ab vnitate dictum, haud secus in reliquis. Si itaque vnitas sit magnitudo omnium magnitudinum, minima dici poterit, nulla arte secanda, non igitur vnitatis fractiones dicentes vnitatem, sed per eam significatam quantitatem frangi existimemus: in eas quidem partes quarum quælibet dicetur vna. Hinc patet quod diximus secunda quinti diffinitione, tot posse dari numeros quantitatem vnitate significatam secantes, quot & multiplicantes. Qui licet iidem sint numeri, diuersis tamen functuri muneribus, alij quidem



dem quãtitatis augmentum, alij verò eiuſdem decrementum proferent, oppoſitis autem operationibus. Idem ferè in rationum denominationibus dicemus, rationem ſcilicet æqualitatis ab vnitate denominari. Inæqualitatis verò tam maioris quàm minoris rationes per numeros exprimi: quinetiam æqualitatis rationem vnitati plurimum aſſimilari. Cùm enim duorum terminorum ſit vna & eadem quantitas, ea rationis denominatio per vnitatem exprimitur, componendo, fecando, ſiue multiplicando, quemadmodum vnitas per ſe multiplicata; vel ſecta, ſeipſam producit. Similiter & æqualitatis ratio, per ſui denominationem ducta, nihil aliud profert: inæqualitatis verò ratio à numeris expreſſa ſcilicet maioris inæqualitatis à numeris augmentum exprimentibus. Minoris verò inæqualitatis à numeris decrementum denotantibus, per multiplicationem aliam generat rationem: veluti & numeri per quos exprimuntur, vt vidimus quinta diffinitione ſexti. Rationes quidem extremorum ex compoſitione rationum mediorum procreari, & decima diffinitione quinti, binas æquales rationes duplam, tres triplam, & quatuor quadruplam, &c. earundem componere rationem. In hoc autem conuenit vnitati æqualitatis ratio, quòd ſecta vel multiplicata, æqualitatis relinquit nomen veluti & vnitas. Quæ cùm ſit tantùm ſuæ quantitatis denominatrix, vbi ſecatur quantitas, ab ea recedit (vt diximus) ipſius vnitatis denominatio, adueniente quidem numero ſectiones denominante, aut certe repetitiones. Si quidem à maiori numero denominatur ratio, tum plus ea ab æqualitatis recedit ratione, ſiue in augmentum, ſiue in decrementum pergat, ſicut & numerus quo maior fit, eò plus ab vnitate recedit, licet in augmentum aut decrementum vnitatis ſignificatum dirigat. Vnitatem igitur nuſquam ſecari fatebimur, ſed tantùm quãtitatem vnitate denominatam: & proinde per antiquum illud ſoluemus obiectum, omnem quantitatem ſcilicet infinitè ſecari poſſe. Nam accedente ſectione, quantitas vnitatis illico nomen relinquit, non igitur ſecatur vnitas, ſed tantùm per vnitatem ſignificata quantitas.

Cæterùm vt qua lege vnitatem ſuſcipiat Geometria (numeros recipiens) enarremus, Geometriam (vt ſæpius diximus) numeros in elucidandarum ſuarum magnitudinum quantitatem conuocaſſe credemus: quorũ quidem numerorum vſum bino reſpectu ſuſcipit, alterum quo propoſitarum magnitudinum quantitates diſcernant. Reliquum verò quo diſcretas numeris illis ſignificatas ita alterent impenſa in illas operatione, vt inde facta earum quantitatum comparatione, affinitatis eluceſcat intelligentia. Quare numeros propoſitam quantitatem ſua diſcretione ſignificantes, geometricos nempe geometricis quantitatibus coniunctos dicemus. Reliquos verò quãtitates numeris ſignificatas, arithmeticis legibus alterantes, augmento quolibet aut decremento, arithmeticos dicemus numeros. Quia verò quamlibet minimam quantitatis partem ſub quantitatis nomine ſuſcipit Geometria, ſequetur vnitatẽ (numeri partem minimam) ſub numeri nomine, geometricos ſuſcipere numeros, eo quòd quantitatem denotet.

Arithmetici verò numeri quantitatem non reſpicientes, vnitatem inter numeros minimè ſuſcipiunt, cùm ea non ſit vnitatum multitudo. Et hac de cauſa numeros operationes arithmeticas exercentes, in numeros quantitatem ſignificantes, nuſquam numerorum nomine vnitatem ſuſcipere concludemus. Binas illas igitur numerorum acceptiones, quarum prior vnitatem ſub numeri denominatione ſuſcipit, poſterior autem minimè, conſiderabimus his tribus numerorum libris, paralogiſmos euitantes: vt autem qui ex diffinitionibus numeri ſingulis diſciplinis vt plurimum adhæreant excutiamus, hoc eſt, qui geometriæ adhærentes vnitatem ſuſcipiant. Qui verò arithmeticen ſectantes eandem reſpuant: dicemus vnitatem, totum, partem, planum, ſolidum, quadratum, cubum, proportionales, ſimiles planos, aut ſolidos, geometricos iure vocari numeros, cùm aliquid præ ſe ferant quantitatis, vel dimenſionis quæ quantitati præcipuè conuenit. Numerum verò, &

partes,

partes multiplices,pares,impares,primos,minimos,compoſitos,perfectos,menſores, arithmeticos eſſe puros, cùm non quantitati propriè adhæreant, ſed potius arithmeticas operationes in numeros quantitatem ſignificantes exerceant. Quare in theorematum intelligentia hos veluti agentes, illos verò patientes,vt plurimum comperiemus numeros. Quia verò (vt diximus)vnitas numerorum quantitates ſignificantium nomine venit. Illi etenim non numerum ab vnitatum multitudine ſumunt,ſed potius numerum quantitatem diſcernentem, & ſignificantem conſiderant. Arithmetici verò numeri,puram actionem ſeu operationem in numeros quantitatum diſcretores explendam exercentes, vnitatem nulla arte recipere poſſunt. Cùm hi alterationem eorum in quos operantur exquirant,quod vnitatis naturæ ſummopere obſiſtit: ea namque æqualitatem ſolam, nullum verò augmentum vel decrementum ſua actione prouocat, nec proinde alterationem. Quare inter numeros alterantes eam recipi poſſe non arbitrabimur, ſed tantùm inter numeros alterandos ſiue quantitatem ſignificantes,eius proptium haberi ſitum, cùm quantitas cuiuis alterationi perpetuò ſit obnoxia, augmento ſcilicet ac decremento. Cùm autem dixerimus vnitatem eſſe numeri materiam, illud animaduertamus oportet, vnitatem eius naturam induere, cui confertur numerus, veluti ſi per numeros lineæ longitudinem exprimere velimus:ſingulas vnitates naturam longitudinis tantùm habere, & latitudine ſublimitatéque priuari, iuxta lineæ naturam, cui adaptatus eſt numerus, quæ quidem latitudine ſublimitatéque priuatur. Si verò ſuperficiem numeris metiri velimus,ſingulas eius vnitates ſuperficiei more longas & latas eſſe, profundas verò nequaquam. Si quidem ſolidum numeris metiamur,eorum vnitates tribus menſuris,longitudine, latitudine,ac profunditate (ſolidorum naturam ſectantes) ornari debere credemus,vnitates igitur naturam hypotheſis ſumptæ, cui adaptantur numeri, ſemper ſequi debent. Eſt enim vnitas diſcretio partis ſubſtantiæ per numerum ſignificatæ. Quia itaque in figuris regularibus vnitates numerorum eas metientium, naturam figuræ ſequuntur: non mirum ducemus vnitatem quandoque dici numerum planum,numerum quadratum, numerum ſolidum, hoc eſt, figuram planam,quadratam, vel ſolidam ſignificantem,iuxta quaſuis hypotheſes ſumptas numeris coaptatas quantitates ſignificantibus. Quare ea ad numeros rationem plani ad planum,quadrati ad quadratum,cubi ad cubum,ſolidi ad ſolidum habere poterit, cùm ſingulorum ſpecies ſibi poſſit aſſumere. Et ideo inter numeros,inter quos non recipitur vnitas(ſcilicet arithmeticos ſeu operantes) nec recipiemus rationem multiplicem in minimis numerorum partibus,nempe ea ad vnitatem minimas eius partes collocat,quam non recipiunt arithmetici ſeu operantes numeri. Reliquæ verò cunctæ rationes,in numeris minimas earum partes ſeu terminos conſtituunt,nuſquam ad vnitatem properantes. Si igitur in theorematum diſcuſſione proponantur primorum aut minimorum numerorum obſequia rationes producentia, multiplices rationes neutiquam inter eos ſuſcipi arbitrabimur: ſed ſi eundem effectum illis per minimas partes conuenire oſtenſuri ſumus, illud particulari demonſtratione modico exequemur negotio. Quæ etenim primis ac minimis conueniunt numeris,non omnia vnitati,& numero conuenire putabimus,& è contra. Qui autem ſint primi & minimi poſthac dicturi ſumus, vt quæ præmiſimus faciliori percipiantur intelligentia,cognitis terminorum diffinitionibus.

DIFFINITIO II.

Numerus autem eſt ex vnitatibus compoſita multitudo.

Huius expoſitio à priore deducitur. Quemadmodum enim vnitas ſubſtantiam quantam,continuam, inſectam (vt diximus) denotat, ſic numerus diſcretionem ſignificatæ ſubſtantiæ,quam per vnitatum repetitionem conſequutus eſt,in tot partium multitudines, quot vnitatum repetitionibus idem componitur numerus,ſectam eſſe

ctam esse denotabit. Quarum quidem partium singulæ eam quam diximus circa vnitatem naturam seruabunt. Sicut igitur vnitas, vnitam & continuam denotat suapte natura quantitatem, sic numerus discretam & sectam per vnitatum multitudinem referet eandem, siue quantitati, siue operationi (vt diximus) destinatus fuerit.

DIFFINITIO III.

Pars est numerus minor numeri maioris, quando metitur maiorem.

DIFFINITIO IIII.

Partes autem, quando non metitur.

Cur diffiniens Euclides partem libro quinto partes non diffinierit, id potissimum causæ dicemus esse, quòd scilicet libro quinto elementa geometrica præcipuè tractans, partem apud geometras tantùm recipiat, nō autem partes, sub vnius quantitatis denominatione comprehensas, eo quòd nihil in geometria distributum recipiatur: Quia verò arithmetices ducimus principia (cuius verum obiectum est distributio, seu discretio) partem à partibus segregantes dicemus, Partem in numeris eum esse numerum qui à maiori sumptus ipsum præcisè sua repetitione componit, & ad numerum eam seruat rationem quam vnitas. Partes verò eum vocamus numerum minorem à maiori sumptum, qui sua frequenti repetitione maiorem præcisè non constituit, sed quandoq; ab eo deficit vel eundem excedit. Hic namque numerus ad maiorem semper rationem habet quam numeri inter se, non autem eam quam vnitas ad numerum. Exemplum partis. Ponemus tria partem esse quartam quidem numeri 12, & 2 quintam ipsius 10. Partes autem vt 4 numeri 10 duas quintas, & 2 ternarij duas tertias esse. Has igitur binas diffinitiones descripsit Euclides, vt sequatur potissimam illam rationum quæ inter numeros concidunt diuisionem. Quæ diuisio in rationem numeri ad numerum & vnitatis ad numerum fit, quarum illa generalior hac semper habetur: geometræ verò binas illas rationum acceptiones sub vnicæ partis ad totum ratione complectuntur, & præter has aliam quam partis ad suum totum incommensurabilis frequenter apponunt, quæ ab arithmeticis discretionibus penitus aliena reperitur. Partis igitur ad totum is erit respectus, qui à continua in discretam quantitatem fertur, hoc est, vnitatis cōtinuè ad numerum qui semper discretus est. Partium verò ad totum respectus quilibet is erit, qui minoris numeri ad maiorem concipietur, siue qui inter binas discretas quantitates cadet.

DIFFINITIO V.

Multiplex est numerus maior minore, quem metitur minor.

Quoniam hæc vox multiplex arithmetico tantùm conuenit significato (vt perfectè docuimus secunda diffinitione quinti) geometras dicemus multiplicium obsequium ab arithmeticis sumpsisse. Quippe qui continuas nulla discretione quantitates signare possunt, ab arithmeticis (quorum proprium est discernere) multiplicandi methodum adepti sunt. Quare cùm soli arithmeticæ conueniat multiplicatio, eandem his arithmeticis principiis obseruari dicemus, quam apud geometrica præcepta ab arithmeticis sumptam diffiniuimus quinto libro. Multiplex itaque numerus erit maior quem metitur ita minor, vt proposita multiplicationis specie inter eos seruata, minor sua repetitione maiorem præcisè restituat. Quæ quidem minoris multiplicatio maiorem restituens, triplex ostensa fuit, scilicet quæ augmentum multiplicat significatæ quantitatis per numeros, quæ insuper decrementum eiusdem multiplicat, & quæ denique vtrumque augmentum & decrementum eiusdem quantitatis per numeros expressè multiplicat. Id equidem qua-

uis via

uis via fit ſumpto minore per vnitates numeri multiplicantis, vt reſtituatur maior, iuxta diffinitionem 16 huius, quam exponentes hanc multiplicandi formam exemplis edocebimus. Sed vt quibus notis deſignentur numeri augmentum vel decrementum multiplicantes, intelligamus, ab arithmeticis practicis ſumemus notas: ſcilicet cùm figuræ ſimplices & abſolutæ proponentur, vt 3 4 12 3 7, &c. illæ augmentũ deſignabunt: cùm verò ſuperpoſita virgula deſcribentur, vt $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{17}$, illæ decrementum præ ſe ferent, quæ ab arithmeticis fractiones nuncupantur, ſcilicet tertium, quartum, duodecimum, trigeſimum ſeptimum, &c. Si quidem vtriuſque, augmenti ſcilicet & decrementi, actionem deſignare fuerit opus, ab vtroque ordine figuras ſumemus, vt 4 & $\frac{1}{4}$ vel 6 & $\frac{1}{6}$, &c. Nam qui ſine virgula aut virgulæ ſuperponitur, augmentum denotat, qui verò ſupponitur, decrementum, vt hac lege mixta abſoluatur multiplicatio.

DIFFINITIO VI.

Par numerus, eſt qui bifariam diuidi poteſt.

DIFFINITIO VII.

Impar verò, qui bifariam diuidi non poteſt, vel qui vnitate differt à pari.

Parem numerum diffinit Euclides, eum eſſe qui bifariam ſecari poteſt, quo perſpicuè oſtẽdit quod diximus prima huius diffinitione, vnitatem ſcilicet ſecari non poſſe. Nam ſi ſecaretur vnitas, quilibet numerus per hãc ſextam diffinitionem par eſſet, ſimiliter & nullus impar eſſet, conceſſa diuiſione vnitatis, quod eſſet abſurdum; non igitur vnitatem ſecari fatebimur. Par igitur numerus is erit qui ex binis vnitatum ordinibus numero æqualibus conſtabit, impar verò qui in duos vnitatum ordines numero æquales ſecari non poteſt: iſq; ſemper vnitate differt à pari, ablata quidem vel addita vni ordinum vnitate. Hinc ſequetur aliam eſſe numerorum, aliam rerum ſignificatarum diuiſionem. Licet enim impar numerus bifariam ſecari non poſſit, tamen ab impari numero denominata quantitas bifariam ſecari poterit, ac inſuper variis ſecandi formis per numeros exprimi non valentibus: quæ autem numeris exprimuntur ſectiones, illæ ſingulæ rurſus ab vnitate denominandæ erunt, inſecta quidem ac continua.

DIFFINITIO VIII.

Pariter par numerus eſt, quem ſolus par metitur numerus.

Huius eſt facilis intellectus: cùm enim nullus alius à pari aliquem numerum metitur, is menſus pariter par dicetur, vt 2, 4, 8, 16, &c. quotlibet poſt binarium dupli, vt oſtendemus 33 noni theoremate.

MONITVM.

Non arbitramur Euclidem hanc iuxta Theonis tradita ſcripſiſſe. Pariter parem ſcilicet eum eſſe, quem par per parem metitur numerum: nam hæc diffinitio ob nimiam generalitatem conuerti cum ſuo diffinito nequit. Omnis etenim numerus, quem par per parem metitur, non erit neceſſariò pariter par, vt 24, quem 4 per 6 metitur, & infiniti ſimiles, quare mutare cogimur dictiones in eam ſententiam, quæ trigeſimætertiæ propoſitioni noni conueniat. Quæ quidem pariter paris naturam ſatis ſupérque explicat.

DIFFINITIO IX.

Pariter autem impar eſt, quem impar tantùm per parem metitur numerum.

Idem intelligit Euclides dici pariter imparem, & impariter parem numerum, eum quidem quem par quinis per imparem, aut impar tantùm per parem metietur numerum (quæ ad idem redeunt) vt 6, 10, 30, &c. quos pares metientes per imparem numerum repetunt, vel ſoli impares per parem.

MONITVM.

Idem huic deficiebat quod & præcedenti octauæ, ſcilicet excluſiua (*tantùm*) vt eam efficeret, cum diffinito conuerti. Non omnis enim numerus quem par metiens per imparem metitur, erit pariter impar, aut impariter par, quod idem ac vnum eſt: nec conuerteretur, ſi hæ ſint voces (*cum ſuo diffinito*) ſed in ſequentem diffinitionem caderent binæ præcedentes. Quare neceſſariò apponendæ fuerunt hæ voces, *in imparem tantùm, per parem eum metientem.*

DIFFINITIO X.

Pariter par & impar eſt quem par per parem & imparem numerum quandoque metitur.

Numerum pariter parem & imparem dicit eum, quem aliquis par per parem, alius verò per imparem numerum metitur, vt 12, quem 2 per 6 & 4 per 3 metiuntur, & 20, 24, & ſimiles.

MONITVM.

Huic diffinitioni hæſit Theon, quam oblitus ſuo Græco exemplari, & eam addere volens Zambertus, à vero eius ſenſu decidit, & in alteram præcedentis partem incidit. Quod autem eam exquirat vera methodus, oſtendetur 35 propoſitione noni, quæ huius verum intellectum planè demonſtrat, quam ideo huic ſuo loco apponendam eſſe cenſuimus.

DIFFINITIO XI.

Impariter verò impar numerus eſt, quem impar tantùm metitur numerus.

Hæc ſimiliter octauæ diffinitioni opponi videtur, ſicut & opponuntur diffinita: nam ſicut pariter par à ſolo pari mẽſus eſſe patuit, ſic impariter impar is erit, quem ſolus impar metietur, vt 15, quem 3 per 5 metietur, & 21, 25, & reliqui huiuſmodi, à nullo pari menſi.

DIFFINITIO XII.

Primus numerus eſt, quem ſola vnitas metitur.

Primum poſtmodum diffinit numerum eum eſſe, qui nulli quatuor præcedentium diffinitionum ſubiicitur: omnes enim in alios diuiduntur numeros, hic autem primus in ſolas ſecatur vnitates, nullas alias ab vnitatibus habens partes, vt 2, 5, 7, 11, 13, &c.

DIFFINITIO XIII.

Primi adinuicem numeri ſunt, quos ſola vnitas communi menſura metitur.

Primos adinuicem numeros eſſe dicit eos, quorum nullus numerus eſt pars cõmunis, ſeu qui nullam habent communem menſuram præter vnitatem, vt 11 ad 13. cùm ſint primi ſinguli, fortius adinuicem primi erunt, ſed 15 ad 22 & 9 ad 14, licet non ſint ex ſe primi, tamen quia nullus numerus vtroſque metitur, ſed tantùm ſola vnitas, ipſi ideo primi adinuicem dicentur.

MONIT.

MONITVM.

Memorandum eſt quod diximus prima & quarta huius diffinitione, ſcilicet aliã eſſe vnitatis ad numerum, & numeri ad numerum rationem: cùm enim vnitas ſit pura geometrica magnitudo, ea ad numerum rationem habet, quam quantitas continua ad diſcretam, numerus verò ad numerum eam habet rationem, quam quantitas diſcreta ad diſcretam, & hæc quidem ratio arithmeticis propria eſt magnitudinibus.

Cùm autem rationem tertia quinti diffinitione in quinque maioris & minoris inæqualitatis ſpecies diuiſerimus, omnes autem eas rationes (dempta prima & eius conuerſa, ſcilicet multiplici) reſpectum præ ſe ferre quem numerus ad numerum, non autẽ quem vnitas ad numerum dixerimus: Multiplicem verò ac eius conuerſam rationem tantùm denunciare, quam vnitas ad numerum, & è conuerſo quam numerus ad vnitatem: & proinde, vt diximus, eam quam continua ad diſcretam eam repetentem quantitatem habet, vel diſcreta ad continuam, fatebimur in quauis ratione multiplici, ac eius conuerſa, vnum terminum ſemper metiri alterum, & igitur numeros multiplicem rationem habentes, nuſquam adinuicem primos eſſe, cùm ſemper minor maiorem & ſeipſum metiatur, vtroſque itaque metitur, non igitur primi erunt aliqui numeri rationem habentes multiplicem. Qui verò reliquis rationibus copulantur, omnes rationem numerorũ habent, quare appellatione numerorum primi adinuicem eſſe poſſunt, nunquam enim ad vnitatem (quæ non eſt numerus) deueniunt, veluti multiplices ſemper ad eam tandem concidentes. Ea namque ratio non eſt pura numerorum, cùm alter terminorum ſit quantitas continua, quare nec minimi eius rationis numeri dici poſſunt, eo quòd non ſint numeri, ſed alter eorum eſt vnitas, ſi ad minimas numerorum partes decurrant, veluti in tripla ratione 12 ad 4 reperiemus primos non eſſe adinuicem: nam 4 metitur ſeipſum & 12, quare vtroſque metitur. Quod autem ad minimos numeros hæc ratio non perueniat, patet ſi ſuſcipiamus 3 ad 1, videmus triplæ rationis minimas eſſe numerorum partes, non tamẽ numeros, eo quòd alter ſit vnitas, in reliquis verò rationibus ſecus accidet: omnes enim ſunt rationes numerorum. Nam ſemper minor ſit maioris partes, non autem pars, quæ vnitatis locum obtinet, ſicq; minimè eorum partes ſunt ſemper numeri. Cùm itaque de primis adinuicem aut alicuius rationis minimis numeris loquetur Euclides, nos memores eſſe oportet, numeros rationem multiplicem habentes, in eis non comprehendi, cùm non habeant veram numerorum rationem, hoc eſt, diſcretæ quantitatis ad diſcretam, ſed ſanius continuæ ad diſcretam, aut diſcretæ ad continuam, maximè cùm ad minimos perueniet, eo quòd ſemper vnitatem pro altero terminorum reperiat. Quod ſi de rationibus in genere, non autem primorum, aut minimorum numerorum dixerit, ibi ſimul rationes multiplices cum reliquis contineri credamus demonſtrandas (vt prima huius diximus diffi. in fine) tam diſcretorum quàm continuorum.

DIFFINITIO XIIII.

Compoſitus numerus eſt, quem numerus aliquis metitur.

DIFFINITIO XV.

Compoſiti adinuicem numeri ſunt quos aliquis numerus communi menſura metitur.

Compoſitum vocat numerũ, qui ex alicuius numeri frequenti ſumptione conſtat: cùm autem ea ſumptio frequens per numerum alium exprimatur, ſequetur numerum compoſitum conſtare ſemper ex duorum facta multiplicatione adinui-

cem. Compoſitos ſimiliter vocat numeros adinuicem eos, qui aliquem numerum pro communi eorum menſura ſuſcipiunt, qui quidem communis menſor, variis ſuiipſius ſumptionibus,varios ſæpius producet, æqualibus verò æquales compoſitos, vt 15 eſt compoſitus,eo quòd 3 per 5 repetitus eum producat, 8 verò ad 12 adinuicem compoſiti dicentur,eo quòd communem menſorem habeant 4 numerum, 9 autem ad 15 habent 3, & 10 ad 35 habet 5, communem menſuram. Non tamen ſequetur idem in primis numeris quod in compoſitis: nam ſi duo ſint compoſiti adinuicem, & quiſque eorum compoſitus erit, quòd ſi duo primi adinuicem fuerint, non ſequetur ideo eos eſſe ſingulos primos. Nam hi per priuationem, illi verò per habitum qui plus naturæ conuenit ſuas conſequuntur ſpecies.

DIFFINITIO XVI.

Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot ſunt in ipſo vnitates, toties componitur multiplicatus, & gignitur aliquis.

Quoniam analoga prius diſtinguenda quàm diffinienda eſſe præcipit Ariſtoteles, antequam quid ſit numerum multiplicare alium numerum dicamus, multiplicandi ſpecies diſtinguemus, eas maximè quæ quantitati(cuius præcipuum agimus negotium) conueniunt. Omnis itaque multiplicatio aut fit ad quantitatem propoſitæ magnitudinis augendam,aut ad eiuſdem magnitudinis quantitatem minuendam,aut equidem ad partim augendam, partímque minuendam. Sed quia hæc multiplicationum diſtributio paululum à vulgari diſtat, eam ex eadem ſumere nõ dedignabimur, quoniam diximus libro quinto multiplex diffinientes, nos hoc ſeptimo oſtenſuros varias illas multiplicium leges ab Euclide in obſequium quãtitatum continuarum elucidandarum imploratas extra communem arithmeticorum vſum. Id animaduertendum obteſtamur. Euclidem ſola multiplicatione his tribus numerorum libris ſua quæque prælibare axiomata. Ea namque ſola apud arithmeticos infinitarum operationum comperta fuit actio: quippe volens non minus Euclides quantitatum decrementa (quæ arithmetici diuiſione ſeu partitione exequuntur) peragere æquè vt incrementa, ab eiſdem multiplicatione contracta, vtramque ea ſola operationem concipiens,huius ſpecies in triplam multiplicandi formam diſtribuit, in prio rem ſcilicet, quæ propoſitæ quantitatis incrementum multiplicat: ſecundam quæ propoſitæ decrementum multiplicat: ac poſtremam quæ eiuſdem quantitatis propoſitæ partim incrementum, partim decrementum multiplicat. Harum trium ſpecierum operationes ab arithmeticorum communi praxi commodabimus: conuertentes quæ ab arithmeticis in partitionem,diuiſionem,ſeu fractarum partium vſum, veniunt,in decrementi multiplicationem, quæ vnum idémque reſonant,ac præter hæc infinitum operandi exequium ſoli multiplicationi inter omnes arithmeticas operationes proprium. Numerorum inſuper picturam arithmeticorum more ſumentes, ſcilicet numeros quantitatem augentes,ſimpliciter ſtatuemus,vt 3. 4. 7. 10. 25. 34, &c. Numeros verò quantitates minuentes,ſiue decrementum ſignificantes more fractorum in idem opus ab arithmeticis practicis depictorum, ſcilicet $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{7}$, $\overline{10}$, $\overline{25}$, $\overline{34}$, &c. virgula ſuperpoſita decrementum ſignificante proponemus. Mixtos verò cum vtraque incrementum ſcilicet & decrementum petemus, vtraque forma deſcribemus ſcilicet $3\frac{\bar{1}}{\bar{4}}$, $4\frac{\bar{1}}{\bar{1}}$, $7\frac{\bar{1}}{\bar{4}}$, &c. vt libet expoſtulatos. Quare vt oſtendamus hac arte diffinitionem Euclidis ad futura rectè peragenda,his multiplicationibus niti,cœpta peragamus. Numerus igitur numerum multiplicare dicitur, quando quot ſunt in ipſo multiplicante vnitates,toties componitur, ſiue repetitur quantitatis per multiplicatum deſignatæ, augmentum, vel decrementum, & hac multiplicatione gignitur aliquis, qui ſcilicet illud augmentum vel decrementum exprimat, vt exemplo aperiamus.

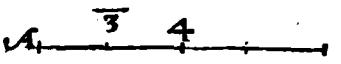
Numerus

Numerus A numerum B multiplicare dicitur, quando quot ſunt in ipſo A vnitates, ſcilicet 4, toties componitur ſiue repetitur numeri B multiplicandi, ſcilicet 3 augmentum, & gignitur aliquis C, hoc eſt, 12, qui quidem toties concipit in ſe multiplicatum B ſumptum pro numero quantitatem B ſignificante quot ſunt vnitates in ipſo A agentes in vnicam B quantitatem, ſcilicet quater cùm ſint quatuor. Quare 12 dicetur æquè ipſius 3 qua druplex incrementum, vt 4 agens quantitatis paſſiuè B quadrupla actio. Hac de re haud ſecus refertur numerus 12 productam quantitatem denotans, ad numerum 3 propoſitam ſimplicem ſignificantem, quàm numerus 4 agens ad eandem ſimplicem vnicam ac paſſiuam per ſuas vnitates ſumptam, vnde ſequitur hanc ſimplicem B pro vnitate à numero agente per ſuas vnitates repetitam, ſemper metiri maiorem à numero ſignificatam: nam vnitas numerum quemuis metitur. Hoc equidem exemplum in augmento multiplicando propoſuimus, ſequens verò in decremento multiplicando ſupponamus. Numerus ſimiliter A numerum B multiplicare dicitur (ſcilicet $\frac{1}{3}$ ipſum 6) quando quot ſunt in ipſo A vnitates, toties componitur ſiue repetitur ipſius B multiplicandi decrementum, & gignitur aliquis C, qui quidem fit ex triplo ipſius B (hoc eſt 6) decremento, ſcilicet 2 qui ipſius 6 eſt pars tertia, ſiue triplex decrementum per vnitates numeri A agentis detractum.

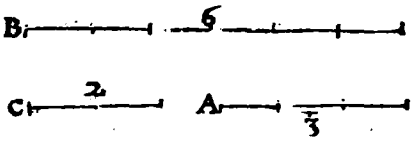
Tertiam multiplicandi ſpeciem ex binis prioribus compoſitam proponere poſſumus, ſcilicet eam, qua vtrumque multiplicamus, augmentum quidem propoſitæ magnitudinis, & decrementum: quod cùm ſimul ac ſemel fieri non poſſit, ſed diuerſis tantùm multiplicationibus, hanc multiplicandi ſpeciem, inter ſimplices collocare noluimus. Nam hæc binas efficit multiplicationes, quarum productas iungit magnitudines, vt ſi numerus 12 per 3 & $\frac{1}{4}$, hoc eſt, per numerum 3 augentem, & per $\frac{1}{4}$ minuentem multiplicari iubeatur, fient binæ multiplicationes, prior quidem 12 per 3 in augmentũ producet 36. Idem verò 12 per $\frac{1}{4}$ decrementum producet 3, quæ producta ſimul iuncta component 39 productum ex multiplicatione 12 per 3 & $\frac{1}{4}$. Quauis igitur multiplicatione productus, componitur ex ea multiplicati ſumptione, quæ fit per multiplicantis vnitates ſiue, in augmentum, ſiue in decrementum pergat. Cùm autem (vt ſæpius diximus) Geometria numeros tantùm accommodet ad diſcernendas magnitudines, quas poſtmodum commenſurabiles dicet, numerorum leges exponit, eas maximè quæ ſuis geometricis quantitatibus proprias fore exiſtimat: quare cùm multiplicandum hîc proponit aliquem numerum, illum tanquam vnitatem repetendam in augmentum, vel decrementum ſumit. Nam dicit illum ſumi per vnitates multiplicantis, eo quòd tanquam quantitas continua ſæpius repetatur, cuius intelligentia diſcretionis, à producto per numerum multiplicantem prodeat. Et igitur multiplex ſemper producetur maius multiplicato, ſiue maius efficiat augmentum, ſiue maius decrementum propoſito multiplicando fecerit. Cùm enim multiplicatio nec ſit numerus, nec per eum ſignificata magnitudo: ſed tantùm frequens illa repetitio, perſpicuum eſt omnem frequentiam repetitionis ſuſceptum augere negotium, & repetitum ſe ipſo non repetito ſemper maius eſſe, quod idem eſt quod & multiplex & ſimplicis repetitione compoſitum, & ideo ſemper maius ſimplici vel multiplicato, quare multiplicationem non magnitudini atribuemus, ſed eiuſdem augmento vel decremento.

Animaduertendum eſt tamen non quoſuis numeros ſe inuicem multiplicare poſſe, æquè in decremẽtum, vt in augmentũ, maximè cùm ſolo arithmetico more nullã quantitatem ſignificãtes ſumuntur, veluti 4 per 3 in augmentum poteſt duci

vt producat 12. Sed si 4 per 3 in decrementũ ducamus, non reperiemus 4 tertiam habere partẽ. Quare videretur hæc multiplicandi methodus in quibuſdam manca eſſe numeris. Ad hæc Euclidem numeros pro quantitatibus elucidandis tantùm non vt numerorum naturam propriam doceat ſumpſiſſe dicemus, ídque præcipuum eiuſdẽ fuiſſe ſcopũ credamus. Quilibet igitur numerus geometrię obſequio deſtinatus, quantitatẽ aliquam denotabit. Si itaque qua ternarij magnitudo A per ternarij vnitates decremẽtum petat, ea per numerum tertiam partem habentem ſignificetur. Per ternarium ipſius quaternarij augmento ducto, tum producemus 12, quæ quidem 12 ipſi A magnitudini accommodantes, reperiemus ipſam A magnitudinem vt ſignificantis numeri 12 triplex ſuſcipere decrementum per ⅓ ipſius 12 ſignatum ſcilicet 4, vt tandem dicamus qualium A fuit 12, eorum eiuſdem A ⅓ fuit 4. Sic itaque quælibet magnitudo per quomlibet numerum in decrementum duci poterit, cùm cuilibet magnitudini quilibet poſſit attribui diſcretor numerus, & quælibet magnitudo in quotuis ſegmenta ſit infinitè ſecabilis, eſt enim quantitas.



Cur autem hac multiplicandi lege, ab arithmetica praxi admodum aliena, quæ tantùm multiplicandum poſtulat augmentum, vtatur Euclides, ea eſt cauſa quam iam antea libro quinto diximus: quòd multiplicium naturam ſumpſit, ad quantitatum continuarum & confuſarum reſpectus mutuos indicandos. Qui quidem reſpectus eo more ſe habent, quo ſi prior poſteriorem multiplicet, poſterior priorem diuidit. Ideóque ſola multiplicatione vtitur Euclides, vtrumque abſoluens & multiplicandi & diuidendi negotium. multiplicans etenim augmentum multiplicat, multiplicans verò decrementum ſecat vel diuidit: vtrumque tamen productum multiplex vocat, vt oſtendimus decima diffinitione quinti, ſcilicet quemadmodum ratio ab 8 denominata tripla eſt, eius quæ à 2 denominatur, & maior, ſic ea quæ ab ½ denominatur, tripla erit eius quæ ab ⅛ denominabitur, & minor, cùm hæc decrementum, illa verò augmentum eadem petant multiplicatione facta per 8: quare Geometriæ numeros accommodantes aſpectemus oportet, multiplicantem numerum nullam præ ſe ferre quantitatis ſignificationem, ſed tantùm vnitatum frequentiam, multiplicatum verò & productum, ſemper quantitatem denotare, cui elucidandæ attribuuntur numeri. Et licet his tribus libris Euclides ſolùm de numeris diſponat, nihilominus concipere nos decet, eum ad quantitatum continuarum obſequium numeros tantùm referre. Quæ igitur theoremata ſuis Geometricis quãtitatibus ex arithmeticis ſubſurari valuit congruentia, ea his tribus libris proponet, reliqua puris tantùm arithmeticis relinquens geometricis documentis non eouſque neceſſaria. Sed quia multiplicandum decrementum quibuſdam difficilius erit multiplicando augmento, proponamus exemplum, ac à multiplicationis exemplo ordiamur, dicamúſque à multiplicatione B produci C multiplex, tum C numerus aut quantitas dicetur multiplex numeri aut quantitatis B, ſed multiplicandi actio ſemper numero A deſignatur, qui quidem ſemper numerus exiſtet: agens autem nunc in incrementum nunc in decrementum in B vnicam paſſiuam & continuam quantitatem quibuſuis numeris explicandam, qua maior erit ſemper A numerus agens vnico B patiente, atque perinde B metietur A vt minor ſimplex maiorem actione multiplicem. Cùm ſemper eandẽ habeat A numerus ad B vnitatem rationẽ, quam ſeruat C productus ad B ſumptum pro numero, ſiue quam C quantitas in B quantitatem. Quia verò A nullius eſt quantitatis ſignificator, ſed ſolius actionis, C autem prælibatæ actionis ſignificat quantitatem, ſequetur B binos effectus ſuſcipere, alterum quo tanquam ſimplex paſſiuus actino A confertur, túmque tanquam minor ſeu vnitas maiorem pluralem metitur: alterum quo veluti quantitas aut numerus numero C confertur, qui licet B non ſemper quantitate metiatur C quantitatem,



tatem, quia tamen eandem actione aut passione seruat ad c rationem vt numerus, quam idem B simplex vnicus ad A agentem, semper B vt quantitas simplex metietur C multiplicem, non minus quàm B idem vt vnus metitur A numerum agẽtem, siue per suas vnitates eundem B repetentem, in augmentum quandoque vel in decrementum. Nam semper multiplex maior est simplice, actione quidem multiplicandi, licet quandoque quantitate vel numero sit minor, quia in multiplicibus actio non quantitas potissimum inspicitur. Insuper exemplum decrementi multiplicandi, aliud à præfatis, maximè si superponatur numero decrementum significanti alius numerus, more vulgarium fractorum tertiæ multiplicandi speciei applicatorum, vt $\frac{1}{4}\,\frac{4}{7}\,\frac{1}{8}$, &c. per quem multiplicandus sit aliquis vt 12. Tertiam speciem sectabimur, cùm proponantur bini multiplicantes in his coniunctis numeris $\frac{1}{4}$ scilicet 3 & 4, quorum prior augmentum (cùm virgulæ superponatur) posterior autem decrementum (qui virgulæ supponitur) denotat. Multiplicantes igitur ipsius 12 propositi augmentum per 3, producemus 36, cuius 36 decrementum per 4 (virgulæ suppositum) ducentes inueniemus 9 ipsius quidem 36 quartam partem, siue propositæ multiplicationis productum, scilicet propositæ 12 tria quarta. Cur autem multiplicato 12 per augmentum in 36, ipsum 36 in decrementum, non autem 12 propositum duxerimus, id causæ dicemus esse quòd scilicet hi coniuncti multiplicantes $\frac{1}{4}$ duobus numeris vnicam resonent quantitatem, hoc est, vnius quantitatis relatiuam: tria namque quarta vnius integræ magnitudinis sunt relatiua, quare multiplicato per primum augmento, illico multiplicatur productum in decrementum. Secus si fuerint duæ numerorum naturæ, licet iidem sint numeri, scilicet si proponatur idem 12 multiplicandus, per 3 & $\frac{1}{3}$ per primum producet 36 augmentum, quia verò disiuncti sunt multiplicantes, singuli in propositum suas exequentur multiplicationes, $\frac{1}{3}$ igitur ipsius 12 multiplicans decrementum producet 4, harum itaque binarum multiplicationum producta per vnitates multiplicantis repetita producent coniuncta 40, quod erit propositæ multiplicationis nempe ipsius 12 per 3 & $\frac{1}{3}$ productum, hac equidem ratione semper multiplex actio simplice proposita maior erit, nam multiplicatio actionem, non autem quantitatem denotans, maiorem efficit actionem, licet minorem producat, quandoque multiplicem quantitatem simplice, sed maius semper augmentum ipsius simplicis, vel certe maius eiusdem decrementum, quæ sunt veræ multiplicationis actiones. Id quidem in simplici multiplicatione augmenti tantùm vel equidem decrementi tantùm iudicabimus. Quòd si mixta offeratur multiplicatio, scilicet augmenti & decrementi, vt ante diximus, semper quidem augentur bini effectus, augmẽti ac decrementi. Sed quæ maiori numero proponitur facienda multiplicatio, maiorem producit effectum, vt $\frac{1}{4}$ aliquem multiplicantia numerum maiorem decremẽti effectum quam augmenti efficient (cùm $\frac{1}{4}$ decrescens sit ipso $\frac{1}{3}$ augente maior.) Si verò $\frac{1}{3}$ aliquem multiplicent, hi maiorem augmenti producent effectum, cùm $\frac{1}{3}$ augens sit maior ipso $\frac{1}{4}$ minuente. Si quidẽ per æquales, vt $\frac{1}{3}$ aliquem multiplicemus, æqualem producemus effectum, cùm vtrique sint æquales numeri.

Huic autem intelligentiæ nõ parum conferet hæc sequens formula, qua concipiemus tantùm abesse totum & simplex relatiua, quod potius eadem sit inter se magnitudo, diuersis tamen functura muneribus. Nam totum Magnitudo, medio loco

Quadrupla	4	D	o o o o	48
Tripla	3	C	o o o	36
Dupla	2	B	o o	24
Magnitudo	1	A	12 *simplex*	
Secunda	$\frac{1}{2}$	E	o o	6
Tertia	$\frac{1}{3}$	F	o o o	4
Quarta	$\frac{1}{4}$	G	o o o o	3

inter

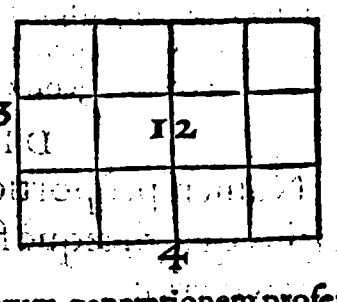
inter multiplex & partem conſtituitur: ab hac,in decrementum:ab illa verò in incrementum multiplicanda. Quare totum in decrementum multiplicandum, parti tanquam relatiuum confertur: Idem verò totum in incrementum multiplicandum, multiplici confertur:& proinde idem parti collatum,totum dicetur:Idem verò multiplici comparatum ſimplex denominabitur. Ideo magnitudinem A, hoc eſt,quemlibet multiplicandum vtroque modo numerum(vt hîc ponimus 12) vnitate foueri,hoc eſt,vnum eſſe,ac binis multiplicandi modis obnoxium,ſcilicet per B C vel D in augmentum,per E F vel G verò in decrementum. Si enim per B augentem ſcilicet 2,ducatur ille 12. ipſe idem repetetur tanquam ipſius binarij vnitates, hoc eſt,qualium A vnitas eſt 12,eorum B binarius augens eſt 24, & C ternarius 36,D verò quaternarius 48. Similiter eorundem E minuens binarius erit 6, F verò ternarius erit 4, G autem erit 3, qui quidem E, F, G, eo quod decrementum multiplicant, virgulæ ſupponuntur. Hac equidem methodo videmus multiplicationem efficere multiplex maius multiplicato,ſcilicet G maiorem ipſo A,ſicut & D, actione quidem (cum G & D) ſint multiplicationis actione æquales, quantitate tamen ſecus: nam licet 48 ex multiplicatione ipſius A in D productum, ſit maior quantitas ipſa A magnitudine, è conuerſo tamen 3 ex multiplicatione eiuſdem A in G productum,minor erit quantitas eadem A quantitate (hoc eſt, ipſo 12) vtraq; autem D & G, quantitas æquali vnitatum agente copia producta eſt. Cùm igitur inſpiciuntur quantitates, producta ex augmenti multiplicatione, ſemper maior erit ſimplice multiplicata, quæ verò ex decrementi multiplicatione orietur,minor erit eadem multiplicata. Si verò inſpiciatur multiplicatio,hoc eſt, illius actionis denominatio, ſemper multiplex maius erit multiplicato: nam in ea actione, quilibet multiplicandus numerus,pro vnica magnitudine continua ſumitur,quam quidem plures vnitates augentes plus augent, plures verò minuentes plus minuunt. Inde orietur,quemlibet numerum cuiuſlibet numeri multiplicem dici poſſe, diuerſis autem aſpectibus. Si quidem multiplicetur incrementum, maiores numeri minorum erunt multiplices. Si verò decrementum multiplicemus, è conuerſo minores maiorum multiplices erunt. Si rurſus mixta fuerit multiplicatio, in ea verò exuberet incrementum, multiplex numerus maior erit ſimplice. Siquidem in eadem mixta maius fuerit decrementum incremento, minor numerus tum maioris erit multiplex. Hæc ideo ſuggeſſimus vt (menti Euclidis concordes) quaſlibet antecedentis ad conſequens rationes ex multiplicatione qua antecedens multiplicat conſequens oriri doceamus,ſiue ea fuerit in augmentum, aut in decrementum, vel ſanè in mixtam augmenti & decrementi operationem conſtituta. Cùm ideo ratio ſit æquè maiorum ad minores vt minorum ad maiores, ſempérque antecedens ſit conſequentis multiplex, neceſſarium duximus omnes & quoſuis numeros quorumuis numerorum multiplices quandoque dici poſſe, æquè minores maiorum, vt maiores minorum,iuxta oblatum exemplar. Multiplex igitur æquè dici poterit, is qui partibus multiplicatis in decremẽtum minor efficitur, ſimul ac is qui per ſui ipſius repetitionem in augmentum maior fit. Nam vtraque via per vnitatum multitudinem ſumitur, ſiue in augmentum, aut decrementum pergat: hanc quippe multiplicandi legem ſibi ſumpſit Euclides, vt rationum quantitates ſola multiplicatione(quæ earum vera eſt ſubſtantia)exprimeret. Maioris inæqualitatis per multiplicationem augmenti qua antecedens multiplicat conſequens. Minoris verò inæqualitatis per multiplicationem decrementi,qua idem antecedens multiplicat conſequens,cùm ratio certa nihil aliud ſit quàm antecedentis ad conſequens multiplicatio, vt tertia diffinitione quinti ſatis latè diſtulimus. Qua verò de cauſa ſola vſus ſit Euclides multiplicatione, nulla autem diuidendi methodo,ſed diuiſionem ſimul multiplicatione abſoluiſſe viſus eſt, id potiſſimum cauſæ eſſe arbitramur, quòd rationes magnitudinum inter ſe inueſtigandas præcipuo curet negotio. Duarum autem magnitudinum rationem(vt diximus)nihil aliud eſſe oſtenſum eſt,

quàm

quàm reſpectus antecedentis ad conſequens, non autem conſequentis ad antecedens, & proinde ea multiplicatio qua antecedens multiplicat conſequens (hoc eſt, continet) vt rationis quantitas ſola multiplicantis quantitate exprimatur, & idcirco facilius multiplicatio multiplicationi quàm diuiſioni comparabitur, vt inde rationum oriantur conferentiæ, vt exemplo, Sit ratio 12 ad 4, cuius differentiam quantitatis cum ratione 4 ad 12 eius conuerſa, inueſtigemus. Comperiemus antecedens primæ 12 multiplicare conſequens 4 per 3 denominatorem multiplicationis triplæ. Rationis verò 4 ad 12, reperiemus antecedens 4 ſui conſequentis decrementum per eadem $\frac{1}{3}$ multiplicare, cuius denominatio erit $\frac{1}{3}$ (hoc eſt tertia). Patet igitur facilius horum multiplicantium 3 & $\frac{1}{3}$ differentia has rationes denominantium, quàm ſi primæ rationis antecedens ſuum multiplicaret conſequens per 3. Secundæ verò antecedens diuideret ſuum conſequens, per eundem 3. Trium enim ad tria nullam concipimus eſſe diſtantiam. Operandi tamen modum diuerſum, diuerſáque producta efficere, ſub eadem itaque denominatione, binas illas rationes conuerſas opprimentes, abſurdiſſimum proferemus methodi defectum, in quem plures lapſi ſunt denominantes rationes conuerſas ſub eodem numero. Quanto autem differant, cuilibet relinquimus iudicandum. Et inſuper multiplicationem ſumpſit Euclides, relicta diuiſione, eo quòd omnis numerus per quemlibet multiplicari poteſt, non autem per quemlibet diuidi, &c. vt iam quinto diximus. Quia itaque infinitas operandi libertates (in augmentum ſcilicet & ſectionem) appetit geometria, ſolam multiplicandi legem ab arithmetica (quæ illi vnica infinita exiſtit) non autem diuiſionem (cuius terminata per vnitatem reprimitur facultas) ſibi aſciſcendam arbitrata eſt, vt latius poſthac monebimus.

DIFFINITIO XVII.

Planus numerus eſt, qui ex duobus ſe inuicem multiplicantibus producitur, latera verò illius ſunt ſe inuicem multiplicantes numeri.



Quoniam omnis numerus numerum multiplicans progenitum metitur, idem numerus planus & compoſitus erit (vt diffi. 14 huius.) Sed quia huius effectus diuerſæ videntur eſſe cauſæ, voluit Geometria binis denominationibus has exornare ſpecies. Planus etenim ſuperficiei rectangulæ capacitatem dicit, ſub binis lateribus quantitatem denotantibus contentam, vt prima diffi. ſecundi. Compoſitus verò producti ex numero eum metiente per aliquem numerum, generationem profert, vt 3 per 4 multiplicata latera rectangulum planum efficiunt 12. Compoſitum verò non eo quòd contineatur binis lateribus, ſed eo quòd aliquis numerus per numerum eum metiatur, ſcilicet 3 per 4, vel 4 per 3, aut 2 per 6, &c. producent compoſitum 12, numerorum operationes tantùm, non autem ſignificatas quantitates aſpectantes, vt prima diffinitione planè docuimus: ſecus in plano, qui ſignificatas quantitates aſpectat tantùm.

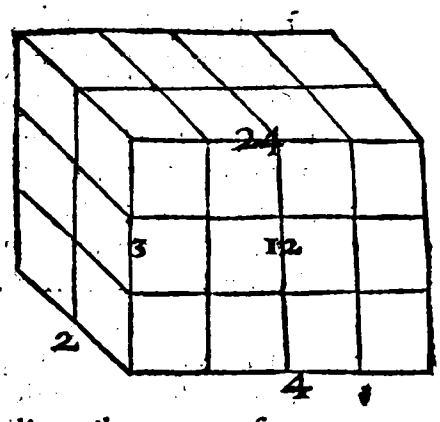
DIFFINITIO XVIII.

Solidus verò qui ex tribus ſeſe multiplicantibus producitur, latera autem illius, ſunt multiplicantes ſe inuicem numeri.

Solidum ea de cauſa vocat, quòd tribus foueatur dimenſionibus, longitudine, latitudine, & ſublimitate, quia planum duabus tantùm contineri dixit, vt ordinem

numerorum

numerorum iuxta quantitatum continuarum dimenſiones diſponat, ſcilicet numerum primum qui vnicam habet longitudinem, cùm nullus eum metiatur numerus inſtar lineæ. Planum verò longitudine & latitudine (veluti ſuperficies) cõſtantem, ſolidum autem tribus, longa, lata, ac ſublimi, comprehenſum (ſolidi corporis inſtar) dimenſionibus, vt 4 per 3 latera ducentes, planum efficimus 12. Ipſum rurſus 12 planum per tertiam dimenſionem, ſcilicet 2 multiplicantes, ſolidum 24 effecimus, tribus dimenſionibus 4, 3, & 2 ſe inuicem multiplicantibus compoſitum, quarum quælibet quantitatem indicat.



DIFFINITIO XIX.

Quadratus numerus, eſt qui æquè æqualis, vel ſub duobus æqualibus numeris continetur.

DIFFINITIO XX.

Cubus numerus, eſt qui æquè æqualis æquæ, vel ſub tribus æqualibus numeris continetur.

Quia omnis quadratus planus eſt, ſicuti omnis cubus numerus ſolidus eſt, quadratus verò ſolus ſub duobus æqualibus numeris inter omnes planos continetur, cubus verò ſub tribus æqualibus inter omnes ſolidos. Tamen ſeorſum diffinire dignatus eſt Euclides propter eorum regularitatem, infinitis geometriæ obſequiis vtilem. Dicit autem æquè æqualem eſſe quadratum, vt dimẽſionem geometricam laterum exprimat: ſub duobus verò numeris æqualibus contineri, vt arithmeticam componendi ſpeciem deſignẽt. Cubum ſimiliter æquè æqualem æquæ, vt tribus eum geometricis æqualibus menſuris contineri docear: ſub tribus verò æqualibus numeris, vt arithmeticam componendi methodum inſinuet, veluti in quadrato. Ex his facilè percipimus Euclidem numeros ad geometriæ auxilium conuocaſſe, cùm eos ad geometriæ ſæpius dimenſiones reducat.

DIFFINITIO XXI.

Numeri proportionales, ſunt quorum primus ſecundi, & tertius quarti, æquè fuerit multiplex, ſiue eadem pars, ſiue eædẽ partes fuerint.

Proportionem (vt diximus tertia diffinitione quinti) magnitudinum ſub æqua earum multiplicatione foueri docet. Nam proportionales dicit numeros (hoc eſt eandem rationem habentes), eos quorum primus æquè ſecundi, vt tertius quarti fuerit multiplex, ſiue fuerit eiuſdem pars, ſiue partes, hoc eſt idem decrementum, quouis modo æquè multiplices dicit, & idcirco in eadem ratione ſeu proportionales quauis muliplicatione augmenti ſiue decrementi, aut equidem vtriuſque ducti fuerint, vt 6 ad 3 ſicut 4 ad 2, & 3 ad 6 vt 2 ad 4 pars, & 2 ad 5 vt 4 ad 10, ac 8 ad 6 vt 12 ad 9 partes, ſemper quauis arte primus ſecundi æquè vt tertius quarti dicetur multiplex, & igitur proportionales erunt.

MONITVM.

Vertens Zambertus græcum Theonis exemplum, ſuper hac diffinitione, vltimam reliquit dictionem noſtro negotio vtiliorem (ſcilicet ἴσων. Cùm enim dicit Euclides numeros proportionales eſſe, quorum primus ſecundi & tertius quarti

æquè

æquè fuerit multiplex: hic finis eſt ſubſtantiæ diffinitionis, nam æqualitas multiplicationis, vt ſæpius diximus, æqualitatem rationum & proinde proportionem neceſſariò producit. Quod autem poſtmodum addit (*vel eadem pars vel eadem partes fuerint*) illud ſimile ſubiungit, vt oſtendatur quauis arte; ſiue vt pars continua diſcreti, ſiue vt partes diſcretæ diſcreti (quæ ſunt omnes rationes cognitæ) æquè fuerit multiplex primus ſecundi, vt tertius quarti, ipſos eandem habere rationem, & ideo proportionales eſſe: quare dixit Græcum exemplar, ſiue eadem pars ſiue eædē partes fuerint, id eſt quoquo modo æquè multiplices, vt decrementi ac incrementi multiplicationem exprimat: quòd ſi relinquamus vltimam dictionem (*fuerint*) intelligemus proportionales eſſe eos tantùm qui ſunt æquè multiplices, vel eos qui ſunt eadem pars vel partes. Quid igitur in hoc ſubſurato verbo depereat, quiſque iudicabit: nam à multiplicibus omnes excluderentur ferè quantitatum rationes (vt diximus diffinitionibus quinti). Hoc latè prædixit Euclides decima diffinitione quinti, cùm oſtendit in rationibus minoris inæqualitatis, minores eſſe maiorum multiplices, eò quòd decrementum ipſæ multiplicent maius, ſicq; multiplicationem actioni, non autem quantitati conuenire docuit. Præterea patet hinc rationem nihil aliud quàm antecedentium ad conſequentia multiplicationem eſſe: dicit enim primum antecedens æquè multiplicare ſecundum conſequens, vt tertium antecedens quartum multiplicat conſequens. Variata igitur multiplicationis ſpecie, variatur & rationis quantitas, inſuper ſi nulli proportionales eſſent exceptis æquè multiplicibus, & eadem parte, ſiue partibus: quid in his accidet, ſicut 8 ad 6 ſic 4 ad 3, quorum primus & tertius ſecundi & quarti, neque multiplices, neque pars aut partes, à Campano & Theone dicuntur, ac ideo proportionales nõ eſſent, ſi cum diffinito (vt moris eſt) diffinitionem conuertamus, quod planè abſurdum conſtat. Non itaque poſtremam hanc orationem, vt diſiunctiuam, ſed vt interpretem legemus.

DIFFINITIO XXII.

Similes plani, & ſimiles ſolidi numeri, ſunt qui proportionalia habent latera.

Quoniam plani numeri duo tantùm habent latera, eos producentia ſua multiplicatione, ſolidi verò tria habent, ſimilitudinem planorum inter ſe ac ſolidorum inter ſe, ponit in rationis laterum ſimilitudine. Si enim duo latera vnius plani numeri, eam habent inter ſe rationem, quam duo latera alterius plani, ipſi ſimiles erunt plani. haud ſecus in ſimilibus ſolidis: cùm enim tria vnius latera inter ſe, eam quam tria alterius obſeruant latera rationem, ipſi ſimiles erunt ſolidi. Quia verò latera ſimiles habent rationes, proportionalia dicuntur, & ſimilium planorum ac ſolidorum numerorum latera erunt, vt exemplo, quia 2 & 3 ſunt in eadem ratione qua 4 & 6 numeri ab his lateribus compoſiti, ſimiles plani erunt, ſcilicet 6 & 24: in ſolidis verò 2, 3, 4 ſunt in ratione horum 4, 6, 8: quare ab eis compoſiti ſolidi, ſcilicet 24 & 192, ſimiles erunt ſolidi.

DIFFINITIO XXIII.

Numerus partem cognominans, eſt is per quem pars repetita totum conſtituit.

Vt 4 eſt tertia pars 12, eo quòd ter repetitus totum 12 componat, quare repetitionis frequentia partem à ternario cognominat.

DIFFINITIO XXIIII.

Perfectus numerus, eſt qui ſuarum ſectionum ſingulis partibus ſimul ſumptis eſt æqualis.

Quoniam eidem nu mero plures ineſſe poſſunt partium quotarum diuerſæ ſectiones, diximus perfectum eum eſſe numerum, qui ex ſingulis ſuarum ſectionum partibus conſtat, vt in ſenario qui quidem habet ſecundas, tertias & ſextas partes. Sumantur itaque earum partium ſingulæ, ſcilicet ſecunda 3, tertia 2, & ſexta 1, quæ 3, 2 & 1 ſimul ſumpta, componunt ſenarium, perfectum igitur numerum. Similiter 28 qui ſuis conſtat partibus ſcilicet 14 7 4 2 1 ſingulis eum ſimul componentibus, vt latius trigeſima ſeptima noni.

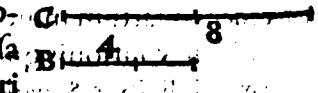
MONITVM.

Huic addidimus hanc vocem (*ſingulis*) ne hac Theonis diffinitione ambigeremus circa partium queſtum: videmus etenim omne totum ſuis partibus æquum eſſe, omnes igitur numeros perfectos crederemus: quare ſi ex ſingulis ſuarum partium eum componamus, intelligemus ſingulas tantùm non omnes à ſectionibus ſumendas eſſe partes, quæ coniunctæ ipſum componant.

COMMVNES SENTENTIÆ.

PRIMA.

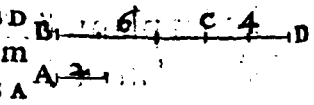
Si numerus metiatur partem, metietur & totum.



Cùm pars ſit ea quæ totum ſuiipſius præciſa repetitione conſtituit, perſpicuum eſt, ſi aliquis numerus præciſa ſua repetitione partem conſtituat, & eundem amplioti repetitione totum conſtituere, vt à ſua repetitione generans B partem ipſius C, perſpicuum eſt A ampliore facta repetitione, qua quidem producit ſingulas ipſius C partes æquales ipſi B, tandem totum C metiri.

SECVNDA.

Si numerus metitur totum & ablatum, metitur & reliquum.



Si numerus A ſua repetitione producat numerum B D totum, & præterea ſua repetitione conſtituat ablatum B C, perſpicuum erit, ſi A præciſis repetitionibus ipſius A in toto B D, tollantur præciſæ repetitiones eiuſdem A in B C, quæ ſupererunt in C D repetitiones ipſius A, ipſum C D reliquum metientur, cùm eundem repetant.

MONITVM.

Licet præcipui, quorum ſudore potiſſimum Euclidis intellectum adepti ſumus, fuerint Campanus & Theon, & inter eos plus videatur veræ interpretationi acquirendæ incubuiſſe Campanus, nihilominus qua de re ſæpius pugnantias quaſdam Mathematicam veritatem maculantes, pluribus locis (maximè quinto & his tribus numerorum libris) paſſi ſint, admirari non deſino: ni tantùm illud præcipuum fuerit, quod ſcilicet arithmeticarum magnitudinum naturam, cum geometricarum magnitudinum natura confundentes, earum documenta iiſdem præceptis tradi poſſe, ſæpe exiſtimauerunt, quaſi diſcretum & continuum eiſdem vallari poſſet legibus. Partem etenim geometricam prima quinti diffinitione, non aliàs quàm tertia ſeptimi antea difinierunt, licet illa generalior ob cõfuſorum naturam, hæc verò minus fuerit generalis ob diſcretorum facilitatem. Partem inſuper multiplicis relatiuam eſſe dixerunt: quod videtur quodammodo abſurdum, partem ſcilicet, quæ verè geometrica confuſa & indiſcreta quantitas eſt, multiplicis, quæ pura arithmetica & diſcretionem præ ſe fert, relatiuam eſſe indecens admodum appareret: nam quam magnitudinem Geometræ partem dicunt (à toto quauis arte abſtractam) non ſemper ſuſcipit Arithmetica, ſed tantùm hac generali acceptione eas magnitudines à toto abſtractas, quæ ipſi toti commenſurabiles exiſtunt, eo quòd numerorum natura ſemper magnitudinum commẽſurationem præ ſe ferat.

Quare

Quare eam in binas diſtribuit Arithmetica ſumptiones, partem nempe & partes, vt diximus tertia & quarta huius diffin. reliquas ſuo toti incommenſurabiles geometricæ amplitudini reſeruans. Partem itaque toti relatiuam poſuimus, generali apud Geometras & Arithmeticos ſumptione, quæ ſemper propoſitæ magnitudinis decrementum profert, nuſquam verò augmentum multiplicat: multiplicis verò relatiuam, ſimplicem eſſe diximus magnitudinẽ. Cùm enim magnitudo ſimplex (quæ ſcilicet augmẽto æquè vt decremento obnoxia eſſe reperitur) æquè per frequẽtes additiones alterari poſſit, vt per frequẽtes detractiones, actiones illas quibus propoſita magnitudo in augmentum vel decrementum alteratur, multiplicationes diximus, à multitudine vnitatum numeros componentium, denotatas: quare illæ multiplicationes ſolis adhærent arithmeticis legibus ob earum diſcretionem. Hac de cauſa cùm multiplicem maiorem minore dicimus, non quantitatem vel eius magnitudinem maiorem dici credemus, ſed tantùm actionem illam multiplicandi maiorem denominationem multiplici numero deſignatam producere, denominatione ſimplicis, quam ſemper multiplex (ſimplicis relatiua) ſub vnitatis nomine contineri cogit. Ac ideo numerus (ſemper vnitate maior exiſtens) multiplicem actionem (numero ſignificatam) ſimplice paſſiua maiorem eſſe, ſiue ea actio in augmentum, ſiue in decrementum pergat, aſſeremus: hinc ſuſcipiemus à propoſita ſimplice magnitudine poſſe educi per multiplicatum eius decrementum, partem aliquam eiuſdem, quæ quidem ipſius ſimplicis & maioris multiplex dici poterit, (ſcilicet decrementum) & ab eadem ſimplice poſſe educi per multiplicatum eius augmentum, aliam maiorem ipſa propoſita, quæ eius ſimplicis & minoris multiplex dicetur (ſcilicet augmentum) & igitur vtraque via altera alterius multiplex dici poterit, ſiue pars eius fuerit, ſiue eandem repetat, & tamen multiplex ſemper maior erit ſimplice, cùm multiplicatio non quantitatem, ſed actionem reſpiciat tãtùm. Id equidem ea de re dicimus, vt oſtendamus Euclidem non omiſiſſe rationes ſuperparticulares, ſuperpartientes, necnon omnes minoris inæqualitatis rationes, quas omittere videretur, ſi multiplex numerorum in ſola ratione multiplici ſumeret, ſcilicet circa ſolũ ac præcisè repetitum augmentũ. Cùm autẽ apponit & decrementũ, ea duplex multiplicatio omnes cõprehendit habitudines, & maioris & minoris inæqualitatis (vt optat Euclides) qui ſolã multiplicationẽ ſuis theorematibus tradit, nullam autẽ diuiſionem, eo quòd vnitas ſoli multiplicationi non diuiſioni ſit obnoxia. Quare omnimodas rationum compoſitiones, ſola multiplicatione præcipit Euclides fieri (quinta ſexti diffinitione) non autem diuiſione, quã neſcio qua arte omiſit Campanus. Theon verò penultimo exemplo eam exponere conatus, rationem 1 ad 2 dimidiam, non autem ſubduplam vocauit: rationem verò 3 ad 1 triplam, vt oſtenderet triplam per dimidiam ductam rationem ſeſquialteram producere, ex his compoſitam: quòd illum potius caſu quàm ex voto offendiſſe, aut ex antiquioribus ſubfuraſſe arbitramur, eo quòd nullas rationum minoris inæqualitatis denominationes, per decrementi multiplicationem productas oſtenderit, vt verè oſtendere debuiſſet, ne in illud caderet offendiculum modernorum quorundam, qui ex binis maioris, & minoris inæqualitatis rationibus (vt præfato Theonis exemplo) rationem componere volentes, maiorem denominationem, per minorem diuidendam iubent. Euclides verò multiplicandam (vt expoſuit Theon) quod fieri non poteſt, ſi rationem maioris & eius conuerſam minoris inæqualitatis ſub eadem denominatione (vt docent moderni) concludamus: nunquam enim ex his duabus conſurgentem rationem generabimus, vt ſi ex tripla & ſubdupla aliquam componere volimus (3 per 2 multiplicantes) ſextuplam producemus, longè à ſeſquialtera (quæ verè ab his producitur) alienam. Quare autem Theonem id potius offendiſſe quàm ex voto feciſſe diximus, ea eſt cauſa: In vltimo ſequenti namque exemplo ad quantitatum comparationem, non autem ad denominationum multiplicationem (qua facile negotium illud exequeretur)

retur) recurrit, vt qualium ait A B eſt duorum, talium eſt G D quatuor, qualium autem G D quatuor, talium E Z trium, & qualium igitur A B duorum, talium E Z trium. Illud tandem nulla ab his denominata ratione, quæ ex dimidia & ſeſquitertia conſtaret, quod leuius abſoluiſſet ductis inuicē ½ per 1 ½ denominatoribus, iuxta Euclidis mentē producens bipartientē tertias ipſius A B ad E Z. Quare quòd priori exemplo dixit, ſorte non arte offendiſſe Theonem arbitrati ſumus, licet in eo veram Euclidis mentem ſequutus fuerit.



Cùm inſuper qui Euclidem interpretati ſunt, geometricarum magnitudinum ab arithmeticis differentiam non ſatis docuerint, à primorum numerorum ac datæ rationis minimorum intelligentia, diſcentes maximè auertere viſi ſunt: nam primos numeros ſola metitur vnitas, vnica quidem ac continua magnitudo geometrica, quæ nullo numerorum nomine comprehenditur, ſed tantùm numeri pars dicitur. Vnde quamlibet rationis ſpeciem primos numeros (dempta multiplici) recipere videmus. Nam in multiplici ac eius conuerſa, minor numerus ſemper vtrumque (contra primorum diffinitionem) metitur. Similiter quamlibet rationis ſpeciem (dempta multiplici) minimos numeros ſuſcipere videmus. Nam ratio multiplex & eius conuerſa ſemper cadit inter continuam ac diſcretam quantitatem, cùm minor ſit ſemper maioris pars vnica, non autem partes: non igitur eſt pura ac ſimplex numerorum ratio. Cùm itaque ad minimas numerorum partes ea ratio multiplex ducitur, alterum terminorum ſemper efficit vnitatem, quæ cùm non ſit numerus, inter numerorum rationes, minimorum multiplicis rationis numerorum comprehendere rationes vitabimus. Reliquarum autem rationum ſpecies cùm ſemper minor ſit maioris partes, in numeris minimas eorum partes collocare cenſebimus. Cùm igitur de minimis datæ rationis ac primis loquemur poſthac numeris, Euclidem rationem multiplicem ac eius conuerſam, his comprehendere non putemus, vt latius diximus decimatertia diffinitione huius.

Campanus autem ſibi futuras has difficultates cernens, multitudine principiorum huic ſeptimo (neſcio ſi ab Euclide) præpoſitorum, ab his liberari conatur: præſentit enim difficile negotium, ſcilicet quandoque vnitatem non eſſe numerum, vt ex diffinitione ſecunda huius, & pluribus aliis locis. Quandoque verò eſſe, vt quoties eam inter numeros proportionales collocat, cùm de rationibus in genere agit, eo quòd ibi multiplex contineatur inter cæteras, quæ ſecum ducit vnitatē. Quandoque inſuper vnitatem non ſecari, vt 4 petitione & 15 diffinitione dicit ſimplicem numeri partem vnitatem, ac nullum poſſe infinitè ſecari numerum: quandoque verò eam ſecari, cùm quantitatem ab illa denominatam, 5 communi ſententia in partium denominationes diſtribuit. Præterea partem diffiniens, non autem partes, huius diſcretæ ab illa continua differentiam reliquit, ac vnitatis naturam à ſignificata per eam quantitate non ſatis diſtare docuit (vt prima huius diffinitione diximus) & quamplura alia, quæ ideo principiorum ſuperflua admodum multitudine initiare voluit, vt obſcura quæque tollere conaretur, quod fruſtra videtur feciſſe. Non enim prædixit qua ratione numeros ſibi ſumpſit Euclides, vt conſuſam geometricarum magnitudinum propalaret habitudinem, non autem vt arithmeticam artem tantùm edoceret: maius etenim ea exquirit opus. Quare non indignum arbitratur Euclides, in demonſtrandis futuris horum trium librorum theorematis, argumenta geometricis principiis prioribus ſex libris edoctis ſulciri, cùm numeros ad quantitates geometricas illuſtrandas tantùm ſumpſerit, non autem ad arithmeticam edocendam.

Aliud inſuper monendum curabimus, cùm ſuſceperimus Euclidem numeros in geometriæ ſubſidium, non in arithmetices eruditionem tantùm accommodaſſe: intelligendum eſt Euclidem hac vti ſolertia, qua potiſſimum pura Arithmetices

doctrinæ

doctrinæ theoremata interponit, his quæ geometricas magnitudines numeris designant, vt subsequentia quæque prælibatis edoceat. Quare cùm verus theorematum excutiendus erit intellectus, illud maximè curandum est, an scilicet theoremata solas complectantur numerorum leges, ac eorum sequãtur simplicem naturam, an verò numeris illis quantitates significent, lineam scilicet, planum, aut solidum. Tum demum vbi proposita theoremata numerorum tantùm discretiones, nullæ dimensioni coaptatas proponent, sed tantùm Arithmeticæ operationi, ea iuxta pura arithmeticorum principiorum elementa Euclidem intellexisse arbitremur: si quidem theoremata numeris areas, lineas, aut solida quandoque designent, ea (iuxta Geometriæ naturã) quantitatibus numeros adaptatos, pro significatis ab ipsis numeris quantitatibus, sumpsisse credamus. Tunc igitur numerorum particularem relinquentes naturam, eorum discretionem in quantitatis per eos significatæ deuoluemus proprium: cùm enim dixerimus (vnitatem diffinientes) numeros ex se nullam quantitatem producere, sed plurium subiectorum discretioni adaptabiles esse: quæ si quantitates fuerint, quælibet numeri vnitas naturam subiecti cui applicanda est, informat, vt si numeris lineam significare velimus, quælibet vnitas longitudinem tantùm præ se fert. Si planum, longitudinem ac latitudinem: si quidem solidum, tres dimensiones eadem suscipiet vnitas: quæ quidem dimensiones infinitè secari possunt, vnitas verò eas significans minimè secari potest ab arithmeticis. Cùm igitur ab vnitate denotata quantitas secta fuerit, per numeros rursus, quorum minima pars est vnitas, eadem quantitas referetur. Quare hi numeri respectum numerorum ad alios habentes numeros, huius quantitatis (quæ antea vnitate significabatur) habitudinem, ad quantitatem alio numero significatam, in rationem numerorum haberi edocent. Cùm igitur sub generali alicuius theorematis traditione, qua numeri dicuntur numeris comparari, vt lineæ, plani, vel equidem solidi explicent naturam, intelligemus simul & numeris vnitatem comparari sub numerorum nomine posse, non equidem apud arithmeticos, qui vnitatem pro numero non sumunt, sed apud geometras, qui vnitate significatam quantitatem infinitè secantes vnitatis denominationem in numeri denominationem conuertunt, eandem quantitatem, quam vnitas antea denotabat, referentem. Quare eorum theorematum sentẽtias (licet ab arithmeticis traditæ sint, qui non infinitè, sed ad vnitatem vsque secant) infinitè secare quantitates existimemus, ac vnitate significatam quantitatem, inter quantitates numeris significatas haberi, eo quòd ea distributa in numerum conuertatur eam significantem, vt exemplo, Sumatur 20 proposit. octaui, quæ dicet similes planos esse eos, quorum vnus est medius proportionalis. Ab hoc orietur primo aspectu difficile, nam inter septem & viginti octo medius datur 14, & igitur similes plani erunt 7 & 28, & proinde 7 planus qui primus est, quod fieri non potest: nam ex binis sese multiplicantibus, non fit (cùm nullus eum metiatur) sed sola vnitas ex diffinitione primi numeri. Ad hæc dicemus hoc theorema purum arithmeticum non esse, nam similitudo hæc planorum, proportionem laterum areas continentium præ se fert, quòd ab arithmetica recedit, vt vidimus vigesima secunda diffinitione huius, & prima diffinitione sexti. Nam hoc theorema numeros tantùm non concipit, sed ab eis significatas areas, atque ab eorum lateribus lineas, vt intelligat latera siue lineas, vnitate ac septenario significatas, eandem concludere plani similitudinem, quam lineæ binario & denario quarto significatæ, eo quòd ad numeros (vt arithmeticam subeant) reduci possunt, scilicet per multiplicationem qua sola vtitur Euclides. Si enim per eundem numerum, scilicet 3, ducantur 1 & 7, fient 3 & 21, ac insuper 2 & 14 per eundem 3 fient 6 & 42. Reperiemus vnitate denotatam lineam trifariam sectam, numero ternario denotari, qui quidem ad 21 eandem habens quam 6 ad 42 rationem, similem aream sub 3 & 21 areæ sub 6 & 42 contentæ, concludit, & eandem quam conclusserant, vnitas & septenarius ipsius septem primi numeri latera, quod hae lege ab

arithmeticis non reciperetur,cùm primus numerus planus eſſe non poſſit propter vnitatis integritatem inſolubilem, ſed per multiplicationem in eiuſdem rationis numeros reductis planorum eiſdem lateribus,reperiemus hoc theoremate ſemper extremos ſimiles eſſe planos:non etenim ipſos numeros,ſed ſemper à numeris denotatas ſuperficies. Huius prolixam animaduerſionem dare cogimur, ne qui numeros pro ſignificatis quantitatibus quandoque ſumptos, quandoque verò arithmeticis operationibus ſumendos eſſe non præuidiſſent, diſciplinas fœdatas eſſe opinentur. Et inſuper vt hoc exemplo, plures aliæ Euclidis propoſitiones his tribus proximis libris appoſitæ(quæ quantitates præcipuè reſpiciunt)interpretandæ ſunt. Quare Euclidem his tribus libris arithmetica principia ſe traditurum non expectemus, ſed præcipuè geometricarum quantitatum arithmeticis ſubſidiis diſcretarum affinitates,comparationes,ceu collationes, numeris ſignificantibus expreſſas:poſtmodum autem arithmeticas operationes,ſeu in numeros (quantitates exprimentes) collatas actiones, per numeros arithmeticis præceptis vallatos ſe docturum arbitremur. Vnde præcipuum numerorum vſum in binas acceptiones his tribus libris Euclidem diſtribuiſſe dicemus,in actiuos ſcilicet,& paſſiuos numeros:quorum differentias antequam ad demonſtrationes ventum ſit, explanare voluimus, ne qui hæc numerorum præcepta arithmeticis tantùm legibus obnoxia eſſe exiſtimarent,plures horum trium librorum demonſtrationes ſibiipſis pugnare arbitrarentur,ac proinde in earum veras intelligentias impingerẽt,modos quibus Euclides geometricis quãtitatibus edocendis, numeros adaptauit ignorantes.

Actiui numeri ſunt hi,qui arithmeticas operationes in numeros quantitatem ſignificantes exercent.

Paſſiui autem ſunt hi,qui quantitates ſignificantes, vel quantitatum rationes ſuſcipientes, per actiuorum numerorum operationem alterantur.

Vt confuſas edoceat Geometriæ quantitates,numerorum obſequia in binas diſcernit Euclides (vt iam diximus) acceptiones:quarum priorem actiuos ſuſcipere dicemus numeros, qui ſunt hi per quos arithmeticas operationes exequimur in numeros quantitatem ſignificantes,vt his operationibus vnitate,ac numeris ſignificatas quantitates(quæ ſuaptæ natura aliàs confuſæ ſunt)propalemus. Ac earundem affinitates occultæ numerorum opera clarius eluceſcant,vt exemplo diſcutiamus,qui numeri vt plurimum actiones, ſiue arithmeticas operationes exerceant. Multiplicantes ſiue producti multiplices numeri,nullam ex ſe quãtitatem demonſtrant geometricam tanquam multiplices, ſed tantùm multitudinem repetitionum, qua numerum paſſiuum multiplicatum quantitatem ſignificantem ſibi ſæpius ſumunt.Partes inſuper quæ diſcretionem abſtracti à toto (quantitatem ſignificante paſſiuo)præ ſe ferunt,quandoque ſua multitudine totum excedentes, quandoq; verò à toto deficientes pro negotij opera,& compoſiti, quorum natura multiplex eſt,conſtans ex duorum multiplicatione: huius autem autem præcipua operatio 7 noni patefiet, vt ſolidum quantitatem ſignificantem producat. Præterea pares ac impares,qui ſignificatam à parte vel vnitate quantitatem, iuxta numerorum diſcretiones diſtribuunt, cùm vnitatem ſuis operationibus ſecare nõ valeant. Primi verò numeri vnicę tantùm diſcretionis capaces,qui per vnitates diuiſi,hanc ſolam patiuntur diſtributionem, nullam autem ſubdiuiſionem, nam per inſecabiles partes ſunt diuiſi. Minimi demum alicuius rationis numeri, qui quantitatum numeris ſignificatarum affinitatem,tali terminorum exhibent diſcretione,quæ vltima exiſtens poſteriorem his terminis fieri non patitur (hac permanente affinitate)diſcretionem.Perfecti denique,qui neceſſariis partibus coaſſumptis conflantur.

Hi omnes neceſſariam ſuæ ſubſtantiæ diffinitionẽ,abſque diſcretione ſiue multitudine patefacere non poſſunt, qua operationes arithmeticæ exercendæ ſunt,in quantitates geometricas ſiue numeris diſtributas, ſiue inſecta vnitate ſignificatas, præfatorum numerorum actiones(quæ in ſe operantur) patientes. Quas quidem actiones ab his numeris innatam ac neceſſariam in ſe diſcretionem accipere videmus:nam cuiuſlibet horum pura ſubſtantiæ diffinitio,diſcretionem eidem conferre cogitur.Quare hi omnes actiui, cùm diſcretionem præ ſe ferant,ſuis operationi bus neceſſariam , numerorum particulari lege vallandi erunt, ac præceptis purè arithmeticis ſubiiciendi.

Quod ſecus in paſſiuis accidit , quantitates ſignificantibus : hi nanque ab Euclide ſuſcepti ſunt, vt quantitatem alterandam ſiue in incrementum , ſiue in decrementum actiuorum opera ſignificent. Subſtantiæ etenim eorum diffinitio, nullam in ſe neceſſariò diſcretionem requirit , ſed tantùm alterandam actiuorum operatione quantitatem , ea de cauſa numeris expreſſam , quòd agentibus numeris , numeri tantùm ceu eorum vnitates correſpondeant,vt productas (numerorum actione) paſſiuorum alterationes indicent: quorum exempla veluti in actiuis proferemus , primùm ab vnitate inchoantes , cuius natura integram ac inſolutam profert ſubſtantiam. Totum pariter nullam ex ſe denotat diſtributionem, vt totum dici poſſit, ſed potius integritatem pars ſimulac ſubſtantiam inſectam denotat. Planus numerus non diſcretionem reſpicit, ſed binas (inſtar rectanguli) dimenſiones (longum ſcilicet & latum)numeris aut vnitate ſignificatas;ſolidus verò ternas. Quadratus autem & cubus,laterum ſiue dimenſionum æqualitatẽ, non diſcretionem intuentur.Proporrionales affinitatum ſimilitudinem,nõ autem diſcretionum numerum , ſiue multitudinem conſpiciunt. Multipiicandus tandem ſimplicem ac verè vnicam integram magnitudinem à numeris operantibus alterãdam demonſtrat. Quare licet per numeros hæ ſignificentur quantitates, non ideo in ſe aliquid optant diſcretionis , ſed tantùm numeris ſignificantur,vt facilius numerorum actiuorum in ſe operantium ſuſcipiant actionem, ac in cognitum incrementum,ſeu decremẽtum,aut æqualitatem (paſſiuis numeris ſignificatam) transferantur. Paſſiuos itaque numeros vnitatem recipere non ducemus abſurdum,eo quòd vnitas quantitatem æquè vt illi ſignificet, ac præcipuum eorum negotium non numeros , ſed ſignificatas quantitates aſpectet actiuorum numerorum arithmeticis operationibus ſeu actionibus obnoxias, vnde orietur multiplicem rationem inter numerorum puras ac particulares rationes cenſeri non poſſe,cùm ea ſit ratio partis ad totum , ſiue ſimplicis ad multiplex,ac eius conuerſa ratio multiplicis ad ſimplex. Nam alter terminorum huius rationis , ſemper integram ac inſolutam denotat quantitatem, vt iam antea diximus. Ac inſuper ea eſt tantùm ratio vnitatis,ſiue continui ad numerum , licet per binos quandoque exprimatur numeros , quorum alterius neceſſariò pars vnica (totum metiens)veluti vnitas numerum reperietur: non igitur diſcreti ad diſcretum erit ratio , ſed diſcreti ad continuum, ſeu continui ad diſcretum. Reliquæ verò rationes quælibet(dempta multiplici & eius conuerſa)puræ ſunt arithmeticæ,quarũ ſemper vterque terminus erit numerus,nuſquam autem vnitas. Qua de re eas rationes numerorum eſſe dicemus, eo quòd alter harum rationum terminus,alterius ſit partes, quòd diſcretionem arithmeticam , neceſſariò his rationibus confert. Si itaque his tribus numerorum libris de rationibus numerorum actiuorum loquatur Euclides,rationem multiplicem inter eas rationes comprehendi non patiemur (cùm hæc ſit continui ad diſcretum, illæ verò diſcretarum ſunt rationes):quòd ſi de numerorum rationibus in genere diſcutiat, quaſlibet rationes intelligi putabimus, æquè continui ad diſcretum, vt diſcreti ad diſcretum : nam(vt frequentius diximus)Geometria multo generalior euadit ipſa arithmetica:quælibet enim numerorum rationes inter quantitates continuas reperiri poſſunt, continuorum verò quælibet inter numeros reperiri minimè fas eſt.

Cùm igitur numerorum actiuorum (qui puri ſunt arithmetici) rationem narrabit Euclides, non neceſſariò multiplicem his legibus arctari putabimus, ſed inter numeros paſſiuos ſeu quantitatis denunciatores eam haberi credemus. Numeros itaque in binas acceptiones Euclidem expoſuiſſe concludemus, in actiuos ſcilicet exequium alterandarum quantitatum adimplentes: ac in paſſiuos alterandas ſiue diſcernendas (actiuorum opera) quantitates denotantes: quod ſi quandoque numeros actiuos pati, aut è contra paſſiuos agere videbimus, illud eſt animaduertendum, non tanquam quantitates numeris ſignificatas agere paſſiuos credemus, ſed eundem numerum quandoque actioni, quandoque verò paſſioni deputari poſſe non admirabimur, diuerſis tamen reſpectibus. Nam ſimul & ſemel eundem numerum actionem & paſſionem ferre poſſe negabimus, ſed eundem nunc actiuum, nunc verò paſſiuum eſſe non vetari.

Si itaque alicuius theorematis hypotheſis numeros arithmeticos, ſeu actiuos popoſcerit, huius concluſioni rationem multiplicem aut vnitatem non ſubiici dicemus: ſi quidem paſſiuos poſcat eadem hypotheſis, his vnitatem ac perinde rationem multiplicem contineri fatebimur. Quòd ſi de numeris in genere fiat theorema, quoſlibet ſubiiciemus, hac tamen ſolertia qua actiuos actiuis, & paſſiuos paſſiuis, dedicemus operibus. Vnitatem autem quandoque ſecandam, quandoque verò non ſecandam patimur: ſecandam quidem, cùm numeris paſſiuis quantitatem ſignificantibus dicatur: non ſecandam autem, cùm numeris actiuis operationem ſeu arithmetica exequia proſequentibus adaptatur.

NVMERORVM GEOMETRIÆ OBSEQVIO IMPLORATORVM ALII SVNT ACTIUi, diſcreti, ſeu Arithmeticarum operationum actores: alij verò paſſiui, continui, ſeu Geometricarum quantitatum ſignificatores.

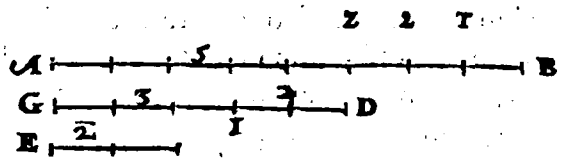
Arithmetici, ſeu actiui numeri.	*Geometrici ſiue paſſiui numeri.*
Multiplicantes	*Vnitas*
Multiplices	*Totum*
Partes	*Pars*
Compoſiti	*Planus*
Pares	*Solidus*
Impares	*Quadratus*
Primi	*Cubus*
Minimi	*Proportionales*
Perfecti.	*Multiplicandus vel ſimplex.*

PROPOSITIO I.

Si duobus numeris expoſitis, ſublato ſemper minore à maiori, reliquus minimè metiatur præcedentem quoad aſſumpta fuerit vnitas, qui à principio numeri primi adinuicem erunt.

Exponantur

Exponantur duo numeri A B maior & G D, à maiore autem A B auferatur G D relinquens Z B, ab ipſo autem G D tollatur Z B relinquens I D numerum. à Z B verò demat ur I D, ſicq; ſem

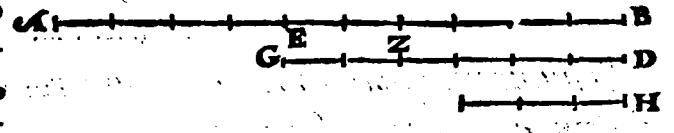


per quoad ſuperſit tantùm vnitas quæ ſit T B: Dico nullum numerum ipſos A B & G D metiri. quòd ſi credatur aliquis eos metiri, ſit E: quoniã E metitur A B totum, & G D ablatum, metitur idem E reliquum Z B (per ſecundam communem ſententiam huius): quia ſimiliter idem E metitur totũ G D & ablatum Z B, metietur & reliquum I D (per eandem). Et tãdem cùm metiatur totum Z B & ablatum I D, metietur idem E numerus reliquum, vnitatem ſcilicet T B, quod eſſet abſurdum, cùm maior ſit E numerus vnitate. Nullus igitur numerus A B, G D numeros metietur, ſed ſola vnitas, & proinde expoſiti primi erunt (per 13 diffinitionem huius). Si itaque duobus numeris, &c.

PROPOSITIO II. PROBLEMA I.

Duobus numeris datis non primis adinuicem, maximam eorum communem menſuram inuenire.

Dentur bini numeri A B G D non adinuicem primi, à quibus auferatur minor à maiore, donec reliquus metiatur præcedentem: quod neceſſariò reperietur: nam ſi ad vnitatem venirent, ipſi (per præcedentem) eſſent primi, quod eſſet contra hypotheſim, non igitur ad vnitatem veniunt, ſed ad numerum, qui ſit G Z ablato quidem G D, ab ipſo A B (qui ſit E B) & A E ex G D (qui ſit Z D). Dico maiorem reliquo G Z nullum vtroſque A B & G D metiri: ſi itaque aliquis fuerit, ſit H numerus maior ipſo G Z metiens datos A B & G D, quoniã H metitur totum A B & ablatum G D, metietur & reliquum A E: quia verò metitur totum G D & ablatum A E metietur reliquum G Z, per ſecundam communem ſententiam huius. Igitur H maior, minorem G Z metietur, quod fieri non poteſt: non itaque maior ipſo G Z alius dari poteſt: maximam igitur menſuram ipſorum A B & G D inuenimus.



COROLLARIVM.

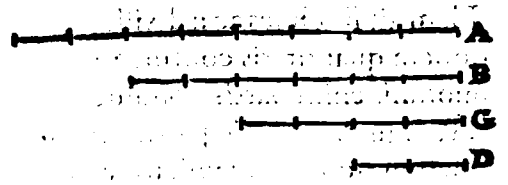
Si numerus duos numeros metiatur, & maximam communem eorum menſuram metietur.

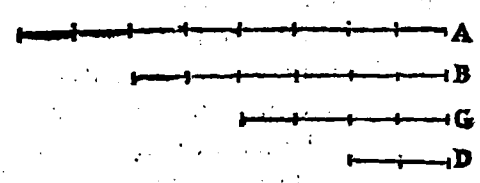
Nam ſi metiatur totum & ablatum, ſemper metietur & reliquum, qui tandem eſt maxima menſura duorum.

PROPOSITIO III. PROBLEMA II.

Tribus numeris datis non primis adinuicem, maximam eorum communem menſuram inuenire.

Tres ſint dati numeri A, B, G, non adinuicem primi, quorum inueſtiganda ſit cõmunis & maxima menſura. Sumatur (per præcedentem) duorum A & B maxima menſura D: quæ aut metietur reliquum G, aut nõ: ſi quidem tertium G metiatur numerus D, is erit trium maxima menſura, cùm per hypotheſim ſit maxima bino





ma binorum A & B, sicq; optatum consequimur. Si verò D non metiatur G, ostendamus G & D nõ esse primos adinuicem. Cùm enim tres A, B, G, ex hypothesi non sint primi, aliquis eos metietur: is itaque binos A & B metietur, & proinde (per corollarium præcedentis) idem metietur numerorum A & B maximam mensuram D, sed metitur & G: igitur G & D non sunt primi. Metiatur ergo eos G & D (per præcedẽtem) numerus E maxima mensura: Dico E maximam esse trium A, B & G mensuram, quoniã enim E metitur D, metietur ipsos A & B, per primam communem sententiam, est enim D ipsorum A & B pars, per hypothesim. Igitur E metitur tres A, B, G, & vt maximus metiens: si enim maior alius credatur, sit Z. cùm Z metiatur A & B, metietur & D maximam eorum mensuram, per coroll. præceden. sed metitur & G ex hypothesi, itaque Z metitur binos G & D, & igitur maximam eorum metietur mensuram E, maior quidem minorem, quod est absurdum: nullus igitur maior ipso E, tres A, B, G, metietur numeros. Tribus igitur datis non primis adinuicem numeris A, B, G, maximam eorum communem mensuram E inuenimus.

A	18
B	12
G	8
D	6
E	2
Z	3

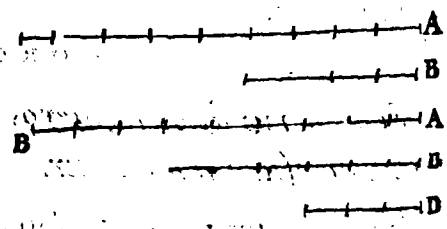
COROLLARIVM.

Si numerus quotuis metiatur numeros, & maximam eorum communem metietur mensuram.

Metitur enim maximam duorum, & tandem maximam maximæ & tertij, scilicet ipsorum G & D, quæ est E maxima quidem trium, & insuper simili argumento plurium numerorum communis reperietur mensura: inuenta enim mensura trium, reperietur mensura quarti, & maximæ mensuræ trium, &c.

PROPOSITIO IIII.

Omnis numerus minor, omnis numeri maioris, aut pars est, aut partes.



Sint duo numeri A & B, quorum minor sit B: Dico B partem esse maioris A aut partes, sunt enim A & B primi aut compositi. Si primi vnitates minoris sunt maioris partes, cùm vnitates sint omnis numeri partes. Si verò compositi sint A & B, aut B metitur A aut non. Si metiatur, pars erit, B maioris A. Si quidem non metiatur B numerum A, detur (per 2 huius) maximus eos metiens (cùm sint compositi) sitq; D. Quia D vtrosque A & B metitur. Quot igitur sunt numeri D in B, totidem efficiet partes totus B maioris A. Minor igitur B maioris A partes erit. Omnis itaque numerus minor, omnis numeri maioris, aut pars est, aut partes.

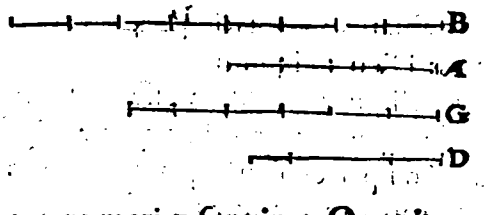
MONITVM.

Idem ait Euclides ac si dixisset, Omnis minor numerus ad maiorem, habet aut rationem quantitatis continuæ ad discretam, aut discretæ ad discretam quantitatem: omnis enim partis ad numerum ratio, in rationem vnitatis ad numerum cadit. Reliqua verò ratio partium ad numerum, cadit semper in rationes numeri ad numerum, non autem vnitatis ad numerum. Præsentiendum est tamen inter quosuis numeros non cadere veram & simplicem numerorum (hoc est, discretarum quantitatum) rationem. Sed inter eos dumtaxat, quorum minor partes est maioris. Nam

ris. Nam inter reliquos, quorum ſcilicet minor eſt maioris pars, non cadit omnis numeri ad numerum ratio, ſiue diſcretæ ad diſcretam quantitatem, ſed ſola vnitatis ad numerum (hoc eſt continuæ ad diſcretam) vt exemplo, ratio 4 ad 12 non eſt ſimplex numerorum ratio, eo quòd reducatur ad rationem vnitatis ad numerum 3, & ſit eadem: ratio verò 4 ad 14 & reliquæ partium ad totum, ſunt tantùm inter numeros, nec vſquam cadere poſſunt, in rationem vnitatis ad numerum, ſed ſemper inter diſcretas quantitates comperiuntur, eo quòd ſint rationes partium ad totum, reliquæ verò partis ad totum, licet numeris quandoque exprimantur, tamen ſemper reducentur ad rationem vnitatis ad numerum aliquem, ſiue continui ad diſcretum, ceu illis peculiarem.

PROPOSITIO V.

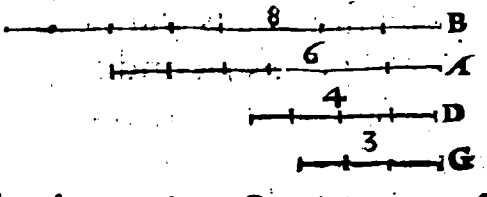
Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & vterque vtriuſque eadem pars erit, quæ vnus vnius.



Idem in continuis oſtendit prima quinti, quod hæc in diſcretis cum ſequente. Sit numerus A numeri B ea pars, quota numerus D eſt alterius G: Dico vtrumque A & D eandem eſſe partem vtriuſque B & G, quæ eſt A vnius B. Cùm autem A eadem ſit pars ipſius B quota D ipſius G, quot numeri A ſunt in B, tot numeri D ſunt in G. Quot itaque numeri A ſunt in B, totidem numeri A & D ſunt in B & G. Si igitur numerus A ea pars fuerit numeri B, & D alterius G, vterque A & D eadem pars erit numerorum B & G quæ fuit A vnius B.

PROPOSITIO VI.

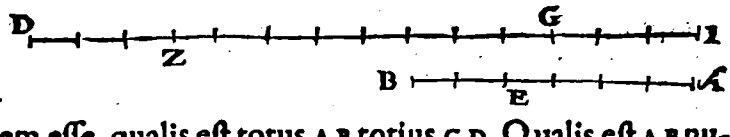
Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & vterque vtriuſque eædem partes erunt, quæ vnus vnius.



Si numerus A fuerit eæ partes numeri B quotæ G eſt alterius D: Dico vtrumque A & G vtriuſque B & D eaſdem eſſe partes, quæ A totius B. Quoniam eædem ſunt partes A ipſius B quæ G numeri D, ſingularum ipſius A in B æqualis erit multitudo, multitudini ſingularum G in D. Quæ igitur pars eſt vna partium numeri A ipſius B, ea pars erit vtraque ex A & G ſumpta, vtriuſque B & D, per præcedentem: ſimiliter & reliquæ ex A & G ſumptæ, cùm ſint prioribus æquales. Vterque igitur A G ipſorum B D eædem partes erit, quæ vnus A fuit vnius B. Si itaque numerus numeri partes fuerint, &c.

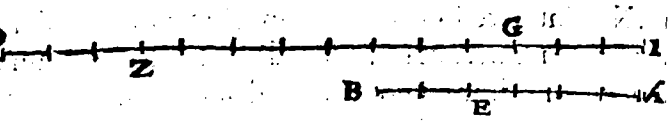
PROPOSITIO VII.

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati, & reliquus reliqui pars erit, qualis totus totius.



Sit A B numerus, numeri G D ea pars, qualis ablatus A E ablati G Z: Dico reliquum E B reliqui Z D partem eſſe, qualis eſt totus A B totius G D. Qualis eſt A B numeri G D vel A E ipſius G Z, talis eſto E B alicuius I G. Si igitur A E ipſius G Z pars fuerit qualis E B numeri G I, totus A B totius Z I ea pars erit quæ vnus A E vnius G Z, per quintam huius: ſed qualis eſt A E ablati G Z, talis eſt (per hypotheſim) A B ipſius G D.

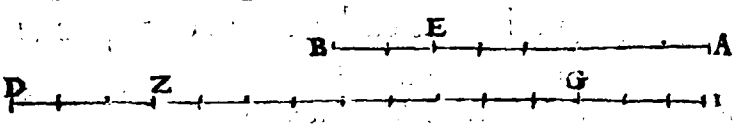
Qualis



Qualis itaq; A B eſt ipſius G D, talis erit eadem A B numeri Z I. æquales erunt igitur G D & Z I numeri: communis autem tollatur G Z, reliquus Z D reliquo G I æquus erit. Qualis itaque pars eſt E B poſiti I G, talis erit idem E B ipſius Z D. Sed qualis eſt A B totius G D talis poſitus eſt E B ipſius G I. Qualis igitur pars erit A B totus totius G D, talis erit E B reliquus reliqui Z D. Si itaque numerus numeri pars fuerit qualis ablatus ablati, &c.

PROPOSITIO VIII.

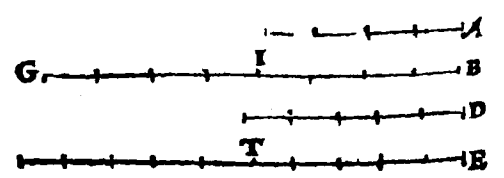
Si numerus numeri partes fuerit, quæ ablatus ablati, & reliquus reliqui eædem partes erit, quæ totus totius.



Eſto numerus A B numeri G D partes quę ablatus A E ablati G Z: Dico reliquum E B reliqui Z D eaſdem eſſe partes quæ totus A B totius G D numeri. Ponatur E B eædem partes numeri G I quæ A B ipſius G D, vel A E numeri G Z. Si autem E B numeri G I partes fuerit quæ A E ipſius G Z, & vterque A E E B vtriuſque G Z G I (hoc eſt, totus A B totius Z I) eædem partes erit, quæ vnus A E vnius G Z, per ſextam huius, ſed quales ſunt A E ipſius G Z, tales ſunt A B numeri G D, per hypotheſim. Quales igitur ſunt A B numeri Z I, tales ſunt idem A B ipſius G D. Æquales igitur ſunt Z I & G D numeri. Communis auferatur G Z, reliqui G I & Z D æquales erunt. Quales igitur partes eſt E B numeri G I, tales erit idē E B ipſius Z D, ſed quales E B ipſius G I, tales poſitus eſt A B ipſius G D. Quales itaque reliquus E B reliqui Z D, tales erit totus A B totius G D. Si itaque numerus numeri partes fuerit, &c.

PROPOSITIO IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & viciſſim qualis pars vel partes erit primus tertij, eadem pars erit, vel partes ſecundus quarti.

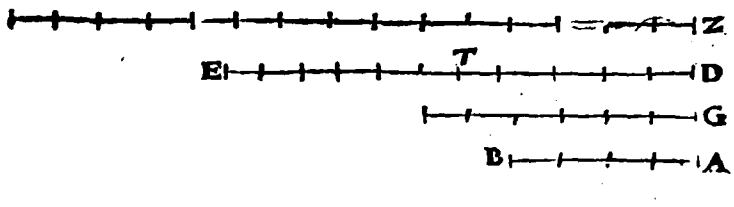


Sit numerus A numeri B G ea pars quæ D ipſius E Z: Dico viciſſim eam partem vel partes eſſe A primum numeri D tertij quam B G ſecundum ipſius E Z quarti. Secetur B G in numeros æquales ipſi A, qui ſint B I I G. Similiter numerus E Z in numeros æquales ipſi D (cùm ſint eorum partes) qui ſint E T T Z. Quoniam ea pars eſt A numeri B G quæ D ipſius E Z, æqua erit multitudo A in B G quæ D in E Z, ſcilicet B I I G & E T T Z. Cæterùm cùm B I I G ſint æquales, ac E T T Z æquales, ſinguli B I & I G ſingulorum E T vel T Z eædem pars vel partes erunt. Si autem numerus B I numeri E T & alter I G alterius T Z eadem pars vel partes fuerit, & vterque (totus ſcilicet B G) vtriuſque (totius E Z) eadem pars vel partes erit, quæ vnus B I vnius E T, per quintam & ſextam huius. Atqui numerus B I ipſius E T eadem pars, vel partes eſt, quæ A numeri D, cùm A & D ſint ipſis B I E T æquales. Qualis itaque pars vel partes eſt A tertij D, ea pars vel partes erit B G ſecundus numeri E Z quarti. Si igitur numerus numeri pars fuerit, & alter, &c.

PROPOSITIO X.

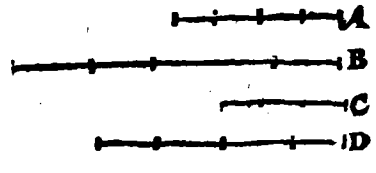
Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eędem partes, &

tes,& viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, vel pars,eædem partes erit & ſecundus quarti,vel eadem pars.



Sit numerus A B numeri G eædem partes, quæ D E numeri Z:Dico viciſſim, primum A B eaſdem eſſe partes tertij D E & ſecundum G quarti Z, vel eandem partem. Sint in A B partes ipſius G hæ A I I B. In D E verò partes numeri Z ſint totidem D T T E,ſunt enim eædem partes. Quia quæ pars eſt A I ſecundi G, ea pars eſt D T quarti Z. Erit A I primus tertij D T eadem pars vel partes, quæ ſecundus G quarti Z(per nonam huius)ſed cùm A I ipſi I B & D T ipſi T E ſunt æquales, qualis eſt A I ipſius D T,talis eſt I B ipſius T E. Quæ itaque pars vel partes eſt, vtraque A I I B vtriuſque D T T E, eadem pars vel partes erit vna A I vnius D T(per quintam & ſextam huius.) Et proinde quæ G quarti Z (cùm oſtenſa ſit eadem eſſe A I ipſius D T quæ G ipſius Z).Si igitur numerus A B numeri G partes fuerit, & alter D E alterius Z eædem partes,& viciſſim quæ partes eſt primus A B tertij D E vel pars, eædem partes erit ſecundus G quarti Z, vel eadem pars.

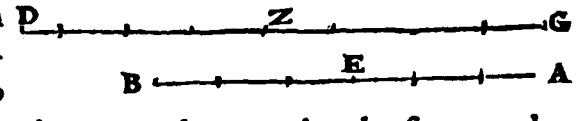
MONITVM.



Hæc cum præfata æquè de partibus totum ſuperantibus vt de parte & partibus toto minoribus intelligitur, vt exemplo, ſi numerus A numeri B fuerit pars vel partes, quæ numerus C numeri D, erit viciſſim primus A eadem pars vel partes tertij C, quæ ſecundus B quarti D,ſcilicet quatuor tertiæ: tanta namque adhiberi poteſt partium copia, quæ totum excedet, nempe quatuor quartæ tres quartas excedunt, vt quatuor tertiæ tres tertias.

PROPOSITIO XI.

Si fuerit ſicut totus ad totum ſic ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit ſicut totus ad totum.

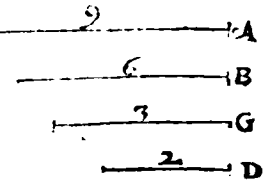


Eſto totus numerus A B ad totum G D,ſic ablatus A E ad ablatum G Z:Dico eſſe reliquum E B ad reliquum Z D ſicut fuit totus A B ad totum G D. Quoniam numeri proportionales ſunt A B ad G D vt A E ad G Z,per hypotheſim. Primus igitur A B ſecundi G D vt tertius A E quarti G Z æquè eſt multiplex ſiue eadem pars vel partes fuerint, per 21 diffinitionem huius. Sed ſi A B totius G D pars vel partes fuerit, quæ A E ablatus G Z ablati, & reliquus E B reliqui Z D eadem pars vel partes erit,quæ totus A B totius G D,per 7 & 8 huius.Numerus igitur A B primus ad ſecundum G D erit vt tertius B E reliquus, ad quartum Z D reliquum, per eandem diffinitionem. Si igitur fuerit ſicut totus ad totum, &c.

PROPOSITIO XII.

Si fuerint quotcunque numeri proportionales, erit ſicut vnus antecedentium ad vnum conſequentium,ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Sit numerus A ad numerum B, ſic G ad D: Dico ſicut vnum antecedentium A ad vnum conſequentium B, vel G ad D, ſic eſſe omnes antecedentes A & G ad omnes conſequentes, B & D: Quoniam proportionales ſunt (per hypotheſim) A ad B, vt G ad D, quotuplex eſt A numeri B tam multiplex eſt G ipſius D, vel eadem pars vel partes (per 21 diffinitionem huius). Et ideo primus A tertij G eadem erit pars vel partes, vt ſecundus B quarti D (per 9 & 10 huius). Vterque igitur A & G, vtriuſque B & D, eadem pars erit vel partes, per quintam & ſextam huius, quæ vnus A vnius B. Et igitur (per 21 diffinitionem huius) proportionales erunt omnes, ſcilicet A & G ad omnes B & D, ſicut vnus A ad vnum B. Si itaque fuerint quotcunque numeri proportionales, erit ſicut vnus, &c.



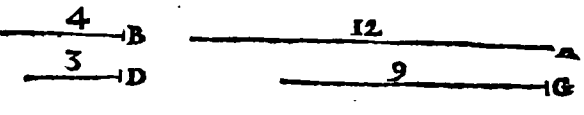
MONITVM.

Huius theorematis figura, quam ab antiquis exemplaribus ſumpſit Theon, perſpicuè ſequitur multiplicium legem à nobis expoſitam, ſcilicet augmenti ac decrementi: cùm autem exiſtimet Theon partem aut partes multiplicis eſſe relatiuas, ſimiliter & Campanus, ſatis tamen impropriè, cùm ad totum ſolùm referantur. Nihilominus A maiorem B minoris, partem vel partes in demonſtrando theoremate dixit, ſimiliter vt G maiorem ipſius D minoris: quare fateri cogentur eorum relatiuos, ſcilicet B & D, qui quidem ad ipſos A & G eandem habent rationem, eorum multiplices dici, licet minores. Multiplicatione igitur decrementi, dicemus B & D numerorum A & G eſſe æquè multiplices, ſcilicet $\frac{2}{3}$ duorum tertiorum denominatione multiplicationis expreſſos. Hæc & 3 præcedentes ſequuntur 21 diffinitionem huius, quoſlibet ſcilicet æquemultiplices ad ſimplices (ſiue pars, ſiue partes fuerint illi multiplices) eandem habere rationem, & ideo proportionales vocari: & proinde duarum magnitudinum diſcretarum rationem, ſola multiplicationis (qua antecedens eſt conſequentis multiplex) quantitate exprimi poſſe, vt diximus ſæpiuſcule. Idem ſequeretur in continuis, ſi illæ multiplicationem reciperent: quare rationum lex quippe eadem inter eas erit, ſed non expreſſa, cùm abſque diſcretione rationis denominatio fieri non poſſit, apud continuas ac confuſas geometriæ magnitudines: Veluti fit circa eas quæ numeris ac arithmeticis diſcretionibus elucidantur. Idcirco videmus partes æquè ſumi totum excedentes, vt à toto deficiẽtes, hoc veluti Theonis exẽplo, partem verò ſemper toto minorem, haud ſecus quàm ſimplex actio multiplice minor exiſtit.

PROPOSITIO XIII.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

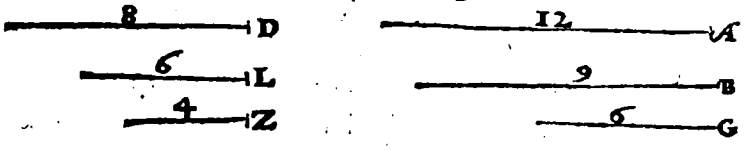
Sint quatuor numeri A ad B, vt G ad D proportionales: Dico eos viciſſim A ad G, vt B ad D proportionales eſſe. Quoniam proportionales ſunt A ad B vt G ad D, æquemultiplex erit A minoris B, vt G ipſius D, ſiue eadem pars vel partes fuerint, per 21 diffinitionẽ huius. Si autem A ipſius B pars fuerit, & alter G alterius D eadem pars vel partes, & viciſſim (per 9 & 10 huius) qualis pars vel partes eſt A primus G tertij, eadem pars vel partes erit ſecundus B quarti D. Et proinde (per 21 diffinitionẽ huius) proportionales erunt A ad G, vt B ad D. Si itaque quatuor numeri proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt, &c.



PROPOSITIO XIIII.

Si fuerint quotcũq; numeri, & alij eiſdẽ æquales numero, bini ſumpti

ſumpti in eadem ratione, & æqua ratione proportionales erũt.



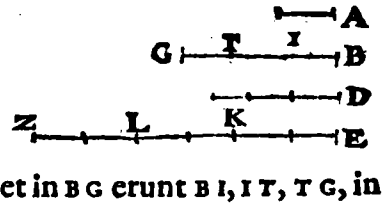
Sint quotcunque numeri A B G, & alij D L Z ipſis æquales numero, qui quidẽ ſint bini in eadem ratione, A ſcilicet ad B, vt D ad L, & B ad G, vt L ad Z: Dico, eos æqua ratione (id eſt ſubtractis mediis) proportionales eſſe, A ad G, vt D ad Z. Quoniam (per hypotheſim) proportionales ſunt, qualis eſt A ipſius B, talis eſt D numeri L, cùm ſint in eadem ratione. Et viciſſim qualis eſt A numeri D, talis erit (per nonam & decimam huius) B ipſius L. Cæterùm cùm ſint (per hypotheſim) B ad G, vt L ad Z: qualis erit B numeri G, talis erit L ipſius Z, per 21 diffinitionem. Viciſſim itaque qualis erit B numeri L, talis erit G ipſius Z, per eandem 9 & 10 huius. Sed qualis fuit B ipſius L, talis fuit A numeri D oſtenſus: qualis itaque eſt A numeri D, talis eſt G ipſius Z. Et viciſſim igitur qualis eſt A ipſius G, talis eſt D numeri Z. Et proinde (per vigeſimam primam diffinitionem huius) A ad G, erunt vt D ad Z, æqua ratione proportionales. Si igitur fuerint quotcunque numeri, &c.

MONITVM.

Iam antea ſæpius diximus quaſcunque diſcretarum magnitudinum rationes, inter continuas cadere poſſe, non autem è conuerſo, quaſuis ſcilicet continuarum rationes, inter diſcretas cadere. Quare Euclides his prioribus theorematis eas rationes quas inter diſcretas quãtitates oriri depromit, à multiplicatione, qua antecedens ſumit conſequens, deduci iubet. Nam 21 diffinitione, numeros proportionales æquemultiplices eſſe dixit. Quarto verò theoremate & ſex illud ſequẽtibus, idem inter ſimiles partes quod & inter ſimiles rationes accidere profert. Vndecimo autem & tribus ſequẽtibus, numerorum inter ſe rationes, à partium ſimilitudine (per 21 diffinitionem) naſci exponit: quæ quidem partes ſimiles ab æqua multiplicationis denominatione productæ, numerorum proportionem producunt, licet per augmentum multiplicatæ maius multiplex, vel per decrementum minus multiplex (quod partes vocant) educant: quare affinitas illa, quæ ratio inter magnitudines dicitur, nihil aliud erit, quàm ea multiplicationis denominatio, qua antecedens multoties ſumit conſequentis augmentum vel decrementum. Id equidem voluit numeris exponere Euclides, cùm per continuas diſcernere non potuerit quantitates, eo quòd continuæ vel geometricæ multiplicationem, velut diſcretæ & arithmeticæ non ſuſcipiunt.

PROPOSITIO XV.

Si vnitas aliquem numerum metiatur, pariter autem alter numerus alium metiatur, & viciſſim pariter vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.



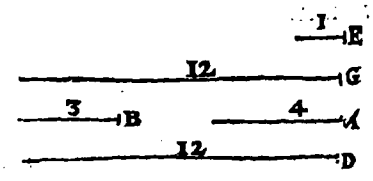
Metiatur vnitas A aliquem numerum B G, pariter autem alter numerus D metiatur alium E Z: Dico vnitatem A metiri viciſſim tertium D pariter vt ſecundus B G metitur quartum E Z. Quoniam vnitas æquè metitur B G, vt numerus D ipſum E Z, quot ſunt in B G vnitates, tot erunt in E Z numeri, ipſi D æquales, ſcilicet in B G erunt B I, I T, T G, in E Z verò E K, K L, L Z. Sicut igitur vnitas A metitur D numerum, ſic ſingulæ partes ipſius B G, ipſi A æquales, ſingulas ipſius E Z (ipſi D æquales) metiuntur, vtræque igitur ſecundi B G vtraſque quarti E Z ſimiliter metiuntur, vt ſingulæ ſingulas (per quintam huius) ſed vt ſingulę ſingulas metiuntur, ſic oſtenſa eſt vnitas A metiri numerum D. Vnitas igitur tertium D pariter metitur numerum, vt ſecundus B G quartum E Z. Si vnitas igitur aliquem, &c.

MONITVM.

Idem hoc theoremate concludit Euclides in numeris paſſiuis, quod 9 & 13 huius præmiſit in actiuis, ſeu arithmeticis numeris, vt oſtendat quoſuis numeros, ſiue actiuos diſcretos, ſiue paſſiuos continuos, aut qui ſemper ad vnitatem reducuntur proportionales, proportionis viciſſitudinem producere: quia verò idem eſſe exiſtimat Euclides, pariter metiri, vel eandem eſſe partem, æquè multiplicem eſſe, & eandem rationem habere, tria theoremata idem ex his tribus aſſumptis referentia propoſuit, ſcilicet 5 huius, primum quinti, & 12 huius, quæ quidem binas illas decrementi vel augmenti æquas multiplicationes, rationum ſimilitudinem irrefragabili methodo generare cogunt.

PROPOSITIO XVI.

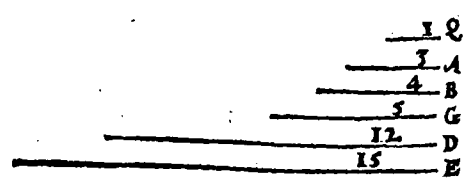
Si duo numeri multiplicantes ſe inuicem fecerint aliquos, geniti ex eis adinuicem æquales erunt.



Exponantur duo numeri A & B ſe inuicem multiplicantes, ſcilicet A multiplicans B efficiat G & B multiplicans A efficiat D: Dico G & D genitos æquales eſſe. Sumatur vnitas E: cùm enim A repetens B per ſuas vnitates producat G, ſequetur numerum B metiri ipſum G per vnitates ipſius A, ac per eaſdem vnitates E metiri eundem A. Qualis itaque pars eſt E numeri A, talis eſt B numeri G, & viciſſim (per præfatam) qualis eſt pars E numeri B, talis eſt A ipſius G. Rurſus quoniam B multiplicans A producit D, ſequetur A metiri D per vnitates numeri B, & per eaſdem E vnitas metitur eundem B. Qualis itaque pars eſt E ipſius B, talis eſt A pars numeri D: ſed qualis eſt E numeri B, talis oſtenſa eſt eſſe A ipſius G. Qualis igitur eſt pars A ipſius G, talis eſt idem A pars numeri D: æquales itaque ſunt G & D adinuicem. Si igitur duo numeri multiplicantes, &c.

PROPOSITIO XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, geniti ex eis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.



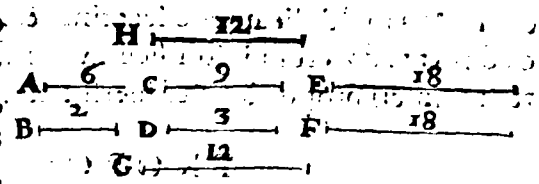
Multiplicet numerus A duos numeros B & G, & producat duos D & E: Dico D ad E ſic eſſe vt B ad G: eſto vnitas Z. Quoniam A multiplicans B ipſum D facit, igitur B metitur D per vnitates numeri A, & per eaſdem Z metitur ipſum A: quæ itaque pars Z ipſius A, talis eſt B numeri D. Eodem argumento A multiplicans G ipſum E efficit, quare G metitur E per vnitates ipſius A, & Z metitur numerum A per eaſdem vnitates. Qualis itaque pars eſt Z numeri A, talis eſt G ipſius E: ſed qualis Z fuit numeri A, talis fuit B ipſius D. Qualis igitur B erit ipſius D, talis erit G numeri E, & viciſſim (per nonam huius) qualis erit B ipſius G, talis erit D ipſius E: ſicut igitur B ad G, ſic erit (per 21 diffinit. huius) D ad E. Si itaque numerus duos numeros, &c.

COROLLARIVM.

Si duo numeri duos eandem eis habentes rationem, conuerſim multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex eis æquales adinuicem erunt.

Sint

Sint duo numeri A & B, insuper duo C & D, eandem ipsis A ad B rationem habentes, quos mutuè multiplicent, hoc est, A multiplicans D faciat F, & B multiplicans C faciat E: Dico genitos E & F æquales esse.

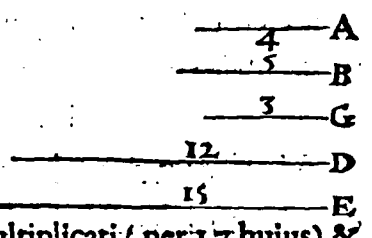


Multiplicent se invicem A & B, hac via vt A multiplicans B faciat G: necnon, B multiplicans A faciat H, erunt ideo G & H æquales ex 16 huius. Rursus quia A multiplicans binos B & D duos fecit G & F, erunt G ad F vt B ad D ex hoc theoremate haud secus: quoniam B multiplicans binos A & C, duos fecit H & E, erunt ex eodem H ad E, vt A ad C. Est autem A ad C vt B ad D ex 13 huius: fuit autem similis ratio numeri A ad C, quæ H ad E: similisq; numeri B ad D quæ G ad F. Erit igitur H ad E vt G ad F, ac vicissim H ad G, vt E ad F, per 13 huius. Fuerunt autem G & H æquales. Erunt igitur E & F æquales, eandem ipsis H ad G rationem habentes. Si itaque duo numeri duos, &c.

PROPOSITIO XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex eis eandem habebunt rationem quam multiplicantes.

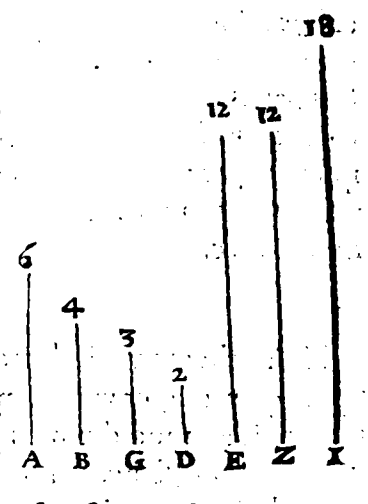
Duo numeri A & B multiplicent numerum G, & producant D & E: Dico D ad E sic esse vt A ad B. Quoniam A & B ipsum G multiplicantes idem producunt, quod producet G duos A & B multiplicans (per 16 huius) ipsos quidem D & E. si itaque G duos A & B multiplicans ipsos fecerit D & E, eandem rationem habebunt, quam A ad B multiplicati (per 17 huius), & igitur quam ipsi iidem A & B multiplicantes. Si itaque duo numeri numerum aliquem, &c.



PROPOSITIO XIX.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo & quarto fit, æqualis est ei qui ex secundo & tertio: Et si qui ex primo & quarto fit, æqualis fuerit ei, qui ex secundo & tertio, ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

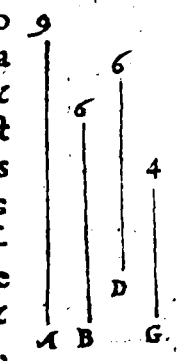
Sint quatuor proportionales numeri A ad B, vt G ad D, ex primo autem & quarto A & D fiat E: ex secundo verò & tertio B & G fiat Z: Dico E & Z æquales esse. Multiplicans A numerum G faciat I: Et quoniã idem A multiplicans D fecit E, erit (per 17 huius) G ad D, vt I ad E: sed fuit A ad B, vt G ad D, ex hypothesi, erit igitur A ad B, vt I ad E. Rursus cùm A multiplicans G fecerit I, at B eundem G multiplicans fecerit Z: erunt (per 18 huius) A ad B, sicut I ad Z: sed fuit A ad B sicut I ad E, sicut itaque I ad Z, sic erit I ad E: ipsi itaq; E & Z, sunt æquales per 9 quinti. Ad secundam autem partem supponamus E & Z, qui ex primo & quarto, æquales esse: Dico quatuor A ad B, vt G ad D esse proportionales, eisdem dispositis, quoniã A ipsos G & D multiplicans facit I & E: erit (ex 17 huius) G ad D, sicut I ad E. Quoniam autem æquales ponuntur Z & E, erit (per septimum quinti) G ad D sicut I ad Z: sed



cùm A & B multiplicantes G fecerint I & Z, erit (per 18 huius) A ad B, vt I ad Z, ſed fuit G ad D, vt I ad Z: erunt igitur ſicut A ad B ſic G ad D proportionales. Si itaque quatuor numeri proportionales fuerint, &c.

PROPOSITIO XX.

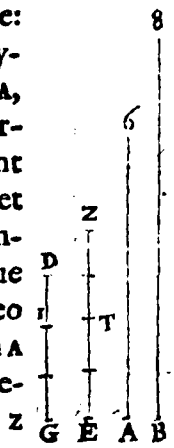
Si tres numeri proportionales fuerint, qui ſub extremis æqualis eſt ei qui à medio, & ſi qui ſub extremis æqualis fuerit ei qui à medio, ipſi tres numeri proportionales erunt.



Sint tres numeri A B G proportionales A ad B, vt B ad G. Dico ſub extremis A & G cõprehẽſum æquum eſſe ei, qui à medio B fit. ponatur medio B æqualis D: erit igitur D ad G vt B ad G (per 7 quinti) & proinde A ad B, vt D ad G. Qui itaque ſub A & G extremis, æquus eſt ei, qui ſub B & D mediis, per præcedentem: atqui ſub B & D æquus eſt ei qui ex B, cùm ſint B & D æquales: qui igitur ſub extremis A & G æquus erit ei, qui à medio B. Ad ſecundum autem, ſupponamus (eiſdem diſpoſitis) eum qui ſub extremis A & G æquum eſſe, ei qui à medio B: Dico ipſos A ad B, vt B ad G eſſe proportionales. Si qui ſub A & G æquetur ei qui ex B fit, æquabitur & ei qui ſub B & D æqualibus, erit itaque (per ſecundam partem præcedentis) ſicut A ad B, ſic D ad G: ſed ſicut D ad G, ſic eſt (per ſeptimum quinti) B ad idem G: ſicut igitur A ad B, ſic erit B ad G. Si igitur tres numeri proportionales, &c.

PROPOSITIO XXI.

Minimi numeri eandem rationem habentium eis, metiuntur eandem rationem habentes æqualiter, antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem.

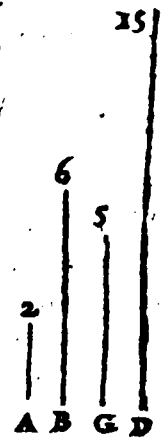


Sint minimi numeri G D & E Z in data numerorum A ad B ratione: Dico G D metiri numerum A æquè vt E Z numerum B. Cùm ex hypotheſi ſint proportionales G D ad E Z vt A ad B, & viciſſim C D ad A, vt E Z ad B. Ipſi G D & E Z minores, ſunt maiorum A & B pars aut partes, per 4 huius, & eadem, per 21 diffinitionem huius. Sed non ſunt eædem partes: nam ſi G D & E Z ſecarentur in eaſdem partes, ſcilicet G D in G I I D, & E Z in E T T Z, eorum rurſus partes, G I ad E T eandem rationem haberent quam G D ad E Z, per 15 quinti. Non itaque eſſent minimi huius rationis G D ad E Z: Nimirum minores eſſent eorum partes G I ad E T. Sunt itaque G D & E Z (per 4 huius) ipſorum A & B pars. Quare (per tertiam diffinitionem huius) metiuntur numeros A ac B. Et æqualiter G D antecedens ipſum A conſequens, vt E Z ipſum B, per 21 diffinitionem huius, cùm ſint proportionales, ex hypotheſi & 13 huius. Minimi itaque numeri eandem rationem habentium eis metiuntur, &c.

MONITVM.

Huius theorematis demonſtratio per numeros fieri non poteſt in ratione multiplici, quæ ſemper vnitatem in minimis partibus eius producit. Quare proſequitur Euclides quod diximus, ſuper 13 diffinitione huius, & monito poſt principia huius appoſito, ſcilicet numeros multiplicem habentes rationem, non poſſe in minimos huius rationis numeros cadere, licet aliàs quaſuis proportionalium leges generales ſubeant, non tamen minimi datæ rationis numeri, nec inter ſe primi aliquando

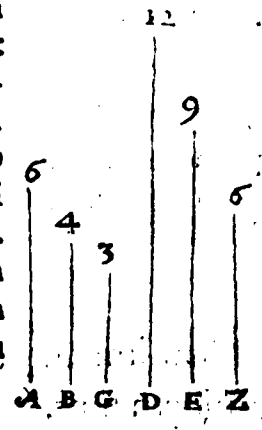
quando dici possunt. Ait enim Euclides minimos semper metiri maiores eandem rationem habentes, tamen hoc exemplo videmus A & B minimos numeros esse triplicis rationis, qui tamen non metiuntur maiores, scilicet G & D, sed sunt eorum partes, contra id quod demonstratum est. Hoc argumentum soluitur per ea quæ iam diximus, hoc quidem exemplum in ratione multiplici propositum esse, cuius nusquam minimæ partes numeri esse possunt, cùm non sit pura numerorum ratio. Quare licet A & B sint minimi huius rationis numeri, non tamen sunt minimæ numerorum partes in his multiplicibus rationibus, velut in reliquis, quæ minimas numerorum partes in data ratione numeris depromunt. Multiplices verò vnitate & numero minimas suæ rationis partes exhibent, non autem numeris, eo quòd ratio multiplex non sit pura arithmeticorum numerorum siue discretarum tantùm quantitatum, sed cadit inter continuam & discretam quantitates, ac eius conuersa. Reliquæ verò tantùm inter discretas, per rationis denominationem, sectas quantitates: non igitur in ratione multiplici minimos haberi numeros dicemus, sed tantùm in rationibus numerorum. Cæterùm huius theorematis aliquas voces transtulimus, scilicet antecedentes & consequentes. Nam vera quantitatum proportionalium relatio, non à magnitudine dependet, sed à situ. Siquidem antecedēs alium metitur antecedentem, non eo quòd sit maior vel minor quantitas, sed tantùm eo quòd similem sibi in proportione habeat situm. Idem de consequentibus. Campanus verò id insequi voluit cùm dixit, Quisque suum correlarium (pro relatiuo) secundo exemplo.



PROPOSITIO XXII.

Si fuerint tres numeri, & alij eisdem æquales numero, bini sumpti in eadem ratione, fuerit autem eorum perturbata proportio, & æqua ratione proportionales erunt.

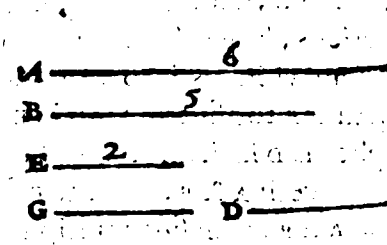
Sint tres numeri A B G & alij tres D E Z bini sumpti in eadem ratione, ordine verò perturbato, scilicet A ad B sicut E ad Z, sicut verò B consequens ad rem aliam G, sic sit res alia D ad E antecedens: Dico æqua ratione esse A ad G vt D ad Z. Quoniam est A ad B sicut E ad Z, qui sub A & Z æquus est ei qui sub B & E per 19 huius. Quia verò est vt B ad G sic (per hypothesim) D ad E, qui sub G & D æquus erit, ei qui sub B & E, per eandem 19 huius. Qui igitur sub G D æquus erit ei qui sub A & Z, per primam communem sententiam. Erit igitur (per secundam partem decimę nonæ huius) A ad G sicut D ad Z. Si fuerint igitur tres numeri, & alij eisdem æquales numero, bini, &c.



PROPOSITIO XXIII.

Primi adinuicem numeri, minimi sunt eandem rationem habentium eis.

Sint primi A & B numeri: Dico eos esse minimos suæ rationis, quòd si non sint, dentur (si fas sit) minores in eadem ratione qui sint G & D. Quoniam G & D sunt minimi, ipsi metiuntur ipsos A & B eandem rationem habentes æqualiter, scilicet G antecedens A, & D consequens reliquum B per 21 huius. Sequetur itaque G metiri A per tot vnitates, per quot D metitur ipsum B: sint illæ vnitates E. cùm autem G & D metiantur A & B per vnitates E, metietur E ipsos A & B per vnitates



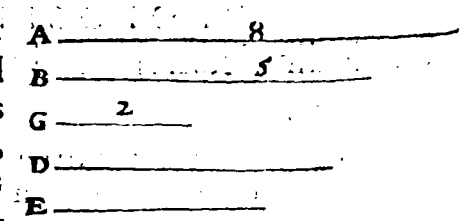
tates ipſorum G & D (per 16 huius). Nam E per G idem efficit quod G per E, Non igitur erunt A & B primi, cùm ipſos metiatur idem E numerus, contra hypotheſim, quod fieri non poteſt: ipſis itaque A & B primis non poſſunt dari minores in eadem ratione. Primi igitur numeri, &c.

MONITVM.

Idem teſtatur Euclides hoc theoremate quod vigeſimoprimo huius monuimus, ſcilicet rationem multiplicem, nec primos ſubire nec minimos ſuæ rationis numeros. Quod ſi in multiplicibus primi adinuicem dicerẽtur minimi, falſum eſſet (cùm ſemper minor vtroſque metiatur) in quauis ratione multiplici ſimpliciter vt 2 & 6. Si verò credamus minores numeros in hac ratione dari 1 & 3, vnitatem pro numero (diſcretionem, non autem quantitatem ſignificante) ſumentes, contra ſecundam huius diffinitionem, in fœdiorem laberemur maculam, vnitas autem non eſt vnitatum multitudo. Multiplex igitur ratio primos nuſquam ſuſcipit numeros, cùm vnus eorum ſemper alium metiatur. Præterea grauiores apparerent lapſus ſi huic indulgeremus culpæ; poſthac ſcilicet 31 huius: cùm enim vnitas ſeipſam ſola metiatur, ſi ea inter numeros quoſuis ponatur, dicetur eſſe primus: ſed omnis primus ad omnes tantùm quos non metitur (per 31 huius) primus erit; igitur vnitas ad nullum primus erit (cùm ea omnes metiatur.) Ratio itaque multiplex vnitatem ſemper in minimis recipiens, primos nõ ſuſcipiet numeros, nec vnitas inter numeros collocabitur, vt diximus. Inſuper fœdarentur multa ſubſequentia theoremata, ſcilicet 25, 27, 28, 29, 30, 31 huius 11, 15, 16, 17, noni. Nam omnes numeros metiens vnitas ad eoſdem primus eſſet. Præterea 20 octaui repertiretur vnitas primus ſimul & planus numerus, quod excedit poſſibile, niſi per noſtram diſtinctionem numerorum, quorum alij quantitati, alij verò operationi deſtinati ſunt, vt prima huius diffinitione diximus, & proinde vniuerſa numerorum traditio eouſque fluctuaret, vt demum præ confuſione demergeretur. quare vnitatem non eſſe operantem numerum, & idcirco rationes multiplices (in minimis partibus vnitatem ſemper recipientes) nec minimos nec quidem primos ſuſcipere ſuæ rationis numeros intelligamus, cùm ea non ſit diſcretorum pura ratio, ſed continui ad diſcretum, & inter eos recipi tantùm qui quantitatem denotant, non autem diſcretionem. Quod ſi circa vnitatis quantitatem eò quòd is ſemper ſit minimus rationis multiplicis terminus, aliquid demonſtrandum ſit, ex quinti ac ſexti theorematibus ſumi debet, quæ numeros continuas quantitates (veluti vnitatis natura concipit) ſignificantes complectuntur. Quòd ſi per numerorum leges idem efficere velimus, per reſpectum partis ad numerum id perfici debet. Vnitas etenim pars eſt cuiuſlibet numeri.

PROPOSITIO XXIIII.

Minimi numeri eandem rationem habentium eis, primi adinuicem ſunt.

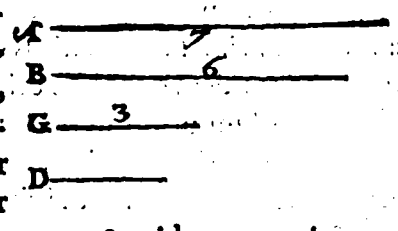


Sint minimi datæ rationis numeri A, B: Dico ipſos A & B, eſſe adinuicem primos. quòd ſi non ſint, detur (ſi fieri poſſit) numerus eos metiens, ſitq; G. Quoties autem G metitur A, tot ſint vnitates in D: quoties verò idem G metitur B, tot ſint vnitates in E, igitur G multiplicans D faciet A, multiplicans verò E faciet B. Si itaque G duos D & E multiplicans fecerit A & B, erit A ad B ſicut D ad E, per 17 huius, qui quidem ſunt minores ipſis A & B, cùm ſint multiplicati, & in eadem ratione (contra hypotheſim) quod non poteſt eſſe. Non datur itaque numerus ipſos A & B metiens, & ideo primi erunt numeri A & B adinuicem. Minimi igitur numeri eandem, &c.

PROP

PROPOSITIO XXV.

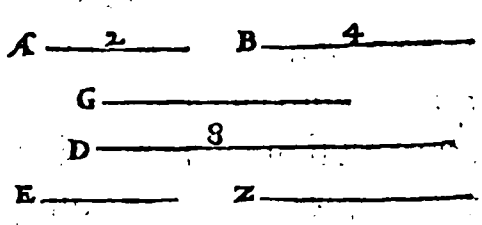
Si bini numeri primi adinuicem fuerint, vnum eorum metiens, ad reliquum primus erit.



Sint bini numeri A & B adinuicem primi, quorum vnum B metiatur G: Dico eundem G ad reliquum A primum esse: quòd si non sint primi G & A, metiatur eos aliquis D. Quoniam autem (per hypothesim) D metitur G, sed G metitur B, igitur D (per primam communem sententiam huius) metietur B. Metitur autem idem D & numerum A, vtrosque itaque A & B idem D metitur: non igitur essent ipsi A & B primi, vt positum fuit: quod fieri non potest. Vnum idcirco eorum A & B metiens aliquis numerus G, ad reliquum A primus erit. Si igitur bini numeri primi, &c.

PROPOSITIO XXVI.

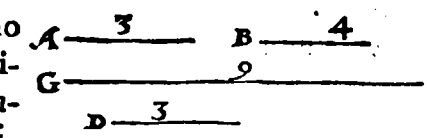
Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, & ex eis genitus ad eundem primus erit.



Sint duo numeri A & B ad aliquem G primi eorum singuli, ex ipsis autem A & B fiat D: Dico ipsum D ad eundem G primum esse. Quòd si non sit, metietur eos D & G aliquis numerus. Sit ille E (si fieri possit). Quia autem E metitur G vnum primorum A & G, ipse E ad reliquum A primus erit, per præcedentem. Tot sint vnitates in Z quoties E metitur D. Itaque E multiplicans Z efficit ipsum D: Per constructionem autem A & B faciunt D. Si igitur qui ex primo A & quarto B æquetur ei qui ex secundo E & tertio Z, erit (per 19 huius) A ad E sicut Z ad B. Insuper cùm E & A ostensi sint primi, erunt & minimi datæ rationis numeri per 23 huius. Metietur ergo A numerum Z sicut E ipsum B, per 21 huius. Sed idem E metitur ipsum G, qui primus ad B positus est: metietur igitur E duos G & B qui positi sunt primi, quòd fieri non potest. Nullus itaque ipsos G & D metitur, quare ipsi G & D sunt primi. Si ergo duo numeri ad aliquem numerum, &c.

PROPOSITIO XXVII.

Si duo numeri primi adinuicem fuerint, qui ex vno eorum fit ad reliquum primus erit.



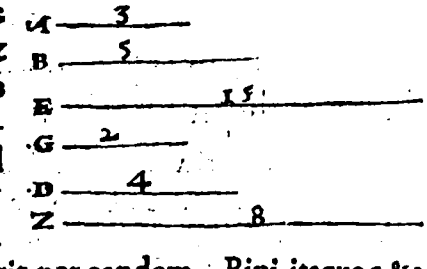
Sint duo numeri adinuicem primi A & B: ex vno autem eorum A fiat G: Dico G ad reliquum B primum esse. Ponatur ipsi A æqualis D. Quoniam autem A primus est ad B, primus erit ad eundem B similiter & D ipsi A æqualis. Duo igitur numeri A & D ad aliquem B primi faciunt G. Igitur (per 26 huius) genitus G ex eis, ad eundem B primus erit, fit etenim G ex A & D æqualibus, qui idem est ei qui ex vno eorum, scilicet A in se. Si itaque duo numeri primi adinuicem fuerint, qui ex vno, &c.

PROPOSITIO XXVIII.

Si duo numeri ad duos numeros ambo ad vtrumque primi adinuicem fuerint, qui ex prioribus ad eum qui ex posterioribus fiet, primus erit.

Sint

Sint bini numeri A & B ad binos numeros G & D, vterque ad vtrumque, ſcilicet A & B ad G, & A & B ad D primi adinuicem. Ex A autem & B fiat E, ex G verò & D fiat Z: Dico B ad Z eſſe primos adinuicem. Quoniam enim bini A & B ad aliquem G primi ſunt, genitus ex eis E (per 26 huius) ad eundem G primus erit. Similiter quia idem A & B ſunt primi ad D, & B ad D primus erit, per eandem. Bini itaque G & D ad aliquem E primi, efficiunt compoſitum ex ipſis, ſcilicet Z, ad eundem E primum, per eandem 26 huius. Si igitur duo numeri ad duos numeros vterque ad vtrumque, &c.



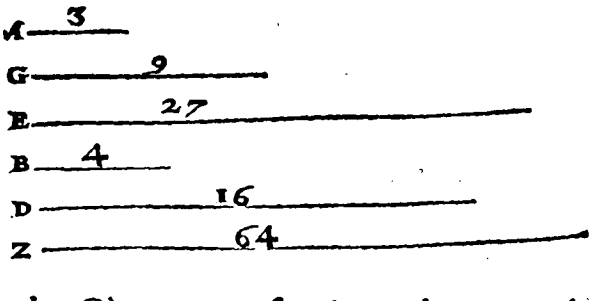
MONITVM.

Mutauimus propoſitionis quædã dicta, eò quòd confusè ſatis prębuerit Theon, cùm ait (*quæ ex eis fient*) abſque vlla diſtributione. Ideo Campani ſententiam ſaniorem hoc loco ſequemur. Duo etenim tantùm conſurgunt, vnus quidem ex prioribus, alter verò ex poſterioribus.

PROPOSITIO XXIX.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, & multiplicans vterque ſeipſum fecerint aliquos, qui ex eis fiunt primi adinuicem erunt. Et ſi qui in principio numeri, genitos multiplicantes fecerint aliquos, & illi quoque primi adinuicem erunt, & ſemper circa extremos hoc continget.

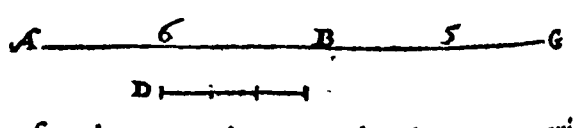
Sint bini A & B primi numeri qui ſeipſos multiplicãtes faciant G & D: factos autem rurſus multiplicantes efficiant, E & Z: Dico G ad D primos eſſe, necnon E ad Z. Quoniam G fit ex A vno primorum A & B, is erit ad reliquum B primus, per 27 huius. Haud ſecus quia D fit ex B, ipſe erit primus ad A. Cùm autem B ſit primus ad G, qui ex B fit, ſcilicet D ad eundem G primus erit per eandem. Erunt igitur bini A G ad binos B & D vterque ad vtrumque primi. Qui igitur fit ex A G, prioribus ſcilicet E, ad ipſum Z factum ex poſterioribus, primus erit, per præcedentem. Et ſemper ſi A & B multiplicantes ipſos E & Z aliquos fecerint, facti eiuſdem præcedentis argumento primi oſtendentur. Si itaque bini numeri adinuicem, &c.



PROPOSITIO XXX.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, & vterque ſimul ad quemuis ipſorum primus erit. Et ſi vterque ſimul ad quemlibet ipſorum primus fuerit, & qui in principio numeri primi adinuicem erunt.

Sint A B ad B G primi adinuicem numeri: Dico totum A G ad alterum quemuis ipſorum, ſcilicet A B primum eſſe. Quod ſi A G ad A B non ſit primus, metietur eos aliquis numerus, qui ſit D: quoniam D metitur totum A G & ablatum A B metietur & reliquum B G per ſecundam



ſecundam communem ſententiam, non igitur eſſent A B & B G primi (contra hypotheſim) quod fieri nequit. Ad ſecundum autem ponamus totum A G ipſi A B primum eſſe: dico A B ad B G primos eſſe: quòd ſi non ſint, metiatur eos D, eiſdem diſpoſitis. Si igitur D metiatur binos A B & B G, vel eos ſua repetitione componat, ipſe D metietur totum A G, cùm ipſum multiplicatione componat: ſed metitur & A B: igitur A B & A G non eſſent primi, contra poſitum, nam eos metiretur D, quod eſſet abſurdum: non igitur metitur aliquis numerus A G & A B, qui ſunt igitur primi. Si bini itaque numeri primi, &c.

COROLLARIVM.

Si numerus metitur duos numeros; & cõpoſitum ab ipſis metietur.

Quoniam D metitur A B, & B G: ſequitur eum metiri totum A G compoſitum ex ipſis A B & B G.

PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus, ad omnem numerum quem non metitur primus eſt.

Si numerus A ſit primus, & non metiatur B: Dico, quòd primi ſunt A ad B: ſi enim non eſſent primi, metiretur eos aliquis G. Primum igitur numerum A metietur aliquis G, quod fieri non poteſt, per duodecimam diffinitionem huius. Si enim G fuerit æqualis ipſi A, non metietur ipſum B quem A non metitur ex hypotheſi: nullus igitur eos metitur: primi erunt itaque A ad B. Omnis igitur primus numerus ad omnem, &c.

A 7
B 12
G

MONITVM.

Proſequitur Euclides hoc theoremate, quod antea 20 & 23 huius monuimus, ſcilicet rationem multiplicem à minimis numeris excludi, eo quòd à primis (qui ſemper ſunt minimi eius rationis) excludatur: hac igitur de cauſa dixit omnem primum ad numerum quem non metitur, primum eſſe. Nam ſi is primus alium metiatur, vt inter habentes rationem multiplicem, non erit ad eum primus, cùm alium ac ſeipſum metiatur, quod tantùm multiplici conuenit rationi, vel eius conuerſæ, quarum numeri (cùm ſemper vnus metiatur alterum) nunquam in primos, ſeu datæ rationis minimos numeros incidunt.

PROPOSITIO XXXII.

Si duo numeri ſeſe multiplicantes fecerint aliquem, factum autem ex eis metiatur aliquis primus numerus, & vnum eorum qui in principio metietur.

Sint bini numeri A & B, ex quorum multiplicatione productum G metiatur primus numerus D: Dico D metiri vnum eorum A vel B. Si autem non metiatur vnum eorum, ſcilicet A, erunt D & A primi, per præcedentem. Quoties autem D metitur G, tot ſint in E vnitates: igitur D multiplicans E, facit G, veluti A multiplicans B eundem fecit G ex hypotheſi. Proportionales itaq; ſunt ipſi A ad D, vt E ad B numeri, per 19 huius: qui enim ex primo A & quarto B æqualis eſt ei qui ex ſecundo D & tertio E: ſed cùm A, D, oſtenſi ſint primi, ipſi erunt minimi ſuæ rationis, per 23 huius, & proinde metientur ipſos B E æqualiter, per 21 huius, antecedēs A antecedentem E, & conſequens D conſequentem B, qui quidem B eſt vnus eorum A vel B, quem igitur metitur D. Si itaque duo numeri ſeſe multiplicantes, &c.

A 2
B 6
G 12
D 3
E 4

COROLL

COROLLARIVM.

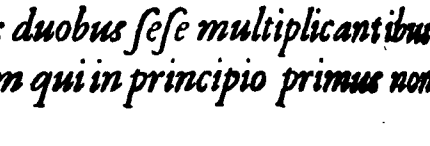
Si numerus ad aliquem factum ex duobus ſeſe multiplicantibus primus non fuerit, & ad vnum eorum qui in principio primus non erit.

Nam metiens numerum & factum, & repetens metientem in facto, ſemper ſunt cum ſeſe multiplicantibus reciprocè proportionales, per ſecundam partem 19 huius: nam qui ex primo & quarto æquatur ei qui ex ſecundo & tertio: Quare factum metiens, vni eorum qui in principio commenſuratur.

PROPOSITIO XXXIII.

Omnis compoſitus numerus, ſub alicuius primi numeri dimenſionem cadit.

Sit compoſitus numerus A: Dico ipſum A ab aliquo primo menſum B eſſe, quoniam compoſitus eſt A aliquis eum metitur, per 14 diffinitionem, qui ſit B: quod ſi primus ſit, habemus optatum: ſi verò B non ſit primus, metiatur eum aliquis G, qui quidem G primus erit, vel aliquis eum metietur, quem tandem metietur ſola vnitas, & hic primus erit. Non enim infinita ſit numerorum ſectio, licet infinita ſit multiplicatio, vt iam antea diximus: ex prima itaque communi ſententia, ille primus metietur A. Omnis igitur compoſitus numerus, &c.



MONITVM.

Quia omnes primi numeri impares ſunt dempto vnico binario, pares tandem ad binarium, impares verò compoſiti tandem ad imparem primum aliquem eos metientem deducuntur, & proinde ad primum, quæ eſt vltima & minima cuiuſlibet menſi menſura, vt ſequitur.

PROPOSITIO XXXIIII.

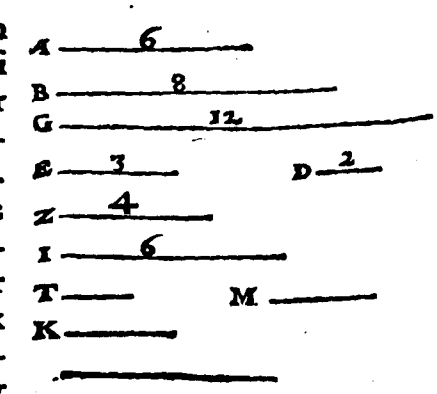
Omnis numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

Quoniam omnis numerus aut primus eſt aut compoſitus, ſed compoſitum aliquis primus metitur, per præcedentem. Igitur omnis numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur cùm ſit compoſitus.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA 5.

Numeris quotcunque datis inuenire minimos eaſdem rationes habentium eis.

Proponantur quotcunque numeri A B G, in quorum rationibus minimos inueniamus, ſi quidem ipſi A B G fuerint primi, exequimur optatum, per 21 huius, ſi autem primi non fuerint, ſit eorum maxima dimenſio D, per coroll. 3 huius. quoties porro D metitur ipſos A B G tot ſint vnitates in numeris E, Z, I, ordine ſeruato. Quoniam D metitur ſingulos A, B, G, per vnitates ipſorum E Z I ſingulorum, ſequitur (ex 18 huius) A, B, G, genitos, eandem habere rationem quàm E, Z, I, multiplicantes: Dico inſuper ipſos E, Z, I, numerorum A, B, G, rationis, minimos eſſe. Si autem in ea ratione minore

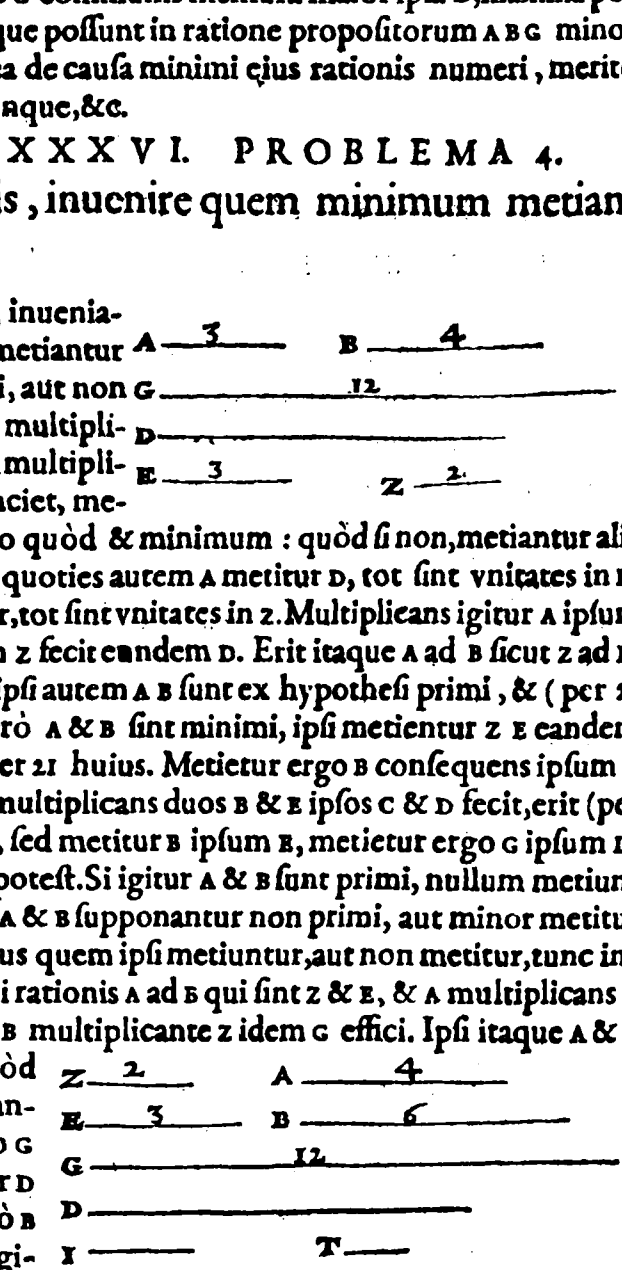


nores ipſis E Z I aliqui dari poſſint, ſint T K L, qui quidem metientur ipſos A B G æqualiter, per 21 huius. Metiantur itaque per vnitates ipſius M, metietur & è conuerſo M ipſos A B G per vnitates ipſorum T K L, per 16 huius, ſed cùm T multiplicans M ipſum A faciat, ſimiliter E multiplicans D eundem A faciat, erit (per 19 huius) qui ex primo E & quarto D æqualis ei qui ex ſecundo T & tertio M, & ideo proportionales erunt E ad T ſicut M ad D, ſed E maior ponitur ipſo T, maior igitur erit M ipſo D: erit ideo M ipſorum A B G communis menſura maior ipſa D, maxima poſita, quod eſt abſurdum. Non itaque poſſunt in ratione propoſitorum A B G minores dari ipſis E Z I numeris, qui ea de cauſa minimi ejus rationis numeri, meritò dicentur. Numeris igitur quotcunque, &c.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA 4.

Duobus numeris datis, inuenire quem minimum metiantur numerum.

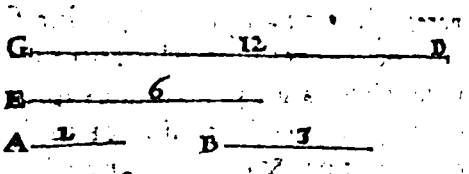
Sint dati duo numeri A & B, inueniamus autem quem minimum metiantur numerum, ipſi A, B aut ſunt primi, aut non primi: ſumantur prius primi, & A multiplicans B ipſum efficiat G, itaque B multiplicans A eundē G (per 16 huius) faciet, metientur ergo A & B ipſum G: Dico quòd & minimum: quòd ſi non, metiantur aliquem minorem ipſo G qui ſit D, quoties autem A metitur D, tot ſint vnitates in E: quoties verò B eundem D metitur, tot ſint vnitates in Z. Multiplicans igitur A ipſum E fecit D, & multiplicans B ipſum Z fecit eundem D. Erit itaque A ad B ſicut Z ad E, per ſecundam partem 19 huius, ipſi autem A B ſunt ex hypotheſi primi, & (per 23 huius) minimi ſuæ rationis, ſi verò A & B ſint minimi, ipſi metientur Z E eandem rationem habentes æqualiter, per 21 huius. Metietur ergo B conſequens ipſum E conſequentem, præterea quia A multiplicans duos B & E ipſos C & D fecit, erit (per 17 huius) ſicut B ad E ſic G ad D, ſed metitur B ipſum E, metietur ergo G ipſum D, maior minorem, quod fieri non poteſt. Si igitur A & B ſunt primi, nullum metiuntur minorem ipſo G. Si verò ipſi A & B ſupponantur non primi, aut minor metitur maiorem, & ſic maior eſt, minimus quem ipſi metiuntur, aut non metitur, tunc inueniantur (per 35 huius) minimi rationis A ad B qui ſint Z & E, & A multiplicans E faciat G, ſequetur (per 19 huius) B multiplicante Z idem G effici. Ipſi itaque A & B productum G metiũtur: Dico quòd & minimum: quòd ſi non, metiantur (ſi fieri poſſit) minorem ipſo G qui ſit D, quoties porrò A metitur D tot ſint vnitates in I, quoties verò B eundem D metitur, tot ſint in T. igitur A multiplicans I, & B, ipſum T eundem efficiunt D. Eſt itaque, ex 19 huius, vt A ad B ſic T ad I. Sed ſicut A ad B ſic fuit Z ad E. Vt igitur T ad I, ſic Z ad E, qui Z & E cùm minimi ſint, per conſtructionem, metiuntur ipſos T & I, per 21 huius. Sequetur igitur E metiri ipſum I: rurſus quoniam A multiplicans E & I ipſos G & D fecit, erunt, per 17 huius, G ad D ſicut E ad I, ſed E metitur I, metietur ergo G maior ipſum D minorem: quod eſt nefas. Non igitur metitur numeros A & B aliquis numerus minor ipſo G, quare datus eſt G minimus, quem metiuntur ipſi A & B numerus. Duobus igitur datis inuenimus, &c.



PROPOSITIO XXXVII.

Si duo numeri numerum aliquem menſi fuerint, & minimus qui ſub eorum dimenſionem cadit eundem metietur.

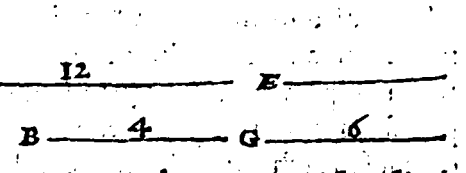
Duo numeri A & B aliquem numerum G D metiantur. Et insuper metiantur minimum E ab ipsis mensum: Dico E metiri etiam G D: quòd si E non metiatur G D siue sit eius pars, saltem erit eius partes, per 4 huius, metiatur E ex ipso G D maximum numerum Z D, relinquens seipso minorem G Z numerum. Quoniam autem bini A & B metiuntur E, metiuntur & Z D, quem E metitur, per primam communem sententiam. metiuntur autem & totum G D, per hypothesim, metientur itaque & reliquum G Z, per secundam communem sententiam, minorem quidem ipso E minimo posito, quod fieri non potest. Metitur itaque E numerum G D. Si igitur duo numeri numerum aliquem, &c.

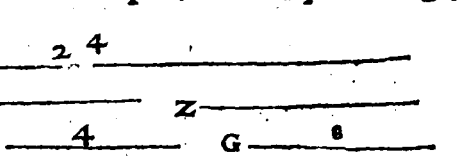


PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA 5.

Pluribus numeris datis, inuenire quem minimum metiantur numerum.

Proponantur tres numeri A, B, G, oportet iam inuenire quem minimum metiantur numerum. Suscipiamus (per 36 huius) minimum quem metiantur duo A & B, qui sit D. Si quidem tertius G susceptum D metitur, optatum consequimur: nam tres eundem D metiuntur: Dico quòd & minimum. Quòd si nõ, detur aliquis minor ipso D, quem metiantur omnes A, B, G, sitque E. Quoniam tres A, B, G, datum E metiuntur, duo A B eundem metientur E. Atqui E minor ponitur minimo D ab ipsis A & B mensо, quod fieri non potest. Non est igitur E minor ipso D. Si verò tertius G susceptum D non metitur, detur minimus quem G & D metiuntur, per 36 huius, qui sit E. Quoniam A & B metiuntur D, metientur & E quem D metitur, per primam commun. sententiam. Tres igitur A B & G metientur E, quem dico esse minimum. Quòd si non, ponatur alius Z dato E minor. Quoniam A B & G metiuntur Z, duo A & B eundem Z metiuntur. Et proinde (per 37 huius) minimus D, quem ipsi A & B metiuntur, eundem Z metitur. Quia verò G & D eundem Z metiuntur, & per eandem, minimus ab ipsis G & D mensus eundem Z metitur, qui est E, maior quidem minorem Z, quod fieri non potest. Minimus igitur ipsos A B G metiens erit E. Simili progressu in quotcunque propositis numeris fiet demonstratio. Nam si tribus A B & G quartus aliquis poneretur, siquidem is quartus datum E metiatur, is erit minimus quem ipsi quatuor propositi metientur. Si verò non metiatur E, inueniẽdus est, ex 37 huius, minimus quem E & quartus metiuntur. Is denique erit optatus, haud secus si quinque, sex, vel quotlibet propositi fuerint. Pluribus itaque numeris datis, &c.

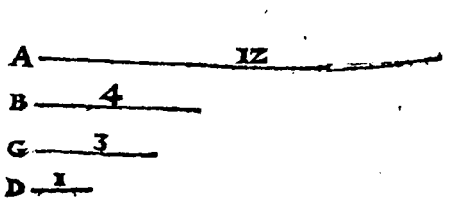




PROPOSITIO XXXIX.

Si numerum aliquis numerus metiatur, mensus cognominatam partem habebit à metiente.

Metiatur numerum A aliquis numerus B: Dico A habere partem denominatam ab ipso B. Quoties enim B metitur A, tot sint vnitates in G. Sit verò D vnitas. Quoniam B metitur A per vnitates numeri G, idem G metietur A per vnitates ipsius B per 16 huius.

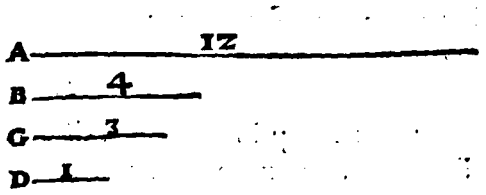


Igitur

Igitur D vnitas toties metitur B quoties G ipſum A. Sed vnitas metitur B per partem A numero B denominatam, per 23 diffinitionem huius. Sequetur itaque G metiri A per partem ab ipſo B denominatam: habet igitur A partem denominatam à metiente B. Si itaque numerum aliquis numerus, &c.

PROPOSITIO XXXX.

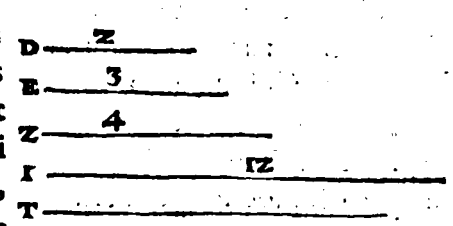
Si numerus partem habuerit quamlibet, numerus cognominans partem eum metietur.



Sit pars numeri A numerus B, eam verò partem cognominans, ſit numerus G: Dico G metiri A. Eſto D vnitas: Quoniam G denominat ipſius A partem B, idem B metitur A per vnitates numeri G, per 23 diffinitionem. Sed per eaſdem D vnitas reſtituit eundem G: viciſſim igitur, per 15 huius, ſicut vnitas metitur B tertium, ſic G metitur A quartum. Quia verò vnitas ipſum B metitur, & G ipſum A metietur. Si itaque numerus partem habuerit, &c.

PROPOSITIO XXXXI. PROBLEMA 6.

Numerum inuenire qui minimus exiſtens habeat datarum denominationum partes.



Sint datæ partes A ſecunda, B tertia, & G quarta. Inueniendus ſit numerus minimus habens partes harum denominationum. Sint denominantes illas partes A, B, G, numeri D, E, Z. Minimus autem numerus, quem D, E, Z, metiuntur, ſit per 38 huius I: Dico I eſſe minimum habentem datas partes A, B, G. Quod ſi non ſit, eſto (ſi fieri poſſit) minor eas partes habens numerus T. Cùm T habeat partes A, B, G, metientur eum numeri D, E, Z, partium A, B, G, denominatores, per 40 huius. Minorem quidem minimo I quem metiuntur, quod fieri non poteſt. Non igitur metiuntur D, E, Z, numeri, minorem ſuſcepto I. Quòd autẽ numerus I habeat partes A, B, G, patet (per 39 huius): nam metiuntur eum denominatores partium A, B, G, ſcilicet D, E, Z. Numerum igitur inuenimus, qui minimus exiſtens, &c.

COROLLARIVM.

Si numerum quotcunque numeri metiantur minimum, is minimus erit, habens partes ab ipſis denominatas.

Nam cùm inuenimus I (per 38 huius) minimum quem metiuntur D, E, Z, ſtatim concluſimus eſſe I minimum habentem partes A, B, G, ab ipſis D E Z numeris denominatas.

ADDITIO.

Campanus huic addit poſt inuentionem prioris minimi, ſecundum inuenire, hoc eſt eum, qui dempto minimo minor eſt, & tertium & quartum, &c. Secundum quidem duplato I: nam numeri metientes I metiuntur eius duplum, per primam communem ſententiam huius. Maior autem ipſo I, & minor duplo, dari non poteſt (per ſecundam communem ſententiam): nam quia partes datæ metiuntur totum, ſcilicet duplo minorem, & ablatum ſcilicet I, ſequetur ergo quòd metirentur & reliquum, minimo I minorem, quod fieri non poteſt. Neceſſe eſt igitur excedentem I vſque ad duplum venire ſecundum, ad triplum autem tertium, ad

quadruplum ſimiliter quartum, cùm nunquam partes illæ minorem ſuſcepto aliquem metiri poſſint.

Poſtmodum addit idem Campanus, inueniendum eſſe minimum habentem datas partium partes, quas faciliùs in vnicum fractionis genus reducẽtes, per hanc propoſitionem abſque tam prolixa ingeniorum tortura, noſtro iudicio reperiemus, vt ſi tertiam dimidiæ & quartam tertiæ partium partes minimum habentes optaremus, reducenda eſſet tertia dimidiæ in ſextam, quarta verò tertiæ in duodecimam: tum demum numerum perquiremus, habentem ſextam & duodecimam partes, per hoc problema.

MONITVM.

Numerum qui minimus exiſtens datas partes habeat, Euclidem optare dicit Theon, Campanus verò datarum denominationum partes habentem optat, quòd verius Euclidem inſequi arbitramur. Nam partes (abſque denominatione) etiam propoſitas numerum habentem, dare per hanc poſſumus, veluti damus eum qui propoſita ſola denominatione, non autem partium quãtitate, poſtulatur. Sed eum numerum qui vtraque propoſita ſcilicet partium denominatione & earum quantitate, per numeros expreſſa inueniri iubetur, non dabimus, vt numerũ cuius tertia pars ſit 4, quinta verò 3, non dabimus, eò quòd vtrumque & denominationem, & partis quantitatem proponamus. Quare cùm ſemper cuiuſlibet numeri partem & eius partis denominatorem eundem numerum ſemper metiri (per quadrageſimam huius) intellexiimus, eadem methodo facile propoſitas tãtùm partes vel propoſitas tantùm partium denominationes minimum numerum habentem, facilè aſſequemur. Cuiuſlibet enim numeri vnica denominatio vnicam quantitatem partis pronunciat, ſicuti & vnica partis quantitas, vnicam denominationem tantùm profitetur in toto, aliàs ſequeretur quemuis numerum per quemlibet poſſe multiplicari, quod longè abeſt:

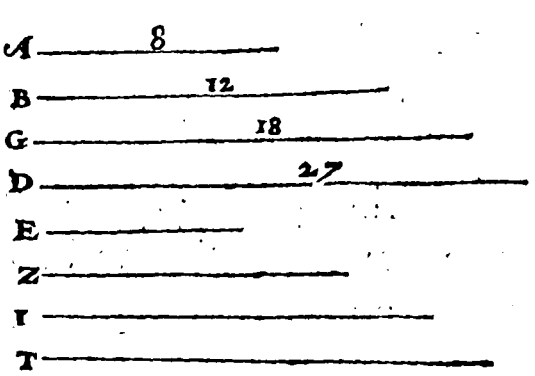
EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER OCTAVVS.

PROPOSITIO I.

SI FVERINT quotcunque numeri continuè proportionales, extremi verò ipſorum primi adinuicem fuerint, omnes minimi ſunt eandem rationem habentium eis.

Sint quotcunque continuè proportionales numeri A, B, G, D, quorum extremi A & D ſint primi: Dico ipſos A, B, G, D, eſſe tot minimos datæ rationis: quòd ſi minus, dẽtur minores ipſis A, B, G, D, hi B,

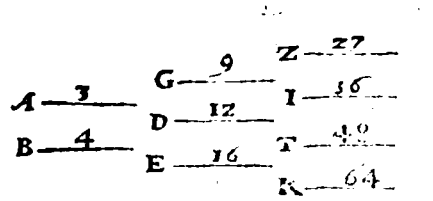
hi E, Z, I, T. Qui cùm ſupponantur in eadem eſſe ratione ipſis A, B, G, D, ex æquali erunt (per 14 ſeptimi) ſicut A ad D, ſic E ad T: ſed A ad D primi ſunt, per hypotheſim, & minimi, per 23 ſeptimi. Ipſi igitur metiuntur E T eandem rationem habentes æqualiter, per 21 ſeptimi: maiores igitur metirentur minores, quod fieri non poteſt, ipſi itaque A, B, G, D, minimi erunt, ſuæ rationis in hac multitudine. Si fuerint igitur quotcunque, &c.



PROPOSITIO II. PROBLEMA I.

Numeros quotlibet continuè proportionales in data ratione minimos inuenire.

Sit data ratio A ad B (per 35 ſeptimi) in minimis numeris, & multiplicans A ſeipſum faciat G: multiplicans verò B ſeipſum faciat E, ipſi autem A & B ſeinuicem multiplicantes efficiant D: Dico G, D, E, tres minimos eſſe datæ rationis. Si verò optemus quatuor, A multiplicans G, D, E, ipſos faciat Z, I, T: B verò multiplicans E reliquum efficiat K: Dico Z, I, T, K, eſſe quatuor minimos rationis A ad B: quoniam autem A duos numeros A & B multiplicans, fecit G & D, erit (per decimam ſeptimam ſeptimi) ſicut A ad B, ſic G ad D: quia verò duo A & B, numerum B multiplicantes ipſos efficiunt D & E, erit ſicut A ad B, ſic D ad E per 18 ſeptimi. ſed ſicut A ad B, ſic fuit G ad D: ſicut igitur G ad D, ſic erit D ad E, ſicutq; A ad B. Præterea dico tres G, D, E, minimos eſſe, cùm A & B ſint minimi, ipſi (per 24 ſeptimi) primi erunt: quia verò ſeipſos multiplicãtes efficiunt G & E, & hi quoque (per 29 ſeptimi) primi erunt: ſed & extremi ipſorum G, D, E, ipſi itaque G, D, E, minimi ſunt eandem rationem habentium, eis (per præfatam). Secundo quoniam A ipſos G, D, E, multiplicans efficit Z, I, T, erunt (per 17 ſeptimi) Z ad I, & I ad T, ſicut G ad D, & D ad E. Cæterùm quoniam A & B ipſum E multiplicantes, fecerunt T & K, erit A ad B (per 18 ſeptimi), ſicut T ad K: ſed ſicut A ad B, ſic fuit Z ad I, & I ad T. ſicut igitur A ad B, ſic eſt Z ad I, & I ad T, ac T ad K, quos etiam minimos dico rationis, A ad B totidem. Cùm A & B primi, qui in principio numeri genitos G & E multiplicantes fecerunt aliquos Z & K, & illi quoque (per ſecundam partem 29 ſeptimi) primi erunt, ſed & extremi horum quatuor Z, I, T, K, ipſi igitur Z, I, T, K, omnes minimi ſunt eandem quam A ad B rationem habentium, per primam huius. Quia verò (per 29 ſeptimi) ſemper circa extremos illud contingit, A & B genitos Z & K multiplicantes, alios primos efficient, extremos quidem quinque proportionalium, & proinde (per primam huius) omnes quinque minimos huius rationis, & ſic infinitè. Numeros igitur quotcunque inuenimus minimos in data ratione, continuè proportionales.



COROLLARIVM.

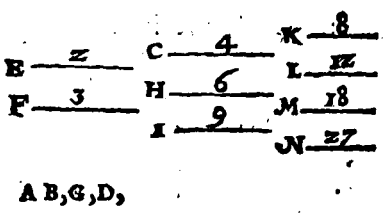
Si fuerint tres numeri continuè proportionales minimi eiuſdem rationis, extremi quadrati erunt: Si autem fuerint quatuor, extremi cubi erunt.

Nam extremi trium fiunt ex ductu ipſorum A & B in ſe. Extremi verò ipſo-

tum quatuor, fiunt ex ductu radicum A & B in quadratos G & B; vt fiant cubiz & K.

PROPOSITIO III.

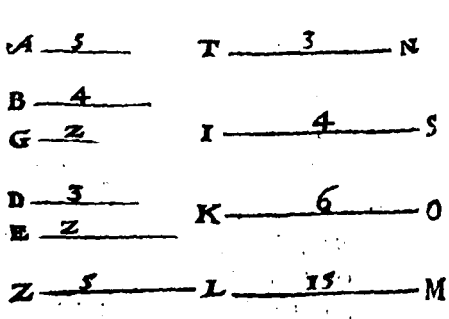
Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, minimi eandem rationem habentium eis, eorum extremi adinuicem erunt.



Sint quotcunque numeri continuè proportionales minimi suæ rationis A,B,G,D: Dico eorum extremos A & D primos esse adinuicem: sumãtur duo minimi huius rationis E & F, per 35 septimi, qui primi erunt, per 24 septimi, ex his porro (per præcedentem) totidem ipsis A,B,G,D, in eadem ratione producantur K, L, M, N, quoniam E & F sese multiplicantes gignunt C & I, genitos verò multiplicantes, idem E & F faciunt K & N. Ipsi igitur K & N primi sunt (per 29 septimi): quia verò K & N (extremi) sunt primi, omnes K,L,M,N, sunt minimi huius rationis, per primam huius: sed & minimi sunt (ex hypothesi) A, B, G, D, eiusdem rationis propositi A, B, G, D, igitur ipsis K, L, M, N, sunt æquales, non aliàs vtrique minimi essent: numeri itaque A, D, extremi (ipsis K,N, extremis æquales) veluti K & N primi erunt. Si fuerint itaque quotcunque numeri continuè, &c.

PROPOSITIO IIII. PROBLEMA 2.

Rationibus quibuscumque datis in minimis numeris, numeros inuenire continuè proportionales minimos in totidem, & datis rationibus.



Proponãtur in minimis numeris quælibet ac quotcunque rationes, scilicet A ad B,G ad D, & E ad Z. Sumatur autem minimus quem metiantur B & G, per 36 septimi, sitq; I. quoties verò B metitur I toties A metiatur T, quoties autem G metitur I toties D metiatur K: sed quoniam E ipsum K metitur vel non, metiatur primum E ipsum K, toties verò Z ipsum L metiatur: cùm autem A & B æquè multiplicati, fecerint T & I, at G & D eodem item ducti, fecerunt I & K, ipsi verò E & Z rursus eodem fecerint K & L. Erunt (ex decimaseptima septimi) A ad B sicut T ad I, ac G ad D vt I ad K, & B ad Z sicut K ad L: quatuor itaque T, I, K, L, in rationibus ipsorum A ad B, G ad D, & E ad Z positi sunt continuè proportionales: Dico quòd & minimi sunt aliorum totidem harum rationum M,O. Sin minus, inueniantur, si fieri possit, aliqui minores, sintq; N S O M singuli singulis T I K L minores, cùm sit A ad B vt N ad S, metietur B (minimus positus) ipsum S, per vigesimamprimam septimi, similiter cùm sit G ad D vt S ad O, metietur G ipsum S. Metiuntur igitur B & G ipsum S, minorem quidem ipso I, qui positus fuit minimus, quem ipsi B G metiuntur, quod est absurdum. Non igitur possunt dari minores ipsis T I K L alij in rationibus ipsorum A ad B, G ad D, & E ad Z.

Ad se

Ad ſecundum autem, non metiatur E ipſum K, ſed ſit eius partes quantumuis repetitæ. Sumatur (ex trigeſimaſexta ſeptimi) minimus menſus ab ipſis E & K, qui ſit M. Qualis eſt autem K ipſius M, talis ſit pars I numeri S, & T ipſius N. Quoties verò E metitur M, toties Z metiatur O, quoniam K I T ipſos M S N æquè metiuntur, erit (per decimamoctauam ſeptimi) T ad I, vt N ad S, & I ad K ſicut S ad M, ſed ſicut T ad I & I ad K, ſic fuit A ad B & G ad D. ſicut igitur A ad B & G ad D, ſic erit N ad S & S ad M. Et (per eandem) ſicut E ad Z ſic M ad O, æquè etenim metiuntur E & Z ipſos M & O ex hypotheſi. Sunt igitur N S M & O continuè proportionati in rationibus ipſorum A ad B, G ad D, & E ad Z: Dico quòd & minimi ſunt earum rationum numeri. quòd ſi non, Dentur, ſi fieri poſſit, ipſis N, S, M, O minores, qui ſint P, R, C, F. Cùm autem P R, R C & C F ſint in rationibus ipſorum A B, G D, & E Z, & ipſi A B, G D & E Z ſint (ab hypotheſi) minimi, ſequetur B metiri ipſum R, vt A ipſum P, ac G eundem R vt D ipſum C, per vigeſimam primam ſeptimi. Itaque B & G metientur R. Quare eundem R metietur minimus quem B & G metiuntur, ſcilicet I per trigeſimamſeptimam ſeptimi. Cùm autem ſit I ad K ſicut R ad C, ſcilicet vtrique ſicut G ad D, erit viciſſim (per decimam tertiam 7) I ad R vt K ad C. Metitur autem I ipſum R, metietur & K ipſum C. Eundem C porrò metitur E, cùm E & Z ſint minimi rationis ipſorum C ad F per 21 ſeptimi. Igitur K & E eundem C metientur. Et proinde eundem C metietur M minimus ab ipſis K & E menſus, per 37 ſeptimi, maior minorem, cùm minores ſint poſiti P, R, C, F, ipſis N, S, M, O, quod inconuenit. Minimi itaque erunt N S M O in continuis ipſorum A B G D & E Z rationibus dati. Rationibus itaque quibuſcunque datis, &c.

A 3 T 3 N 6 P
B 4 I 4 S 8 P
G 2
D 3 K 6 M 12 C
E 4
Z 5 O 15 F

MONITVM.

Figurarum numeros transferre cogimur, eò quòd Theon in paralogiſmum deciderit, numeros potius ſecundæ parti deſtinatos primæ deputans. Nam qui comperiendi erant vbi E numerum K non metitur, eoſdem vbi E eundem K prius metitur, comperit. Nimirum incipiens à ſumptione minimi quem metiuntur B & G hi ſcilicet 4 & 2 quem poſuit octonarium loco quaternarij, qui eſt minimus ab ipſis 2 & 4 menſus, vt trigeſimaſexta ſeptimi præter Theonem diximus. Quare prima huius parte numerus E numerum K metiri non poterat, quod vt fieret, numeros T I K (maiores iure debito) protulit indebitè.

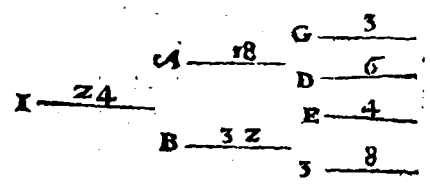
PROPOSITIO V.

Plani numeri adinuicem rationem habent compoſitam ex lateribus.

Sint plani numeri A & B, ipſius autem A latera ſint G & D: Numeri verò B latera ſint E & Z, at D multiplicans E faciat I: Dico rationem A ad B componi ex rationibus G ad E & D ad Z, hoc eſt, laterum A ad latera B planorum. Quoniam D multiplicans E fecit I, multiplicans verò G reliquum latus facit A, per decimamſeptimam diffinitionem ſeptimi. Erit A ad I ſicut G ad E, per 17 ſeptimi. Rurſus quoniam E multiplicans D idem I facit, per 16 ſeptimi, multiplicans autem Z ipſum B facit, erit ſimiliter I ad B ſicut D ad Z. Eaſdem igitur ſequetur eſſe rationes laterum G ad E & D ad Z, rationibus A ad I & I

A 18 G 3
D 6
I 24
E 4
B 32 Z 8

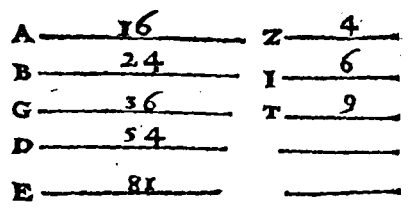
ad B. Sed (per quintam ſexti diffinitionem) ratio extremorum A ad B componitur ex rationibus mediis, ſcilicet A ad I & I ad B, quæ eædem ſunt rationibus laterum G ad E & D ad zoſtenſæ. Ratio itaque A ad B planorum numerorum, componitur ex rationibus laterum G ad E & D ad Z. Plani igitur numeri rationem habent, &c.



PROPOSITIO VI.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, minimus autem proximum nõ metiatur, & alius nullus vllum metietur.

Sint quotlibet numeri A,B,G,D,E, continuè proportionales, quorum minimus A non metiatur ſibi proximum B: Dico nullum alium eorum A, B, G, D, E, metiri reliquum, cùm ſint proportionales continui. Si A non metiatur B, nec B metietur G, nec G ipſum D, nec D reliquũ E: nã ſunt eædem eorum rationes. Præterea ſi dicamus intermiſſis quibuſdam, extremos ſeſe metiri, vt A ipſum G, ſi fieri poſſit. Dentur numerorum A B G rationes in minimis numeris, per 35 ſeptimi, qui ſint Z, I, T. Quorum extremi Z & T (per tertiam huius) erunt primi. Igitur Z ipſum T non metietur. Quoniam autem ipſi A B G & Z I T æquales numero, & bini in eadem ratione ponuntur, erit (per 14 ſeptimi) A ad G ſicut Z ad T. Sed Z ipſum T non metitur, nec igitur A ipſum G metietur. Eodem argumento patebit inter quoſuis, ſumptis minimis totidem, quorum extremos tertia huius efficit ſemper primos. Si igitur fuerint, &c.



COROLLARIVM.

Si quotcunque numeri continuè proportionales fuerint in ratione non multiplici, inter extremos quoſque eorum nuſquam cadet ratio multiplex.

Nam ſi minimus proximum non metiatur, erit ratio non multiplex, & ſi proinde nullus alius alium metiatur, nec inter eos erit ratio multiplex.

MONITVM.

Cùm dixerint Theon & Campanus (primus autem non metiatur ſecundum) videntur ab hoc Euclidis theoremate, omnes terminos habentes rationes maioris inæqualitatis deiicere (cùm in eis nuſquam primus ſecundum metiatur, maior ſcilicet minorem) quod non fuiſſe Euclidis mentem rati, diximus, ſi minimus proximum non metiatur, vt demonſtrationis hypotheſim à minimo ſemper ſumendam eſſe, vt recta oriatur concluſio, doceamus. Quod autem dicit Theon in demonſtratione Z non eſſe vnitatem, fruſtra id probare nititur: nam id ſufficienter exprimit hypotheſis theorematis, dicens minimus proximum non metiatur, vt excludat omnes rationes multiplices, quæ (cùm non ſint puræ numerorum rationes) ſolæ in minimis numeris vnitatẽ adeſſe patiuntur, ac earũ conuerſæ, & quarum ſemper vnus alterũ terminorum metitur, ſcilicet minor maiorẽ. In reliquis verò rationibus, vnus nunquam alterum metitur. Si itaque primus eſſet vnitas, is ſecundum metiretur.

PROPOSITIO VII.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, minimus

minimus autem metiatur extremum, & proximum quoque metietur.

Sint quotlibet numeri continuè proportionales A B G D. Quorum minimus A metiatur maximum D, vel extremum, quod idem est: Dico quòd & proximum B metietur idem A. Si autem non metiretur A proximum B, non metiretur & extremum (per præcedentem nullum enim metiretur) quod esset contra positum. Si itaque fuerint quotcunque numeri, &c.

A 3
B 6
G 12
D 24

PROPOSITIO VIII.

Si inter duos numeros continuè proportionales ceciderint numeri, quot inter eos, tot inter eandem rationem habentes eis, continuè proportionales cadent.

Cadant inter duos numeros A & B quotcunque continuè proportionales numeri, G & D. Sitq; E ad Z eadem ratio quæ A ad B: Dico tot cadere inter E & Z continuè proportionales, quot inter A & B ceciderunt. Ponantur (per secundam huius) ipsis A, G, D, B, eandem rationem habentes totidem minimi, qui sint I, T, K, L. Erit itaque I ad L sicut A ad B æqua ratione, per decimamquartam septimi. Cùm autem E ad Z sint vt A ad B, erit E ad Z vt I ad L, per vndecimam quinti. Ipsi itaque I & L metientur ipsos E & Z (eandem rationem habentes) æqualiter, per vigesimamprimam septimi. Quoties autem I metitur E, toties T metiatur M, & K ipsum N, & reliqui qui inter I & L reliquos qui inter E & Z ponendi sunt, quotquot fuerint. Quoniam enim I, T, K, L æquè metiuntur ipsos E, M, N, Z, vicissim I metietur T vt E ipsum M, (vel eædem partes erit) & T ipsum K vt M ipsum N, ac K ipsum L vt N ipsum Z, per nonam septimi. Proportionales igitur (per vigesimamprimam diffinitionem septimi) & æquales numero sunt E, M, N, Z ipsis I, T, K, L, & proinde ipsis A, G, D, B, quibus ipsi I, T, K, L æquales numero, & in eadem ratione positi sunt. Quot igitur proportionales G & D inter A & B ceciderunt, tot inter E & Z proportionales M & N cadent. Si itaque inter duos numeros, &c.

A 3
G 9
D 27
B 81

I 1
T 3
K 9
L 27

E 2
M 6
N 18
Z 54

COROLLARIVM I.

Inter numeros habentes rationem superparticularem, & superbipartientem non cadit aliquis medius proportionalis.

Quia minimi eius rationis numeri, sola vnitate, vel binario distant. Si autem inter maiores caderet medius, & inter minimos (eandem rationem habentes) caderet, per hanc. Sed inter sola vnitate vel binario distantes, nullus cadit. Inter numeros igitur, &c. Quare tonus musicus (sesquioctaua constans) simul atque sesquialtera & sesquitertia bifariam secari non possunt: vt enim ratio bifariam secetur, in duas similes secari debet, & tunc caderet medius proportionalis, quod fieri non potest, sunt enim rationes superparticulares.

COROLLARIVM II.

Præterea sequitur hinc dimetientis quadrati, ad eiusdem latus numeris non exprimi posse rationem.

Nam quod ex dimetiente, ad quod ex latere quadratum est sicut 2 ad 1, quæ sola

vnitate

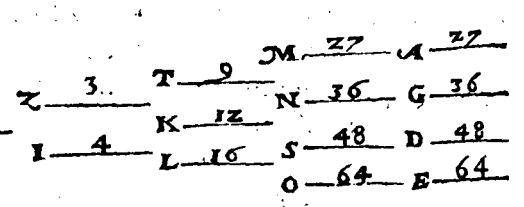
vnitate distant, sed laterum ratio dimidia est, rationis quadratorum, per 20 & coroll. eius sexti. Inter 2 igitur & 1 medius caderet, quod fieri nequit.

MONITVM.

Quoniam per minimos numeros hæc demonstratio fit, in quos sæpius ostendimus non cadere, habentes rationem multiplicem, seu particularem eius conuersam, possent fortè obiicere quidam, hoc theoremate non posse comprehendi numeros habentes rationem multiplicem vel eius conuersam. Ad hæc dicemus hoc theorema de rationibus numerorum proportionalium, in genere loqui, non autem de rationibus tantùm numerorum arithmeticorum, siue actiuorum, inter quos ratio multiplex minimè versatur. Quare cùm proportionales sint passiui, rationem multiplicem huic theoremati subiici sentiemus: quòd si propriam multiplicibus demonstrationem exhibere velimus, loco minimorum sumemus totidem ab vnitate proportionales I T K L (vt data opera in figura descripsimus) quibus idem conueniet (ex decimaquinta septimi) quod numeris ascripsit 9 eiusdem, vt tandem proportionales, ac totidem ipsis I T K L reperiantur E M N Z. Hanc animaduersionem sufficere in similibus obiectis (si fortè occurrerint) consulimus.

PROPOSITIO IX.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, & inter eos proportionales continui ceciderint numeri, quot inter eos cadent, tot inter vtrumque eorum & vnitatem continuè proportionales cadent.



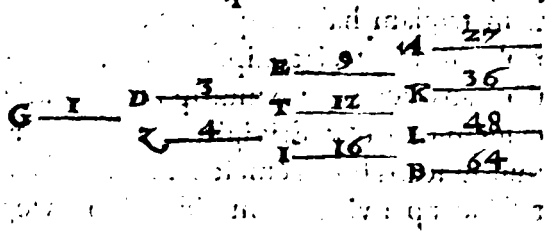
Bini numeri A & B sint primi. Inter eos verò quotcunque continuè proportionales cadant G & D: Dico inter vtrũque eorum A & B & vnitatem, totidem cadere continuè proportionales. Esto E vnitas, sintque minimi rationis A ad G duo Z I, per secundam huius, postmodum tres T, K, L, deinde quatuor, vsque ad multitudinem ipsorum A, G, D, B, qui sint M, N, S, O (per 2 huius.) Quoniam M, N, S, O, ipsis A, G, D, B æquales sunt multitudine, & rationis eiusdem minimi per hypothesim: ipsi verò A, G, D, B, per 1. huius, minimi: singuli igitur singulis æquales erunt. Quia verò (per ea quæ demonstrata sunt secunda huius) Z metitur T per suiipsius vnitates, & T ipsum M per easdem. Sed E vnitas ipsum Z per easdem, sequetur quatuor E, Z, T, M, continuè proportionales esse: similiter E, I, L, O. Cùm autem æquales sint A ipsi M, & B ipsi O, inter A & E vnitatem cadent T & Z. Inter B verò & eandem vnitatem E cadent L I. Quia verò inter E & numerum proportionalium A, G, D, B (scilicet M, N, S, O) æqualis est numero gradatio proportionalium, ipsis G D inter A & B cadentibus, nempe Z T vel I L eisdem G D (per 2 huius.) Sequetur totidem inter vtrumque ipsorum A vel B & vnitatem E cadere proportionales T & Z aut L & I, quot inter ipsos A & B ceciderunt G & D. Si igitur bini numeri primi, &c.

PROPOSITIO X.

Si inter duos numeros & vnitatem, totidem continuè proportionales cadant numeri, quot inter vtrumque ipsorum & vnitatem continuè proportionales ceciderunt, tot & inter eos continuè proportionales cadent.

Inter

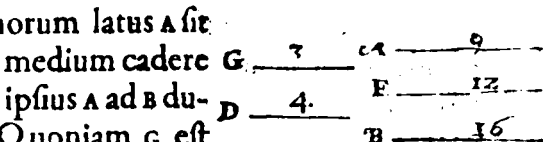
Inter duos numeros A & B, & vnitatem G, cadant totidem proportionales numeri, A E D G, & B I Z G: Dico quot inter vtrosque A scilicet & vnitatem G, ac B, & vnitatem ceciderint, totidem inter ipsos A & B cadere. Cùm enim G D E A sint continuè proportionales, per quas vnitates G metitur D, per easdem D metitur E, ac E ipsum A. Similiter per quas G metitur Z, per easdem Z ipsum I, ac I ipsum B metiuntur: sed G metitur D per vnitates eiusdem D, cùm G sit vnitas. Per easdem igitur D ipsum E ac E reliquum A metientur, sicut per Z vnitates G ipsum Z, & Z proximum I, ac I vltimum B metiuntur. Igitur D seipsum multiplicans fecit E, ipsum E verò multiplicans fecit A, sic Z per seipsum facit I, per I verò efficit B. Sit autem vt D multiplicans Z faciat T, bini verò D & Z binos K & L numerum T multiplicantes efficiant, quoniam D binos D & Z multiplicans duos fecit E & T, erit per 17 septimi, E ad T vt D ad Z. Quia verò bini D Z eundem T multiplicantes binos K & L efficiunt, erit K ad L, vt D ad Z per 18 septimi, sed D binos E & T multiplicans ipsos efficit A K, erit igitur A ad K vt E ad T, & proinde vt D ad Z. Fuit autem K ad L, vt D ad Z, erit igitur A ad K vt K ad L, per vndecimam quinti. Similiter cùm Z duos Z & D multiplicans, ipsos faciat I & T, erit T ad I vt D ad Z, multiplicans autem idem Z binos T & I ipsos fecit L & B: erunt igitur L ad B vt T ad I, per 17 septimi, & proinde vt D ad Z. Fuit autem A ad K, & K ad L, vt D ad Z, id propter A ad K, & K ad L, & L ad B, vt D ad Z proportionales erunt: inter A & B igitur positi sunt totidem K & L continuè proportionales, quot inter vtrosque A, B, & vnitatem scilicet E D vel I Z ceciderunt, per 2 huius, ea etenim docuit gradationem proportionalium inter vnitatem & propositum numerum proportionalium, eidem proposito semper æqualem esse numero, nempe per vnitatum excessus, scilicet G vnus, D Z duo, E T I tres, A K L B quatuor. Si itaque inter duos numeros, & vnitatem, &c.



PROPOSITIO XI.

Duorum quadratorum numerorum, vnus est medius proportionalis numerus, & quadratus ad quadratum duplam habet rationem quam latus ad latus.

Sint duo quadrati numeri A & B, quorum latus A sit G, ipsius B verò sit D: Dico inter A & B medium cadere proportionalem numerum, ac insuper, ipsius A ad B duplam esse rationem laterum G ad D: Quoniam G est quadrati A latus. Idem G seipsum multiplicans facit A, per 19 diffinitionem septimi. Similiter & D latus ipsum B faciet, ponatur G multiplicans D ipsum E facere, quoniam G duos G & D multiplicans facit A & E, erit (per 17 septimi) A ad E, vt G ad D: similiter D binos G D multiplicans efficit duos E & B, erit (per eandem) E ad B, vt G ad D: fuit autem A ad E vt G ad D. Erit igitur (per 11 quinti) A ad E ac E ad B, vt G ad D. Inter A & B igitur medius cadit proportionalis E numerus. Quia verò est A ad E, vt G ad D, dupla autem est primi A ad tertiam B ratio, rationis A ad E, per 10 diffinitionem quinti. Dupla igitur erit A quadrati ad B quadratum ratio, rationis G lateris ad D latus. Duorum itaque quadratorum numerorum, &c.

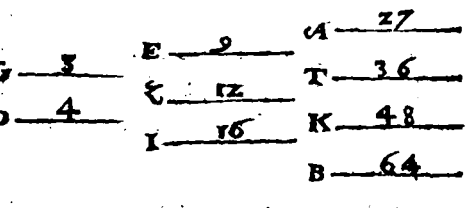


PROPOSITIO XII.

Duorum cuborum numerorum bini medij proportionales sunt numeri, & cubus ad cubum triplam rationem habet, quam latus ad latus.

Sint

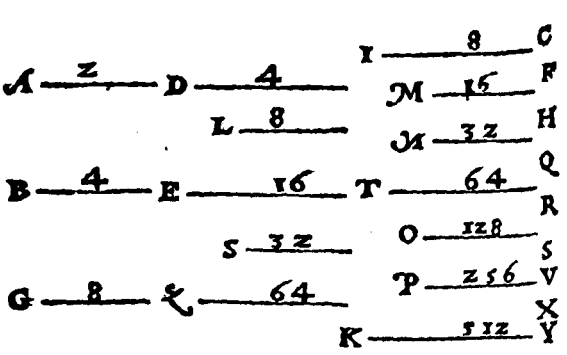
Sint duo cubi numeri A & B, quorum latus vnius A sit G, ipsius verò B latus D: Dico inter A & B binos medios cadere proportionales numeros, & A ad B rationem triplam habere quam G ad D. Multiplicans se G faciat Z, ipsum verò D multiplicans faciat Z, at D multiplicans se faciat I: sed G & D ipsum Z multiplicantes faciant ipsos T & K. Erit igitur T ad K vt G ad D, per 18 septimi, quia verò G duos G D multiplicans binos efficit E Z, erit E ad Z vt G ad D, per 17 septimi: & cùm G binos, E scilicet per vigesimam diffinitionem septimi, & Z (per constructionem) multiplicans, duos efficiat A & T, erit A ad T vt E ad Z, per 17 eandē: & proinde vt G ad D: fuit autem T ad K vt G ad D: igitur A ad T & T ad K erunt vt G ad D. Quoniam autem D binos G D multiplicans, duos fecit Z I, erit Z ad I vt G ad D. Haud secus D multiplicans I facit B, per vigesimam diffinitionem septimi, multiplicans verò ipsum Z fecit K, per constructionem, erit K ad B vt Z ad I, per 17 septimi: & proinde sicut G ad D: fuerunt autem A ad T, & T ad K, vt G ad D. Ipsi igitur A ad T, T ad K & K ad B, vt G ad D proportionales erunt. Inter duos igitur A B cubos, bini medij proportionales T & K ceciderunt in ratione laterum G ad D. Cùm autem sit A ad T, vt G ad D: sed A ad B quattam triplam habeat rationem, quam ad T secundam, per 10 diffinitionem quinti: idem A cubus ad B cubum, triplam rationem habet quam G latus ad D latus. Duorum itaque cuborum numerorum bini medij, &c.



PROPOSITIO XIII.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, & multiplicans vnusquisque seipsum fecerint aliquos, qui ex ipsis fiunt, proportionales erunt. Et si qui in principio numeri, genitos multiplicantes fecerint aliquos, & ipsi quoque proportionales erunt, & semper circa extremos hoc eueniet.

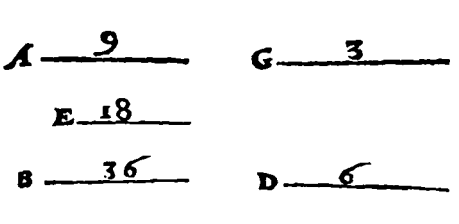
Sint quotlibet proportionales numeri A B G, quorum singuli se multiplicantes faciant singulos D E Z, ipsos verò D E Z multiplicantes iidem A B G faciant I T K: Dico D E Z inter se ac I T K inter se proportionales esse continuos. Cùm A B G se multiplicantes faciant D E Z, ipsos verò D E Z multiplicantes faciant I T K, ipsi D E Z quadrati erunt, per 19 diffinitionem septimi, ac duplam ipsis A B G rationem habebunt, per 11 huius. Ergo inter se eandem, per sextam communem sententiam, igitur proportionales sunt D E Z: ipsi verò I T K cubi erunt, per 20 diffinitionem septimi, ac triplam ipsis A B G habebunt rationem, per 12 huius: ergo inter se eandem per eandem sextam communem sententiam, eiusdem namque rationis A ad B sunt triplæ: inter se igitur sunt proportionales ipsi I T K. Cæterùm quoniam D E Z sunt quadrati, inter eos sint medij proportionales singuli, L & S per 11 huius. Inter singulos verò cubos I & T sint bini M N, inter T & K verò bini O & P: quoniā A tres D L E multiplicans tres efficit I M N, & B ipsum E multiplicans ipsum T fecit: similiter B & G ipsos T O P K fecerunt, vt ostendimus per octauam huius & sequentes eam. Eadem lege A multiplicans ipsos I M N T & B multiplicans eundem T genitos, quinque G F H Q R efficient, veluti B & G alios quinque R S V X Y cum B, ipsos



ipſos T O P K & G ipſum K multiplicabunt, & inter eos eadem erit ratio ipſis A ad B, per 17 ac 18 ſeptimi: Et igitur æqua ratione erit C ad R, vt R ad Y, per 14 ſeptimi. Sícque infinitè (per 17 ac 18 & 14 ſeptimi) A & B genitos C, R, Y, multiplicantes, alios proportionales efficient. Si itaque fuerint quotcunque numeri continuè, &c.

PROPOSITIO XIIII.

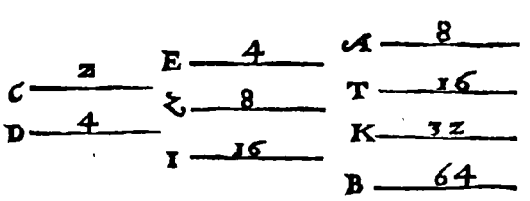
Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur, & latus latus metietur: & ſi latus latus metiatur, & quadratus quadratum metietur.



Metiatur A quadratus numerus B quadratum, quadrati A latus ſit G, ipſius B verò ſit D: Dico G metiri D: & è conuerſo ſi G metiatur D & A metiri B: multiplicans G ipſum D faciat E, ſed ſeſe multiplicans facit A, per hypotheſim: igitur (per 17 ſeptimi) erit A ad E vt G ad D. Sed A metitur B (per hypotheſim) extremũ, metietur igitur E proximum, per 7 huius, & G itaque ipſum D metietur, fuit enim A ad D vt G ad D. Secundò metiatur G ipſum D eiſdem conſtructis: Dico A metiri B: quoniam eſt G ad D vt A ad E, & E ad B, per 17 ſeptimi: ſed G metietur D. Metietur igitur A ipſum E, & proinde quadratum B quem E metitur, per primam communem ſententiam ſeptimi. Si itaque quadratus numerus, &c.

PROPOSITIO XV.

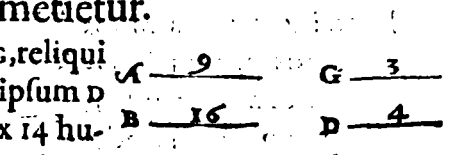
Si cubus numerus cubum numerum menſus fuerit, & latus latus metietur, & ſi latus latus menſum fuerit, & cubus cubum metietur.



Metiatur A cubus numerus B cubum: Dico G latus ipſius A metiri D latus ipſius B, & è conuerſo. Multiplicantes ſeſe G & D quadratos efficiant E & I, per 19 diffinitionem ſeptimi, inter quos medius ſit Z, per 11 huius, ipſi verò G & D multiplicantes Z duos faciant T & K, inter A & B cubos medios (per 12 huius) in ratione ipſorum G D: quoniam A metitur B extremum, metietur & T proximum, per ſeptimam huius: fuit autem A ad T vt G ad D, metietur itaque G ipſum D. Si verò ponamus G metiri ipſum D, eiſdem namque diſpoſitis, quoniam eſt A ad T vt G ad D, ſed G metietur D, metitur igitur A ipſum T, & T ipſum K, & K ipſum B: quare A (per primam communem ſententiam ſeptimi) metietur ipſum B. Si itaque cubus numerus cubum numerum menſus, &c.

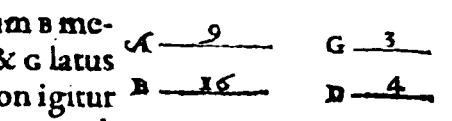
PROPOSITIO XVI.

Si quadratus numerus quadratum numerum menſus non fuerit, neque latus latus metietur, & ſi latus latus menſum non fuerit, neque quadratus quadratum metietur.



Sint A & B numeri quadrati, latus ipſius A ſit G, reliqui verò B ſit D: Dico ſi A non metiatur B, neque G ipſum D metietur. Si enim G metiretur B, ſequeretur (ex 14 huius) A metiri ipſum B, contra hypotheſim. Non itaque metitur G quadratum D.

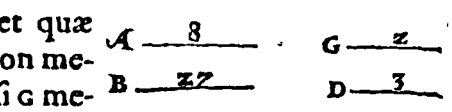
Similiter ſi ponamus G non metiri D nec A ipſum B metietur, quoniam ſi A metiretur quadratum B, & G latus D (ex eadem) metiretur, contra ſuppoſitum. Non igitur metitur A ipſum B. Si itaque quadratus numerus quadratum, &c.



PROPOSITIO XVII.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus latus metietur, & ſi latus latus non metiatur, neque cubus cubum metietur.

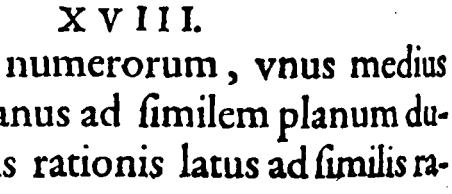
Eadem demonſtrandi ratio hanc patefaciet quæ & præcedentem. Si enim A cubus B cubum non metiatur, neque G latus D latus metietur. Nam ſi G metiatur D, & (per 15 huius) A metietur B, contra hypotheſim. Similiter ſi G latus D latus non metiatur, neque A cubum B metietur. Si enim A cubum B metiatur, & G latus D metiretur, per ſecundam partem eiuſdem, quod obſtat hypotheſi, & proinde inconuenit. Si igitur cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus latus metietur, &c.



PROPOSITIO XVIII.

Duorum ſimilium planorum numerorum, vnus medius proportionalis eſt numerus, & planus ad ſimilem planum duplam habet rationem quam ſimilis rationis latus ad ſimilis rationis latus.

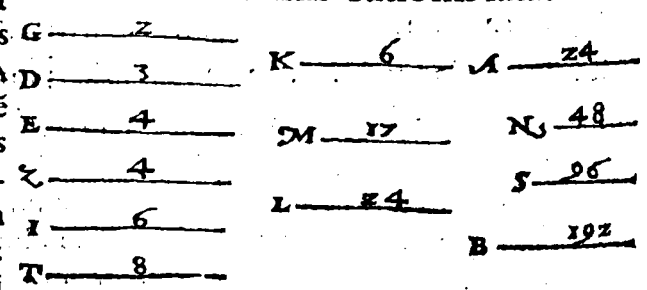
Sint duo ſimiles plani A & B, latera autem ipſius A ſint G & D, ipſius B verò ſint E & Z: Dico inter A & B medium proportionalem cadere, & rationem A ad B duplam eſſe rationis G ad E vel D ad Z, ſimilis rationis laterum, quoniam A & B ſimiles ſunt plani, G multiplicans D facit A, & E multiplicans Z facit B, per 17 diffinitionem ſeptimi. Eſt itaque G ad E vt D ad Z, per 22 diffinitionem ſeptimi. Deinde D multiplicans E faciat I, quoniam ergo D binos G & E multiplicans, facit duos A & I, erit (per 17 ſeptimi) A ad I vt G ad E. Eadem porrò de cauſa quia E multiplicans D & Z facit I & B, erit I ad B vt D ad Z. Et igitur A ad I vt I ad B erit. Medius itaque proportionalis erit I inter A & B planos, & quoniam A ad B (per decimam diffinitionem quinti) duplam habet rationem quam ad I, duplam habebit idem A ad B quam G ad E, quæ rationi A ad I ſimilis fuit. Duorum itaque ſimilium planorum, &c.



PROPOSITIO XIX.

Duorum ſimilium ſolidorum numerorum, bini medij proportionales ſunt numeri, & ſolidus ad ſimilem ſolidum, triplam rationem habet quam latus ad ſimilis rationis latus.

Supponantur duo ſimiles ſolidi numeri A & B, ipſius A latera ſint G, D, E, ipſius B autẽ Z, I, T. Dico inter A & B binos cadere medios proportionales numeros, & A ad B triplam habere rationem quam G ad Z ſimilis rationis latera. Multipli

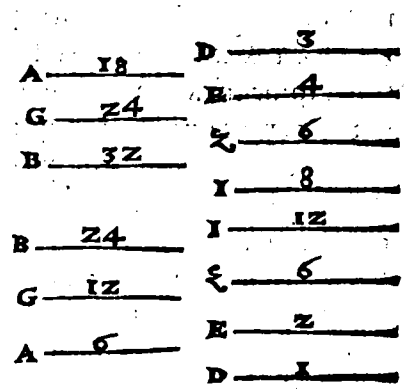


cans

cans G ipſum D faciat K. Ac Z per ipſum I faciat L, cum G D E & Z I T ſint ſimilis rationis latera, per 22 diffinitionem ſeptimi, erunt ſimiles plani ipſi K & L. Inter eos igitur medius cadit, qui ſit (per præcedentem) factus ex D in Z ipſe M. Similia verò latera E & T multiplicantia M faciunt N & S, cùm ſit G ad D & D ad E vt Z ad I & I ad T, erit viciſſim (per 13 ſeptimi) G ad Z vt D ad I, & E ad T. Et cùm D multiplicans G & Z faciat K & M, erit K ad M vt G ad Z, per 17 ſeptimi. Similiter quia Z multiplicans D & I facit M & L, erit (per eandē) M ad L vt D ad I: ſed G ad Z fuit vt D ad I: igitur K ad M erit vt M ad L, proportionales in ratione leterum G ad Z. Præterea quoniam E multiplicans K, (qui ex duobus reliquis lateribus D & G) facit A, per 18 diffinitionem ſeptimi: multiplicans verò idem E ipſum M fecit N: erit (per 17 ſeptimi) A ad N vt K ad M. Similiter cùm T multiplicans ipſum L (qui ex reliquis lateribus Z I) faciat B, multiplicans verò M fecerit S, erit, per 17 ſeptimi, S ad B vt M ad L: erit itaque A ad N & S ad B vt K ad M & M ad L, in ratione quidem laterum G ad Z. Et quia duo reliqua E & T latera multiplicantia M efficiunt N & S, erit N ad S vt E ad T latera. Inter A & B igitur duo ceciderunt N & S medij in ratione laterum G ad Z, ſcilicet A ad N, N ad S vt S ad B. Cùm autem A prima ad B quartam triplam habeat rationē quam ad ſecundam N, per 10 diffinitionem quinti, ipſe A ſolidus ad B ſimilem ſolidum, triplam habebit quam G latus ad Z vel D ad I aut E ad T, ſimilis rationis latera. Duorum itaque ſimilium ſolidorum, &c.

PROPOSITIO XX.

Si duorum numerorum vnus medius fuerit proportionalis numerus, ſimiles plani erunt ipſi duo numeri.



Sit inter duos numeros A & B medius proportionalis numerus G: Dico A & B ſimiles planos eſſe. Oſtendamus prius in ratione pura numerorū ſiue non multiplici. Dentur (per 35 ſeptimi) duo minimi in ratione ipſorū A G B qui ſint D E. Hi metiētur ipſos A G æqualiter, ſimiliter & ipſos G B æqualiter, per 21 ſeptimi. Quoties D E metiuntur ipſos A G, tot ſint in Z vnitates, quoties verò metiuntur ipſos G B, tot ſint in I vnitates. Quoniam D multiplicans Z facit A, & multiplicans E ipſum I facit B, plani ſunt A & B, eorum verò latera D Z & E I. Cùm autem ex D primo & I quarto fiat G, ex ſecundo verò E & tertio Z fiat idem G, erit (per ſecundam partem 19 ſeptimi) D ad E vt Z ad I, & (per 13 ſeptimi) viciſſim D ad Z vt E ad I proportionalia: igitur D Z & E I latera ſimiles efficiunt planos A & B, per 22 diffinitionem ſeptimi. Secundò in ratione multiplici, quæ eſt continui ad diſcretum, Sit inter duos numeros B & A medius proportionalis numerus G: Dico A & B ſimiles eſſe planos. Quoniam ponitur ratio multiplex, minimus A metitur B extremum, quare (per 7 huius) metietur & proximum G, & G ſimiliter ipſum B: nam ſunt proportionales. Quoties A minor metitur G, toties D vnitas metiatur E numerum. Quoties igitur D metitur E, toties G metietur B, viciſſim itaque D metietur A vt E ipſum G, ac inſuper D metietur G vt E ipſum B, per 15 ſeptimi. Quoties D E metiuntur A G, tot ſint vnitates in Z. Quoties verò ſimiliter metiuntur iidem D E ipſos G B, tot ſint vnitates in I. Quoniam ſub D & Z comprehenditur A, ſub E & I verò continetur B, ipſi A & B plani ſunt numeri, per 17 diffinitionem ſeptimi. Eorum verò latera D Z & E I. Quia verò ſub D & I extremis fit G, & ſub mediis E & Z fit idem G, quatuor magnitudines D ad E vt Z ad I ſunt proportionales, per 16 ſexti, & 19 ſeptimi. Viciſſim igitur, per quindecimam ſeptimi, erunt D ad Z, vt E ad I latera proportionalia. ipſi igitur A & B ſimiles erunt plani, per 22 diffinitionem ſeptimi. Si duorum itaque numerorum vnus medius fuerit, &c.

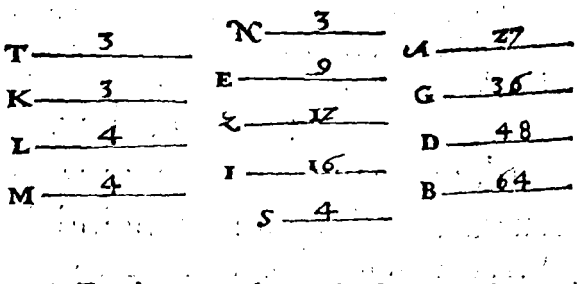
MONITVM.

Aliquas seorsum demonstrare voluimus propositiones, vt hac secunda parte segregantes rationis multiplicis naturam, ab aliarum rationum natura, cùm ea minimos numeros in minimis eius partibus veluti reliquæ non suscipiat, sed loco minimorum semper vnitatẽ cum numero recepit. Quod itaque per minimos in aliis rationibus ostenderunt Theon & Campanus, illud idem multiplici per vnitatem & numerum conuenire rationi docuimus hoc loco, licet non semper quæ minimis numeris conueniunt, vnitati & numero conuenire recipiamus. Sed cùm rationes puras numerorum per primos & minimos ostendemus aliquid efficere, ididem, cùm opus erit facto, rationes multiplices per vnitatem & numerum efficere demonstrabimus: nam illæ sunt eius rationis minimæ partes.

PROPOSITIO XXI.

Si duorum numerorum duo fuerint medij proportionales numeri, similes solidi erunt ipsi duo numeri.

Sint duorum A & B bini medij continuè proportionales G & D: Dico A & B similes esse solidos. Ponantur (per secundam huius) tres minimi in ipsorum A, G, D, B, ratione, sintq; E, Z, I. Ipsorum igitur extremi E & I sunt (per 20 huius) similes plani. Sint autẽ ipsius E latera T & K, ipsius I verò latera M & L. Et cùm (per hypothesim) E Z I sint in ratione ipsorum A G D, erunt æqua ratione E ad I sicut A ad D, per 14 septimi. Insuper cùm E Z I sint minimi, ipsi metiẽtur ipsos A G D æqualiter per 21 sep mi. Quoties autem E I metiuntur ipsos A D, tot sint vnitates in N. Quoties verò metiuntur ipsi E I reliquos G B, eandem rationem habentes, tot sint vnitates in S. Cùm enim T & K sint latera ipsius E, qui sumptus per vnitates numeri N faciat A, sequetur T K N latera esse ipsius A solidi, per decimamoctauam diffinitionem septimi. Similiter L & M faciunt I, qui per vnitates ipsius S sumptus facit B, quare L M S erunt ipsius B solidi latera, per eandem. Solidi itaque erunt A & B: Dico quòd similes erunt solidi, quoniam E multiplicans N & S ipsos fecit A & G. Erit (per 17 septimi) N ad S sicut A ad G. Sed sicut A ad G, sic (per hypothesim) E ad Z, & Z ad I. Quia verò E ad I duplam habet rationem quam ad Z, per 10 diffinitionem quinti, & duplam quam T ad L, vel K ad M latera, per 18 huius. Eandem igitur habent T ad L & K ad M rationem quam E ad Z vel Z ad I. Et proinde quam A ad G vel N ad S, quæ fuerunt eædem ostensæ. Sicut igitur A ad G, sic fuit N ad S, sic T ad L, sicq; K ad M, latera scilicet ipsius A solidi, ad latera ipsius B solidi proportionalia, qui igitur (per 22 diffinitionem septimi) similes erunt solidi. Si itaque duorum numerorum duo fuerint, &c.



MONITVM.

Hanc in multiplici ratione noluimus ostendere, prolixitatem vitantes, sufficit enim præcedentem ac alias quasdam ostendisse. Cùm enim his demonstrandis exquiruntur minimi datæ rationis numeri, vt eos eandem rationem habentes alios metiri ostendamus, scimus perspicuè eos quorum vnus est vnitas, verè propositæ rationis minimas numerorum partes obtinere, & proinde metiri reliquos necessario maiores (per 15 septimi) cùm sint multiplices, vt minimi reliquarum rationum maiores metiuntur, per 21 septimi. Quia verò his demonstrationibus, numerorum generalem naturam docentibus, per minimorum numerorum methodum,

methodum, facilis fit notitia an his conueniant rationes multiplices, minimos numeros non habentes, an non: demonſtrationem rationum non multiplicium poſthac ſequemur tantùm. Quòd ſi aliquid occurrat obſcurius, monito appoſito exponemus illico.

PROPOSITIO XXII.

Si tres numeri continuè proportionales fuerint, primúſque fuerit quadratus, & tertius quadratus erit.

Sint tres continuè proportionales numeri A B G, quorum cùm extremorum vnus ſit medius, ipſi extremi ſimiles plani erunt, per 20 huius. Quare ſi primus fuerit quadratus, & tertius (ſibi ſimilis planus) quadratus erit. Si itaque tres numeri, &c.

A 4
B 6
G 9

PROPOSITIO XXIII.

Si quatuor numeri continuè proportionales fuerint, primúſque cubus fuerit, & quartus cubus erit.

Haud ſecus hanc oſtendet 21 huius. Cùm autem inter A & D duo medij proportionales conſtituantur, ſequetur A & D ſimiles eſſe ſolidos. Atqui A cubus eſt primus, & quartus: itaque D ſibi ſimilis ſolidus cubus erit. Si igitur quatuor numeri continuè proportionales, &c.

A 8
B 12
G 18
D 27

PROPOSITIO XXIIII.

Si duo numeri rationem habuerint, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem quadratus fuerit, & ſecundus quadratus erit.

Duo A & B numeri rationem habeant, quam quadrati G & D. Sit autem A quadratus: Dico & B quadratum eſſe. Quoniam duorum G & D vnus eſt medius proportionalis numerus per 11 huius: ipſorum A & B vnus erit medius, per octauam huius, eandem enim habent rationem. Trium igitur primus A eſt quadratus, & tertius B quadratus erit, per 22 huius. Si itaque duo numeri rationem, &c.

A 4 — G 16
6 — 24
B 9 — D 36

PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri adinuicem rationem habuerint quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem cubus fuerit, & ſecundus cubus erit.

Duo numeri A & B rationem habeant quam cubus G ad cubum D. Sit autem A cubus: Dico & B cubum eſſe. Quia duorum G & D bini ſunt medij proportionales numeri, cùm ſint cubi, per 12 huius: ipſorum A & B (eandem rationem habentium) totidem erunt medij, per octauam huius. Sed quatuor continuè proportionalium primus A eſt cubus, & quartus B cubus erit, per 23 huius. Si igitur duo numeri rationem adinuicem, &c.

A 8 — G 64
12 — 96
18 — 144
B 27 — D 216

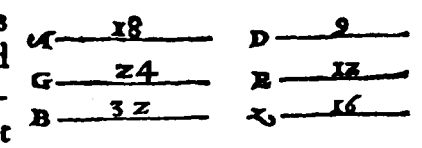
COROLLARIVM.

Inter quadratum & non quadratum, non cadit ratio quadratorum.

Nam ſi primus quadratus ſit & ſecundus quadratus eſſet, contra hypotheſim. Similiter inter cubum & non cubum, non cadit ratio cuborum: ſi enim primus cubus eſſet & ſecundus (contra ſuppoſitum) cubus eſſet, quod fieri non poteſt.

PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri, adinuicem rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

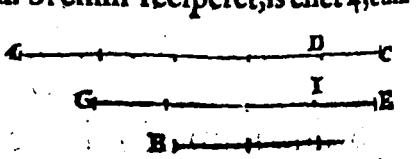


Sint ſimiles plani A & B numeri: Dico A ad B rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Cùm autem A & B ſint ſimiles plani, inter eos cadet vnus medius qui ſit G per 18 huius. Deinde ponantur in ratione ipſorum A G B tres minimi D E Z, quorum extremi quadrati erunt, per corollarium ſecundæ huius. Et quoniam (per 14 ſeptimi) eſt A ad B æqua ratione vt D ad Z. Sed D & Z ſunt quadrati: Igitur A ad B rationem habet quam quadratus numerus D ad quadratum Z. Similes igitur plani numeri adinuicem, &c.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur quotlibet non ſimiles planos dari numeros.

Habentes enim rationem ſuperparticularem numeri, diſſimiles ſunt plani. Si autem ſimiles eſſent plani, inter eos caderet medius, & rationem haberent quadratorum numerorum, per 18 & 26 huius, cuius oppoſitum patet per coroll. 8 huius. Superparticulares igitur non ſimiles ſunt plani, qui quidem ſunt numero infiniti (nempe ab vnitate & quauis parte dicti). Præterea habentes rationem ſuperbipartientem, non ſimiles ſunt plani, cùm minimi eius rationis numeri ſeſe binario excedant, inter quos nec cadit medius proportionalis. Si enim caderet exceſſus proportionalium, eſſent æquales, quod obſtaret 19 quinti, quod nec fieri poteſt, vt exemplo 5 ad 3 non recipit medium. Si enim reciperet, is eſſet 4, cùm nullus alius inter eos cadat. Si enim fieri poſſit,



eſto A C ad G E vt G E ad B: ab ipſo A æqualis ipſi G E ſecetur A D, ab ipſo G E verò ipſi B æqualis G I. Eſt igitur A C totum ad G E totum, vt A D ablatum ad G I ablatum, cùm A D & G I ipſis G E & B ſint æquales. Reliquum igitur D C, vnitas ad reliquum I E vnitatem, erit ſicut totum A C ad totum G E, per 19 quinti, quod fieri non poteſt, cùm vnitates ſint æquales. Quia igitur inter minimos huius rationis nullus cadit, nec inter maiores cadet, per 8 huius. Inſuper duo quilibet primi numeri diſſimiles ſunt plani, cùm non habeant latera proportionalia iuxta 22 diffinitionem ſeptimi. Nam eorum latera ſunt vnitas & totus numerus. Sequeretur itaque contra octauam quinti eandem vnitatem ad duos inæquales numeros eandem habere rationem, quod fieri non poteſt.

PROPOSITIO XXVII.

Similes ſolidi numeri, adinuicem rationem habent quam cubus ad cubum numerum.

Sint

Sint A & B ſimiles ſolidi, dico eos habere rationem quam cubus numerus ad cubum numerum. Quoniam A B ſunt ſimiles ſolidi, inter eos cadant duo medij E & Z, per 19 huius. Dentur autem totidem minimi in ipſorum A E Z B ratione G I T D, per ſecundam huius, quorum extremi G D cubi erunt, per corollarium ſecundæ huius. Cùm autem ſint omnes proportionales, æqua ratione erit A ad B vt G ad D, per 14 ſeptimi, ipſi itaque A ad B rationem habebunt cubi G ad cubum D. Similes igitur ſolidi numeri, &c.

A 16 G 8
E 24 I 12
Z 36 T 18
B 54 D 27

COROLLARIVM I.

Si duo numeri rationem habuerint quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani erunt ipſi duo numeri. Si verò rationem habuerint quam cubus ad cubum numerum, ſimiles ſolidi erunt.

Habeant prius A ad B numeri rationem quam habent G ad D quadrati numeri: Dico A & B ſimiles eſſe planos: cùm enim inter G & D quadratos vnus cadat medius, per 11 huius, inter A & B eandem rationem habentes totidem (per 8 huius) cadent. Ipſi igitur A & B ſimiles ſunt plani, per vigeſimam huius.

A 18 G 16
B 72 D 64

Si autem A ad B rationem habeant, quam G ad D cubi, idem oſtendetur de ſolidis, cùm enim inter G & D cubos duo cadant medij, per 12 huius inter A & B eandem rationem habentes totidem cadent, per 8 huius: ipſi igitur A & B (per 21 huius) ſimiles erunt ſolidi. Si itaque duo numeri rationem habuerint, &c.

Ad ſecundum.

A 16 G 8
B 54 D 27

COROLLARIVM II.

Si aliquis numerus quadratum multiplicans, quadratum non fecerit, ipſe quadratus non erit.

Nam ſi quadratus eſſet, ipſi ſimiles eſſent plani qui medium haberent, per 18 huius, & ab ipſo medio productus æquus eſſet ei qui ſub extremis quadratis, per vigeſimam ſeptimi. Ipſe igitur ab extremis productus quadratus eſſet, æquus ei qui à medio, ſed quadratus non eſt is productus. Nec igitur propoſitus quadratum multiplicans quadratus erit.

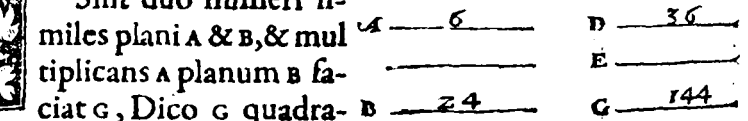
MONITVM.

Hæc corollaria addidimus in obſequium decimi, ne circa hæc demonſtranda hæreamus, cùm de rationibus quadratorum numerorum agendum erit, vt latera eorum ſint longitudine commenſurabilia abſque demonſtrandi prolixitate.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER NONVS.

PROPOSITIO I.

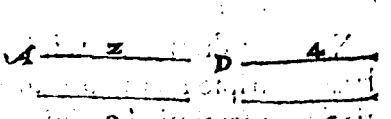
SI DVO numeri ſimiles plani, ſe inuicem multiplicantes, aliquem fecerint, factus ex eis quadratus erit.



Sint duo numeri ſimiles plani A & B, & multiplicans A planum B faciat G, Dico G quadratum eſſe. Multiplicans A ſeipſum faciat D quadratum, per 19 diffinitionem ſeptimi, & quoniam A duos A & B multiplicans, binos fecit D G, erit (per 17 ſeptimi) D ad G vt A ad B. Quia verò duorum A B ſimilium planorum vnus eſt medius proportionalis, per 18 octaui, & inter D & G eandem rationem habentes, vnus erit medius per octauam octaui, qui ſit E: ſed trium D E G proportionalium primus D quadratus eſt, & tertius G quadratus erit, per 22 octaui. Si itaque duo numeri ſimiles plani, &c.

PROPOSITIO II.

Si duo numeri ſe inuicem multiplicantes quadratum fecerint, ipſi ſimiles plani erunt.



Bini numeri A & B ſeſe multiplicantes faciant G quadratum: Dico ipſos A & B ſimiles eſſe planos. Multiplicans A ſeipſum faciet D quadratum: cùm autem A duos A & B multiplicans, binos faciat D G, erit D ad G vt A ad B, per 17 ſeptimi. Et quoniam duorum quadratorum D G vnus eſt medius, per 11 octaui, & inter A & B eandem rationem habentes, vnus erit medius, per octauam octaui. Sed ſi duorum A & B vnus fuerit medius, ipſi A & B ſimiles plani erunt, per 20 octaui. Si itaque duo numeri ſe inuicem multiplicantes, &c.

COROLLARIVM.

Hinc fit, duos quadratos ſemper quadratum producere.

Sunt enim ſimiles plani (per primam huius.

Quadratum verò cum non quadrato, non quadratum facere.

Si enim facerent, ſimiles eſſent plani, per hanc, ſed non ſunt. Non quadratum igitur faciunt.

Si verò

Si verò quadratus cum aliquo quadratum fecerit, aliquis ille quadratus erit.

Nam cum quadrato ipſum multiplicante ſimilis planus eſt, per hãc, ille aliquis.

Si autem quadratus cum aliquo quadratum non fecerit, nec aliquis ille quadratus erit.

Si enim quadratus eſſet, cum quadrato quadratum efficeret, per primam partem huius corollarij: quod non efficit, non itaque quadratus eſt.

PROPOSITIO III.

Si cubus numerus ſeipſum multiplicans aliquem fecerit, factus cubus erit.

Numerus A cubus ſeipſum multiplicans faciat aliquem B: Dico B cubum eſſe. Sit ipſius A cubi latus G, quod per ſe ductum faciat D. Idem igitur G per D ductum faciet ipſum A, per 20 diffinitionem ſeptimi: metietur igitur G ipſum D per vnitates eiuſdem G, ac per eaſdem D metietur cubum A, nec non & vnitas ipſum G per eaſdem ipſius G vnitates metietur. Proportionales itaq; ſunt A D G & vnitas, ſunt enim æquemultiplices, ſimiliter cùm A metiatur B per ſuas vnitates, vnitas verò per eaſdem metiatur A, erit vnitas ad A vt A ad B. Sed inter vnitatem & A duo cadunt medij, ac inter æquemultiplices eandem rationem habentes. Inter A igitur & B duo cadẽt medij, per 8 octaui. Quatuor igitur proportionalium numerorum primus A cubus eſt, per hypotheſim, & quartus B (per 23 octaui) cubus erit. Si itaque cubus numerus ſeipſum multiplicans aliquem, &c.

B 64
32
16
A 8
D 4
G 2
Vnitas.

PROPOSITIO IIII.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans aliquem fecerit, factus cubus erit.

Cubus numerus A cubum B multiplicans aliquem G faciat, per ſeipſum verò idem A faciat D, Dico G cubum eſſe. Quoniam autem A duos A & B multiplicans aliquos D & G facit, erit (per 17 ſeptimi) D ad G vt A ad B, ſed quia duorum A & B cuborum duo ſunt medij, per 12 octaui: inter eandem itaque rationem habentes D & G duo cadent medij, per 8 octaui. Sed D cubus eſt, per præcedentem: nam ex A cubo factus. Si igitur quatuor proportionalium primus D cubus fuerit, & quartus G cubus erit, per 23 octaui. Si itaque cubus numerus, &c.

A 8 — D 64
12 — 96
18 — 144
B 27 — G 216

PROPOSITIO V.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans cubum fecerit, & multiplicatus cubus erit.

Cubus numerus A aliquem B multiplicans cubum faciat G: Dico B cubum eſſe. Multiplicans ſeipſum A faciat D, quoniam A binos A B multiplicans duos fecit D & G, erit D ad G vt A ad B, per 17 ſeptimi: cùm autem D ſit cubus, per tertiam huius, nam ex A cubo factus, G verò cubus, per hypotheſim, inter D & G duo cadent medij, per 12 huius. Et igitur inter A & B eandem rationem habentes, totidem cadent, per 8 octaui: atqui quatuor proportionalium A primus cubus eſt, per hy

A 8 — D 64
B 27 — G 216

per hypotheſim, & quartus B cubus erit per 23 octaui. Si itaque cubus numerus numerum aliquem multiplicans cubum fecerit, &c.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur, ſi cubus non cubum multiplicet, ipſe non cubum faciet.

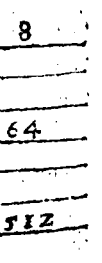
Nam ſi cubum faceret, & multiplicatus cubus eſſet, contra hypotheſim, quod inconueniret, per hanc: ſupponitur enim non cubus.

Si verò cubus aliquem multiplicans non cubum fecerit, nec aliquis ille cubus erit.

Nam ſi ille aliquis cubus eſſet, factus ſimiliter eſſet cubus, per quartam huius, contra hypotheſim, quod fieri non poteſt.

PROPOSITIO VI.

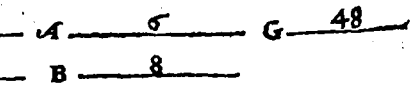
Si numerus ſeipſum multiplicans cubum fecerit, & ipſe cubus erit.



Numerus A ſeipſum multiplicans faciat cubum B: Dico & A cubum eſſe, multiplicans A cubum B faciat G: cubus erit ipſe G, per 20 diffinitionem ſeptimi, ex tripla ipſius A multiplicatione factus. Quoniam autem A duos A & B multiplicans ipſos B & G fecit, erit G ad B, vt B ad A, per 17 ſeptimi. Sed ſi bini B ad A rationem habeant quam cubus G ad cubum B, primus verò B cubus fuerit, & ſecundus A cubus erit, per 25 octaui. Si igitur numerus, &c.

PROPOSITIO VII.

Si compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, fecerit aliquem, factus ſolidus erit.



Sit compoſitus A numerus qui ipſum B multiplicans faciat G: Dico G ſolidũ eſſe: cùm enim A ſit compoſitus, metietur eum aliquis, per 14 diffinitionem ſeptimi, ſit ille D, qui eundem A per vnitates numeri E metiatur: quoniam duo numeri D & E ſeſe multiplicantes faciunt A, qui rurſus ipſum B multiplicans reliquum G fecit: ipſe igitur G ex tribus ſeſe multiplicantibus D E & B conſurgens (per 18 diffinitionem ſeptimi) ſolidus erit, latera verò eius ipſi D E B numeri. Si itaque compoſitus numerus, &c.

PROPOSITIO VIII.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, Tertius ab vnitate quadratus erit, & vnum relinquentes omnes. Quartus autem cubus & binis relictis omnes. Septimus verò cubus ſimul & quadratus, & quinque relictis omnes.

Sint ab vnitate continuè proportionales A B G D E Z: Dico tertium ab vnitate, ſcilicet B & vno relicto omnes, ſcilicet D & Z, quadratos eſſe: quartum verò G & binis relictis omnes, ſcilicet Z, &c. cubos eſſe. Septimum autem Z & quotquot fuerint quinque relictis omnes, ſimul cubos & quadratos eſſe: Quoniam vnitas

metitur

metitur A per ſui ipſius vnitates. Metietur quilibet ſequẽtem per eaſdem ipſius A vnitates, cùm ſint continuè proportionales. Igitur A ſeipſum multiplicans facit B quadratum, per 19 diffinitionem ſeptimi: ſed quia trium B G D primus B quadratus eſt, & tertius D quadratus erit, per 22 octaui. Similiter ipſorum D E Z & quotlibet ſequentium, D exiſtente quadrato, & tertius Z quadratus erit, per eandem. Inſuper cùm A multiplicans ſe faciat B, multiplicans verò B faciat G, ipſe G cubus erit, per 20 diffinitionem ſeptimi: ſiquidem quatuor proportionaliũ primus G cubus fuerit, & quartus Z cubus erit, per vigeſimam tertiam octaui, ſicque infinitè quotcunque poſtponantur ipſi Z proportionales continui. Sed & quadratus oſtenſus eſt idem Z & hoc ordine omnes, cùm tertius & quartus ſemper ſeptimum reſtituant. Si igitur ab vnitate quotcunque numeti, &c.

Vnitas.
A 3
B 9
G 27
D 81
E 243
Z 729

PROPOSITIO IX.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem quadratus fuerit, & reliqui omnes quadrati erunt: Et ſiqui poſt vnitatem cubus fuerit, & reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales A, B, G, D, E, Z. Ad primum, ſit qui poſt vnitatem quadratus, ſcilicet A: Dico reliquos omnes quadratos eſſe. Ad ſecundum autem, ſi ipſe A fuerit cubus, dico omnes cubos eſſe: primò cùm vnitas multiplicet A per ſui ipſius vnitates, & A per eaſdem multiplicet B, quadratus erit B, per 19 diffinitionem ſeptimi, & A quadratus ex hypotheſi: ſed ſicut A ad B, ſic B ad G, & G ad D, &c. Si duo igitur B & G rationem habuerint quadratorum A ad B, primus verò B ſit quadratus, & ſecundus G quadratus erit, per vigeſimam quartam octaui, & ſic G & D, &c. omnes quadrati oſtendentur. Si verò A poſt vnitatem cubus fuerit: quoniam ſimiliter vnitas metitur A, & A ipſum B, & B ſequentem G, & ſinguli ſuccedentes per vnitates ipſius A, ſed A cubus (ex hypotheſi) ſeipſum multiplicans B facit: igitur B (per tertiam huius) cubus erit. Sicut autem vnitas ad A, ſic A ad B, ſic B ad G, &c. quotcunque ſint in ratione A ad B cuborum: Si primus B cubus fuerit, & ſecundus G cubus erit, per 25 octaui: ſi verò G ſit, erit & D & reliqui omnes. Si itaque ab vnitate quotcunque numeri continuè, &c.

Vnitas.
A
B
G
D
E
Z

PROPOSITIO X.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem quadratus non fuerit, nec alius vllus quadratus erit, quàm tertius ab vnitate, & vnum relinquentes omnes: Et ſi qui poſt vnitatem cubus non fuerit, nec alius vllus cubus erit, quàm quartus ab vnitate ac duos relinquentes omnes.

Sint ab vnitate continuè proportionales quotcunque A B G D E Z numeri. Qui verò poſt vnitatem ſcilicet A quadratus non ſit: Dico nullum reliquorum eſſe quadratum, quàm tertium ab vnitate & reliquos vno intermiſſo ſcilicet B D Z, &c. Si verò A cubus non ſit, nec alium aliquem cubum eſſe, quàm quartum ab vnitate ac binis reliꝯis omnes ſcilicet G Z, &c. Quoniam proportionales ſunt, erunt quadrati B D Z, &c. per octauam huius. Si enim aliquis alius poſſet eſſe qua

Vnitas.
A 3
B 9
G 27
D 81
E 243
Z 729

eſſe quadratus,ſit G,erit G ad B vt B ad A & A ad vnitatem,per corollarium quartæ quinti. Igitur B ad A rationem habent quadratorum G ad B. Si itaque primus B ſit quadratus, ſecundus A (per 24 octaui) quadratus erit,cõtra hypotheſim,quod fieri non poteſt. Æquè probatur hæc (per 22 octaui) ſi G primus ſit quadratus, & A tertius erit quadratus,ſupponitur autem non quadratus,ergo abſurdum. Ad ſecundum autem exiſtente A non cubo, ſi fieri poſſit detur aliquis alius horum cubus, præter G quartum & Z, &c. ſitque D. Quoniam eſt D ad G vt G ad B, & B ad A, ſi primus D ſit cubus, quartus A cubus erit,per 23 octaui contra ſuppoſitum, poſitus eſt enim A non cubus, quod fieri nequit. Similiter per 25 octaui patet vt in quadrato. Si itaque ab vnitate quotcunque continuè,&c.

Vnitas.
A 3
B 9
G 27
D 81
E 243
Z 729

PROPOSITIO XI.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, minor metitur maiorem per aliquem præexiſtentem in proportionalibus numeris.

Sint ab vnitate quotlibet continuè proportionales A, B, G, D numeri:Dico minorem A metiri maiorẽ,ſcilicet B G vel D, per aliquem ipſorum A, B, vel G in proportione exiſtentium. Quia ſunt proportionales,quoties vnitas metitur A, toties A metitur B & B ipſum G, &c. Et viciſſim per 15 ſeptimi, Quoties vnitas metitur B, toties A metitur G : ſed vnitas metitur B per vnitates ipſius B, & igitur A metitur G, per eaſdem ipſius B vnitates. Præterea erit æqua ratione per 14 ſeptimi, eadem vnitas ad G vt A ad D. Sed vnitas metitur G per ipſum G. Igitur A metietur D per eundem G. Er ſimiliter in quotcunque numeris, per eandem decimamquartam ſeptimi idem patebit. Si igitur ab vnitate, &c.

Vnitas.
A 2
B 4
G 8
D 16

PROPOSITIO XII.

Si ab vnitate quotlibet numeri continuè proportionales fuerint, quot primi numeri vltimum metientur, tot & vnitati proximum metientur.

Sint ab vnitate quotlibet continuè proportionales numeri, A B G D. Metiatur verò aliquis primus numerus,qui ſit E,vltimũ D:Dico eundem E metiri A vnitati proximum. Quod ſi E non metiatur A, erunt adinuicem primi, per 31 ſeptimi. Quoniam A B G D ſunt ab vnitate proportionales, A ſeipſum multiplicans ipſum B facit. Itaque B ad E primus erit,per 27 ſeptimi. Quia verò A multiplicans B fecit G, & G ad eundem E,primus erit,per 26 eiuſdem. Similiter infinitè A ipſum G multiplicans efficit D. Quare & D ad E primus erit,per eandem,non igitur metitur E ipſum D, vt poſitum fuit, quod inconuenit. Metitur ergo E ipſum A vnitati proximum. Si igitur ab vnitate quotlibet numeri continuè proportionales,&c.

Vnitas.
A 4 3
B 16 9
G 64 27
D 256 81
E 2 2

PROPOSITIO XIII.

Si ab vnitate quotlibet numeri continuè proportionales fuerint, Qui verò poſt vnitatem primus fuerit, Maximum nullus alius metietur præter præexiſtentes in proportionalibus numeris.

Sint

Sint ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales A B G D, sit autem qui post vnitatem scilicet A primus: Dico nullum numerum metiri D maximum, præter ipsos A B G D in proportione præexistentes: si enim alius ipsum D metiri credatur, is erit primus aut compositus: si fieri possit, esto E. Qui primus esse non potest, siquidem E primus existens metiretur D. Is metiretur A primum ac vnitati proximũ per 12 huius, quod fieri non potest. Non igitur potest esse E primus. Sed compositus esto E, tum metietur eum aliquis primus, per 33 septimi. Qui quidem non potest esse alius à numero A. Nam cũ E metiatur D, quilibet primus metiẽs E metiretur & D, per primam sententiam septimi, metiens verò D maximum, metiretur & A vnitati proximum (per 12 huius) & primum, quod fieri non potest. Solus igitur A primorum metiri poterit E metientem maximum D. Quod si esse possit, metiatur A ipsum E, per vnitates numeri Z. Igitur A binos, scilicet Z ex hypothesi & G, cùm sint ab vnitate proportionales multiplicans, binos E & D fecit, erit itaq; E ad D vt Z ad G per 17 septimi. Quia igitur E metitur D, & Z ipsum G metietur. Similiter vt ostendimus in E docebimus non esse Z primum & reliqua. Nam si primus esset, Z metiens G, metiretur & ipsum A (per 12 huius) primum, quod fieri non potest. Quare compositus erit Z, quem (per 33 septimi) metietur aliquis primus. Is necessariò erit A solus. Nam alius primus metiens Z metientem G metiretur & eundem G, per primam sententiam septimi, & proinde ipsum A primum, quod fieri non potest: solus igitur A primus numerum Z metitur. Esto per I. Ideo A binos I & B multiplicans efficit binos Z & G. Erit itaque (ex 17 septimi) Z ad G vt I ad B, sed metitur Z ipsum G. Metietur itaque I ipsum B. Quòd si rursus primus sit I, metiens B metietur & A (per 12 huius) primum, quod est absurdum. Est itaque I compositus, quem solus A primorum metietur, vt iam antea in E & Z ostendimus. Metiatur itaque A ipsum I per T. Sequetur A multiplicante binos T & seipsum, binos I & B producere. Quare erit I ad B vt T ad A, per 17 septimi. Sed metitur I ipsum B. Metietur itaque T ipsum A primum, est igitur eidem A æqualis T. Sed A est medius proportionalis inter T & I, per 20 septimi. Cùm sub extremis I T productus B æquetur ei qui à medio A idem B producitur. Quod est extra potentiam. Nullus itaque maximum D metietur præter numeros A B G in proportione præexistẽtes. Quorum quisque minor maiorem metitur, per 11 huius. Sunt enim in ratione multiplici ab vnitate proportionales. Si igitur ab vnitate quotlibet continuè, &c.

Vnitas.

A 3 T
B 9 I
G 27 Z
D 81 E

PROPOSITIO XIIII.

Si minimum numerum primi numeri mensi fuerint, nullus alius primus numerus ipsum metietur, præter eos qui in principio metiuntur.

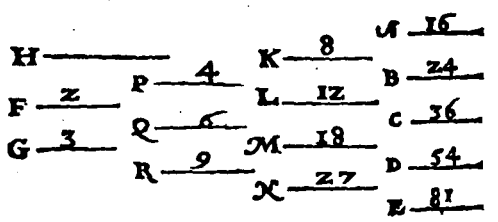
Esto minimus A quem metiantur quotlibet primi numeri B G D: Dico nullum alium primum metiri numerum A præter ipsos B G D. Quòd si alius primus eum metiri credatur, sit ille E, qui numerum A per Z metiatur. Quoniam duo numeri E & Z faciunt A, quem metiuntur aliqui primi B G D, sequetur (ex 32 septimi) ipsos B G D vnum ipsorum E vel Z metiri. Atqui ipsum E non metiuntur, cùm sit primus, ex hypothesi. Ipsi itaque B G D ipsum Z metientur, minorem quidem numero A quem Z per E mensus est. Prior igitur A positus non erit minimus ab ipsis B G D mensus (contra hypothesim) quod esset inconueniens.

B Z A 30
G 3
D 5

Nullus igitur alius præter ipſos B G D numerum A metietur. Si itaque minimum numerum, &c.

PROPOSITIO XV.

Si fuerint quotlibet numeri continuè proportionales minimi eandem eis habentium rationem: numerus aliquem eorum metiens, erit non primus alteri duorum minimorum huius rationis.



Sint quotcunque numeri A B C D E continuè proportionales minimi eandem rationem habẽtium eis, quorum alterum (qui ſit C) metiatur aliquis numerus H, ſintq; F & G duo minimi huius rationis: Dico H eſſe non primum ad F vel G. Ponantur (per 2 octaui) tres minimi huius rationis A ad B, qui ſint P Q R. Poſtmodum verò quatuor K L M N per eandem, & ſic vſque ad multitudinem propoſitorum A B C D E. Conſtat (ex demonſtratione ſecunda octaui) F per P Q & R facere K L M, per K L M N verò eundem F facere A B C D. Cùm enim H metiatur C, ipſe H ad vnum eorum F vel M non erit primus, per corollarium 32 ſeptimi. Quòd ſi fit F optatum conſequimur, ſiquidem ſit M ad quem H non ſit primus, & ad vnum ipſorum F vel R erit non primus, per idem coroll. Quòd ſi rurſus ſit F erit vnus eorum F vel G, optatus, ſi autem non, ſed ſit R ad quem H non ſit primus, & ad ipſum G (eundem R facientem per 2 octaui) erit non primus idem H, per idem coroll. ſed G eſt vnus eorum F vel G qui in principio minimorum huius rationis. Si igitur fuerint quotlibet numeri, &c.

MONITVM.

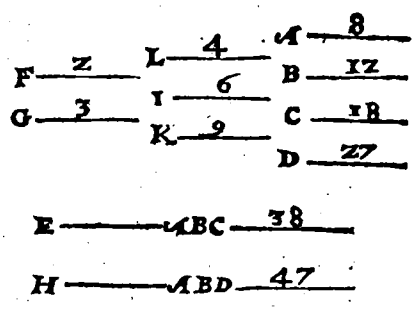
Licet hanc decimamquintam in vulgato græco exẽplari nõ reperiamus, tamen Campanũ eam ab Euclide traditã ſcripſiſſe legimus, quod duabus de cauſis verum fuiſſe arbitramur, vt ſcilicet decimamſextam ſequentem (quam Theon per numeros non demonſtrauit, ſed per 3 & 4 ſecundi) numeris demonſtraret. Quamuis autem ſolos numeros qui geometricis qnantitatibus conueniant, exponat Euclides, & ideo (ad extrema fugienti) ſufficiat eos numeros per continuorum præcepta prioribus ſex libris expoſita demonſtrare. Non tamen ea familiaritate numeros per continuorum notitiam, qua per eorundem numerorum intelligentiam cõſequi videbimur: altera quòd huius is auxilio proximam decimam ſextam ampliorem ac vberiorem tradimus, ad quotcunque proportionales, quam Theon ad tres eam extendi tantùm docuit, ob aſſumptas linearum ſecundi libri ſectiones, quare exiſtimantes Euclidem geometriam potius fecundam quàm ſterilem tradendam optaſſe, non dubitamus quin hæc Euclidis fuerit, & inſuper plures aliæ quæ vitio & temporis iniuria deperditæ iacent.

PROPOSITIO XVI.

Si quotlibet numeri continuè proportionales fuerint, minimi eandem eis habentium rationem, quilibet eorum ad compoſitum ex reliquis primus erit.

Sint quot

Sint quotcunque proportionales numeri minimi ſuæ rationis A, B, C, D: Dico quemlibet eorum (qui primò ſit D) ad compoſitum ex reliquis A,B,C, primũ eſſe: quod ſi non ſit, metiatur ipſum D & reliquum compoſitum A, B, C, aliquis numerus E. Dentur inſuper duo minimi rationis A, B, C,D,(per 35 ſeptimi) hi F & G. Quoniam autem E metitur vnum eorum A, B, C, D, erit idem E ad vnum ipſorum F vel G non primus, per 15 huius.



Aliquis igitur numerus metietur ipſum E & vnum eorum F vel G, qui ſit H. Quoniam enim H metitur E, metietur & D quem metitur idem E, per primam ſententiam ſeptimi. Præterea cùm H metiatur (per hypotheſim) vnum ipſorum F vel G, idem H metietur omnes medios inter A & D, per eandem primam ſententiam. Nam vterque ipſorum F vel G, omnes medios per proximos ipſis (vt L, I, K) efficit, per ſecundam octaui. Rurſus cum H metiatur E, metientem totum A B C, idem H metietur totum A B C, ſed metitur ablatum B C (medios) metietur ergo & reliquum A, per 2 ſentent. ſeptimi: ipſum H itaque ſequetur metiri extremos D & A qui primi ſunt (per tertiam octaui) quod eſſet abſurdum. Quare primus erit D, ad compoſitum A B C ex reliquis. Secundò dico idem eſſe in ſingulis, puta C primum eſſe ad compoſitum A B D: quod ſi non ſit, ſumatur vt prius E metiens C ac ipſum A B D, qui quidem E erit non primus ad vnum ipſorum F vel G, per 15 huius, metiatur ergo eos H. Quoniam H metitur E, metietur & totum A B C D quem E metitur, & quoniam metitur H vnum eorum F vel G, metietur vnum extremorum A vel D, qui ex ipſis F vel G fiunt, per ſecundam octaui, ſi ducantur in medios L vel K. Et inſuper idem H metietur medios B C, per primam ſententiam ſeptimi, cùm metiatur F vel G per hypotheſim eos metientes, per 2 octaui, ſed totum A B C D metitur idem H (vt oſtendimus) eò quòd metiatur E. Metietur ergo & reliquum, ſcilicet compoſitum, ex A & D extremis, per ſecundam ſententiam ſeptimi, atqui metitur vnum eorum A vel D, nam metitur vnum eorum F vel G ipſos A & D efficientium. Metietur ergo idem H vnum eorum A vel D & reliquum, per eandem ſecundam ſententiam, qui quidem A & D ſunt (per tertiam octaui) primi, quod eſt inconueniens, ſimiliter in quibuſlibet ipſorum A B C D oſtendetur. Non igitur vnum eorum A B C D & compoſitum ex reliquis, metietur aliquis numerus: primi itaque adinuicem erunt. Si igitur quotlibet numeri continuè, &c.

MONITVM.

Quod autem addit huic theoremati præter Euclidem Campanus, relinquemus, ſat etenim pro ſe quiſque lector ea deprehendet. Sunt equidem ea additamenta ſecundi libri theoremata, de lineis ſectis in ſectiones numerorum conuerſa, vbi maximè has ſectiones paſſi ſunt ferre numeri. quod ſi has ſectiones per numeros exprimere non potuit, illas impoſſibiles apud numeros eſſe demonſtrat, vt in vndecima ſecundi, quæ rectam extrema & media ratione ſecat, & cuius ſectiones quandoque apotomes eſſe videbimus, tertiodecimo. Hæc omnia viſo ſecundo facilè quiſque diſcernet, quæ ideo omiſimus, cùm Euclidis non eſſent, nec futuris demonſtrandis neceſſaria.

PROPOSITIO XVII.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, non erit ſicut primus ad ſecundum, ſic ſecundus ad aliquem alium.

Sint bini numeri A & B primi adinuicem: Dico non poſſe eis dari tertium proportionalem. Si autem fieri poſſit, eſto A ad B vt B ad G. cùm enim A & B ſint primi, hi erunt (per 23 ſeptimi) eius rationis minimi: ſi verò ſint minimi, ſinguli A B metientur ſingulos B G (eandem rationem habentes) æqualiter, per 21 ſeptimi, metitur itaque A antecedens, B antecedentem, ſed & ſeipſum metitur idem A. Non igitur ſunt ipſi A & B primi, cùm aliquis A eos metiatur, contra ſuppoſitum, quod fieri nequit. Non datur ergo ipſis A & B primis tertius proportionalis. Si itaque bini numeri primi adinuicem fuerint, &c.

A 12
B 13
G

PROPOSITIO XVIII.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, ipſorum autem extremi primi adinuicem fuerint, non erit ſicut primus ad ſecundum, ſic vltimus ad aliquem alium.

Sint quotcunque numeri A B G continuè proportionales, quorum extremi A & G ſint adinuicem primi: Dico non eſſe ſicut A ad B, ſic G ad aliquem alium. Si autem opponamus fieri poſſe, eſto A ad B vt G ad D: erit viciſſim A ad G vt B ad D, per 13 ſeptimi. Sed A & G (extremi) ſunt ex hypotheſi primi: ſi primi, erunt minimi, per 23 ſeptimi: ſi minimi, ſinguli A G metiuntur ſingulos B D (eandem rationem habentes) per 21 ſeptimi: igitur A antecedens metitur B antecedentem. Cùm autem ſit A ad B vt B ad G, ipſe B metietur G: quare & A metietur G, per primam ſententiam ſeptimi. Metitur autem ſeipſum A & reliquum G, primos quidem, quod fieri non poteſt: non erit igitur ſicut A ad B, ſic G vltimus ad quempiam alium. Si igitur fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, &c.

A 4
B 6
G 9
D

MONITVM.

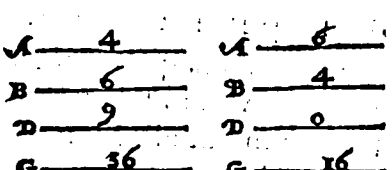
Concludunt hæc bina theoremata neceſſariò, quod prius profeſſi ſumus, vnitatem ſcilicet numerorum nomine priuari inter actiuos numeros, cùm non ſit multitudo: & proinde rationem multiplicem, quæ in minimis partibus numeros nuſquam, ſed vnitatem & numerum ſuſcipit, minimos ſuæ rationis numeros nequaquam ſubire, ac ideo in ea multiplici ratione nunquam primos reperiri numeros (eò quòd non ſit pura numerorum ratio) vt cuique ſatis ſupérque conſtat. Attamen quia aliqui, putantes has multiplices rationes ad minimos vel primos deduci poſſe, cùm ad vnitatem & numerum ducentur, rationes numerorum à rationibus geometricis non diſcernentes, eas ſub legibus 21, 24, 25, 27 ſeptimi, 2, 6, octaui, & plurium aliarum propoſitionum (operationes numerorum exequentium) contineri arbitrarentur: nam idem poteſt ſequi in harum rationum minimis partibus, quod in reliquarum minimis numeris. Et idcirco multiplicium minimas partes (quarum ſemper altera eſt vnitas) minimos earum vocare numeros crederent, contra numeri diffinitionem. In hanc labẽtibus charybdim, ſubuenit Euclides his duobus theorematis, per quæ patulè depromit vnitatem ad primos ſeu minimos numeros nuſquam venire: cùm dicat 17 ſi primi fuerint, licet primi ſint minimi, non erit ſecundus ad aliquem, vt primus ad ſecundum. Sciebat tamen Euclides rationem dari poſſe cuiuſlibet numeri oblati ad aliquem aliũ, eandem quæ vnitatis eſſet ad ipſum oblatum, cùm multiplicationes ſint liberæ. Similiter quia hæc decima octaua dicat, ſi extremi primi fuerint, non dari eam rationem vltimi ad alium quemquam, quæ fuerit primi ad ſecũdum, licet intelligat Euclides, ſi in multiplicibus extremi primi poſtulentur, ad vnitatẽ veniendum eſſe. Sunt enim multiplices ab vnitate proportionales cũcti: & igitur vltimum numerum eodem multiplicari

tiplicari posse numero, quo & multiplicabitur vnitas, quæ est primus huius ordinis terminus, ac proinde eandem dari (contra proposita theoremata) rationem. Patet itaque Euclidem (antiquum) non intellexisse vnitatem numerorum actiuorum nomine contineri, vt facilè ostendit per 9 & 10 septimi, quæ tam geometricarum rationum quàm arithmeticarum ostendunt separatam legem, quam postmodum confirmat decimaquinta eiusdem, per partem scilicet & partes, ac vnitatem. Et quamuis sub legibus partis simplicis semper vnitas contineri possit, cùm ea sit singulorum numerorum pars vnica: quia tamen aliqui incidunt numeri in eam partem, qui quidem aliorum dicuntur pars, vel partes, vt vnitatis legem prorsus Euclides à numeris distrahat. Illud idem quod de numeris dixit, per hæc nonum & decimum theoremata, fatur decimoquinto theoremate de vnitate, quòd si vnitas pro numero haberetur, prorsus fieret superuacaneum 15 theorema septimi, ac inutile. Intelligamus igitur decet, quicquid minimis primis numeris, ac reliquis actiuis operantibus, conuenire docuit prioribus, ac sequentibus docebit Euclides, non necessariò minimis rationis multiplicis partibus conuenire (vt maximè hac & præcedenti patuit) sed si quæ præcepta illis conueniunt, & his conuenire videri-mus, non has ab illorum legibus intelligentiam sumere credamus: sed suapte natura, quæ multiplicibus adhærebunt rationibus, per minimas earum partes numeri denominatione quamuis priuatas seorsum demonstrare licebit. Quare summa cura decet numerorum duplicem sumptionem reminisci, quorum actiui (arithmeticas operationes exequentes, in passiuos geometricas quantitates significantes) semper discretos numeros, nusquam autem vnitatem recipiunt. Passiui autem & numeros & vnitatem seu rationes omnimodas suscipiunt, siue discreti ad continuum, siue discreti ad discretum, quæ tantùm actiuis conueniunt numeris. Inter operationes igitur discretorum numerorum, vnitatem recipi nefas esse suscipiemus, simulac inter rationes discretorum multiplicem suscipi rationem nequius, inter numeros verò passiuos seu quantitatis significatores, quosuis numeros ac vnitatem, siue quasuis rationes cadere dicemus discretorum, seu continuorum per discretos numeros non explicandorum: cùm multò fœcundior sit Geometria (passiuos sibi sumens numeros) ipsa Arithmetica, actiuos seu tantùm discretos sumente numeros.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA 1.

Binis numeris datis, considerare si possibile est eis tertium proportionalem inuenire.

Sint propositi bini numeri A & B, oportet enim scrutari eis tertium proportionalem si fieri possit: Dico, si primus metiatur quadratum secundi, posse dari tertium: si quidem non metiatur, nec posse dari. Primò B seipsum multiplicans efficiat G quadratum, quem metiatur A per D. Quoniam igitur A ipsum D multiplicans extremum, æquum producit G ei qui fit A medio B, hoc est eidem G, ipsi tres A B D sunt (per 20 septimi) proportionales A ad B vt B ad D: datus est igitur tertius D. Secundò non metiatur A quadratum ipsius B: Dico non posse ipsis A B tertium dari: si enim fieri possit, esto D tertius: quoniam A B D sunt proportionales, qui sub A & D extremis, æquus est ei qui à medio B (per 20 septimi) fit ille G: igitur A metietur G per vnitates ipsius D. Nam multiplicans D efficit ipsum G: sed & non metitur (ex hypothesi), quod fieri nequit. Binis igitur numeris datis considerauimus si possibile est eis, &c.



PROPOSITIO XX. PROBLEMA 2.

Tribus numeris datis considerare si est possibile, eis quartum inuenire proportionalem.

Datis tribus A B G numeris, inquiramus, si fieri possit, illis quartum proportionalem: Dico, si primus productum ex secundo & tertio metiatur, dari posse quartum: si quidem non metiatur, nec posse dari. Metiatur primo A prior, productum ex B & G quod sit D: Quoties autem A metitur D, tot sint in E vnitates, igitur A multipicans E fecit D: sed B ipsum G multiplicans, eundem D fecit. Erit igitur (per decimęnonæ septimi secundam partem) A ad B vt G ad E: datus est igitur ipsis A B G, quartus E. Si verò non metiatur A ipsum D, non erit E proportionalis. Quod si secus fuerit, esto E quartus proportionalis. quoniam B ipsum G multiplicans fecit D, sequetur (ex 19 septimi) A ipsum E multiplicantem eundem D efficere. Metitur igitur A ipsum D per vnitates ipsius E, & non metitur (per hypothesim) quod est absurdum. non itaque erit E quartus ipsis A B G. Tribus itaque datis considerauimus si est possibile, &c.

A 8 A 5 vel 48
B 12 B 7 12
C 18 G 8 3
E 27 E 0 0
D 216 D 56 36

LEMMA.

Considerare, Si duobus extremis numeris propositis possint bini medij continuè proportionales reperiri. Nam id tantùm accidit inter similes solidos, inter quos bini cadunt medij, per 19 octaui, & inter eos solos per 21 eiusdem. Nam vnus eorum quadratum alterius multiplicans cubum efficit, cuius latus est mediorum vnus: & simili ratione reperitur alter, vt sint inter propositos extremos bini proportionales.

MONITVM.

Breuiores binas precedentes fecimus demonstrationes, vt quadruplas Theonis & Campani in hanc subdiuisiones in vnicam redigeremus disiunctiuam, scilicet siue fuerint continuè proportionales, habentes extremos non primos, vel continuè & habẽtes eos primos, aut discontinuè primos, vel equidem discontinuè non primos. Has quatuor disiunctiuas in vnicã reduximus conditionalem disiunctam, scilicet si primus productum secundi & tertij metiatur, aut non.

PROPOSITIO XXI.

Primi numeri plures sunt omni multitudine proposita primorum numerorum.

Sit proposita quæuis multitudo primorum numerorum A B G: Dico alios posse dari præter hanc quamuis multitudinẽ, sumatur minimus quem ipsi A B G metiantur (per 38 septimi) qui sit E D, ipsi porro E D addatur vnitas D Z. Aut enim totus E Z est primus, & sic optatum consequimur (cùm ipse E Z præter eos A B G & ipsis maior datus sit): aut equidẽ E Z est compositus, & sic aliquis primus eum metietur, qui sit I, per 33 septimi. Dico I esse alium primum ab ipsis A B G: quod si nõ sit, sed idem vni eorum A B G, metietur idem I ipsum E D, quem ipsi A B G metiuntur, sed, per hypothesim, idem I metitur totum E Z. Metietur itaque (per secundam sententiã septimi) reliquum D Z, vnitatẽ, quod obstat naturæ numerorum absurdissimum. Primus igitur erit I ipsorum A B G datæ multitudini additus. Primi itaque numeri plures sunt, &c.

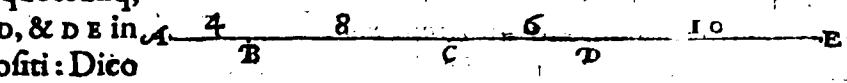
E D Z
I
A 2
B 3
G 5

PROPOSITIO XXII.

Si pares quotcunque numeri componantur, totus par est.

Pro

Proponantur quotcunq; pares AB, BC, CD, & DE in vnum AE compoſiti: Dico AE parem eſſe, quoniam

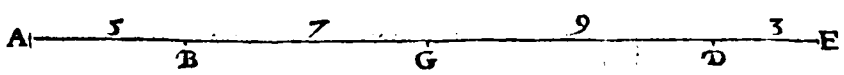


quilibet par duas habet partes æquales. Si igitur æqualibus æquales addantur, omnes dimidiæ dimidiis erunt æquales. Et proinde totus AE par erit (per diffinitionem paris numeri.) Si itaque pares quotcunque numeri, &c.

PROPOSITIO XXIII.

Si impares numeri componantur, fuerit autem multitudo par, totus par erit.

Componantur quilibet impares numeri pa

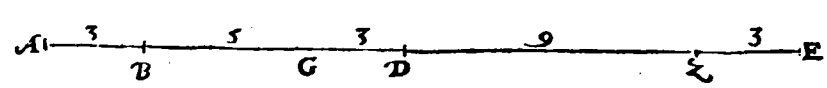


ri multitudine propoſiti AB, BG, GD, DE: Dico totum AE parem eſſe. Cùm enim, per ſeptimam diffinitionem ſeptimi, quilibet impar vnitate differat à pari, ablata vnitate à ſingulis, reliqui pares erunt, & pari multitudine (per præcedentem) totum parem ex ipſis compoſitum efficient. Si igitur vnitates pari numero ablatæ (parem numerum efficientes) pari addantur, totus (per eandem) par erit. Si itaque impares numeri, &c.

PROPOSITIO XXIIII.

Si impares numeri componantur, multitudo autem eorum fuerit impar, totus impar erit.

Componantur impares numeri multitudi-

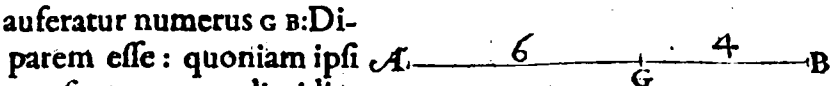


ne impari AB BG GD DZ & ZE: Dico totum AE imparem eſſe: tollatur à toto numerus ZE, reliquus AZ par erit, per 23 huius. Ab ipſo verò EZ tollatur vnitas, reliquus ſimiliter par erit (per ſeptimam diffinitionem ſeptimi) qui ipſi AZ iunctus parem efficit (per 22 huius) ipſi porro pari vnitas reſtituta, totum AE imparem efficiet, vnitate enim diſtat impar à pari ex ſeptima diffinitione ſeptimi. Si itaque impares numeri, &c.

PROPOSITIO XXV.

Si à pari numero par auferatur, reliquus par erit.

A pari AB par auferatur numerus GB: Dico reliquum AG parem eſſe: quoniam ipſi

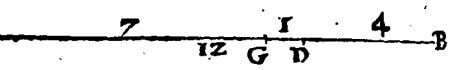


AB, AG, & GB pares ſunt, partes dimidias æquales habent. Si igitur ab æqualibus dimidiis AB totius æquales ablati GB auferantur dimidiæ, reliquæ reſidui AG partes dimidiæ æquales erunt, cùm ſunt tantùm binæ: quare par erit reliquus AG, per ſextam diffinitionem ſeptimi. Si itaque à pari numero, &c.

PROPOSITIO XXVI.

Si à pari numero impar auferatur, reliquus impar erit.

A pari numero A B auferatur impar G B: Dico reliquum A G imparem esse.

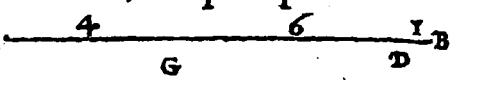


Auferatur ab ipso G B impari vnitas G D, quæ addatur ipsi A G: reliquus D B par erit, per septimam diffinitionem septimi: sed D B par, ablatus à toto A B pari, relinquit A D parem, per præcedentẽ. Ab ipso itaque A D pari, ablata G D vnitas, ipsum A G imparem (per septimam diffinitionem septimi) relinquit. Si igitur à pari numero impar auferatur, &c.

PROPOSITIO XXVII.

Si ab impari numero impar auferatur, reliquus par erit.

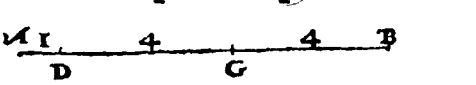
Si à toto A B impari numero auferatur impar numerus G B: Dico reliquum A G parem esse. Auferatur ab ipso G B vnitas D B, reliquus G D par erit, similiter & totus A D, cùm vnitate distent ab impari. Si igitur à pari A D par auferatur G D, reliquus A G (per 25 huius) par erit. Si itaque ab impari numero impar auferatur, &c.



PROPOSITIO XXVIII.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

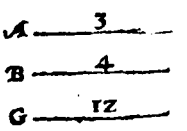
Ab impari numero A B, auferatur par numerus G B: Dico reliquũ A G imparem esse. Auferatur vnitas A D, quoniam ablata à toto A B vnitate A D, reliquus D B par est. Atqui G B (ex hypothesi) par est: igitur reliquus D G (per 25 huius) par erit, cui addita A D vnitas, totum A G imparem efficit, per septimam diffinitionem septimi. Si itaque ab impari numero par auferatur, &c.



PROPOSITIO XXIX.

Si impar numerus parem multiplicans aliquem fecerit, qui gignitur par est.

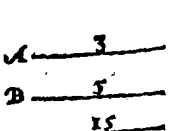
Impar numerus A parem B multiplicans ipsum C faciat: Dico C parem esse. Quoniam A impar sumptus per vnitates B paris efficit multitudinem, ipsius A parem, productus ex eis itaque (per 23 huius) par erit, vel quoniam B par sumitur per multitudinem quam cunque ipsius A totum efficit C parem, per 22 huius. Si igitur impar numerus, &c.



PROPOSITIO XXX.

Si impar numerus imparem multiplicans aliquem fecerit, factus impar erit.

Multiplicans A impar imparem B ipsum C faciat; Dico C imparem esse. Quoniam A impar per multitudinem imparem vnitatum ipsius B sumptus, aliquem C efficit, totus impar erit, per 24 huius. Si igitur impar numerus imparem multiplicans, &c.



PROPOSITIO XXXI.

Si impar numerus parem numerum metiatur, & eius dimidium metietur.

Impar

Impar numerus A parem B metiatur: Dico quòd A paris B dimidium metietur. Metiatur A ipſum B parem per G, dico G parem eſſe. Nam ſi impar eſſet G, ſequeretur A imparem per G imparem ductum, ipſum B imparem efficere, ex 30 huius. Sed ſupponitur B par, quod eſt abſurdum. Par eſt igitur G. Si igitur A per vnitates omnes ipſius G totum B efficiat, ſequetur eundem A per dimidium vnitatum ipſius G paris, dimidium ipſius B efficere. Metietur igitur A dimidium ipſius B, per dimidium vnitatum ipſius G paris numeri. Si itaque impar numerus parem numerum metiatur, &c.

A 3
B 18
G 6

PROPOSITIO XXXII.

Si impar numerus ad numerum aliquem primus fuerit, & ad ipſius duplum primus erit.

Impar numerus A ad aliquem B primus eſto, duplum verò ipſius B ſit G: Dico A ad G eſſe primum. Quòd ſi non ſit, metiatur ipſos A & G aliquis D, qui quidem erit impar. Nam ſi par eſſet D metiens ipſum A parem efficeret, per 22 huius, contra hypotheſim per quam A impar eſt. Erit itaque & D impar, qui parem G (cùm ſit ipſius B duplus) metiens, & eius dimidium B metietur, per præfatam, metitur autem & A, duos primos, quod fieri non poteſt. Non igitur metietur aliquis ipſos A & G, qui igitur ſunt primi. Si itaque impar numerus ad numerum aliquem primus fuerit, &c.

A 7
B 8
G 16
D

PROPOSITIO XXXIII.

A binario duplorum vnuſquiſque, pariter par eſt tantùm.

Sint quotcunque numeri à binario dupli A B G D: Dico illorum vnumquemque pariter parem eſſe, & illos tantùm. Cùm enim ex binarij repetitione fiant, pares erunt, per 22 huius. Cùm autem ſint à binario dupli, ipſi erunt ab vnitate proportionales: nam binarius vnitatem duplicat. Quilibet igitur eorum minor metitur maiorem, per aliquem præexiſtentem, in proportione, per 11 huius, qui quidem ſunt pares: facti igitur omnes pares ſunt. Et inſuper pariter, per octauam diffinitionem ſeptimi: nam nullus alius eos metitur, præter præexiſtentes, in proportione, per 13 huius, qui omnes ſunt pares. Quòd autem nullus ſit alius ab ipſis pariter par, patet. Si enim fieri poſſit, alius eſto E, qui ſecetur bifariam ſemper quouſque ad vnitatem vel imparem numerum venerit, quorum aliud neceſſe eſt. Si ad imparem venerit, is ipſum E metietur per ſui ipſius frequentem duplicationem, non igitur pariter par erit, ex octaua diffinitione ſeptimi. Si verò ad vnitatem venerit, is binarius aut à binario duplus erit. Cùm enim per dimidium continuè ſectus fuerit, idem duplo auctus continuo eandem viam ſequetur, dimidij enim duplum eſt conuerſum. Non igitur ab his alius pariter par erit. A binario itaque duplorum vnuſquiſque pariter par eſt tantùm.

Vnitas.
A 2
B 4
G 8
D 16
E 48

MONITVM.

Quoniam falsò diffiniuit prius Theon pariter parem numerum, neſcio ſi in alio aliud dixerit exemplari, vulgato tamen græco non videtur intellexiſſe, vt circa diffinitionem diximus. Hac de re demonſtrationem eouſque breuem ac mancam ab eis deſcriptam, cogimur prolixiorem efficere, inſtar Campani, vt vniuerſalem (vnuſquiſque) ac excluſiuam (tantum) probemus, & huic Euclidis propoſi-

tioni

tioni noſtram (pariter paris)diffinitionem congruere, perfectè ſciamus. Idem dicemus in ſequente proxima.

PROPOSITIO XXXIIII.

Si numerus dimidium imparem habuerit, pariter impar eſt tantùm.

Sit A numerus habens dimidium B imparem: Dico ipſum A & huiuſmodi tantùm, eſſe pariter impares. Sit G binarius, per quem B metiatur A duplum. Sit autem aliquis par D metiens eundem A per Z, quod fieri poteſt cùm A ſit par. Quia qui ex G B æqualis eſt ei qui ex Z D. Erit(per decimamnonam ſeptimi) G ad D ſicut Z ad B. Sed metitur G binarius ipſum D parem, metietur ergo & Z ipſum B dimidium, impar eſt igitur Z:nam ſi par eſſet, faceret B quem metitur parem, per vigeſimamſecundam huius, quod obſtaret hypotheſi,impar eſt igitur Z alius ſcilicet quilibet, per quem D (par) metitur A ideo pariter imparem. Præterea nullus eſt alius pariter impar,quàm is qui dimidium imparem habet. Nam ſi credatur alius habens dimidium parem,binarius(par)per dimidium illum parem metietur,non igitur erit pariter impar,ex diffinitione nona ſeptimi, contra hypotheſim. Non itaque eſt alius ab iis dimidium imparem habentibus,pariter impar. Si igitur numerus dimidium imparem,&c.

A 50 B 25 G 2
D 10 Z 5

MONITVM.

Harum duarum præfatarum intelligentiam facilè fallet Theon, cùm diffinitionem terminorum alterauerit, octaua & nona ſeptimi diffinitione:nam vt falſas ſequatur diffinitiones,videtur excluſiuam(tantùm)referre ad numerorum(vt ita loquar)paritatem vel imparitatem, quod non intelligit Euclides, ſed pariter parem eſſe tantùm à binario duplũ productũ quotumcunque,ac nullum alium,ſimiliter pariter imparem eſſe tantùm eum qui dimidium imparem habet, nullum verò alium. Non autem pariter imparem eſſe tantùm eò quòd non ſit pariter par:excluſiua enim(tantùm)reliquos excludit numeros,non autem numeri qualitatẽ. Nam, ſi rectè dixiſſet Theon,idem numerus octauæ & decimæ diffinitionibus ſeptimi, conueniret. Campanus verò rectiùs diffiniuit, ſed excluſiuam nec oſtendit in hac veluti in præcedente.

PROPOSITIO XXXV.

Si numerus neque à binario duplus fuerit, neque dimidium eius impar habuerit,Pariter par eſt,& pariter impar.

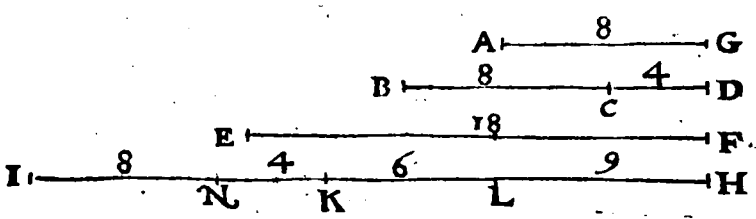
Sit aliquis numerus A qui à binario duplus non ſit, dimidium verò habeat B parem:Dico ipſum A eſſe numerum pariter parem & imparem. Quoniam A non eſt à binario duplus,continuè biſariam ſectus numerum imparem efficiet,nam ſi binarium vel vnitatem efficeret,is eſſet à binario duplus, faciat itaque imparem G. Manifeſtum eſt imparem G metiri A per parem numerum: nam ſi per imparem metiretur, ipſum A imparem efficeret, per 24 huius: igitur G impar metitur A per parem. Et quoniam A dimidium habet parem, binarius (par) per dimidium (parem) eum metitur. Sequetur itaque ipſum A numerum (quem par aliquis per parem & quandoque alius par per imparem numerum metitur) eſſe pariter parem & im

A 24 B 12 G 3

& imparem, per decimam diffinitionem ſeptimi. Et ſi B rurſus dimidium parem habuerit, alius adhuc par per parem vel imparem eum metietur numerum, ſicque infinitè quoad offendatur impar. Si igitur numerus neque à binario duplus, neque dimidium imparem, &c.

PROPOSITIO XXXVI.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, auferantur autem à ſecundo & vltimo æquales ipſi primo, erit ſicut ſecundi exceſſus ad primum, ſic vltimi exceſſus ad omnes ſe præcedentes.



Sint quotcunque numeri cõtinuè proportionales A G B D E F & I H. Auferatur autem à ſecundo B D æqualis primo A G qui ſit B C. A maiori & vltimo verò, idem auferatur qui ſit I N: Dico eſſe vt C D exceſſum ad A G primum, ſic N H vltimi exceſſum ad omnes E F B D A G ſe præcedentes. Quoniam I H eſt maximus (nam per hypotheſim ſecundus eſt maior primo) ponatur I L æqualis ipſi E F & I K æqualis ipſi B D: Ipſi verò A G eſt æqualis I N. Erit itaque ſicut I H ad E F & E F ad B D, ac B D ad A G, ſic idem I H ad I L & I L ad I K ac I K ad I N, ſunt enim æquales. Quare & N K ipſi C D æqualis erit, per 3 communem ſententiam. Sed cùm ſit ſicut I H totus ad totum I L, ſic ablatus I L ad ablatum I K: erit (per vndecimam ſeptimi) reliquus L H ad reliquum K L, ſicut totus I H ad totum I L. Quia ſimiliter eſt I L ad I K vt I K ad I N, erit per eandem K L ad N K ſicut I L totus ad totum I K. Sed ſicut I H ad I L & I L ad I K ac I K ad I N, ſic fuerunt I H ad E F & E F ad B D ac B D ad A G. Sicut igitur L H ad K L & K L ad N K, ſic erit E F ad B D & B D ad A G. Et viciſſim per decimamtertiam ſeptimi, ſicut L H ad E F ſic K L ad B D, & ſicut K L ad B D ſic N K ad A G, & ſicut vnus antecedentium N K ad vnum conſequentium A G, ſic erunt per decimamſecundam ſeptimi omnes antecedentes N K K L L H, ad omnes conſequentes A G B D E F. Sed ipſi N K æqualis oſtenſus eſt C D. Sicut igitur C D exceſſus ſecundi B D, ad primum A G, ſic erit totus N K L H exceſſus vltimi, ad A G B D E F omnes ſe præcedentes. Si fuerint itaque quotcunque numeri continuè proportionales, &c.

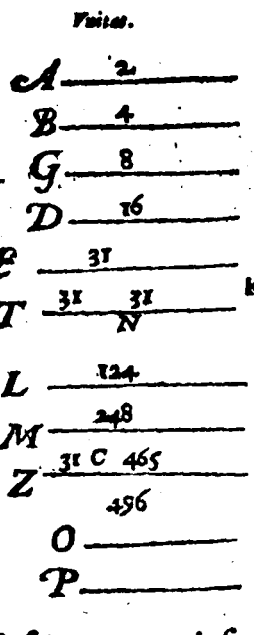
MONITVM.

Quoniam Theon ac Campanus hanc ſuccinctè demonſtrarunt, proliciores paululum eſſe cogimur, vt eam per numeros oſtendamus. Præterea animaduertendum eſt, in hac & ſimilibus, non neceſſariò exprimendum eſſe quod hypotheſis ex ſe poſtulat, vt ſi dixiſſemus hanc intelligi in rationibus minoris inæqualitatis tantùm, quod certum eſt. Sed cùm hypotheſis poſtulet à ſecundo auferri æqualem primo, illud ſatis manifeſtum aperit, priores ſiue antecedentes numeros, minores eſſe conſequentibus. Quare nec demonſtrando neceſſe erit dicere, incipientes à minimo, vt ait Theon, dummodo exprimatur hypotheſis, optans conſequentes maiores antecedentibus eſſe.

PROPOSITIO XXXVII.

Si ab vnitate quotcumque numeri continuè dupli exponantur,

nantur, quoad totus compoſitus ſit primus, & totus in vltimum multiplicatus aliquem fecerit, qui gignitur perfectus erit.



Apponantur vnitati quotcũque numeri A B G D continuè dupli, quoad aggregatus ex ipſis A B G D & vnitate ſit primus qui ſit E. Idem autem E in vltimum D ductus faciat Z I: Dico Z I eſſe perfectum. ſumantur totidem ipſis A B G D, qui poſt vnitatem E T L M dupli, erit æqua ratione (per 14 ſeptimi) A ad D vt E ad M. Qui itaque ſub A & M æquus erit ei qui ſub D & E, per 19 ſeptimi: ſimiliter qui ex B L ei qui ex G T, per eandem: ſed ex D & E fit Z I, per hypotheſim Ex A & M igitur fiet idẽ Z I: duplus itaque erit Z I ipſius M, cùm A ſit binarius per hypotheſim: ſed & M L T E dupli fuerunt. Continui itaque proportionales dupli erunt, E T L M Z I. Abſcindantur autem à ſecundo T, & vltimo Z I, æquales ipſi primo E, qui ſint T N & Z C, relictis N K & C I, erit ex præfata ſicut N K ad E, ſic C I exceſſus ad omnes M L T & E ſe præcedentes: atqui N K æquus eſt ipſi E, nẽpe dimidius dupli T K. Æqualis igitur erit C I ipſis M L T & E, ſed vnitati & A B G D æquus erit Z C, cùm poſitus fuerit ipſi E vel N T æqualis, totus igitur Z I ipſis M L T E, ac ipſis D G B A ac vnitati æquabitur. Præterea dico omnes metiri eundem Z I, cùm enim Z I fiat ex D in E, vterque eum metitur, & cùm ab vnitate dupli metiantur ipſum D, ſcilicet ipſi A B G, per decimamtertiam huius, ipſi metientur & Z I quem D metitur, per primam ſententiam. Simili argumento cùm E T L M ſint ad Z I, vt vnitas & A B G ad ipſum D, in ratione ſcilicet dimidia, & vnitas ac A B G ipſum D metiantur, & pariter E T L M ipſum Z I metientur. Inſuper dico nullum alium ab his ipſum Z I metiri: quod ſi fuerit aliquis, eſto O, qui per vnitates ipſius P, ipſum Z I metiatur: ſed D eundem Z I per E metitur, erit igitur ſicut E ad P, ſic, per 19 ſeptimi, O ad D. Quia verò O nullus eſſe horum ponitur, ipſe non metietur D, quem ſoli præexiſtentes in proportione ſcilicet A B G metiuntur, per decimamtertiam huius, nec E igitur metitur P: cæterum quoniam eſt E ad P vt O ad D: ſed E primus eſt, ex hypotheſi, & ad P quem non metitur, per 31 ſeptimi primus erit. Quia verò E ad P ſunt primi, ipſi erunt (per 23 ſeptimi) minimi, & (per vigeſimamprimam eiuſdem) metientur ipſos O & D eandem rationem habentes. Metitur ergo E ipſum O, & P ipſum D. Sed cùm nullus metiatur D præter præexiſtentes A B G, & vnitatem (per decimam tertiam huius) ſequetur ipſum P vnum eorum A B G eſſe. Cùm autem ipſi A B G D metiantur Z I, per ipſos M L T E (vt diximus) & P metiatur Z I per ipſum O, ſequetur O vnum eſſe ipſorum M L T E, ſed & alium ab ipſis (per hypotheſim) quod fit extra potentiam. Nullus igitur alius ab ipſis M L T E, D G B A & vnitate, ipſum Z I metitur, ſed & ipſis M L T E D G B A ac vnitati, qui ſunt ſingulæ eius Z I partes, per trigeſimamnonam ſeptimi oſtenſus eſt ipſe Z I æqualis. Ipſe itaque Z I perfectus erit, per vigeſimamquartam diffinitionem ſeptimi. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri continuè dupli exponantur, quoad, &c.

MONITVM.

Præmiſimus nuper Euclidem numerorum auxilia tantũ ad geometricas quantitates diſcernendas & ideo elucidandas imploraſſe. Qua autem de cauſa ſingula documenta quæ numeris conuenirent, huic negotio conferentia non poſuerit Euclides, mirari deſinemus. Cùm enim Geometriæ traditiones ampliores ac vberiores arithmeticis exiſtant, quæ in geometricis tradidit Euclides quantitatum continuarum nomine, ea numeris adaptari cupit, maximè cùm continuarum illarum ma

rum magnitudinum reſpectus, more ac numerorum habitudine ſeſe reſpiciunt, vt exemplo ex prima ſecundi dicemus in numeris. Si duorum numerorum alter ſecetur, quomodolibet productus ex multiplicatione ſecti & inſecti, æquus erit productis ex multiplicatione inſecti per ſingula ſecti ſegmenta. Haud diſſimili via in reliquis ſecundi ſequetur, dempta vndecima: ea etenim inter eas vnica, ſectionem incertam ac extra numerorum rationem ſupponit: quare hæc numeris applicari non debet. Reliquæ verò vtraſque ſuſcipiunt rationes numerorum ſcilicet (quæ certæ ſunt) ac incertas geometricam vbertatem ac amplitudinem ducentes. Similitérque dicemus in reliquis aliorũ librorum theorematibus ſub vbertate geometrica comparationem linearum in genere tractantes, vbi præcepta lineis rationem numerorum habentibus conuenient, hæc eadem de numeris dicta fuiſſe concipiemus. Neminem etenim latet geometricas magnitudines ſub continuorum confuſo reſpectu adinuicem collato, vtraſque complecti rationes, eas ſcilicet, quas numeri habent ad numeros, & eas quas numeri inter ſe non patiuntur cadere: quarum priores tantùm his tribus numerorum libris, eorundem diſcretionibus adaperuit: diſcretiones numerorum binis acceptionibus proferens. Altera qua quantitates diſcernendas ac inuicem conferendas numeris adaptatis ſignificauit, integras verò ac inſolutas vnitate denotauit. Altera autem qua operationes arithmeticas (diſcretionem elucidantes) in quantitates prioribus ſignificatas numeris exercuit. Vtraque porro ſumptione continuarum ac confuſarum quantitatum abſtruſos inter ſe reſpectus ideo patefecit, vt continuis eaſdem habitudines ineſſe perciperemus, quas diſcretis eſſe nobis eſt notum: & præter has alias ineſſe habitudines, quæ licet numerorum diſcretione proferri non poſſint, tamen eorundem obſequio ſuffulti, naturam ac earum progeniem à diſcretorum priuatione quadam arte oriri noſcemus, hoc proximo maximè decimo libro, qui quantitatum ac habitudinum præfatarum intelligentiam præcipuè docebit.

PROOEMIVM DECIMI ELEMENTORVM EVCLIDIS.

OPTANS *Euclides ſuis Geometriæ elementis vtramque quantitatum naturam diſcentium ingenijs exhibere, earum quidem quæ ita ſibi inuicem comparari poſſunt, vt aliqua vnius pars, alterius alia pars cognominari poſſit, aut eadem, ſiue earum quæ ita ſibi comparantur, vt quæuis pars vnius nulla poſſit alterius dici pars. Sed quibuſlibet ſectionibus æqualibus ſingulæ ſectæ quantitates, aut quibuſuis vnitatibus multiplicatæ, nuſquam æquales producant magnitudines, quæ prioribus nouem libris ſeorſum docuit, hoc decimo ea ſerie congeret, qua huius diſcrepantiæ progenituram ac ortum, mentibus percipiendum facilitet. Sex etenim prioribus, quæ ad quantitatum confuſarum (quia continuarum) intelligentiam ſpectarent, docuit, pluribus rudimentis ſæpius diſcretarum magnitudinum affinitates ac præcepta capientibus,*

Geometria nanque vtramque continet quantitatum naturam, ſcilicet rationes numerorum habentium, ac non habentium. Tribus verò poſtremis, quæ ad quantitatum diſcretarum cognitionem pertinerent, legibus à numeris ſubfuratis edocuit, quibus earum quantitatum intelligentiam numerorum diſcretione (quam ſenſibus familiari) adaperiret. Cùm autem numerorum diſcretionem ab vnitate (quæ repetita ſemper æquas producit partes) generari ſit notum, ſequetur ſingulas numerorum vnitates ſibi inuicem æquales eſſe, ac exinde magnitudines numeris expreſſas ad æquales partes tandem reduci poſſe, ad eam ſcilicet quam vnitas operit. Nam cuiuſuis numeri vnitas eſt pars, nullius verò partes: quòd ſi alicui harum vnitatum magnitudini comparetur magnitudo ad eam habens rationem nullis numeris dicibilem, ſequetur ab his diuerſis vnitatibus compoſitas æqua repetitione magnitudines, rationem habere nullis numeris dicibilem: nam æquemultiplicium partes per decimamquintam quinti eandem rationem habent. Sed cùm nulla relinquatur mortalium ſenſibus quantitatis diſcretio, ſi abfuerint numeri, per quos exceſſum aut equidem defectum per partis aut partium denominationes exprimimus, quæ quantitatis notitiam in intellectu generantes ſolùm quid ſit in magnitudine propoſita quantitatis pronunciant: Geometricarum ideo quantitatum comparationes duplicem habere naturam exponet Euclides, ſcilicet eam qua ſibi inuicem comparatæ rationem habere numerorum percipientur, quas certas dicet, ob diſcretam illam numerorum certitudinem, notitiam determinatam, ac conſtantem propoſitarum quantitatum (mutuò collatarum) ingenijs exhibentem, & eam qua ſibi comparatæ rationem habent, quæ inter nullos poteſt cadere numeros, eaſque incertas idcirco dicet, quia certis comparatæ omni habitudinis diſcretione priuentur, vrgente affinitatis numerorum penuria, ac demum in quotcunque ſegmenta æqualia (licet numero inæqualia) ſingulæ illæ quantitates diſtribuantur infinitè. Nuſquam eadem vnitatis quantitas vtraſque numerare poterit, nam ſemper vnitates binas illas quantitates metientes, inæquales erunt, licet quauis diſtinctione ſecentur. Cùm autem infinitæ earum vnitatum poſſint dari inæqualitates, ortæ quidem à numerorum diuerſis radicibus ſeu conferentijs, infinitas concludemus poſſe dari (vt 115 docebimus) incertarum magnitudinum ſpecies, inter quas haud ſecus interueniet comparationis incertitudo, quàm inter eas & certam incidere conſpiciemus, illud equidem cùm differre illas inter ſe ſpecie intelligemus. Nam quæ eiuſdem erunt ſpeciei, ad ſe inuicem more numerorum comparari poterunt, cùm ſingulæ quibuſuis numeris duci poſſint, eas producentibus, quæ eorundem numerorum rationem habeant, ac proinde ſingularum illarum ſpecierum magnitudines quælibet, ſolæ propoſitæ certæ dici poterunt, ad quam comparatæ reliquæ omnes ſpecies incertæ nuncupabuntur, illud quidem (vt diximus) ob penuriam affinitatis numerorum inter ſe. Harum quippe aliquas hoc decimo generare docebit Euclides, & ne infinitum videatur aggredi negotium, generalius infinitas fieri poſſe monſtrabit vnico theoremate. Vnde etenim illud tam abditum & occultum huius diſciplinæ arcanum naſci potuit conſideremus, cùm vnitatem eſſe, primæ ſeptimi diffinitione, vnam ac inſolubilem ſuapte natura dixerimus. Ac proinde (cùm ad quantitates refertur) Geometricam & ideo continuam ac in-

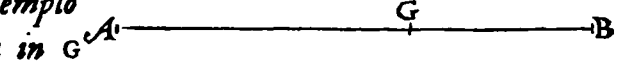
ſectam

ſectam eſſe, facilè percipiemus eam inter numeros collatam, quæ vera ac ſola eſt numerorum genitrix, naturam continuæ quantitatis inſequi, quæ cùm inſolubilis ſit, neceſſariò omnium numerorum minimam eam eſſe partem fatebimur, quia per numeros in minores ſecari non poteſt, quòd ſi (vt ſeptimo diximus) eius quantitas per numerum ſecetur, ſemper minima pars ad vnitatem redit. Si itaque magnitudini per aliquas vnitates ſectæ, magnitudo comparetur, cuius quantitas collata quantitati prioris, in eam vnitatis ſectionem cadat, quæ nullo numero vnitatis illius quantitatem metiente exprimi poſſit, ſed quauis illius quantitatis multiplicatione decrementi facta, ſemper comparatæ magnitudinis extremum, ſiue terminus, in vnitatis cadat ſectionem. Perſpicuum erit eius quantitatis comparatæ denominationem, extra numerorum vires haberi, eorum maximè priorem quantitatem numerantium: ſi quidem illud extremum facta aliqua decrementi vnitatis multiplicatione, in aliquem illarum vnitatum terminum caderet, non autem in vnitatis ſectionem, illius multiplicationis quantitates (ſaltem) vtraſque numerarent vnitatum magnitudines. Non igitur earum comparatio extra numerorum vires haberetur, ſed numeris exprimeretur. Cùm itaque numeris exprimi non poteſt ea determinatione ac ideo certitudine caret: comparationis etenim quantitatum certitudo, à numerorum expreſsione dependet. Quæ igitur numeris exprimi non poteſt, hac de cauſa incerta comparatio dici meretur: & idcirco quantitas, quæ comparationem illam ad alteram producit quantitatem, illa eadem lege incerta quantitas dici poterit. Hæc inſuper omni denominatione priuata obmuteſcit, eò quòd in tantum proruperit ſcelus, vt vnitatis illam inuiolatam integritatem diſſoluere conata ſit, quæ nullam patitur ſectionis denominationem.

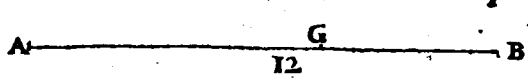
Cæterùm illud ſequentes quod ait Zambertus in luminari perſpectiuè, ſe ſcilicet Euclidis exemplaria tineis ac carie contrita vidiſſe: ſanè inferre poſſumus hunc eius decimum, id vel aliud quoddam ſuſcepiſſe detrimentum. Euclides quippe hanc propoſitam magnitudinem (quam lineam efficit) certam denominat hac dictione ῥητὴ, (que propriè certam & determinatam & quæ tuto dici poteſt præ ſe fert) diffinitione quinta. Sexta verò profert, omnes eidem propoſitæ certæ commenſurabiles, certas ſimiliter eſſe eadem dictione ῥηταὶ à commenſurationis quidem habitu, quia commenſurabiles ſunt certæ propoſitæ, & ipſæ certæ ea de cauſa erunt. Cùm autem ſeptima diffinitione arguit à priuatione, extra ſenſum diſcedit. Nam quod addit habitus, idem tollit priuatio. Dicit enim ſexta, quia commenſurabiles fuerunt certæ, eas ideo certas eſſe. Septima igitur quia ipſi certæ incommenſurabiles fuerunt, incertas eſſe (negatione priuante præpoſita) neceſſe ſequi fatur. Cur autem poſuerit Theon loco huius dictionis ἀῤῥηταὶ, quæ verè illi ῥηταὶ per priuationem opponitur, hanc ἄλογοι, exiſtimans oppoſitum certi vel determinati eſſe irrationale, ſat admirari non poſſumus. Certum etenim cum rationali nihil habet commune, ac inſuper abſurdius, licet etenim ſemper hoc ῥητὸν affirmante, vtatur, nihilominus eidem conferre volens oppoſitum, ponit ἄλογον toto hoc decimo, quod non parum diſcentibus eſt incommodum. Nam ſi magnitudines quas incertas dicimus (propria denominatione) irrationales dixerimus, ab eis rationis habitum abſtulimus, quaſi aſſerentes eas aut inter ſuas ſpecies, aut equidem ad certas ratione priuari, quod longè abeſt. Licet

enim ipſæ ad certas commenſuratione priuentur, non tamen ratione priuabuntur, ſed rationem habebunt, per 4 diffinitionem quinti, multiplicatæ etenim ſe inuicem excedent, ac inſuper (ex tertia eiuſdem diffinitione) ſunt eiuſdem generis quoad quantitatem, ſcilicet ſi fuerint lineæ, idem genus longitudinem habent quantitatis, Si ſuperficies, longitudinem ac latitudinem, Si quidem ſolida, tres dimenſiones. Rationem igitur habentes certæ ad incertas irrationales dici non poſſunt. Minus quoque irrationales dicentur, incertæ magnitudines incertis eiuſdem ſpeciei comparatæ, quæ ſcilicet inter ſe ſunt commenſurabiles, ac rationem ſuſcipiunt numerorum, vt diximus. Nam hæ rationem habent cognitam, illæ verò rationem ſurdam, aut incognitam, incertam, aut indeterminatam, cùm non habeant eam quam numeri inter ſe. Veriùs itaque eas magnitudines incertas dicemus quàm irrationales, veluti & ſanius oppoſitas certas quàm rationales: nihil enim habet rationale ad certitudinem: ſunt equidem diſiunctæ qualitates. Diuerſitas generis, quantitatis rationem tollit (ex tertia diffinitione quinti) inter quantitates, ſicut & diuerſitas generis commenſurationis commenſurationem aufert: ratio etenim commenſuratione eſt generalior. Non enim omnes quantitates rationem habentes ſunt commenſurabiles, ſed omnes commenſurabiles rationem habere neceſſe eſt.

Commendandum præterea diximus nullam harum quantitatum (quas incertas nuncupamus, alij verò irrationales) ex ſe incertam dici poſſe. Sed omnium quælibet & ſingulæ ſuis locis incertæ dici poterunt adinuicem comparatæ, quando ſcilicet vnius ſpeciei ad alteram fit collatio, quæ ſemper denominatione caret, hæc incerta collatio facta propoſitæ magnitudini incertam denominat collatam quantitatem, non tamen hac de cauſa incertam, qua incertitudinem à propria natura ducat, dicemus, ſed incertitudinem ab incerta comparatione factam cenſebimus: hanc itaque incertitudinem ſumunt quantitates, à collatione diuerſarum ſpecierum, non autem à quantitatis natura. vt exemplo facilitemus, Eſto linea A B *ſecta in* G *extrema & media ratione, per* 11 *ſecundi vel* 30 *ſexti: Tres igitur rectæ* A B, A G *&* G B *ſunt inter ſe (quouiſmodo comparatæ) incertæ, vt latius patebit ſexta decimitertij. Tamen quamlibet harum licet nobis proponere cæteris conferendam: ſi enim* A G *maius ſegmentum proponamus, hæc propoſita recta (cui comparantur reliquæ* A B *&* G B, *ſibi incommenſurabiles) certa dicetur, quæ collatione incerta alias ſibi collatas incertas efficit. Similiter ſi toti* A B *comparentur* A G, G B *ſingula ſegmenta, aut ſi minori* G B *tota & maius comparatæ fuerint. Quæuis igitur propoſita certa dici poterit, & eius quantitas cognita erit, reliquæ verò illi (comparatione facta) incertæ, incognitæ, ac indeterminatæ erunt, non equidem quantitatis defectu, ſed collationis relatione, quæ incerta eſt, ac penitus denominatione caret. Quid enim vetat totam* A B *ſumi pro vlna, cuius maius ſegmentum ſit alia quæpiam vlna? Nam ſi vlnam Lugdunenſem extrema & media ratione ſecemus, maius ſegmentum non longè ab vlna Antuerpienſi diſtabit, quælibet earum nihilominus apud ſuos certa & propoſita quantitas erit, reliqua verò eidem collata incerta dicetur. Nam ſingulæ per quotuis vnitates, ſiue in augmentum, ſiue in decrementum multiplicatæ, magnitudines producunt, eandem rationem habentes, ex decimaquinta*



quinti. Et proinde vnitates alteram metientes, siue numerantes, vnitatibus reliquam numerantibus, incommensurabiles erunt, cùm tota toti fuerit incommensurabilis. Quamlibet itaque quantitatem nobis proponere licet (vt certam) quæ ad alias collata, incertas eas (cum denominatione respectus carent) efficit. Qui tamen harum incertarum denominationes, à certarum denominationibus (vt quàm fieri possit, occultè earum aperiantur habitudines) depromere conati sunt, propositas certas per numeros exposuerunt, qui multiplicati, coniuncti, siue alia operatione arithmetica variati, numerum radice carentem producerent, hanc quippe radicem, siue quadrata, siue cubica, censica, aut alia quæuis fuerit, harum incertarum (propositæ certæ collatarum) denominationi imponunt, vt quàm proximè ex numeris certam quantitatem denotantibus, incertarum denominationes euellere possint. Hos autem numeros surdos, algebricos, radicales, seu incertos aut impropriè irrationales, (priorem errorem sequentes) nuncupant, quos nos hypotheticos verius quàm essentiales dicimus, eò quòd tantùm ex hypothesi sumantur, omni essentia ac denominatione priuati. Quorum tamen obsequio potiores certarum ad incertas habitudines consequimur, hactenus humanis mentibus cultas, vt exemplo elucidemus, proposita recta A B secta extrema ac media ratione in G per eius A B



vnitates, quæ sint 12 ipsam A G reperiamus, quam fieri proximè possit, ducemus (ex vndecima secundi) A B in se, fiet 144, & dimidiam ipsius A B scilicet 6 in se, fient 36, quæ coniuncta componunt 180, horum quippe radix quadrata minus 6 ipsam A G efficit. Quare maius segmentum A G denominabunt. Radix 180 minus 6, quæ radix (cùm nulla sit in numeris) omni denominatione priuatur, si autem quàm proximè exprimenda sit: Dicemus qualium A B erit duodecim, eorum A G esse 7 & $\frac{11}{12}$ proximè maius, vel proximè minus, 7 & $\frac{11}{17}$. Reliqua verò B G reliquum ipsorum 12 occupat. Quæ omnia potius obsequio quàm demonstrationi conueniunt. Nos igitur cœptum peragamus.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER DECIMVS.

DIFFINITIO I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur quas eadem mensura metitur.

Prioribus libris præmisit Euclides, maximè tribus postremis, necessaria ad quantitatis intelligẽtiam, per vnius ad alteram relationis operationem, vt cognita vnius magnitudinis quantitate, eius opera siue auxilio alterius propositæ magnitudinis quantitatem vsque adeo præcisè siue exactè nouerimus, quòd nihil amplius ad earum quantitatum intelligentiam requiratur. Quòd autem hoc decimo proponet Euclides, aliud expectat negotium. Nam his cognitis quantitatibus per earum naturæ intelligentiam, simulac numerorum obsequio, incertarum magnitudinum quantitates generare docebit. Et licet quo differant, à cognitis ille incertè reticere cogatur (ob occultatam nobis à natura cognitionem) tamen propositarum siue cognitarum legibus, quid inter se illæ incognitæ aut incertæ habeant affinitatis proferre facilè poterit. Inchoans Euclides itaque à præcipuo quãtitatum notarum vinculo, eo solo scilicet quo vnius magnitudinis ad alteram habitudo (quæ ratio dicitur) fit, Commensurabiles cœpit dicere magnitudines eas quas eadem magnitudo (quam communem vocant mensuram) ita præcisè constituit, vt alteram earum per quasdam vnitates repetitam. Reliquam verò per quotuis ex eisdem vnitatibus repetitam, præcisè constituat, illæ commensurabiles, siue communem mensuram habentes, dici poterunt. Hoc autem dixit vt quàm differant ab his quas eadem vnitas quibusuis repetitionibus complere vtrasque non potest (quæ proxima diffinitione patefient) edoceat.

DIFFINITIO II.

Incommensurabiles autem, quæ sub nullius communis mensuræ dimensionem cadunt.

Incommensurabiles oppositа priori denominatione vocat eas magnitudines, quæ nullam patiuntur communem mensuram, eas complere. Sed quælibet magnitudo alteram earum suis repetitionibus componens, ab alterius dimensione excludetur: nam suis repetitionibus reliquam aut excedet, aut equidem ab ea deficiet, ea nimirum quantitatis parte, quæ nullo numero (priorem exprimente) denominari poterit. Priorem autem exprimente ideo dicimus, quòd priores quas commensurabiles diffiniuimus, ab æqualium vnitatum numeris cõponantur, diuersis aut æqualibus earum vnitatum repetitionibus. Hæ verò incommensurabiles ex diuersarum à primis vnitatum quantitatibus compositæ, nullam patiuntur inter se communem mensuram, eò quòd inter eas sit diuersum mensuræ genus

sub eodem

ſub eodem tamen genere quantitatis concluſum, non autem ſub eodem menſuræ genere. Quæ igitur diuerſum genus habent menſuræ, incommenſurabiles erunt, ſicuti idem menſuræ genus habentes, commenſurabiles dicimus. Sed animaduertendum eſt, vnicum illud genus menſuræ inter omnia ſolum commenſurabile dici non poſſe. Cùm autem quælibet alia menſurarum genera (pro ſe quodque) commenſurabiles metiantur magnitudines, quodlibet primum aſſumptum, eorum generum pro commenſurabili ea arte ſumi poterit, vt quæuis aliorum generum menſuræ magnitudines, ad has comparatæ, meritò incommenſurabiles dici debeant. Et proinde commenſurationem idem menſuræ genus ſequi, ac veluti diuerſa menſuræ genera ſequi incommenſurationem fatebimur: vnde etenim oriatur hæc diuerſitas licet altiorem noſtra ſententia optet indaginem, tamen vt paucis quæ id producant exponamus, Numeros quantitatem non eſſe memorari nos oportet, in numeris dixiſſe, ſed tantùm quantitatibus adaptabiles. Cùm igitur alicui quantitati adaptatur numerus, hæc quantitas in tot partes æquales ſecatur, quot ſunt in adaptato numero vnitates: omnes etenim numeri vnitates, æquales ſunt. Si igitur huic quantitati alia comparetur quantitas quam prioris vnitates (quauis arte ſumptæ) nuſquam reſtituant, ſed ad eam exprimendam vnitas ſecari cogatur, contra ſui ipſius præfatum natale genium, quod abſurdum producit, cùm dixerimus minimam numeri partem vnitatem eſſe, ac nulli ſectioni obnoxiam. Hæc quantitatis expreſſio, quæ vnitatis requirit ſectionem, denominatione qualibet priuatur, quia vnitas ſectionem non patitur. Quare quantitas illa denominatione priuata ad propoſitam comparata, nullam rationis denominationem patitur. Sed equidem ad illam rationem habebit, cùm ſint magnitudines eiuſdem generis quoad quantitatem, licet non quoad commenſurationem. Attamen omni denominatione priuatam, quæ per numeros tantùm exprimi poteſt, vt diſcretionis vtilitate fruatur. Cùm autem harum magnitudinum quarum quantitas vnius in ſectionem vnitatis alterius cadit, infinitæ ſint ſpecies, infinitæque vnitatem ſecandi formæ: Infinitas dicemus poſthac poſſe dari incommenſurabilium ſpecies adinuicem, licet inter ſe cuiuſlibet ſpeciei quantitates ſint adinuicem commenſurabiles. Omnes tamen quarum denominatio vnitatis ſectionem exprimere cupit, ea voce qua res exiſtentes denominantur penitus priuari, quaſi non res exiſtentes dici, ſed potius hypotheſes exiſtimentur. Ab his diuerſis vnitatum ſectionibus orti ſunt numeri, qui ſurdi, aut irrationales, ſeu algebrici dicuntur: ſunt autem radices numerorum non vllam habentium. Quare licet illi potius hypothetici, quàm eſſentiales dici debeant, nihilominus illorum fictæ hypotheſes, rebus difficilibus explanandis non parum conducunt. Illos itaque fictos ſeu hypotheticos, incommenſurabilibus infinitis, infinitos exprimendis (ſi quidem illud exprimere dicatur) promptiores eſſe dicemus, cùm illæ ab his, & hi ſimiliter ab illis originem duxiſſe oſtenſi ſint. Quoniam autem vnitatem ſecari nunc per incommenſurabiles dixerimus, & antea apud numeros, ab ea denotatam quantitatem ſecari, quid his interſit diſcernere ſuperuacaneum non ducemus. Diximus vnitate ſignificatam quantitatem infinitè ſecari, per partes, æquales infinitis numeris expreſſas, præciſam illam quantitatem componentibus. Tùncque demum vnitatem non ſecari, ſed in alias vnitates mutari, quarum ſemper minima quælibet eſt vnitas. Non igitur vnitatis huius numeri ſecatur natura, ſed quantitas vnitate ſignificata. Cùm autem vnitatem ſecari nunc dicimus, quantitas vnitate ſignificata in eas partes ſecatur, quæ nulla numeri denominatione, totam vnitatis quantitatem reſtituunt: eò quòd ea ſectio in vnitatum diſcretiones per infinitos quotuis numeros factas, nunquam incidat, ſed infinitè examinata, extra eam vnitatum (vt ita dicam) commiſſuram ſemper cecidiſſe reperiatur, quod infinitis modis fieri poteſt, vt poſthac viſuri ſumus. Quare hanc quantitatem quantitati prioribus numeris expreſsè, eſſe incommenſurabilem dicimus, eò quòd exprimenda ſit per vnitates,

quæ prioris, vnitatibus penitus incommenſurabiles exiſtunt, & proinde numeri huius numeris illius ſemper incommenſurabiles erunt, cùm ſinguli numeri ſuarum vnitatum ſequantur naturam. Incommenſurabiles igitur dicemus magnitudines, à menſuræ communis priuatione, idem menſuræ genus non habẽtes. Haud ſecus quàm eodem quantitatis genere carentes, irrationales merito à rationis priuatione tertia quinti diffinitione dici cautum eſt.

DIFFINITIO III.

Rectæ lineæ potentia commenſurabiles, ſunt quando quæ ab ipſis quadrata eadem area metitur.

DIFFINITIO IIII.

Incommenſurabiles autem quando nulla area communis menſura eſſe poteſt, eorum quæ ex ipſis fiunt quadratorum.

Quoniam lineæ potentiam vocat Euclides eius lineæ quadratũ, aut equidem ſuperficiem huic quadrato æqualẽ, ait igitur: Rectas lineas potentia commenſurabiles eſſe (hoc eſt, rectarum linearum quadrata, aut eis æquas ſuperficies commenſurabiles eſſe) quando eadem area vtraſque præcisè ſua repetitione conſtituit, vt diximus prima diffinitione de magnitudinibus in genere. Hæc autem dicit vt quamlibet quantitatem per idem quantitatis genus metiatur, & proinde menſuram illam numeris exprimat, vt tandem inter eas rationis cadat denominatio, numerorum virtute expreſſa: incommenſurabiles autem oppoſita voce, per priuationem exponendæ ſunt, cùm nulla pro communi menſura inter earum quadrata poteſt dari area. His diffinitionibus adaptauimus quæ diximus in genere prioribus, illud ſequentes, prima ſeptimi diffinitione, vnitatem ſcilicet eam ſuſcipere formam quantitatis, cui applicandus erit numerus. Si enim lineæ adaptetur numerus ſingulas vnitates longitudinem tantùm habere: ſi quidem ſuperficiei longitudinem ac latitudinem: ac ſi demum ſolido, tres eas habere dimenſiones, longum, latum, & ſublime. Cùm enim ea omnes metiatur numeros, metietur omnes magnitudines, quibus adaptantur numeri: ſed menſuram idem genus quantitatis habere decet. Vnitas igitur idem quantitatis genus ſibi ſumit, quod & quantitas numero ſignificata. Hoc tamen eodem genere quantitatis ſumpto, poteſt adeſſe commenſuratio, & abeſſe eadem, non ex defectu generis eiuſdem quoad quantitatem, ſed quoad menſuram.

MONITVM.

Sequens variamus corollarium à Zamberti textura alieni, vt oſtendamus Euclidem hoc decimo præcipuè doctũ incommenſurabilium ſiue incertarum magnitudinum notitiam, Græcum exemplar ſequẽtes: Nam quas vocat potentia tantùm commenſurabiles, intelligit longitudine incommenſurabiles eſſe, reliquas verò vtroque & potentia & longitudine modo incommenſurabiles, vt quæ comparantur expoſitæ, omnes incommenſurabiles intelligantur.

His expoſitis indicatur, quòd propoſitæ rectæ lineæ (cuius ſcilicet quantitas eſt certa ac determinata) infinita multitudine comparantur rectæ lineæ. Commenſurabiles quidem, potentia tantùm: incommenſurabiles verò, longitudine & potentia.

Quia

Quia ſuſcepit Euclides negotium quantitatum incommenſurabilium hoc decimo, concludit ſequi ex prædictis, cuilibet propoſitæ rectæ, hoc eſt certæ & determinatæ aut cognitæ quantitatis, infinitas multitudine comparari rectas lineas. Omnes autem incõmenſurabiles, ſed binis reſpectibus: aliæ quidẽ licet commenſurabiles, ſint tantùm potentia, longitudine tamen incommenſurabiles, ſunt aliæ verò per vtrumque incommenſurabiles, longitudine ſcilicet, ac potentia: Sícque omnes eidem propoſitæ incommenſurabiles erunt diuerſis reſpectibus. Vt autem vetam Euclidis mentem concipiamus, propoſitam rectam non eam tantùm qua ſignificantur à nobis cognitæ magnitudines, vtpote cubiti, pedes, palmi, aut digiti (vt voluit Zambertus præter Græcũ exemplar:) ſed quãcunque à nobis expoſitam cuiuſcunque fuerit generis menſuræ. Cùm enim ſit liberum quamlibet rectam in quotuis ſegmenta diſtribuere (ex nona & decima ſexti), hæc ſegmenta atribuemus rectæ, quæ lineæ pedali aut cubitali erit incommenſurabilis, & proinde huic propoſitę pedalis aut cubitalis, incõmenſurabilis erit, ac aliæ eidem dari poterunt, incommenſurabiles aut longitudine tantùm, aut longitudine & potentia ſimul. Et hac ratione ex hac prõpoſita omnes incommenſurabilium ſpecies hoc decimo conſcriptæ, eadem via generari poterunt, ſicut & ex pedali vel cubitali: vt exemplo, ſumamus rectæ (per trigeſimam ſexti) ſectæ maius ſegmentum, illud conſtabit eſſe longitudine ac potentia incommenſurabile toti, ex ſexta decimitertij. Attamen ſumptum illud maius ſegmentum, in quotuis partes libuerit diſtribuemus, optato numero ſignificatas, à quo tandem producemus infinitas rectas huic maiori ſegmento commenſurabiles, potentia tantùm, & longitudine incommenſurabiles, aliáſque lõgitudine ſimul ac potentia incommenſurabiles: ſiquidem ſumptum illud ſegmentum pro propoſita ſumpſerimus ac certa, illíque incertas reperire velimus, eadem lege dantes eidem ſegmento incõmenſurabiles, incertas eius reſpectu producemus, vt in cubitali propoſita, vel potentia tantùm, vel potentia & longitudine ſimul incommenſurabiles.

MONITVM.

Licet hæc ſuo loco propriè non ſint tradita, ea nihilominus animaduerſione digna exiſtimantes hîc appoſuimus, poſtea ſatius intelligenda, ne qui poſt Zambertum laberentur, hanc Geometriæ libertatem tollerent, quod tantùm in rectis menſuras à quibuſdam obſeruatas proponere liceret, vt illæ propoſitæ dicerentur, quaſi prohiberetur, diuerſis regionibus pedes, aut palmos, ſiue cubitos, ſibi inuicem incommenſurabiles haberi, qui quidem omnes ſunt propoſitæ rectæ. Et proinde ſuper his propoſitas exhibere rectarum longitudines, quibus aliæ incommenſurabiles darẽtur: quod eſſet abſurdum. Quaſlibet igitur magnitudines linearum proponere licebit, vt eiſdem incommenſurabiles comparentur, & ideo propoſitam eam eſſe, quæ ex hypotheſi proponitur, dicemus.

DIFFINITIO V.

Vocatur igitur ipſa propoſita recta linea, Certa.

Hanc propoſitam lineam rectam vocat Euclides certam vel determinatam, cui ſcilicet comparandæ ſunt reliquæ, vt commenſurabiles aut certæ, vel incommenſurabiles aut incertæ dicantur. Certam autem ea de re vocauit, quia eius quantitas nobis eò debet eſſe manifeſta, vt nihil de eius quantitate dubitantes, verè certam nobis eſſe profiteamur, ac cùm eius propoſitæ certa nobis fuerit quantitas, certior eiuſdem actionum vel paſſionum nobis acquiratur intellectus. Hæc autem certitudo tum adeſt, cùm ſupponimus, aut intelligimus quantitatis lineæ naturam ſiue originem, hoc eſt, denominationem: quia verò quamlibet nobis proponere licet (vt diximus proœmio) eam quæ propoſita fuerit certam nuncupabimus.

DIF

DIFFINITIO VI.

Et quæ huic commenſurabiles, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm, Certæ.

DIFFINITIO VII.

Quæ verò eidem longitudine & potentia incommenſurabiles, Incertæ appellentur.

Quoniam dixit rectam rectè commenſurabilem poſſe fieri, potentia tantùm, ac inſuper potentia & longitudine aliam, has omnes quæ certæ, rectæ, vel potentia tantùm, aut equidem longitudine & potentia ſimul commenſurabiles exiſtunt, ſimiliter certas vult vocari. Sufficit etenim vt certa dicatur aliqua recta, eam aliqua commenſuratione, longitudinis, vel potentiæ, cum certa coniungi propoſita. E conuerſo autem incertam dicit eam, quæ cum certa propoſita nullam habet communem menſuram, ſiue ſua longitudine, ſiue ſui ipſius potentia comparetur. Cur autem certam dixerit Euclides eam rectam, quæ propoſitæ certæ potentia tantùm commenſurabilis exiſtit, licet longitudine eidem propoſitæ ſit incommenſurabilis, quidam inquirendum putarent. Cùm enim geometricarum quantitatum affinitas, quæ ratio dicitur, præcipua diuiſione, per cognitam & incognitam diuiſa ſit: cognita autem per numeros tantùm exprimenda ſit: numerorum naturam ſequitur Euclides in exprimendis quantitatum reſpectibus: nam licet omnis numerus latus ſit cuiuſdam quadrati, non tamen omnis numerus latus habebit quadratum, omnes autem numeri inuicem ſunt commenſurabiles. Sequetur itaque ſi quadratum lineæ quæ propoſitæ certæ fuerit longitudine incommenſurabilis, ſit commenſurabile quadrato ipſius certæ (hoc eſt per aliquas numerorum vnitates eadem menſura vtraque quadrata metiatur) illa rationem numerorum inter ſe habere dicentur (nempe communem menſuram repetentium) ſed quadrata à lateribus in ſe ductis oriuntur. Sequetur igitur eas lineas quæ per ſe ductæ, areas rationem numerorum (hoc eſt certam) habentes, generant, non poſſe hac certitudine priuari, eò quòd eaſdem vnitates generant quas & certæ. Quare ea de cauſa certas eſſe reperit Euclides, reliquas verò è contra, quæ per ſe ductæ areas incommenſurabiles producunt, & proinde longitudinem ac potentiam incommenſurabiles habent, incertas nuncupauit, & ad certam rationem habent ignotam, eò quòd quælibet vnitates eis applicatæ, ſint adinuicem incommenſurabiles, ac rationem habeant incertam.

MONITVM.

Hanc autem certam verterunt Campanus & Zambertus latinè rationalem, longè quidem à Græco exemplari, vtitur enim Græcum hac voce ῥητὴ, quod verius pro certa determinata ac manifeſta legitur, & inſuper huic ſententiæ plus conſentiret certa, quàm rationalis. Nam dictio rationalis, habitum præ ſe fert, aut actione, aut paſſione. Si enim rationalis dicatur certa propoſita actione, eò quòd ad aliam rationem habeat aliquam, aut paſſione, quod alia ad eam rationem habeat, hæc denominatio non tantùm ei cõuenit, ſed quibuſcunque ſibi incommenſurabilibus, ſiue etiam incertis. Illæ namque ad alias eiuſdẽ generis (quoad dimenſionem) rationem habent cognitam inter ſe & certam, ad alias autem ſiue ad certas rationem habent, cùm ſint eiuſdem generis quoad quantitatem (per tertiam diffinitionem quinti) tamen ignotam. Omnes igitur rationales dici merentur, eò quòd inter ſe rationem habeãt, ac ad alias, quod eſſet confuſum ac proinde abſurdum,

dum,haud ſecus ſi aliquam lineam ſolam rationalem vocaremus, à rationis habitu,nam ſola linea rationem non habet, cùm ratio duos ſaltem requirat terminos. Non igitur aptè denominari poterunt illæ propoſitæ rectæ rationales, ſed certæ aut determinatæ, &c. Præterea nec videmus Euclidem vocaſſe illas rationales,ſed certas:Campanum autem & Zambertum id ſibi ſumpſiſſe tantùm:quare cùm oppoſitam huic ῥητῷ dictionem ſcripſit Theon ἄλογῳ ſeptima hac diffinitione non Græcam Euclidis vocem(quam potius ἀῤῥήτῳ dixiſſet pro incerta)ſequutus eſt,ſed manifeſtum eſt eum extra Euclidis ſententiam irrationalis vocem protuliſſe:quaſi per rationis priuationem,incertas nuncuparet magnitudines,quæ inter ſe,vt diximus,certam & cognitam rationem habent,ad certas verò licet incognitam vel indeterminatam habeãt rationem,tamen eam habent habitudinem ſiue reſpectum, qui ratio dicitur inter quantitates eiuſdem generis, tertia diffinitione quinti, vt latius procœmio diximus.Quare poſthac cùm omnem irrationalis aut rationalis, licet tritam denominationem, ab huius decimi libri theorematis (lineis ac planis immeritò attributam)auferemus,eámque rationalis aut irrationalis vocem in certam aut incertam(propriam earum denominationem)cõuertemus, id nos feciſſe, vt veram harum quantitatum determinatarum aut indeterminatarum ſignificationem propria voce reſonemus. Quinetiam vt impropriarum dictionum (rationalis & irrationalis)allufionem euitemus,eos qui hæc legerint, arbitrari, precamur. Omnium igitur ſibiinuicem incommenſurabilium quamlibet certam dicere poterimus,cùm ea nobis propoſita ea de cauſa fuerit,vt illi reliquas conferentes certas aut incertas dicamus:hypotheſis etenim lineam proponens eam certam denominat, vt ait quinta diffinitio, quæ propoſitam certam dicit, eò quòd propoſita fuerit.

DIFFINITIO VIII.

Et quod quidem à propoſita recta linea quadratum Certum.

DIFFINITIO IX.

Et quæ huic commenſurabilia, Certa.

DIFFINITIO X.

Quæ verò huic incommenſurabilia,Incerta dicuntur.

Vbi expoſuit Euclides primi generis quantitatum naturam (quod eſt longitudo ſiue linea)ad ſecundum properat eiuſdem quantitatis genus, hoc eſt, ad ſuperficiem, quæ longum & latum continet. Ait igitur quadratum quod fit ex propoſita recta linea (ea inquam quæ certa ſuppoſita fuit) certum ideo eſſe,quòd à certa recta ſeſe multiplicante (veluti in numeris) naſcatur. Et inſuper quæ huic certo quadrato quadrata,areæ ſuperficies,ſiue quælibet plana commenſurabilia fuerint, certa ſimiliter vocari præcipit. Cùm enim ſatis ſupérque dixerimus commenſurationis originẽ à numeris prodiiſſe eò quòd omnes numeros metiatur vnitas:Præterea numeros ex ſe quantitates nõ eſſe, ſed quãtitatibus adaptabiles.Si quantitati cuidam applicetur numerus,eam in totidẽ æquas partes ſectã eſſe,quot ſunt vnitates in eo numero intelligemus. Si enim illæ vnitates aliam quantitatẽ metiantur, alia quauis licet repetitione,erũt cõmenſurabiles(ex prima diffinitione huius)illæ magnitudines. Si itaque binæ lineæ æquales fuerint,æquales vnitates ac vnitatum æquam ſuſcipient multitudinem. Et igitur ſub illis comprehenſum quadratum

tum vnitatibus conſtat ab earum linearũ æquis vnitatibus originem ducentibus. Quinetiam naturã illius plani ſequentibus, nempe quadratis, cùm ſub æqualibus contineantur vnitatibus. Si itaque rectæ illæ æquales (hoc eſt vnica illa certa bis ſumpta)quadratũ ſuſcipiant,illud ideo certum erit,quod ex eiſdẽ propoſitæ lineæ vnitatibus generari potuerit. Quia verò quælibet plana eidẽ quadrato cõmenſurabilia eadem menſura metiri poteſt,hæc mẽſura vnitatis vices vtrumque planum numerantis gerit, ac idcirco illa plana quæ ab eiſdem vnitatibus cõpoſita diuerſa quauis multitudine fuerint,commẽſurabilia dicemus adinuicẽ,cùm illis eædẽ applicẽtur vnitates. Quòd ſi lineæ propoſitæ alia cõparetur,potentia tantùm cõmenſurabilis,longitudine verò nequaquam, perſpicuum erit, comparatæ longitudinem(ſeorſum ſumptam)incertam eſſe, potentiam verò certam. Quare lineæ denominationem certam dicemus:Sufficit namque potentiæ aut longitudinis commenſuratio, ad certæ denominationem acquirendam. Quòd ſi ipſi propoſito certo quadrato ſiue plano,alia comparetur ſuperficies, cuius nullæ vnitates ipſum metiri poſſint quadratum, perſpicuum erit ipſas vnitates alienas eſſe ab his quæ eandem quadratam ſuperficiem compoſuerunt. Et proinde ipſi quadrato comparatam ſuperficiem ab alienis vnitatibus compoſitam, incommenſurabilem eſſe. Nam ſi commenſurabiles eſſent,eadem vnitas vtrumque eorum metiretur. Quare meritò hanc ſuperficiem (ipſi certæ incommenſurabilem) incertam dicemus,eò quòd ipſam certæ propoſitæ vnitates determinare ſiue certam reddere non valeant. Nam vt diximus, incertarum denominatio quælibet à relatione ipſius propoſitæ certæ dependet, quæcunque ea fuerit in ſpecie, ſiue quauis vnitatis quantitate numeretur. Mutatur autem vnitatum ſpecies ſiue natura cùm à numero radicem non habente,eandem radicem educi poſcimus. Cùm enim ea nullas huius numeri habeat vnitates (eò quòd eius nulla ſit radix)manifeſtum relinquitur,vnitates eidẽ applicatas à prioris numeri vnitatibus alienas eſſe. quoniã ſi alienę non eſſent, ipſæ radicem numeri exprimerent,quod fieri non poteſt, cùm nullam habeat,ex hypotheſi. Idem in quauis radice numerorum dicemus ſiue quadrata ſiue cubica,ſiue ſurdè ſolida,aut alia fuerit quælibet. Quæ igitur quãtitates à certarum vnitatibus componuntur,certæ erunt. Quæ verò ab earundem vnitatibus componi non poſſunt, incertæ dicantur, tanquam ab alienis vnitatibus compoſitæ. Obiiceretur tamen quadrangulum rectangulum ſub lineis potentia tantùm commenſurabilibus comprehenſum,certum non dici, licet lineæ illæ certæ dicantur. Ad hæc dicemus harum linearum vtrãque longitudinem, vt iam diximus,certam non eſſe, quæ quidem incerta longitudo illud producit rectangulum, ſed potentiam earum vtramque tantùm certam eſſe, quæ denominationem certitudinis lineæ eam potenti tribuit. Quare rectangulum ex earum potentia certa conſtans, certum erit: quod quidem ſub incerta earum longitudine producetur,incertum erit, vt latius patebit vigeſimaprima propoſitione huius. Ea de cauſa dicemus incerta rectangula bifariam præcipuè generari, ex binis certis longitudine tantùm incommenſurabilibus. Scilicet cùm ſub illis continetur rectangulum,per vigeſimamprimam,cùm ex illis coniunctis fit quadratum,per trigeſimamſextã, & cùm à maiori auferatur minor, reliquæ quadratum(per ſeptuageſimamtertiam huius)vt poſthac videbimus. Huius eſt cauſa quòd in his modis ſemper conferuntur longitudines ſibiinuicem incommenſurabiles, & ideo incertum producunt. Si autem earum potentiæ (quæ commenſurabiles ſunt) collatæ planum componant, illud neceſſariò certum erit, cùm conſtet ex potentia potentiæ certæ commenſurabili.

DIFFINITIO XI.

Et illa potentes, Incertæ. Siquidem quadrata fuerint eorum latera,

latera, Incertæ. Si verò alia quædam rectilinea fuerint, Lineæ æqualia ipſis quadrata deſcribentes, Incertæ erunt.

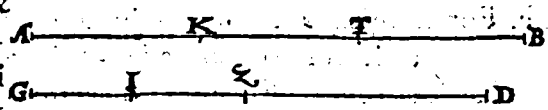
Futurum loquendi modum ſibi ſumit Euclides, cùm dicat, & illa potentes: lineæ etenim potentes illa plana quæ propoſito certo plano incommenſurabilia eſſe diximus, incertæ appellantur, quæcunque fuerint rectilinea. Nam ſi quadrata fuerint, eorum latera incertæ lineæ erunt. Si verò alia rectilinea fuerint, lineæ deſcribentes æqualia quadrata ipſis rectilineis, incertæ ſimiliter appellabuntur. Potentiam namque lineæ diximus eſſe ſuperficiem quadrato ab ea deſcripto æqualem. Cùm igitur linea in ſuas vnitates ducta, quadratam generat ſuperficiem, ipſam ſuperficiem ex ipſius lineæ vnitatibus genitam eſſe diximus. Si igitur genitæ ſuperficiei vnitates, vnitatibus propoſitæ ſuperficiei (ex hypotheſi) ſint alienæ, cùm ſint incommenſurabiles, ſequetur lineæ certæ propoſitam ſuperficiem generantis vnitates, vnitatibus lineæ, incommenſurabilem aream generantis, alienas eſſe. Potens igitur aut generans incommenſurabilem aream certo plano recta linea, incerta dicetur, eò quòd alienas à certa propoſita habeat in ſe vnitates. Illud vnum ac idem eſſe ait Euclides, quæcunque fuerint plana. Nam ſi ſint quadrata, loquitur de eorum lateribus, ſiue radice. Si verò alia fuerint rectilinea, hoc eſt, rectangula parallelogramma, pentagona, trapeſia, &c. Cùm ſingula in triangula & proinde in quadrata (per decimam quartam ſecundi) reducantur. Intelligit eorum quadratorum rectilineis præfatis æqualium latera, incerta dici: eò quòd areas incertis areis æquales, & proinde incertas, producant.

Quia verò diximus quadratam ſuperficiem ex vnitatibus lineæ illam componentibus fieri, reminiſci oportet eorum quæ diximus ad finem primæ diffinitionis ſeptimi, vnitates ſcilicet naturam eius cui applicatur ſemper inſequi. Scimus quidem infinitas lineæ vnitates nuſquam generare ſuperficiem, cùm latitudine careant. Sed cùm dicimus ſuperficiem ab vnitatibus lineæ generari, intelligemus vnitates illas contineri ſingulas ſub binis vnitatibus propoſitæ lineæ, in quaſuis vnitates ſectæ, & hac lege vnitates illæ fient rectangula, ſub binis lineis contenta, per primam diffinitionem ſecundi. Quæ dicentur vnitates quadratum totius rectæ propoſitæ metientes, & ipſius quadrati naturam ſectantes, quod ſemper ſub vnica contineri linea diximus. Siquidem binæ proferantur lineæ, quarum ab eis comprehenſum rectangulum vnitatibus diſtinguere velimus. Alteram earum (quæcunque fuerint) ſemper certam propoſitam dicere poſſumus, cui reliqua conferenda eſt: quæ ſi per vnitates propoſitæ certæ commenſurabiles, diſtingui poſſit, hæ vnitates ſingulæ à binis lineis ſumptæ, rectangula comprehendent, ſub binis lateribus commenſurabilibus comprehenſa, quæ quidem vnitates rectangulum totum numerantes, erunt. Quia verò cuiuſlibet vnitatis longitudo & latitudo certæ ſunt lineæ, cùm ſint certæ commenſurabiles: Ipſæ rectangulum certum producent, cuius quidem longitudo & latitudo eſt determinata, ſiue ſitus. Quod ſi illi propoſitæ certæ alia comparetur certa, ipſi potentia tantùm commenſurabilis, longitudine verò nequaquam; vulgatum eſt earum linearum vnitates incõmenſurabiles eſſe, ex hypotheſi. Quare rectangulum ſub vnitate certæ lineæ, & vnitate reliquæ priori incommenſurabili comprehenſum, incertum ac indeterminatum eſſe. Nam alteram eius certam dimenſionem, reliqua incerta indeterminat. Idcirco ex his vnitatibus indeterminatis conſtans rectãgulum, incertum ac indeterminatum erit, hoc eſt, à natura eius quòd ſit ex propoſita alienum. Si verò eidem propoſitæ binæ potentia tantùm commenſurabiles offerantur (adinuicem verò longitudine commenſurabiles exiſtant) quæ rectangulum comprehendant, perſpicuum eſt eius rectanguli vnitates ſub lineis ipſi certæ incommenſurabilibus contineri, æquè ſecundum longitudinem ac latitudinem. Et nihilominus certas eſſe: nam ſub lineis longitudine ſibi, & potentia ſibi ac propoſitæ commenſurabilibus con-

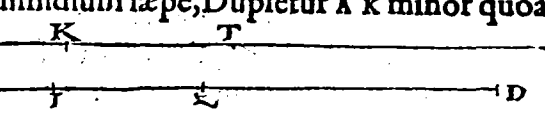
tinentur. Sed quia earum potentia certæ propoſitæ commẽſurabilis fuit, ſequetur ſub ipſis comprehenſum rectangulum, & ab his vnitatibus compoſitum, ipſius certæ quadrato commenſurabile (& ideo certũ) eſſe. Nempe rectangulũ ex iiſdem quadratorum vnitatibus conſtans, eidem potentiæ, cui quadrata commenſurabilia extiterunt, commenſurabile fiet.

PROPOSITIO I.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à maiore auferatur maius quàm dimidium, & eius quod relictum eſt maius quàm dimidium, idque ſæpe fiat, Relinquetur tandem magnitudo minor minore magnitudine expoſita.



Exponantur duę magnitudines AK & G D: A maiore autem G D auferatur maius dimidio ſcilicet D Z, & rurſus reliqui G Z maius quàm dimidiũ ſcilicet Z I, & ſic ſæpe fiat: Dico tandem relinqui poſſe magnitudinem G I minorem magnitudine A K minore expoſita. Addantur ipſi A K tot æquales, quouſque aliam D G excedant, per 4 diffi. quinti, ſintq; A K, K T & T B. Quoties verò ſecta eſt A B in T & K, toties ſecetur D G, ablato ſæpe plus dimidio in Z & I: cùm autem A B ſit maior alia G D, ſed ex A B aufertur T B non maius dimidio, à reliqua verò G D aufertur Z D dimidio maius, reliquum G Z erit ideo reliquo A T minus. Eodem rurſus argumento, quia à maiori A T aufertur K T non maius dimidio, à minori verò G Z aufertur, ex hypotheſi, Z I maius dimidio, ſequetur reliquum G I minus eſſe reliquo A K, magnitudine inquam minore expoſita. Duabus igitur magnitudinibus expoſitis, &c.



Aliàs vbi tantùm aufertur à maiore dimidium ſæpe, Dupletur A K minor quoad excedat G D maiorem in T & B, ſecetur autem bifariam G D in æquales numero ſectiones ipſis K & T, quæ ſint I & Z: quoniam ſicut tota A B ad dimidium A T, ſicutq; A T ad A K, ſic ſunt G D ad G Z & G Z ad G I (nempe in dupla ratione). Æqua igitur ratione ſicut A B ad A K ſic erit G D ad G I (per 22 quinti), & viciſſim, ſicut A B ad G D, ſic A K ad G I. ſed maior eſt A B ipſa G D (per hypotheſim): maior itaque erit A K ipſa G I (per 14 quinti) & proinde G I ablato ſæpe dimidio fit minor ipſa A K.

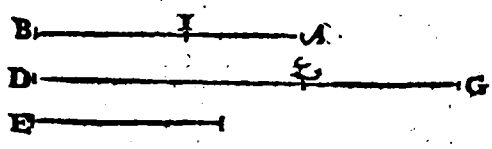
MONITVM.

Non defuerunt qui huius theorematis immenſam in quantitates poteſtatem reſtringere voluerint, oppoſito argumento ex decimaſexta tertij, inter quos potior fuit Campanus, cùm dicit angulum contingentiæ ſemper minorem relinqui quolibet rectilineo angulo. A quo ſæpius plus quàm dimidium ablatum fuerit, & ideo videri hoc theorema nugatoria exceptione fœdandum eſſe. Soluit autem hoc argumentum, dicens: hos angulos non vniuocè dici angulos, ac curuum & rectum diuerſa eſſe genera, quod nos omnino fateri non poſſumus. Nam anguli rectilinei, & anguli contingentiæ idem eſt genus, quoad quantitatem, licet quoad commenſurationem ſint diuerſa, angulorũ etenim quantitas in ſola inclinatione linearum continetur, vt quæ fuerit maior, minor, vel æqualis inclinatio, quãtitates angulorum æquales vel inæquales oſtendat. Quare ſequitur omnes angulos planos idem habere quãtitatis genus, ſcilicet inclinationẽ, veluti omnes lineas idem quãtitatis genus, longitudinem habere diximus: ſuperficies verò idem aliud genus, longitudinem

dinem, ſcilicet cum latitudine, ſolida verò aliud genus tres quidem dimenſiones, vt quandoque dicemus. Et igitur omnes angulos planos rationem adinuicem habere, quæ eſt habitudo magnitudinum idem quantitatis genus habentium tertia diffinitione quinti: & licet angulus contingentiæ per multiplicationem rectilineum non poſſit excedere, tamen eius quantitas, quæ in ſola linearum inclinatione conſiſtit, multiplicata rectilinei quantitatem excedet: quinetiam rectilineus multiplicatus contingentiæ angulum excedet, ac ideo inter eos ratio erit, per 4 diffinitionem quinti: alter enim multiplicatus alterum excedet. Non itaque Campani ſolutionem recipiemus, eos equidem non eſſe vniuocè angulos aut eiuſdem generis, cùm hæc ſufficere non videantur. Sed dicemus hoc theoremate Euclidem generalem ſuo more quantitatibus geometricis legem præſcripſiſſe, quæ quidem in ſe habent omnes numerorum affinitates, ac inſuper alias, quas nec patiuntur numeri inter ſe. Huius itaque rei gratia binas protulimus huius theorematis demonſtrationes, priorem qua maius dimidio abſtrahitur indeterminatè ac confusè, cùm illud nec determinet Euclides: poſteriorem verò qua dimidium præcisè ſubtrahi præcipientes, idem ſequi oſtendimus. Quæ poſterior cùm ad numeros tantùm attineat, obiectum illud 16 tertij ſoluere non poterit, eò quòd anguli illi numerorum rationem non patiantur. Sed quia prior demonſtratio in vtraſque ſcilicet numerorum, ac quantitatum incertarum affinitates, geometrico more dominatur, ea ſatis ſupérque propoſitum illud ſoluet problema, ablato quidem anguli rectilinei pluſquam dimidio, ſcilicet ablato angulo mixto ex curua rectáque compoſito, vt liberam ab Euclide vltra dimidium quanuis permiſſam ſumamus quantitatem, tunc tandem minor relinquetur angulus, angulo cõtingentiæ propoſito, iuxta huius theorematis præſcriptam legem, qui quidem erit alius contingentiæ angulus, vt latiùs docuimus ſuper eadem decimaſexta tertij.

PROPOSITIO II.

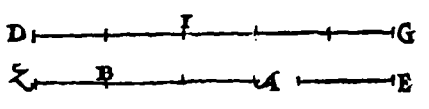
Si duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis ſublata ſemper minore à maiori, reliqua non metiatur præcedentem, incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.



Exponantur duæ magnitudines inæquales A B & G D: Tollatur autem à maiori G D ipſi A B æqualis Z D, quouſque ſuperſit G Z minor priore A B, à qua tollatur eidem G Z æqualis I B, ſicq; ſæpius fiat; ac nuſquam reliqua A I metiatur præcedentem G Z vel F B: Dico poſitas A B & G D incommenſurabiles eſſe: quòd ſi non ſint, metiatur vtraſque aliqua E magnitudo. Cùm enim G Z poſita ſit minor reliqua Z D, hoc eſt ipſa A B, ſimiliter A I minor reliqua I B, ab eiſdem A B & G D aufertur pluſquam dimidium, cùm vna tollatur ſæpius ab altera. Tollantur itaque (per primam huius) ſæpe, quouſque ſuperſit aliqua magnitudinum A I vel G Z minor E metiente ipſas A B & G D: quoniam autem E metitur totam G D, & ablatam Z D (cùm metiatur A B, ſibi æqualem) metietur & reliquam G Z (per ſecundam communẽ ſententiam ſeptimi) metiétúrque ſibi æqualem I B. Si igitur metiatur totam A B, & ablatam I B, metietur & reliquam A I, ſeipſa E minorem. Nam illud infinitè ſimiliter fiet, quoad ventum ſit ad minorem E metiente (per primam huius) vt diximus: maior igitur E metietur minorem ſcilicet A I vel G Z, quod fieri non poteſt: nulla igitur metietur ipſas A B & G D, quæ ideo ſunt incommenſurabiles. Si itaque duabus magnitudinibus inæqualibus, &c.

PROPOSITIO III. PROBLEMA 1.

Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem inuenire menſuram.



Proponãtur duę magnitudines commenſurabiles A Z & D G, illæ minore ſæpius à maiore detracta, tandẽ relinquent vltimam metiri præcedẽtem. Si enim non metiretur, incõmenſurabiles eſſent (ex ſecunda huius): à maiori igitur G D tollatur I G ipſi Z A æqualis, ab Z A verò tollatur A B ipſi D I æqualis, ſicq; quoad reliqua Z B metiatur præcedẽtem D I: Dico Z B propoſitarum A Z & D G communem eſſe menſuram, & earundem maximam: quia Z B metitur D I, metietur & A B ſibi æqualẽ: ſed & ſeipſam metitur, totã igitur A Z & G I ſibi æqualem metietur. Metitur autem Z B reliquam D I, totam igitur D G metietur. Eadem igitur Z B communis eſt poſitarum A Z & D G menſura: quòd autem ſit maxima, oſtendamus. Nulla ipſa Z B maior, poſitas A Z & D G metitur: quòd ſi ſit aliqua, eſto E: quoniam E metitur totam D G & totam A Z, metietur & ſibi æqualem ablatam I G, & igitur reliquam D I, per ſecũdam cõmunem ſententiã ſeptimi, ſiquidem metiatur D I, & ſibi æqualem A B ablatã metietur: ſed metitur totã A Z, ex hypotheſi, eadem igitur E metietur & reliquam Z B, minorẽ ſeipſa, quod fieri non poteſt. Nulla igitur maior Z B expoſitas A Z & D G metitur. Duabus igitur magnitudinibus commenſurabilibus datis maximam earum communem inuenimus menſuram.

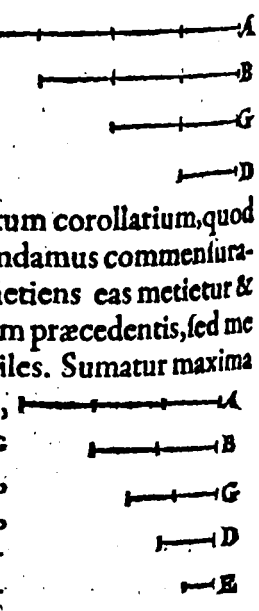
COROLLARIVM.

Si magnitudo duas metiatur magnitudines, & maximam earum communem metitur menſuram.

Nam ſi metitur totas & ablatas, metietur & proinde reliquas, quarum vna eſt maxima.

PROPOSITIO IIII. PROBLEMA 2.

Pluribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem inuenire menſuram.



Proponantur prius tres magnitudines A B G, quarum communem menſuram inquiramus maximam. Sumatur (ex præfata) maxima duarum A & B menſura D, quæ ſi metiatur tertiam G, optatum conſequimur, cùm tres A B & G metiatur, & maxima. Nam ſi alia ſumpta D maior, metiretur priores A & B, eadem metietur D minorem, per præfatum corollarium, quod ſit extra potentiam. Si verò D non metiatur tertiam G, oſtendamus commenſurabiles eſſe D & G. Cùm ſint commenſurabiles A B G, aliqua metiens eas metietur & maximam duarum A B menſuram, quæ fuit D, per corollarium præcedentis, ſed metitur G, ex hypotheſi: binæ igitur G & D ſunt commenſurabiles. Sumatur maxima binarum G & D menſura, quæ ſit E, cùm autem E metiatur D, metietur & ipſas A & B, quas D metitur. Ipſa itaque E tres A B G metitur, & maxima: nam ſi alia maior ipſa E metiatur A B G, eadem metietur & D poſitarum A & B maximam menſuram, per corollarium præcedentis. Si autem metiatur D & G, metietur & minorem E, quæ eſt eorundem G & D maxima menſura: illa alia igitur maior E poſita, E minorem metietur, per

idem

idem corollarium, quod eſt abſurdum. Non eſt igitur alia maior ſumpta E, metiens tres A B & G hoc ſecundo poſito: quòd ſi ſint quattor, & E quartam metiatur, ipſa erit maxima, ſi verò non metiatur quartam, ſumemus eiuſdem E ac quartæ maximam communem menſuram, quæ erit datarum quatuor maxima, & ſic in quotcunque propoſitis, inuicem commenſurabilibus. Pluribus igitur magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c.

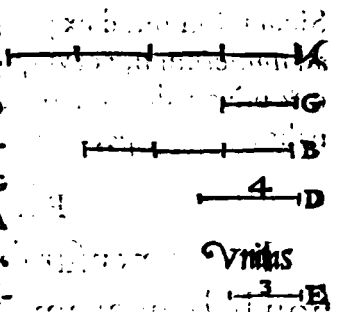
COROLLARIVM.

Si magnitudo metiatur quotcunque magnitudines, eadem metietur ipſarum maximam menſuram.

Nam datis tribus A B G patuit D maximam fieri ipſarum A B G menſuram, aut ſaltem quia D fuit maxima ipſarum A B, ex præfata, maxima duas G & D metiens ſcilicet E, fuit maxima trium menſura. Quælibet itaque tres A B G metiens, quia metitur binas A B, metietur & D, ex coroll. præfatæ, quia verò metitur, D & G metitur ex eodem coroll. & E, quæ fuit maxima trium A B G menſura. Quælibet igitur metiens tres A B G metietur & E maximam earum communem menſuram, haud ſecus in quatuor. Nam ſi eadem E metiatur quatuor, metietur & maximam triũ (ex nunc oſtenſis) cùm tres metiatur, quæ ſi fuerit maxima quatuor propoſitarum, ſufficit: ſin minus, eadem E metiens maximam trium & quartam, metietur & earum maximam menſuram, quæ quidem fuit maxima quatuor magnitudinum. Quia itaque E menſa eſt quatuor magnitudines, metitur & earum maximam menſuram. Hac lege in quotuis magnitudinum numero reperies, metientem magnitudines quotlibet, maximam earum metiri menſuram.

PROPOSITIO V.

Commenſurabiles magnitudines, adinuicem rationem habent quam numerus ad numerum.

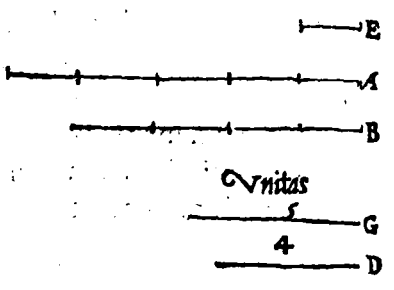


Sint commenſurabiles magnitudines A & B: Dico eas habere rationem quam numerus ad numerum, metiatur ipſas A & B aliqua G: & quoties G metitur A, tot ſint in D vnitates, quoties verò idem G metitur B, tot ſint in E vnitates, quoniam vnitas toties repetitur in D & E, quoties G repetitur in A & B, ex hypotheſi, æquemultiplex erit A ipſius G, vt D vnitatis, ſimiliter B eiuſdem G vt E vnitatis. Erit igitur A ad G vt D ad vnitatem, & B ad G, vt E ad vnitatẽ, & conuertendo (per corollarium quartę quinti) erit G ad B vt vnitas ad E: æqua ratione igitur (per 22 quinti) erit A ad B ſicut D numerus ad E numerum. Ipſæ itaque A & B rationem habent numerorum, eò quòd ſimiliter repetant communem eorum menſuram, vt numeri repetunt vnitatem, quæ eſt omnium communis menſura. Commenſurabiles igitur magnitudines, &c.

PROPOSITIO VI.

Si binę magnitudines adinuicem rationem habuerint quam numerus ad numerum, commenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

Sint binæ magnitudines A & B rationem habentes, quam numerus G ad numerum D: Dico A & B commensurabiles esse adinuicem. Quot vnitates sunt in G, tot sint æquales partes in A, vni earum partium æqualis esto E, per 9 sexti, quoniam æquè metitur E ipsam A vt vnitas numerum G, erit E ad A vt vnitas ad G. Sed fuit (ex hypothesi) A ad B vt G ad D. Erit igitur æqua ratione E ad B vt vnitas ad D, per 22 quinti. Metitur autem vnitas D numerum, metietur igitur E magnitudinem B. At eadem E, metitur ipsam A (vt patuit) vtrasque igitur A & B eadem E metitur. Commensurabiles igitur sunt binæ A & B magnitudines, per primam diffinitionem huius. Si binæ itaque magnitudines adinuicem rationem, &c.



COROLLARIVM I.

Hinc assequimur, propositæ cuilibet rectæ A *aliam posse dari* B *rationem habentem quam numerus* G *ad numerum* D.

Nempe si ordinemus E partem propositæ rectæ A denominatam à numero G, per nonam sexti, ac postmodum, eam partem per vnitates alterius numeri D reperamus, fiet linea quæsita B, nam erit G ad vnitatem vt A ad E, atque vt vnitas ad D sic E ad B, per decimamquintam quinti. Aequa igitur ratione (per 22 quinti) erunt G ad D numeri, vt A ad B rectæ.

COROLLARIVM II.

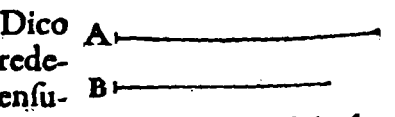
Præterea sequitur posse dari quod ex A *recta, ad simile quod ex aliqua alia, sicut sunt dati* G *ad* D *numeri.*

Cùm enim rectis A & B media possit dari proportionalis, per decimamtertiam sexti. Et (per corollarium decimænonæ sexti) sit quod à prima A ad id quod à media inter A & B sicut est A ad B. Sed sicut A ad B sic est numerus G ad numerum D. Sicut igitur quod ex prima A, ad id quod ex media inter A & B, sic erit numerus G ad numerum D, vel vt quadratus numeri G ad medium inter quadrata positorum G & D. Nam duorum quadratorum quæ ex ipsis G & D, vnus est medius proportionalis numerus, per vndecimam octaui, &c.

PROPOSITIO VII.

Incommensurabiles magnitudines, adinuicem rationem non habent quam numerus ad numerum.

Sint A & B magnitudines incommensurabiles: Dico eas non habere rationem numerorum: quòd si crederentur rationem numerorum habere, iam commensurabiles essent, ex præfata, quod obstaret hypothesi, cùm incommensurabiles supponantur. Non itaque rationem numerorum habebunt. Incommensurabiles igitur magnitudines, &c.



PROPOSITIO VIII.

Si binæ magnitudines adinuicem rationem non habuerint quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

Sint binæ

Sint binæ magnitudines A ad B rationem non habentes quam numeri inter ſe: Dico eas eſſe incommenſurabiles. Nam ſi commenſurabiles eſſent, ipſæ rationem numerorum haberent (per quintam huius) quod obſtaret hypotheſi, quæ proponit eas rationem non habere numerorum. Si igitur binæ magnitudines adinuicem rationem non habuerint quam numerus ad numerum, incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

A ——————

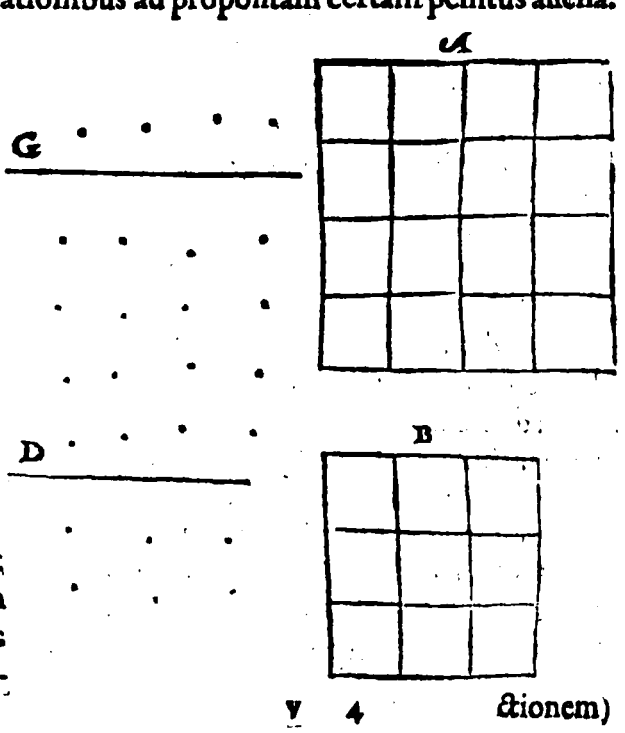
B ——————

PROPOSITIO IX.

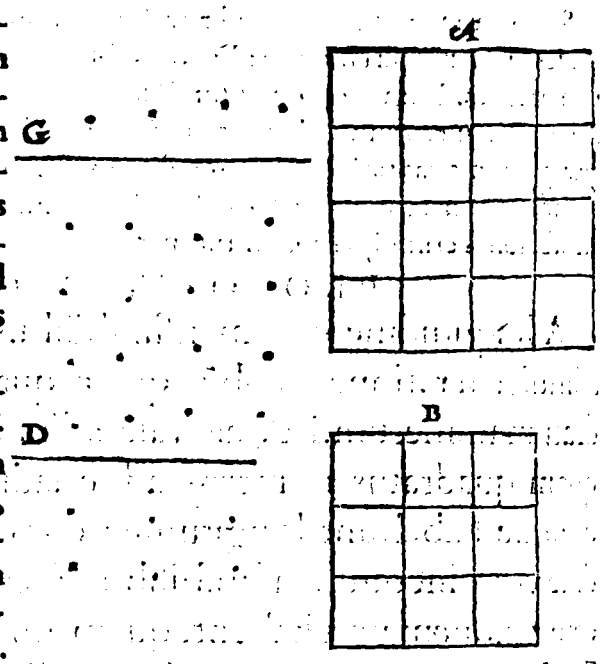
A longitudine commenſurabilibus rectis lineis quadrata, adinuicem rationem habẽt quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata adinuicem rationem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera quoque habebunt longitudine commenſurabilia. A longitudine verò incommenſurabilibus rectis lineis quadrata adinuicem rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata adinuicem rationem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

Huius prolixi theorematis duæ ſunt concluſiones breuiores, ſcilicet quadrata rationem habere quam quadrati numeri, & quadrata habere latera, longitudine commenſurabilia, ſeſe ſemper neceſſariò ſequi. Contra verò quadrata rationem non habere quam quadrati numeri, & quadrata non habere latera longitudine commenſurabilia ſeſe ſimiliter neceſſariò ſequi. Quòd autem dicit Euclides longitudine, licet per ſe ſit notum, lineam tantùm longitudinem habere, tamen quia linearum longitudines quadratorum ab eis genitorum notitiam præbent, ea quadrata linearum potentiam diximus, earum verò particularem quantitatem, longitudinem nominauimus, vt ea quæ ſua particulari quantitate vel ex ſe genita potentia certæ commẽſurabilem produxerit magnitudinem, certa dicatur ac numerorum ad certam rationem habens. Quæ verò nec particulari ſibi longitudine, nec ab ipſa genita potentia certæ commenſurabilem produxerit magnitudinem, incerta dicetur, ac à numerorum rationibus ad propoſitam certam penitus aliena.

His expoſitis proponãtur binæ rectæ A & B longitudine commenſurabiles, à quibus fiant quadrata: Dico earum quadrata rationem habere quam quadratus ad quadratum numerum. Quoniam A & B ſunt commenſurabiles, ipſæ rationem habent numerorum, per quintam huius: habeant quam numeri G ad D. Sed ipſarum A & B quadrata duplam habent rationem quam ipſæ A ad B, per corollarium vigeſimę ſexti: numerorum autem G & D quadrati duplam ſimiliter habent quam ipſi G ad D, per vndecimam octaui. igitur rationis A ad B vel G ad D (quæ eadem eſt per conſtru-

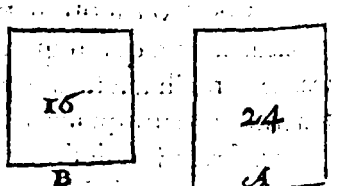


ctionem)duplæ ſunt ſingulę quadratorum planorũ, aut equidem numerorum rationes. Quare æquales adinuicẽ ſunt per ſextam communem ſententiam. Quoniam igitur eſt A latus ad B latus vt G numerus ad D numerum, ſequetur eſſe quadratum rectæ A ad quadratum rectæ B, vt quadratus G ad quadratum D numeros.



Secundò ſi ponantur quadrata rectarum A & B rationem habere quam quadrati numerorum G & D: Dico rectas A & B latera, eſſe longitudine commenſurabilia. Cùm enim quadrata rectarum A & B duplam ipſis habeant rationẽ, per coroll. vigeſimæ ſexti. Quadrati verò ipſorum G & D numerorum, ſimiliter duplam quam ipſi G ad D rationem habent: quæ itaque æqualium rationum ſunt dimidiæ, & ipſæ ſunt æquales. Erunt igitur A ad B latera, vt G ad D numeri. Rectæ itaque A & B ſunt commenſurabiles longitudine, per ſextam huius.

Tertiæ verò & quartæ partium demonſtratio, ſit per argumẽtum ab hypotheſis deſtructione. Si enim binæ lineæ A & B ponantur longitudine incommenſurabiles: Dico earum quadrata rationem non habere quam numeri quadrati. Quod ſi ſecus eſſe credatur, quadrata ſcilicet rectarum A & B rationem habere quam quadrati numeri, ipſæ A & B erunt (per ſecundam huius partem) longitudine commenſurabiles, contra hypotheſim, quæ ſupponit eas incommenſurabiles.



Ad quartam autem, ſi quadrata rectarum A & B ponantur non habere rationem quam quadrati numeri: Dico nec eorum latera, ſcilicet rectas A & B eſſe longitudine commenſurabiles. Nam ſi eſſent longitudine commenſurabiles, deſcripta ex ipſis quadrata rationem haberent, per primam partem huius, quam quadrati numeri, quod obſtaret hypotheſi. Si igitur latera fuerint incommenſurabilia, eorum quadrata rationem quadratorum numerorum non habebunt. Et proinde ſi quadrata rationem non habeant, quã quadrati numeri, nec eorum latera longitudine erunt commenſurabilia. A longitudine igitur commenſurabilibus rectis lineis, &c.

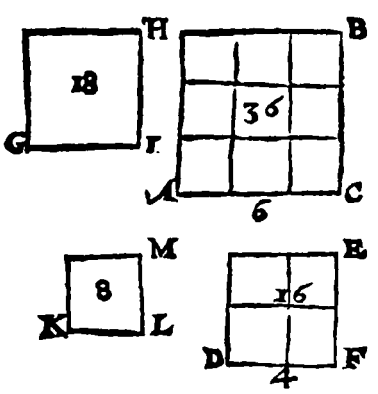
MONITVM.

Hanc demonſtrauit ſecundò Theon per primam ſexti, quam demõſtrationem ideo reliquimus, breuitati cõſulentes: ac inſuper quia ſexti prima continuas, non autem diſcretas docuit quantitates, quare poſtponenda fuit hæc demonſtratio ei quæ per theoremata vtriſque (diſcretis ſcilicet & continuis) propria, propoſitum concludit. Animaduertendũ tamen exiſtimauimus, ſoluentes aliquorum obiecta, ſcilicet cùm ſimiles plani numeri non quadrati rationem quam quadrati habeant, per 26 octaui. Quadrata verò rationem ſimilium planorum numerorum habentia habent ideo & quadratorum numerorum, & tamen illorum quadratorum latera numeris exprimi non poterunt, cùm plani non quadrati radicem quadratam non

exprimant

exprimant numeris: & proinde illorum latera numeris non expreſſa propoſitæ certæ incommenſurabilia eſſe, contra ſecundam huius partem.

Ad hæc dicemus, licet quadrata rationem ſimilium planorum numerorum habentia ſua latera iiſdem vnitatibus, quæ certam propoſitam metiuntur, referre non poſſint, eáque de cauſa ipſi certæ longitudine ſint incommenſurabilia: tamen cùm potentia eidem certæ commenſurentur, & rationem habeant inter ſe quam quadrati numeri, eorum latera rationem inter ſe ſeruabũt, quam ſeruant quadratorum numerorum (eam rationem habentium) radices, quare inter ſe longitudine commenſurabiles ſunt, ad certam verò potentia tantùm. Nam ſi diuidantur quadratorum latera in totidem æquas partes, quot ſunt vnitates in radicibus quadratorum numerorum eam rationem habentium, perſpicuum eſt eas partes in ſe ductas, totidem vnitates, quadrata componentes, producere, quot producunt radicum vnitates in ſe ductæ, cùm ſint æquales numeri. Quare ſi quadrata ſeruent numerorum quadratorum rationem, ſequetur eorum latera radicum ſeruare rationem: ſed radices cùm ſint numeri, ea latera (rationem numerorum ſeruantia) commenſurabilia erunt, per ſextam huius.



Sint in exemplum quadrata numeris AB & DE expreſſa, quorum radices ſiue latera ſint AC & DF. Sint autem quadrata GH & KM rationem habentia quam habent ſimiles plani in ratione ipſorum AB & DE numerorum conſtituti. Propoſitæ verò rectæ ſint AC & DF: quoniam quatuor hæc quadrata numeris exprimuntur, commenſurabilia erunt. Quia verò quadrata AB & DE per numeros quadratos exprimuntur, eorum latera per numerorum radices exprimentur: ſed cùm quadrata GH & KM per numeros non quadratos expreſſa ſint, eorũ latera numeris exprimi non poterunt. His maximè quorum multiplicatio per ſe quadrata illa reſtituat, per hos ſimiles planos numeros expreſſa. Quare 18 & 8 numerorum quadrata GH & KM exprimentium, cùm nulla ſit radix: ipſorum quadratorũ radices GI & KL nullis numeris exprimi poterunt: igitur rectæ AC & GI longitudine incommenſurabiles erunt, ſimiliter DF & KL: Potẽtia verò commenſurabiles, cùm areæ rationem habeant numerorum. Sed quia ſunt quatuor proportionalia AB ad DE vt GH ad KM, ſequetur eſſe AC ad DF, vt GI ad KL rectas, per 22 ſexti. Atqui AC ad DF rationem habet numerorum, & igitur GI ad KL rationem numerorum habebit. Erunt itaque commenſurabiles rectæ GI & KL (quadratorum latera) per ſextam huius. Quoties igitur eadem mẽſura metitur rectas AC & DF, toties alia quædam metitur rectas GI & KL, cùm ſint in eadem ratione. Sicut igitur tota AC ad totam GI, ſic vnitas metiens AC ad vnitatem metiẽtem eadem multitudine GI, per 15 quinti. Tota autem AC toti GI incommẽſurabilis eſt. Et igitur vnitas vnitati incommenſurabilis erit, vt patebit decimatertia huius.

Hanc ferè non ſuo loco ponimus demonſtrationem, vt mentibus inculcemus omnem incertarum à certis & inter ſe differentiam, ab vnitatum eas exprimẽtium differẽtia oriri, quæ cùm nullas (etiam quantũuis abſciſas) vnitatis partes pro communi menſura ſuſcipiant, hac de cauſa incommenſurabiles, & proinde extra omnem affinitatem diſcretam deiectæ, incertæ ac indeterminatæ dicuntur, veluti à propoſitæ cognitione diuulſæ. Hinc ad futurorum intelligentiam facilè præuidemus, binas lineas certæ propoſitæ longitudine incommenſurabiles (inter ſe tamen commenſurabiles) certam aream continere, cùm earum vnitates adinuicem ductæ certum producant quadratum, aut eidem quadrato commenſurabile, additis quidem aut ablatis vnitatibus. Sicut enim quadrata GH KM (ſimilibus planis numeris expreſſa) à lineis ipſi certæ incommenſurabilibus longitudine facta certum produ

cunt,

cunt, haud ſecus linearum ſcilicet G I K L ſegmenta, vnitatibus certarum A C D E multitudine æqualia, ac ipſis longitudine incommenſurabilia, per totidem vnitates poſitorum A B D E, certorum vnitatibus multitudine æquales ac cõmenſurabiles, magnitudine tamen inæquales, certa G H K M producunt quadrata, quorum quantitas eadem refertur per has vnitates à rectis incommenſurabilibus certis ortas, quæ propoſita fuit per numeros planos (non autem quadratos) 18 & 8 quorum vnitates certorum vnitatibus eædem aut æquales exiſtũt ſimilia plana conſtituentes: inæquales autem his quæ æqualia ipſis planis quadrata conſtituunt, numero ac quantitate, ipſiſq; commenſurabiles. Planorum itaque æquales ſunt vnitates, laterum verò inæquales, eadem tamen ratione quælibet coniunctæ.

ILLATIO.

Et manifeſtum eſt ex his, longitudine commenſurabiles lineas, ſimul eſſe & potentia. Quæ potentia verò, nõ ideo eſſe & longitudine. Longitudine autem incommenſurabiles, non ideo eſſe & potentia. Quæ verò potentia, erunt ſimul & longitudine.

Infert ab hac nona quatuor Euclides. Primum quidem, cùm commenſuratio à numerorum ratione producatur, ait lineas longitudine commenſurabiles neceſſariò habere earum potẽtiam (hoc eſt ex eis deſcripta quadrata) commenſurabilem. Cùm enim lineæ habeant numerorum rationem, & quoſuis numeros per ſe liceat ducere vt quadratos producant, linearum igitur quadrata ſeu potentiæ, quadratorum numerorum rationem habentes, commenſurabiles erunt. Ad ſecundum autem, ſi lineæ potentia ſint commenſurabiles, non ideo ſequitur eas eſſe commenſurabiles longitudine, maximè vbi potentiæ illæ rationem quadratorum, aut ſimilium planorum numerorum non ſeruant. Nam earum potentiarum ſeu quadratorum latera, longitudine incommenſurabilia erunt, ex vltima parte huius nonę. Ad tertium, ait longitudine incommenſurabiles rectas non ideo eſſe potentia incommenſurabiles: Nam illæ lineæ quandoque eſſe poſſunt latera quadratorum, non habentium rationem quadratorum numerorum, quamuis habeant rationem numerorum, & ſic commẽſurabilia exiſtant. Hac igitur de cauſa, longitudo incommenſurabilis non ſemper potentiam generat incommenſurabilem, ſed vt patet ſæpe commenſurabilem. Ad quartum autem, ſi lineæ potentiam incommenſurabilem habeant, neceſſariò longitudinem ſimul habebunt: quòd ſi non eſſet earum longitudo incommenſurabilis, ipſæ rationem haberent numerorum, qui per ſe ducti potentias ſeu quadratos producerent commenſurabiles contra poſitum, cùm ſupponantur potentiæ incommenſurabiles. Potentiarum igitur incommenſuratio longitudinum præ ſe fert incommenſurationem.

COROLLARIVM.

Diſſimiles plani numeri rationem non habent quadratorum numerorum.

Si enim haberent, ſimiles eſſent plani, per corollarium vigeſimæ ſeptimæ octaui, contra poſitum: non igitur habent. Et ideo quadrata rationem diſſimilium planorum habentia numerorum, latera habebunt longitudine incommenſurabilia, per vltimam partem huius nonæ, cùm ea quadrata rationem non habeant quadratorum numerorum.

LEMMA.

LEMMA.

Quotlibet binos numeros dissimiles planos inuenire.

Proposito numero conferantur quotlibet in ratione superparticulari, aut superbipartiente. Nam has rationes habentes dissimiles sunt plani, per corollarium vigesimæ sextæ octaui. Præterea sumantur duo, quorum alter tantùm sit quadratus, tum hi rationem non habebunt quadratorum, per 24 octaui, quare similes plani non sunt, per vigesimam sextam eiusdem. Insuper si inter duos numeros medius cadat proportionalis, extremi rationẽ habebunt quã quadrati. Nam ex vigesimâ octaui ipsi sunt similes plani, & proinde (per vigesimam sextam eiusdem) rationem habent quam quadrati: siquidem è conuerso inter eos nullus cadat medius, ipsi rationem quam quadrati non habebunt. Nam si rationem quadratorum haberent, similes plani essent, per coroll. vigesimæ septimæ octaui. Et proinde inter eos vnus caderet medius, per decimam octauam octaui, contra hypothesim, quod inconuenit.

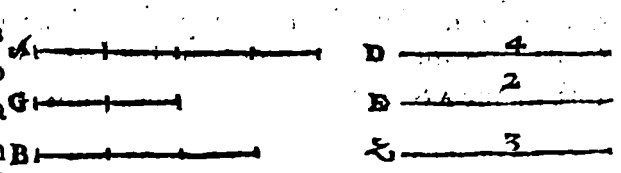
ALIAS.

Si duo numeri inuicem ducti quadratum non producant, ipsi dissimiles sunt plani.

Cùm non habeant medium proportionalem, nempe latus medij ab extremis producti, per 20 septimi. Quare similes plani inuicem ducti, quadratum restituunt, per primam noni: & quadratum componentes similes sunt plani, per secundam eiusdem.

PROPOSITIO X.

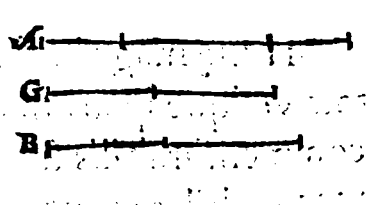
Quæ eidem magnitudini commensurabiles, & adinuicem sunt commensurabiles.



Sint binæ magnitudines A & B eidem G commensurabiles: Dico A & B esse adinuicem commensurabiles. Quoniam G vtrique ipsarum A & B est commensurabilis, ea ad illas rationem habet numerorũ (per quintam huius): habeat quam E ad D & Z numeros. Quoniam est G ad A vt E ad D, erit (ex corollario quartæ quinti) A ad G vt D ad E. Sed est G ad B vt E ad Z, ex hypothesi constructionis. Erit igitur æqua ratione A ad B sicut D numerus ad Z numerum, per 22 quinti. Cõmensurabiles itaque sunt (per sextam huius) A & B adinuicem. Quæ igitur eidem magnitudini, &c.

COROLLARIVM I.

Si binarum magnitudinum altera commensurabilis fuerit alicui, Altera verò eidem incõmensurabilis, ipsæ magnitudines incommensurabiles erunt.



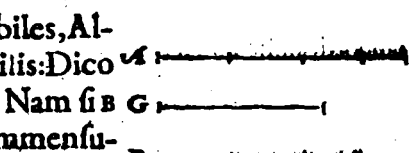
Sit A commensurabilis ipsi G, & eidem G sit B incommensurabilis: Dico A ipsi B incommensurabilem esse. Nam si B ipsi A commẽsurabilis esset, & eidem A commensurabilis est G, sequeretur (ex decima huius) G & B commensurabiles esse, contra positum, quod fieri non potest. Si igitur binarum magnitudinum altera, &c.

CORO

COROLLARIVM II.

Si duæ magnitudines commensurabiles fuerint, alteráque earum magnitudini cuidam incommensurabilis fuerit, & reliqua eidem incommensurabilis erit.

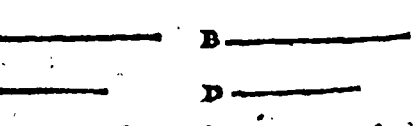
Sint binæ magnitudines A & B commensurabiles, Alteráque earum A sit cuidam G incommensurabilis: Dico reliquam B eidem G incommensurabilem esse. Nam si B ipsi G sit commensurabilis, Iam idem B ipsi A commensurabilis fuit. Sequetur igitur A & G (eidem B commensurabiles) esse adinuicem commensurabiles, per decimam huius, contra hypothesin, quod esset absurdum. Incommensurabilis igitur erit B ipsi G. Si itaque duæ magnitudines commensurabiles fuerint, &c.



COROLLARIVM III.

Si duæ magnitudines duabus incommensurabilibus fuerint commensurabiles, Et ipsæ inuicem incommensurabiles erunt.

Sit A scilicet commensurabilis ipsi B, & G ipsi D, sint autem B & D incommensurabiles: Dico A & G incommensurabiles esse. Quod si commensurabiles essent A & G, & eidem A fuit B commensurabilis, sequetur igitur B ipsi G commẽsurabilem esse per decimam huius. Sed eidem G fuit commensurabilis D, ex hypothesi, ipsæ igitur B & D (per eandem) commensurabiles erunt, & (ex hypothesi) incommensurabiles positæ, quod fieri nequit. Ipsæ itaque A & G incommensurabiles erunt. Si igitur duæ magnitudines, &c.



MONITVM.

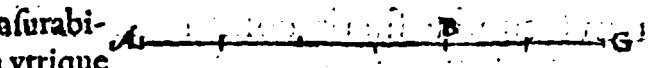
Hæc tria præfata corollaria hanc decimam necessariò sequentia, varia scribentium sententia relicta sunt. Prius etenim lemma à Zamberto existimatum fuit: Ab altero verò Græcorum exemplarium theorema, & à reliquo lemma. Secundum autem, efficit Zambertus propositionem decimamtertiam decimi, Campanus verò suæ octauæ additionem efficit. Theonis demum vnum exemplar, decimum quartum dicit theorema. Tertium corollarium futuris demonstrandis vtile hoc loco proprium ordinem sibi ascitum fuisse iudicauimus. Namque hæc tria lemmata vnico hoc decimo demonstrantur theoremate. Quare eiusdem potius appendices quàm theoremata dici debent.

PROPOSITIO XI.

Si binę magnitudines commensurabiles compositæ fuerint, tota vtrique ipsarum commensurabilis erit. Et si tota vni earum commensurabilis fuerit, Quæ in principio magnitudines commensurabiles erunt.

Sint

Sint binæ A B & B G commensurabiles: Dico totam A G compositam vtrique A B & B G commensurabilem esse. Quia D commensurabiles sunt A B B G, metietur eas aliqua magnitudo, quæ sit D, per primam diffinitionem: huius quoniam D metitur A B B G partes totam A G componentes, ipsa D metitur totam A G. Quæ igitur A G vtrique partium A B & B G commensurabilis est. Siquidem ponamus totam A G vni earum A B commensurabilem esse: Dico A B B G esse commensurabiles. Nam metiatur datas A B A G commensurabiles aliqua D magnitudo. Quia igitur D metitur totam A G & ablatam A B, Ipsa D metietur & reliquum B G, per secundam communem sententiam septimi: eadem igitur D metiens binas A B B G, efficit eas commensurabiles. Si itaque binæ magnitudines, &c.



COROLLARIVM.

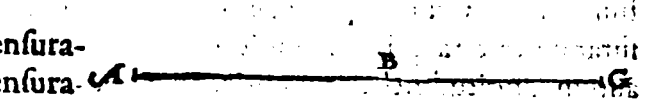
Hinc assequimur, Si tota vni earum fuerit commensurabilis, & reliqua commensurabilis erit.

Eadem etenim D omnes metitur, per secundam communem sententiam septimi.

PROPOSITIO XII.

Si binæ magnitudines incommensurabiles compositæ fuerint, tota vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota alteri ipsarum incommensurabilis fuerit, quæ in principio magnitudines incommensurabiles erunt.

Sint binæ A B B G incommensurabiles: Dico totam A G incommensurabilem esse vtrisque A B & B G: Quod si ipsis commensurabilis credatur, metiatur has A G & B G aliqua D. Quoniam enim D metitur totam A G & ablatam B G, metietur & reliquam A B, per 2. communem sententiam septimi. Metietur itaque A B & B G (quas incommensurabiles posuimus) quod fieri non potest. Tota igitur A G vtrique A B & B G incommensurabilis erit. Secundò, ponamus totam A G alteri earum A B incommensurabilem esse: Dico A B B G incommensurabiles esse: si enim commensurabiles credantur, metiatur eas A B B G aliqua D: quæ cùm metiatur singulas A B & B G (totius A G partes) metietur & totam A G. Commensurabilis erit igitur tota A G vtrique earum, sed & alteri A B incommensurabilis fuit posita, quod fieri nequit. Incommensurabiles itaque erunt A B B G, quæ in principio magnitudines. Si itaque binæ, &c.



COROLLARIVM.

Et proinde, Si tota vni earum sit incommensurabilis, & reliqua incommensurabilis erit.

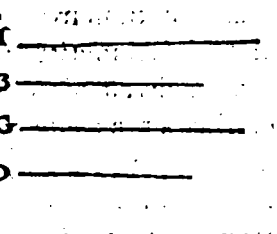
Nam si alteri commensurabilis esset, & reliquæ commensurabilis erit (per corollarium præcedentis) contra positum, &c.

PROPOSITIO XIII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima autem

tem ſecundæ fuerit commenſurabilis, & tertia quartæ commenſurabilis erit. Si verò prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommenſurabilis erit.

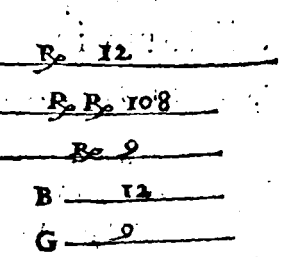
Sint quatuor magnitudines proportionales, ſcilicet A ad B vt G ad D, ſintq; A & B commenſurabiles: Dico G & D commenſurabiles eſſe: quoniam A ad B commenſurabiles ſunt, ipſæ rationem numerorum habent, per quintam huius, ſed eandem habēt G ad D, quam A ad B, ex hypotheſi, ergo G ad D rationē habent numerorum, & igitur commenſurabiles erunt, per ſextam huius. Ad ſecundum autem, Eſto A prima B ſecundæ incommenſurabilis: Dico & G tertiam quartæ D incommenſurabilem eſſe, quoniam A & B ſunt incommenſurabiles, ipſæ non habent numerorum rationem, per ſeptimam huius: ſed eandem quam A ad B habent G ad D, ex hypotheſi; igitur G ad D non habent rationem numerorum: incommenſurabiles itaque ſunt G ad D, per octauam huius. Si igitur quatuor, &c.



PROPOSITIO XIIII. PROBLEMA 3.

Propoſitæ rectæ lineæ binas rectas incommenſurabiles inuenire. Alteram quidem longitudine tantùm, alteram autem & potentia.

Eſto propoſita recta (hoc eſt cuius quantitas ſit certa ſeu determinata, per quintam diffinitionem huius) linea A, cui inueſtigādæ ſint duæ incommenſurabiles, altera quidem longitudine tantùm, altera autem longitudine ac potentia. Ponantur duo numeri diſſimiles plani, per lemma nonæ huius, qui (per corollarium eiuſdem) rationem quam quadrati numeri non habent, ſintq; B & G. Fiat autē (per corollariū ſecundū ſextæ huius) ſicut B ad G, ſic quod ex A, ad id quod ex D. Rectis autē A & D inueniatur media proportionalis (per decimamtertiam ſexti) quæ ſit E: quoniam poſitum eſt quod ex A ad id quod ex D ſicut B ad G, rationem quadratorum numerorum non habentes, quadrata rectarum A & D, habebunt latera A & D longitudine incommenſurabilia, per vltimam partem nonæ huius, potentias verò commenſurabiles per 6 huius. Data eſt igitur rectæ A propoſitæ recta D longitudine tantùm incommenſurabilis. Cùm autem A E D ſint continuè proportionales, erit ſicut A ad D, ſic quod ex A ad id quod fit ex E ſecunda, per corollarium 20 ſexti; ſed A rectæ D incommenſurabilis oſtenſa eſt. Quod ex A igitur ei quod ex E incommenſurabile erit, per ſecundam partem 13 huius. Recta itaque E eidem A propoſitæ, potentia datur incommenſurabilis: igitur & longitudine, per illationem nonæ huius. Propoſitæ itaque rectæ binas rectas incommenſurabiles, &c.

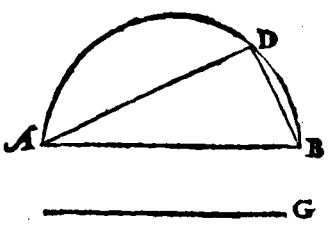


PROPOSITIO XV. PROBLEMA 4.

Duabus datis rectis inæqualibus lineis, inuenire quo maius poteſt maior minore.

Sint binæ rectæ inæquales A B & G, ſuper maiori verò A B cōſtituatur ſemicirculus A D B. Eidem porro ſemicirculo, per primam quarti, coaptetur rectæ G minori

nori æqualis A D, coniuncta D B. Quoniam (per 47 primi) potentia rectæ A B, quæ ſubtendit angulum rectum A D B, æquatur potentiis rectarum A D, D B: ſed potentiæ A D æqualis eſt potentia rectæ G minoris, cùm ſint per conſtructionem æquales A D & G: Sequetur itaque maiorem A B plus poſſe minore G (hoc eſt recta A D) quadrato lineæ D B. Duabus igitur A B & G datis, inuenimus quo maius poteſt maior minore.



COROLLARIVM.

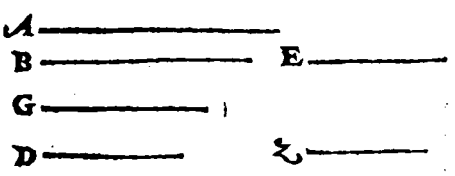
Haud diſſimili via, potentem duas datas rectas dabimus.

Si quidem rectæ datæ ad angulum rectum componantur, hunc ſubtendens angulum, per 47 primi, binas datas poterit recta linea.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, potuerítque prima ſecunda maius eo quod fit ab eidem longitudine commenſurabili, & tertia quarta maius poterit eo quod fit ab eidem longitudine commenſurabili. Et ſi prima ſecunda maius potuerit, eo quod fit ab eidem incommenſurabili longitudine, & tertia quarta maius poterit, eo quod fit ab eidem longitudine incommenſurabili.

Sint quatuor rectæ proportionales A ad B vt G ad D, poſſitque A maius B, eo quod ex E, & G maius D alio quod ex Z: Dico ſi A & E ſint commenſurabiles, eſſe & rectas G & Z, ſiquidem non, non. Quoniam quatuor A B G D ſunt proportionales, earum quadrata proportionalia erunt, per 22 ſexti. Quia verò quadratum A excedit conſequens, quod ex B, eo quod ex E. Aliud verò antecedens ex G, ſimiliter excedit ſuum conſequens quod ex D quadrato Z. Erit conuerſione rationis quod ex A ad quod ex E, ſic quod ex G ad quod ex Z, per coroll. decimænonæ quinti. Si itaque primum quod ex A ſecundo ex E commenſurabile fuerit, & tertium ex G quarto ex Z commenſurabitur, ſiquidem non, non: per 13 huius. Si itaque quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c.



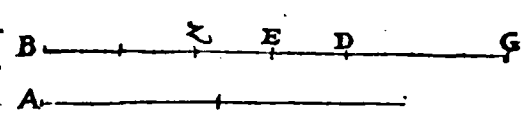
MONITVM.

Proximarum propoſitionum ſeptem præcedentium ordinem variare cogimur. Cùm enim ſitus earum varia ſcribentium ſententia ad nos fuerit delatus, non poſſumus eam Euclidis fuiſſe mentem coniicere, qui tot in varios ſtudiorum amfractus incidiſſet: quare diſciplinæ authoritatem docentium authoritati præferentes, theoremata hoc loco ita tranſponimus, vt quæ cœpit quinta huius de commenſuratione loqui, ad duodecimam vſque perducamus. Poſtmodum decimatertia proportionem commenſurationi copulantes, poſtremas 14, 15, & 16 potentiarum leges quánam arte longitudines ſequantur docere incipientes, conſequamur. Id equidem ſeruato theorematum numero eodem: quod ſi Campanus, Theon, ac duplex illud græcum exemplar, in eo diſſideant, quo ſcilicet quædam theoremata

Euclidis, corollaria fuiſſe dixere vel lemmata. Nos hac arte ſingula demonſtrandis futuris neceſſariò collegimus, vt quæ immediatè ab aliquo dependent theoremate, eiuſdem corollaria dixerimus, vel lemmata antiquum Theonis ſequentes morem, quamuis quandoque ſatis impropriè lemmata, quæ corollaria dici debent, & è conuerſo dicamus. Sed cùm id huic diſciplinæ nihil aut parum conferat, dum tamen adſit demonſtratio, ac vera methodi ſequacitas, harum quæſtionum præteribimus moram. Quia verò Theon poſt 16 huius, ponit lemma admodum à propoſito diſtans, ac eiuſdem ſententiæ cum corollario à nobis poſt vigeſimamoctauam ſexti poſito: Nos itaque illud tanquam præhabitum, hac obliti ſumus data opera.

PROPOSITIO XVII.

Si fuerint binæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti eius quod à minore æquum parallelogrammum ad maiorem applicatum fuerit, deficiens ſpecie quadrata, & per commenſurabilia ipſam diuiſerit longitudine, maior plus poterit minore eò quod ex ſibi longitudine commenſurabili. Et ſi maior plus poterit minore eo quod à ſibi longitudine commenſurabili, Quartæ verò parti eius quod à minore æquale ad maiorem applicatum fuerit deficiens ſpecie quadrata, Per commenſurabilia longitudine ipſam diſtribuet.



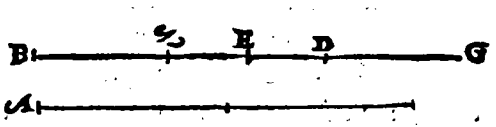
Sint binæ rectæ lineæ inæquales, ſcilicet A minor, & B G maior: applicetur autem rectæ B G parallelogrammum æquale quartæ parti eius, quod fit à minore A (hoc eſt, quadrato dimidiæ lineæ A) quod quidem applicatum deficiat ſpecie quadrata, per 28 ſexti, illúdque ſua applicatione ſecet rectam B G in D, ſintque B D & D G longitudine commenſurabiles: Dico maiorem B G plus poſſe minore A, eò quod fit ex ſibi longitudine commenſurabili. Secetur bifariam B G in E, ipſi verò E D æqualis ponatur E Z: reliquæ igitur D G & Z B æquales erunt: quoniam applicatum ſecat B G in D, illud continetur ſub ſegmentis B D D G, per corollarium 28 ſexti. Quia verò recta B G ſecta eſt per æqualia in E, & inæqualia in D, rectangulum ſub B D D G cum quadrato ex E D (quæ inter ſectiones) eſt æquale ei quod ex B E (vel E G) media, per quintam ſecundi: ſequetur itaque id quod ex E G (vel B E) excedere id quod ſub B D D G, ſeu quod ex dimidia ipſius A, quadrato E D, ſed cùm quater ex E G ſit totum quod ex B G, quater autem ex dimidia ipſius A quadratum ſit totum ex A quadratum, Sequetur totam B G plus poſſe tota A quadrato E D quater ſumpto, quod quidem erit quadratum rectæ D Z: Nam rectæ E D æqualis poſita eſt E Z. Cæterùm cùm B D ſit (ex hypotheſi) longitudine commenſurabilis rectæ D G, erit & rectæ B Z eadem B D commenſurabilis: quia verò B D tota vni earum B Z eſt commenſurabilis, & reliquæ Z D eadem B D commenſurabilis erit, per vndecimam huius: quia autem duæ B D & D G commenſurabiles componuntur, tota B G vtriſque B D, D G commenſurabilis erit (per vndecimam huius): cùm inſuper duæ B G & Z D eidem B D commenſurabiles oſtenſæ ſint, & ipſæ B G & Z D adinuicem erunt commenſurabiles, per decimam huius, ſed B G plus poteſt recta A, eò quod fit ex Z D. Plus igitur poteſt maior B G minore A, eò quod ex Z D ſibi longitudine commenſurabili.

Secundo, ſupponamus B G maiorem plus poſſe recta A minore, ex ſibi commenſurabili

ſurabili longitudine,& inſuper B G maiori applicatum,quod ſub B D & D G æquum quartæ parti eius quod à minore A deficiens ſpecie quadrata: Dico hanc applicationem ſecare ipſam B G in D per commenſurabilia: eadem figuræ diſpoſitione vti poſſumus. Cùm enim excedat ſpecie quadrata, inæquales erunt B D & D G ſectiones: aliàs ſi ſectio applicati caderet in E, propoſitæ A & B G eſſent æquales, contra hypotheſim. Quare per æqualia in E & inæqualia in D ſecta B G plus poterit minore A quadrato Z D, vt patuit. Commenſurabilis autem fuit tota B G (ex hypotheſi) ipſi Z D exceſſui longitudine: ſed cùm tota B G vni earum Z D ſit commenſurabilis, quæ in principio Z D & binæ B Z D G commenſurabiles erunt, per vndecimam huius:quia rurſus B Z binis B Z D G commenſurabilis eſt, nam dimidia, & eiſdem B Z D G commenſurabilis eſt Z D, duæ igitur B Z Z D commenſurabiles erunt, per eandem:ſed binæ B Z Z D commenſurabiles componuntur. Tota igitur B D vtriſque B Z Z D commenſurabilis erit:atqui ipſi B Z fuit æqualis D G: ipſa igitur B D reliquæ ſectioni D G commenſuratur: ſecta eſt ideo tota maior B G per commenſurabilia longitudine in D. Si itaque fuerint, &c.

PROPOSITIO XVIII.

Si fuerint binæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti eius quod ex minore æquum ad maiorem applicetur, deficiens ſpecie quadrata, & ipſam per incommenſurabilia diuiſerit longitudine, maior plus poterit minore eò quod ex ſibi longitudine incommenſurabili: Etſi maior plus poterit minore eò quod ex ſibi longitudine incommenſurabili, quartæ autem parti eius quod à minore æquum, ad maiorem applicetur, deficiens ſpecie quadrata, per incommenſurabilia ipſam longitudine diſpeſcet.



Sint binæ rectæ lineæ inæquales A & B G, ſecetur B G maior bifariam in E. Applicetur autem ipſi B G æquum quartæ parti eius, quod ex A (hoc eſt quadrato dimidiæ A) deficiens ſpecie quadrata, rectámque B G hac applicatione per incommenſurabiles longitudine ſecans in D: Dico B G maiorem plus poſſe minore A, eò quod à ſibi longitudine incommenſurabili, iam (vt præfata oſtendimus) applicatum ad ipſam B G, ſub B D D G comprehenditur, æquum quidem ei quod ex dimidia rectæ A, quod (per quintam ſecundi) minus fuit eò quod ex E G dimidia rectæ B G, quadrato E D. Quare tota B G plus potuit minore A quadrato Z D, quæ eſt dupla rectæ E D. Quoniam binæ B D D G ponuntur incommenſurabiles, & tota B G vtrique earum (per duodecimam huius) incommenſurabilis erit. Quia verò binæ B Z D G æquales commenſurabiles ſunt ipſi D G, ſed eidem D G incommenſurabilis eſt tota B G. Igitur binæ B Z D G ipſi B G incommenſurabiles erunt, per corol. primum decimæ huius. Sed quia tota B G vni earum (ſcilicet compoſitæ ex binis B Z D G) eſt incommenſurabilis, & reliquæ Z D eadem B G incommenſurabilis erit, per corollarium duodecimæ huius. Tota igitur B G maior, quæ plus potuit minore A quadrato ex Z D, plus minore poteſt, eò quod ex ſibi longitudine incommenſurabili.

Ad ſecundum autem, ſupponamus rectam B G plus poſſe minore A quadrato Z D, toti B G longitudine incommenſurabili: Dico B G diuiſam eſſe in D, per incommenſurabilia longitudine. Cùm tota B G ipſi Z D ſit incommenſurabilis & reliquæ

liquæ ſcilicet binis B Z D G incommenſurabilis erit, per coroll. 12 huius: quia verò binarum alia ſcilicet B G binis B Z D G incommenſurabilis eſt. Alia verò D G eiſdem binis B Z D G eſt commenſurabilis. Duæ igitur B G & D G ſunt incommenſurabiles, ex coroll. 12 huius. Et ſi tota B G vni earum D G fuerit incommenſurabilis, quæ in principio B D & D G ſunt longitudine incommenſurabiles, per duodecimam huius. Secta eſt igitur B G in D per incommenſurabiles longitudine. Si itaque fuerint binæ rectæ lineæ, inæquales quartæ autem, &c.

LEMMA.

Oſtenſum eſt in commenſuratione potentiam neceſſario ſequi longitudinem, non autem longitudinem ſequi ſemper potentiam. In incommenſurabilibus autem, longitudinem ſemper ſequi potentiam, potentiam verò ſæpius longitudinem non ſequi.

Quare dicemus propoſitam certam, quam ῥητὴν dixit Euclides, lineam eſſe ſuppoſitam ex libera potius hypotheſi, quàm neceſſitate aliqua deprompta, ad quam reliquas comparantes, eiuſdem reſpectu ſiue relatione certas aut incertas dicemus, quas improprio nomine rationales aut irrationales dixerunt plures. Hac equidem methodo, vt quæ expoſitæ certæ longitudine commenſurabiles erunt, ſimpliciter certæ dicantur, eò quòd longitudinem neceſſariò ſequatur potentia. Quæ verò eidem propoſitæ certæ aliquæ potentia fuerint commenſurabiles, non ideo ſimplicem certarum denominationem illæ ſibi ſumunt, cùm potentia illa non ſemper includat longitudinem, ſed reſpectiuè dicentur potentia commenſurabiles, cui denominationi addemus particulam (tantùm) cùm longitudine illas incommenſurabiles eſſe patebit. Quòd ſi eidem propoſitæ certæ conferantur aliquæ incommenſurabiles, vt ideo incertarum concipiant denominationem, ſi quidem potentia fuerint incommenſurabiles, illæ incertarum ſimplicem ſuſcipiunt denominationem. Nam apud incommenſurabiles potentia præ ſe fert longitudinem. Si autem longitudine incommenſurentur, cùm longitudo potentiæ commenſurationem ſæpius admittat, has certæ collatas, non idcirco incertas ſimpliciter dicemus, ſed præferenda eſt denominationi, commenſurationis potentiæ intelligentia. Nam ſi nec potentia commenſurabilis exiſtat, ſimpliciter incerta dicetur, ſiquidem commenſurabilis, reſpectiuè, vt iam diximus, certa potentia tantùm commenſurabilis nuncupabitur. Harum autem naturam per numerorum rationem explicat nona huius Euclides.

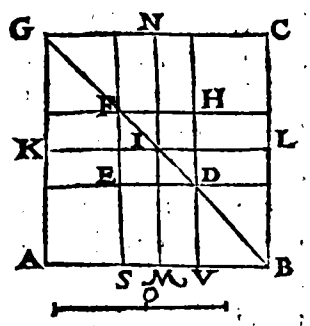
MONITVM.

Hanc certæ denominationem, quam rationalem aliena voce interpretati ſunt plures, non vni ac eidem tantùm linearum naturæ congruere opinandum eſt ea ſeueritate qua nulla lineæ quantitas certa dici poſſit, ſi aliena fuerit ab eius naturæ quantitate quam ſemel certam diximus. Id enim longè à vero ſenſu nos alienos efficeret. Nam certitudinem hanc ſeu ab aliis (vt ita loquar) rationalitatem hypotheticã intellexit Euclides. Cùm enim ſupponit certam cui aliæ conferendæ ſunt, pro huius exempli tempore huius ſuppoſitę certę naturam ſectabimur, & tantùm (iuxta præfatas leges ac ſequuturas) certas, aut reliquas ipſi certæ incommenſurabiles, incertas dicemus. Quod ſi varietur exemplum, non inconuenit eam quæ prius penitus incerta fuit, pro alterius exempli tempore, certam ſupponi. Quilibet etenim cuiuſuiſque naturæ linea propoſita vt certa, per ſibi collatas commenſurabiles, aut incommenſurabiles potentia vel longitudine, omnem incertarum

poſthac

posthac exponendarum originem generari posse concipiemus. Cùm omnes incertarum exponendas species, semper ab vnius certæ propositæ hypothesi, per conferentiam singularum manare sit notum. Quod autem sæpius dicit Campanus rationalis potentia, rationalis longitudine, improprium est. Nam potentia vel longitudo non versatur circa rationalitatem, vt sic loquar, sed tantùm circa commensurationem. Illud namque idem esset, ac si media longitudine, media potentia, binomium longitudine, vel binomium potentia, diceremus. Longitudo igitur aut potentia commensurationi referuntur. Sed rationalis, mediæ, aut binomij, &c. denominationes, ad linearum diuersas naturas tantùm denotandas spectant.

Cæterùm, vt diuersitatem naturæ linearum à numeris ortam percipiamus, binarũ præcedentiũ, ac vigesimæ octauæ sexti sententias vnica demonstratione numeris surdis seu algebricis illustrata discutiemus. Esto numerus maior recta A B, minórque recta O. Rectæ A B quadratum sit A B C G, dimetiens autem G B, & centrum I. Circa dimetientem & centrum constituatur quadratum æquale excessui quo quadratum ex A B excedit quadratum ex O, sitq; illud E F H D: secentur postmodum vtraque quadrata A C & E H in centro I quadrifariam, ductis M N K L rectis. Patet igitur quatuor rectangula A D, B H, C F, G E (inter se æqualia) simul sumpta, æquari quadrato, rectæ seu numeri O minoris. Ac proinde aream A D æquam esse quartæ parti eius quod fit à minore O. Sequitur igitur numero A B applicatum esse numerum A D, æquum quartæ parti eius quod fit à minore O numero proposito, deficiente autem specie quadrata, D B, quæ scilicet circa dimetientem, & hac applicatione sectam esse rectam, seu numerum A B in V. Quare si iuxta decimamseptimam huius A B secetur in V per numeros A V, V B, siue per commensurabilia longitudine, manifestum erit, rectam E D ipsi A B longitudine commensurabilem esse, vt iam antea ostensum est. Nam A S æquatur rectæ V B, tota itaque A V vni earum A S (vel, V B) commensurabilis, & reliquæ S V (vel E D) commensurabilis erit, per corollarium vndecimæ huius. Tunc itaque excessus potentiæ A B super potentiam rectæ O (quæ quidem fuit E H) est longitudine commensurabilis propositæ rectæ seu numero A B. Ac è conuerso si rectæ A B & E D sint numeri seu longitudine commensurabiles, sequetur à toto ablatum E D (vel S V) numerum, relinquere quod supereſt, (scilicet compositum ex A S V B) esse numerum, & ideo rectam A B secari in V per numeros seu longitudine commensurabiles. Quòd si iuxta decimamoctauam huius A B secta sit in V per non numeros, siue per incommensurabilia longitudine, Perspicuum erit totam A V (parti V B vel A S incommensurabilem) reliquæ S V siue E D incommensurabilem esse, ex corollario duodecimæ huius. Quare A C potentia maioris A B excedit potentiam (vt fusius 18 discussimus) minoris O quadrato rectæ E D, quæ ipsi A B est longitudine incommensurabilis, & è contra. Si rectæ A B E D sint non numeri seu longitudine incommensurabiles, à numero A B propositæ ablatus non numerus S V (vel E D) relinquit V B & A S (æquales) non numeros, & proinde rectam A B sectam in V per non numeros seu incommensurabilia longitudine, ex duodecima huius. Si igitur secetur A B in V, per numeros commensurabilia erunt A D D B rectangula, per primam sexti. Si quidem per non numeros incommensurabilia erunt, ex eadem, & ideo reliquo E H commensurabilia vel incommensurabilia.

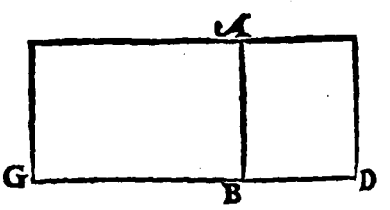


Cùm recta A B secatur in V per cõmẽsurabilia longitudine, esto A B rad. 64, O rad. 48, A D 12, D B 4, A V 6, V B 2, E H 16.

Cùm verò secatur in V, per incõmensurabilia longitudine, esto A B rad. 64. O rad. 52, A D 13, A V 4- rad. 3, V B 4- rad. 3 E H 12.

PROPOSITIO XIX.

Sub Certis longitudine commenſurabilibus rectis lineis (iuxta quemuis modum præfatorum) comprehenſum rectangulum, Certum eſt.



Comprehendatur rectangulum A G ſub A B & B G certis rectis longitudine commenſurabilibus: Dico ipſum A G certum eſſe. Fiat ex A B quadratum A D, per 46 primi. Quoniam æquales ſunt A B B D, erit G B ad B A, vt G B ad B D, per ſeptimam quinti. Quia verò G B B A ſunt commenſurabiles, & G B B D commenſurabiles erunt, per 13 huius: ſed vt G B ad B D rectæ, ſic G A ad A D rectangula, per primam ſexti. commenſurabiles autem ſunt rectæ G B B D. Commenſurabilia igitur erunt & rectangula G A A D, per decimam tertiam huius: atqui certum eſt A D rectangulum, per octauam diffinitionem. Certum igitur erit & G A, per nonam huius diffinitionem. Sub certis itaque longitudine commenſurabilibus rectis, &c.

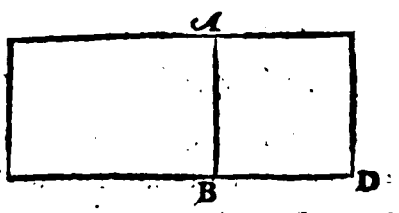
MONITVM.

Dixit Euclides (iuxta aliquem præfatorum modum) cuius intelligentiam non ſcripſerunt Theon aut Campanus. Quod igitur ſentiebat Euclides noſtra ſententia exponamus, rectarum longitudine commenſurabilium vnicus eſt modus. Is namque quo ipſarum longitudines rationem numerorum obtinent. quare illud (iuxta aliquem præfatorum modorum) ad longitudinis commenſurationem referri non putemus: ſed ad certarum hypotheticarum ſumptionem, quas quidem diuerſis modis longitudine commenſurabiles propoſuit Euclides. Primò quidem cùm propoſitæ certæ binas longitudine ac potentia commenſurabiles confert. Nam quadratum vnius, ipſius propoſitę quadrato commenſuratur, ac eidem vnius quadrato rectangulum ſub duabus (per primam ſexti) commenſurabitur, & ideo quadrato propoſitæ, per decimam huius. Secundò cum propoſito comparantur binæ certæ potentia tantùm commenſurabiles, inter ſe tamen longitudine commenſurabiles, vt radices numerorum ſimilium planorum nō tamen quadratorum. Nam hi cùm ſuas quadratas radices numeris exprimere nequeāt, illæ radices rectæ propoſitæ certæ per numerum expreſſæ, longitudine erunt incommenſurabiles: quia verò ſunt in numerorum ratione cum quadrato propoſitę, potentia ſunt commenſurabiles per ſextam huius ipſi certæ: Et quia ſunt ſimiles plani, ipſi rationem inter ſe quam quadrati numeri habent, per vigeſimamſextam octaui, & ideo latera longitudine commenſurabilia, per nonam huius inter ſe: quia igitur (ſicut in prioris demonſtratione) vnius earum quadratum propoſitæ quadrato fuit ex hypotheſi commenſurabile, & eidem rectangulum ſub duabus comprehenſum, commenſurabile (per primam ſexti) erit: quare rectangulum & propoſitæ quadratum, eidem quadrato prioris cōmenſurabilia, adinuicē erunt commenſurabilia, per decimam huius. Et proinde vtraque via, rectangulum illud (per nonam huius diffinitionem) certum erit. Certas igitur longitudine commenſurabiles per quadratos, vel ſimiles planos numeros tantùm, potentiam earum exprimere concludemus; potentiam verò longitudine incommenſurabilium certarum, quibuſuis numeris non ſimilibus planis denotare. Quare certarum areas neceſſariò numeris exprimi fatebimur, longitudines verò quandoque tantùm.

PROPO

PROPOSITIO XX.

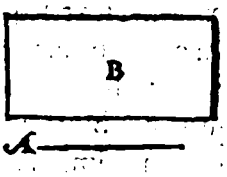
Si Certum ad Certam applicatum fuerit, latitudinem efficit Certam, commensurabilémque ei ad quam applicatur longitudine.



Proponatur certa linea A B, ad quam applicetur rectangulum A G certum, efficiens latitudinem rectam G B: Dico ipsam G B esse certã, & commensurabilem longitudine, lineæ A B propositæ. Describatur ex A B quadratum A D, per quadragesimamsextam primi, quod (per octauam diffinitionem) est certum, & certo A G commensurabile. Nam si eidem incommensurabile esset, incertum esset, per decimam diffinitionem huius. Sed sicut A D ad A G rectangula, ita B D ad B G rectæ, per primam sexti: commensurabilia fuerunt A D & A G rectangula: cõmensurabiles igitur erunt B D & B G rectæ, per decimãtertiam huius. Atqui ipsi B D æqualis est A B recta, ex quadrati diffinit. ipsa itaque G B latitudo, propositæ A B commensurabilis erit longitudine. Si itaque certum ad certam applicatum fuerit latitudinem, &c.

LEMMA.

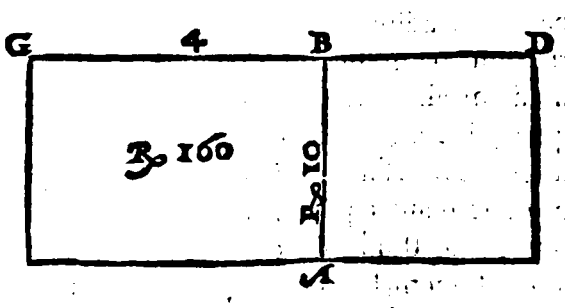
Potens incertam aream, incerta est recta.



Possit recta A aream B incertam: Dico rectam A incertam esse. Nam si certa esset, ea posset certum: sed nõ potest, imò incertum B ex hypothesi: igitur recta A incerta est. Potens itaque incertam, &c. Hæc vndecimæ diffinitionis primam partem ferè repetiuit.

PROPOSITIO XXI.

Sub Certis potentia tantùm commensurabilibus rectis lineis comprehensum rectangulum, incertum est, illúdque potens incerta est, vocetúrque Media.



Comprehendatur rectangulum A G sub rectis A B B G, quæ quidem sint certæ potẽtia tantùm adinuicem commensurabiles: Dico rectãgulum A G, incertum esse, ac insuper idem rectangulum A G potentem, lineam incertam esse, eam autem quæ vocatur media. Describatur ex A B quadratum A D, quod (per octauã diffinitionem) certũ erit. Et cùm G B sit incommensurabilis ipsi B A, & ipsi B D (sibi æquali) eadem G B incommensurabilis erit. Sicut autem B D ad B G rectæ, sic A D ad A G rectangula, per primam sexti incommensurabilis est G B lineæ B D. Incommensurabile igitur erit G A ipsi A D, per 13 huius: sed A D certum fuit: reliquum igitur A G incertum erit, per decimam diffinitionem huius: quia verò incertum est G A rectangulum, seu area, illam potens incerta est, per lemma præcedentis, eáque vocatur media. Eò quidem quòd nullam à certis quantitatibus denominationem recipere possit, tamen eam quam suæ genituræ exprimit

mit

mit effectus, concipiet nomenclaturam, nempe qua media proportionalis inter binas certas potentia tantùm commensurabiles existit. Cùm enim sub extremis A B B G, æquum sit ei quod à media potente illud A G, per decimamseptimam sexti, Ipsa potens meritò media inter eas dici poterit, per vigesimamsecundam sexti. Sub certis igitur potentia tantùm, &c.

COROLLARIVM.

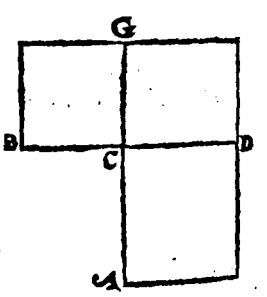
Sub Certa & Incerta comprehensum, incertum est.

Nam si A B sit certa, G B verò incerta, B D recta (ipsi A B æqualis) erit ad B G vt A D ad A G. Incommensurabile igitur erit A G ipsi A D certo, & igitur A G sub certa & incerta A B B G incertum erit, per decimam diffinitionem huius.

LEMMA.

Duabus datis rectis erit sicut prima ad secundam, sic quod à prima ad id quod sub binis continetur. Et insuper prima ad secundam, sicut quod sub binis ad quod ex vltima quadratum.

Datæ etenim rectæ A C C G in rectum ponantur, & ex eis fiant quadrata A D G B completo rectangulo G D. Patet (ex prima sexti) quadratum à prima A C esse ad rectangulum G D (sub duabus) sicut prima A C ad secundam C G, & insuper esse sicut D C ad C B (æquales ipsis A C C G) sic G D (quod sub binis) ad G B, quod ex vltima B G quadratum, per eandem primam sexti.

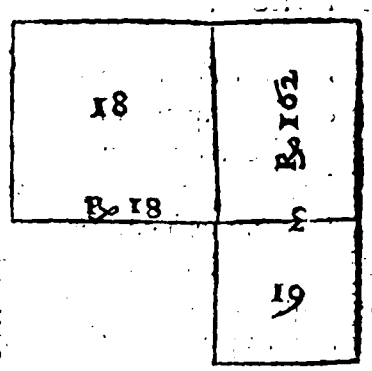


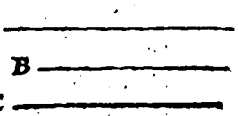
MONITVM.

Patet hoc theoremate mutari naturam quantitatis quadratorum eiusdem naturæ, cùm ex eorum lateribus longitudine tantùm incommensurabilibus continetur rectangulum: cùm enim cõparatur latitudo longitudini cuiusdam rectanguli incõmensurabilis, tũc mutatur natura arearũ quas quidem possunt rectanguli latera. Nam potentia harum rectarũ hoc theoremate propositarum certa fuit, comparatione adinuicem facta. Sed quia longitudines earum commensuratione carũerunt, naturam ab eis comprehensæ areæ alterauerunt, à priori quidem certa, mediam efficientes. Hac eadem de causa videbimus (25 & 27 huius) binas medias, quæ quidem quadrata eiusdem naturæ possunt, tamen quia longitudine commensurabiles non sunt, ab eis comprehensum alienam areæ nanciscinaturam, nempe certam, aut equidem mediam, alterius naturæ ac omni potentia incommensurabilem. Illud enim ea de re nostro arbitrio fit, quod ipsius rectanguli alteram dimensionem (hoc est longitudinem) certa linea determinet, cui incidens indeterminata latitudo, binas quas exoptat quælibet area, dimensiones ita perturbat, vt sibi ad aream producendam seu exprimendam comparatæ, confusam & omni determinatione ac certitudine priuatam depromant magnitudinis quantitatem, secus si binæ illæ rectæ (certum potentes) licet propositæ certæ longitudine essent incommensurabiles. Inter se tamen longitudine commensurentur, hæc commensuratio longitudinis rectangulum concludens, sub binis dimensionibus, sibi commensuratis, naturam potentiæ linearum conseruat. Quam etenim altera earum proponit longitudinẽ, reliqua (sibi commensurabilis) eadem longitudinis natura

dilatat,

dilatat, & inde potentiam comprehensi, binis illis dimensionibus, compatibilibus ad naturam earum potentiæ reducunt, vt vidimus monito decimænonæ huius. Vt autem per numeros surdos medium exprimamus, binas certas lineas potentia tantùm commensurabiles sumamus, scilicet 3 & rad. 18, radices quippe numerorum rationem quam quadrati non habentium scilicet 9 & 18, horum medius erit (ex vigesimaseptimi) res huius 162, & proinde medius radicum eorundem, scilicet harum 3, & rei 18, erit rad. rad. 162, per vigesimæ secundæ sexti secundam partem. Sed 3 & rad. 18 (latera quadratorum 9 & 18) sunt certæ rectæ, potentia tantùm commensurabiles, sub eis itaque comprehensum (res scilicet 162 numeri) medium erit, illud igitur potens recta erit, res rei scilicet 162 numeri ex ductu ipsorum 9 & 18 facti. Quod si quidam argumentum inferrent, quo dicerent, ex certis potentia tantùm commensurabilibus comprehensum rectangulum, medium non esse, sed potius certum, hac specie. Esto proposita certa A, cui potentia tantùm commensurabiles existant B & C. Sint autem B & C longitudine inuicem commensurabiles: quoniam A est certa proposita, B erit certa potentia tantùm commensurabilis, similiter & C: quare B & C dicentur rectæ potentia commensurabiles ipsi propositæ certæ, & nihilominus certum comprehendunt, vt patuit decimanona huius, cùm sint certæ longitudine inter se commensurabiles. Ad hæc dicemus potentiæ vel longitudinis commensurationem non esse linearum B & C denominationem, qua earum significatur natura, sed esse eius ad quam referuntur affinitatis expressionem, qua exprimitur habitudo ipsarum B & C. Diximus etenim antea, quamlibet earum pro varietate exempli propositam certam effici posse, super qua omnes aliæ incertæ generari possent. Non itaque potentiæ vel longitudinis commensuratio eas denominat, sed tantùm naturæ earum habitudinem. Quare cùm proponuntur binæ certæ longitudine commensurabiles, intelligamus commensurationem hanc inter eas non autem ad aliam referri. Similiter dicentes binas B & C potentia tantùm commensurabiles, intelligemus adinuicem, non autem ad aliam propositam, nisi exprimatur: quare ipsæ B & C non dicuntur absolutè potentia tantùm commensurabiles, sed & longitudine. Nam huic negocio nihil confert A proposita certa: commensuratio etenim (vt diximus) naturam linearum non denominat, sed naturæ habitudinem. Nulla igitur dici potest sola potentia vel longitudine commensurabilis: cùm hæc commensuratio ad aliquam aliam referatur. Hac de causa notandum est non posse dari tres certas potentia tantùm commensurabiles, & proportionales, licet possint dari tres eidem propositæ potentia tantùm commensurabiles, & proportionales. Sed cùm hæc commensuratio naturam linearum non exprimat, sed habitudinem; ea refertur ad linearum habitudinem: Quæ ideo inter se potentia tantùm commensurabiles non erunt, quia earum extremarum quadrata rationem haberent quam quadrati numeri. Nam suscipiunt medium proportionalem, & igitur similes plani sunt (per vigesimam noni) qui rationem habet quam quadrati, per vigesimamsextam eiusdem, & igitur latera habent longitudine commensurabilia, per nonam huius. Non igitur potentia tantùm essent commensurabiles, sed & longitudine.

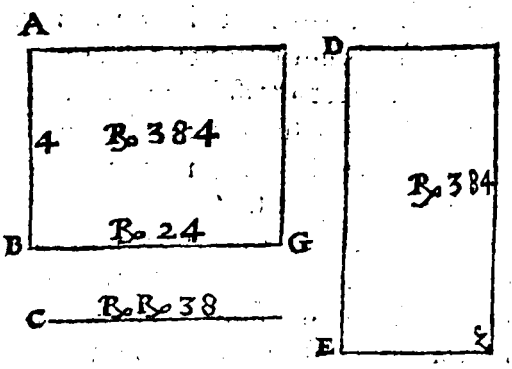




PROPOSITIO XXII.

Quod à Media, ad Certam applicatum, latitudinem efficit certam,

certam, ei verò ad quam applicatur longitudine incommensurabilem.



Sit propoſita certa A B recta, media verò eſto C quæ poſſit rectangulum D E Z, ſub certis potentia tantùm commẽſurabilibus D E E Z (per vigeſimam primam huius) comprehenſum. Ad datam verò rectam A B dato rectilineo D Z æquale rectangulum conſtituatur A G (per 45 primi) latitudinem efficiens B G: Dico rectam B G certam eſſe, longitudine quidem ipſi A B certæ incommenſurabilem. Quoniam æqualia & æquiangula conſtructa ſunt A G & D Z, erit (per decimamquartam ſexti) ſicut A B ad D E ſic E Z ad B G reciprocè. Quare (per vigeſimamſecundam eiuſdem) erit quod ex A B ad quadratum ex D E, ſicut quod ex E Z ad quadratum ex B G. Commenſurabile eſt quod ex A B quadrato ex D E, cùm A B & D E ſint poſitæ certæ: commenſurabile itaque erit quod ex E Z ei quod ex B G. Certum igitur erit quod ex B G, per nonam diffinitionem cùm certa poſita ſit E Z, quare & certa erit B G, per ſextam diffinitionem. Cæterùm quia medium eſt A G, nempe æquale poſitum ipſi D Z quod poteſt ç media, quod ex A B verò eſt certum, per octauam diffinitionem huius. Sed per lemma præfatum, eſt ſicut A B prima ad B G ſecundam, ſic quod ex A B certum ad quod ſub duabus A B B G medium, incommenſurabilis erit B G ipſi A B longitudine: nam medium A G incertum certo ex A B incommenſurabile eſt. Recta igitur B G (potens certum) certa dicetur, & longitudine ipſi A B certæ incommenſurabilis oſtenſa. Quod itaque à media ad certam applicatum latitudinem, &c.

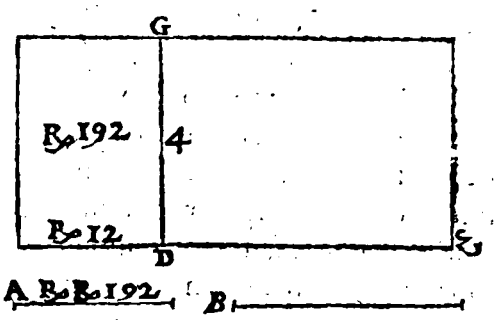
MONITVM.

Hæc præcedentis fuit ferè conuerſa: nam prior ſub longitudine & latitudine certarum potentia tantùm commenſurabilium, mediam ſuperficiem concluſit, hæc autem ait, mediam ſuperficiem vnum latus rectanguli certa vallatum linea habentem, neceſſariò reliquam ſcilicet latitudinem certam efficere, & (vt priori vigeſimaprima dixit) potentia tantùm ipſi certæ (vnum latus continenti) commenſurabilem. Patet itaque mediam ſuperficiem contineri ſub lateribus binis quadratorum non habentium rationem quam quadrati numeri, ſed tantùm numerorum rationem, quorum aliquando vnus eſt quadratus, quandoque verò neuter, vt in numeris, cùm ſub radice numeri quadrati & radice ſurda non quadrati continetur rectangulum, vel cùm ſub duabus ſurdis, quarum quadrati rationem quadratorum non habent: tunc verò quæ eam ſuperficiem poteſt, radix ſurda radicis ſurdæ dicetur, vt patuit præcedenti monito.

PROPOSITIO XXIII.

Quæ Mediæ commenſurabilis, Media eſt.

Eſto A recta media, ipſi verò commenſurabilis exiſtat B recta: Dico rectam B mediam eſſe. Exponatur certa D G, cui applicetur æquum ei quod ex A (per 45 primi) & æquum ei quod ex B, ſintq; G E & G Z. Quoniam enim certa eſt G D cui applicatur



plicatur quod à media ſcilicet G E, latitudo D E (per vigeſimamſecundam huius) certa erit, potentia tantùm ipſi G D commenſurabilis. Cùm autem A & B ſint commenſurabiles (ex hypotheſi) longitudine vel potentia, rectangula G E & G Z (quæ ex ipſis A & B) commenſurabilia erunt, per illationem nonæ huius. Sed ſicut G E ad G Z ſic eſt (per primam ſexti) D E ad D Z. Commenſurabilis igitur erit D E ipſi D Z (per decimamtertiam huius) & ideo D Z certa (per ſextam diffinitionem huius.) Binarum autem D E & D Z altera D E alicui G D longitudine fuit incommenſurabilis, & reliqua D Z eidem G D longitudine incommenſurabilis erit, per ſecundum corollarium decimæ huius. Certæ enim fuerunt ipſæ G D & D Z longitudine incommenſurabiles. Ipſæ itaque D Z & G D potentia tantùm commenſurabiles erunt, cùm ſint certæ, per conuerſam ſexti diffinit. Sub ipſis igitur G D & D Z comprehenſum G Z medium erit, per 21 huius, & illud potens B media. Quæ itaque mediæ commenſurabilis media eſt ſiue longitudine, ſiue potentia commenſurentur.

COROLLARIVM.

Mediæ areæ commenſurabilis area, media eſt.

Si etenim ponatur medium eſſe G E, aliud verò quoddam ipſi commenſurabile fuerit, coaptetur illud ad rectam G D, ſitq; G Z, quia ſanè G E, G Z ſunt commenſurabilia, & (ex prima ſexti) rectæ D E & D Z eandem rationem habentes commenſurabiles erunt, ex decimatertia huius, & igitur certæ. Quarum quidem altera D E alicui D G longitudine incommenſurabilis fuit, & reliqua D Z eidem G D longitudine incommenſurabilis erit. Potentia itaque tantùm erunt, ipſæ G D D Z commenſurabiles, & certæ. Medium itaque erit G Z (per prius oſtenſa) medio G E commenſurabile poſitum. Sequitur inſuper id quod in genere protulit Euclides de lineis (coroll. 9 huius) ſequi in mediis, ſcilicet quæ mediæ longitudine commenſurabilis eſt, & potentia eidem comenſurabilis erit, quæ verò potentia non ideo longitudine. Quæ autem potentia incommenſurabilis, ſemper ideo & longitudine, quæ autem longitudine, non ideo & potentia ſemper.

MONITVM.

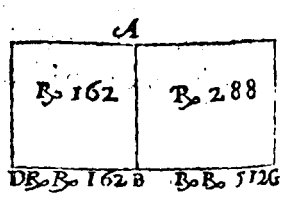
Quia diximus certas, certis commenſurabiles eſſe, ac conuerſim certis commenſurabiles, certas eſſe: Non ſequemur hanc legem in mediis, ſcilicet quia diximus mediis rectis commenſurabiles, medias eſſe, non inde colligemus quaſlibet medias, mediis aliis commenſurabiles eſſe, & ne quidem longitudine tantùm differre, ſed & potentia. Quod autem longitudine differant mediæ, teſtantur vigeſimaquinta, vigeſimaſeptima, vigeſimaoctaua, & aliæ quamplures huius, cum ſcilicet inſtar certarum ipſæ potentia tantùm commenſurabiles, alienam à ſuis potentiis continent potentiam. Quod autem mediæ potentia differant, ſiue incommenſurabiles exiſtant, docet trigeſimaquinta huius, producens duas areas medias incommenſurabiles, quare & rectæ potentes eas areas, quæ quidem mediæ ſunt (per vigeſimamprimam huius) potentia incommenſurabiles exiſtunt, & à fortiori argumento longitudine, per corollarium nonæ huius. Concludemus igitur plura media licet à binis certis comprehenſa, inuicem incommenſurabilia eſſe, quemadmodum & plures areas à binis mediis comprehenſas (potentia tantùm commen-

ſurabilibus incõmenſurabiles adinuicẽ eſſe, ſcilicet alias certas, alias alterius generis mediarũ, vt dicent vigeſimaſeptima & vigeſimaoctaua. Huius autem differẽtiæ cauſa fuit quòd certas ſub vnica ſpecie cõmenſurabilium arearum coegerit Euclides, medias verò denominans plura mediarum ſubintelligit contineri genera ſibi incõmenſurabilia, vt patebit 115 huius: hac itaque de cauſa lineæ, quæ mediæ ſunt, non ideo erunt ſemper mediæ lineæ commenſurabiles. Mediarum itaque intelligentiam hac arte à numeris ſumemus, vt medias areas per radices non quadratorum numerorum exprimamus, mediarum verò potentiarum longitudines, per radices radicum non quadratorum. Mediæ autem commenſurabiles exprimentur per radices radicum numerorum ſimilium planorum, non tamen quadratorum, ſed habentium rationem quam quadrati quadratorum. Nam horum numerorum radices, ac radices radicum, rationem ſeruant vt numeri, nempe ſi quadrata proportionalia fuerint, latera proportionalia erunt, ex vigeſima ſecunda ſexti: incommenſurabiles verò potentia, ſunt radices radicum non habentium rationem quam quadrati numeri. Nam eorum radices ſunt potentiæ mediarum, quæ ſunt incommenſurabiles, per nonam decimi. Mediæ verò potentia tantùm commenſurabiles, ſunt radices radicum numerorum habentium rationem, quam ſimplices quadrati, non autem quadrati quadratorum. Nam radices (quæ ſunt potentiæ mediarum) ſunt commenſurabiles: ſed radices radicum incommenſurabiles exiſtunt, quæ mediarum denotant longitudinem. Quare infinitæ mediæ potentia incommenſurabiles reperientur, per conferentiam infinitorum numerorum diſſimilium planorum ad ſeinuicem factam; nam diſſimiles plani rationem quadratorum non habentes (ex corollario nonæ decimi) efficiunt eorum radices mediarum areas deſignantes incommenſurabiles, ex nona decimi. Et idcirco medias longitudine ſimul incommenſurabiles totidem: nam quæ potentia incommenſurabiles fuerunt, longitudine incommenſurabiles erunt, ex illatione nonæ decimi.

PROPOSITIO XXIIII.

Sub Mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis comprehenſum rectangulum, Medium eſt.

Sub mediis A B & B G longitudine commenſurabilibus rectis contineatur rectangulum A G: Dico A G medium eſſe: fiat ex A B quadratum A D, per 46 primi, quod medium eſt, nempe ex media A B: Quia verò D B, æqualis ipſi A B, eſt longitudine commenſurabilis ipſi B G. Eſt autem D A ad A G, vt D B ad B G, ex prima ſexti, commenſurabile erit A G (per decimamtertiam huius) ipſi D A medio: quare igitur & A G medium erit, per corollariũ præfatum. Sub mediis itaque longitudine, &c.



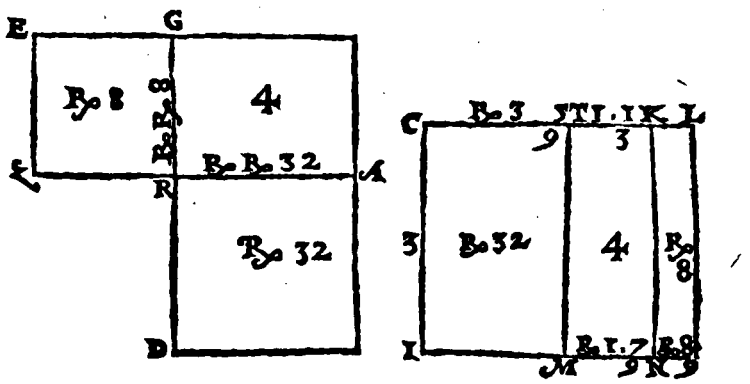
PROPOSITIO XXV.

Sub Mediis potentia tantùm commenſurabilibus rectis lineis comprehenſum rectãgulum, aut Certum, aut Medium eſt.

Contineatur rectangulum A G ſub mediis A B B G potentia tantùm commenſurabilibus: Dico A G rectangulum aut certum, aut medium eſſe, fiant (per 46 primi) ex A B quadratum A D, & ex B G ipſum B G E Z, quæ à mediis deſcripta media erunt. Proponatur certa C I, ad quam dato A D æquale, conſtituatur C I T M, ad rectam verò T M ipſi A G æquum T M K N, ad rectam verò K N ipſi E B æquum N L,

per 45

per 45 primi, quoniam æquales ſunt DB BG ipſis AB BZ, erit DB ad BG vt AB ad BZ,& proinde (ex prima ſexti) AD ad AG vt AG ad GZ. Quare & ſicut I T ad M K, ſic e ti M K ad N L, ſunt enim æqualia ipſis AD, AG,& G Z: ſed media ſunt AD & G Z: media igitur erunt I T & N L, quæ ad certam C I applicata latitudines C T & K L certas efficiunt, per vigeſimam ſecundam huius, longitudine quidem incommenſurabiles ipſi C I. Certæ igitur ſunt C T & K L, potentia tãtùm commenſurabiles ipſi C I propoſitæ, cùm autem ſit (per primam ſexti) C T ad K L vt I T ad N L, ipſa verò I T & N L æqualia ipſis A D & G Z ſint commenſurabilia poſita. Commenſurabiles erunt rectæ C T & L K longitudine, per decimamtertiam huius. Quod igitur ſub binis C T K L certum erit, per decimamnonã huius: Cæterùm quia proportionalia oſtenſa ſunt, I T, M K, N L, proportionales erunt, ex prima ſexti, C T, T K, K L. Quod itaque ſub extremis C T & K L, æquum erit ei quod à media T K, per decimamſeptimam ſexti: quod autem ſub C T K L certum fuit: quod itaque ab ipſa T K, certum erit. Certa igitur erit (per octauam huius diffinitionem) recta T K, quæ ipſi C I propoſitæ (hoc eſt ipſi T M) longitudine, aut potentia tantùm commenſurabilis eſt: ſiquidem longitudine, certum erit M K ſub ipſis M T T K comprehenſum: per 19 huius. Si autem potentia tantùm medium erit ipſum M K, per 21 huius. Medium itaque aut certum erit M K: quare A G ipſi M K æquale poſitum aut certum, aut medium erit. Sub mediis igitur potentia tantùm, &c.



COROLLARIVM.

Hinc aſſequimur, quod ſub duabus rectis, medium eſſe inter earum quadrata.

Vt patuit ex prima ſexti, quod ſub AB BG medium fuiſſe inter AD & G Z.

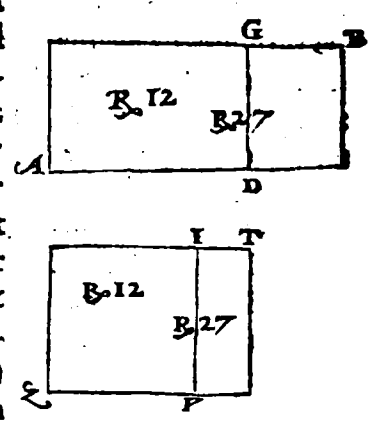
MONITVM.

Adnotat Campanus quæ dixit Euclidis theorema vigeſimumquartum, Ac inſuper, ſi binæ Mediæ propoſitæ AB BG potentia incommenſurabiles exiſterent, ſub ipſis comprehenſum, nec certum, nec equidem medium eſſet: nam contineretur ſub certa & media, hac methodo. Nam I T N L incommenſurabilia efficerent rectas C T K L longitudine incommenſurabiles (per primam ſexti) certas tamen cum Media ſint, I T N L, per 22 huius: quare ſub C T & K L comprehenſum medium eſſet, per vigeſimamprimam huius, ac ideo quod ex T K medium (per decimam ſeptimam ſexti) æquum comprehenſo ſub C T K L. Media igitur eſſet T K, & proinde M K contineretur ſub Media T K & certa C I, vel T M. Quod quidem M K æquum eſt ei quod ſub binis AB BG: non igitur medium eſſet, nec quidem certum, ſed alia quantitatis ſpecies.

PROPOSITIO XXVI.

Medium non excedit Medium Certo.

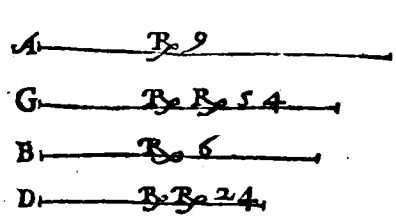
Esto medium A B, quod excedat ablatum medium A G rectangulo D B: Dico D B non esse certum. Quòd si opponatur, sit (si fieri possit) certum D B. Exponatur autem certa E Z, cui applicentur æqualia ipsis A G A B, quæ sunt Z I Z T, per 45 primi. Ipsa igitur Z I Z T media erunt. Cùm autem ab æqualibus A B & Z T æqualia auferantur A G & Z I, reliqua D B & K T erunt æqualia. Sed certum supponitur D B, certum igitur erit & K T. Quia verò media sunt Z I Z T, ipsis A G & A B æqualia, certæ potentia tantùm commensurabiles (ipsi E Z propositæ) erunt E I & E T (per 22 huius) rectæ. Et quia certum ponitur K T, illud ad certam E Z (vel I K) applicatum, latitudinem I T rectam certam efficit, longitudine quidem ipsi E Z propositæ commensurabilem, per vigesimam huius. Et cùm duarum E I I T alia sit ipsi E Z commensurabilis, scilicet I T, alia verò non, ipsæ E I I T incommensurabiles erunt longitudine, per corollarium primum decimæ huius. Sed sicut E I ad I T sic est quod ex E I ad quod sub E I I T, per lemma 21 huius: incommensurabile igitur erit quod ex E I ipsi quod sub E I I T, & ipsi quod bis sub E I I T, per corollarium secundum decimæ huius. Et similiter quod bis sub E I I T ipsis quæ ex E I & ex I T, quæ sunt potentia commensurabiles certæ, incommensurabile erit, per idem corollarium. Cùm autem quæ ex E I & I T cum eo quod bis sub E I I T componant (per quartam secundi) quadratum totius E T, incommensurabilia autem sint adinuicem componentia, totum igitur vtrique incommensurabile (ex duodecima huius) erit, scilicet eis quæ ex E I I T certis: incertum itaque (per nonam diffinitionem huius) erit totum ex E T. Quare & recta B T incerta per vndecimam diffinitionem huius erit. Sed & certa potentia, namque ipsi propositæ E Z commensurabilis ostensa est, quod fieri non potest. Non igitur certum esse potest D B quo A B medium excedit A G medium. Medium itaque non excedit medium certo.



PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA 5.

Medias inuenire potentia tantùm commensurabiles Certum comprehendentes.

Proponantur binæ rectæ certæ potentia tantùm commensurabiles A & B. Quibus (per decimamtertiam sexti) media proportionalis inueniatur G, fiátque (per duodecimam sexti) vt A ad B sic G ad D. Quoniam certæ potentia tantùm commensurabiles sunt A & B, media erit G, per demonstrata 21 huius. Quia verò A & B sunt potentia tantùm commensurabiles, ipsæ G & D (eandem rationem habentes) potentia tantùm commensurabiles erunt, per decimamtertiam huius. Media itaque erit D, per 23 huius. Et cùm sit A ad B vt G ad D, erit vicissim A ad G vt B ad D. Sed sicut A ad G sic fuit G ad B, sicut igitur G ad B sic B ad D, per vndecimam quinti. Quod itaque sub G & D æquum est ei quod ex B fit, per decimamseptimam sexti. Atqui certum est quod ex B certa fit. Certum igitur erit quod sub G & D, quæ quidem mediæ potentia tantùm commensurabiles ostensæ sunt. Medias igitur inuenimus potentia tantùm commensurabiles certum comprehendentes.

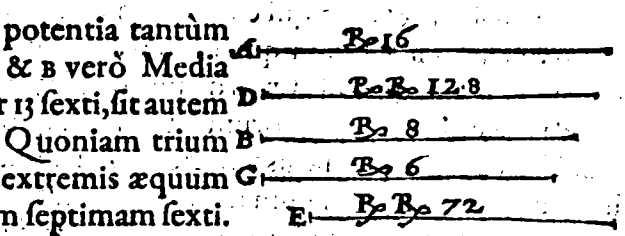


PROPO

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA 6.

Medias inuenire potentia tantùm commensurabiles Medium comprehendentes.

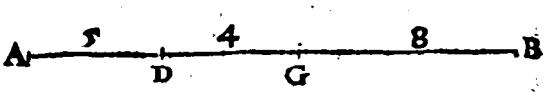
Exponantur tres rectæ certæ potentia tantùm commensurabiles A B G. Inter A & B verò Media constituatur D proportionalis, per 13 sexti, sit autem vt B ad G sic (per 12 sexti) D ad E. Quoniam trium A D B proportionaliũ quod sub A B extremis æquum est ei quod à media D, per decimam septimam sexti. Medium autem est sub ipsis A & B certis potentia tantùm commensurabilibus, per 21 huius: medium igitur erit quod ex D, & (per eandem) D Media erit. Et quia sicut B ad G sic fuit D ad E. Atqui B & G certæ, sunt potentia tantùm commensurabiles, & igitur D & E potentia commensurabiles erunt. Media autem fuit D, Media itaque erit & E, per 23 huius. Cùm enim sit B ad G vt D ad E: erit vicissim B ad D vt G ad E. Sed vt B ad D, sic est D ad A, per corollarium quartæ quinti. Sicut itaque D ad A sic G ad E. Quod itaque sub extremis D & E æquum est ei quod sub mediis A & G, per decimamsextam sexti. Quod autem sub A & G certis potentiæ tantùm commensurabilibus, Medium est, per 21 huius. Quod itaque sub D E mediis potentia tantùm commensurabilibus ostensis, medium erit. Medias itaque inuenimus, &c.



LEMMA.

Comperire duos quadratos numeros, qui coniuncti quadratum numerum efficiant.

Sint bini numeri similes plani, simul pares aut simul impares A B & B G. Quoniam si à toto A B pari auferatur B G par, reliquus par erit A G, per 25 noni: similiter imparibus propositis si ab impari impar tollatur, reliquus par erit, per 27 noni. Secetur itaque bifariam reliquus ille A G in D, erit qui sub toto A B & B G adiuncto vnà cum quadrato D G, æqualis quadrato D B, per sextam secundi. Sed cùm A B & B G sint similes plani, qui sub eis quadratus erit, per primam noni, qui verò ex D G quadratus est. Inuenti itaque sunt duo numeri quadrati, scilicet æqualis ei qui sub A B & B G cum eo qui ex D G, quadratum qui ex D B componentes coniuncti.



COROLLARIVM.

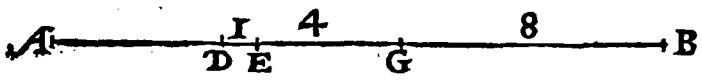
Inuenire duos quadratos numeros se quadrato excedentes.

Nam positis A B & B G similibus planis, inuenimus duos quadratos numeros, scilicet qui ex B D & eum qui ex D G, quorum excessus (is scilicet qui sub A B B G) quadratus est. Quòd si similes plani non fuerint ipsi A B & B G, excessus duorum quadratorum ex B D & D G, scilicet qui sub A B B G, quadratus non erit. Nam si quadratus esset, ipsi A B & B G similes essent plani, per secundam noni, contra hypothesim.

LEMMA II.

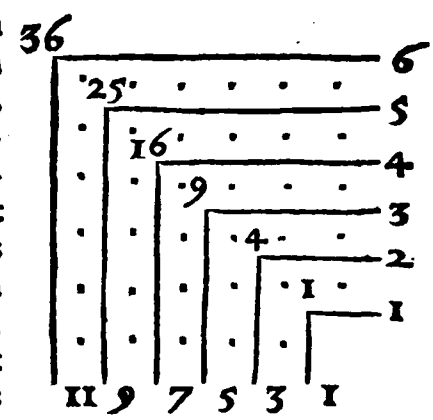
Comperire duos numeros quadratos, compositum non quadratum efficientes.

Diſponamus vt prius numeros A B & B G ſecto bifariam A G in D. Auferatur inſuper ab ipſo D G vnitas D E:Dico duos quadratos, ſcilicet eũ qui ſub A B B G ſimilibus planis,& eum qui ex G E non componere quadratum numerum. Quoniam qui ſub A B B G cum quadrato D G æquus eſt quadrato D B,vt oſtendimus:Sequetur eundem qui ſub A B B G cum quadrato G E, minorem eſſe quadrato D B, gnomone quidem numerorum lateralium quo quadratus G D excedit quadratum G E. Cùm autem quadratus B D excedat quadratũ B E alio & maiori gnomone ſcilicet numerorum lateralium maioris quadrati B D quo excedit quadratum B E:Sequetur quadratum B D plus excedere quadratum B E, quàm eum qui ſub A B B G cum quadrato G E. Maior itaque erit qui ſub A B B G cum quadrato G E, quadrato B E. Minor autem quadrato B D,inter quos B D & B E non cadit latus quadrati,cùm ſola vnitate diſtent. Qui igitur ſub A B B G ſimilibus planis quadratus, cum quadrato alio G E,æquantur non quadrato numero qui inter quadratos B D & B E vnitate diſtantes reperitur, non igitur componunt quadratum numerum ipſi qui ſub A B B G & qui ex B E,quadrati.



MONITVM.

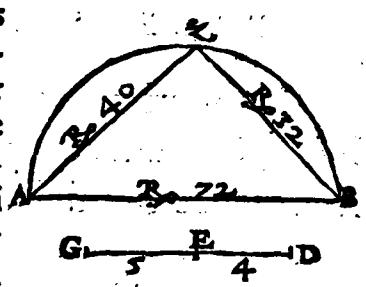
Animaduertendum curauimus quadratorum numerorum ſeriem, ex imparium ſerie ortam eſſe. Soli nempe impares ab vnitate coniuncti, quadratos efficiunt,ac quotlibet coniuncti:doceamus exemplo: Sumatur vnitas quadratum referens(ea etenim quibuslibet ſubiectis adaptatur,vt prima ſeptimi diffinitione diximus)cui proximus addatur impar, qui quidem bina eius latera cum anguli complemento reſtituat, is erit ternarius, qui vnitati additus 4 producit, binarij ſcilicet quadratum.Illi item conſequens impar quinarius addatur,is proferet nouem, ſcilicet ternarij quadratum,cui additus quartus impar 7 facit 16 quaternarij quippe quadratum,eidem porrò iungatur 9 fiet 25 quinarij quadratum. Rurſus ipſi copuletur ſequens impar 11 fiet 36 ſenarij quadratum:ſicq; infinitè ad quotuis procedemus quadratos, cùm ſcilicet cuilibet quadrato additur gnomon,æquipollens duplicatæ radici, ac inſuper vnitati quæ angulum gnomonis compleat, qui quidem gnomones ſinguli impares numeri ſunt, eò quòd ſeſe excedant tantùm binario, vel quia bina quadrati æqualia latera augentur vnitate. Quare ſi eorum quadratorũ vnitate tantùm augeantur latera, perſpicuum eſt, ea ſerie omnes contineri quadratos, cùm nullus ſit quadratus numerus niſi is cuius latus vnitatibus integris referri poteſt, in ſe multiplicatis ipſum producentibus. Nullius itaque quadrati latus inter duas vnitates cadet,& proinde inter eos cadentium,nullus quadratus erit ab ipſis alius, quorum infiniti rationem non habentes quam quadrati,variis modis educi poſſunt,ſcilicet ſumpto quadrato ad non quadratum,per corollarium vigeſimæquintæ octaui, aliis in ratione ſuperparticulari, ac ſuperbipartiente,per corollarium octauæ octaui.Et demum omnibus diſſimilibus planis,per corollarium nonæ huius: qui quidem infiniti ſunt numero ſcilicet primi, per corollarium vigeſimæſextæ octaui, qui ſunt infiniti, per vigeſimamprimam noni, nempe plures omni multitudine, ac alij diſſimiles plani innumerabiles. Quod apponit autem græcum lemma huic,c orollarium fuit ſextæ huius.



PROPO

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA 7.

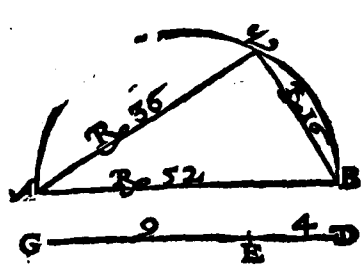
Comperire binas Certas potentia tantùm commensurabiles, quarum maior plus possit minore, eo quod ex commensurabili sibi longitudine.



Sumatur ex secundâ parte corollarij primi lemmatis vigesimæ octauæ huius, quadratus numerus G D, excedens quadratum D E non quadrato E G, fiátque (per corollarium sextæ huius) sicut G D ad G E numeri, sic quod ex A B proposita ad id quod ex A Z: descripto namque super A B semicirculo, cui (per primam quarti) ipsi A Z æqualis coaptetur, coniuncta Z B: Dico A B & A Z certas esse potentia tantùm commensurabiles, quarum maior A B plus potest minore A Z, eo quod ex Z B ipsi A B longitudine incommensurabili: Quoniam quadratum A B excedit quod ex A Z, eo quod ex Z B, per 47 primi, numerus verò G D excedit numerum G E ipso E D, per hypothesim. Est autem quod ex A B ad quod ex A Z sicut G D ad G E. Erit igitur rationis conuersione (per corollarium decimæ nonæ quinti, quod ex A B ad quadratũ Z B excessum, sicut G D ad excessum E D: quia verò quadrata rectarum A B A Z rationem non habent quam quadrati, scilicet ipsorum G D G E, ipsæ A B A Z longitudine sunt incommensurabiles: & ideo potentia tantùm commensurabiles, cùm A B sit proposita per nonam huius. Cùm autem quadratum A B ad quod ex Z B rationem habeat quam quadrati numeri G D E D, Ipsæ A B & Z B longitudine commensurabiles existunt, per eandem. Comperimus itaque binas rectas certas A B A Z potentia tantùm commensurabiles, quarum maior A B plus potest minore A Z, eo quod ex Z B sibi longitudine commensurabili.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA 8.

Comperire binas Certas potentia tantùm commensurabiles, quarum maior plus potest minore eo quod fit ex sibi longitudine incommensurabili.



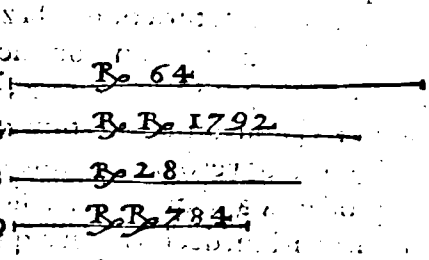
Exponatur certa A B, ac (per secundum lemma 28 huius) comperiantur duo quadrati numeri G E E D non quadratum G D componentes: fiat autem sicut G D ad G E, sic quod ex A B ad quod ex A Z, per corollarium sextæ huius. Descripto rursus super A B semicirculo, ipsi A Z æqualis coaptetur, coniuncta Z B. Cùm enim sit G D ad G E, vt quod ex A B ad quod ex A Z, erit (vt in præfata ostendimus) quod ex A B ad excessum ex Z B vt G D ad excessum E D, per corollariũ decimæ nonæ quinti: sed G D ad vtrosque G E & E D, rationem habet quam non quadratus ad quadratum, per hypothesim. Igitur quod ex A B ad quod ex A Z seu ex Z B, rationem habet quam non quadratus ad quadratum. Ipsæ igitur A Z Z B ipsi A B potentia tantùm sunt commensurabiles, per nonam huius, & certæ, cùm proposita fuerit A B certa. Comperimus itaque binas certas A B A Z potentia tantùm commensurabiles, quarum maior A B plus potest minore A Z, eo quod ex Z B ipsi A B longitudine incommensurabili.

MONITVM.

Hæc eadem fuit prioris demonstratio, transposita tantùm numerorum ratione, quæ eandem producat quadratorum ex lineis rationem, insuper lemma A Græco exemplari hîc appositum, sat superque lemmate vigesimæ primæ huius, aperuimus, scilicet sicut linea ad lineam, sic quod sub illis ad quadratum vltimæ.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA 9.

Comperire binas Medias potentia tantùm commensurabiles, Certum comprehendentes, quarum maior plus possit minore, eo quod fit à sibi longitudine commensurabili.



Sumantur (per 29 huius) binæ certæ potentia tantùm commensurabiles A B, quarum maior A plus possit minore B eo quod fit à sibi longitudine commensurabili. Ponatur autem (per decimamtertiam sexti) media proportionalis ipsis A & B, quæ sit G; fiatque sicut A ad B sic G ad D, per duodecimam sexti: Dico G & D esse medias potentia tantùm commensurabiles, certum comprehendentes, ipsamq; G plus posse minore D, eo quod fit à sibi commensurabili longitudine. Quoniam G recta est media ipsarum A & B certarũ potentia tantùm commensurabilium, Quadratum rectæ G æquum est (per decimamseptimam sexti) ei quod sub extremis A & B: quod sub A & B verò, medium est, atque G recta illud potens media est, per 21 huius. Quia insuper est A ad B vt G ad D. Sed A ipsi B potentia est commensurabilis tantùm, & G ipsi D potentia tantùm, per 13 huius, commensurabilis erit. Media autem est G, media igitur erit & D, per vigesimamtertiam huius. Cùm præterea A plus possit ipsa B eo quod à sibi longitudine commensurabili, & G plus potest ipsa D, eo quod à sibi longitudine commensurabili, per 16 huius. Cæterùm positum est A esse ad B vt G ad D: erit itaque vicissim A ad G vt B ad D, per 16 quinti. Sed vt A ad G sic G ad B fuit, vt igitur G ad B sic erit B ad D. Quare trium G B D proportionalium quod à media B, æquum est ei quod sub extremis G & D rectangulo, per 17 sexti. Sed quod à media B certum est, per octauam diffinitionem huius, cùm B sit certa. Quod igitur sub G & D certum erit. Comperimus itaque binas medias G & D potentia tantùm commensurabiles, certum comprehendentes, quarum maior G plus potest minore D eo quod fit à sibi longitudine commensurabili.

COROLLARIVM.

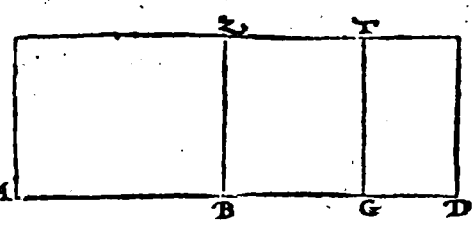
Eodem argumento patebit dari binas Medias potentia tantùm commensurabiles, Certum continentes: & quarum maior plus poterit minore eo quod fit à sibi longitudine incommensurabili.

Si ponamus (per trigesimam huius) certam A plus posse certa B quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Nam id idem sequentur G & D mediæ, vt ostendimus.

LEMMA.

Si tres rectæ in quauis ratione fuerint, erit sicut prima ad tertiam, sic

ſic quod ſub prima & ſecunda, ad id quod ſub ſecunda & tertia continetur.



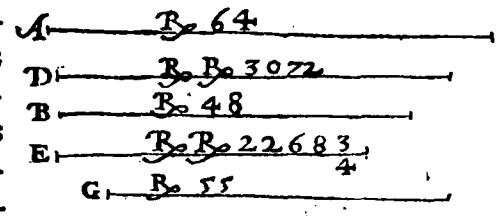
Sint tres rectæ in quauis ratione A B B G & G D. Et ex B G media fiat (per 46 primi) quadratum B Z T G, perficiantúrque rectangula A Z & D T. Quoniam (per primam ſexti) rectangula A Z B T & T D ſunt in rationibus rectarum A B B G & G D, erit æqua ratione A Z ad T D vt A B ad G D, per 22 quinti. Sed A Z continetur ſub prima A B & ſecunda B G, cum ſit illi B G æqualis Z B, quinetiam T D continetur ſub B G ſecunda & G D tertia, cùm T G ipſi B G ſit æqualis. Sicut igitur A B prima ad G D tertiam, ſic erit A Z ſub prima & ſecunda, ad T D quod ſub ſecunda & tertia.

MONITVM.

Hoc lemma ab altero Græcorum exemplarium tulimus, quod licet demonſtrandis ſubſequentibus neceſſarium non ſit, tamen demonſtrationum compendio admodum vtile comperietur.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA 10.

Inuenire duas Medias potentia tantùm commenſurabiles, Medium comprehendentes, quarum maior plus poſſit minore, eo quod fit ex ſibi commenſurabili longitudine.



Sint tres certæ potentia tantùm commenſurabiles A B G, & poſſit A plus ipſa G quadrato ſibi commenſurabilis longitudine, per vigeſimamnonam huius. Ipſis autem A & B media proportionalis (per decimamtertiam ſexti) exhibeatur D. Ad rectam autem D æquum rectangulum ei quod ſub B & G conſtituatur latitudinem efficiens E, per quadrageſimamquintam primi: Dico rectas D E medias eſſe, quales inquirimus. Cùm autem ſit (per lemma præcedens) ſicut A ad G, ſic quod ſub A B ad id quod ſub B & G: ſed ei quod ſub A B æquum eſt quod ex D media, ei verò quod ſub B G æquum eſt (ex hypotheſi) quod ſub D E, erit igitur ſicut A ad G, ſic quod ex D ad id quod ſub D E, ſed ſicut quod ex D ad id quod ſub D E, ſic (per lemma vigeſimæ primæ huius) fuit D ad E: ſicut igitur A ad G, ſic D ad E. Cùm autem D poſſit medium quod ſub A & B, per vigeſimam primam huius, ipſa D media erit: quia verò eſt A ad G vt D ad E, ſed A ipſi G potentia tantùm commenſuratur, & D ipſi E potentia tantùm commenſurabitur, per 13 huius, media itaque erit E per vigeſimamtertiam huius. Poteſt autem A plus ipſa G eo quod à ſibi longitudine commenſurabili, & D plus ipſa E poterit, eo quod à ſibi longitudine commenſurabili, per decimamſextam huius. Præterea quod ſub B G medium eſt, per vigeſimamprimam huius: quod itaque ſub D E æquum illi poſitum, medium erit. Inuenimus igitur duas medias D & E potentia tantùm commenſurabiles medium comprehendentes, quarum maior D plus poteſt minore E eo quod fit ex ſibi longitudine commenſurabili.

COROL

COROLLARIVM.

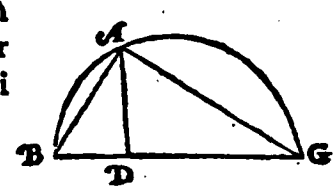
Haud secus harum Mediarum maiorem plus posse minore eo quod sit à sibi incommensurabili longitudine ostendemus.

Ponentes scilicet A plus posse ipsa G, eo quod sit à sibi longitudine incommensurabili, ex trigesima huius.

LEMMA I.

In triangulis rectangulis ab angulo recto in basim perpendiculari demissa quatuor rectangulorum eliciuntur æqualitates.

Esto triangulum rectangulum ABG, à recto autem eius angulo GAB, in basim BG perpendicularis agatur AD: Dico ab hac trianguli descriptione quatuor oriri rectangulorum æqualitates.



PRIMA.

Quod sub GB BD æquum est ei quod ex BA. Cùm enim per corollarium octauæ sexti latus BA, quod ad segmentum BD sit media inter totam GB & segmentum BD. Quod igitur sub extremis GB BD, æquum erit, per decimãseptimam eiusdem, ei quod à media AB.

SECVNDA.

Quod sub BG GD æquum est ei quod ex AG quadrato: eodem quo prius argumento, AG media inter BG GD proportionalis erit, quare (per decimamseptimam sexti) sub BG GD æquum erit ei quod ex AG fit.

TERTIA.

Quod sub BD DG æquum est ei quod ex AD. Nam per 13 sexti media est AD perpendicularis inter BD & DG basis segmenta, & proinde sub extremis BD DG æquum erit ei quod à media AD fiet quadrato.

QVARTA.

Quod sub BG AD æquum est ei quod sub GA AB. Cùm sint (per quartam sexti) proportionales BG ad GA, vt AB ad AD, erit (per decimamsextam sexti) quod sub extremis BG AD æquum ei quod sub mediis GA AB rectangulo: similiter sub AB GD æquum erit ei quod sub AD AG. Insuper quod sub GA, BD æquum erit ei quod sub AB, AD per eandem 16, cùm sint GA ad AD vt AB ad BD. Et quod sub GB & AD ei quod sub BA, AG. Et quod sub AG, AD, ei quod sub GD, BA. Ac demum quod sub GA, BD, ei quod sub AD, AB.

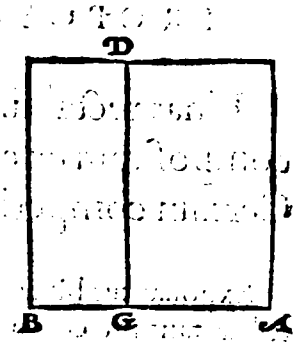
MONITVM.

Adnotauerat Theon quatuor rectangulorum æqualitates, ab hac trianguli rectanguli & perpendiculari demissa descriptione. Attamen vt fecundior exhibeatur methodus, quinque reliquas, quæ supererant, æqualitates contulimus, comparatione facta trium ABG, ADG, & ADB, triangulorum, sumptis binis quæ circum æquales angulos lateribus. Ac ad similis rationis latera reliqui trianguli collatis, comperi

comperimus ex 4 & 8 ſexti, nouem fieri æqualitatum collationes: Nempe tres circa tres cuiuſque trianguli angulos ſimiles, ad alterius trianguli ſimilis rationis angulos. Quia verò tria conueniant triangula, vt pote totum A B G & bina A D B, A D G, quæ ad perpendicularem, ſibi ſimilia ad inuicem, nouem incidunt rectangulorum æqualium collationes, quarum Theon quatuor, nos verò quinque deſcripſimus.

LEMMA II.

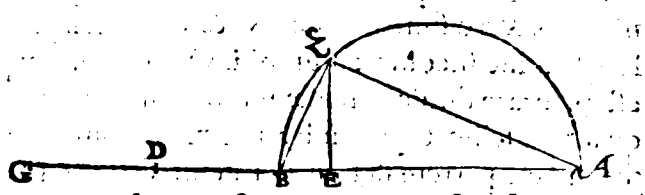
Si recta ſecetur inæqualiter, quod ſub tota & maiori ſectione, ad id quod ſub tota & minore, erit ſicut maior ad minorem.



Excitetur ipſi A B æqualis ad rectos D G, & perficiantur rectangula, A D D B, patet rectangulum A D, quod ſub tota A B (hoc eſt D G) & maiori A G, ad rectangulum D B ſub eádem tota D G & minori G B eſſe, vt A G maior ad G B minorem, per primam ſexti. Hoc lemma ab altero tantùm Græcorum exemplari datum eſt.

PROPOSITIO XXXIII. PROBL. 11.

Inuenire binas rectas potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarum certum, quod verò ſub ipſis Medium.



Sint binæ certæ potentia tantùm commenſurabiles A B B G, per decimamquartam huius, quarum maior A B plus poſſit minore B G eo quod à ſibi longitudine incommenſurabili, per 30 huius: ſuper A B autem fiat ſemicirculus, ſectáque G B bifariam in D ei quod ex D B æquum ad ipſam A B applicetur, deficiens ſpecie quadrata, per 28 ſexti, ſitq; quod ſub A E E B, Excitetúrque per E ipſi A B perpendicularis Z E, coniunctis Z B Z A, quoniam A B & B G ſunt inæquales, & maior A B plus poteſt minore B G eo quod à ſibi longitudine incommenſurabili. Quartæ autem parti eius quod ex minore B G (hoc eſt quadrato D B) æquum, ad maiorem A B applicatum eſt (quod ſcilicet ſub A E E B per hypotheſim) deficiens ſpecie quadrata: incommenſurabilis igitur eſt A E ipſi E B, per ſecundam partem decimæ octauæ huius. Eſt autem (per proximum lemma) A E ad E B, ſicut quod ſub A E A B ad id quod ſub E B A B tota, quod autem ſub A E A B æquum eſt (per primum lemma præcedentis) ei quod ex A Z. quod verò ſub A B E B æquum eſt (per idem lemma) ei quod ex B Z. Sicut igitur A E ad E B, ſic eſt quod ex A Z ad id quod ex B Z: incommenſurabilis autem eſt A E ipſi E B: Incommenſurabile igitur eſt quod ex A Z quadrato B Z, per decimamtertiam huius. Binæ igitur rectæ A Z B Z ſunt potentia incommenſurabiles, & efficiunt compoſitum ex earum quadratis certum, cùm ſit æquum ei quod ex A B certa, per 47 primi. Cùm autem (per conſtructionem) quod ex D B æquum ſit ei quod ſub A E E B, cui eidem æquum eſt (per primum lemma præcedentis) quod ex E Z, æquales erunt D B & E Z: Quod itaque ſub A B B D æquum eſt ei quod ſub A B E Z. Præterea cùm id quod ſub A B B G ſit Medium, per vigeſimamprimam huius, ſequetur eius dimidium, ſcilicet quod ſub eadem altitudine A B & dimidia baſi D B (per corollarium primæ ſexti) eſſe Medium, per coroll. 23 huius, cui quidem ſub A B B D Medio æquum oſtenſum

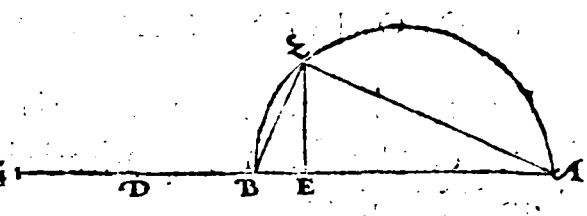
ſum eſt quod ſub A B E Z, ei verò quod ſub A B E Z æquum eſt quod ſub A Z B Z per primum præcedentis lemma. Medium itaque erit quod ſub A Z B Z. Inuenimus itaque binas rectas A Z B Z potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitum ex earum quadratis certum, quod verò ſub ipſis Medium.

MONITVM.

Ponitur hîc lemma ab altero Græcorum exemplarium, quod ſub corollario primæ ſexti comprehendimus: quare ſubticendum illud eſſe rati ſumus.

PROPOSITIO XXXIIII. PROBLEMA 12.

Binas rectas lineas potentia incommenſurabiles, efficientes compoſitum ex earum quadratis Medium, quod verò ſub ipſis Certum comperire.

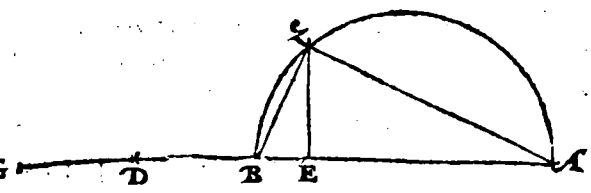


Exponantur binæ mediæ potentia tantùm commenſurabiles certum comprehendentes A B B G, per 27 huius, quarum maior plus poſſit minore, eo quod à ſibi G longitudine incõmenſurabili, per coroll. trigeſimæ primæ huius, & reliqua diſponantur vt in figura præcedentis, quoniam A B & B G ſunt inæquales, & maior A B plus poteſt minore B G eo quod à ſibi longitudine incommenſurabili. Quartæ autem parti eius quod à minore B G (hoc eſt quadrato dimidiæ D B) æquum, ad maiorem A B applicatum eſt, deficiens ſpecie quadrata, ſcilicet quod ſub A E E B. Incommenſurabilis igitur eſt A E ipſi E B, per ſecundam partem 18 huius. Et cùm ſit A E ad E B ſicut quod ex A Z ad id quod ex Z B, vt proxima demonſtratione oſtendimus, incommenſurabile erit quod ex A Z quadrato ex Z B, & itaque potentia incommenſurabiles erunt, rectæ A Z Z B, per decimamtertiam huius, efficiúntque compoſitum ex ipſarum quadratis medium, nam æquum ei quod ex A B (per 47 primi) quæ eſt media ex hypotheſi: cùm enim quod ex D B ſit æquum ei quod ſub A E E B, cui æquum eſt quod ex E Z, per 1 lemma 32 huius, rectæ D B & E Z ideo æquales erunt. Quod igitur ſub A B D B ei quod ſub A B E Z æquum erit: ipſi autẽ ſub A B E Z æquum eſt quod ſub A Z Z B, per primum lemma trigeſimæ ſecundæ huius. Quod itaque ſub A Z Z B æquum erit ei quod ſub A B & D B. Quod autem ſub A B D B dimidium eſt eius quod ſub A B B G, per coroll. primæ ſexti, quod eſt certum, ex hypotheſi, & igitur eius dimidium ſcilicet quod ſub A B D B certũ erit, & proinde ipſi æquale (quod ſub A Z Z B) certum erit. Binas itaque rectas A Z Z B potentia incommenſurabiles efficientes, &c. comperimus.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA 13.

Comperire binas rectas lineas potentia incommenſurabiles, efficientes compoſitum, ex earum quadratis Medium, & quod ſub ipſis Medium, incommenſurabile compoſito ex earum quadratis.

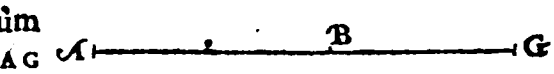
Sint



Sint (per coroll. 32 huius) binæ mediæ AB maior & BG minor, potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendentes, quarum maior plus possit minore, eo quod à sibi longitudine incommensurabili: reliqua verò ad figuræ descriptionem fiant iuxta duarum præcedentium tradita. Cùm autem ad maiorem AB applicatum sit, quod sub AE EB, æquum quartæ parti eius quod à minore GB, hoc est quadrato DB, deficiens specie quadrata, & maior plus possit minore eo quod à sibi longitudine incommensurabili, per constructionem, incommensurabilis erit AE ipsi EB, per secundam partem 18 huius. Quia autem ostendimus esse AE ad EB vt quod ex AZ ad quadratum ZB, incommensurabile erit quod ex AZ quadrato ex ZB, quare ipsæ AZ ZB potentia incommensurabiles erunt, ac efficient compositum ex earum quadratis (æquum quidem quadrato ipsius AB Mediæ per 47 primi) Medium. Cùm autem in præfatis ostensum sit sub AZ ZB æquum esse ei quod sub AB BD: quod autem sub AB BD Medium est, cùm sit dimidium eius quod sub AB BG, per coroll. primæ sexti, quod fuit Medium, ex hypothesi. Quod igitur sub AZ ZB (ipsi quod sub AB BD æquum) Medium erit. Præterea incommensurabile erit composito ex ipsarum AZ ZB quadratis. Nam cùm DB sit ipsius GB dimidia, incommensurabilis autem sit AB ipsi GB, sequetur (per coroll. secundum decimæ huius) & DB eidem AB incommensurabilem esse: sed sicut AB ad DB, sic quod ex AB ad id quod sub AB DB, per lemma 21 huius. Incommensurabile igitur erit quod ex AB ei quod sub AB DB: ei autem quod sub AB DB æquale ostensum est id quod sub AZ ZB: ei verò quod ex AB æquum fuit compositum ex earum AZ ZB quadratis, per 47 primi. Quod igitur sub AZ ZB incommensurabile erit composito ex earum AZ ZB quadratis. Comperimus itaque binas rectas AZ ZB potentia incommensurabiles efficientes, &c.

PROPOSITIO XXXVI.

Si binæ Certæ potentia tantùm commensurabiles compositæ fuerint, tota incerta est, vocetúrque Ex binis nominibus.

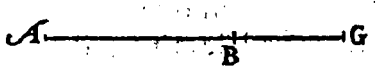


Sint binæ certæ potentia tantùm commensurabiles AB BG: Dico totã AG incertam esse, eámque vocari binomium, seu ex binis nominibus. Quoniam (per lemma vigesimæ primæ huius) est AB ad BG vt quod sub AB & BG ad quadratum BG: incommensurabilis autem est recta AB rectæ BG. Quòd igitur sub AB BG ei quod ex BG, incommensurabile erit, per 13 huius. Cùm autem commensurabilia sint quæ ex BG & ex AB, per hypothesim, Compositum ex ipsis, vtrique ipsarum commensurabile erit, per 11 huius. Et quia binarum, scilicet compositi & eius quod ex BG commensurabilium, altera (ex BG) alicui (quod scilicet sub AB BG) incommensurabilis fuit. Et reliqua (scilicet compositum ex earum quadratis) eidem quod sub ipsis contentum est, incommensurabilis erit, per corollarium secundum decimæ huius, & (per idem corollarium) quod bis sub ipsis AB BG eidem composito ex earum quadratis, incommensurabile erit. Sed quod bis sub ipsis vnà cum composito ex earundem AB BG quadratis, totum quod ex AG (per quartam secundi) componunt: Totum igitur ex AG vtrisque, scilicet composito ex AB & BG quadratis, & ei quod sub ipsis, incommensurabile erit, per duodecimam huius. Atqui compositũ ex quadratis AB BG certarum, certum est, per 8 & 9 diffinit. huius. Totum igitur ex AG ipsi composito incommensurabile incertum erit, per decimam

mam diffinitionem huius. Quare recta A G ipsum incertum potens, incerta erit, per vndecimam diffinitionem huius: vocatur autem ex binis nominibus eò quòd ex binis certis longitudine tamen incommensurabilibus componatur. Si itaque binæ certæ, &c.

PROPOSITIO XXXVII.

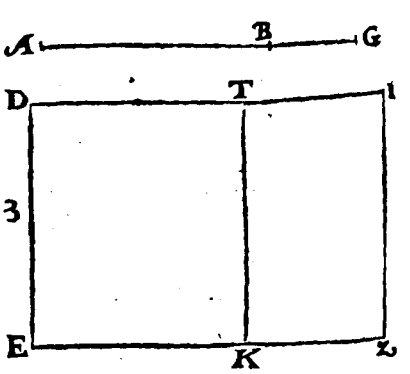
Si binæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles Certum comprehendentes componantur, tota incerta est, vocatur autem Ex binis mediis prima.



Sumantur binæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles A B B G certum comprehendentes: Dico totam A G compositam incertam esse. Eodem ferè quo præcedentis argumento. Quoniam incommensurabiles sunt A B B G, sequetur (vt proxima ostendimus) quadrata ex A B & B G incommensurabilia esse, rectangulo bis sub ipsis A B B G comprehenso, per lemma vigesimæ, & primum coroll. decimæ huius. Quia verò ea quadrata & rectangula composita totum quod ex A G faciunt, per quartam secundi, sequetur (ex 12 huius) totum ex A G vtrique (composito scilicet ex quadratis A B B G & rectangulo sub eis bis sumpto) esse incommensurabile. Sed bis sub A B B G sumptum certum est, ex hypothesi, nempe A B B G certum comprehendunt. Totum igitur ex A G (ipsi bis sumpto sub A B B G certo incommensurabile) incertum erit, ex decima diffinitione huius, & proinde tota A G illud potens incerta erit, per 11 diffinit. huius. Quæ quidem Ex binis mediis prima dicitur ea de causa, quòd binarum ex binis mediis genitarum, hæc ex mediis certum continentibus, prior feratur secunda, quæ ex mediis medium continentibus componetur. Quare hæc secunda, illa verò prima dicta fuit, cùm sit certum incerto præstantius. Si itaque binæ Mediæ potentia tantùm, &c.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si binæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles Medium comprehendentes componantur, Tota incerta est, vocatur autem Ex binis mediis secunda.

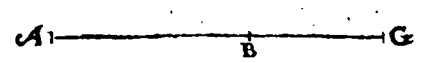


Copulentur binæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles Medium comprehendentes A B B G: Dico totam A G incertam esse. Quoniam longitudine incommẽsurabiles existunt A B B G, ex hypothesi, patet (vt proximis prioribus) quadrata ipsarum A B B G rectangulo bis sub ipsis contento incommẽsurabilia esse. Et quia quadrata illa cum rectangulis, totum ex A G componunt, per quartam secundi, patebit (ex duodecima huius) totum ex A G vtrisque esse incommensurabile, scilicet quadratis A B B G & binis sub A B B G rectangulis. Proponatur itaque certa D E, cui applicetur (per 45 primi) æquum quadratis A B B G, sitq; illud D E K T, & æquũ aliud rectangulo bis sub A B B G sumpto quod sit T K 2 1. Cùm autem E T rectangulum, æquum sit positum quadratis ex A B B G mediis potentia cõmensurabilibus, illud Mediũ erit per coroll. 23 huius. Quia verò K 1 æquum est rectangulo bis sub ipsis comprehenso, Medio quidem ex hypothesi,

pothesi,& illud K I medium erit,ex eodem. Sed quadrata & rectangula A B B G,totum ex A G faciunt,vt ostensum est.Rectãgulum igitur E I quadrato ex A G æquum erit.Cùm autem totum ex A G vtrisque (quadratis scilicet A B B G & rectangulo bis sub ipsis contento) incommensurabile ostensum sit,totum E I vtrisque E T K I incommensurabile erit. Quare E T E I inuicem incommensurabilia erunt. Et ideo (per primam sexti) rectæ D T T I D I longitudine incommensurabiles erunt. Sed media sunt E T K I, ad certam D E applicata, vt ostendimus: latitudines igitur D T T I certas (per 22 huius) efficiunt,longitudine tamen ipsi D E incommensurabiles. Potentia igitur tantùm commensurabiles. Tota itaque D I incerta erit, per trigesimamsextam huius. Et proinde rectangulum E I sub certa D E & incerta D I (per coroll. 21 huius) incertum erit. Quod quidem æquum ostensum est quadrato ex tota A G. Quadratum itaque ex A G incertum erit. Illúdque potens A G incerta erit, per vndecimam diffinitionem huius. Quæ quidem ex binis mediis secunda ideo dicitur, quòd ex mediis medium continentibus fiat. Postponenda verò ei primæ quæ ex mediis certum continentibus orta est,vt proxima diximus.Si itaque binæ Mediæ componantur, &c.

PROPOSITIO XXXIX.

Si binæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles compositæ fuerint, efficientes compositum ex quadratis quæ ab ipsis Certum, quod autem sub ipsis Medium, Tota recta linea incerta est,vocatur autem Maior.



Sumantur binæ rectæ potentia incommensurabiles, efficientes cõflatum ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis medium, per trigesimamtertiam huius, sintq; A B B G: Dico totam A G incertam esse, quæ quidem dicitur Maior. Quoniam incommensurabiles sunt A B B G longitudine, per vltimam partem corollarij nonæ huius, patebit (per demonstrata tribus proximis) id quod bis sub A B B G composito ex quadratis A B B G incommensurabile esse, ac (per quartam secundi) vtraque simul sumpta quadrato totius A G esse æqualia.Et ideo (per 12 huius)idem quadratum ex A G composito, ex quadratis A B B G esse incommensurabile. At compositum ex quadratis certum est, ex hypothesi. Incertum igitur erit ex A G quadratum, per decimam diffinitionem huius, & proinde illud potens recta A G incerta erit,per vndecimam diffinitionem huius. Vocatur autem Maior, eo quòd maior pars suæ potentiæ,ex quadratis A B B G certis componatur,quæ semper maiora sunt rectangulo bis sub A B B G sumpto: nam maiorem partem dimidia quadrati A G totius sibi sumunt, per coroll. septimæ secundi. Si itaque binæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c.

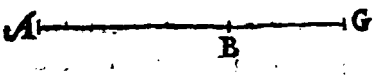
MONITVM.

Reliquimus demonstrationem,qua Theon ostendere conatur,quadrata ex A B B G maiora esse rectangulo bis sub A B B G contento,prolixè admodum.Nos enim illud satis supérque demonstrauimus corollario septimæ secundi, & ipsius A G quadrati (vtraque potentis) plus dimidio sumere quadrata ex A B B G: & hac de causa esse maiora.

PROPOSITIO XL.

Si binæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles compo-

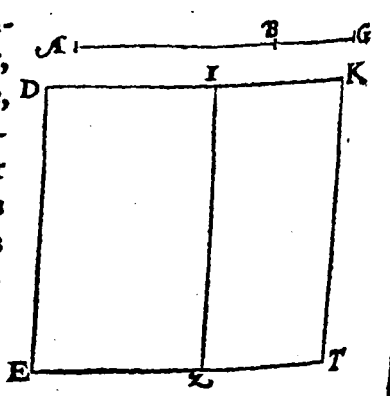
sitæ fuerint, efficientes conflatum ex earum quadratis Medium, quod verò sub ipsis Certum, Tota recta linea incerta est, vocatur autem Certum mediúmque potens.



Sumantur binæ rectæ potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum, per 34 huius, quæ sint A B B G: Dico totam A G incertam esse, eámque dici certum mediúmque potentem. Quoniam conflatum ex quadratis A B B G medium est, quod verò sub ipsis certum, ex hypothesi, incommensurabile erit idem conflatum, rectangulo sub ipsis bis sumpto. Et igitur totum, scilicet quod ex A G per quartam secundi, rectangulo sub A B B G sumpto, certo quidem, incommensurabile erit, per duodecimam huius. Quare idem totum incertum erit, ex decima diffinitione huius. Rectáque A G illud potens incerta erit, per vndecimam diffinitionem huius, vocatur autem ipsa A G Certum mediúmque potens, eò quòd eius potentia ex Certa & media componatur area. Si itaque binæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c.

PROPOSITIO XLI.

Si binæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles compósitę fuerint, efficiętes compositum ex earum quadratis Medium, quod verò sub ipsis Medium, & insuper incōmensurabile compósito ex earum quadratis, tota recta linea incerta est, vocatur autem Bina media potens.



Sumantur per 35 huius, binæ rectæ potentia incommensurabiles, &c. quales hypothesis optat, quæ sint A B B G: Dico totam A G incertam esse, quæ quidem dicitur Bina media potens. Proponatur Certa recta D E, cui (per 45 primi) constituatur æquum rectangulum compósito ex quadratis A B B G, quod sit E I, æquum verò rectangulo bis sub A B B G, quod sit Z K. Totum igitur E K æquum erit quadrato A G; per quartam secundi: quia verò incommensurabile est compósitum ex quadratis A B B G ei quod bis sub ipsis, ex hypothesi, Incommensurabile erit E I ipsi Z K, cùm sint incommensurabilibus æqualia: & ideò, per primam sexti, D I ipsi I K longitudine incommensurabilis erit. Quia verò media sunt quadrata & rectangula ex A B B G, media erunt E I Z K, ipsis æqualia, quæ ad Certam D E proiecta, latitudines D I & I K Certas faciunt, (per vigesimamsecundam huius): potentia itaque commensurabiles, longitudine autem incommēsurabiles ostensæ. Tota itaque D K incerta est (per 36 huius): rectāgulum igitur E K sub Certa & incerta D E & D K comprehensum (per corollarium 21 huius, incertum erit, & proinde A G illud potens (nempe quadratum A G ipsi E K æquale) incerta erit. Quæ ideo vocatur Bina media potens, quòd eius potentia (hoc est quadratum A G) ex binis areis mediis componatur, scilicet ex quadratis A G G B, & rectangulo bis sub A G G B sumpto, inuicem incommensurabilibus. Si itaque binæ rectæ lineæ potentia, &c.

MONITVM.

Cùm harum sex incertarum (his proximis theorematis expositarum) denominationes vnde ortę sint non satis lucidè Theonem explicasse quidam arbitrati sint, aliquas

aliquas earum præter eas quas dixímus differentias adferre non importunum erit. Quia igitur Euclides certarum prius traditionem cœpit, vt earum adminiculo ad incertas properet, ab incertis autem ad incertiores, hoc eſt, à certarum natura remotiores eo ordine ſeruato vergat, harum itaque ſex incertarum quatuor Certum mediúmque potentes componit, ſcilicet eam quæ Ex binis nominibus, Ex binis mediis primam, Maiorem, & Certum mediúmque potentem. Quæ licet potentias earum ex certa & media area ſingulæ componant, tamen in eo differunt, quòd prior huiuſmodi potentiam à lineis certis, potentia commenſurabilibus educat. Secunda verò à lineis mediis potentia commenſurabilibus, quæ iam à certis recedunt. Tertia à lineis longitudine & potentia omnino incommenſurabilibus ſuam educit potentiam: quæ tamen maiorem portionem certam habet, ea de cauſa Maior dicitur. Quarta autem ab eiſdem lineis longitudine & potentia incommenſurabilibus, quæ tamen maiorem potentiæ partem, ipſi Certum mediúmque potenti incertam tribuunt, nempe Mediam. Duas verò reliquas ſcilicet Ex binis mediis ſecundam, & Bina media potentem, ſeruato eodem ordine componit. Nam licet binas incertas areas, hoceſt Medias incommenſurabiles, vtraque earum poſſit, tamen prior ſcilicet Ex binis mediis ſecunda (quæ ex lineis potentia ſaltem commenſurabilibus conſtat) reliquis anteponenda fuit (quæ ex lineis penitus incommenſurabilibus componũtur) his nempe Maiori, & Certum mediúmque potenti, plus à certarum natura remotis. Harum autem duarum poſtremam omnium ſex nouiſſimam, ac à certa remotiorem meritò poſuit Euclides, eam ſcilicet quæ potentiam ex incertis ac incommenſurabilibus ſibi inuicem aſſumit, longitudinem verò à lineis & longitudine & potentia penitus incommenſurabilibus exigit, quam ideo tanquam ab incerta natura remotiſſimam, nouiſſimam ordine locauit Euclides.

Ex binis igitur nominibus priorem enunciat, quæ bina illa ſua nomina Certas efficit lineas, eius verò potentiæ potiſſimam partem ex certa area ſumit.

Ex binis autem mediis primam ſecundò ponit, eam quæ ſua nomina incertas quidem, ſed potentia ſaltem commenſurabiles efficit lineas, eius verò potentiam ab incerta potiſſima parte ſuſceptam: reliquam à certa area ſubfuratam componens.

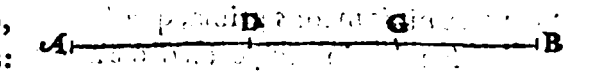
Ex binis verò mediis ſecundam tertiò collocat, quæ licet aream incertam ex incertis areis ſumat in potentia, tamen longitudinem à lineis potẽtia ſaltem commenſurabilibus ſuſcipit.

Tres autem ſequentes eodem ordine quo has priores inſerit, ſed potentiam quam priores à lineis potentia ſaltem commenſurabilibus depromunt. Subſequentes ſimilem potentiam à lineis penitus & longitudine & potentia incommenſurabilibus (& proinde à certarum natura remotioribus) aſſequuntur.

LEMMA.

Quod autem præfata incerta ad vnum ſignum tantùm ſecari poſſint, in eas linearum denominationes ex quibus compoſitæ præfatas ſpecies generant, hoc præaſſumpto lemmate demonſtrabimus.

Secetur recta AB inæqualiter in D, ac eadem AB rurſus inæqualiùs in G:

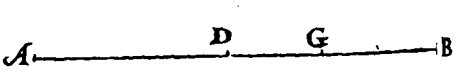


Dico ex AG GB inæqualioribus quadrata, maiora eſſe quadratis reliquarum AD DB æqualiorum. ſecetur AB bifariam in E: quoniam inæquales ſunt AG GB ipſis AD DB, maior erit AG ipſa DB: à quibus æquales tollantur ex AG ſcilicet AE & ab ipſa DB hæc EB: igitur reliqua EG maior erit ipſa ED. Quia verò recta AB ſecta eſt æqualiter in E & inæqualiter in G, quadrata ex AG GB dupla ſunt quadra-

torum quæ à dimidia E B & ab ea quæ inter ſectiones eſt E G, per nonam ſecundi. Similiter (per eandem) dupla erunt quadrata B D D A eorum quæ ab ipſis B E E D: atqui maiora ſunt quæ ex B E E G, his quæ ex B E E D, cùm maior ſit oſtenſa E G quàm E D. Quæ igitur ex A G G B inæqualioribus (dupla maiorum) his quæ ex A D D B (duplis minorum) maiora erunt.

PROPOSITIO XXXXII.

Quæ Ex binis nominibus ad vnum duntaxat ſignum diuiditur in nomina.



Eſto A B recta ex binis nominibus, quæ ſecta in G binas efficiat A G G B Certas potentia tantùm commenſurabiles, quæ quidem ſua ſunt nomina: Dico rectam A B nullo alio ſigno poſſe ſecari, quo alias efficiat Certas potentia tantùm commenſurabiles, quàm in G. Quod ſi in alio ſecari poſſit, ſecetur in D. Sequetur ſingulas A D D B ſingulis A G G B æquales nõ eſſe, nam ſi æquales eſſent, eadem fieret ſectio (contra hypotheſim): nec bifariam ſecta eſt in D ipſa A B, nam longitudine commenſurabiles eſſent A D D B, contra eandem hypotheſim: inæquales igitur ſunt A D D B, inæquales item A G G B. Cùm autem (per quartam ſecundi) quadrata A G G B cum rectangulis bis ſub A G G B, æqualia ſint quadratis A D D B cum rectangulis bis ſub A D. D B, nempe vtraque quadrato A B. Sequetur quadrata tanto excedere quadrata, quanto reciprocè rectangula excedunt rectangula. quod enim tollitur à quadratis additur rectangulis, & è conuerſo. Cùm enim quadrata ex Certis producta certa ſint, & proinde inuicem commenſurabilia, ipſa exceſſum ipſis commenſurabilem (ſcilicet quem numeri) patient, per ſecundam communem ſententiam ſeptimi, & ideo certum, per nonam diffinitionem hujus. Rectangula igitur (ſub Certis potentia tantùm commenſurabilibus comprehenſa) media eodem exceſſu ſeſe excedentia, ſeſe certo excedent, contra 26 huius, quod fieri non poteſt. Non igitur ſecari poterit A B in alia ſua nomina, quàm per ſignum G diſtributa, ipſa ſcilicet A G G B. Quæ itaque Ex binis nominibus ad vnum ſignum, &c.

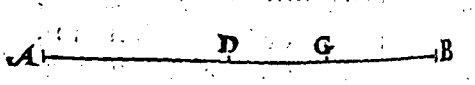
COROLLARIVM.

Binæ certæ potentia tantùm commenſurabiles compoſitæ, binis alijs certis potentia tantùm commenſurabilibus coniunctis, æquales eſſe non poſſunt.

Nam vtraque binomium componerent, & proinde binomium in pluribus ſignis ſecaretur in nomina, quod fieri non poſſe hac oſtenſum eſt. Similiter ſequetur in quinque proximis de binis ſingularum nominibus.

PROPOSITIO XXXXIII.

Ex binis mediis prima, ad vnum duntaxat ſignum diuiditur in nomina.



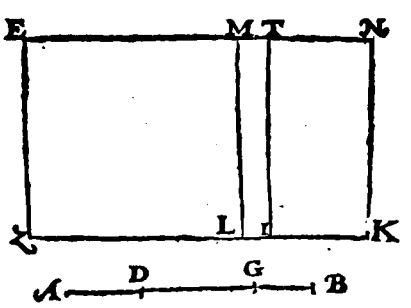
Sit A B ex binis mediis prima, quæ ſecetur in G in ſua nomina, ſcilicet A G G B medias potentia tantùm commenſurabiles certum comprehendentes: Dico rectam A B vnico ſigno G in eius denominationis lineas ſecari: ſi enim aliò ſecari poſſit, eſto in D. Conſtat autem (vt in præfata) A D D B inæquales eſſe ipſis A G G B, & adinuicem, ex hypotheſi. Et inſuper quadrata A G G B cum rectangulo bis ſub ipſis contento, idem componunt quod quadrata A D D B cum rectangulo bis ſub ipſis

conten

contento, per quartam ſecundi, nempe quadratum ex A B. Quanto igitur (vt in præcedenti diximus) quadrata excedunt quadrata, eodem (vice verſa) rectangula excedent rectangula: ſed rectangula ſunt certa, cùm nomina illa certum (ex hypotheſi) comprehendant: & igitur certo ſeſe excedunt. Sequetur ideo & quadrata, quæ quidem ex mediis media ſunt, ſeſe certo excedere, contra 26 huius, quod eſſet abſurdum. Non igitur ſecatur A B aliter quàm in G in nomina. Ex binis itaque mediis prima, ad vnum duntaxat ſignum, &c.

PROPOSITIO XXXXIIII.

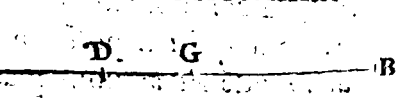
Ex binis mediis ſecunda, ad vnum duntaxat ſignum diuiditur in nomina.



Eſto A B ex binis mediis ſecunda, ſecta in ſua nomina A G G B Medias quidem potentia tantùm commenſurabiles, medium comprehendentes in ſigno G: Dico ipſam in alias eius nominis lineas, alio ſigno ſecari non poſſe. Quod ſi fieri poſſe credatur, ſit in D. Exponatur certa E Z, cui (per 45 primi) ei quod ex A B æquum conſtituatur Z N, à quo auferatur eis quæ ex A G & G B æquum E I. Reliquum igitur I N æquum erit eis quæ bis ſub A G G B, per quartam ſecundi & tertiam communem ſententiam. Similiter ab eodem Z N auferatur æquum quadratis A D D B quod ſit E L. Reliquum L N ei quod bis ſub A D D B æquum erit. Cùm enim E I (æquum quadratis mediarum A G G B) ſit medium, Et inſuper I N (æquum eis quæ ſub ipſis medium continentibus) ſit medium. Ea Media E I I N ad certam E Z conſtituta, latitudines E T T N certas efficiunt, potentia tantùm propoſitæ E Z commenſurabiles, per 22 huius. Cùm autem ſit (per lemma vigeſimæprimæ huius) ſicut A G ad G B, ſic quod ex A G ad quod ſub A G G B, incommenſurabilis autem eſt A G ipſi G B longitudine, & quod ex A G ei quod ſub A G G B incommenſurabile erit. Et proinde quod ex G B (eidem ex A G commenſurabile) rectangulo ſub A G G B contento incommenſurabile erit, per coroll. ſecundum decimæ huius. Et proinde quæ ex A G & G B eis quæ bis ſub A G G B incommenſurabilia erunt, per tertium coroll. 10. huius. Quod autem ex quadratis A G G B eſt rectangulum E I, quod autem bis ſub A G G B eſt I N, incommẽſurabile itaque eſt E I ipſi I N. Recta igitur E T rectæ T N (ex prima ſexti) incommenſurabilis erit. Sed certæ fuerunt E T T N. Potentia tantùm itaque commenſurabiles erunt ipſæ E T T N. Tota ideo E N ex binis nominibus erit, per 36 huius. Haud diſſimili argumento patebit E M M N rectas, certas eſſe potentia tantùm commenſurabiles, cùm rectangula E L L N æqualia ſint quadratis A D D B, & E I quod bis ſub ipſis poſito, eo quod rectæ A D D B eiuſdem ponantur nominis, ac ipſæ A G G B, eiſdem tamen inæquales. Quare ſequeretur E N rectam ex binis nominibus ſecari poſſe in duobus ſignis, ſcilicet T & M, per diuerſas, certas potentia tantùm commenſurabiles, ipſius quidem E N nomina, contra 42 huius, quod eſſet abſurdum. Non igitur poteſt recta A B alio ſigno quàm G, ſecari in alia ſua nomina. Ex binis itaque mediis, &c.

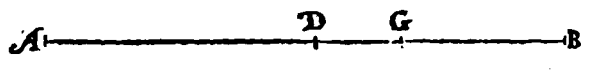
PROPOSITIO XXXXV.

Maior ad vnum duntaxat ſignum diuiditur in nomina.



Supponatur A B recta Maior, quæ (per 39 huius) conſtet binis

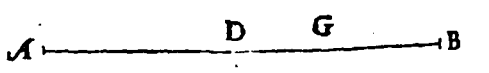
AG GB potentia incommenſurabilibus, efficiens quod ex earum quadratis certum, quod verò ſub ipſis medium: Dico rectam AB in alias eius nominis rectas non poſſe diuidi, ad aliud ſignum quàm G. Siquidem fieri aliàs poſſe credatur, ſecetur AB per D in ea nomina AD DB. Cùm enim oſtenſum ſit (quadrageſimaſecunda huius) quadrata ex AG GB, tanto exceſſu diſtare à quadratis AD DB, quanto rectangula quæ bis ſub AG GB diſtant, à rectangulis bis ſub AD DB, eo quod ablatum à quadratis confertur rectangulis, ſic diuidatur, per 4 ſecundi, quadratum totius AB. Quadrata ideo ex AG & GB diſtant à quadratis ex AD & DB certo, cùm ſint ex hypotheſi certa. Rectangula igitur ſub AG GB à rectangulis ſub AD DB (bis ſumpta) diſtabunt certo. Sed rectangula illa ſunt (ex hypotheſi) media. Medium igitur excedet medium certo, contra 26 huius, quod eſſet abſurdum. Non igitur in alia nomina ſecari poteſt AB Maior, quàm per ſignum G in AG GB. Maior itaque ad vnum ſignum duntaxat, &c.



PROPOSITIO XLVI.

Certum mediúmque potens, ad vnum duntaxat ſignum diſcinditur in nomina.

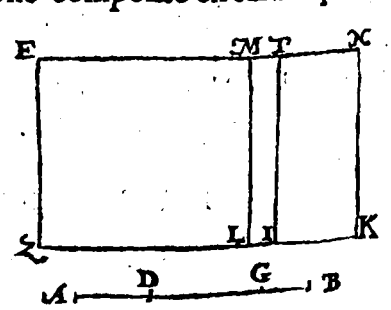
Eſto recta AB Certum mediúmque potens, quæ ſecetur in G per ſua nomina, quæ ſint (per 40 huius) binæ rectæ AG GB potentia incommenſurabiles, efficientes compoſitum ex earum quadratis medium, quod verò ſub ipſis certum: Dico AB in alia quàm AG GB ſua nomina, ſecari non poſſe. Si verò aliæ eius naturæ lineæ produci poſſe putentur, ſint AD DB, ſecta AB in D. Sumpto etenim proximæ argumento, Cùm quadrata ex AG GB eodem excedant quadrata AD DB, quo rectangula bis ſub AD DB excedunt rectangula bis ſub AG GB. Sed rectangula ſeſe excedunt certo, cùm ſint ex hypotheſi Certa. Quadrata itaque ſeſe excedent certo, quæ quidem (ex eadem hypotheſi) ſunt Media, quod obſtat 26 huius, & proinde abſurdum. Non igitur per aliud ſignum quàm G poteſt recta AB ſecari in ſua nomina, nec ideo alia quàm AG GB ſuſcipere nomina. Certum itaque mediúmque potens ad vnum duntaxat ſignum, &c.



PROPOSITIO XLVII.

Bina media potens, ad vnum duntaxat ſignum diuiditur in nomina.

Supponatur bina media potens recta AB, quæ (per 41 huius) ſecetur in G ſigno efficiens AG GB rectas potentia incommenſurabiles, quarum compoſitum ex earum quadratis ſit medium, quod verò ſub ipſis medium ac incommenſurabile compoſito ex earum quadratis: Dico totam AB aliter quàm per G non ſecari in ea nomina. Quod ſi fieri poſſit aliter, ſecetur in D, & ſumpto 44 huius argumẽto, applicetur ad certam EZ æquum quadrato AB, per 45 primi, quod ſit EK, à quo ſubtrahatur æquum compoſito ex quadratis AG, GB, ſitq; EI, reliquum TK erit quod bis ſub ipſis AG, GB, cùm quadrata & rectangula componant totum ex AB, per 4 ſecundi, æquũ ipſi EK poſitum. Similiter ſubtrahatur ab eodẽ EK æquum quadratis AD, DB quod ſit EL, reliquum MK æquum erit



erit ei quod bis ſub A D D B: quoniam (per conſtructionem) E I æquum eſt quadratis A G, G B, & T K rectangulo ſub ipſis æquum eſt, ſimiliter E L æquum eſt quadratis A D D B, & M K rectangulo bis ſub ipſis A D D B æquum. Cùm autem quadrata rectangulis (ex hypotheſi) ſint incommenſurabilia, incommenſurabile erit E I ipſi T K, ac ſimiliter E L ipſi M K, & proinde recta E M ipſi M N, ac E T ipſi T N (per primam ſexti) incommenſurabiles erunt. Quia verò media ſunt E I, T K, E L, M K, ad certam E Z applicata latitudines E T, T N, E M, M N, certas efficiunt, per 22 huius. Potentia igitur tantùm commenſurabiles erunt E T ad T N (cùm ſint longitudine oſtenſæ incommenſurabiles) haud ſecus E M ad M N, potentia tantùm ſunt commenſurabiles adinuicem. Tota igitur E N ex binis nominibus dicetur, per 36 huius, quæ quidem in duobus ſignis M & T ſecatur in binas certas, potentia tantùm commenſurabiles, ſua ſcilicet nomina, contra 42 huius, quod eſſet abſurdum. Non igitur aliter poteſt ſecari A B in ſua nomina, quàm per ſignum G. Bina itaque potens media, ad vnum duntaxat ſignum, &c.

RECTARVM, QVÆ EX BINIS NOMINIBVS, DIFFINITIONES.

SVPPONENDVM TRIBVS PRIORIBVS.

Propoſita Certa & ea quæ Ex binis nominibus diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit minore, eo quod ſit ex ſibi longitudine commenſurabili.

DIFFINITIO I. HOC SVPPOSITO.

Si maius nomen propoſitæ Certæ fuerit longitudine commenſurabile, tota vocatur Ex binis nominibus prima.

DIFFINITIO II.

Si minus nomen propoſitæ Certæ fuerit longitudine commenſurabile, tota vocatur Ex binis nominibus ſecunda.

DIFFINITIO III.

Si neutrum nominum propoſitæ Certæ fuerit longitudine commenſurabile, ea vocatur Ex binis nominibus tertia.

Quoniam diuerſæ ſunt binomiorum ſpecies, ſex eorum diffinitiones ponit Euclides, Supponens pro tribus prioribus, maius nomen excedere minus, eo quod ſit à ſibi longitudine commenſurabili. Pro ſequentibus verò tribus poſtremis oppoſitum ſupponit, maius ſcilicet nomen excedere minus, eo quod ſit ex ſibi longitudine incommenſurabili, quæ ſola eſt priorum trium à tribus poſterioribus diſcrepantia, ſingularum à ſingulis.

SVPPONENDVM TRIBVS POSTREMIS.

Si autem maius nomen plus poſſit minore, eo quod ſit à ſibi longitudine incommenſurabili.

DIFFINITIO IIII. HOC SVPPOSITO.

Si maius nomen propoſitæ Certæ fuerit longitudine commenſurabile, tota vocatur Ex binis nominibus quarta.

DIFFI

DIFFINITIO V.

Si minus nomen propoſitæ Certæ fuerit longitudine commenſurabile, ea vocetur Ex binis nominibus quinta.

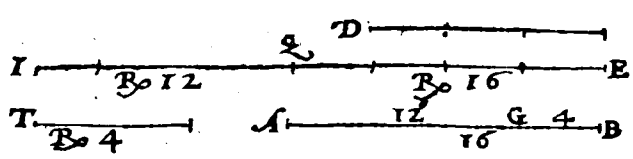
DIFFINITIO VI.

Si neutrum nomen expoſitæ Certæ longitudine fuerit commenſurabile, ea vocetur Ex binis nominibus ſexta.

Hoc ordine binomiorum differentias à maioris, vel minoris, aut equidem neutri nominis commenſuratione, vel incommenſuratione, ad expoſitam conſtituit Euclides, cùm duo nomina eidem longitudine commenſurabilia eſſe poſſe non fateatur. Nam ſi eidem cõmenſurarẽtur, & adinuicem cõmenſurarentur, per decimam huius, quod obſtaret 36 huius, quæ eas incommenſurabiles longitudine eſſe præcipit. Addit inſuper alterum Græcorum exemplar, Euclidem ideo tres priores ſub commenſurabili poſitas, tribus poſtremis ſub incommenſurabili deſcriptas, præfeciſſe, quòd præſtantius ſit commenſurabile incommenſurabili. Trium verò ſingulorum ordinum priores, ſequentibus hac de cauſa præmiſiſſe, quòd præſtantius ſit maius nomen minore, indignius verò vtroque neutrum. Nos autem arbitrati ſumus alia cauſa, hoc ordine binomia digeſſiſſe Euclidẽ, vt ſcilicet cœptum iam antea ordinem ſequatur, quo quidem ſub Certa & ſingulis hoc ordine binomiis, areas ſex præfatarum incertarum ſuo ordine ſeruato comprehenderet, vt patebit 54 & 5 eam ſequentibus ſequi ordinem 36 & 5 eam ſequentium. Ac inſuper, vt eidem ordini futuras apothomarum generationes, ac aliarum incertarum ſubiiceret, & eodem ordine apothomes diffiniret. Quare potius vt methodi conſeruaret ſeriem hoc ordine binomia diſpoſuiſſe Euclidem cenſendum erit, quàm vt tantùm præſtãtius indigniori præficeret: is nanque geometriam, non autem politicam edocet.

PROPOSITIO XLVIII. PROBLEMA 14.

Inuenire Ex binis nominibus primam.



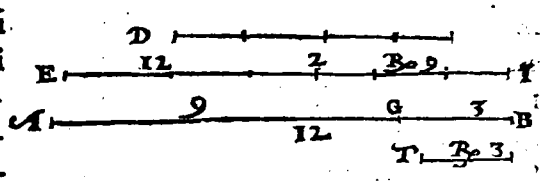
Sumatur (ex corollario primi lemmatis 28 huius) numerus quadratus A B, excedens quadratum G B non quadrato A G. Sit item propoſita Certa D, cui longitudine commenſurabilis eſto E Z: fiat autem (per corollarium ſextæ huius) ſicut A B ad A G numeri, ſic quod ex E Z ad quod ex Z I. Cùm autem A B ſit quadratus, A G verò non, quod ex E Z ad quadratum ex Z I rationem ipſorum A B ad A G habentes, non habent rationem quam quadrati numeri, per corollarium vigeſimæquintæ octaui. Incommenſurabiles itaque longitudine erunt ipſæ E Z Z I, per nonam huius, potentia verò commenſurabiles, per ſextam huius: Certa autem eſt E Z, ipſi namque propoſitæ D ex hypotheſi commenſurabilis: Certa igitur erit & Z I: binæ igitur E Z Z I Certæ ſunt potentia tantùm inter ſe commenſurabiles. Tota itaque E I Ex binis eſt nominibus, per 36 huius. Rurſus quia maior eſt E Z ipſa Z I per 14 quinti, cùm earum potentiæ habeãt rationem totius A B ad ablatum A G, inuenietur per 15 huius, quo plus poteſt maior minore, ſitq; quod ex T. Cùm autem quod ex E Z excedat quadratum Z I quadrato ipſius T: Eſt autem A B ad A G vt quod ex

E Z ad

E Z ad quadratum Z I: erit conuersione rationis sicut A B ad B G excessum, sic quod ex E Z ad quod ex T excessum quo antecedens ex E Z excedit suum consequens ex Z I, per corollarium decimænonæ quinti, sed A B ad B G (ex hypothesi) rationem habet quadratorum numerorum. Igitur E Z ad T excessum rationem habebit quadratorum numerorum, & ideo ipsæ E Z ad T erunt longitudine commensurabiles, per nonam huius. Atqui quadratum E Z excedit quod ex Z I minore, eo quod ex T. Maius igitur nomen E Z, plus potest minore Z I, eo quod ex T sibi longitudine commensurabili: éstque maius nomen E Z propositæ D longitudine commensurabile. Inuenimus igitur Ex binis nominibus primã, per primam diffinitionem binomiorum.

PROPOSITIO XLIX. PROBL. 15.

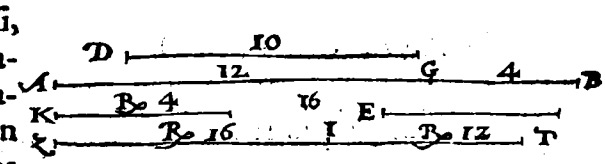
Inuenire Ex binis nominibus secundam.



Eadem cum præcedentis hypothesi sumpta, scilicet sit (per corollarium primi lemmat. 28 huius) A B numerus quadratus, excedens quadratum G B non quadrato A G, aut equidem A B G B non quadrati similes plani, sese excedentes quadrato A G (vtraque enim hypothesis idem profert) proponatur item Certa D, cui commensurabilis existat longitudine Z I, quæ certa igitur erit. Sicut autem numerus A G ad A B, sic (per corollarium sextæ huius) fiat quod ex Z I, ad quod ex Z E: Certa igitur erit Z E & longitudine ipsi Z I incommensurabilis, per vltimam partem nonæ huius, cùm habeãt Z I & Z E rationem non quam quadrati, per corollarium 25 octaui. Nam vnus ipsorum A B vel A G quadratus est, reliquus verò non, ex hypothesi: potentia tantùm itaque commensurabiles sunt inter se Z I & Z E rectæ. Tota igitur E I Ex binis est nominibus, per 36 huius: Dico quòd & secunda, cùm sit vt A G ad A B, sic I Z ad Z E. Excedit autem A B ipsum A G numero G B, igitur E Z excedet potentia rectam Z I aliquo, quod sit (per 15 huius) id quod ex T. Erit igitur conuersione rationis (per corollarium 19 quinti) sicut A B antecedens ad excessum G B quo A B excedit A G consequens, sic (potentia) E Z antecedens ad excessum T, quo E Z excedit (potentia) ipsum Z I consequens: sed A B ad G B rationem habent quam quadrati, per 26 octaui, cùm sint (ex hypothesi) similes plani: Quod igitur ex E Z ad id quod ex T, rationem habent quam quadrati: & proinde (per nonam huius) latera scilicet rectas E Z & T habent longitudine commensurabiles. Maius itaque nomen E Z plus potest minore Z I ipso quod ex T sibi longitudine commensurabili. Est autem minus nomen Z I longitudine propositæ D commensurabile, ex hypothesi. Inuenimus itaque E I Ex binis nominibus secundam, per secundam diffinitionem binomiorum.

PROPOSITIO L. PROBLEMA 16.

Inuenire Ex binis nominibus tertiam.

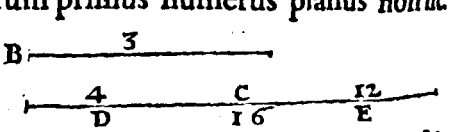


Sumpta præcedẽtium hypothesi, sumatur (per coroll. primi lemmatis 28 huius) numerus A B quadratus, excedens B G quadratum non quadrato A G. Sumatur item alius non quadratus, vnitate vel binario ab ipso A G distans, qui sit D. Exponatur item Certa E, cuius quadratum sit ad quadratum Z I sicut D numerus ad A B, per coroll. sextæ

sextæ huius,& sicut A B ad A G, sic fiat(per idem coroll.)quod ex Z I ad quod ex I T, quoniam quadratum E certæ ad quadratum Z I habet numerorum D ad A B rationem, certa erit Z I: quia verò quadratum Z I ad quadratum I T est vt A B ad A G numeri, certa item erit I T. Cùm autem A B sit quadratus, A G verò non, ipsæ Z I I T longitudine incommensurabiles erunt, per 9 huius. Certæ itaque Z I I T potentia tantùm commensurabiles erunt, & proinde tota Z T Ex binis erit nominibus, per 36 huius: Dico quòd & tertia, cùm sit quod ex Z I ad quadratum I T, vt A B ad A G, maior erit Z I ipsa I T, cùm maior sit A B ipso A G numero: quod igitur ex Z I plus possit eo quod ex I T, quadrato rectæ K, per decimamquintam huius. Erit igitur sicut antecedens A B ad excessum G B quo excedit suum consequens A G, sic per coroll. 19 quinti cõuersione rationis, quadratum Z I ad quadratum ipsius K, quo quod ex Z I excedit suum consequens quod ex I T: sed A B ad B G rationem habent quam quadrati, ex hypothesi: quod igitur ex Z I ad id quod ex K (eandem rationem habens) efficit latera Z I & K longitudine commensurabilia, per nonam huius. Maius itaque nomen Z I plus potest minore I T eo quod sit ex K sibi longitudine commensurabili. Præterea cùm sit vt D ad A B sic quadratum E ad quod ex Z I, vtq; A B ad A G, sic Z I ad I T quadrata, erit æqua ratione, vt D ad A G, sic quod ex E ad quod ex I T, per 22 quinti. Cùm insuper D numerus sit (ex hypothesi) non quadratus, is ad ipsum A B quadratum non habet rationem quam quadrati, per coroll. 25 octaui. Quia verò idem D vnitate aut binario distat à numero A G, ipsi rationem superparticularem, aut superbipartiẽtem habent, & proinde nec rationem quam quadrati habent, per coroll. 26 octaui: Sed E proposita certa posita fuit potentia ad ipsas Z I & I T in ratione numeri D ad numeros A B, A G, Ipsius itaque E potentia ad potentias ipsarum Z I. I T singularum, rationem non habet quam quadrati numeri. Ipsarum igitur Z I & I T neutra est propositæ E certæ longitudine commensurabilis, per nonam huius: fuerunt autem Z I I T certæ potentia tantùm commensurabiles, quarum maior Z I plus potuit minore I T, eo quod ex sibi longitudine commensurabili. Inuenimus igitur Ex binis nominibus tertiam, per tertiam diffinitionem binomiorum.

MONITVM.

Quoniam huius hypothesim voluit fulcire Campanus per primum numerum, quem proponit, vt is ad alium quemuis rationem quam quadrati non habeat, concludere volens quòd si is primus ad aliquem rationem haberet, quam quadrati numeri, inter eos medius caderet, per 18 octaui, eò quòd similes essent plani, ex coroll. 27 octaui, quod existimat absurdum, cùm primus numerus planus non sit. Proponit itaque numerum primum B & quadratum C diuisibilem in quadratum D & non quadratum E, & infert, cùm B sit primus, non habet ad numerum E rationem, quam quadrati, quod ex hac figura falsum patet. Cùm itaque eius demonstrationis hypothesis fuerit insufficiens, Theonis verò hypothesis non probata, aliam cogimur afferre hypothesim, qua idem consequamur demonstratum. Si verò primus numerus planus sit, huius solutionem (post septimi principia monito ad finem circa) deduximus.

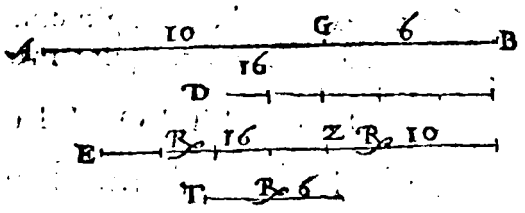


PROPOSITIO LI. PROBLEMA 17.

Inuenire Ex binis nominibus quartam.

Sumatur numerus quadratus A B, qui secetur in duos non quadratos A G G B. Exponatur autem certa D, cui longitudine commensurabilis existat E Z: fiat verò (per

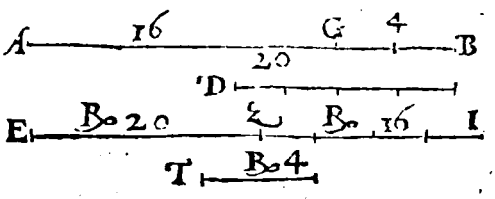
rò (per coroll. sextæ huius) vt A B ad A G sic quod ex E Z ad quadratum Z I. Commensurabiles igitur potentia erunt E Z Z I rectæ, per sextam huius, & potentia tantùm, habent enim rationem non quam quadrati A B A G, per coroll. 25 octaui: latera itaque E Z Z I longitudine incommensurabilia erunt, per nonam huius, ipsa quidem E Z (propositæ D certæ commensurabilis) certa erit, & proinde Z I ipsi E Z commensurabilis certa erit; per sextam diffinitionem huius. Certæ igitur potentia tantùm commensurabiles erunt E Z Z I, & exinde tota E I ex binis nominibus erit: Dico quòd & quarta, cùm maior sit A B ipso A G, est autem vt A B ad A G, sic quod ex E Z ad quod ex Z I, maior erit E Z ipsa Z I, per 14 quinti. Plus itaque possit E Z ipsa Z I quadrato, quod ex T, per 15 huius, erit sicut antecedēs A B ad consequens A G, sic antecedens ex E Z ad consequens ex Z I. Conuersione igitur rationis erit A B antecedens ad G B excessum, quo excedit consequens A G, sicut potentia E Z ad T excessum, quo excedit suum consequens Z I, per coroll. 19 quinti. Sed A B ad G B non habent rationem quadratorum, cùm alter tantùm sit quadratus, per coroll. 25 octaui. Nec proinde E Z ad T rationem potentia quam quadrati habebunt: longitudine igitur sunt incommensurabiles ipsæ E Z & T, per nonam huius. Plus igitur potest maior E Z minore Z I, eo quod ex T sibi longitudine incommensurabili. Atqui maius nomen E Z fuit propositæ certæ D longitudine incommensurabile. Inuenimus igitur ex binis nominibus quartam, per quartam diffinitionem binomiorum.



PROPOSITIO LII. PROBLEMA 18.

Inuenire Ex binis nominibus quintam.

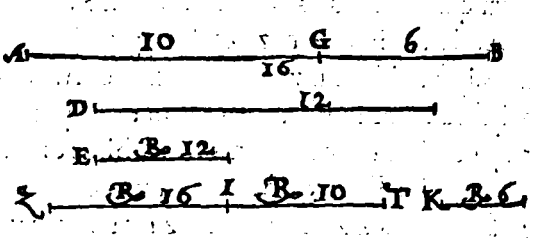
Sumpta eadem prioris hypothesi numerorum, scilicet vt totus A B numerus ad neutrum ipsorū A G G B rationē habeat quam quadrati, Sint duo quadrati A G & G B non quadratum A B componentes, per secundum lemma vigesimæ octauæ huius, hæc tribus postremis sufficit hypothesis, veluti eadem alia tribus prioribus conuenie bat. Sit ideo proposita certa D, cui longitudine commensurabilis fiat Z I. Sicut verò A G ad A B, sic sit (per coroll. sextæ huius) quadratum Z I ad quod ex E Z. Potentia igitur tantùm commensurabiles erunt E Z Z I, rationem quidem habentes quam numerus quadratus A G ad non quadratum A B, per coroll. vigesimæ quintæ octaui. Et certæ, cùm Z I sit longitudine ipsi D propositæ cōmensurabilis, per sextā diffinitionē huius, & E Z potētia ipsi Z I. Tota igitur E I ex binis est nominibus per 36 huius: Dico quòd & quinta. Cùm enim sit A G ad A B, vt quadratū Z I ad quod ex E Z, erit conuertendo (per coroll. quartæ quinti) A B ad A G, vt quod ex E Z ad quod ex Z I. Maior autem est A B ipsa A G. Maius itaque erit quod ex E Z eo quod ex Z I, per 14 quinti. Esto maius quod ex E Z eo quod ex Z I quadrato ex T, per 15 huius. Cùm sit A B antecedens ad A G consequens, vt quod ex E Z ad quod ex Z I: Erit conuersione rationis (per coroll. 19. quinti) A B ad G B excessum, quo A B excedit suum consequens A G, sicut quod ex E Z antecedens ad quod ex T excessum, quo quadratum E Z excedit suum consequens quod ex Z I. Sed A B non quadratus ad G B quadratum habet non quam quadrati rationem, per coroll. 25 octaui. Quod itaque ex E Z ad quod ex T, non habet rationem quam quadrati. Ipsæ igitur E Z & T sunt (per nonam huius) longitudine incommensurabiles. Maius ideo nomen E Z plus potest minore Z I eo quod fit ex T sibi longitudine incommensurabili. Atqui minus Z I est



propoſitæ D (ex hypotheſi) longitudine commenſurabile. Inuenimus igitur Ex binis nominibus quintam, per quintam diffinitionem binomiorum.

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA 19.

Inuenire Ex binis nominibus ſextam.



Sit iuxta duarum proximarum hypotheſim, numerus A B quadratus, qui diuidatur in duos A G G B non quadratos. Sit præterea numerus D non quadratus, vnitate vel binario diſtans ab ipſo A G, non quadrato. Proponatur inſuper E certa, cuius quadratum ſit ad quadratum ex Z I, ſicut D ad A B, per coroll. ſextæ huius. Eſto præterea ſicut A B maior ad A G minorem, ſic quod ex Z I ad quadratum I T. Maius igitur erit quod ex Z I ipſo ex I T, per 14 quinti. Sit ideo maius, eo quod ex K, per decimamquintam huius. Quoniam (ex hypotheſi) Z I habet ad certam E potentia rationem numerorum, commenſurabiles erunt (per 6 huius) ipſæ Z I & E, & ideo (per ſextam diffinitionem huius) certa erit Z I, ipſi E potentia commenſurabilis. Similiter certa erit I T, ipſi Z I potentia commenſurabilis. Cùm autem rectæ Z I I T ſint in ratione quadrati A B ad non quadratum A G potentia: Potentia igitur tantùm commenſurabiles certæ erunt, per nonam huius. Tota ideo Z T ex binis erit nominibus, per 36 huius: Dico quòd & ſexta. Quoniam fuit vt A B maior ad A G minorem, ſic quod ex Z I ad quod ex I T. Erit conuerſione rationis (ex coroll. 19 quinti) ſicut antecedens A B ad exceſſum G B, quo excedit ſuum conſequens A G, ſic quod ex Z I ad quadratum ipſius K, quo excedit ſuum conſequens quod ex I T. Sed A B ad G B non habet rationem quam quadrati, per coroll. vigeſimæquintæ octaui. Nec igitur quadratum Z I ad quadratum K rationem habebit quam quadrati. Rectæ igitur Z I & K longitudine incommenſurabiles erunt, per nonam huius. Maius itaque nomen Z I plus poteſt minore I T eo quod ex K ſibi longitudine incommenſurabili. Et neutrum ipſorum Z I I T longitudine eſt ipſi E propoſitæ commenſurabile. Nam ſicut fuit D non quadratus ad A B quadratum, ſic quod ex E certa ad quod ex Z I. Sicut inſuper A B quadratus ad A G non quadratum, ſic quod ex Z I ad quod ex I T. Æqua igitur ratione erit (per vigeſimamſecundam quinti) ſicut D ad A G, ſic quod ex E ad quod ex I T. Sed D ad A B non habet rationem quam quadrati numeri, per coroll. vigeſimæquintæ octaui, nec igitur quadrata ex E & Z I rationem habent quadratorum. Præterea D ad A G (ſibi vnitate vel binario proximum) non habet rationem quadratorum per coroll. 26 octaui, cùm ſint in ſuperparticulari vel ſuperbipartiente ratione. Igitur nec quadratum E ad quadratum I T rationem habebit quam quadrati numeri. Ipſorum itaque Z I & I T nominum neutrum eſt propoſitæ E certæ longitudine commenſurabile, per nonam huius. Inuenimus igitur ex binis nominibus ſextam, per ſextam diffinitionem binomiorum.

COROLLARIVM.

Hinc fit, datam rectam in nomina cuiuſlibet ſex prædictarum Ex binis nominibus rectarum ſecare.

Nam ſi proponatur datam rectam ſecari in binomij primi nomina, inuenietur (ex quadrageſimaoctaua huius) ex binis nominibus primam, cui (ſic ſectæ) datam rectam (per decimam ſexti) ſimiliter ſecabimus, haud ſecus in reliquis quinque ſequentibus.

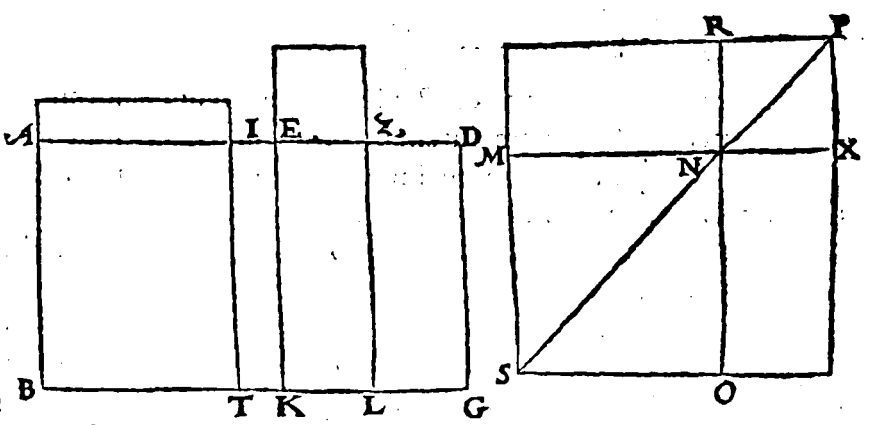
MONI

MONITVM.

Appoſuit Theon lemma huic theoremati, quod à vigeſimaquinta huius facilè produci potuit corollarij denominatione: nos itaque illud breuiſſimum ex vigeſimaquinta huius aſſumptum, huic ſubticere cogemur.

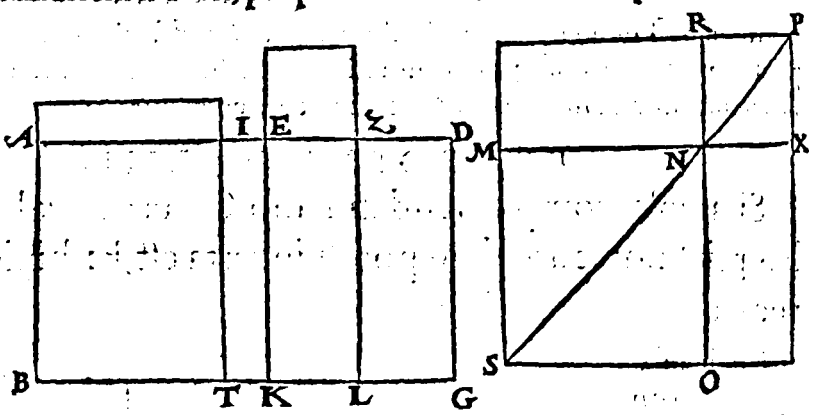
PROPOSITIO LIIII.

Si areola comprehendatur ſub Certa ac Ex binis nominibus prima, quæ areolam poteſt incerta eſt, Ex binis nominibus vocata.



Cõprehendatur areola ABGD ſub certa AB & ea quæ ex binis nominibus prima AD: Dico eam rectã quæ ream AG poteſt, eſſe ex binis nominibus. Cùm AD quæ ex binis nominibus, ad vnum tantùm ſignum ſecetur in nomina, ſit illud ſignum E, per 42 huius: ſecetur item minus nomen ED bifariam in Z. Quadrato autem ex EZ æquum applicetur ad maius nomen AE, deficiens ſpecie quadrata, per vigeſimamoctauam ſexti. Sitq; quod ſub AI IE per coroll. eiuſdem. Cùm autem AD ſit ex binis nominibus prima, maior AE plus poteſt minore ED eo quod ſit à ſibi longitudine commenſurabili, & maius nomen AE eſt propoſitæ certæ AB longitudine commenſurabile, per primam diffinitionem binomiorum: quia verò maior AE plus poteſt minore ED eo quod à ſibi longitudine commenſurabili. Quartæ autem parti eius quod ex minore ED æquum (hoc eſt quadrato ex EZ) ad maiorem AE applicatur, deficiens ſpecie quadrata, quod ſcilicet ſub AI IE, recta igitur AE ſecatur in commenſurabiles longitudine in ſigno I, per ſecundam partem 17 huius, ſcilicet in rectas AI & IE. Ducantur per ſigna IEZ ipſis AB & DG parallelæ IT EK ZL, ipſi autem AT æquum quadratum fiat MNOS, per 14 ſecundi, ipſi verò IK æquum (per eandem) ſit RN XP circa eandem dimetientem SNP poſitum, per 18 ſexti. Compleatúrque parallelogrammum SP, quod quidem SP quadratum erit, per 24 ſexti. Cùm autem quod ſub AI IE æquum ſit (per conſtructionem) ei quod ex EZ, tres rectæ AI EZ IE proportionales erunt, per 17 ſexti. Tria igitur AT EL IK rectangula (per primam ſexti) proportionalia erunt: quia verò medium proportionale eſt EL inter AT & IK, medium erit idem EL inter MO & RX, ipſis AT IK æqualia poſita, per ſecundam partem ſeptimæ quinti: atqui inter MO & RX medium eſt ſimiliter quod ſub ON NX, ſcilicet OX, per coroll. 25 huius: Quadratum igitur MO ad EL eandem habet quam ad OX rationem, nempe dimidiam quam ad tertium RX, per decimam diffinitionem quinti: ipſa igitur EL & OX ſunt æqualia, per nonam quinti. Cùm inſuper dupla ſit ED ipſius EZ, duplum erit EG ipſius EL per primam ſexti. Quia verò ſupplementa OX MR ſunt æqualia, per 43 primi, duplum igitur erit conflatum ex binis OX MR ipſius OX, & proinde æqualium OX EL dupla, ſcilicet bina MR OX, ipſi EG æqualia erunt. Totum igitur SP toti AG æquum erit, cùm AK quadratis MO RX æquum fuerit. Cæterùm, quoniam AE longitudine fuit certæ AB commenſurabilis, certum erit AK, per 19 huius, & igitur certum erit conflatum ex quadratis MO RX ipſi certo æqualibus: quia verò commẽſurabiles fuerunt longitudine AI IE rectæ, commen-

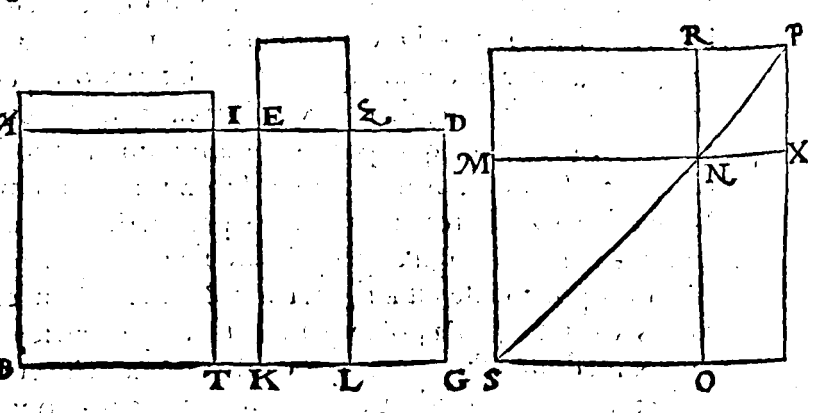
ſurabilia erunt adinuicem A T IK, per primam ſexti, & toti A K, per vndecimam huius. Cõmenſurabilia igitur erunt M O R X quadrata, toti ex eis conflato, & adinuicem, & igitur certa, cùm cõflatum certum fuerit, per nonam diffinitionem huius. Certæ igitur ſunt O N N R rectæ, ipſa certa quadrata potentes, per octauam diffinitionem huius, quoniam autem incommenſurabiles ſunt longitudine A E E D rectæ, nomina quidem binomij, incommenſurabilia erunt A K E G rectangula, per primam ſexti, quia verò bina E G E L ſunt cõmenſurabilia, nempe vt duplum dimidij. Alterum autem eorum E G alicui A K eſt incommenſurabile, & reliquum E L eidem A K incommenſurabile erit, per coroll. ſecundum decimæ huius. Similiter quia binorum A T A K commenſurabilium, alterum A K alicui E L eſt incommenſurabile, & reliquum A T eidem E L incõmenſurabile erit, per idem coroll. & proinde M O & M R (vel O X) ipſis A T E L æqualia, incommenſurabilia erunt. Et ideo (per primam ſexti) rectæ O N N R longitudine incommenſurabiles erunt: quæ certæ potentia cõmenſurabiles oſtenſæ ſunt. Tota igitur O R vel M X ex binis nominibus erit, per 36 huius, quæ quidem poteſt rectangulum A G ſub certa & binomio comprehenſum, cùm poſſit quadratum S P eidem A G æquale oſtenſum. Si igitur areola comprehendatur ſub certa ac Ex binis nominibus prima, &c.



PROPOSITIO LV.

Si areola comprehendatur ſub Certa, & Ex binis nominibus ſecunda quæ areolam poteſt incerta eſt, vocatúrque Ex binis mediis prima.

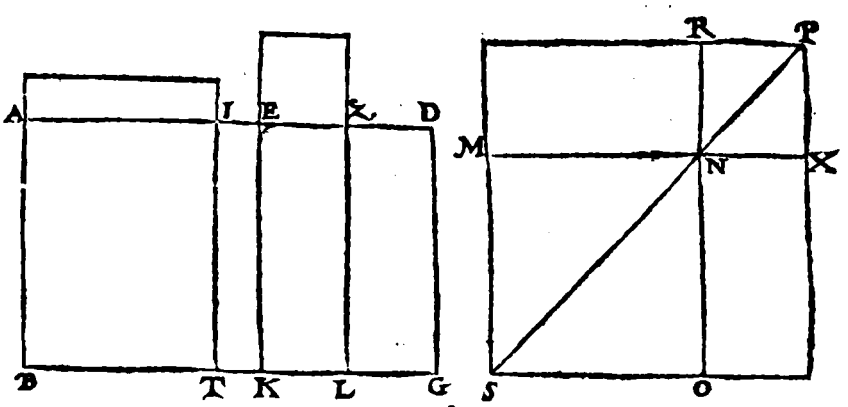
Comprehendatur area ſub certa A B & ex binis nominibus ſecũda A D, quæ ſit A B G D: Dico rectã potentem aream A B G D eſſe ex binis mediis primam, quoniam præcedenti demonſtratione ſatis prolixè docuimus, harum figurarum conſtructionem, ne tædioſa vteremur hac & ſequentibus repetitione, vna tantùm differentia ſuppoſita, ſcilicet rectam A D binomium ſecundum, quod antea primum fuit, efficiemus, ſequenti verò tertium, & ſic deinceps manente eadem figurę conſtructione: quoniam A D ex binis nominibus eſt ſecunda ſecta in E, minus nomen E D, longitudine eſt certæ A B commenſurabile, A E verò eidem A B longitudine incommenſurabile, per ſecundum corollarium decimæ huius. Certũ igitur erit E G, per 19 huius. Et proinde E L eius dimidium certũ, per nonam diffinitionem huius: medium verò erit A K, per 21 huius ſub A E A B. Præterea cùm A E plus poſſit minore E D,



re E D, eo quod ſit à ſibi longitudine commenſurabili, per ſecundam diffinitionem binomiorum, ſequetur (ex ſecunda parte 17 huius) A E ſecari in I per commenſurabilia A I I E longitudine, & ideo (per primam ſexti) commenſurabilia erunt A T I K rectangula media, & proinde A T incõmenſurabile erit ipſi E L certo, quoniam cõmenſurabilia ſunt & media A T I K, media erũt M O R X quadrata eis æqualia & cõmenſurabilia. Mediæ igitur erunt M N N X illa potentes, & potentia commenſurabiles: quia item certum eſt E L, certum erit O X, ſibi æquum, & igitur incommenſurabile ipſi M O medio. Quare (per primam ſexti) M N N X (eandem rationem ipſis M O O X habentes) incommenſurabiles erunt longitudine, ſed ſunt potentia commẽſurabiles. Binæ igitur M N N X mediæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles, & certum comprehendentes: comprehendunt enim O X certum, cùm ipſi M N æquale ſit N O aliud quadrati latus. Tota igitur M X ex binis mediis prima erit, per 37 huius, quæ quidem poteſt rectangulum A G ſub certa A B & ex binis nominibus ſecunda A D comprehẽſum, cùm poſſit quadratũ S P ſibi æquum: aream igitur A B G D potens, eſt ex binis mediis prima. Si itaque areola comprehendatur ſub certa, & ex binis nominibus ſecunda, &c.

PROPOSITIO LVI.

Si areola comprehẽdatur ſub Certa, & Ex binis nominibus tertia, quæ areolam poteſt, incerta eſt, appellatur Ex binis mediis ſecunda.

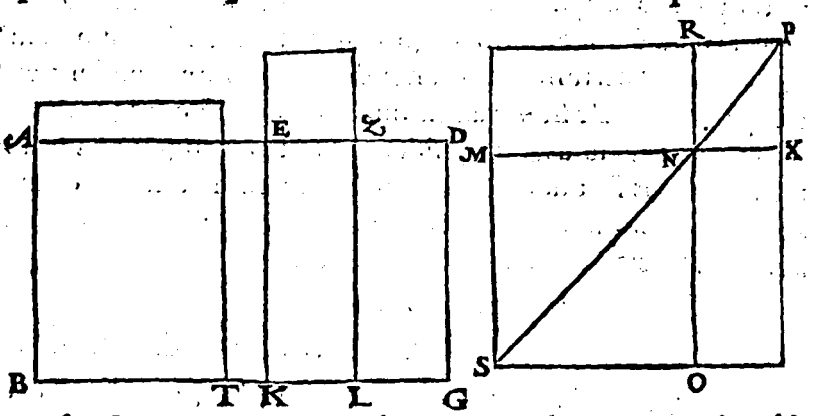


Cõprehendatur area A B G D ſub certa A B & ex binis nominibus tertia A D: Dico arcã A B D G potentem, vocari ex binis mediis ſecundam. Suppoſita præcedentium cõſtructione, quoniam A D ex binis mediis tertia eſt, neutrum eius nomen A E E D erit longitudine ipſi propoſitæ A B commenſurabile, per tertiam diffinitionem binomiorum, & tamẽ ſunt certæ A E E D, nomina. Quæ igitur ſub ipſis rectangula A K E G media ſunt (per 21 huius) & incommenſurabilia, per primam ſexti, cùm A E E D ſint longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia tertium binomium eſt A D maius nomen A E plus poteſt minore, eo quod ſit à ſibi longitudine commenſurabili. Secabitur itaque (per ſecundam partem 17 huius) A E per I in A I I E longitudine commenſurabiles. Quare A T ipſi I K (per primam ſexti) commenſurabile erit: & proinde M O ipſi R X commenſurabile, & vtrumque medium, per corollarium 23 huius, cùm ſint commenſurabilia toti conflato ex quadratis M O R X ipſi A K æqualibus, per vndecimam huius. Mediæ itaque potentia commenſurabiles erunt, M N N X. Cùm autem bina E L E G ſint commenſurabilia, dimidium nempe toti, alterum autem ipſorum E G alicui A K ſit incommenſurabile, & reliquum E L eidem A K incommenſurabile erit, per coroll. ſecundum decimæ huius. Similiter duorum A K A T reliquum A T ipſi E L eſſe incommenſurabile, & proinde M O O X ipſis A T E L æqualia, incommenſurabilia patebunt: rectæ itaque M N N X (per primum ſexti) longitudine incommenſurabiles exiſtent. Mediæ igitur potentia tantùm commenſurabiles erũt M N N X: quæ quidem medium comprehendunt, quod ſub O N N X æquum ipſi E L medio, cùm M N ſit æqualis ipſi O N reliquo lateri quadrati. Tota igitur M X ex binis mediis ſecunda erit, per

38 huius. Quæ cùm poſſit quadratum S P, æquum ipſi rectangulo A B G D, ipſa M X (ex binis mediis ſecunda) poterit ipſum rectangulum A B G D ſub certa A B & ea quæ ex binis nominibus tertia A D comprehenſum. Si itaque areola ſub certa, & ex binis nominibus tertia comprehendatur, quæ areolam, &c.

PROPOSITIO LVII.

Si areola comprehendatur ſub Certa, ac ex binis nominibus quarta, quæ areolam poteſt, incerta eſt vocatúrque Maior.

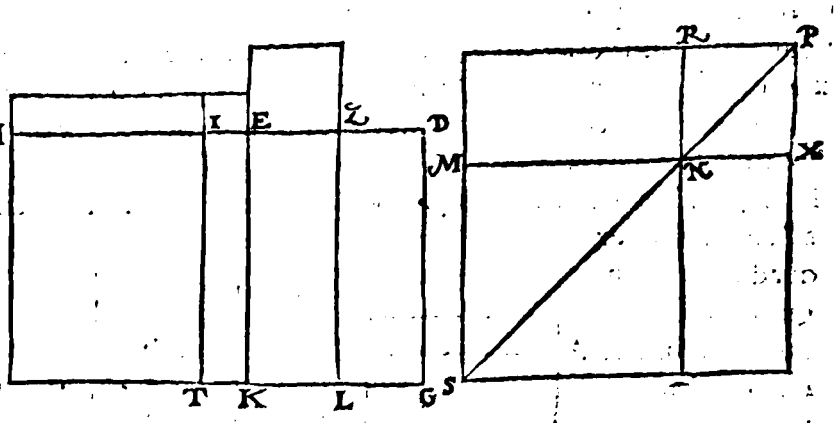


Cõprehenditur areola A B G D ſub certa A B & ea quæ ex binis nominibus quarta A D: Dico aream A B G D potentẽ, eſſe eam quę dicitur Maior. Suppoſita nanque priorum figurarum conſtructione, quoniam ex binis nominibus quarta eſt A D ſecta in E, maius eius nomen A E plus poteſt minore E D, eo quod à ſibi longitudine incommenſurabili, per 4 binomiorum diffinitionem, & ideo quartæ parti eius quod à minore E D æquum ipſi A E comparatum, ſecat ipſam A E in I per incommenſurabilia longitudine, per ſecundã partem 18 huius. Incommenſurabilia igitur erunt A T & I K (per primam ſexti) adinuicem, & toti A K, per 12 huius. Rurſus quia A D eſt ex binis nominibus quarta, maius nomen A E ipſi propoſitæ certæ A B longitudine commenſurabile erit, per eandem 4 diffinitionem, ſub A B & A E: igitur comprehenſum A K certum eſt, per 19 huius. Diuiſum quidem in A T I K incommenſurabilia, igitur quadrata M O R X (ipſis A T I K æqualia) incommenſurabilia erunt. Rectæ itaque M N N X potentia incommenſurabiles erunt, efficientes conflatum ex quadratis earum M O R X certum, cùm ſit æquum ipſi A K certo. Cæterùm quia binarum longitudine commenſurabilium A E A B, altera A E alicui E D eſt longitudine incommenſurabilis, ſunt enim nomina binomij, & reliqua A B eidem E D longitudine incommenſurabilis erit, per corollarium ſecundum decimæ huius: quæ quidem cùm certæ ſint, potentia igitur tantùm ſunt commenſurabiles, ſub ipſis igitur comprehenſum E G medium eſt, per 21 huius, & E L (ipſi E G commenſurabile) medium, per coroll. 23 huius, nempe totius E G dimidium: & ideo medium erit O X, æquale ipſi E L poſitũ, & ſub ipſis M N N X (hoc eſt N O N X) comprehenſum: ſed ipſi O X æquum eſt M R, per 43 primi, totum igitur conflatum ex M R O X (bis ſcilicet ſub ipſis M N N X) mediũ eſt, per idem coroll. 23 huius. Tota itaque M X ex binis M N N X potentia incommenſurabilibus compoſita, efficientibus conflatum ex earum quadratis M O R X certum: quod autem bis ſub ipſis O X M R medium, dicetur Maior, per 39 huius, quæ quidem cùm poſſit quadratum S P, æquum rectangulo A B G D, ex hypotheſi, ea poterit idem rectangulũ A B G D, ſub certa A B & ex binis nominibus quarta A D, comprehenſum. Si itaque areola comprehendatur ſub certa, &c.

PROPOSITIO LVIII.

Si areola comprehendatur ſub Certa ac Ex binis nominibus quinta, quæ areolam poteſt, incerta eſt, vocata Certum mediúmque potens.

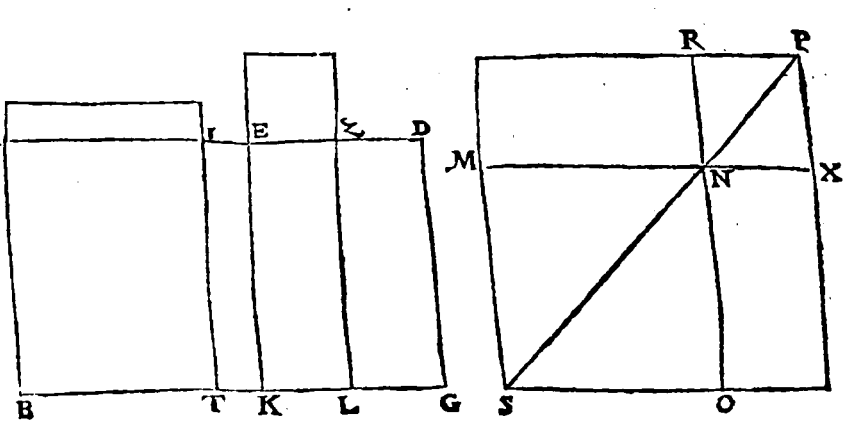
Eſto



Esto areola A B G D cõprehẽsa sub certa A B ac ex binis nominibus quinta A D : Dico rectã, quæ aream A B G D potest, incertam esse, quæ dicitur certum mediúmque potens. Repetamus priorum constructionem, quoniam ex binis nominibus quinta est A D secta in E, minus eius nomen E D propositæ certæ A B est longitudine commensurabile, per quintam binomiorum diffinitionem, sub certa A B & eadem E D igitur comprehensum, E G certum est, ex 19 huius, quare eius dimidium E L certum erit, & proinde certa erunt O X M R, ipsis E L Z G æqualia. Cùm autem binarum A B E D commensurabilium, altera E D sit alicui A E longitudine incommensurabilis, & reliqua A B eidem A E longitudine erit incommensurabilis, per secundum coroll. decimæ huius. Quod igitur sub ipsis A K medium est, cùm sint ideo certæ potentia tantùm commensurabiles, per 21 huius: cùm autem A D sit quinta, maius nomen A E plus potest minore, eo quod à sibi longitudine incommensurabili, per quintam diffi. binomiorũ, quartæ igitur parti eius quod à minore E D æquum, ad ipsam A E proiectum eam secabit in I per incommensurabiles A I I E longitudine, per secundam partem 18 huius: & ideo A T I K incommensurabilia erunt, per primam sexti, totum A K medium componentia. Et proinde M O R X quadrata (ipsis A T I K æqualia (incommensurabilia erunt, conflatũ ex ipsis medium efficientia. Rectæ igitur M N & N X (ea incommensurabilia potentes) potentia incommensurabiles erunt, efficientes conflatum ex earum quadratis M O R X medium: quod autem bis sub ipsis (hoc est O X M R) ostensum est certum. tota itaque M X incerta est, vocata certum mediúmque potens, per 40 huius, quæ quidem potest quadratum S P rectangulo A G ex hypothesi, æquum: ea igitur M X, quę aream A B G D (sub certa A B & ex binis nominibus quinta A D comprehensam) potest, vocatur certum mediumq; potens. Si itaque areola comprehendatur sub certa, & ex binis nominibus quinta, &c.

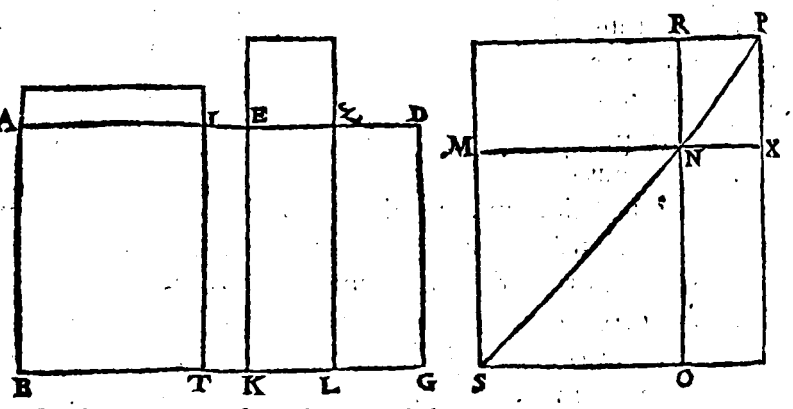
PROPOSITIO LIX.

Si areola comprehendatur, sub Certa & Ex binis nominibus sexta, quæ areolam potest, incerta est, quæ dicitur Bina media potens.



Sub certa proposita A B & ea quæ ex binis nominibus sexta A D, comprehendatur areola A B G D: Dico rectam potentem aream A B G D incertam esse, quæ dicitur bina media potens,

ſumpta nanque priorũ conſtructione, quoniam A D ex binis nominibus eſt ſexta, neutra binarum certarum A E E D ipſi propoſitæ A B eſt commenſurabilis, per ſextam diffinitionem binomiorum, quare vtrũque A K E G medium erit, per 21 huius: quia verò incommenſurabiles ſunt longitudine A E E D, binomij nomina, incommenſurabilia erunt media illa A K E G adinuicem, per primam ſexti, & proinde ipſis A K E G æqualia (ſcilicet M O R X quadrata, & O X M R rectãgula) media erunt, & conflatum ex quadratis, rectangulis ſimul ſumptis incommenſurabile erit, per 13 huius. Rurſus cùm A D ſit ſexta, maius eius nomen A E plus poteſt minore E D, eo quod à ſibi longitudine incommenſurabili, per eandem ſextam diffi. binomiorum. Quartæ igitur parti eius quod à minore E D æquum (hoc eſt ipſi ex E Z) ad maiorem A E comparatum, deficiens ſpecie quadrata, ipſam A E ſecabit per incommenſurabiles longitudine A I I E, per ſecundam partem 18 huius, quare incommenſurabilia erunt (per primam ſexti) A T I K, æqualia quidem quadratis M O R X: & idcirco ipſa M O R X quadrata incommenſurabilia erunt. Rectæ itaque M N N X (eorum latera) potentia incommenſurabiles erunt, efficientes quidem conflatum ex earum quadratis M O R X medium, quod autem bis ſub ipſis rectangulum O X & M R medium, & incommenſurabile inſuper ipſi compoſito ex quadratis, vt oſtenſum eſt. Tota ideo M X recta bina media potens dicitur, per 41 huius: quæ cùm poſſit quadratũ S P æquum rectangulo A G, ea M X poterit idem rectãgulum A B G D ſub certa A B & ea quæ ex binis nominibus ſexta A D, comprehenſum. Si igitur areola comprehendatur ſub certa, & ex binis nominibus ſexta, &c.



MONITVM.

Reaſſumit hîc Theon lẽma non ſuo loco, ſcilicet quadrata inæqualium ſectionum alicuius rectæ maiora eſſe rectangulo bis ſub eis comprehenſo. Nam eodem vſus eſt demonſtrans 39 huius, quo loco ſatis ſupérque monuimus huius demonſtrationem lemmatis: fruſtra igitur illud idem repeteremus, quod corollario ſeptimæ ſecundi diximus.

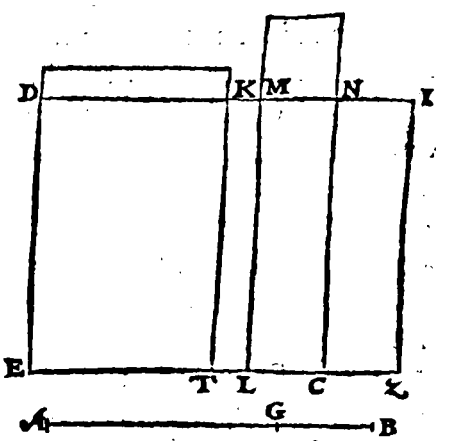
PROPOSITIO LX.

Quod ex ea quæ Ex binis nominibus ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus primam.

Eſto recta ex binis nominibus A G B, cuius maius nomen ſit A G, minus verò G B. Exponatur autem certa D E, cui (per 45 primi) applicetur æquum quadrato ex A B, ſitq; D E Z I latitudinem efficiens D I: Dico D I eſſe ex binis nominibus primam. Conſtituatur rurſus ad rectam D E æquum quadrato A G, ſitq; D E T K, Æquum verò quadrato G B, quod ſit K T L M, per eandem 45 primi. Reliquum igitur M Z ei quod bis ſub A G G B æquum erit, per quartam ſecundi. Cùm totum ex A B æquetur toti D Z, & minus ipſo D L erit M Z, cùm quadrata ex A G G B inæqualibus ſint maiora rectangulo bis ſub ipſis cõprehenſo, per coroll. ſeptimæ ſecundi. Cùm autem A G

G B

G B nomina ſunt certæ potentia commenſurabiles, earum quadrata erunt certa, & commenſurabilia. Quare D T K L rectangula (eis æqualia) certa erunt, & inuicem commenſurabilia, & igitur (per primam ſexti) rectæ D K K M longitudine commenſurabiles. Cùm autem certum ſit totum D L, ex certis D T K L compoſitum, & ad certam D E comparatum latitudinem D M certam longitudine ipſi D E certæ commẽſurabilem (per 20 huius) efficiet. Quia verò ſub A G G B medium eſt, per 21 huius, id quod bis ſub ipſis mediũ erit, per coroll. 23 huius, & proinde

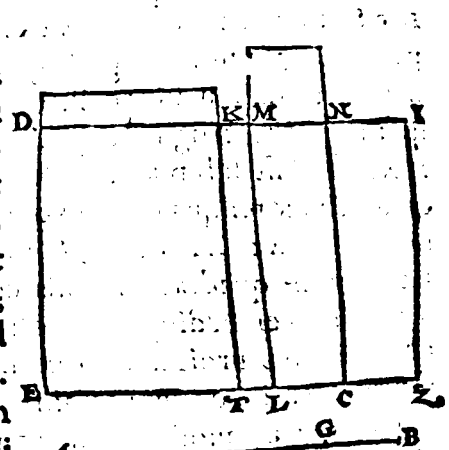


M Z (ipſis æquum) medium erit, & ad certam D E comparatum, latitudinem M I certam potentia tantùm ipſi D E commenſurabilem efficiet, per 22 huius. Quia verò binarum D E D M commenſurabilium, altera D E alicui M I longitudine incommenſurabilis eſt, vt modò patuit: Et reliqua igitur D M eidem M I incõmenſurabilis erit longitudine, per ſecundum coroll. decimæ huius. Sed cùm certæ ſint D M M I, potentia tantùm commenſurabiles erunt. Tota itaque D I ex binis nominibus erit, per 36 huius. Secetur igitur M I bifariam, in N ducta N C parallela, ipſis D E I Z, duplum erit M Z ipſius M C, per primam ſexti. *Ipſi verò* M Z æquum eſt duplum eius quod ſub A G G B. *Æquum igitur erit* M C *ei quod* ſub A G G B. Sed quod ſub A G G B medium proportionale *eſt, inter quæ* ex A G & G B quadrata, per coroll. 25 huius. Igitur M C mediũ proportionale erit inter D T K L ipſis quadratis æqualia. Quare & M N media inter D K & K M proportionalis erit, per primã ſexti. Quod itaque ſub extremis D K K M, æquum eſt ei quod à media M N, per 17 ſexti. Sunt igitur binæ rectæ D M M I inæquales. Quartæ autẽ parti eius quod à minore M I æquum (ſcilicet ei quod ex M N) ad maiorẽ D M comparatum, quod ſcilicet ſub D K K M, deficiens ſpecie quadrata, per coroll. 28 ſexti, & ipſam D M maiorem per commenſurabilia longitudine D K K M diſtribuit. Maior igitur D M plus poteſt minore M I, eo quod à ſibi longitudine commenſurabili, per 17 huius, fuit autem maius nomen D M propoſitæ certæ D E longitudine commenſurabilẽ. Tota igitur D M I eſt ex binis nominibus prima, per 1 binomiorum diffinitionem. Quod itaque ex ea quæ ex binis nominibus ad certam comparatum, &c.

PROPOSITIO LXI.

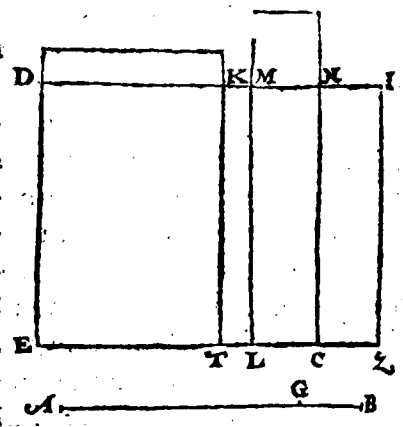
Quod ex ea quæ Ex binis mediis prima, ad Certam comparatum latitudinem efficit Ex binis nominibus ſecundam.

Eſto A B ex binis mediis prima, diuiſa in G, cuius maius nomen ſit A G. Exponatur verò certa D E, cui (per 45 primi) applicetur æquum ei quod ex A B, quod ſit D E Z I: Dico D I latitudinem effectam, eſſe ex binis nominibus ſecundam. Sit (vt præcedenti diximus) ipſis quadratis ex A G & G B æquum D T & K L, his verò quæ bis ſub ipſis, ſint æqualia M C & N Z, ſecta M I bifariam in N, ſitq; quod ex M N æquũ ei quod ſub D K K M, quod ad D M proiectum deficiat, ſpecie quadrata, &c. Manifeſtum eſt (vt in præcedenti) D L (æquum quadratis ex A G G B) maius eſſe ipſo M Z, æquali



eisque

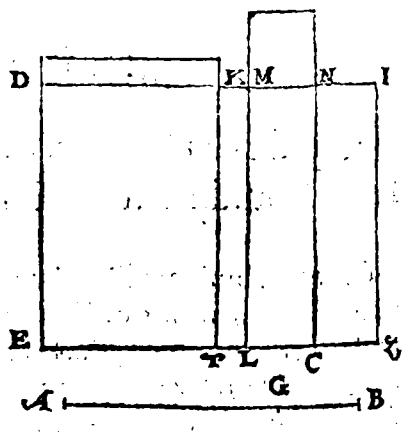
cisque bis sub ipsis, per coroll. septimæ secundi, & ideo D M ipsa M I maiorem esse, per primam sexti. Cùm autem A B sit ex binis mediis prima, quod sub A G G B certum est, per 37 huius: certum igitur erit M Z eius duplum. Quod quidem ad certam D E proiectum, latitudinem M I certam longitudine ipsi D E commensurabilem efficit, per 20 huius. Quia verò duarum A G G B mediarum quadrata sunt commensurabilia, & D T K L (ipsis æqualia) erunt commensurabilia, & media. Et proinde totum D L vtrique commensurabile, per vndecimam huius, medium erit, per coroll. 23 huius. Et ideo (per primam sexti) rectæ D K K M longitudine commensurabiles erunt: & cùm D L sit medium, ad certam D E applicatum, latitudinem D M efficit certam, sed longitudine incommensurabilem ipsi D E: quia verò D E & M I sunt commensurabiles, & D E ipsi D M incommensurabilis est. Et reliqua M I eidem D M incommensurabilis erit, per secundum coroll. 10 huius. Binæ itaque D M M I certæ, potentia tantùm commensurabiles, totam D I ex binis nominibus, per 36 huius, efficiunt. Dico quòd & secundam, cùm maior ostensa sit D M ipsa M I. Ipsa verò M I (minus nomen) ostensa sit propositæ certæ D E longitudine commensurabilis, insuper binarum rectarum inæqualium D M M I, æquum quartæ parti eius quod à minore M I (scilicet quadrato ex M N) ad maiorem applicatum sit, quod sub D K K M, deficiens specie quadrata & per commensurabilia longitudine ipsam D M (per D K K M) diuiserit. Maior D M plus poterit minore M I, eo quod ex sibi longitudine commensurabili, per 17 huius. Tota itaque D I ex binis nominibus erit secunda, per secundam diffinitionem binomiorum. Quod igitur ex ea quæ ex binis mediis prima ad certam comparatum, &c.



PROPOSITIO LXII.

Quod ex ea quæ Ex binis mediis secunda ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus tertiam.

Sit ex binis mediis secunda A B secta in A G maius & G B minus, nomina. Sit insuper certa proposita D E, cui (per 45 primi) comparetur æquum quadrato quod ex A B rectangulum D Z I, latitudinem efficiens D I: Dico D I rectam esse, ex binis nominibus tertiam. constituantur (vt binis præcedentibus diximus) D T & K L æqualia quadratis ex A G G B. Insuper M Z æquum rectangulis quæ bis sub A G G B, secta bifariam in N C. Proiecto insuper ad ipsam D M rectangulo æquali, quadrato ex M N, quod sit sub D K K M, deficiente specie quadrata, & reliqua ex prius ostensis: quoniam A B est ex binis mediis secunda, ea sit ex binis A G G B mediis, & medium comprehendentibus, per 38 huius. Quare D L æquum quadratis mediis commensurabilibus (ex A G - G B) medium erit, ac M Z æquum ei medio quod bis sub ipsis A G G B, medium erit: quæ quidem media ad certam D E proiecta, latitudines certas quidem D M M I efficiunt, sed longitudine ipsi D E incommensurabiles, per 22 huius. Cùm autem sit vt A G ad G B, sic quod ex A G ad quod sub A G, G B, per lemma 21 huius: quadratum igitur ex A G rectangulo

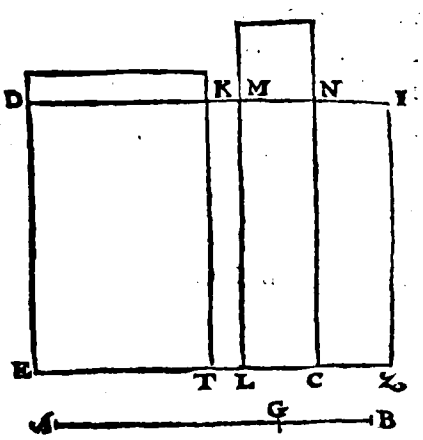


ctangulo sub A G G B incommensurabile erit, nam A G G B longitudine sunt incommensurabiles mediæ, per 38 huius: & proinde D T ipsi M C incommensurabile erit, cùm sint incommensurabilibus æqualia: & igitur (per primum corollarium decimæ huius) totum D L ipsi M C, necnon totum M Z ipsi D L incommensurabile erit. Nam alterum C I, quod ex A G, est commensurabile: alterum verò eidem incommensurabile. Quare (per primam sexti) D M M I certæ rectæ longitudine incommensurabiles erunt, potentia igitur tantùm erunt ipsæ D M M I commensurabiles, cùm sint certæ. Tota igitur D I ex binis est nominibus, cuius quidem neutrum nomen D M vel M I propositæ D E commensurabile fuit. Cùm autem D T K L sint æqualia quadratis quæ ex A G G B commensurabilibus, ipsa D T K L commensurabilia erunt, & proinde (per primam sexti) rectæ D K K M longitudine commensurabiles erunt. Ad ipsam igitur D M maiorem quod sub D K K M proiectum æquale quartæ parti eius quod à minore (hoc est quadrato ex M N) ipsam D M in longitudine commensurabiles distribuit, deficiens specie quadrata: maior igitur D M plus potest minore M I, eo quod à sibi longitudine commensurabili. Tota itaque D I ex binis nominibus erit tertia, per tertiam diffinitionem binomiorum. Quod igitur ex ea quæ ex binis mediis secunda, &c.

PROPOSITIO LXIII.

Quod ex Maiore ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus quartam.

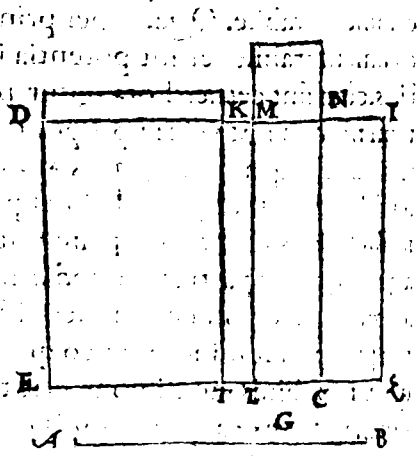
Esto Maior A B, cuius maius nomen sit A G: sit certa D E: quod ex A B verò ad D E certam applicatum, per 45 primi, latitudinem efficiat D I, & reliqua, vt proximis docuimus, constituantur: Dico rectam D I esse ex binis nominibus quartam. Cùm enim A B sit maior, conflatum ex quadratis A B B G certum erit: quod verò sub ipsis medium, per 39 huius: certum igitur erit D L, æquum quadratis, medium verò M Z, duplum eius, quod sub ipsis, per corollarium 23 huius: & idcirco certæ erunt D M & M I rectę, quarum D M propositæ D E longitudine commensurabilis est, per vigesimam huius: M I verò longitudine eidem D E incommẽsurabilis, per 22 huius. Quoniam autem D M & D E sunt commensurabiles, alteráque earum D E alicui M I est incommensurabilis, reliqua D M eidem M I (per secundum corollarium decimæ huius) incommensurabilis erit longitudine. Potentia tantùm igitur commensurabiles sunt, certæ D M M I, & proinde tota D I ex binis nominibus: Dico & quarta, nam ostensum est nomen maius esse D M, cùm D L æquale sit quadratis ex A G G B, maioribus ipso M Z per corollarium septimæ secundi, & propositæ D E certæ longitudine commensurabile. Præterea cùm binæ A G G B sint potentia incommensurabiles, per eandem 39 huius, quæ ex ipsis quadrata (seu D T K L ipsis æqualia) incommensurabilia erunt, & proinde rectæ D K K M (per primam sexti) longitudine incommensurabiles erunt: diuisæ autem per applicationem eius quod sub D K K M, quod æquatur quartæ parti eius quod à minore M I, iuxta 18 huius, itaque maior D M plus potest minore M I, eo quod à sibi longitudine incommensurabili: ipsa igitur D I ex binis nominibus est quarta, per quartam diffinitionem binomiorum. Quod ergo ex Maiore ad certam comparatum, &c.



PROPO

PROPOSITIO LXIIII.

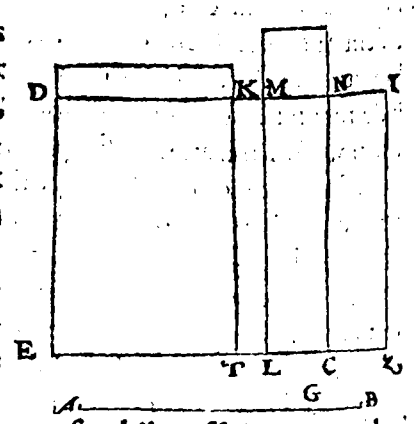
Quod ex certum mediúmque potente, ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus quintam.



Esto certum mediúmque potens A B recta, cuius maius nomen sit A G. Quod autem ex A B applicetur (per 45 primi) ad expositam certam, quæ sit D E, latitudinem efficiens D I. Reliqua item vt prioribus construximus: Dico rectam D I esse ex binis nominibus quintam. Cùm A B sit certum mediúmq; potens, compositum ex quadratis A G, G B medium erit, & proinde D L medium. Quod verò sub ipsis A B B G certum erit (per 40 huius) & proinde M Z duplum, eius quod sub ipsis certum erit. Quare latitudo M I recta certa longitudine ipsi propositæ D E commensurabitur, per 20 huius. Recta verò D M certa longitudine eidem D E propositæ certæ incommensurabilis erit, per 22 huius. Sed duarum D B M I commensurabilium altera D E alicui D M incommensurabilis est, & reliqua M I eidem D M (per secundum coroll. 10 huius) longitudine incommensurabilis erit. Potentia itaque tantùm commensurabiles certæ erunt D M M I: Tota igitur D I ex binis erit nominibus: Dico quòd & quinta. Nam minus nomen M I ostensum est propositæ D I longitudine commensurabile. Cùm autem A G G B sint potentia incommensurabiles, per 40 huius, D T K L (ipsis potentiis æqualia) incommensurabilia erunt. Et proinde (per primam sexti) D K K M incommensurabiles erunt longitudine. Quare comparatum sub D K K M, æquum quartæ parti eius quod à minore M I, deficiens specie quadrata, ac per incommensurabiles ipsam D M secans in K, efficit (ex 18 huius) maiorem D M plus posse minore M I eo quod à sibi longitudine incommensurabili. Recta igitur D I erit ex binis nominibus quinta, per quintam diffinitionem binomiorum. Quod itaque ex certum mediúmque potente, ad certam, &c.

PROPOSITIO LXV.

Quod ex Bina media potente ad Certam comparatum latitudinem efficit Ex binis nominibus sextam.

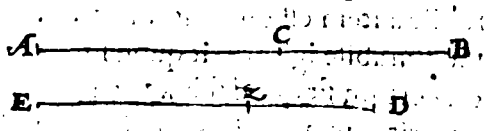


Sit recta A B bina media potens, cuius maius nomen esto A G. Exponatur certa D E, cui (per 45 primi) constituatur æquum quadrato ex A B, sitq; latitudinem efficiens D I, & reliqua priorum more cõstruantur: Dico rectam D I esse ex binis nominibus sextam. Cùm autem recta A B sit bina media potens, quadrata sectionum A G G B componunt medium, scilicet D L. Quod insuper sub ipsis medium, per 41 huius, & proinde M Z (duplum ei medium. Quæ quidem media ad certam D E apposita, vtraſque latitudines D M M I certas longitudine propositæ D E incommensurabiles efficiunt, per 22 huius. Præterea (ex eadem 41 huius) quod sub ipsis medium, scilicet M Z, est incommen

mensurabile medio composito ex quadratis, ipsi scilicet D L. Ideo (per primam sexti) certæ D M M I longitudine incommensurabiles erunt. Potentia igitur tantùm commensurabiles. Tota proinde D I ex binis est nominibus, per 36 huius: Dico quòd & sexta. Cùm (ex præfata 41 huius) quadrata rectarum A G G B sint incommensurabilia, & proinde ipsis æqualia D T K L rectãgula. Sequetur (ex prima sexti) rectas D K K M longitudine incommensurabiles esse. Quare ad maiorem D M rectam comparatur quod sub D K K M, æquum quartæ parti eius quod à minore M I quadrato scilicet M N, deficiens specie quadrata, ac ipsam D M (per incommensurabilia) longitudine distribuit in K. Maius igitur nomen D M, plus potest minore M I, per 18 huius, eo quod fit à sibi longitudine incommensurabili. Sed neutrum ipsorum nominum D M vel M I, ipsi propositæ D E longitudine fuit commensurabile. Tota itaque D I ex binis nominibus recta dicetur sexta, per sextam diffinitionem binomiorum. Quod igitur ex bina media potente ad certam comparatum, &c.

PROPOSITIO LXVI.

Ei quæ Ex binis nominibus longitudine commensurabilis, ipsa quoque Ex binis nominibus est, ac in ordine eadem.



Sit ex binis nominibus cuiusuis ordinis A B, maiúsque eius nomen sit A G. Eidem porrò A B commensurabilis esto E D: Dico E D ex binis nominibus esse, & insuper eiusdem ordinis cum ipsa A B. Secetur E D (per decimam sexti) in Z similiter ipsi A B. Erit igitur A G ad G B vt E Z ad Z D, & componendo sicut A B ad G B sic E D ad Z D, per 18 quinti, vicissim itaque (per 16 quinti) erit A B ad E D sicut G B ad Z D, & ideo (per 19 quinti) reliquum A G ad reliquum E Z, sicut A B ad E D: Commensurabiles autem sunt A B E D, ex hypothesi: commensurabiles igitur erunt G B ipsi Z D, & A G ipsi E Z, per 13 huius. Certæ item sunt A G G B, per 36 huius, certæ igitur erunt E Z Z D, per sextam diffinitionem huius. Quia verò A G ipsi G B longitudine est incommensurabilis, & E Z ipsi Z D longitudine incommensurabilis erit, per secundam partem 13 huius. Potentia igitur tantùm erunt commensurabiles certæ E Z Z D. Tota igitur E D ex binis est nominibus. Ostendamus quòd eiusdem sit ordinis E D cum ipsa A B. Si enim A G plus possit minore G B à sibi longitudine commensurabili, & E Z ipsa Z D simili maius poterit, per 16 huius. Si quidem maius nomen A G propositę fuerit commensurabile longitudine, & E Z ipsi propositæ commensurabile longitudine erit, per decimam huius. Nam proposita & E Z eidem A G sunt commensurabiles, & sic erit vtraque prima. Si minus G B & minus Z D, per eandem, sicq; vtraque secunda. Si verò neutrũ propositæ commensuretur ipsorum A G G B nominum, & neutrum ipsorum E Z Z D eidem propositæ commensurabitur, per coroll. secundum decimæ huius. Nam binæ A G E Z sunt commensurabiles ostensæ, similiter & G B Z D inter se, & sic vtraque erit tertia. Si quidem maior A G plus possit minore G B à sibi longitudine incommensurabili, & E Z ipsa Z D eodem plus poterit, per secundam partem 10 huius. Hoc quidem transposito, si maius propositæ commensuretur, & maius ipsius E D eidem propositæ commensurabitur (vt patuit) & sic quarta. Si minus, & minus, & sic quinta. Si verò neutrum, & neutrũ, sicq; sexta. Ei itaque quæ ex binis nominibus longitudine commensurabilis, &c.

PROPOSITIO LXVII.

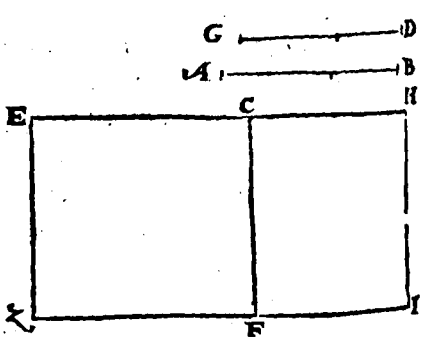
Ei quæ Ex binis mediis longitudine commensurabilis, &

ipſa Ex binis mediis eſt, & in ordine eadem.

Sit ex binis mediis recta A B, cuius maius nomen eſto A E, ipſi autem A B, commenſurabilis eſto longitudine G D: Dico G D rectam ex binis mediis eſſe, & in ordine eandem ipſi A B. Secetur (per decimam ſexti) G D in Z ſimiliter ipſi A B. Erit A E ad E B ſicut G Z ad Z D, & componendo (per decimamoctauam quinti) A B ad B E ſicut G D ad D Z. Et viciſſim A B ad G D vt B E ad D Z, per 16 eiuſdem. Et (per 19 eiuſdem) reliquum A E ad G Z ſicut A B ad G D. Commenſurabilis autem eſt A B ipſi G D, per hypotheſim, commenſurabilis igitur erit D Z ipſi B E, ac G Z ipſi A E, per 13 huius. Quia verò A E ipſi E B longitudine incommenſurabilis eſt, & (per eandem) G Z ipſi Z D longitudine incommenſurabilis erit. Cùm autem potentiæ mediarum A E E B ſint commenſurabiles, per 37 & 38 huius, & ipſarum G Z Z D potentiæ commenſurabiles erunt, per 13 huius. Cùm linearum proportionalium quadrata ſint proportionalia, per 22 ſexti. Mediæ autem ſunt A E E B, mediæ igitur erunt G Z Z D, per 23 huius. Ex binis itaque mediis erit G D. Quod autem eiuſdem ordinis ſit ipſi A B dicamus. Quoniam eſt A E ad E B ſicut G Z ad Z D, erit (per lemma vigeſimæ primæ huius) quadratum ex A E ad quod ſub A E E B, ſicut quadratum ex G Z ad quod ſub G Z Z D. Et viciſsim (per 16 quinti) ſicut quadratum ex A E ad quadratum ex G Z, ſic quod ſub A E E B ad quod ſub G Z Z D: Commenſurabile autem eſt quadratum A E ei quod ex G Z, per illationem nonæ huius, commenſurabile igitur erit quod ſub A E E B ei quod ſub G Z Z D, per 13 huius. Si igitur certum ſit quod ſub A E E B, certum erit quod ſub G Z Z D. Et ſic vtraque A B & G D erit prima ex binis mediis, per 37 huius. Si verò quod ſub A E E B medium fuerit, medium erit quod ſub G Z Z D, per coroll. 23 huius. Sícque vtraque A B & G D erit ſecunda, ex binis mediis, per 38 huius. Ei itaque quæ ex binis mediis longitudine commenſurabilis, &c.

COROLLARIVM.

Ei quæ Ex binis mediis potentia tantùm commenſurabilis, ea Ex binis mediis eſt, & in ordine eadem.



Sit A B ex binis mediis prima, aut ſecunda, cui commenſurabilis eſto G D. Sit item certa E Z, cui (per 45 primi) applicetur æquum quadrato ex A B, ſitq; E Z F C, æquum verò quadrato G D eſto C F I H, quoniam E F rectangulum eſt, quod ex binis mediis ſit prima, illud ad certam proiectum, latitudinem E C efficit binomium ſecundum, per 61 huius. Quia verò (ex hypotheſi) commenſurabilia ſunt quadrata A B G D, cõmenſurabilia erunt (eis æqualia) E F C I rectangula, & ideo (ex 1 ſexti) commenſurabiles longitudine rectæ E C C H, atqui E C fuit ex binis nominibus ſecunda, & igitur C H ex binis nominibus ſecunda erit, per 66 huius: quod autem C I, ſub certa E Z vel C F & ex binis nominibus ſecunda C H comprehenditur, illud potens, eſt ex binis mediis prima, per 55 huius, quæ quidem illud potens fuit G D quæ ideo eſt eiuſdem ordinis ipſi A B. haud ſecus oſtendetur ſi A B fuerit ex binis mediis ſecunda, ea etenim efficiet latitudinem E C Binomium tertium, cui longitudine commenſurabilis erit C H, & ideo C H erit tertium, ſub quo & certa comprehenſa areola, fit potentia eius quæ ex binis mediis ſecunda, quæ quidem fuit ipſa G D. Ei igitur quæ ex binis mediis

longi

longitudine aut potentia tantùm commensurabilis, ea ex binis mediis erit, eiusdémque ordinis.

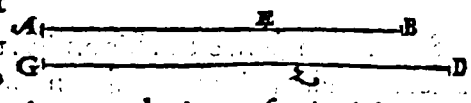
MONITVM.

Secus sentiendum est in binomiis, eorum etenim potentiæ tantùm commensurabiles, eundem binomij ordinem produci non cogunt, sed tantùm vtrasque in tribus prioribus aut certæ tribus posterioribus simul inueniri, vt exemplo aperiamus. Sit ex binis nominibus prima A B, cuius C maius nomen esto A G, ipsi verò A B potentia tantùm commensurabilis sit D Z: Dico D Z non esse eiusdē ordinis ipsi A B. Nam si fieri posset, sit D Z eiusdem ordinis ipsi A B. Ipsa igitur D Z similiter secabitur in E, vt ipsa A B in G, per demonstratum sexagesimasexta huius. Non igitur aliter secabitur, per 42 huius: cùm ideo sit A B ad D Z, vt A G ad D E, sed A G & D E (maiora nomina) commensurabilia sunt adinuicem lōgitudine, per decimam huius, cùm sint eidem propositæ certæ commensurabiles, per primam binomiorum diffinitionem. Ipsæ igitur A B & D Z, longitudine commensurabiles erūt, per 13 huius, sed & potētia tantùm, ex hypothesi, quod fieri nō potest. Eodem argumento patebit, si posuerimus A B ex binis nominibus secundam: nam minora nomina G B & E Z eidem propositæ, & igitur adinuicem commensurarentur, & proinde ipsæ A B D Z eandem habentes rationem commensurarentur, contra suppositum. Præterea si comparentur ipsarum A B & D Z quadrata, ad certam C F, scilicet C I H L, ipsa efficiēt latitudines C H H K ex binis nominibus primas, per sexagesimam huius, cuiuscunque ordinis fuerint C I & H L applicata. Quare sub certa & binomio primo, patet omnes binomiorum contineri potentias (ex 54 huius) confusè. Non igitur necessariò potentiarum sola commensuratio, eundem binomiorū pariet ordinē. Idem patebit, si supponātur A B & D Z binomiū, quartum aut quintū, quotū potentiæ tantùm commēsurabiles, similiter vt priorū diuersum patiunt ordinem. Quoniam autem potentiæ A G G B & D E E Z commensurabiles sunt & proportionales, facilè patet, si A G ipsa G B maius possit à sibi longitudine commēsurabili, & D E maius ipsa E Z eodem posse, per 16 huius, vt sint binę A B D Z, simul ex tribus prioribus binomiis. Si verò ab incommensurabili, & reliqua ab incommensurabili maius poterit, per eandem, vt sint simul trium posteriorum. Cur autem de tertio & sexto binomiis, nihil in exemplo meminerimus id causæ est. Nam tertiæ & sextæ neutrum nomen longitudine commensurabile est ipsi C F prō positæ: quare longitudinis incommensuratio, ipsarum A B & D Z inter se nō repellit mutuam commensurationem binorum ad certam nominum. Nec obstat ipsis A G G B eidem C F incommensurabilibus existentibus simul & reliquas D E E Z eidem C F incommensurabiles existere, latior etenim multo est incommensuratio commensuratione. Licet autem decima huius eidem commensurabiles adinuicem commensurari cogat, Attamen eidem incommēsurabiles, inter se incommensurabiles esse cogi non poterunt, nec quidem commensurabiles esse, ob immensam incommensurabilium libertatem. Hac igitur de causa Euclides sex binomia sub vna tantùm incertarū denominationē compescebat, cùm non adeo inter se, vt cæteræ, distent: quæ quidem cæteræ, nec longitudine néve potentia vlla communicant, vt proximo, Supero fauente, dicemus. Ostendimus enim ex binis mediis primam & secundam eousque inter se discrepare, vt ne potentia tantùm commensurari possint, præcedenti corollario, cui simile sequentes habere patebit, vt earum sex singulas propriam sibi quantitatis vendicare naturam concipiamus.

PROPOSITIO LXVIII.

Maiori commenſurabilis, ea quoque Maior eſt.

Eſto Maior A B, cuius maius nomen ſit A E, ipſi verò A B quauis arte (ſaltem potentia) commenſurabilis exiſtat G D: Dico G D vocari Maiorem: ſecetur G D ſimiliter ipſi A B in Z, per decimam ſexti: erit itaque A E ad E B vt G Z ad Z D, & componendo (per 18 quinti) A B ad B E vt G D ad D Z, & viciſſim (per 16 quinti) A B ad G D vt B E ad D Z. Reliquum igitur A E ad reliquum G Z erit, vt A B ad G D, per 19 quinti, & proinde earum quadrata proportionalia erunt, ex 22 ſexti, ſcilicet quod ex A E ad quod ex E B, ſicut quod ex G Z ad quod ex Z D: incommenſurabilia autem ſunt quæ ex A E & ex E B: incommenſurabiles enim ſunt potentia A E E B, per 39 huius: incommenſurabilia itaque erunt quæ ex G Z & ex Z D, per 13 huius: ipſæ igitur G Z Z D rectæ potentia ſunt incommenſurabiles: quia verò fuit quod ex A E ad quod ex E B, ſic vt quod ex G Z ad quod ex Z D, erit componendo quæ ex A E & ex E B, ad quod ex E B, ſicut quæ ex G Z & ex Z D, ad quod ex Z D, per 18 huius, & viciſſim quæ ex A E & ex E B, ad quæ ex G Z & ex Z D ſicut quod ex E B ad quod ex Z D: quia rurſus fuit A B ad G D vt E B ad Z D, erit (per eandem 22 ſexti) quod ex A B ad quod ex G D, ſic quod ex E B ad quod ex Z D. Commenſurabile autem eſt quod ex A B ei quod ex G D, ex hypotheſi, commenſurabile itaque erit quod ex E B ei quod ex Z D, per decimamtertiam huius: ſed ſicut quod ex E B ad quod ex Z D, ſic fuerũt compoſita ex A E E B quadratis, ad compoſita ex G Z Z D quadratis. Compoſitum igitur ex A E E B quadratis, commenſurabile erit compoſito ex G Z Z D quadratis, per eandem 15 huius: Certum autem eſt compoſitum ex A E E B quadratis, per 39 huius, cùm ſit A B Maior, Certum igitur erit compoſitum ex G Z Z D quadratis, per ſextam diffinit. huius. Binæ itaque G Z Z D rectæ potentia incommenſurabiles ſunt, efficiẽtes compoſitum ex earum quadratis Certum. Ceterum cùm fuerit A E ad G Z vt A B ad G D, erit (per 22 ſexti) quod ex A E ad quod ex G Z, ſicut quod ex A B ad quod ex G D: commenſurabile autem eſt quod ex A B ei quod ex G D, ex hypotheſi. Commenſurabile igitur erit quod ex A E ei quod ex G Z: quia verò eſt vt A E ad E B, ſic G Z ad Z D, erit (per lemma 21 huius) quod ex A E ad quod ſub A E E B, ſicut quod ex G Z ad quod ſub G Z Z D, & viciſſim quod ex A E ad quod ex G Z ſicut quod ſub A E E B ad quod ſub G Z Z D, per 16 quinti: quod autem ex A E ei quod ex G Z commenſurabile fuit. Quod igitur ſub A E E B ei quod ſub G Z Z D commenſurabile erit per decimamtertiam huius: Medium autẽ eſt quod ſub A E E B, per 39 huius, Medium itaque erit quod ſub G Z Z D, per vigeſimamtertiam huius: ipſæ itaque G Z Z D binæ rectæ potentia incommenſurabiles, efficiunt conflatum ex earum quadratis Certum, quod autem ſub ipſis medium. Tota igitur G D (per trigeſimamnonam huius) incerta erit, quæ vocatur Maior. Maiori itaque commenſurabilis (quauis arte) Maior erit.



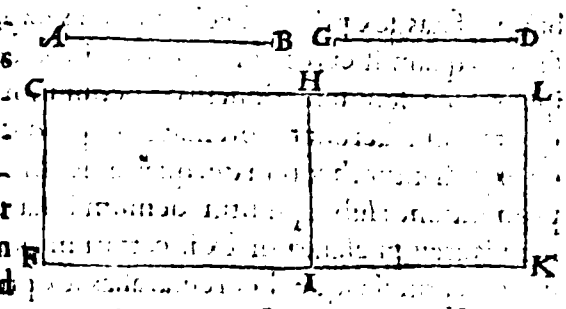
MONITVM.

Duas proximè ſequentes eodem huius argumento demonſtrare poſſumus, ſcilicet certum mediumq; potentem, & bina media potentem. Poſita enim (ex hypotheſi) potentiarum commenſuratione, ex cõſtructione autem ſimili ſectione, per eadem theoremata, optatum conſequemur. Quare has alia via demonſtrabimus, vt luculentior euadat diſciplina.

PROPOSITIO LXIX.

Certum mediúmque potenti commenſurabilis, & ipſa Certum mediúmque potens eſt.

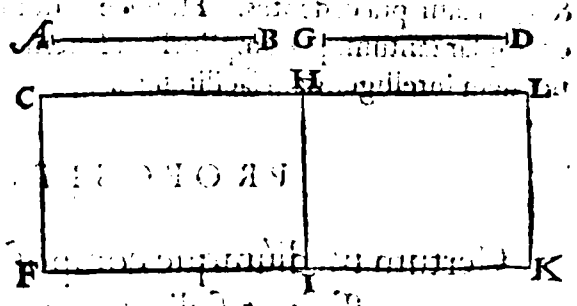
Proponatur recta Certum mediúmque potens A B, cui commensurabilis esto G D: Dico G D esse rectam, quæ dicitur Certum mediúmque potens: exponatur certa C F, cui (per quadragesimam quintam primi) comparetur æquum quadrato ex A B, rectangulum C I H. Item æquum quadrato G D, quod sit H I K L, latitudines efficiens C H & H L: quoniam G D ipsi A B commensurabilis est, saltem potentia tantùm, commensurabilia erunt C I & H K, eorum quadratis æqualia, & proinde (per primam sexti) commensurabiles erunt rectæ C H H L longitudine: quia verò C I (æquum ei quod ex A B Certum mediúmque potente) ad certam C F comparatur, latitudinem efficiens C H, ipsa C H est ex binis nominibus quinta, per 64 huius, cui quidem C H fuit commensurabilis longitudine H L: ipsa itaque H L est ex binis nominibus quinta, per 66 huius. Cùm autem areola H K comprehendatur sub certa C F (hoc est H I) & ea quæ ex binis nominibus quinta H L, quæ areolam H K potest, scilicet G D ex hypothesi, appellatur Certum mediúmque potens, per 58 huius. Certum igitur mediúmque potenti commensurabilis, &c.



PROPOSITIO LXX.

Bina media potenti commensurabilis, & ipsa Bina media potens est.

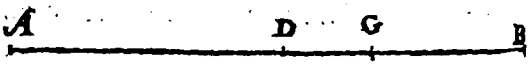
Esto recta A B Bina media potens, cui commensurabilis sit G D: Dico G D esse Bina media potentem. Repetatur prioris descriptio. Quoniam C I æquum ei quod ex A B, ad certam proiectum latitudinem C H efficit ex binis nominibus sextam, per sexagesimamquintam huius, quia verò C I & H K (æqualia quadratis A B & G D commensurabilibus) commensurabilia sunt, rectæ C H & H L longitudine commensurabiles erunt, per primam sexti: fuit autem C H binomium sextum, igitur H L erit binomium sextum, per 66 huius. quia porro H K continetur sub certa C F binomio sexto, H L, quæ aream H K potest, scilicet recta G D, bina media potens est, per 59 huius. Bina itaque media potenti, &c.



SCHOLIVM.

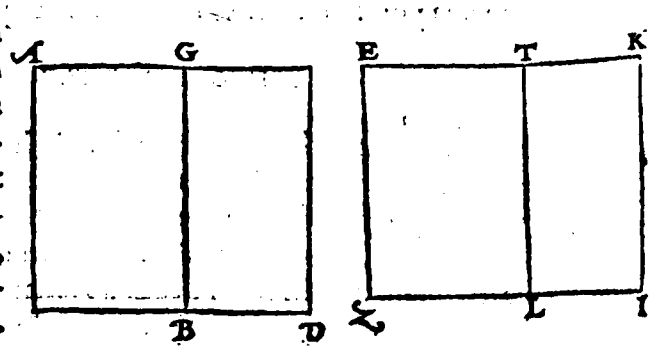
Hucusque septem egimus theorematum senaria, his sex præfatis incertis intelligendis necessaria. Priore senario inuentionem linearum (sex illas incertas generantium) septem propositionibus à vigesimanona huius inchoantes exposuimus, quarum priores binæ, vnica tantùm facilè tradi potuerunt, vt sex inuentionibus tantùm, sex incertæ generari dicantur. Secundo senario ex inuentarum compositione, sex incertas produci docuimus. Tertio senario cuiuslibet earum sex incertarum, vnam tantùm fieri posse diuisionem, in lineas eam incertam generantes. Quarto senario (prioris earum sextupla diffinitione præposita, eam in sex species distribuente) prioris speciei singularum inuentionem protulimus. Quinto senario certam cum singulis sex prioris speciebus, singulas (eodem ordine) sex incertarum potentias comprehendere docuimus. Sexto quidem senario, conuersim, sex incertarum singulas potentias certæ rectæ comparatas, suis latitudinibus

bus præfatas, ſex prioris ſpecies ſingulas exprimere concluſimus. Septimo tandem ſenario quamlibet rectam vni earum incertarum quauis arte commenſurabilem, ipſius illico denominationem conſequi monſtrauimus, cuius quidem ſenarij quinque tantùm fuerunt theoremata, eo quòd huius ſenarij ſecundum & tertium, vnico expediantur theoremate, quæ quidem theoremata ſeptuageſima complentur propoſitione: ſubſequuntur demum bina theoremata, quibus patet ex certa & mediis areis præfatarum ſex incertarum potentias componi. A 73 verò ad centeſimum ſeptimũ vſque theorema, alias ſex produci docebimus incertas, per earundem linearum abſtractionem, per quarum copulationem præfatæ incertæ compoſitæ ſunt, earúmque ſimiles prioribus actiones & paſſiones, totidem ſex ſenariis eundem ordinem ſeruãtibus, priorum incertarum ordini, per 107 completo. Succedent tandem ſimiliter tria theoremata, quibus elucidabimus ex certa & mediis areis per abſtractionem, harum ſex generati incertarum potentias, ſicut per earum adiunctionem priorum potentias genitas fuiſſe diximus. Sex tandem theorematis hunc decimum concludentes, inſuper inieſt his incertis aliud, quo ſcilicet inter alicuius harum incertarum nomina, media proportionalis arithmetica ratione cadens, eiuſdem ſuſcipit denominationem. Sit exemplo A B aliqua incertarum, eius verò maius nomen A G, totius verò dimidia ſit A D vel D B, quia arithmetica progreſſione patet, quãto maius nomen A G excedit dimidiam A D (hoc eſt ipſo D G), eodem D G dimidia D B excedit minus nomẽ G B. Totius igitur dimidia A D, ipſorum nominum A G G B media eſt proportionalis, arithmetica ratione, & toti commenſurabilis longitudine. Ipſa igitur dimidia A D eiuſdem erit denominationis cum tota A B, per hãc & quartam præcedentes. Huiuſce ſcholij aliqua meminit alterum Græcorum exemplar tantùm, quæ ampliori aut ſaltem faciliori expoſitione digeſſimus, vt generalem intelligentiam facilitemus.



PROPOSITIO LXXI.

Certum mediúmque compoſita, quatuor incertarum arearum vnam efficiunt, ſcilicet eam quæ Ex binis nominibus, quæ Ex binis mediis primam, Maiorem, aut Certum mediúmque potentem.



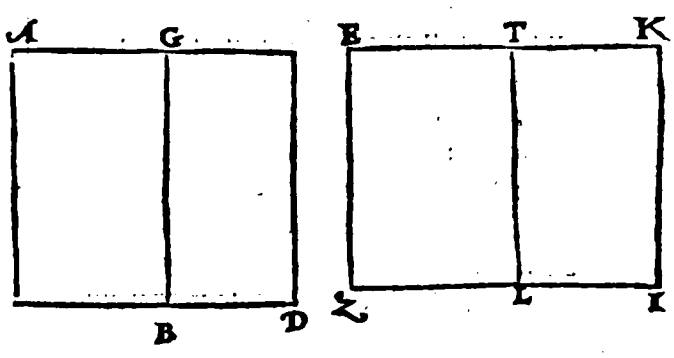
Componant vnã aream A D certum A B & medium G D: Dico ipſam A D aream eſſe potentiam vnius quatuor incertarum, ſcilicet eius quæ Ex binis nominibus, Ex binis mediis primę, Maioris, aut equidem Certum mediúmque potentis. Exponatur Certa E Z, cui comparetur (per 45 primi) æquum ipſi A B, illud E Z L T, æquum verò ipſi G D, rectangulum T L I K. Quia porrò Certum eſt A B Certũ erit E L, quia item Medium eſt G D Medium erit T I. Quæ E L & T I ad Certam E Z applicata, latitudines efficiunt, ſcilicet E T Certam longitudine ipſi E Z commenſurabilem, per vigeſimam huius, ac T K Certam longitudine incommenſurabilem eidem E Z, per 22 huius.

Et quia

Et quia incommenſurabile eſt E L Certum Medio T I, incommenſurabiles erunt (per primam ſexti) longitudine ipſæ E T T K Certæ, & igitur potẽtia tantùm commenſurabiles, totáque E K Ex binis nominibus, per 36 huius. Cuius E T nomen aut maius eſt, aut minus. Si quidem maius, aut plus poteſt minore, T K à commenſurabili aut incommenſurabili. Si à commenſurabili, tota E K erit Ex binis nominibus prima. Si ab incommenſurabili, eadem E K erit quarta. Si verò E T ſit minus & commenſurabile ipſi E Z Certæ exiſtat, aut T K maius, plus eo poterit à commenſurabili, & ſic erit ſecunda Ex binis nominibus. Si verò ab incommenſurabili, ipſa E K erit quinta, per binomiorum diffinitiones. Quauis igitur ſumptione ſemper E K erit binomium, aut primum, aut ſecundum, aut quartum, aut quintum. Si itaque area E I comprehendatur ſub certa E Z & binomio primo E K, aream potens erit binomium, per 54 huius. Si ſub certa E Z & binomio ſecundo E K, aream E I potens erit ex binis mediis prima, per quinquageſimamquintam huius. Siquidem ſub certa E Z & binomio quarto E K, aream E I potens dicetur Maior, per 57 huius. Si verò ſub certa & binomio quinto, aream E I potens vocabitur Certum mediúmque potens, per 58 huius. Sed potẽs aream E I poteſt ſibi æqualem (ex hypotheſi) aream A D. Ipſa igitur A D eſt potẽtia eius quæ Ex binis nominibus, eius quæ Ex binis mediis prima, Maioris, aut Certum mediúmque potentis. Certum itaque & Medium compoſita quatuor, &c.

PROPOSITIO LXXII.

Bina Media adinuicem incommenſurabilia compoſita, reliquarum duarum incertarum alteram efficiunt aream, eam ſcilicet quæ Ex binis mediis ſecundam, aut Bina media potentem.



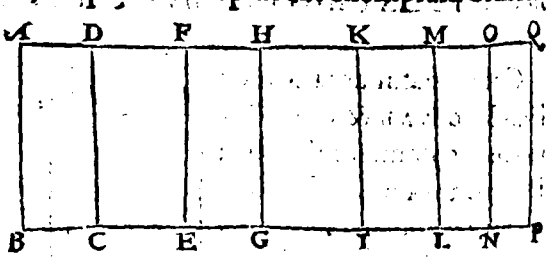
Componatur area A D ex binis Mediis A B & G D adinuicem incommẽſurabilibus: Dico aream A D aut Ex binis mediis ſecundam, aut Bina media potentem eſſe. Exponatur Certa E Z, cui (per 45 primi) comparetur æquum ipſi A B, ſitq; E Z L T, æquum verò ipſi G D illud T I, latitudines efficientes E T T K. Quoniam Media incommenſurabilia ſunt A B & G D, Media erunt E L & T I, ac incommẽſurabilia, quæ quidem latitudines E T ac T K Certas efficiunt, longitudine tamen propoſitæ certæ E Z incõmenſurabiles, per vigeſimamſecundam huius. Inſuper eaſdem E T T K inter ſe longitudine incommenſurabiles, per primam ſexti. Potẽtia itaque tantùm ſunt ipſæ Certæ E T T K commenſurabiles. Tota igitur E K Ex binis eſt nominibus, per 36 huius, diuiſa in ſua nomina, E T T K. Sed cùm neutrum nomen E T vel T K ſit expoſitæ E Z commenſurabile, neceſſe eſt eam E K eſſe Binomium quidem, ſed tertium aut ſextum, per tertiam & ſextam Binomiorum diffinitionem. Tertium enim ſi maius nomẽ plus poſſit minore, à ſibi longitudine commenſurabili. Sextum verò ſi ab incommenſurabili, per eaſdem diffinitiones. Si igitur E K ſit tertium Binomium, ſub ipſo & E Z Certa comprehenſum E I, poterit aliqua incerta quæ dicitur Ex binis mediis ſecunda, per 56 huius. Si autem E K fuerit ſextum Binomium, ſub eo & certa E Z comprehenſum E I, poterit Bina media potẽs. Itaque aream E I poteſt, aut Ex binis mediis ſecunda, aut Bina media potens. Et proinde aream A D (ipſi E I æqualem)

poterit eadem, quæ igitur erit Ex binis mediis ſecunda, aut Bina media potens? Bina igitur media, &c.

COROLLARIVM EX PRAECEDENTIBVS.

Hinc ſequitur ſeptem prælabitas incertas non eſſe eaſdem, ſed ſingulas ſibi inuicem à ſingulis differre.

Nam mediæ quadratum Certæ applicatum, latitudinem certam producit, per vigeſimam ſecundam huius. Eius verò quæ ex binis nominibus quadratum, eidem certæ applicatum, latitudinem ex binis nominibus primam efficit, per ſexageſimam huius. Eius quidem, quæ ex binis mediis prima, latitudinem efficit binomium ſecundum, per 61 huius. Eius verò, quæ ex binis mediis ſecunda, latitudinem efficit binomium tertium, per 62 huius. Quod enim ex maiori, latitudinem efficit Binomium quartum, per 63 huius. Quod autem ex certum mediúmque potente, latitudinem producit binomium quintum, per 64 huius, quod ex bina media potẽte eidem certæ applicatum, latitudinem producet binomium ſextum, per 65 huius. Cùm igitur præfatæ latitudines à prima certa, & inter ſe differant, cùm ſint diuerſorum ordinum: manifeſtum eſt ſub ipſis comprehenſas areas inter ſe differre. Inſuper & manifeſtius erit, quod per 66 & quatuor eam ſequentes, patuit, ipſas ſcilicet eouſque inter ſe diſtare, vt ne longitudine, ne quidem potentia tantùm ſibi cõmenſurari valeant: nam ſi commenſurarentur eædem eſſent, vt celeberrimè fuit oſtenſum. Sed forſan, vt quibuſdam placeat exemplum demonſtrans ſubiiciãmus. Eſto certa A B, cui omnes incertæ comparentur potentiarum ſpecies, ſitq; A C̃ medium, D E verò ei quod ex binis nominibus æquum, F G ei quod ex binis mediis prima, H I ei quod ex binis mediis ſecunda, K L maiori, M N certum mediúmque potenti, O P tandem bina media potenti ſit æquum. Manifeſtum eſt (ex 22 huius) A D certam eſſe, reliquas autem D F F H H K K M M O O Q patet ex ſexageſima & quinque eam ſequentibus ſex eſſe binomia, quæ quidem longitudine inter ſe differunt: nam ſi aliqua alteri longitudine commenſurabilis eſſet, ea eſſet eadem cum reliqua, per 66 huius, & ideo quandoque eidem certæ longitudine commenſurabilis, & incommenſurabilis eſſet, vel quandoque plus poſſet à commenſurabili, & ab incommenſurabili, quæ eſſent veræ chimeræ, vt patuit ex diffinitionibus binomiorum: ſingulæ itaque ipſarum ſeptem ſibiinuicem longitudine erunt incommenſurabiles. Quare (per primam ſexti) & potentiæ A C D E F G H I K L M N & O P incommenſurabiles erunt, & proinde ſeptem rectæ incertæ eas potentes, dicentur potentia ſingulæ adinuicem incommẽſurabiles. Siquidem potentia fuerint, & longitudine erunt, per vltimam partem illationis nonæ huius. Licet itaque hæc incerta eiuſdem ſint generis quoad quantitatem, & ideo rationem habere dicantur, nam multiplicata ſeſe excedere poſſint, tamen quia non cadit inter ea numerorum comparatio, quæ vnica eſt quãtitatum diſcretio, ipſa rationem non diſcretam, ſiue cognitam, ſed equidem ſurdam & inexplicabilem vlla diſcretione quantitatis habere dicentur. Non enim ratione priuantur, ſed tantùm commenſuratione.

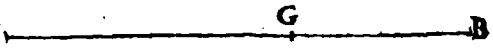


INCI

INCIPIVNT SENARIA INCERTARVM PER ABLATIONEM GENITARVM.

PROPOSITIO LXXIII.

Si à Certa Certa auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, Reliqua incerta est, vocatur autem Apotome.



Esto certa AB, à qua detrahatur certa BG, toti AB potentia tantùm commensurabilis existens: Dico reliquam AG incertam esse, quæ quidem dicetur Apotome seu residuum: quoniam quod ex AB cum quadrato BG, æquum est ei quod bis sub AB BG cum quadrato AG, per septimam secundi. Certum autem est compositum ex quadratis AB BG, cùm vtraque certa ex hypothesi supponatur. Medium verò est quod sub AB BG, per 21 huius, & proinde eius duplum quod bis sub AB BG medium erit, per corollarium 23 huius, & igitur incertum: quare erit incommensurabile composito certo ex quadratis AB BG. Sed si totum scilicet compositum ex quadratis AB BG vni eorum (scilicet ei quod bis sub AB BG) fuerit incommensurabile, & reliquo (scilicet quadrato AG) incommensurabile erit, per corollarium 12 huius, certum autem fuit compositum. Huic igitur incommensurabile (quadratum ex AG) incertum erit, ex diffinitione decima huius: quare illud potens AG incerta erit, per lemma vigesimæ huius, quæ dicitur Apotome. Si itaque à Certa Certa auferatur potentia tantùm, &c.

PROPOSITIO LXXIIII.

Si à Media auferatur Media, potentia tantùm commensurabilis toti, cum tota verò certum comprehendens, reliqua incerta est, vocatur autem Mediæ apotome prima.

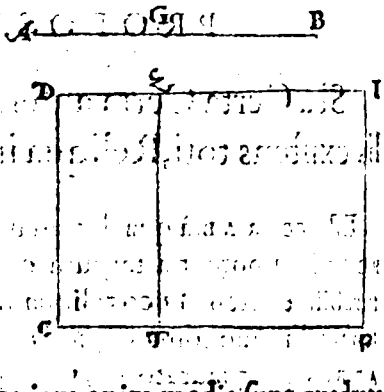


Sit media AB, à qua auferatur BG, quæ quidem sit media potentia tantùm ipsi AB commensurabilis, & cum ipsa AB certum comprehendens, per 27 huius: Dico reliquam AG incertam esse, quæ dicitur Mediæ apotome prima. Cùm quadrata ex AB, BG mediis sint commensurabilia, compositum ex ipsis est medium, quod quidem æquatur, per septimam secundi, ei quod bis sub AB, BG, & quadrato AG. Sed quod bis sub AB, BG (ex hypothesi) certum est, cùm sit duplum eius quod sub AB, BG. Quod igitur sub ipsis AB, BG certum, incommensurabile est composito ex AB, BG quadratis medio, igitur per secundam partem duodecimæ huius, incommensurabile erit quod ex AG ei quod bis sub AB, BG. Ea etenim totum efficiũt compositum ex quadratis AB, BG. Quod igitur ex AG (ipsi quod bis sub AB, BG certo incommensurabile) incertum erit, per decimam diffinitionem huius: & proinde recta AG illud potens incerta erit, per lemma vigesimæ huius, quæ dicitur Mediæ apotome prima. Si igitur à media auferatur media, potentia, &c.

PROPOSITIO LXXV.

Si à Media auferatur Media potentia tantùm commensurabilis

bilis exiſtens toti, cùm tota verò medium comprehendens, reliqua incerta eſt, vocatur verò Mediæ apotome ſecunda.



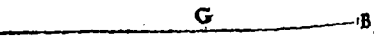
A media A B auferatur media G B, potentia tantùm commenſurabilis exiſtens toti A B, cuni ipſa verò medium comprehendens quod ſub A B B G: Dico reliquam A G incertam eſſe, quæ dicitur Mediæ apotome ſecunda. Exponatur namque certa D C, cui comparetur (per 45 primi) æquum compoſito ex A B B G quadratis, quod ſit D C E I. Rurſus verò æquum ei quod bis ſub ipſis A B B G, quod ſit Z T E I, reliquum igitur D T æquum erit quadrato ex A G, per ſeptimam ſecundi, nam quæ ſub A B, B G cum eo quod ex A G, compoſito ex A B B G quadratis æquantur. Quoniam enim media ſunt quadrata ex A B B G mediis, medium erit D E ipſis æquum: quia verò medium eſt quod ſub A B B G, ex hypotheſi, medium erit Z E, ipſius duplum, ſed medium D E non excedit medium Z E certo, per 26 huius, incertum itaque erit D T (exceſſus) cui quidem æquum fuit quod ex A G quadratum: incertum igitur erit quod ex A G, & proinde illud potens recta A G, incerta erit, per coroll. vigeſimæ huius, dicta Mediæ apotome ſecunda. Si itaque à Media auferatur Media potentia tantùm, &c.

MONITVM.

Prolixiori argumento diſcuſſit hanc Theon, per comparationem linearum ni D Z & Z I ipſi D C propoſitæ, concludens incertam eſſe D Z, quare ſub certa D C & incerta D Z comprehenſum D T, incertum eſſe, probare conatur, per lemma vigeſimæ huius, quod aliud agit negotium. Nos itaque breuiorem (ne tædio diſtrahantur ingenia) elegimus methodum, quo fere vſus eſt Campanus.

PROPOSITIO LXXVI.

Si à recta linea recta auferatur, potentia toti incommenſurabilis exiſtens, cum tota verò efficiens quod ex earum quadratis certum, quod verò ſub ipſis medium. Reliqua incerta eſt, appellatúrque Minor.



A recta A B auferatur recta B G potentia ipſi A B incommenſurabilis, efficiens verò compoſitum ex quadratis A B & B G certum, quod verò ſub ipſis medium: Dico reliquam A G incertam eſſe, quæ appellatur Minor. Quoniam compoſitum ex quadratis A B B G certum eſt, quod verò ſub ipſis medium, ex hypotheſi, incommenſurabile erit compoſitum ex A B B G quadratis ei quod bis ſub A B B G medio, cùm autem ex A B B G quadrata ei quod bis ſub A B B G, cum quadrato A G æqualia ſint, ex ſeptima ſecundi. Totum autem compoſitum ex A B B G, vni eorum (quod bis ſub A B B G) incommenſurabile eſt, & reliquo (per coroll. duodecimæ huius) incommenſurabile erit, quadrato ex A G, quod itaque ex A G incertum erit, per decimam diffinitionem huius, illud igitur potens recta A G reliqua (per lemma vigeſimæ huius) incerta erit, appellata Minor. Si itaque à recta linea recta auferatur, potentia toti incommenſurabilis exiſtens, &c.

PROPOSITIO LXXVII.

Si à recta linea recta auferatur, potentia toti incommenſura-

bilis

bilis exiſtens, & cum tota efficiens conflatum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod verò ſub ipſis Certum. Reliqua incerta eſt, vocata Cum certo medium totum efficiens.

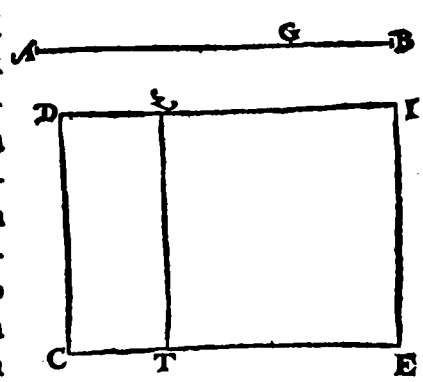
Auferatur à recta A B recta B G, potentia toti A B incommenſurabilis; cum tota verò A B efficiens conflatum ex earum quadratis medium, quod verò ſub ipſis certum: Dico reliquam A G incertam eſſe, quæ vocatur cum certo medium totum efficiens. Cùm autem medium ſit quod ex A B, B G quadratis compoſitum, quod verò ſub ipſis certum, per hypotheſim, compoſitum verò ex quadratis A B, B G æquum ſit ei quod bis ſub ipſis cum quadrato A G, per ſeptimam ſecundi, totum autem compoſitum certum vni eorum (quod bis ſub A B, B G medio) incommenſurabile ſit: quæ in principio igitur (ſcilicet quod bis ſub A B, B G, & quadratum A G, per ſecundam partem duodecimæ huius) incommenſurabilia erunt, atqui certum eſt quod bis ſub A B B G, ex hyporheſi, quod igitur ex A G quadratum huic incommenſurabile, incertum erit, per decimam diffinitionem huius: illud itaque potens recta A G incerta erit, per lemma vigeſimæ huius, quæ quidem dicetur cum certo medium totum efficiens. Nam A G incerta, efficit totum quod ex A B, B G Medium cum Certo quod ſub ipſis A B, B G. Si igitur à recta linea recta auferatur potentia toti incommenſurabilis, &c.



PROPOSITIO LXXVIII.

Si à recta linea recta auferatur, potentia toti incommenſurabilis exiſtens, & cum tota efficiens conflatum ex ipſarum quadratis Medium, quod verò ſub ipſis Medium. Inſuper incommenſurabile, conflato ex ipſarum quadratis. Reliqua incerta eſt, appellatur autem Cum medio medium totum efficiens.

A recta A B auferatur recta B G potentia toti A B incommenſurabilis, &c. qualis optatur, ex hypotheſi & 35 huius: Dico reliquam A G incertam eſſe, quæ dicitur cum medio medium totum efficiens. Exponatur certa D C, cui (per quadrageſimamquintam primi) comparetur æquum conflato ex quadratis A B, B G, ſitq; D E latitudinem efficiens D I. Æquum verò ei quod bis ſub ipſis A B B G ſit Z E. Reliquum igitur D T æquum erit quadrato ex A G, per ſeptimam ſecundi. Nam quod bis ſub ipſis cum quadrato A G æquum eſt conflato ex earum A B B G quadratis. Cùm autem medium ſit conflatum ex quadratis A B B G, medium erit D E ſibi æquum: quia verò medium eſt, quod bis ſub ipſis A B B G, cùm ſit duplum medij quod ſub ipſis, medium erit Z E ſibi æquum, ſed medium D E non excedit medium Z E certo, per 26 huius. Exceſſus itaque D T incertum producet, æquum quidem ei quod ex A G, per conſtructionem. Igitur A G recta (illud potens) incerta erit, per lemma vigeſimæ huius, quæ quidē dicitur cum medio mediū totum efficiens eo quod ex ipſa quadratum cum Medio quod ſub ipſis A B, B G efficiat totùm quod ex ipſis A B, B G Medium. Si igitur à recta linea recta, &c.



MONITVM.

Eadem breuitate vſi ſumus huic ſeptuageſimæoctauæ, qua ſeptuageſimæquintæ. Nam harũ ſcilicet mediæ apotome ſecũdæ, & cum medio medium totum efficientis) genituræ, in hoc tantùm differunt, quòd hæc à binis rectis potẽtia incommenſurabilibus naſcatur, illa verò à binis mediis potentia commenſurabilibus. Quarum vtraque, quæ ex ipſis & ſub ipſis, medium incommenſurabile medio componunt, quare in eo tantùm ſibi diſtant quod diximus. His autem 77 & 78 reliquimus hanc particulam (bis) vt ſequamur trigeſimamquartam & trigeſimamquintam, earum originem.

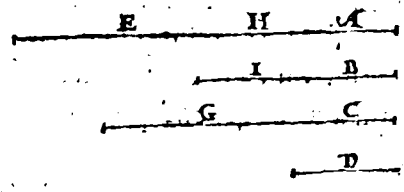
SCHOLIVM.

Harum ſex incertarum ortum à priorum origine duci inuariato earum ordine deſcripſit Euclides, vt omnium genituram prius à certa recta, poſtmodum verò à certa & media (quam mediam iam ante genuit certa) ortam, ſeruato priorum ordine, in earum actionibus ac paſſionibus explicandis, eandem eſſe propalaret. Nam harum ſingulæ, reliquarum ſingularum ſunt tantùm exceſſus, quibus maiora nomina excedunt minora. Prior etenim hac de cauſa apotomes nomen ſibi ſumpſit abſolutum, quod alij reſiduum dicunt, eo quòd à præſtantiori linea certa quidem (à qua certa tollitur) ſit nata, ab eadem oritur ea quæ ex binis nominibus, ſed hæc per copulationem, illa verò per detractionem. Cùm enim à maiori binomij nomine detrahitur minus, reliqua erit hæc vocata apotome, abſqluta denominatione. Cùm autem à maiore nomine eius quæ ex binis mediis prima aufertur minus, reliqua ſimiliter dicitur apotome prima, ſed mediæ rectæ inquam. Ab ea verò quæ ex binis mediis ſecunda, producitur apotome ſecunda, (Mediæ). A maiore autem producta, Minor dicetur, vt præſtantiorem iudicemus priorem ordinem ſecundo, veluti maiorem minori præcellimus. A certum mediumque potẽtẽ, eiuſdem ferè denominationis, fit quinta harum, quæ cum certo medium totum efficiens dicitur. A bina media potente autem ſexta & vltima, cum medio medium totum efficiens naſcetur: ſingulæ itaque genitæ ſingularum gignentium denominationem proximè imitantur. Omnes autem à ſex linearum inuentionibus (19 huius cum ſex eam ſequentibus deſcriptis) ortę, hæ quidem per detractionem, illæ verò per compoſitionem. Cæterùm cum harum ſex ac priorum ordo illud præ ſe ferat, vt trium priorum cuiuſlibet ſenarij nomina eadem quæ ex ipſis quadrata, & ſub ipſis rectangula (certa vel media) deſcribant, quæ & nomina trium poſteriorum eiuſdem ſenarij deſcribunt, apud quoſdam eandem viderentur ſectari quantitatis naturam. Ad hæc dicemus tres priores à tribus poſtremis vtriuſque ſenarij (coniunctarum ſcilicet & ablatarum) in hoc potiſsimum diſcrepare, quòd tres priores à potentiis commenſurabilibus, poſtremæ verò ab incommenſurabilibus naſcantur: ac inſuper earum potentiæ ad certam rectam applicatæ, latitudines efficiunt eandem ſequentes naturam, ſcilicet trium priorum latitudinum maius nomen plus minore poteſt, à ſibi longitudine commenſurabili; trium verò poſteriorum ab incommenſurabili. Qua de cauſa tandem ſingulæ ſingulis penitus incommenſurabiles patebunt.

LEMMA.

Si quatuor magnitudines arithmetica ratione proportionales fuerint, & vicißim proportionales erunt.

Hoc eſt, Si quatuor magnitudinũ prima tãto excedat ſecundã vel deficiat, quan-



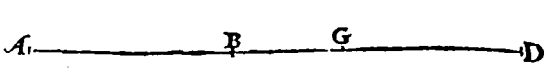
to eodem tertia excedit quartam, vel deficit, & viciſſim prima tantò excedet tertiam, vel deficiet, quanto eodem ſecũda excedet quartã vel deficiet: Sint quatuor magnitudines A B C D, quarum prima A eodem excedat B ſecundam, vel eodem deficiat, quanto C tertia excedit quartam D, vel ab ea deficit: Dico viciſſim primam A eodem excedere tertiam C vel deficere, quo ſecunda B excedet quartam D, vel deficiet ab ea. Tollantur exceſſus æquales quibus A & C differunt ab ipſis B & D, ſintq; E & G. Æquales igitur A & B ab æqualibus C & D æquis differunt exceſſibus, qui ſint H & I: æquales igitur ſupererunt A & B (per tertiam cõmunem ſententiã) ipſis C & D: ſed & adinuicem A & B fuerunt æquales: quatuor igitur A B C D inuicem ſunt æquales relictæ. Si igitur æqualibus A & C æquales addantur E & G, totæ A E & C G æquales (per quartam communem ſententiam) ſed & B & D ſunt æquales. Addatur itaque æqualibus A E & C G exceſſus H, æqualibus verò B & D exceſſus I: ſed H & I ſunt æquales oſtenſi exceſſus. Quo igitur prima A excedit tertiam C, vel ab ea deficit, ſcilicet ipſo H, tanto ſecunda B excedit quartam D vel ab ea deficit, ſcilicet ipſo I. Si igitur quatuor magnitudines arithmetica ratione proportionales, &c.

MONITVM.

Campanus ſolus hoc lemma poſt ſeptuageſimamtertiam ſui ſcripti poſuit, eouſque tamen confusè, vt diſcentibus ſit difficile, an exceſſum proportionis geometricæ aut arithmeticæ intellexerit diiudicare. Nam eiſdem terminis differentias comparat, quibus differentiæ ſiue rationes geometricæ comparari ſolent: & inſuper ab eo deſcripta figura, rationẽ geometricã, non autem arithmeticã inſequitur, principiumq; citat, quo extremorum differentias, à mediorum differentiis cõponi dicit, quod in rationibus geometricis aliàs diſcuſſimus receptum eſſe, quandoquidem exceſſus proportionales exiſtunt, ſed quando hi ſunt æquales nondum extremos ſequi medios Euclidem dixiſſe memoramur. Nam mediorum exceſſus compoſiti, non ſemper extremorum producunt exceſſum, veluti rationes, maximè ſi inter eos reperiantur maioris ſimul & minoris inæqualitatis rationes. Tamen cernentes futuris demonſtrandis commodiorem nobis affuturam arithmeticam rationem geometrica huius arithmeticæ rationis exceſſus æquales eſſe, demonſtratione geometrica quàm lucidè licuit protulimus.

PROPOSITIO LXXIX.

Apotome vna tantùm congruit recta linea, Certa potentia tantùm toti commenſurabilis exiſtens.



Eſto apotome A B, cui congruat recta B G certa potẽtia tantùm toti A G cõmenſurabili exiſtens: Dico nullam ei aliam certam potentia tantùm toti commenſurabilem poſſe congruere. Quod ſi fieri poſſe credatur, congruat ipſi A B recta B D, potentia tantùm toti A D commenſurabilis exiſtens. Cùm quadrata ex A G G B æquè excedant rectangulum bis ſub A G G B comprehenſum, veluti quadrata ex A D D E excedunt rectangulum bis ſub A D D B comprehenſum, nempe quadrato reliqui ſegmenti A B, per ſeptimam ſecũdi: Sequetur viciſſim, arithmetica progreſſione, quadrata eodem excedere quadrata, quo rectangula excedunt rectangula, per lemma præfatum, ſed quadrata ſeſe excedunt certo, cùm ſint certa, ex certis

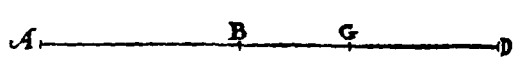
potentia tantùm commenſurabilibus ex hypotheſi. Rectangula igitur quæ ſunt media (per 21 huius) ſeſe excederent certo, contra 26 huius, quod eſſet abſurdum. Vnica igitur ſolùm B G (potentia tantùm commenſurabilis toti A G) certa, ipſi A B congruet. Apotome itaque vna tantùm congruit, &c.

MONITVM.

Hanc demonſtrans Theon conatur æquos exceſſus quadratorum & rectangulorum viciſſim poſſe concludi, per 16 quinti, quæ quatuor magnitudines proportione geometrica coniunctas, nõ autem arithmetica ſupponit, quæ quo ſibi interſint, cuique diſcernendum relinquimus. In illud autem erroris incidit, penuria omiſſi proximi lemmatis, quod huic ac ſequentium maximè conferet negotio.

PROPOSITIO LXXX.

Mediæ apotome primæ vna tantùm congruit recta linea Media potentia tantùm commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Certum comprehendens.



Eſto A B apotome prima mediæ, cui congruat B G media, potentia tantùm toti A G commenſurabilis exiſtens, Cum tota verò A G certum comprehendens, quod ſub A G G B: Dico nullam ipſi A B aliam à recta B G eius naturæ congruere poſſe. Quòd ſi poſſe dicatur, congruat ipſi A B recta B D, eiuſdem naturæ ipſius B G. Quoniam (vt præcedenti oſtendimus) quadrata ex A G G B eo excedunt rectangula bis ſub A G G B, quo quadrata ex A D D B excedunt rectangula bis ſub A D D B, ſcilicet quadrato A B, per ſeptimã ſecundi: Sequetur igitur viciſſim (per lemma 78 huius) quadrata eodẽ excedere quadrata, quo rectãgula rectãgula: ſed rectangula ſeſe excedũt certo: cùm ſint, ex hypotheſi certa, ſub mediis certũ comprehendentibus. Quadrata igitur quæ ſunt media (cùm ſint potentiæ mediæ, & commenſurabiles) ſeſe excedẽt, certo quod opponitur 26 huius, & proinde abſurdum: quare ipſi A B media potentia tantùm toti commenſurabilis, & cùm ipſa tota certum comprehendens, nulla congruet alia ab ipſa B G. Media igitur apotome primæ vna, &c.

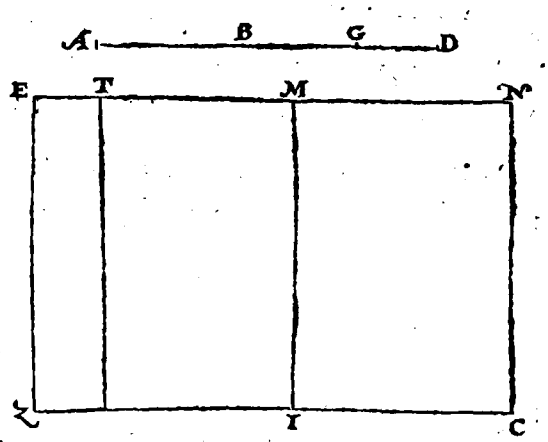
PROPOSITIO LXXXI.

Mediæ apotome ſecundæ, vna tantùm congruit recta linea Media potentia tantùm toti commenſurabilis exiſtens, & cum tota Medium comprehendens.

Fiat A B mediæ ſecunda apotome, cui congruat B G, vt ſint A G G B mediæ potentia tantùm commenſurabiles medium comprehendentes: Dico ipſi A B nullam aliam congruere eiuſdem naturæ ipſi B G, cuius oppoſitum, ſi fieri poſſit, congruat ipſi A B alia D B: ipſæ igitur A D D B mediæ erunt potentia tantùm commenſurabiles, medium comprehendentes. Exponatur certa E Z, cui (per 45 primi) conſtituatur æquum quadratis A D D B, ſitq; E Z C N, æquum verò quadratis A G G B, illud E Z I M, æquum autem quadrato A B ſit E Z L T, latitudines efficientes E N E T. Quoniam E I ſit æquum eis quæ ex A G G B, ſed E L eſt æquum ei quod ex A B, Reliquum itaque T I æquum erit ei quod bis ſub A G G B. Nam bis ſub A G G B cum

quadrato

quadrato A B æquum eſt quadratis ex A G G B, per ſeptimam ſecundi, haud ſecus oſtẽdemus cùm E C ſit æquũ quadratis A D D B, æquum verò ſit E L quadrato A B, reliquum T C æquum eſſe ei quod bis ſub A D D B, per eandem: cùm autem quadrata ex A D D B ſint (ex hypotheſi) media, & commenſurabilia, compoſitum ex ipſis ſcilicet E C medium erit, per coroll. 23 huius: & ſimili argumento E I quadratis A G G B æquum, medium erit, quæ quidẽ media, ad certam E Z comparata, latitudines E N E M certas potentia tantùm ipſi E Z propoſitæ commenſurabiles efficiunt, per 22 huius. Similiter quia rectangula ſub A D D B & ſub A G G B ſunt media, eadem bis ſumpta media erunt, per coroll. 23 huius, & idcirco T C ipſi quod bis ſub A D D B, æquum, & T I, ei quod bis ſub A G G B æquum, media erunt. Rectæ igitur T M T N (latitudines) certæ potentia tantùm ipſi E Z commenſurabiles erũt: cùm enim A G G B ſint (ex hypotheſi) longitudine incommenſurabiles, ſit autem vt A G ad G B, ſic quod ex A G ad quod ſub A G G B, per lemma 21 huius incommenſurabile erit quod ſub A G G B quadrato A G, quod autem ex A G ei quod ex G B eſt (per hypotheſim) commenſurabile, quod autem ſub A G G B, ei quod bis ſub A G G B eſt item commenſurabile, dimidium duplo. Duobus igitur (ſcilicet ei quod ex A G & ei quod ſub A G G B) incommẽſurabilibus commenſurabilia, quæ ex A G G B & quæ bis ſub A G G B, per tertium coroll. decimæ huius, incommenſurabilia erunt, & proinde E I & T I (ipſis æqualia) incommenſurabilia erunt, & ideo (ex prima ſexti) E M & T M rectæ incommenſurabiles erunt longitudine: potentia itaque tantùm commenſurabiles erunt E M T M, cùm ſint certæ oſtenſæ. Reliqua igitur E T eſt apotome, per 73 huius. Haud diſsimili via patebit E N T N certas eſſe potentia tantùm commenſurabiles, & proinde reliquam E T eſſe apotomẽ: ipſi itaque E T apotome plures congruunt T M T N certæ, potentia tantùm toti commenſurabiles exiſtentes: quod fieri non poteſt, per 79 huius: non itaque alia quàm G B ipſi A B mediæ apotome ſecundæ congruet. Mediæ igitur apotome ſecundæ vna tantùm, &c.



PROPOSITIO LXXXII.

Minori vna tantùm cõgruit recta linea, potentia toti incommenſurabilis exiſtens, & efficiens cum tota compoſitum ex earum quadratis Certum, quod verò ſub ipſis Medium.

Sit recta A B Minor, ipſi verò congruat G B qualis ſupponitur hoc theoremate: Dico ipſi A B nullam (qualem optat theorema) aliam ab ipſa G B congruere: ſi enim fieri poſsit, congruat ipſi A B recta D B: erunt igitur A D & D B rectæ potentia incommenſurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis certum, quod verò ſub ipſis medium, cùm (ex hypotheſi) quadrata A G G B certum componant, quæ verò ſub ipſis medium, ſimiliter & quæ ex A D D B certum, quæ verò ſub ipſis medium ſuſcipiunt, quare (vt proximis prioribus 79 & 80 huius patuit) quadrata ex A G G B & ex A D D B eodem ſeſe excedunt, quo rectangula ſub A G G B bis ſumpta, & ea quæ bis ſub A D D B, per ſeptimam ſecundi & lemma 78 huius: atqui quadrata cùm ſint certa (ex hypotheſi) ſeſe certo excedunt. Rectangula igitur (ex eadem hypotheſi) media, ſeſe certo excederent, contra 26 huius, quod fieri non

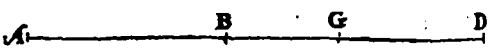


poteſt, non igitur alia ab ipſa G B ipſi A B congruet. Minori itaque vna tantùm congruit recta,&c.

PROPOSITIO LXXXIII.

Cum certo medium totum efficienti vna tantùm congruit recta linea, potentia toti incommenſurabilis ſubſiſtens, & cum tota efficiens conflatum, ex ipſarum quadratis Medium, quod verò ſub ipſis Certum.

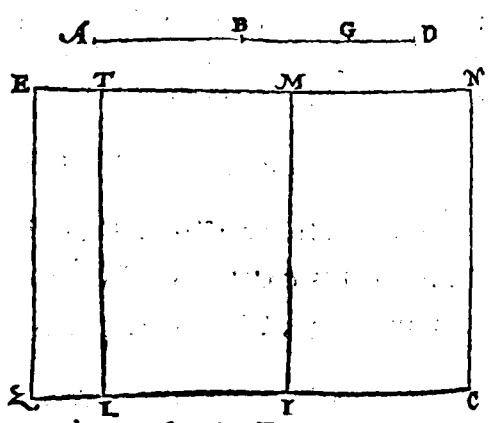
Eſto Cum certo medium totum efficiens A B, cui congruat G B, qualis hîc ſupponitur: Dico ipſi A B nullam aliam eius denominationis ab ipſa G B poſſe cõgruere. Si ſecus fieri poſſit congruat D B recta. Erunt itaque A D D B rectæ potentia incommenſurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò ſub ipſis certum. Quare, ne diutius ingenia torqueamus, ſimili præhabitorum argumento patebit. Quadrata ex A D D B media (ex hypotheſi) eodem excedere quadrata ex A G G B media, quo rectangula ſub A D D B bis ſumpta certa, rectangula bis ſub A G G B ſumpta certa excedunt, ſcilicet certo, cùm ſint certum comprehendentia, per hypotheſim. Quod fieri non poteſt, contra 26 huius. Non igitur ipſi A B alia quàm recta B G congruet eius nominis. Efficienti itaque cum certo medium totum, vna, &c.



PROPOSITIO LXXXIIII.

Cum medio medium totum efficienti vna tantùm congruit recta linea, potentia toti incommenſurabilis exiſtens, & cum tota efficiens conflatum ex earum quadratis Medium, quod verò ſub ipſis Medium, & incommenſurabile conflato ex earum quadratis.

Eſto cum medio medium totum efficiens A B, ſibi verò congruat G B, quæ eius ſit naturæ, vt exoptat theorema: Dico nullam aliam eiuſdem naturæ ipſi G B, rectæ A B congruere: quod ſi fieri poſſe credamus, congruat ipſi A B recta D B. Itaque A D D B rectæ, potentia incommenſurabiles erunt, efficiẽtes conflatum ex earũ quadratis medium, quod verò ſub ipſis medium, & inſuper incommenſurabile conflato ex earum quadratis. Huius & octuageſimæ primæ eadem erit demonſtratio. Exponatur certa E Z, cui applicetur (per 45 primi) æquum quadratis ex A D D B quod ſit E C, æquum verò quadratis A G G B, ſitq; E I, æquum autem quadrato A B ſit E L. Quoniam patuit (ex ſeptima ſecundi) ſi à quadratis ex A D D B tollamus quadratum A B, ſupererit quod bis ſub A D D B. Quare ab ipſo E C ablato E L, reliquum T C ei quod bis ſub A D D B æquum erit, ſimiliter & T I ei quod bis ſub A G G B. Cùm enim media ſint quadrata ex A D D B, & ex A G G B, nec non ſub ipſis rectangula, ex hypotheſi, media erunt E C E I T C T I ipſis æqualia, quæ ad certam E Z comparata, latitudines E N E M T N T M certas efficiunt, per vigeſimam ſecundam huius. Quia rectangula bis ſumpta incommẽſurabilia ſunt (ex hypotheſi) quadratis, incommenſurabilia erunt eis æqualia, ſcilicet E C ipſi T C, ac præter hæc E I ipſi T I. Et idcirco



(per

(per primam sexti) incommensurabiles longitudine erunt E N ipsi T N & E M ipsi T M. Quæ quidem certæ fuerunt. Ipsæ itaque E N N T certæ potentia tantùm sunt commensurabiles, & proinde reliqua E T apotome, per septuagesimamtertiam huius. Nec secus ipsæ E M M T certæ potentia tantùm sunt commensurabiles. Et proinde reliqua E T erit apotome, cui quidem congruerent binæ T N T M certæ, potentia toti tantùm cõmensurabiles, contra septuagesimãnonam huius, quod est absurdum. Non itaque alia quædam ipsi A B congruet quàm B G eius nominis. Efficienti igitur cum medio medium totum, vna tantùm congruit, &c.

APOTOMARVM DIFFINITIONES.

TRIVM PRIORVM SVPPOSITIO.

Supposita Certa & Apotome, si quidem tota congruente maius possit eo quod fit ex sibi longitudine commensurabili.

DIFFINITIO I. HOC POSITO.

Si tota suppositæ Certæ longitudine fuerit commensurabilis, appellatur Apotome prima.

DIFFINITIO II.

Si congruens suppositæ Certæ longitudine fuerit commensurabilis, vocatur Apotome secunda.

DIFFINITIO III.

Si neutra suppositæ Certæ longitudine commensurabilis fuerit, tertia appellatur Apotome.

TRIVM POSTERIORVM SVPPOSITIO.

Suppositа Certa & Apotome, si tota Congruente maius possit eo quod fit ex sibi longitudine incommensurabili.

DIFFINITIO IIII.

Si tota expositæ Certæ longitudine fuerit commensurabilis, appellatur Apotome quarta.

DIFFINITIO V.

Si Congruens, expositæ Certæ fuerit longitudine commensurabilis, dicetur Apotome quinta.

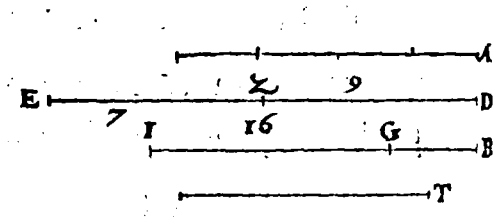
DIFFINITIO VI.

Si autem neutra expositæ Certæ longitudine fuerit commensurabilis, vocatur Apotome sexta.

Priorum incertarum ordinem ſequuntur hæ ab ipſis genitæ, quo ſcilicet prima harum incertarum (quæ apotome dicta eſt) ſenaria acceptione diffinita fuit, veluti binomium, quod ſex priorum incertarum primum, ſextupla diffinitione expoſitum fuit, vtroque tamen ordini, tribus prioribus, maius nomen plus poſſe minore, eo quod ſit à ſibi longitudine commenſurabili, aſcriptum eſt. Tribus poſterioribus verò ab incommenſurabili, quæ ſola eſt trium priorum à tribus poſtremis diſcrepantia apud vtraſque, vt iam antea diximus.

PROPOSITIO LXXXV. PROBLEMA 20.

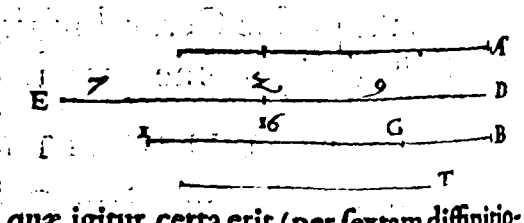
Inuenire primam Apotomen.



Exponatur certa A: ſint verò duo numeri quadrati D E D Z ſeſe excedentes non quadrato (per coroll. primi lemmatis 28 huius) Z E: ipſi A longitudine fiat commenſurabilis B I: fiat autem ſicut D E ad E Z, ſic quod ex B I ad id quod ex I G, per coroll. ſextæ huius: excedat autem quadratum B I id quod ex I G, quadrato quod ex T. Cùm autem D E quadratus, ad E Z non quadratum rationem non habeant quam quadrati numeri, per coroll. 25 octaui, quadrata B I & I G (eam rationem habentia, ex hypotheſi) potentia tantùm ſunt commenſurabilia, per quartam partem nonæ huius: ſed B I (Certæ A longitudine commenſurabilis) certa eſt, & igitur certa erit I G, ipſi B I commenſurabilis potentia per ſextam diffinit. huius. Certæ itaque potentia tantùm commenſurabiles B I I G, efficiunt reliquam B G apotomen, per 73 huius: Dico quòd & primam: cùm enim ſit quod ex B I antecedens ad quod ex I G conſequens, ſicut D E antecedens ad E Z conſequens erit quod ex B I ad quod ex T, quo excedit ſuum conſequens I G, ſicut D E ad exceſſum D Z, per coroll. 19 quinti, ſed D E ad D Z quadrati, rationem habent quadratorum, igitur B I ad T rationem habent quam quadratorum latera, quæ proinde longitudine erunt commenſurabilia, per nonam huius. Quod itaque ex B I tota, maius poteſt congruente I G, eo quod ex T ſibi longitudine commenſurabili, tota verò B I expoſitæ à longitudine fuit commenſurabilis. Reliqua itaque B G erit apotome prima, per primam diffinitionem apotomarum. Inuenimus igitur primam apotomen.

PROPOSITIO LXXXVI. PROBLEMA 21.

Inuenire ſecundam Apotomen.



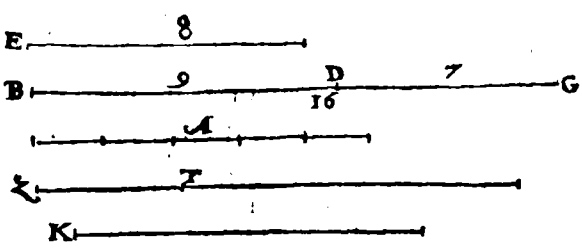
Exponatur certa A: ſit præterea numerus D E quadratus, excedens quadratum E Z non quadrato D Z, per coroll. primi lemmatis 28 huius, ponatur item linea recta G I, longitudine propoſitæ certæ A commenſurabilis, quæ igitur certa erit (per ſextam diffinitionem huius): fiat autem (per coroll. ſextæ huius) ſicut D Z ad D E, ſic quod ex G I ad quod ex I B, quorum maius B I plus poſſit minore G I eo quod ex T, quoniam (per coroll. 25 octaui) D Z ad D E non habent rationem quam quadrati, quadrata ex G I & I B (eandem rationem habentia) erunt potentia tantùm commenſurabilia, per nonam huius. Certæ autem ſunt binæ B I I G, per ſextam diffinitionem huius. fuit enim I G certa, reliqua igitur B G apotome erit, per 73 huius: Dico quòd ſecunda.

Quoniam

Quoniam enim fuit vt D Z ad D E, ſic quod ex G I ad quod ex I B, erit conuertendo (per coroll. quartæ quinti) D E ad D Z, ſicut quod ex I E ad quod ex I G. Igitur conuerſione rationis erit (per coroll. 19 quinti) D E ad E Z exceſſum, quo excedit conſequens D Z, ſicut quod ex I B ad quod ex T exceſſum, quo excedit ſuum cõſequens quod ex G I: ſed D E ad E Z habet rationem quadratorum, cùm ſint ex hypotheſi quadrati: quod igitur ex I B ad quod ex T rationem habet quadratorum numerorum: latera itaque B I & T longitudine commenſurabilia erunt, per nonam huius: tota itaque B I maius poteſt congruente I G eo quod ex T ſibi longitudine commenſurabili, congruens verò G I propoſitæ A longitudine fuit commenſurabilis. Reliqua igitur B G erit apotome ſecunda, per ſecundam diffinitionem apotomarum. Inuenimus itaque ſecundam Apotomen.

PROPOSITIO LXXXVII. PROBLEMA 22.

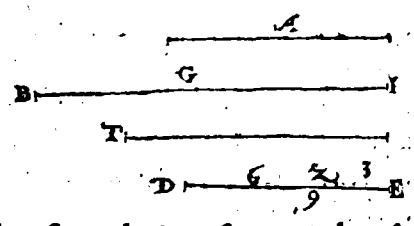
Inuenire tertiam Apotomen.



Eſto certa propoſita A, ſint etiam bini numeri quadrati B G B D ſeſe non quadrato D G excedentes. Sit item non quadratus numerus ipſi D G vnitate vel binario proximus E: fiat autem ſicut E ad B G ſic quod ex A ad quod ex Z I. Sicut verò B G ad G D, ſic quod ex Z I ad quod ex I T. Poſſit autem Z I maius, recta I T quadrato K. Quoniam A certa ponitur ad Z I (potentia) ſicut numerus E non quadratus, ad B G quadratum, rationem quadratorum non habentes, per coroll. 25 octaui. Ipſæ A & Z I longitudine incommenſurabiles erunt, per nonam huius. Quia verò fuit ſicut E ad B G, ſic quod ex A ad quod ex Z I: ſicut verò B G ad G D, ſic quod ex Z I ad quod ex I T. Erit æqua ratione ſicut E ad D G, ſic quod ex A ad quod ex I T, per 22 quinti. Sed E ad D G non habent rationem quam quadrati, cùm ſint in ratione ſuperparticulari aut ſuperbipartiente, per coroll. vigeſimæ ſextæ octaui. Quadrata igitur ex A & I T non habent rationem quadratorum. Ipſæ itaque A & I T rectæ, longitudine incommenſurabiles exiſtunt, per nonam huius. Neutra igitur ipſarum Z I I T propoſitæ A longitudine commenſurabilis erit. Potentia tamen commenſurabiles ipſi A erunt, cùm habeant ad ipſam A rationem numerorum. Quare certæ erunt Z I I T, & inter ſe longitudine incommenſurabiles, cùm earum quadrata ſint ſicut quadratus B G ad non quadratum D G numerum, per nonam huius. Binæ itaque Z I I T certæ, potentia tantùm commenſurabiles, efficiunt reliquam Z T apotomen, per 73 huius: Dico & tertiam. Quoniam poſitum eſt eſſe ſicut B G ad G D, ſic quod ex Z I ad quod ex I T. Erit (ex corollario 19 quinti) ſicut B G ad exceſſum B D, quo excedit ſuum conſequens G D, ſic quod ex Z I ad quod ex K exceſſum, quo excedit ſuum conſequens quod ex I T. Sed B G & B D habent quadratorum rationem, cùm ſint quadrati. Igitur quod ex Z I & quod ex K rationem habebunt quadratorum. Longitudine igitur commenſurabiles erunt rectæ Z I & K. Binarum igitur certarum Z I & I T potentia tantùm commenſurabilium oſtenſarum, maior ſeu tota Z I, maius poteſt minore I T, eo quod ex K ſibi longitudine commenſurabili. Neutra verò ipſarum Z I & I T longitudine ipſi A propoſitæ commenſurabilis fuit. Reliqua itaque Z T erit apotome tertia, per tertiam diffinit. apotomarum; inuenimus igitur Z T apotomen tertiam.

PROPOSITIO LXXXVIII. PROBLEMA 23.

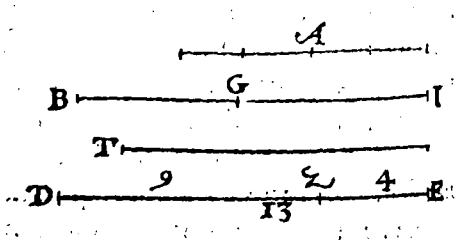
Inuenire Apotomen quartam.



Exponatur certa A, cui longitudine commensurabilis existat BI, quæ ideo certa erit. Sit autem numerus non quadratus compositus ex duobus quadratis, per secundum lemma vigesimæoctauæ huius, vel quadratus sectus in duos non quadratos, quod idem proferet, sitq; DE sectus in Z. Sit autem (per corollar. sextæ huius) sicut DE ad EZ, sic quod ex BI ad quod ex IG. Plus tamen possit BI ipso IG quadrato rectæ T. Commensurabile erit quod ex BI ei quod ex IG, per sextam huius. Certa igitur erit IG, per sextam diffinitionem huius. Quia verò BI ad IG quadrata, rationem habent quam quadratus DE ad non quadratum EZ, eorum latera, rectæ scilicet BI & IG, longitudine incommensurabilia erunt. Binæ itaque BI IG certæ, potentia tantùm commensurabiles erunt. Reliqua igitur BG apotome dicetur, per septuagesimamtertiam huius: Dico quòd & quarta. Cùm enim fuerit iam DE ad EZ vt quod ex BI ad quod ex IG: Erit conuersione rationis DE ad excessum DZ, vt quod ex BI ad quod ex T excessum, quo excedit suum consequens quod ex IG, per coroll. 19 quinti. Sed DE quadratus ad EZ non quadratum, non habet rationem quam quadrati numeri, per corollar. 25. octaui. Quod igitur ex BI ad quod ex T non habet rationem quam quadrati numeri. Nec ideo (per nonam huius) latera BI & T longitudine commensurabilia erunt. Binarum igitur certarum BI IG potentia tantùm commensurabilium, Tota BI plus potest ablata IG, eo quod ex T sibi longitudine incommensurabili. Tota verò BI propositæ certæ A longitudine fuit (ex hypothesi) commensurabilis. Reliqua igitur BG apotome erit quarta, per quartam diffinitionem apotomarum. Inuenimus itaque quartam apotomen.

PROPOSITIO LXXXIX. PROBLEMA 24.

Inuenire Apotomen quintam.

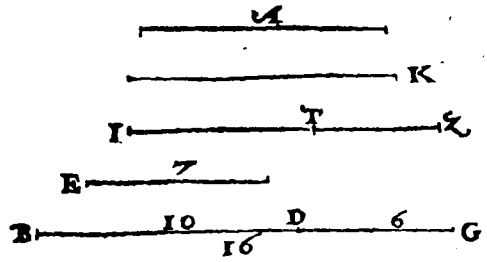


Proposita certa esto A, cui commensurabilis existat GI longitudine, quæ ideo certa erit. Sit insuper, vt proxima priore diximus, numerus non quadratus constans duobus quadratis DZ ZE, hic DE, per secundum lemma vigesimæoctauæ huius. Sit autem quadratum BI ad id quod ex IG sicut DE ad EZ, per corollar. sextæ huius. Ipsæ itaque BI & IG certæ potentia commensurabiles erunt, per sextam huius, rationem numerorum habentes, sed potentia tantùm, cùm numerorum non quadrati ad quadratum rationem habeant, & latera igitur longitudine incommensurabilia, per nonam huius. Reliqua proindè BG apotome erit, per septuagesimamtertiam huius: Dico quòd & quinta. Possit recta BI maius ipsa IG eo quod ex T, cùm sit quadratum BI ad quod ex IG, sicut DE ad EZ. Erit igitur (per corollar. 19 quinti) quadratum BI ad quod ex T excessum, sicut DE ad DZ excessum, qui quidem DE & DZ rationem non habent quadratorum. Nec igitur BI ad T potentia, rationem habebit quadratorum, nec ideo ipsa BI & T latera, longitudine commensurabilia erunt, per nonam huius. Tota igitur BI plus potest congruente IG eo quod ex T sibi longitudine incommensurabili. Congruens autem (ex hypothesi) propositæ A longitudine fuit commensurabilis. Reliqua itaque BG apotome, dicetur quinta, per quintam diffinitionem apotomarum. Inuenimus itaque apotomen quintam.

PROPO

PROPOSITIO XC. PROBLEMA 25.

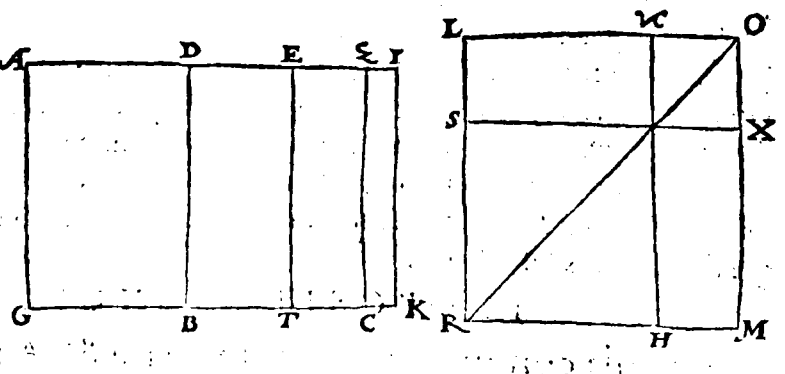
Inuenire Apotomen ſextam.



Eſto propoſita certa A, ſit verò (vt proximis prioribus) quadratus numerus B G, diuiſus in B D & D G non quadratos. Sit item alius non quadratus vnitate vel binario diſtans ab ipſo D G, qui ſit E. Sit autem ſicut E ad B G, ſic quadratum certæ A ad quod ex Z I, certa ideo erit Z I. Sicut verò B G ad G D, ſic quod ex Z I ad quod ex I T, per corollar. ſextæ huius, certa erit I T, per ſextam diffinitionem huius: quoniam enim maior eſt B G ipſa G D, maius erit quod ex Z I eo quod ex I T, ſit eo quod ex K. Quoniam numerus E non quadratus ad quadratum B G eſt in ratione quadrati A ad quod ex Z I, ipſarum A & Z I potentiæ rationem quadratorum non habent, & proinde ipſæ A & Z I longitudine incommenſurabiles erunt: quia ſimiliter E ad G B, & B G ad G D fuerint vt quadrata A ad Z I, & Z I ad I T. Erit æqua ratione (per 22 quinti) E ad D G, ſicut quadrata A ad I T, ſed E ad D G rationem non habet quadratorum, per corollarium 26 octaui. Quadrata igitur A & I T rationem quadratorum numerorum non habebunt, & proinde (ex nona huius) incommenſurabiles erunt longitudine ipſæ A & I T. Certæ tamen potentia tantùm commenſurabiles ideo erunt ipſæ Z I, I T, cùm habeant ad ſe rationem numerorum B G & G D, qui quadratorum rationem non habent. Reliqua igitur Z T apotome erit, per 73 huius: Dico quòd & ſexta: nam cùm ſit B G ad G D ſicut quadrata Z I ad I T, Erit B G ad exceſſum B D, ſicut quadratum Z I ad exceſſum quod ex K, quo excedit ſuum conſequens ex I T conuerſione rationis, per corollarium 19 quinti: ſed B G ad B D non quadratum, ratione quadratorum caret, per corollarium 25 octaui. Quadrata igitur Z I & K rationem quadratorum numerorum non habent, nec proinde latera Z I & K longitudine commenſurabilia, per nonam huius. Tota itaque Z I maius poteſt congruente I T, eo quod ex K ſibi longitudine incommenſurabili: ſed neutra ipſarum Z I & I T longitudine propoſitæ certæ A fuit commenſurabilis, vt oſtendimus: reliqua igitur Z T apotome erit ſexta, per ſextam apotomarum diffinitionem. Inuenimus itaque apotomen ſextam.

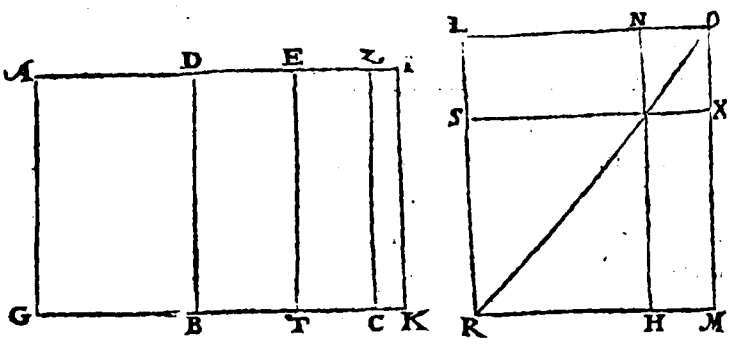
PROPOSITIO XCI.

Si areola comprehendatur ſub Certa & Apotome prima, quæ areolam poteſt, Apotome eſt.



Contineatur areola A B ſub certa A G & apotome prima A D: Dico rectam quæ aream A B poteſt eſſe apotomen. Cùm A D ſit apotome, ipſi vna tantùm congruet recta, per 79 huius, quæ quidem ſit D I ſecta bifariam in E. Ei verò quod à dimidia ipſius D I (hoc eſt D E, vel E I) æquum ad totam A I comparetur, deficiens ſpecie quadrata, per 28 ſexti, ſitq; quod ſub A Z Z I:

Per



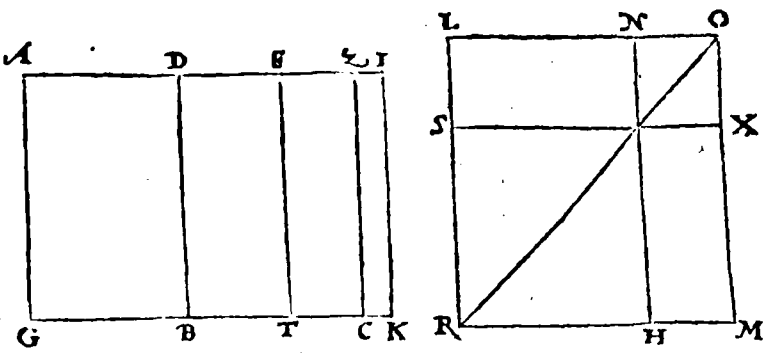
Per ſigna verò D E Z I, ipſi A G parallelæ ducãtur B D T E C Z K I & producta G B in K, perficiatur rectangulum A K: ipſi porro A C æquum fiat (per 14 ſecundi) quadratũ L M, à quo ablatum quadratum æquum ipſi Z K, communem habens angulum L O M toti quod ſit N X: illud quippe (per 26 ſexti) circum eadem dimetientem eſt toti L M: ſit itaque dimetiens R O, perficiatúrque S O H gnomon, productis N H & X S. Cùm autem æquum ſit A C quadrato L M, & Z K æquum ipſi N X, totum A K binis L M N X quadratis æquum erit: quia verò (per conſtructionem) æquum eſt quod ſub A Z Z I quadrato E I, vel D E, ipſa D E inter rectas A Z Z I media proportionalis erit, per ſecundam partem 17 ſexti: & igitur (per primam ſexti) medium proportionale erit D T, inter A C & Z K. ſed quoniam ipſis A C & Z K æqualia ſunt quæ ex L O & N O, quadrata ſcilicet L M N X, inter quæ mediũ eſt proportionale, quod ſub ipſis ſcilicet L X, per corollarium 25 huius. Æquum igitur erit L X ipſi D T, ſunt enim ęqualium extremorum media proportionalia: quia verò ipſius D T duplum eſt D K, per primam ſexti: Eſt enim D E dimidia ipſius D I, at ipſius L X duplus eſt gnomon S O H cum quadrato N X, cùm ſint æqualia N S & X H ſupplementa per 43 primi. Totum igitur D K æquum erit gnomoni S O H cum quadrato N X: ſed totum A K æquum fuit toti L M, & quadrato N X: reliquum igitur S H quadratum reliquo A B æquum erit. Cùm inſuper A D ſit prima apotome, certæ potentia tantùm commenſurabiles erunt A I I D, totáque A I ipſi A G expoſitæ longitudine commenſurabilis, ac tota A I, congruente D I maius poteſt, eo quod ſit ex ſibi longitudine commenſurabili, per primam apotomarum diffinitionem, & igitur (per ſecundam partem 17 huius) quod ſub A Z Z I æquum quartæ parti eius quod à minore D I, ſecat maiorem A I in Z per commenſurabilia longitudine. Vtraque igitur A Z & Z I toti A I longitudine commenſurabiles erunt, per vndecimam huius. Ipſi verò A G commenſurabilis fuit tota A I longitudine, & eidem itaque A G vtraque A Z & Z I commenſurabilis erit (per ſecundum corollarium decimæ huius) longitudine. Quæ igitur ſub ipſis ſcilicet A C, A K, Z K, certa erunt, per 19 huius: quare quadrata L M N X ipſis certis æqualia certa erũt, & ideò rectæ L O & N O (quadrata certas potentes) certæ erunt. Cæterùm, quia A I & D I ſunt potentia tantùm commenſurabiles, ipſæ longitudine incommenſurabiles erunt, & proinde (ex prima ſexti) incommenſurabilia erunt A K & D K: Quia verò Z K ipſi A K commenſurabile fuit, incommenſurabile erit idem Z K ipſi D K, per ſecundum corollarium 10 huius, & ipſius D K dimidio E K, incommenſurabile proinde erit idem Z K, per præfatum corollarium. Incommenſurabilia igitur adinuicem erunt L X & N X ipſis E K & Z K æqualia: & ideo rectæ L O O N lõgitudine (per primam ſexti) incommenſurabiles erunt: ſed illæ certæ oſtenſæ ſunt. Potentia tantùm itaque commenſurabiles erunt, certæ L O O N. reliqua igitur L N apotome erit, per 73 huius, quæ quidem poteſt quadratum S H ipſi A B æquum oſtenſum. Si itaque areola A B ſub certa A G, & apotome prima A D comprehendatur, quæ areolam poteſt, ſcilicet L N apotome erit. Huius fuſiorem diſcuſſimus demonſtrationem, vt eius conſtructio quinque ſequentibus ſubſidietur.

PROPOSITIO XCII.

Si areola comprehendatur ſub Certa & Apotome ſecundâ, quæ areolam poteſt, Mediæ eſt apotome prima.

Com

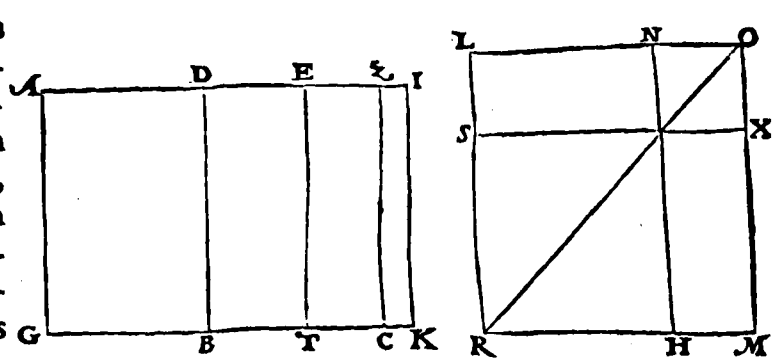
Comprehendatur nanque areola A B ſub certa A G & apotome ſecunda A D: Dico rectã, quæ areolam A B poteſt, eſſe Mediæ apotomen primam. Cùm enim A D ſit apotome, ipſi vna tantùm cõgruet, quæ ſit (per 79 huius) D I, reliqua item more præcedentis conſtruantur. Congruens igitur D I, ipſi propoſitæ A G longitudine commenſurabilis erit, totáque A I maius congruente D I poterit à ſibi longitudine commenſurabili, per ſecundam diffinitionem apotomarum: Igitur D K, ſub A G & D I comprehenſum, certum erit, per 19 huius, & proinde eius dimidium E K certum erit. Cùm autem A G & D I ſint longitudine commenſurabiles, alteráque earum D I cuidam A I incommenſurabilis exiſtat, nomina ſunt enim apotomes: & reliqua A G eidem A I incommenſurabilis erit, per ſecundum corollarium decimæ huius: quare (per 21 huius) medium erit A K. Quia verò A I maius poteſt ipſa D I à commenſurabili longitudine, recta A I ſecatur in Z, per commenſurabilia longitudine, vt proxima diximus, per 17 huius: quare tota A I vtriſque ipſarum A Z Z I longitudine commenſurabilis erit, per vndecimam huius: & proinde totum A K medium, vtrique A C & Z K (per primam ſexti) commẽſurabile erit. Et ideo media erunt (per corollarium 23 huius) A C & Z K: quare media erunt quadrata, L M & N X, per cõſtructionem eis æqualia. Mediæ itaque erunt L O & N O ipſa media potẽtes, per vigeſimã primam huius. Cùm autẽ L X ſit æquale ipſi E K certo, ipſum L X certum erit, medium verò fuit N X. Ipſa igitur L X & N X incommenſurabilia erunt, & idcirco (per primam ſexti) rectæ L O O N longitudine incommenſurabiles erunt. Mediæ autem fuerunt L O & O N potentia commenſurabiles, certum L X comprehendentes, cùm ſint N O O X rectæ æquales. Reliqua igitur L N erit, per 74 huius, mediæ apotome prima, quæ quidem poteſt quadratum S H, æquum ipſi A B, ſub certa A G & apotome ſecunda A D comprehenſo. Si igitur areola comprehendatur, &c.



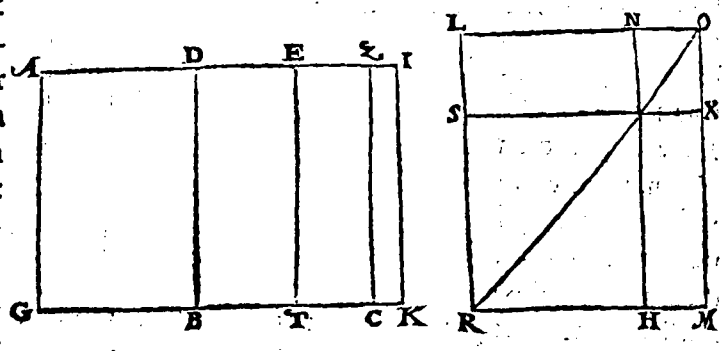
PROPOSITIO XCIII.

Si areola cõprehendatur ſub Certa & Apotome tertia, quæ areolam poteſt, Mediæ eſt apotome ſecunda.

Areola nanque A B ſub certa A G & apotome tertia A D comprehendatur: Dico rectam quæ aream A B poteſt, eſſe mediæ apotomen ſecundam. Conſtruantur etenim quæ prioribus proximis, vt ipſius A D apotomes congruens ſit D I: certæ itaque potentia tantùm commenſurabiles erunt A I D I: quia verò tertia eſt apotome A D, tota A I maius poterit congruente D I, eo quod fit à ſibi commenſurabili longitudine, & inſuper ipſarum A I D I neutra propoſitæ A G longitudine



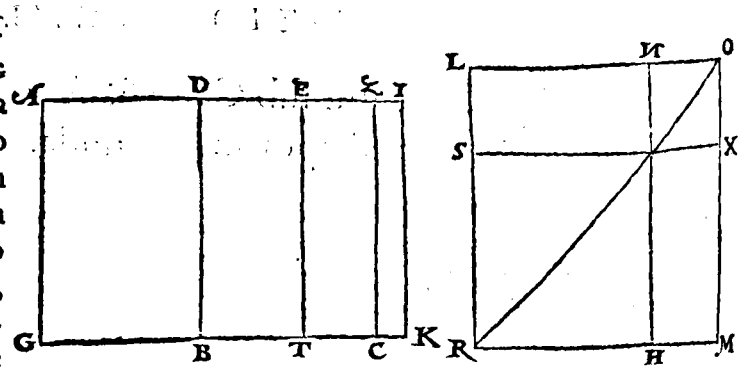
gitudine commenſurabilis erit, per tertiam diffinitionem apotomarum. Media igitur erunt A K & D K, per 21 huius, ſibíque inuicem incommenſurabilia, per primam ſexti, cùm A I & D I longitudine ſint incommenſurabiles, per conſtructionem. Cùm autẽ (vt proximis oſtendimus) tota A I ſecta ſit in Z per commenſurabiles longitudine, A Z Z I, per applicationem æqualis ei quod à dimidia D E minoris D I, ſcilicet quod ſub A Z Z I, commenſurabilia erunt (per primam ſexti) A C Z K adinuicem, & toti A K per vndecimam huius: cùm autem A K & D K fuerint incommenſurabilia, ipſi autem A K commenſurabile fuit Z K, ipſi verò D K commenſurabile fuit E K, eius dimidium, ipſa itaque Z K & E K incommenſurabilia erunt, per coroll. tertium decimæ huius. cæterùm cùm media ſint A C Z K, media erunt quadrata L M N X (eis æqualia conſtructa) & commẽſurabilia, ſicuti & illa A C Z K. Binæ igitur L O O N (illa potentes) mediæ erunt (per 21 huius) & potẽtia commẽſurabiles, & tãtùm, nam rectãgula L X N X æqualia ſunt (per conſtructionẽ) ipſis E K Z K incommenſurabilibus oſtenſis, & ideo (per primam ſexti) rectæ L O O N in ipſorum L X N X ratione, erunt longitudine incommenſurabiles. Binæ igitur mediæ L O O N potentia tantùm commenſurabiles, comprehendunt L X Medium, cùm ſit æquum ipſi E K, medij D K dimidio: reliqua igitur L N erit Mediæ apotome ſecunda, per 75 huius, quæ quidem L N poteſt quadratum S H æquum conſtructum ipſi A B. Eadem itaque L N mediæ apotome ſecunda, poterit ipſum A B ſub certa A G & apotome tertia A D comprehenſum. Si igitur areola comprehendatur, &c.



PROPOSITIO XCIIII.

Si areola comprehendatur ſub Certa & Apotome quarta, quæ areolam poteſt, Minor eſt.

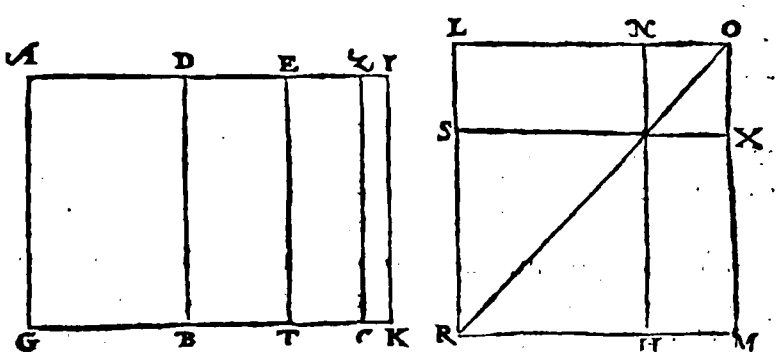
Supponatur areolam A B ſub certa A G & apotome quarta A D contineri: Dico rectam hanc areolam potentem, Minorem dici: congruat ipſi A D apotome vnica D I, per 79 huius: quia apotome eſt A D, binæ A I D I ſunt certæ potentia, tantùm commenſurabiles, per 73 huius: quia verò eſt quarta, tota A I maius poteſt congruente D I eo quod à ſibi longitudine incommenſurabili, & tota A I propoſitæ certæ A G longitudine commenſurabitur, per quartam diffinitionem apotomarum, & proinde (cõſtructis priorum typis) certum erit A K ſub certis A I A G contentum, per 19 huius: medium verò D K, cùm certa D I ſit potentia tantùm commenſurabilis ipſi A G, ex 73 huius, ſub D I & A G comprehenſum: quia verò maior A I maius poteſt minore D I eo quod à ſibi longitudine incommenſurabili, quartæ parti eius quod à minore æquum quod ſub A Z Z I maiori



iori A I applicatum,ſecat ipſam A I per incommenſurabiles longitudine rectas, A Z Z I per ſecundam partem 18 huius, quare (per primam ſexti) incommenſurabilia erunt A C Z K, & (per 12 huius) igitur A K & Z K incommenſurabilia erunt, rurſus cùm A C Z K ſint incommenſurabilia,incõmenſurabilia erunt & quadrata L M N X ipſis æqualia, & proinde rectæ L O O N ipſa quadrata potentes potentia incommenſurabiles erunt: quia verò A C Z K componunt certum A K, ipſa quadrata L M N X,quæ ex ipſis L O O N certum componunt, quia inſuper D K fuit medium, & proinde E K (eius dimidium)medium erit,& ideo L X ipſi E K æquale conſtructum medium erit,quod quidem ſub ipſis L O O N (vel O X) comprehenditur. Binæ igitur rectæ L O O N, potentia incommenſurabiles, efficiunt compoſitum ex earum quadratis L M N X certum, quod verò ſub ipſis L X medium. Reliqua itaque L N erit Minor,per 76 huius,quæ quidem poteſt quadratum S H, æquum ipſi A B conſtructum: ipſa igitur L N (quæ Minor dicitur) poterit areolam A B, ſub certa A G & apotome quarta A D comprehenſam. Si ergo areola comprehendatur ſub certa & apotome quarta,quæ areolam poteſt,Minor eſt.

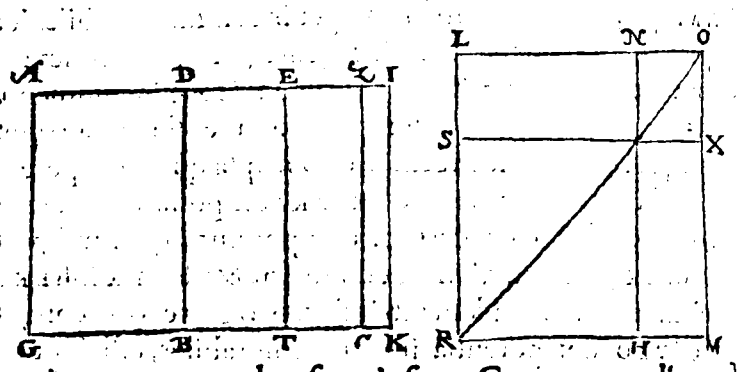
PROPOSITIO XCV.

Si areola comprehendatur ſub Certa, & Apotome quinta, quæ areolam poteſt, eſt quæ Cum certo medium totum efficit.



Comprehendatur area A B ſub certa A G & apotome quinta A D: Dico rectã quæ areã A B poteſt, dici Cum certo medium totum efficientem. Quoniam apotome quinta eſt A D, congruat illi D I, & reliqua vt prioribus conſtruãtur. Rectæ itaque A I & D I certæ potentia tantùm erunt commenſurabiles,per 73 huius. Et quia congruens D I certæ propoſitæ A G eſt longitudine commenſurabilis, per quintam diffinitionem apotomarum. Reliqua A I eidem A G (per corollar.ſecundum decimæ huius) longitudine incommenſurabilis erit. Quare medium erit A K, per 21 huius. Certum item erit D K, per 19 huius,& eius dimidium E K certum, per corollar. 23 huius. Quia verò ad maiorem A I applicatur quod ſub A Z Z I, deficiens ſpecie quadrata, æquum ei quod à dimidia minoris D I, & maior A I maius poteſt minore D I à ſibi longitudine incommenſurabili,cùm ſit apotome quarta A D, per quintam diffinitionem apotomarum. Ipſa igitur A I ſecta eſt in A Z Z I longitudine incommenſurabiles, per ſecundam partem 18 huius. Et ideo (per primam ſexti) A C Z K incommenſurabilia erunt. Cùm autem quod ex L O quadratum L M æquum ſit ipſi A C: quod verò ex N X ipſi Z K: Incommenſurabilia erunt L M & N X quadrata. Et proinde rectæ L O O N (ipſa potentes) incommenſurabiles erunt potentia, per quartam diffinitionem huius. Quia verò cõpoſitum ex earum quadratis L M N X (ſcilicet totũ A K ipſis æquum) medium eſt: Quod verò ſub ipſis L O O N contentum L X (cùm O N & O X ſint æquales) fuit æquum ipſi E K certo: Illud ideo L X certum erit: Duæ itaque rectæ, L O O N potentia ſunt incommenſurabiles, efficientes compoſitum ex earum quadratis L M N X medium. Quod verò ſub ipſis L O O N (vel O X) rectangulum

L X certum. Reliqua igitur L N vocatur Cum certo medium totum efficiens, per 77 huius. Quæ quidem L N potest quadratum S H, ipsi A B (ex constructione) æquum, & exinde idem potest A B sub certa A G & apotome quinta A D comprehensum, ipsa L N Cum certo medium totum efficiens vocata. Si igitur areola comprehendatur, &c.



PROPOSITIO XCVI.

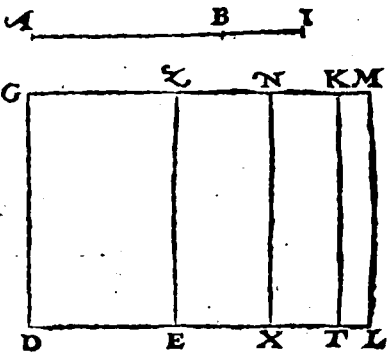
Si areola comprehendatur sub Certa & Apotome sexta, quæ areolam potest, est quæ Cum medio mediũ totum efficit.

Esto area A B comprehensa sub certa A G & apotome sexta A D: Dico rectã, quæ aream A B potest, vocari Cum medio medium totũ efficientem. Disponantur eadẽ quæ prioribus, tantùm A D sit apotome sexta rectæ A I. Quoniam A D est apotome, rectæ A I D I certæ sunt potentia tantùm commensurabiles, inter se. Quia verò est sexta, ipsæ A I D I propositæ A G sunt similiter potentia tantùm commensurabiles, cùm neutra longitudine ipsi A G propositæ commensuretur. Et insuper maior A I maius potest minore D I eo quod à sibi longitudine incommensurabili, per sextam apotomarum diffinitionem: incommensurabilia igitur erunt A K & D K, per primam sexti, & media (per vigesimamprimam huius) sub A L A G & sub A G D I contenta. Medium igitur erit E I ipsius D K dimidium, per corollari 23 huius, & incommensurabile ipsi A K, per secundùm corollarium 10 huius. Quia item A I tota plus potest ipsa D I ab incommensurabili, applicatum sub A Z Æ I ipsam secans per incommensurabiles A Z Z I longitudines, per secundam partem decimæoctauæ huius. Erit ideo (per primam sexti) incommensurabilia sumpta C Z & Q. Quæ cùm æqualia sint quadratis L M N X ipsarum L O O N, Rectæ L O O N potentia incommensurabiles erunt. Efficiunt autem compositum ex earum quadratis L M N X, æquum ipsi A K medio, per constructionem. Illud itaque compositum medium erit. Quod verò sub ipsis L O O N (vel O X) scilicet L X, æquum ipsi E K, medio ostenso, erit medium. Incommensurabile est autem illudi x composito ex quadratis L M N X: nam A K & E K (ipsis composito & L X æqualia) sunt incommensurabilia ostensa. Binæ itaque rectæ L O O N potentia sunt incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis L M N X medium, quod verò sub ipsis L X medium, insuper incommensurabile conflato ex earum quadratis. Reliqua igitur L N est Cum medio medium totum efficiens, per septuagesimamoctauam huius. Quæ quia potest quadratum S H æquum ipsi A B, ex cõstructione, poterit idem A B, sub certa A G & apotome sexta A D comprehensum. Si itaque areola sub certa & apotome sexta comprehendatur, &c.

PROPOSITIO XCVII.

Quod ex Apotome ad Certam comparatum, latitudinem efficit primam Apotomen.

Esto apotome A B, certa verò exposita G D; ei autem quod ex A B æquum ipsi G D comparetur (per 45 primi) G B, latitudinem efficiens G Z: Dico G Z esse primam apotomen: quoniam A B est apotome, congruat ei B I, per 79 huius; ei verò quod ex A I æquum ipsi G D comparetur, per 45 primi G T, latitudinem efficiens G K, ipsi verò quod ex I B æquum sit K L, latitudinem efficiens K M: secetur autem Z M bifariam in signo N, ducta N X parallela ipsis Z E, M L: quoniam G T & K L (hoc est totū G L) æquum est quadratis ex A I I B, reliquum verò G E æquum

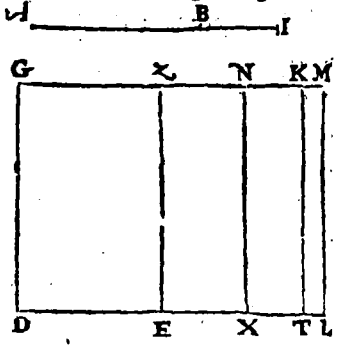


est quadrato ex A B, erit (per septimam secundi) Z L æquum ei quod bis sub A I I B, cuius Z L dimidium erit N L, per primam sexti, cùm secta sit Z M bifariam in N, & proinde æquum ei quod sub A I I B erit ipsum N L (vel Z X): cùm autem apotome sit A B, certæ potentia tantùm commensurabiles erunt A I I B, per 73 huius, & proinde G T, K L, æqualia earum quadratis, certa erunt, & commensurabilia adinuicem, & ideo (per vndecimam huius) toti G L commensurabilia erunt certa G T K L, & inde certum erit totum G L, quare (per primam sexti) G K K M rectæ longitudine adinuicem, & toti G M commensurabiles erunt, quia verò certum est G L, ad G D certam proiectum, latitudinem G M longitudine commensurabilem ipsi G D certam efficit, per vigesimam huius. Cæterùm quia medium est sub A I I B comprehensum, per 21 huius, cùm A I I B fuerint certæ potentia tantùm commensurabiles ostensæ, medium erit N L (aut Z X) sibi æquum, & proinde (per coroll. 23 huius) totum Z L duplum, medium erit, quod ad certam G D comparatum, latitudinem Z M certam longitudine incommensurabilem ipsi G D propositæ certæ efficit, per 22 huius, & proinde binarum G D G M commensurabilium. Altera G D alicui Z M incommensurabilis est, & reliqua G M eidem Z M incommensurabilis erit longitudine, per corollar. secundum decimæ huius, potentia igitur tantùm commensurabiles erunt rectæ G M, Z M, cùm sint certæ ostensæ: reliqua igitur G Z erit apotome, per 73 huius. Dico quòd & prima, cùm enim inter quadrata ex A I I B sit medium proportionale, quod sub ipsis A I I B, per corollar. 25 huius, sequetur inter G T K L (ipsis quadratis æqualia) medium esse N L vel Z X, ei quod sub A I I B æquale ostensum, & igitur (per primam sexti) media erit Z N (vel N M) inter rectas G K K M, & proinde quod sub G K K M æquum erit ei quod ex Z N (vel N M) fiet, per decimamseptimam sexti. Quod igitur sub G K K M æquum quartæ parti eius quod fit à minore Z M, scilicet quadrato Z N, ad maiorem G M applicatur, deficiens specie quadrata, ipsamq; G M (per commensurabilia longitudine) secat in K, vt ostendimus: maior igitur (tota G M) maius potest minore, Z M congruente, eo quod fit à sibi longitudine commensurabili, per decimamseptimam huius: sed tota propositæ G D longitudine fuit commēsurabilis: Reliqua igitur G Z erit apotome prima, per primam apotomarum diffinitionem. Quod itaque ex apotome ad certam comparatum, &c.

PROPOSITIO XCVIII.

Quod ex Mediæ Apotome prima ad Certam comparatum, latitudinem efficit secundam Apotomen.

Sit A B mediæ prima apotome, certa verò propoſita eſto G D, cui comparetur æquum ei quod ex A B (per 45 primi) latitudinem efficiens G Z, ſitq; G E: Dico G Z ſecundam eſſe apotomen: ipſi A B mediæ apotome primæ congruat vnica B I, per 80 huius, & (per proximæ conſtructionem) quadrato A I ſit æquum G T, quadrato verò B I æquetur K L: ei igitur quod bis ſub A I I B æquum erit Z L, per ſeptimam ſecundi, ſectum bifariam per N X, vt ei quod ſub A I I B æquetur quiſque horum Z X, aut N L: igitur ipſæ A I I B ſunt mediæ potentia tantùm commenſurabiles, per 74 huius, quodq; ſub ipſis A I I B certũ eſt: quare quadrata ex A I I B media, cõmẽſurabilia erũt, & proinde G T K L (ipſis æqualia) media cõmenſurabilia erũt, & ideo (per primã ſexti) G K K M rectę longitudine cõmenſurabiles erunt: quia verò quod ſub A I I B certũ fuit, certũ erit N L ipſi æquale, & certum Z L ipſius N L duplum, quod ad certã G D proiectum,

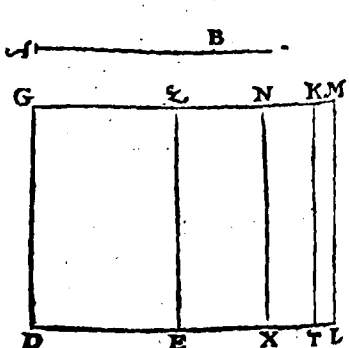


latitudinem Z M certã longitudine ipſi G D propoſitæ cõmenſurabilem efficit, per vigeſimam huius: quia inſuper media commẽſurabilia fuerunt G T K L adinuicem, & toti G L commenſurabilia erunt, per vndecimam huius. Medium igitur (per coroll. 23 huius) erit G L, quod quidem ad certam G D proiectum, latitudinem G M certam longitudine ipſi G D incommenſurabilem efficiet, per 22 huius: quia verò certarum commẽſurabilium G D Z M altera G D ipſi G M incommenſurabilis eſt, & reliqua Z M eidem G M incommenſurabilis erit longitudine, per ſecundum coroll. decimæ huius: ſed potentia ſunt commenſurabiles ipſæ Z M & G M, cùm ſint certæ: Reliqua igitur G Z erit apotome, per 73 huius: Dico quòd & ſecunda, nam tota G M ſecta fuit in K per commenſurabilia longitudine, per id quod ſub G K K M ei applicatum, æquale ei quod fit à dimidia minoris Z M deficiens ſpecie quadrata: maior ideo G M plus poterit minore Z M, eo quod fit à ſibi longitudine commenſurabili, per 17 huius: ſed congruens Z M propoſitæ certæ G D longitudine fuit commenſurabilis: Reliqua igitur G Z dicetur apotome ſecunda, per ſecundam apotomarum diffinitionem. Quod itaque ex mediæ apotome prima ad certam comparatum, &c.

PROPOSITIO XCIX.

Quod ex Mediæ apotome ſecunda, ad Certam comparatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam.

Supponatur recta A B mediæ apotome ſecunda, certa verò proponatur G D, cui æquum ei quod ex A B comparetur, per 45 primi, G E, latitudinem efficiens G Z: Dico G Z tertiam eſſe apotomen. Congruat ipſi A B recta B I, per octuageſimam primam huius. Reliqua vt prioribus conſtruantur, quibus ſcilicet G T ſit æquum quadrato quod ex A I, & K L quadrato I B, ac G E quadrato A B, & Z L ei quod bis ſub A I I B, ſectum bifariam per N X. Cùm A B ſit mediæ apotome ſecunda, binæ A I I B mediæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles medium comprehendentes, per 75 huius: & hac de cauſa earum quadrata media erunt, & commenſurabilia: & proinde media commenſurabilia erunt G T K L, ipſis æqualia, quæ cùm ſint toti G L commenſurabilia, per vndecimam huius, ipſum G L medium efficient, per corollarium 23 huius: quare (per primam ſexti) commenſurabiles erunt G K K M adinuicem, & toti G M, quæ quidem

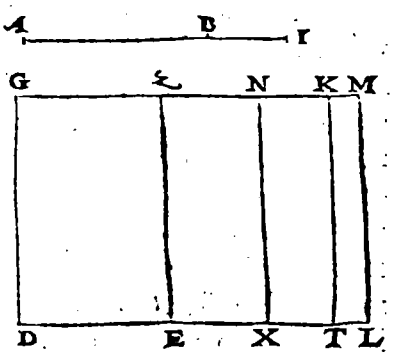


quidem ſunt certæ,cùm ſint latitudines mediorum G T K L G L ad certam G D applicatorum, per 22 huius,& longitudine incõmenſurabiles ipſi G D propoſitæ:quia verò quod ſub A I I B comprehẽſum mediũ diximus,medium erit N L ipſi æquum, & proinde Z L(ipſius N L duplum)medium erit,per corol.23 huius,quod ad certam G D proiectum,latitudinem Z M certam longitudine ipſi G D incommenſurabilem efficiet,per 22 huius. Cùm autem incommenſurabiles longitudine fuerint A I I B rectæ:ſit autem vt A I ad I B, ſic quod ex A I ad quod ſub A I I B,per lemma 21 huius, quadratum A I rectangulo ſub A I I B incommenſurabile erit: & ideo G T N L ipſis æqualia incõmenſurabilia erũt. quia verò ipſis G T N L incõmenſurabilibus, commenſurabilia fuerũt G L ipſi G T, & Z L ipſi N L, ea quoque G L & Z L incõmenſurabilia erunt, ex tertio corollario decimæ huius: & igitur (per primam ſexti) ipſæ G M Z M certæ,longitudine incommẽſurabiles erunt: Potentia ideo tantùm commenſurabiles: reliqua autem G Z erit apotome,per 73 huius: Dico quòd & tertia: Cùm ad maiorem G M comparetur quod ſub G K K M, æquum quartæ parti eius quod à minore Z M, ipſámque (deficiens ſpecie quadrata) per commenſurabilia longitudine G K K M ſecuerit, per conſtructionem, maior G M maius poterit minore Z M, eo quod ſit à ſibi longitudine commenſurabili, per 17 huius: ſed neutra harum, ſcilicet G M Z M, fuit longitudine propoſitæ certæ G D commenſurabilis, vt oſtenſum fuit:Reliqua igitur G Z erit apotome tertia, per tertiam diffinitionem apotomarum. Quod ideo ex mediæ apotome ſecũda ad certam comparatum, &c.

PROPOSITIO C.

Quod ex Minore ad Certam comparatum, latitudinem efficit quartam Apotomen.

Eſto Minor A B,cui congruat vnica I B,per 82 huius,certa item propoſita G D, cui comparetur (per 45 primi) æquum ei quod ex A B Minore, ſitq; G E latitudinem efficiens G Z: Dico G Z eſſe quartam apotomen: conſtruatur (more priorum) figura qua ipſarum A I I B quadratis & rectangulis ſint æqualia G T K L & Z X N L. Cùm autem A I I B ſint potentia incommenſurabiles, per 76 huius, erunt earum quadrata incommenſurabilia. Et proinde G T K L (ipſis æqualia) incommenſurabilia erunt.

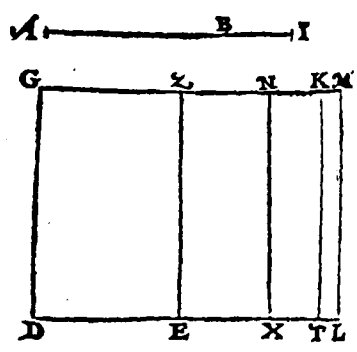


Et ideo rectæ G K K M incommenſurabiles erunt longitudine, per primam ſexti: quia verò conflatũ ex quadratis A I I B certum eſt,per eandem 76 huius, certũ erit G L ipſis æquum. Certa igitur erit G M longitudine propoſitæ G D commenſurabilis,cùm ſit latitudo certi G L ad certam G D proiecti, per vigeſimam huius: quia inſuper quod ſub ipſis A I B I medium eſt, per eandem 76 huius, Medium erit Z L ipſis æquum, quod ad certam G D applicatum, latitudinem Z M certam longitudine incommenſurabilem ipſi G D propoſitæ certæ efficiet,per 22 huius. Cùm autem certum G L incommenſurabile ſit medio Z L,recta G M certa certæ Z M(per primam ſexti)longitudine incommenſurabilis erit: potentia igitur tantùm commenſurabiles erunt certæ G M Z M:reliqua itaque G Z apotome erit, ex 73 huius: Dico quòd & quarta. cùm ad totam G M comparetur quod ſub G K K M, æquum quartæ parti eius quod à minore Z M, deficiens ſpecie quadrata, ipſámque G M ſecet in G K K M longitudine incommenſurabilia, vt patuit, maior (G M tota) maius poterit minore (Z M congruente) eo quod ſit à ſibi longitudine incommenſurabili, per 18 huius. Sed tota G M propoſitæ certæ G D longitudine fuit commenſurabilis.

Reliqua itaque G Z apotome erit quarta, per quartam apotomarum diffinitionem. Quod itaque ex Minore ad certam comparatum, &c.

PROPOSITIO CI.

Quod ex ea quæ Cum certo medium totum efficit, ad Certam comparatum, latitudinem efficit Apotomen quintam.



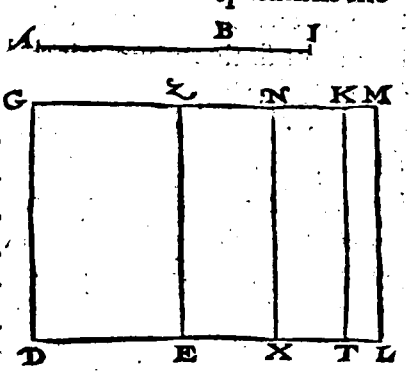
Sit A B Cum certo medium totum efficiens, cui vnica congruat I B, per octuagesimamtertiam huius. Propositra autem Certa esto G D, cui (per quadragesimamquintam primi) comparatum æquum ei quod ex A B sit G E, latitudinem efficiens G Z. Cætera verò construantur ex præassumptis figurarum comparationibus: Dico G Z esse quintam Apotomen. Quoniam A B est, Cum certo medium totum efficiens, binæ rectæ A I I B potentia sunt incommensurabiles, per septuagesimamseptimam huius. Earum igitur quadrata & proinde (ipsis) æqualia G T K L, incōmensurabilia erunt. Et ideo (per primā sexti) rectæ G K K M longitudine incommensurabiles existunt. Quia insuper (ex eadem septuagesimaseptima) compositum ex quadratis A I I B medium est. Medium erit G L ipsis æquum. Quod ad certam G D proiectum latitudinem G M certam longitudine ipsi G D incommensurabilem efficiet, per vigesimamsecundam huius: quia item quod sub ipsis A I I B certum est, ex eadem septuagesimaseptima, Z L ipsius duplum (ex constructione) certum erit, & hac de re ad certam applicatum, latitudinem Z M certam, ac certæ propositæ G D longitudine commensurabilem efficiet, ex vigesima huius: quia autem medium fuit G L, certum verò Z L: Ipsa incommensurabilia erunt, & (per primam sexti) igitur rectæ G M Z M longitudine incommensurabiles fient. Potentia itaque tantum commensurabiles erunt, cū sint certæ. Reliqua igitur G Z apotome erit. Et quinta: nā ad maiorem G M comparatur quod sub G K K M, æquum quartæ parti eius quod à minore Z M (scilicet quadrato Z N) deficiens specie quadrata, per constructionem, secánsque ipsam G M per incommensurabilia longitudine G K K M. Quare (per decimamoctauam huius) maior G M maius potest minore Z M eo quod sit à sibi longitudine incommensurabili. Sed Congruens Z M propositæ G D longitudine fuit commēsurabilis. Reliqua ideo G Z apotome quinta dicetur, per quintam diffinitionem apotomarum. Quod igitur ex ea quæ Cum certo medium totum efficit ad Certam comparatum, &c.

PROPOSITIO CII.

Quod ex ea quæ Cum medio medium totum efficit ad Certam comparatum, latitudinem efficit sextam Apotomen.

Sit cum medio medium totum efficiens A B, cui sola congruat I B, per octuagesimamquartam huius. Sitq; proposita certa G D, cui comparatum G E æquum ei quod ex A B latitudinem efficiat G Z: Dico G Z esse apotomen sextam. Repetantur proximis constructa prioribus, vt vitetur otiosa prolixitas. Quoniam A B est cum medio medium totum efficiens, binę A I I B potentia sunt incommensurabiles, per septuagesimamoctauam huius. Et proinde G T K L ipsarum potentijs æqualia, incommen

commensurabilia erunt, ac ideo rectæ G K K M (ex prima sexti) longitudine incommensurabiles. Cùm autem A I I B efficiant conflatum ex earum quadratis medium, per eandem 78, Medium erit G L ipsi conflato æquum. Quod quidem ad certam G D proiectum latitudinem G M certam longitudine ipsi G D, G incommensurabilem efficiet, per 22 huius. Quia rursus mediũ est quod sub ipsis A I I B, per eandem 78, medium erit Z L eius duplum, ex constructione, per coroll. 23 huius: quod ad certã G D proiectum, latitudinem Z M certam, ipsi G D longitudine incõmensurabilem efficiet, per eandem 22 huius: quia item, ex eadem 78, medium quod sub ipsis A I I B

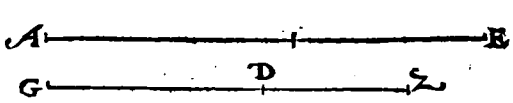


incommensurabile est medio conflato ex quadratis ipsarum, incommensurabilia erunt N L & G L ipsis æqualia, & proinde incommensurabiles erunt (ex prima sexti) N M G M: quia verò Z M dupla ipsius N M est ipsi N M cõmensurabilis, N M verò ipsi G M incommensurabilis, & ipsa Z M ipsi G M incommensurabilis erit longitudine, per secundum coroll. decimæ huius. Potentia itaque tantùm sunt commensurabiles ipsæ G M Z M, cùm sint Certæ, reliqua ideo G Z erit Apotome, & sexta. Nam ad maiorem siue totam G M (ex constructione) applicatur quod sub G K K M, æquum quidem quartæ parti eius quod à minore Z M (hoc est quadrato N M) deficiens specie quadrata, ipsamq; G M, per incõmensurabilia longitudine G K K M secans. Maior itaque seu tota G M, maius poterit minore seu Congruente Z M, eo quod fit à sibi longitudine incommensurabili, per 18 huius. Sed neutra harum G M Z M propositæ certæ G D longitudine fuit cõmensurabilis, vt ostensum fuit, reliqua itaque G Z dicetur (ex sexta apotomarũ diffinitione) Apotome sexta. Quod igitur ex ea quæ Cum medio medium totum efficit, ad Certam comparatur, &c.

PROPOSITIO CIII.

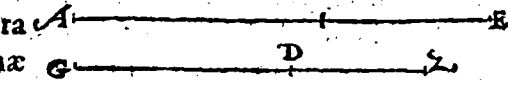
Quæ ipsi Apotome, longitudine commensurabilis est, Apotome est, & in ordine eadem.

Esto Apotome A B cui cõmensurabilis longitudine existat G D: Dico G D esse Apotomẽ, eiusdémq; ordinis ipsi A B. Quoniam A B est apotome, con-



gruat ei vnica B E, per 79 huius. Sit autem sicut A B ad B E, sic (per 12 sexti) G D ad D Z. Erit itaque (per decimamoctauam quinti) A E ad E B sicut G Z ad Z D. Et viciſſim (per decimamsextam quinti) A E ad G Z sicut E B ad Z D, & ideo reliquum A B ad reliquum G D, sicut totum A E ad totum G Z, per decimamnonam quinti. Commensurabiles autem sunt A B & G D, commensurabiles igitur erunt A E & G Z, per decimãtertiam huius, similiter B E & D Z, eandem rationem habentes. Cùm autem A B sit apotome, rectæ A E E B Certæ sunt potentia tantùm cõmensurabiles, per 73 huius. Certæ igitur erunt & ipsæ G Z Z D, per sextam diffinitionem huius, & potẽtia tantùm commensurabiles, per decimamtertiam huius. Reliqua igitur G D apotome erit, per eãdem 73, & eiusdem ordinis ipsi A B: nam est A E ad E B sicut G Z ad Z D. Si itaque A E plus ipsa E B possit, eo quod à sibi longitudine commensurabili, & G Z ipsa Z D maius idem poterit, per decimamsextam huius. Si verò ab incommensurabili, & G Z ipsa Z D eodem maius poterit: quare vel simul eruntex tribus prioribus, aut equidem simul ex tribus postremis, vt patet ex diffinitionibus apotomarum: quia verò tota A E toti G Z, & congruens E B congruenti Z D commensurabiles sunt. Si A E expositæ certæ commensuretur: & G Z eidem commen-

ſurabitur, per decimam huius, vtraque igitur ſimul prima, vel ſimul quarta erit. Si verò Congruens E B expoſitæ Certæ commenſurabilis fuerit, & eidem Z D Congruens commenſurabilis erit, per eandem decimam, ſicq; vtraque ſecunda ſimul, aut ſimul quinta erit apotome. Siquidem neutra expoſitæ certæ commenſurabilis fuerit ipſarũ A E E B, & neutra ipſarũ G Z Z D eidem certæ cõmenſura bitur, per corollariũ ſecũdum decimæ huius, hácque lege vtraque tertia, aut ſexta ſimul erit Apotome. Eiuſdem igitur erunt ordinis ipſæ A B G D, per diffinit. apotomarum. Quæ itaque ipſi apotome longitudine commenſurabilis eſt, &c.



MONITVM.

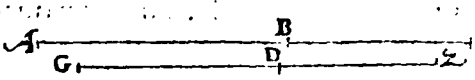
Idem ſentiemus de apotomarum natura, quod de binomiis diximus. Cùm enim hæc diffinita, licet quantitates proferant incertas, non tamen ea intercapedine à ſeipſis diuulſas eſſe exiſtimabimus, vt nulla commenſurandi ſpecie communicare poſſint: verùm quia longitudo incõmenſurabilibus præſefert & potentiam, iam oſtendimus eas quæ longitudine communicant (hoc eſt & potentia ſimul) duorum ordinum eſſe non poſſe, eo quòd omni menſurationis ſpecie coniunctæ ſint: ſed ſi tantùm potentia communicent, longitudine verò nequaquam, non ideo ſequetur eas eundem obtinere diffinitionis ordinem: nam potentiarum commenſuratio non obeſt incõmenſurationi longitudinum. Poſſunt enim binæ potentiæ eidẽ potentiæ certæ cõmenſurari, quarũ longitudines ſimul eidẽ certæ non commenſurabũtur, ſed altera tãtùm. Si itaque vnius apotomes A B potẽtia, certæ commenſuretur, alterius verò G D eidẽ certę longitudo ſimul & potentia cõmenſurentur, patebit hanc eſſe primam vel quartam, illam verò nec primam, nec quartã eſſe ex diffinitionibus, nam altera congruentẽ certę longitudine cõmunicabit, reliqua verò totã, quandoque & neutram. Vnum tamen ſupereſt, quod ſi potentia tantùm communicent binæ A B G D, neceſſe erit vtrãque eſſe ſimul ex tribus prioribus, aut equidẽ ſimul ex tribus poſtremis, per 16 huius. Nam ſi vna maius, nomẽ plus poſſe minore à commenſurabili proferat, & reliqua idem proferet, ſi verò ab incõmenſurabili, & reliqua ab incõmenſurabili. Hoc notandum repetere nõ dedignamur, vt percipiamus has apotomes vnius tantùm incertarum locum obtinere, cùm non adeò inter ſe diſtent, veluti reliquæ incertæ, quas minima commẽſuratio in eas incidens ita copulat vt eiuſdem illico oſtendantur eſſe denominationis, & à reliquarum natura penitus alienæ. Idem ferè monuimus de binomiis, ad 67 huius, veruntamen binomium ac apotomen ſuorum ſenariorum duces poſuit Euclides, ob earum præſtantiam, quacum certa per ſuorum ordinum diſſinitiones areas comprehendunt: Reliquarum incertarum potentias generantes, vt oſtenſum fuit quinquageſimaquarta & quinque eam ſequentibus, & nonageſimaprima & quinque eam ſequentibus, quas ſex conuerſæ veraſque ſequuntur, harum progeniem corroborantes. Non ſequetur huic ſimile in apotome mediæ prima & ſecunda, eo quòd illæ diuerſam incertarum naturam nactæ ſint, veluti diximus in prima ac ſecunda ex binis mediis: nam ſingulæ harum propria vtuntur denominatione, nulli ſuas quantitates communicantes. Si igitur hoc theoremate de apotome tantùm in genere diſſerendum fuiſſet; dixiſſemus rectam quauis atte ipſi apotome commenſurabilem apotomen eſſe, ſcilicet in genere. Quia verò per ſex eius ſpecies commenſurabilis propoſitæ naturam traducere voluimus: illam longitudine commenſurabilem poſuimus, quæ eundem illas cogit ſuſcipere ordinem, potentia tantùm verò, naturam.

PROPOSITIO CIIII.

Mediæ apotome commenſurabilis, Mediæ apotome eſt, & in ordine eadem.

Sit

Sit Mediæ apotome A B, cui commen-
ſurabilis potentia tantũ exiſtat G D: Dico
G D Mediæ eſſe apotomen, & ipſi A B in



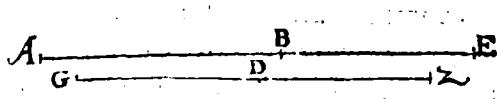
ordine eandem. Congruat ipſi A B vnica E B, per octuageſimam huius: ſicut verò A B ad B E, ſic fiat (per duodecimam ſexti) G D ad D Z: erit, per 18 quinti A E ad E B, ſicut G Z ad Z D: & viciſſim (per 16 quinti) A E ad G Z, ſicut E B ad Z D: & ideo reliquum A B ad G D, erit (per 19 quinti) ſicut totum A E ad G Z. Et proinde (ex 22 ſexti) ſicut quod ex A E ad quod ex E B, ſic quod ex G Z, ad quod ex Z D, & vt quod ex A E ad quod ex G Z, ſic quod ex E B ad quod ex Z D, ac inſuper quod ex A B ad quod ex G D. Commenſurabile autem fuit (ex hypotheſi) quod ex A B, ei quod ex G D: commenſurabile itaque erit quod ex A E ei quod ex G Z, & quod ex E B ei quod ex Z D, per 13 huius: ſed media ſunt quæ ex A E E B, per 74 & 75 huius, cùm ſint mediæ A E E B. Media igitur erunt quæ ex G Z Z D, per corollarium 23 huius, & potentia tantùm commenſurabiles ſunt A E E B, per 74 & 75 huius. Potentia igitur tantùm commenſurabiles erunt G Z Z D, per 13 huius. Ipſa itaque G D apotome mediæ erit, per 74 & 75 huius: Dico quòd & eiuſdem ordinis ipſi A B. Cùm ſit A E ad E B vt G Z ad Z D, erit quadratum A E ad quod ſub A E E B, ſicut quadratum G Z ad quod ſub G Z Z D, per lemma 21 huius, & viciſſim (per 16 quinti) ſicut quod ex A E ad quod ex G Z, ſic quod ſub A E E B ad quod ſub G Z Z D. Commenſurabile autem fuit quod ex A E ei quod ex G Z: commenſurabile igitur erit quod ſub A E E B ei quod ſub G Z Z D, per 13 huius. Si igitur certum ſit quod ſub A E E B, certum erit quod ſub G Z Z D, per ſextam & nonam diffinitionem, & ſic vtraque A B & G D erit mediæ prima apotome, per 74 huius. Si verò medium ſit quod ſub A E E B, medium erit quod ſub G Z Z D, per corollarium 23 huius, ſicq; vtraque ipſarum A B G D mediæ apotome ſecunda, per 75 huius. Mediæ itaque apotome commenſurabilis &c.

A fortiori, ſi longitudine commẽſurabiles ſupponantur A B G D, lucidius oſtendetur, nam quæ longitudine commenſurabiles ſunt, & potentia omnino commenſurabiles erunt, per illationem nonæ decimi.

PROPOSITIO CV.

Minori commenſurabilis, minor eſt.

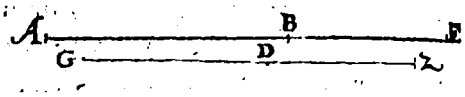
Eſto A B Minor, cui commenſurabilis
potentia tantùm ſit G D: Dico ipſam G D
Minorem dici: quoniam A B eſt Minor,



congruat ei vnica B E, per 82 huius, fiátque (per 12 ſexti) ſicut A B ad B E, ſic G D ad D Z. Erit itaque (per 18 quinti) ſicut A E ad E B, ſic G Z ad Z D, & viciſſim (per decimamſextam quinti) A E ad G Z, ſicut E B ad Z D. Et ideo reliquum A B ad reliquum G D, ſicut totum A E ad totum G Z, per 19 quinti. & proinde (ex 22 ſexti) earum rectarum quadrata proportionalia ſimiliter erunt. Commenſurabile autem fuit quod ex A B ei quod ex G D, ex hypotheſi: commenſurabilia igitur erunt, ſcilicet quod ex A E ei quod ex G Z, & quod ex B E ei quod ex D Z, per 13 huius. Incommenſurabile autem (ex hypotheſi) fuit quod ex A E ei quod ex E B, cùm A B ſit Minor, ex 82 huius: Quod igitur ex G Z ei quod ex Z D, incommẽſurabile erit, per 13 huius: binæ igitur G Z Z D rectæ, potentia incommenſurabiles erunt: quia verò fuit quod ex A E ad quod ex E B, ſicut quod ex G Z ad quod ex Z D, per 22 ſexti, erit componendo, per 18 quinti, quæ ex A E E B ad quod ex A E, ſic quæ ex G Z Z D, ad quod ex G Z. Viciſſim itaque erunt quæ ex A E E B, ad quæ ex G Z Z D quadrata, ſicut quod ex A E ad quod ex G Z: commenſurabile fuit enim quod ex A B ei quod ex G Z. Commenſurabile igitur erit conflatum ex A E E B quadratis, conflato ex G Z Z D quadratis, per 13 huius: atqui certum eſt ex A E E B quadratis conflatum, per 76

huius,

huius. Certum igitur erit ex G Z Z D quadratis conflatum: quia verò fuit A E ad E B, sicut G Z ad Z D, erit (per lemma 21 huius)

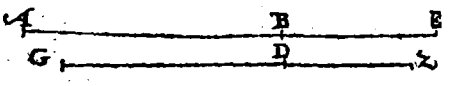


quadratum A E ad quod sub A E E B, sicut quadratum G Z, ad quod sub G Z, Z D. Et viciſſim erit quod ex A E ad quod ex G Z, sicut quod sub A E E B, ad quod sub G Z Z D, per 16 quinti: commensurabile autem fuit quod ex A B ei quod ex G Z. Commensurabile itaque erit (per 13 huius) quod sub A E E B ei quod sub G Z Z D: sed quod sub A E E B Medium est, per eandem 76, Medium igitur erit quod sub G Z Z D, per corollarium 23 huius. Binæ itaque rectæ G Z Z D potentia sunt incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum G Z Z D quadratis certum, quod verò sub ipsis Medium: reliqua igitur G D vocatur Minor, per eandem 76: Minori itaque commensurabilis, Minor est. Hanc in potentia tantùm commensurabilibus ostendimus, vt fortiori argumento in longitudine commensuratis eluceſcat.

PROPOSITIO CVI.

Cum certo medium totum efficienti commensurabilis, & eadem Cum certo medium totum efficiens est.

Esto Cum certo medium totum efficiens A B, cui commensurabilis potentia tantùm existat G D: Dico ipsam G D Cum

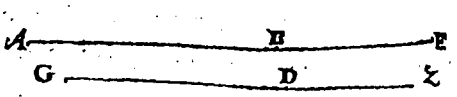


certo medium totum efficientem esse: sit ipsi A B congruens B E, per octuageſimam tertiam huius, & sicut A B ad E B sic fiat G D ad Z D: ipsæ igitur A E E B potentia incommensurabiles erunt, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum, per 77 huius. Resumantur autem (ex quinto & sexto) inter has rectas & earum quadrata proportiones prioribus sumptæ proximis, quoniam ipsarum A E E B potentiæ sunt incommensurabiles, erunt & ipsarum G Z Z D potentiæ incommensurabiles, per 13 huius; quia verò quadrata A E E B quadratis G Z Z D commensurabilia existunt, veluti (ex hypotheſi) quadrata A B & G D, quæ verò ex A E E B medium conflant, per 77 huius: quæ igitur ex G Z Z D medium conflabunt, per coroll. 23 huius: quia rursus ex præfatis collegimus rectangulum sub A E E B commensurabile esse rectangulo sub G Z Z D comprehenso, veluti quod ex A B ei quod ex G D quadrato, quod autem sub A E E B certum est, ex eadem septuageſimaseptima: quod itaque sub G Z Z D certum erit: quare à recta G Z recta Z D tollitur potentia, toti G Z incommensurabilis existens, efficit autem cum tota compositum ex earum quadratis medium, quod quidem sub ipsis certum. Reliqua itaque G D vocatur Cum certo medium totum efficiens, per 77 huius. Cum certo itaque medium totum efficienti commensurabilis, & eadem, &c.

PROPOSITIO CVII.

Cum medio medium totum efficienti commensurabilis, ipsa quoque Cum medio, medium totum efficiens est.

Sit Cum medio medium totum efficiens A B, ipsi autem (saltem potentia) commensurabilis extet G D: Dico G D esse Cum medio medium totum efficientem.

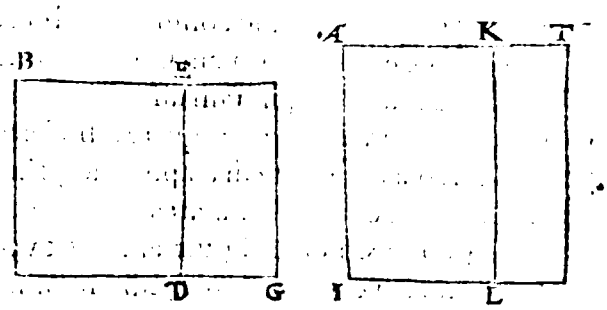


congruat ipsi A B recta B E, per 84 huius, fiatq; (per 12 sexti) sicut A B ad B E sic G D ad D Z, & quæ superſunt proportiones ex proximis præfatis referantur, quoniam A B est cum medio medium totum efficiens, binæ A E E B sunt potentia incommensura

mensurabiles, per 78 huius, quare binæ G Z Z D (ipsis A E E B proportionales) potentia incommensurabiles erunt, per 13 huius. Cùm autem conflatum ex A E E B quadratis sit medium, per eandem 78 huius, conflatum ex G Z. Z D quadratis (ipsi commensurabile) medium erit, per coroll. 23 huius, quia verò quod sub ipsis A E E B est rursus medium, per eandem 78, quod sub reliquis G Z Z D medium erit, per idem coroll. 23 huius, cùm sit commensurabile ei quod sub A E E B veluti quadratum G D quadrato A B: quia demum quod sub A E E B incommensurabile est composito ex A E E B quadratis, ex eadem 78 huius: sequetur quod sub G Z Z D (commensurabile ei quod sub A E E B) incommensurabile esse composito ex G Z Z D quadratis, commensurabili quidem composito ex A E, E B quadratis, per tertium coroll. decimæ huius. Binæ itaque rectæ G Z Z D sunt potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum G Z Z D quadratis medium, quod verò sub ipsis G Z Z D medium, ac insuper incommensurabile composito ex earum quadratis. reliqua igitur G D Cum medio medium totum efficiens erit, per 78 huius. Cum medio itaque medium totum efficienti commensurabilis, &c.

PROPOSITIO CVIII.

A Certo Medio ablato, reliquam areolam potens, vna duarum incertarum est, vel Apotome, vel Minor.

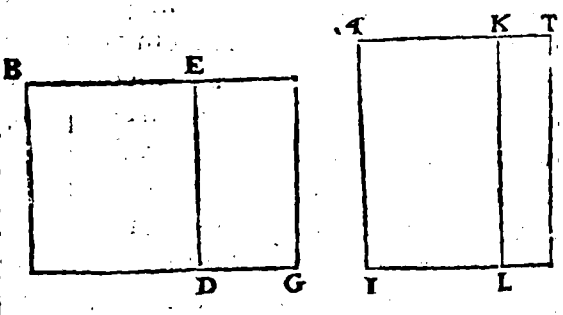


A certo nanque B G auferatur medium E G: Dico reliquã aream B D potentem rectam, esse apotomen vel minorem. Esto proposita certa A I, (cui per 45 primi) constituatur ipsi B G æquum I T, à quo auferatur ipsi E G æquum L T: reliquũ igitur I K reliquo B D æquum erit, per communem sentent. cùm certum sit B G, certum erit I T, sibi æquum: cùm verò medium sit E G, medium erit L T, ipsi æquum, quæ I T & L T ad certam A I applicata, latitudines A T & K T certas quidem efficiunt, sed A T longitudine propositæ certæ A I commensurabilem, per vigesimam huius, K T verò incommensurabilem eidem A I, per 22 huius: quare cùm binarum A I A T. commensurabilium, altera A I cuidam K T fuit incommensurabilis, & reliqua A T eidem K T incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius. Binæ itaque A T T K certæ, potentia tantùm commensurabiles sunt: reliqua igitur A K est apotome, per 73 huius, congruens autem T K: quia verò (à tota disiunctiua) tota A T maius potest minore (seu congruente T K) eo quod à commensurabili, vel incommensurabili, siquidem commensurabili, ipsa A K est apotome prima. Nam maius nomen A T lõgitudine est propositæ A I commensurabile: si autem ab incommensurabili, A K erit apotome quarta, per primam & quartam diffinitionem apotomarum. Ipsa igitur A K, aut prima aut quarta est apotome: si prima, quod sub certa A I & ipsa prima Apotome A K comprehensum I K, potest Apotome per 91 huius: si verò quarta fuerit A K, quod sub ipsa & certa A I comprehensum I K, poterit Minor, per 94 huius. Potens igitur aream I K aut Apotome, aut Minor est: & proinde potens aream B D (ipsi I K ex hypothesi æqualem) aut apotome, aut minor erit. A Certo itaque Medio ablato reliquam aream potentis, &c.

PROPO

PROPOSITIO CIX.

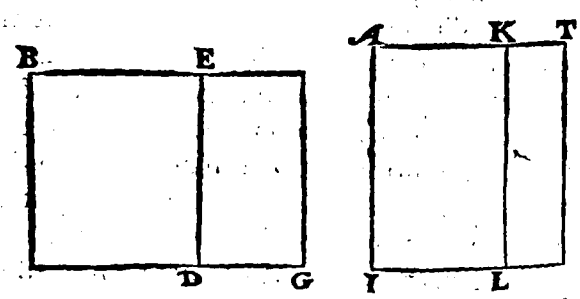
A medio Certo ablato, aliæ duæ fiunt incertæ, vel Mediæ apotome prima, vel Cum certo medium totum efficiens.



A Medio B G auferatur Certum E G: Dico rectam, quæ reliquam aream B D potest, esse vel mediæ apotome primam, aut Cum certo medium totum efficientem. Sumatur (vt proxima diximus) certa A I, cui cõparetur æquum ipsi B G, sitq; I T, æquum verò ipsi E G tollatur L T, quoniam Medium est B G, medium erit I T sibi æquum, quod ad certam A I proiectum, latitudinem A T certam efficiet longitudine ipsi A I propositæ incommensurabilem, per vigesimamsecundam huius: cùm autem certum sit E G, certum erit L T sibi æquum, latitudinémque T K certam efficiet, propositæ verò A I longitudine commensurabilem, per vigesimam huius. Duarum verò A I T K commensurabilium, altera A I alicui A T incommensurabilis fuit, & reliqua T K eidem A T longitudine incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius. Potentia igitur tantùm commensurabiles sunt certæ A T T K, reliqua igitur A K est apotome: Dico quòd secunda vel quinta. Nam si tota A T maius possit Congruente T K eo quod à commensurabili est secunda: fuit enim Congruens T K expositæ A I longitudine commensurabilis: si verò maius possit ab incommensurabili, ipsa A K erit quinta, nam Congruens semper est propositæ commensurabilis, per secundam & quintam diffinitionem Apotomarum: recta igitur A K, est secunda vel quinta Apotome, quare sub Certa A I & Apotome secunda A K comprehensa areola I K, est mediæ apotome prima, sub certa verò eadem A I & apotome quinta A K comprehensa area I K, erit cum certo medium totum efficiens, per 92 & 95 huius. Potens igitur aream I K vel B D sibi æqualem, erit vel Mediæ apotome prima, vel Cum certo medium totum efficiens. A Medio itaque Certo ablato, aliæ duæ fiunt incertæ, &c.

PROPOSITIO CX.

A Medio, Medio ablato incommensurabili toti, reliquę duæ incertæ fiunt mediæ apotome secunda, vel Cum medio, medium totum efficiens.

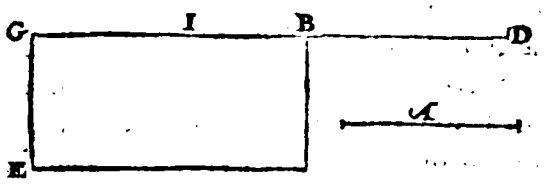


A medio etenim B G Mediũ E G auferatur, incõmensurabile ipsi B G toti: Dico rectam reliquam aream B D potentem, aut Apotomen mediæ secundam, aut Cum medio medium totum efficientem esse. Comparetur (per quadragesimamquintam primi) vt prioribus ad certam A I æquum ipsi B G, sitq; I T, æquum verò ipsi E G sit L T. Quoniam Media sunt B G & E G, Media erunt I T & L T. Quæ ad certam A I comparata, latitudines A T T K Certas, longitudine incom

incommensurabiles ipsi A I propositæ (per vigesimam secundam huius) efficiunt, & adinuicem incommensurabiles, per primam sexti, cum I T medium medio L T sit (ex hypothesi) incommensurabile. Binæ itaque A T T K Certæ potentia tantùm commensurabiles erunt, & igitur reliqua A K erit apotome, per septuagesimam tertiam huius. Sed tertia vel sexta: si tota enim A T Congruente T K maius possit à commensurabili longitudine, erit tertia apotome A K. Nam neutra ipsarum A T T K fuit longitudine commensurabilis propositæ: si verò tota A T maius possit congruente T K ab incommensurabili longitudine, ipsa A K erit sexta Apotome. Nam quauis arte neutra propositæ certæ fuit commensurabilis, per tertiam, & sextam Apotomarum diffinitiones. Ipsam igitur A K necesse est esse tertiam vel sextam apotomen. Quòd si tertia fuerit, quod sub ipsa & Certa A I cõprehenditur I K, est potentia Mediæ apotome secundæ, per 93 huius. Siquidem sexta fuerit A K, ipsa cum Certa A I continebit I K, potentiam Cum medio medium totum efficientis, per 96 huius. Quæ igitur aream I K (vel B D sibi æqualem) potest, vel apotome Mediæ secunda, vel cum medio medium totum efficiens erit. A Medio itaque Medio ablato, incommensurabili toti, &.

PROPOSITIO CXI.

Apotome non est eadem ei quæ Ex binis nominibus.



Esto apotome recta A: Dico ipsam A non posse fieri ex binis nominibus. Quod si fieri possit, supponatur vtrãque esse, scilicet apotomen & binomium. Exponatur certa G E, cui (per quadragesimamquintam primi) constituatur æquum ei quod ex A, quod sit B E, latitudinem efficiens B G. Manifestum erit ipsam B G Apotomen primam esse, ex 97 huius, cùm B E sit quod ex Apotome A. Rursus quia B E est ex ea quæ Ex binis nominibus A, ad certam G E comparatum, efficiet latitudinem G B Binomium primum, per sexagesimam huius. Ipsa itaque G B erit & apotome prima, & binomium primum. Congruat ipsi G B recta B D, per 79 huius. Diuidatur insuper G B in nomina in I, per quadragesimamsecundam huius, maiúsque nomen sit G I. Cùm autem B G sit apotome, G D D B rectæ certæ potentia tantùm commensurabiles erunt. Quia verò prima est apotome, tota G D expositæ Certæ G E longitudine commensurabilis erit. Cùm rursus B G sit Ex binis nominibus prima, binæ G I I B sunt certæ potentia tantùm commensurabiles, per trigesimamsextam huius, & maius nomen G I ipsi propositæ certæ G E longitudine erit commensurabile, per primam diffinitionem binomiorum. Igitur D G G I certæ, eidem G E commensurabiles, adinuicem erunt commensurabiles, per decimam huius longitudine. Et igitur D G tota vni earum G I commensurabilis, & reliquæ D I (per coroll. vndecimæ huius) commensurabilis erit. Sed ipsi D G toti, longitudine fuit incõmensurabilis congruens D B Certa. Igitur D B ipsi D I longitudine incommẽsurabilis erit, per secundum coroll. decimæ huius. Certæ itaque potentia tantùm commensurabiles erunt D I D B. Reliqua igitur B I dicetur apotome, per septuagesimamtertiam huius. Igitur & incerta. Sed & certa eadem B I erit, cùm sit vnum nomen ipsius G B quæ Ex binis nominibus suppositæ, quod fieri non potest. Apotome igitur non est eadem ei quæ ex binis nominibus.

COROLLARIVM.

Hinc fit sex binomia semper differre à sex Apotomis siue Residuis:

& inſuper quinque Binomij comites ſimiliter differre ab apotome & ſuis quinque comitibus, cæteris incertis.

Binomij etenim & quinque eam ſequentium potentiæ ad Certam comparatæ, ſex Binomij ſpecies ſua producũt latitudine, per ſexageſimam & quinque eam ſequentes: apotomes verò & quinque eam ſequẽtium potentiæ, ad Certam eandem applicatæ, latitudines efficiunt ſex apotomarum ſpecies, per 97 & quinque eam ſequentes. Quas ſingulas à ſeipſis diſcrepare docuimus hoc theoremate. Nam latitudines quæ ſemel fiunt Apotome, nuſquam Binomium vltra ſimul cũ Apotome eſſe poſſunt. Præterea nec harum vllam cum Media, eandem poſſe fieri exiſtimabimus. Nam quod ex Media ad eandem præfatam Certam comparatum, latitudinem Certam producit, per vigeſimam ſecundam huius, cætera verò incertam.

MONITVM.

Hactenus expoſuit Euclides quatuordecim linearum genera, diuerſa à ſeipſis quoad commenſurationem, ſub eodem tamen quantitatis genere, longitudine ſcilicet comprehenſa: quarum licet ſingulæ (ex hypotheſis varietate) ſingularum aliarum denominationem concipere poſſint, non tamen (ſub eadem recepta hypotheſi) alteram alterius denominatione vti patiemur. Cùm enim omnia menſurarum genera hypotheticæ facultati ſubdita ſint, eáque (numerorum diſcretione quauis) ſenſibus percipienda exhiberi poſſit, non indignum feremus harum 14 præfatarum, & ſingularum quamlibet quauis optata ſectione ſecari, ſiue eidem quamuis optatã partem alteri exhibitæ ſimilem (ex nona & quatuor eam ſequentibus ſexti) conferri. Nec minus eam per cuiuſlibet numeri vnitates propoſitas diſtribui, quæ omnia ſub hypotheſium incidunt varietates. Atqui vnica propoſita ſectionis, collationis, ſeu diſcretionis hypotheſi, qua aliquam harum denominemus lineam, eadem hypotheſi ſtante, huic ſtatutæ lineæ nullam reliquarum comparandam (numerorum diſcretione) vt eadem menſura communicent ad ſeinuicem, ex præoſtenſis concludemus. Quare harum incertarum denominationes ſingulis aſcriptas non ex propria & veluti ſingulari cuiuſque earum virtute vel natura pendere opinemur: Sed ex eo tantùm reſpectu ſiue ex ea habitudine, qua altera alteri, ſub eiuſdem hypotheſis ſtatuto, commẽſuranda aut incommenſuranda confertur. Eam autem, cui ſtatutam adaptamus hypotheſim, certam vocamus, vt ab ea tanquam ab hypotheſis duce, reliquarum intelligentiam patiamus, perſpecta ipſius Certæ ad reliquas ſiue per longitudinem aut equidem potentiam commenſurandi facultate. Nos hac de cauſa eò magis admiramur improprias illas denominationes, à Theone vel potius Zamberto & Campano proditas, quibus Certam Rationalem, reliquas verò incertas, irrationales dixerunt, cùm rationalis rationis habitum, irrationalis verò rationis eiuſdem priuationem præ ſe ferant, quibus, nec certa præ cæteris abundat, nec quidem incertæ plus certa priuantur. Cùm omnibus & ſingulis inter ſe omnimodè rationum cõueniant habitudines ſiue reſpectus, vnius verò ad alteram licet omnimodè ſeu numeris expreſſæ non conueniant rationes: tamen ea inter eas cadit ratio, per quam & eandem rationem habere & illis tertiam mediam, ſiue quartam concedere proportionalem patitur, quod ſine ratione fieri non poteſt. Earum itaque ducem ſiue præcipuam, ideo vocat Euclides ῥήτην, ſeu Certam, quòd ab ea hypotheſim ſumamus, in qua quidem hypotheſi totius operis habetur intellectus. Reliquas verò per priuationem certitudinis ideo incertas dicemus, quòd huius hypotheſis diſcretione (quæ quantitatis intelligentiam parit) omnino priuentur, ac earum incertarum quantitates ab hypotheticis illis diſcretis vnitatum quantitatibus ſint penitus alienæ. Earum igitur denominationes iuxta progenierum ordinem hac apponimus.

CERTA.

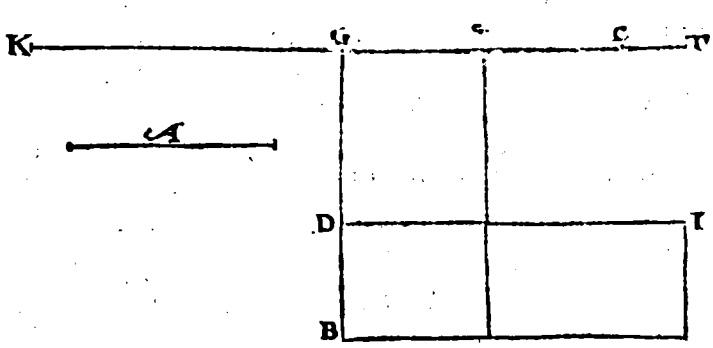
MEDIA.

Ex binis nominibus	Apotome
Ex binis mediis prima	Mediæ apotome prima
Ex binis mediis ſecunda	Mediæ apotome ſecunda
Maior	Minor
Certum mediumq; potens	Cum certo medium totũ efficiens
Bina media potens	Cum medio mediũ totũ efficiens.

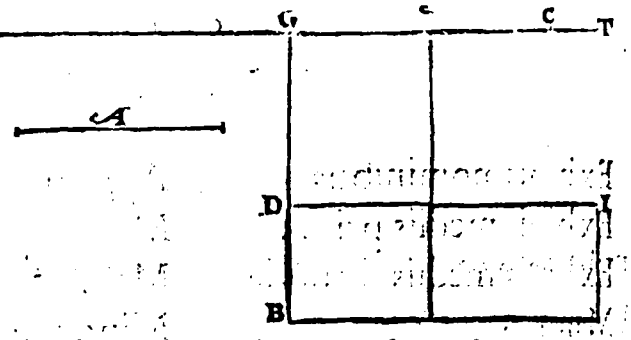
Conueniunt autem binomium & apotome in eo quòd exceſſus maioris nominis binomij, ſupra minus ſit apotome. Haud ſecus toti, apotomes congruens addita, binomium producit eiuſdem ordinis, vt conſtat ex eorum diffinitionibus. Nam maiorum nominum potentiæ, excedent ſimul minorum potentias, commenſurabili vel incommenſurabili: maioráque ſimul aut minora ſimul nomina, certæ propoſitæ commenſurabilia fient, aut neutra ſimul.

PROPOSITIO CXII.

Quod ex Certa ad eam quæ Ex binis nominibus comparatum, latitudinem efficit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius quæ Ex binis nominibus, & in eadem ratione. Et inſuper quæ gignitur Apotome, eundem habebit ordinem ei quæ Ex binis nominibus.



Exponatur Certa A, Ex binis verò nominibus ſit G B, cuius maius nomen eſto G D, ipſi autẽ G B conſtituatur (per 45 primi) æquum ei quod fit ex A, illud B Z latitudinẽ efficiẽs G Z, ipſi verò D B (per eandem) æquũ apponatur eidem quod ex A, ſitq; B I latitudinẽ efficiens D I, cui D I æqualis extendatur G Z T: Dico G Z eſſe Apotomen, qualem exoptat theorema: cùm ſint æqualia B Z & B I, erit reciprocè (per 14 ſexti) G B ad B D, ſicut D I (vel G T ſibi æqualis) ad G Z, & diuiſim ſicut G D ad D B, ſic erit T Z ad Z G, per decimamſeptimam quinti. Maior eſt igitur T Z ipſa Z G, cùm maius ſit nomen G D: ipſi porro Z G æqualis ponatur Z C: fiat autem ſicut T C ad T Z, ſic (per vndecimam ſexti) Z G ad Z K: erit conuerſim (per corollarium quartæ quinti) T Z ad T C, vt Z K ad Z G. Et rationis igitur conuerſione, erit ſicut T Z ad Z C (hoc eſt Z G ſibi æqualem) ita Z K ad K G, per corollarium decimænonæ quinti: ſed fuit T Z ad Z G, vt G D ad D B, quare (per vndecimam quinti, erit Z K ad K G ſicut G D ad D B: commenſurabiles autem potentia tantùm ſunt G D D B, nomina. Potentia igitur tantùm commenſurabiles erunt Z K K G, per decimamtertiam huius: inſuper cùm ſit T Z ad Z G, vt Z K ad K G, erunt (per duodecimam quinti) omnes antecedentes T K ad omnes conſequentes K Z, ſicut Z K ad K G. Ipſa itaque Z K media proportionalis eſt ipſarum T K K G, & ideo (per corollarium vigeſimæ ſexti) ſicut T K



prima, ad K G tertiam, ſic quod ex T K, ad quod ex K Z ſecunda: cùm autem B I (æquum ei quod ex A Certa poſitum) ad Certam D B comparetur, latitudinem D I Certam longitudine ipſi D B commenſurabilem efficiet, per vigeſimam huius, & proinde G T (ipſi D I æqualem) longitudine eidem D B commenſurabilem efficiet: quia verò fuit vt G D ad D B, ſic Z K ad K G, vt verò Z K ad K G, ſic T K ad K Z, erit (ex 11 quinti) G D ad D B vt T K ad K Z, & proinde quod ex G D ad quod ex D B, ſic quod ex T K ad quod ex K Z, per vigeſimã ſecundam ſexti. Commenſurabile enim eſt quod ex G D ei quod ex D B, nominibus: quod igitur ex T K ei quod ex K Z commenſurabile erit, per decimamtertiam huius: ſed ſicut quod ex T K ad quod ex K Z, ſic fuit T K recta ad K G: commenſurabilis ideo erit T K ipſi K G longitudine, & proinde ipſi T G, per corollarium vndecimæ huius, quæ T G fuit certa æqualis ipſi D I. Certæ igitur erunt T K K G longitudine inuicem commenſurabiles: cùm autem Z K certæ K G ſit potentia tantùm commenſurabilis oſtenſa, ipſæ Z K & K G certæ potentia tantùm commenſurabiles erunt: Apotome igitur erit G Z: quia verò T G certa vtrique D B & K G longitudine fuit commenſurabilis, & ipſæ D B & K G longitudine commenſurabiles erunt, per decimam huius. Eſt autem Z K ad K G vt G D ad D B: viciſſim igitur erit (per decimamſextam quinti) Z K ad G D vt K G ad D B: commenſurabiles autem longitudine ſunt K G & D B, & igitur Z K ipſi G D longitudine commenſurabitur, per decimamtertiam huius. Commenſurabilia itaque longitudine ſunt Z K K G (nomina rectæ G Z Apotomes) ipſis G D D B nominibus rectæ G B quæ Ex binis nominibus, & in eadem ratione Z K ad K G, ſicut G D ad D B: quare ſi Z K maius poſſit congruente K G à commenſurabili, & G D ipſa D B maius eodem poterit, per decimamſextam huius: & ſi ab incommenſurabili, ſimiliter per eandem, ſi verò maius vel minus vnius nomen, ſit propoſitæ longitudine commenſurabile, & ſimiliter idem alterius nomen commenſurabile erit eidem propoſitæ, per decimam huius: ſi verò neutrum, & neutrum, per corollarium ſecundum decimæ huius: ipſa igitur G Z eundem obtinebit apotomarum ordinem quem obtinuit G B binomium, per apotomarum & binomiorum diffinitiones. Quod itaque ex Certa ad eam quæ Ex binis nominibus comparatum, &c.

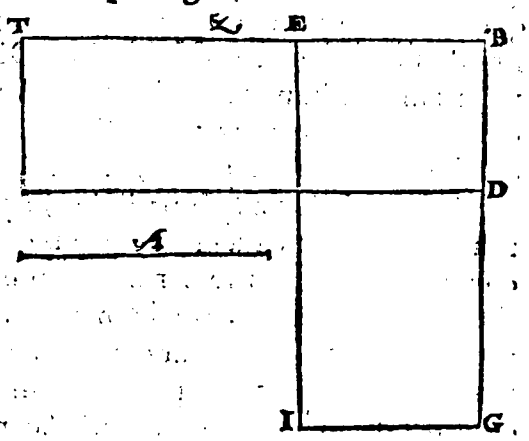
PROPOSITIO CXIII.

Quod ex certa ad Apotomen comparatum, latitudinem efficit eam quæ Ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt ipſius Apotomes nominibus, & in eadem ratione, & inſuper quæ gignitur Ex binis nominibus, ipſi Apotome eundem obtinet ordinem.

Eſto Certa A, Apotome autem ſit B D: ei verò quod ex A æquum, ipſi B D comparetur D T (per quadrageſimamquintam primi) latitudinem efficiens B T: Dico ipſam B T eſſe Ex binis nominibus, & inſuper qualem poſtulat propoſitum. Quia B D eſt Apotome, congruat ei G D. Igitur B G G D Certæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles. Ad certam autem B G eidem quod ex A æquum comparetur, ſitq; B I latitudinem efficiens B B, per quadrageſimamquintam primi. Ipſa igitur B E

Certa

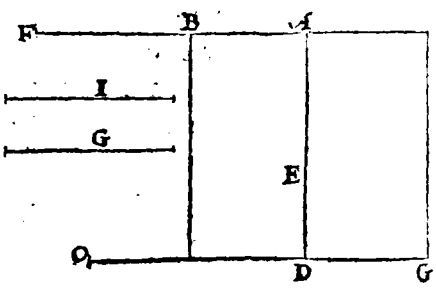
Certa, longitudine ipsi B G commensurabilis erit, per vigesimam huius. Cùm autem æqualia sint B I & T D eidem quod ex te erit reciprocè sicut B T ad B E sic B G ad G D, per decimamquartam sexti. Et rationis conuersione sicut B T ad T E sic B G ad G D, per coroll. 19 quinti: vt autem B G est ad G D, fiat (per coroll. decimæ sexti) T Z ad Z E. Erit itaque (ex vndecima quinti) B T ad T E vt T Z ad Z E: nam vtraque est sicut B G ad G D. Erit igitur reliqua B Z ad reliquam Z T sicut tota B T ad totam T E, per 19 quinti, & ideo (per vndecimam quinti) B Z ad Z T sicut T Z ad Z E. Ipsa itaque T Z media est proportionalis inter ipsas B Z & Z E. Quod igitur ex prima B Z ad quod ex secunda T Z erit vt prima B Z ad tertiam Z E, per coroll. vigesimæ sexti. Cùm autem sit sicut B G ad G D sic T Z ad Z E: Sicut verò T Z ad Z E, sic fuit B Z ad Z T: Erit sicut B G ad G D sic B Z ad Z T, per vndecimam quinti. Commensurabiles itaque potentia tantùm sunt ipsæ B Z Z T, veluti ipsæ B G G D (apotomes nomina) per decimamtertiam huius. Commensurabiles igitur longitudine erunt rectæ B Z Z E, in ratione potentiarum B Z Z T ostensæ. Ac ideo (per corollarium vndecimæ huius) reliqua B E (certa) eidem B Z longitudine commensurabilis erit. Et proinde B G (ipsi B E commensurabilis) eidem B Z longitudine commensurabilis erit, per decimam huius. cui quidem B Z ostensa fuit potentia tantùm commensurabilis Z T: certæ itaque potentia tantùm commensurabiles erunt B Z & Z T rectæ. Tota igitur B T Ex binis erit nominibus, per 36 huius. Cùm autem sit vt B G ad G D sic B Z ad Z T. Erit viciſſim (per 16 quinti) B G ad B Z sicut G D ad Z T. Commensurabilis verò est B G ipsi B Z longitudine. Et igitur (per 13 huius) G D ipsi Z T longitudine commensurabilis erit. Nomina itaque B G & G D Apotomes B D, commensurabilia sunt longitudine nominibus B Z & Z T ipsius B T quæ Ex binis nominibus, & in eadem ratione B Z ad Z T sicut B G ad G D, vt latius patuit. Quòd autem sint eiusdem ordinis. Si maius aut minus nomẽ ipsius Apotomes, scilicet recta B G aut G D, expositæ alicui fuerit commensurabile longitudine, & maius idem vel minus scilicet B Z aut Z T, eidem (per decimam huius) expositæ commensurabitur. Si quidem neutrum apotomes, & neutrum eius quæ ex binis nominibus, per secundum coroll. decimæ huius. Si verò maius B G plus possit minore à commẽsurabili, & maius B Z plus poterit minore à commensurabili, si quidem ab incommensurabili, & ab incommensurabili, per decimamsextam huius. Quod igitur ex certa ad Apotomen comparatum, latitudinem efficit eam quæ Ex binis nominibus, &c.



PROPOSITIO CXIIII.

Si areola comprehendatur sub Apotome & ea quæ Ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt ipsius Apotomes nominibus, & in eadem ratione, Quæ areolam potest, Certa est.

Areola namque D B comprehendatur sub Apotome A B, & ea quæ ex binis nominibus A D. Cuius nomina A E E D sint longitudine commensurabilia, nominibus



ipſius A B Apotomes, quæ ſint A F, F B. Sintque in eadem ratione A E ad E D vt A F ad F B. Poſſit autem areolam D B recta I: Dico I Certam eſſe. Exponatur Certa G, ei verò quod ex G æquum ipſi A D conſtituatur (ex quadrageſimaquinta primi) latitudinem efficiens D C. Erit C D (per 112 huius) Apotome, cuius nomina, ſcilicet C O, O D, erunt commenſurabilia ipſis A E, E D nominibus, Et in eadem ratione C O ad O D vt A E ad E D. Sed ſicut A E ad E D, ſic eſt (ex hypotheſi) A F ad F B. Sicut igitur C O ad O D, ſic eſt A F ad F B. Commenſurabiles igitur ſunt C O, O D ipſis A F, F B, per decimam huius. Reliqua igitur C D ad reliquam A B erit (per decimamnonam quinti) ſicut C O ad A F. Commenſurabilis autem fuit C O ipſi A F, commenſurabilis igitur erit C D ipſi A B. Quare (per primam ſexti) C A ipſi D B commenſurabile erit. Certum autem fuit C A (ex certa G per conſtructionem): certum igitur erit B D, per 9 diffinit. Ipſa itaque I illud B D potens (ex hypotheſi) certa erit, per ſextam diffinitionem. Si igitur areola comprehendatur ſub Apotome, & ea quæ Ex binis nominibus, &c.

MONITVM.

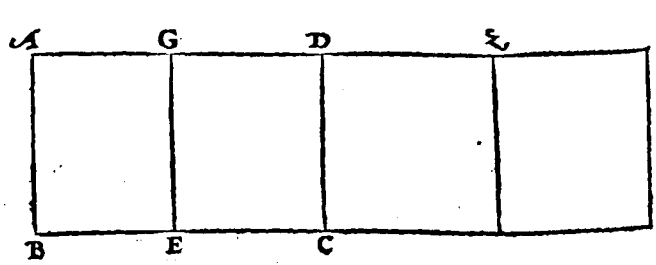
Cogimur his tribus proximis prioribus demonſtrandis, alia vti figurarum pictura. Cùm enim Campanus has non meminerit, Zambertus verò eouſque deprauatas tradidit (Theonis figuras aſſumens) quòd potius tranſcripſiſſe quàm eas intellexiſſe videatur. Quare figuras rectangulis ornatas, iuxta propoſiti naturam, intellectu faciliores lineis rectangula ſupponentes, nouas ferè demonſtrandi rationes præ ſe ferentes contulimus.

COROLLARIVM.

Ab hac & 25, 27, 31, 34, ac earum ſingulis colligemus, certam aream ſub incertis poſſe comprehendi lineis.

PROPOSITIO CXV.

A Media infinitæ numero fiunt incertæ, neque vlla vlli earum, quæ prius eſt eadem.



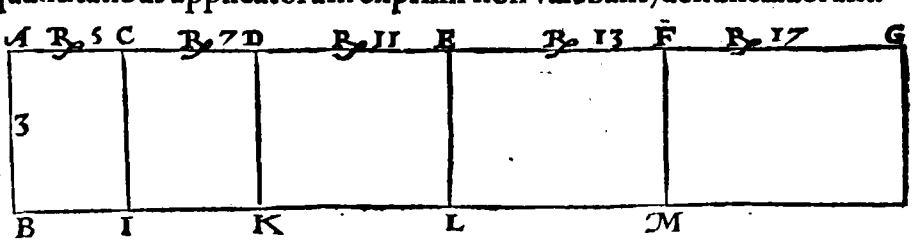
Eſto Media A G: Dico ab ipſa A G infinitas numero oriri incertas lineas, quarum nulla vlli priorũ tredecim expoſitarum eſt eadem. Sit Certa A B, ſub A B A G verò contineatur B G. Illud itaque B G incertum erit, per corollarium 21 huius; poſſit autem ipſum B G recta G D, per 14 ſecundi: quoniam quod ex G D ad Certam A B proiectum, latitudinem efficit A G Mediam: illud quod ex G D (incertum) nulli præfatorum 13 eſt idem. Nam ſingulæ ad Certam comparatæ potentiæ, aut Certam, aut Ex binis nominibus, aut equidem Apotomen, efficiunt latitudinem, non autem Mediam, per vigeſimam

geſimamſecundam,ſexageſimam,& quinque eam ſequentes, nonageſimam ſeptimam,& quinque eam ſequentes,huius:quia igitur B G efficit latitudinẽ Mediam, illud nulli eorum quæ prius idem erit.Singulis igitur incommẽſurabile erit, quod ex G D, quare recta G D illud potens, ſingulis reliquis tredecim potentia incommenſurabilis erit.Rurſus ſub eadem A B & G D contineatur G C, illúdque G C poſſit recta D Z:quoniam quod ex D Z ad Certam proiectum latitudinem efficit G D, ſingulis præfatis incommenſurabilem,& ab ipſis igitur alienam. Illud idem quod ex D Z (hæc eſt G C) reliquis incommenſurabile erit potentia, per primam ſexti: eſt enim ſicut A G latitudo ad G D latitudinem, ſic B G potentia ad G C potentiam, ſub eodem vertice.Si igitur incommenſurabiles fuerint potentiæ,& illas potentes incommenſurabiles erunt (fortiori argumento) longitudine,per illationem nonæ huius. Quæ igitur hac ſerie infinitæ producentur vt C Z & reliqua quotcunque ſimili argumento ſingulis præfatis,ac ſibiipſis erunt diuerſa. A Media itaque infinitæ numero,fiunt incertæ,&c.

MONITVM.

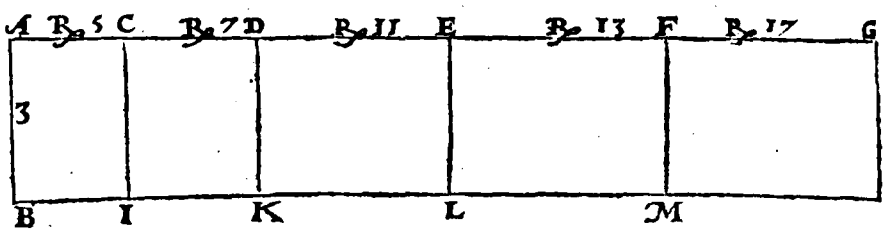
Vnde autem orta ſit harum incertarum(quæ ſaltem ſenſibus deprehẽdi poteſt) intelligentia,monito vigeſimæprimæ huius, aliqua cœperamus exponere, quæ cùm huius theorematis plus adhæreant negocio:Dicemus incertarum magnitudinum agnitionem, à numeris deductam, eo quidem argumento quo contrariorum eadem ſit diſciplina.Cùm enim numeri ſint hi,quibus ſolis quãtitatum capacitas ſenſibus humanis eorum diſcretione adaperitur. Inter harum autem diſcretionum (quæ vnitates numerorum dicuntur) interualla, plures incidunt ipſius quantitatis ſectiones, numerorum illorum vnitatibus exprimi non valentes, cùm extra illarum vnitatum quæcunque interualla incidant. Quas tamen enunciare volentes arithmetici(ne quidquam eis intactum foret) per numerorum radices hypotheticas ſeu ſuppoſitas illas exprimere conati ſunt:ſuppoſitas quidem ideo diximus, quòd hi numeri nullas earum radicum ſibi patiantur aſcribi,præterquam ex hypotheſi,qua hypotheſi eiuſdem nominis radices,quibuſuis dederunt numeris,cuius numeri verè eas radices habentes, ſuas denominarunt,quarum aliæ cenſicæ ſeu quadratæ, aliæ cubicæ, ſurdæ, ſolidæ, &c. quæ licet tantùm propriis quibuſdam adhæreant numeris, non autem quibuſlibet, tamen arithmetici, quibuſuis & ſingulis eas aſcribẽtes, omnes ea radicalium numerorum (quos ſurdos nuncuparunt) denominatione,ſectiones illas quantitatum (quæ vnitatibus numerorum ipſis quantitatibus applicatorum exprimi non valebant)denunciauerunt.

Ab hac autẽ denominatione ortæ ſunt linearũ ac arearũ quãtitates,quę



mediæ 21 huius dictæ ſunt, quas hac figura ſibiipſis incommenſurabiles, necnon infinitas à ſeipſis diuerſas conſtitui facillimum oſtendemus. Eſto recta A B, cuius quantitas radice quadrati numeri exprimatur, ſcilicet radice 9 quæ ſit 3. Reliquæ verò rectæ A C C D D E E F & F G exprimantur radicibus non quadratorum numerorum,nec ſimilium inter ſe planorum:quorum infiniti ſumentur (ex corollario 26 octaui) & ex quadratorum ſerie monito 29 huius deſcripta: ſintq; hi Res numeri 5,Res 7,Res 11,Res 13,& Res 17,& quotuis alij. Cùm enim qui ex A B quadratus ſit,reliqui verò qui ex A C C D D E E F F G non quadrati,ipſi ad eum qui ex A B rationem quadratorum non habebunt, per corollarium 25 octaui:ſingulæ igitur ipſarum,rectæ A B potentia tantùm commenſurabiles erunt,per nonam huius,

& certæ, per ſextam diffinitionẽ huius, media igitur fient (per vige-

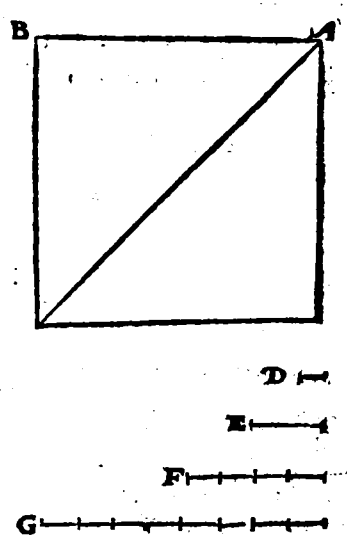


ſimamprimam huius) BC ID KE LF MG, & reliqua quotcunque, quæ ad ſe ſunt vt rectæ AC CD DE &c. ſed cùm qui ex AC CD DE &c. quadrati numeri, ſint diſſimiles plani ex hypotheſi, earum latera AC CD DE &c. ſunt longitudine incommenſurabiles rectæ, & ideo BC ID KE LF MG &c. (ipſis rectis eandem rationem per primam ſexti habentia) incommenſurabilia erunt, per 13 huius, & proinde, rectæ illa rectangula potentes (à fortiori) longitudine incommenſurabiles erunt, cùm ſint potentia per illationem nonæ huius: infinita igitur oſtendimus media ſibi inuicem incommenſurabilia, ac à ſeipſis diuerſa: quod autem attinet ad binomia, quæ ex binis certis potentia tantùm commenſurabilibus coniunctis fiunt, Dicemus harum incertarum originem à linearum natura ſic compoſita primum naſci, quæ quidem lineæ quadrata deſcribunt earum ſequentia naturam, ſecus in medio, cuius intelligẽtia primum à rectangulo binis certis comprehenſo inchoata fuit, quæ quadratum producens latus, lineam ſui naturam ſequentem generat, quare hæc ſimplex: reliquæ verò quæ ab additione linearum procedunt, compoſitæ vocantur incertæ: vt exemplo, ſi copulentur latera quadratorum rationem 9 ad 7 habentium, ea copulata rectam ex binis nominibus procreant, cùm ſint rectæ potentia tantùm commenſurabiles, quam arithmetici denunciare cupientes, vnico numero denominare nequeunt, ſed periphraſi quadam, rem 9 plus rem 7 nuncupant, hoc eſt radicem 9 radici 7 coniunctam. vtuntur tamen ſigno augmenti huius figuræ (Rad.9 + Rad.7) quemadmodum apotomen quæ eiſdem conſtat nominibus, ſed per detractionem ſigno decrementi enunciant, veluti Rad.9 - Rad.7. hoc eſt res 9 à qua tollenda ſit res ipſius 7, vt tandem ſuperſit reſiduum, quod apotome dicetur: in eo tantùm itaque hæ duæ incertæ differunt denominationes (ſcilicet plus & minus) vt Rad.9 plus Rad.7 & Rad.9 minus Rad.7. Quarum (vt diximus in mediarum genitura) totidem infinitæ producentur ſpecies, ſibi inuicem incommenſurabiles, quot eas generantes producentur diſſimilium planorum varietates: quæ autem binomij 36 huius & quinque eam ſequentibus exponuntur comites, per ſurdorum additionem (binomij inſtar) componuntur. Quæ verò apotomes fiunt comites, 73 & 5 eam ſequentibus, per earum linearum detractionem generantur, quæ prius compoſitæ priores ſex genuerunt, eodem ſeruato ordine, nullam præter additionis & detractionis ferentes diſcrepantiam. Quas quidem 13 numero, arithmetici prolixiori longè opera, his numeris ſurdis (quos algebricos, ſeu coſſicos nuncupant) exprimere ſingulas conantur. Re igitur noſtra contenti id curæ relinquemus illis exequendum. Hinc tantùm colligentes, harum incertarum quantitates, nihil aliud eſſe quàm ſectiones certarum quantitatum, quæ inter vnitatum certarum diſcretionem incidunt, eo quidem termino qui nullis ipſarum certarum, infinito etiam, decremento multiplicatis vnitatibus, referri poteſt, ſed eiſdem certarum vnitatibus, ſectiones illæ ac vnitates eas metientes, perpetuò incommenſurabiles exiſtunt, quas ea de cauſa denominatione qualibet quantitatis priuatas fuiſſe iam antea diximus, quod intemeratam illam vnitatis integritatem ſectione violare conatæ ſint. Vnde meritò ſurdæ dictæ ſunt, tanquam ab expreſſis ſiue determinatis quantitatibus alienæ, ac exploſæ haberi debeant.

PROPO

PROPOSITIO CXVI. PROBLEMA 26.

Propoſitum ſit nobis oſtendere in quadratis, dimetientem lateri longitudine incommenſurabilem eſſe.



Eſto quadratum ex A B, cuius dimetiens ſit A C: Dico A B latus dimetienti A C longitudine incommenſurabile eſſe: quoniam A B & B C ſunt æquales, duplum eſt quod ex A C eius quod ex A B, per 47 primi. Dentur (ex ſecunda octaui) quotcunque numeri ab vnitate proportionales, in præfata quadratorum A B ad A C ratione, ſintq; D E F G: quoniam primus ab vnitate ſcilicet E non eſt quadratus, cùm ſit primus, nec (per decimam noni) alius vllus (exceptis tertio ab vnitate & vno relicto omnes) quadratus erit. Ea itaque ratio D ad E, vel E ad F aut F ad G, cadet inter quadratum & non quadratum numeros: quare, per coroll. 25 octaui, ea non erit ratio quadrati numeri ad quadratum numerum, nec igitur quadrata ex A B & A C (eam rationem habentia) rationem habebunt quadratorum numerorum, nec proinde latera (A B latus & A C dimetiens) erunt longitudine commenſurabilia, per 9 huius. Oſtendimus itaque dimetientem lateri in quadratis longitudine incommenſurabilem eſſe.

MONITVM.

Huius locum ſelegit Campanus poſt ſeptimam huius (ſanius quidem) loquens de lineis, quæ licet ſint longitudine incommenſurabiles, tamen earum potentiæ ſiue quadrata inter ſe commenſurabilia exiſtunt, & ideo inter certas enumerandæ ſunt. Inſuper bina data opera omiſimus ante hanc propoſitionem theoremata, ab altero tantùm Græcorum exemplarium tradita, vel potius repetita, id quidem fruſtra, cùm ſint eadem eis quę 105 & 106 iam demonſtrata ſunt. Inſuper huius propoſitionis demonſtrationem corollario octauæ octaui breuiſſimè concluſimus, ſed non ideo dedignati ſumus huic loco, Euclidem ſequuti, apponere, licet eam pluribus aliis argumentis demonſtrare potuiſſemus. Sed quia libris ſequentibus de incertis rectis figuras planas ingredientibus quandoque loquetur, huius longitudinem incertam hac vltima exponere cœpit.

LIBRI DECIMI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER VNDECIMVS.

DIFFINITIO I.

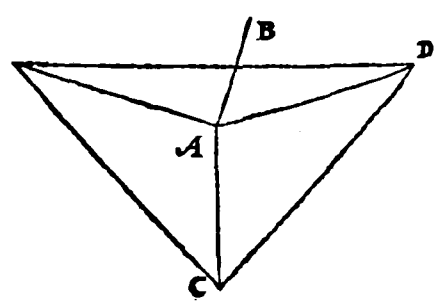
SOlidum eſt quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet, ſolidi verò termini ſunt ſuperficies.

Tertium quantitatis genus diffinit Euclides. Primum quidem fuiſſe lineam, quæ longitudinem tantùm habet. Secundum verò ſuperficiem, quæ binas dimenſiones ſeſe ad rectos dirimentes habet, ſcilicet longitudinem ac latitudinem. Tertium igitur erit, Solidum tribus menſuris dimenſum ſeſe inuicem ad rectos angulos ſecantibus, longitudine, latitudine, ac ſublimitate, quam alij craſſitudinem, profunditatem, ſeu denſitudinem nuncupant, quorum intercapedinem nihili faciemus, Cùm illæ tres dimenſiones tres ſint tantùm longitudines, ſeſe ad angulos rectos dirimentes in eodē ſubiecto, quod ideo ob tres illas dimenſiones quibus menſum eſt, ſolidum dicitur, præter illud alia quantitas plures dimenſiones habere regulares non poteſt. Nam ad idem ſignum plures tribus lineis ad rectos ſeſe ſecantes concurrere non poſſunt. Conuerti itaque poterit hæc diffinitio, vt quæcunque fuerit ſubiecti natura tribus illis dimenſionibus ornata, ſolidum dici poſſit. Quod quidem ſolidum ſimiliter dicemus terminari ſuperficiebus (ac ſuperficiem lineis, lineam verò ſignis terminari antea diximus) ſub quæ ipſarum clauſura concineri, illud præter reliqua quantitatis genera ſibi aſſumens. Nam ſuperficies tantùm finita non concluſa eſt lineis, linea verò terminata non autem menſa, nec quidem concluſa ſignis. Solidum autem ſuperficiebus terminatum, concluditur eiſdem.

DIFFINITIO II.

Recta linea ad planum recta eſt, quando ad omnes ipſam tangentes rectas in ſubiecto plano exiſtentes, angulos rectos efficit.

Veluti ſi ad planum C D E erigatur recta A B, eo ſitu quo quælibet rectę in ipſo plano ductę ipſam A B tangentes cùm illæ angulos rectos efficiant, vt lineæ A C A E A D, tunc recta A B dicetur recta ad illud planum C D E, eo quòd à contactu plani quælibet in plano rectæ, ad ipſam rectos concludant angulos. hæc methodum concipit à decima primi diffinitione, cùm idem agat in ſuperficiem hæc, quod prior in lineam, ſcilicet vtraque vtrobique rectos angulos.

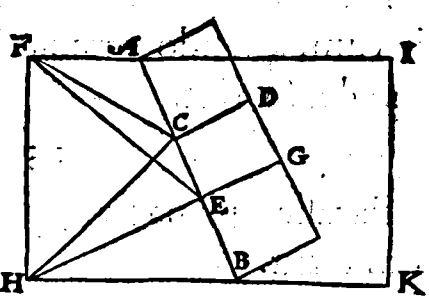


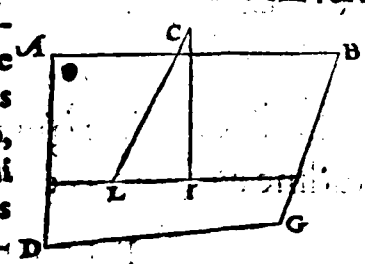
DIFFI

DIFFINITIO III.

Planum ad planum rectum eſt, quando ſuper communi ſegmento eorum planorum perpendiculares in vno eorum planorum exiſtentes, reliquo plano ad angulos rectos fuerint. Rectæ verò lineæ ad planum inclinatio eſt angulus acutus contentus ſub ipſa recta linea, & alia recta in plano ducta ab inclinante per ſignum in quod cadit perpendicularis, à ſublimi termino inclinantis demiſſa.

Binas hac vnica complectitur diffinitiones. Prioꝛe enim bina ſupponit plana VT A D G B & F I K H, quorum planorum commune ſegmentum eſt recta A B, quæ quidem A B in vtroque eorum planorum extenditur: ſi igitur in altero eorum planorum ad ipſam A B demittãtur perpendiculares D C G E. Illæq; D C G E reliquo plano F I K H ad angulos rectos (ſiue rectæ) fuerint. Tunc planum A D G B ad planum F I K H rectum eſſe dicetur, hoc eſt, planum ſuper planum conſiſtens, vtrobique angulos efficiet æquales, vt diximus decima diffinitione primi de lineis. Quod ideo per lineas exponimus, quia lineæ angulos efficiunt, non autem ſuperficies. Inclinationem verò rectæ lineæ C L ad planum A B G D eſſe dicemus, angulum acutum C L I, qui quidem fit à recta C L inclinante & alia L I in plano A B G D ducta. à ſigno L inclinantis per ſignum I in quod cadit perpendicularis ipſi plano, à ſublimi termino C rectæ inclinantis C L demiſſa, qui angulus C L I neceſſariò fit acutus. Nam rectus exiſtens C I L (ex conſtructione) æquus erit binis C L I L C I angulis, cùm tres trianguli anguli binis æquipolleant rectis, per trigeſimamſecundam primi: ipſe igitur C L I minor recto C I L, acutus erit (ex diffinit.) qui dicetur inclinatio lineæ C L ad planum A B G D.

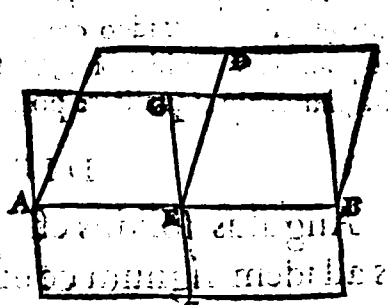




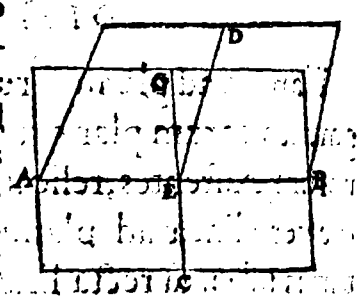
DIFFINITIO IIII.

Plani ad planum inclinatio eſt, angulus obliquus comprehenſus ſub his quæ ad angulos rectos communi ſegmento ad idem ſignum ducuntur, in vtroque ipſorum planorum.

Angulum obliquum ideo dicimus, cùm quandoque acutus, quandoque verò obtuſus exiſtat, ea lege qua linearum inclinatio angulum planum efficere dicta fuit, octaua diffinitione primi: vera etenim inclinatio ea eſt quæ lineas à recta recedere cogit. Ideo etenim obliquum dicimus angulum, vt à recto ſemper differat planum rectum conſtituente, vt ſi planum A B ad planum A G B C inclinari dicamus, cùm perpendiculares ductæ D E G E C E ad commune ſegmentum planorum (quod ſit A B) atque ad idem ſignum E, ſiquidem rebus



bus ſic diſpoſitus angulus D E G ſit acutus, D E C verò obtuſus erit, planum A D B ad planum A G B C inclinari dicetur, & è conuerſo A G B C ad planum A D B: ſi verò anguli D E G & D E C recti fuerint, planum ad planum rectum erit. Nam lineæ E D E G E C in ipſis planis ad rectos cum communi A B ſegmento conſtitutæ (planorum motu) inclinationem aut planorum rectitudinem exprimunt: quare ea anguli D E G vel D E C quantitas, planorum dicetur inclinatio.



DIFFINITIO V.

Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, & alterum ad alterum, quando prædicti inclinationum anguli ſibi inuicem æquales fuerint.

DIFFINITIO VI.

Parallela plana ſunt, quæ vndique producta contactum non admittunt.

Hæc nulla eget expoſitione, ſed additione hac (quæ vndique producta) egebat: nam ſi parallela dixiſſemus tantùm, quæ contactum non admittunt, falſam ederemus hanc diffinitionem. Si itaque vndique producta contactum non admittant, verè parallela erunt.

DIFFINITIO VII.

Similes ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſub ſimilibus planis, & multitudine æqualibus continentur.

DIFFINITIO VIII.

Similes ſolidæ figuræ & æquales ſunt, quæ ſub ſimilibus planis, multitudine & magnitudine æqualibus, continentur.

Hanc ſolidorum ſimilitudinem à ſimilitudine planorum ac eorum æqua multitudine ſumit, non à laterum proportione veluti figuras planas, prima ſexti diffinit, ſumpſit. Nam in figuris binæ rectæ tantùm angulum planum efficiunt, in ſolidis verò plures duabus neceſſe eſt concurrere, vt angulum ſolidum componant, vt proximo videbimus. Quare licet eadem diffinitione, qua figuras planas has ſolidas ſimiles dixiſſe potuiſſet, ſcilicet eas quarum quæ circum æquales angulos latera ſunt proportionalia, attamen ob rationum multitudinem multitudine laterum generatam, & ideo confuſam quodammodo, earum ſimilitudinem breuius ſub planorum ſimilitudine, & æqua multitudine concluſit; æqualitatem verò addita planorum æqualitate poſtremò diffiniuit.

DIFFINITIO IX.

Angulus ſolidus eſt, qui ſub pluribus duobus planis angulis ad idem ſignum conſtitutis in eodem plano non exiſtentibus comprehenditur.

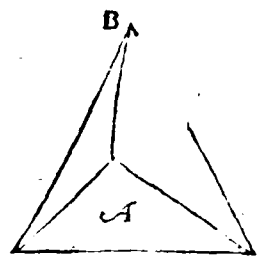
Cum

Cùm omnis angulus planus sit linearum concursus, solidus verò sit planorum angulorum concursus, qui quidem præ se lineas ferentes, linearum concursum similiter efficiunt, quare alteram tantùm Theonis sumemus diffinitionem, qua per planorum concursum exposuit, reliquam minus dignam omittentes, qua scilicet per lineas plures duabus concurrentes diffiniuit solidum angulum. Planos item angulos in eodem plano constitui vetat: non esset enim angulus, sed superficies.

DIFFINITIO X.

Pyramis est figura solida comprehensa planis ab vno plano ad vnum signum constitutis.

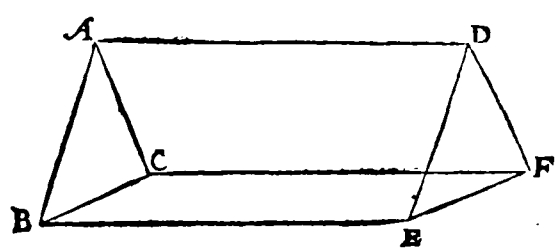
Quoniam ab vno plano ad vnum signum præcipit tendere reliqua plana Pyramidem concludentia, manifestum erit omnia constituta plana necessariò triangula esse, dempto supposito à quo tendunt in signum reliqua, illud verò demptum cuiusuis erit figuræ, iuxta Pyramidis hypothesim, quæ ab eo plano denominationem concipit, vt à pentagono pentagona, ab hexagono hexagona, à quadrangulo quadrangula, à trigono trigona, vt A B.



Pyramis.

DIFFINITIO XI.

Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo sunt triangula, similia, æqualia, & parallela, Reliqua verò parallelogramma.



Super hac diffinitione dissentiunt Theon & Campanus, sed prævalet Campani intellectus, Nam Theon & alij quidam, inter quos Psellus, eousque oscitanter diffiniunt quòd sub Prismatis nomine cuncta comprehendere videntur parallelepipeda, & plures lateratas columnas, licet à vero sensu forsan nõ secedere putẽt, maxime Theõ: nam rectè potest intelligi Psellus. Quod maximè obest futuris demõstrandis, quare particularem Prismatis diffinitionem sumentes, Prisma esse dicemus figuram solidam, planis comprehensam, quorum duo sunt triangula, æqua, similia, & parallela, reliqua verò parallelogramma, vt exemplo A B C & D E F sint triangula, A F A E & C E, sint parallelogramma. patet ex diffinitione parallelogrammi, triangula A B C & D E F esse necessariò æqualia, scilicet æquis lineis contenta, & parallela, cùm fiant ex oppositis parallelogrammorum lateribus, & igitur similia, quæ omnia necessariò pendent à positione trium parallelogrammorum, trium̃que parallelogrammorum numerus à tribus trigonorũ pendet lateribus. Dicitur autẽ prisma à πρίω, quod est serro, eo quòd figura serræ dentem imitetur, angulo B A C, vel E D F serræ dentis cuspidem referente: cui sententiæ fauet 40 huius.

DIFFINITIO XII.

Sphæra est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno signo intus existente, omnes rectæ lineæ ductæ

sunt æquales. Sphæræ autem descriptio est, circunductio semicirculi manente eius dimetiente, quoad vnde cœpit redeat.

Quoniam omnium solidorum perfectissimum est Sphæra, ipsi duplicem non dedignamur conferre expositionem: priori etenim veram eius substantiæ diffinitionem expressimus, cum diffinito admodum conuertibilem. Posteriori verò eius descriptionem diffiniuimus, qua lege describenda sit planè demonstrantem: quia Theon ac Campanus Sphæræ solam descriptionem, non autem propriam substantiæ naturam depinxerunt, descriptioni eam quam ex potissima geometriæ sententia suscepimus diffinitionem præfecimus, quæ quidem naturæ huius solidi perfectionem, ea linearum ab vnico signo prodeuntium æqualitate, ac insuper vnicæ illius admirabilis faciei æqua vndique flexione, tanta solertia solidum concluſit, vt perfectionis eius regularitas, nulla angulorum siue laterum fractura maculanda sit, sed ineffabilis illius æternæ essentiæ initio exitúque carentis, aliquam præ se ferat imaginem.

DIFFINITIO XIII.

Centrum Sphæræ est signum in Sphæra constitutum, à quo omnes rectæ ad superficiem ductæ sunt æquales, & illud quod & semicirculi describentis.

DIFFINITIO XIIII.

Dimetiens Sphæræ est recta linea per centrum acta, ex vtraque parte superficie Sphæræ terminata.

DIFFINITIO XV.

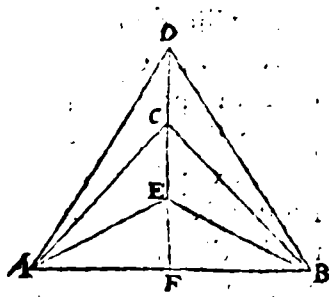
Axis Sphæræ est dimetiens illa quiescens, circum quam Sphæra mouetur.

Vt diffinitiones quasi partium Sphæræ iuxta naturæ earum ordinem disponamus, harum trium seriem à Theone traditam variare cogimur, vt quod prius natura fuit, prius incedat ordine: Nam centrum prius fuit dimetiente: cùm enim per centrum agatur dimetiens, id eius & locum, & naturam indicat. Axem verò præcedet dimetiens, cùm dimetiẽtium quæ in Sphæra describi possunt, vnica sit axis dimetiens, ea scilicet quæ quiescit: generalius igitur est dimetientis nomen, axis nomine, quod quidem solius motus videtur esse relatiuum, Dimetiẽs verò Sphæræ quantitatem indicat, cuius est præcipuum geometriæ negotium.

DIFFINITIO XVI.

Conus est figura solida transitu rectanguli trianguli descripta, manente vno eorum quæ circa rectum angulum latere, donec in idem vnde sumpserat exordium voluatur, & si manens recta linea æqua fuerit reliquæ circa rectum angulum circunductæ, rectangulus erit Conus, Si verò minor, Amblygonius, Si autem maior, Oxygonius.

Campa



Campanus hanc figuram Pyramidem dixit rotundam: attamen cùm huius à Pyramide longè diſtet deſcriptio, necnon & natura ob eius regularem eſſentiam, videtur eam Theon rectè ſeorſum diffiniſſe. Hæc enim vnico rectanguli trianguli motu, Pyramis verò planorum applicatione diſcribitur. Quoniam autem Conorum tres diffinit ſpecies, rectangulum ſcilicet, vt A C B Amblygonium verò vt A E B, Oxygonium autẽ vt A D B, Cùm enim trianguli rectanguli A C F latera, ſcilicet C F manens, & A F circunductum, ſint æqualia, æquales erunt A C F C A F anguli, per quintam primi, & dimidium efficiunt anguli A F C recti, per 32 primi, ſimiliter & trianguli B F C, ipſi A F C æquales: Totus igitur A C B (qui ad Coni verticem) rectus eſt, eo quidem quòd recta C F manens, circunductæ A F (in F B) ſit æqualis. Si verò manens vt E F ſit minor circunducta A F, angulus A E B maior erit recto A C B, per vigeſimamprimam primi. Quare A E B F Conus Amblygonius dicetur. Siquidem manens D F ſit maior circunducta A F, angulus A D B (per eandem) minor erit recto A C B, & proinde Oxygonius dicetur A D B F Conus.

DIFFINITIO XVII.

Axis Coni eſt manens recta circa quam triangulum vertitur, Baſis autem eſt circulus à reliquo latere angulum rectum continente circunducto deſcriptus.

DIFFINITIO XVIII.

Cylindrus eſt figura ſolida tranſitu rectanguli parallelogrammi deſcripta, quieſcente vno eius latere donec in idem vnde ſumpſerat, exordium reuoluatur.

DIFFINITIO XIX.

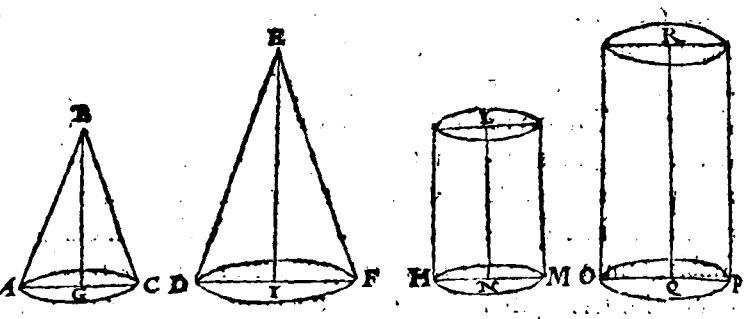
Axis Cylindri eſt manens recta circa quam parallelogrammum voluitur, Baſes autem ſunt circuli à rectis (angulum rectum cum ſtante continentibus) circunductis, deſcripti.

Ex his binis Cylindri diffinitionibus cõſtat, Cylindrum duobus circulis æqualibus ac parallelis vnáque facie curua contineri, cùm æquales & in quauis motus parte parallelæ ſint rectæ eos circulos deſcribentes. Ac inſuper axis Cylindri ad vtraſque baſes recta erit linea. Nam ad omnes rectas eam tangentes in baſi deſcriptas rectos efficient angulos. Similiter & Coni axis ad ipſius baſim eadem de cauſa recta erit linea.

DIFFINITIO XX.

Similes Coni & Cylindri ſunt, quorum axes & baſium dimetientes ſunt proportionales.

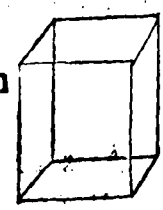
Similitudinē Conorum ac Cylindrorum ponit in proportione rectarum, ex quibus oriuntur. Nam ex dimetientibus basium oriuntur eorum solidorum binæ dimensiones, scilicet quæ longitudinis & latitudinis vice funguntur. Ex axibus autem reliqua nascitur, scilicet quæ sublimitatis locum obtinet. Cùm igitur fuerit sublimitas B C Coni ad sublimitatem E I alterius Coni, vt A C dimetiens (hoc est, longitudo & latitudo) ad D F dimetientem, Coni A B C & D E F erunt similes. Haud secus in Cylindris, si fuerit L N ad R Q, vt H M ad O P, Cylindri H L M N & O R P Q erunt similes, vt latius posthac dicturi sumus.



Cubus.

DIFFINITIO XXI.

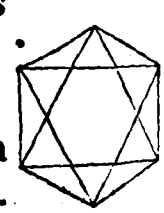
Cubus est figura solida, sub sex quadratis contenta basibus.



Octaëdrum.

DIFFINITIO XXII.

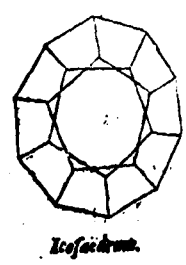
Octaëdrum est figura solida, sub octo æquilateris triangulis sibi inuicem æqualibus comprehensa.



Dodecaëdrum.

DIFFINITIO XXIII.

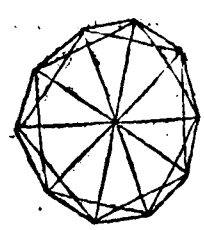
Dodecaëdrum est figura solida, sub duodecim quinquangulis æquiangulis & æquilateris sibi inuicem æqualibus comprehensa.



Icosaëdrum.

DIFFINITIO XXIIII.

Icosaëdrum est figura solida, sub viginti æquilateris triangulis sibi inuicem æqualibus comprehensa.



DIFFINITIO XXV.

Solidum parallelepipedum est figura solida sub quadrangulis planis, quorum quę ex oppo sito sunt parallela comprehensa.

Huic fauebunt ferè omnes de parallelepipedi natura loquentes.

DIFFINITIO XXVI.

Figura solida in figura solida inscribi dicitur, quando inscri-

ptæ

ptæ figuræ anguli ſimul angulos, aut ſimul ſuperficies, vel ſimul latera circunſcriptæ tangunt.

DIFFINITIO XXVII.

Figura ſolida figuræ ſolidæ circunſcribi dicitur, quando circunſcriptæ figuræ anguli ſimul, latera ſimul, aut ſuperficies ſimul, angulos inſcriptæ tangunt.

Figuras planas figuris planis inſcribi ac circunſcribi diffinitionibus quarti docuimus. Cùm autem agendum ſit de ſolidis longè à planis figuris diſtantibus natura, eorum inſcriptiones paulo à planorum inſcriptionibus diſcrepantes diffiniemus: inſcriptiones etenim (æque planorum, & ſolidorum) ad regularium figurarum tantùm intelligentiam conferuntur, Irregularium etenim infinita multitudo, inſcribendi normam ſua confuſione reſpuit. Cùm autem regularium ſolidorum latera, baſes & anguli, ſub diuerſis contineãtur numeris, perſpicuũ eſt angulos inſcriptæ figuræ angulis circũſcriptæ lateribus aut baſibus coniungi non poſſe quandoque, ſed & quandoque poſſe, Eo autẽ ordine, quo ſimul interiores anguli latera exterioris tangant, vel ſimul angulos vel equidem ſimul baſes, non tamen omnes, cùm ſæpius inſcriptæ tanta multitudine angulorum careant qua circunſcriptæ ornantur laterum, baſium aut angulorum multitudine, vel è contra. Attamen ea inſcriptione interiores exterioribus ſimili penitus contactu adhærebunt, ſimiliáque vacua exceſſuum circunſcriptis relinquent, vt fauente Supero decimo quinto oſtenſuri ſumus, alias inſcriptiones ſimiles & æquales exceſſus non relinquentes, irregulares eſſent, ob eorum exceſſuum diſcrepantiam, veluti cùm Cubi latera ſecant baſes circunſcripti Octahedri, ac plures aliæ regulatam inſcribendi normam refragrantes. Solas igitur regulares eas dicemus, quæ ſimiles & æquales figuræ circunſcriptæ relinquunt exceſſus vndique.

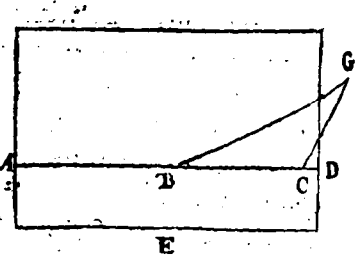
MONITVM.

Quoniam diffinitionibus huius vndecimi, aliqua tranſpoſita, quædam verò paulum obſcura ſiue cõfuſa (vitio temporis vt arbitramur) tradita ſunt, quàm proximè Theonis voces imitantes, iuxta veriorem ſequentium theorematum intelligentiam, ac ſolidorum conſiderantes proprium, diffinitiones has digeſſimus, vt omni prorſus ambiguitate ſolutæ, eorum quæ ſubſequuntur demonſtrationi faueant, vt diffinitione quarta, plani ad planum inclinationem ſub angulo obliquo, non autem tantùm ſub acuto diffiniuimus, vt quondam ſolidorũ regularium planis conſtruendis quilibet obliquus non tantùm acutus deſeruiret: horum etenim planorum inclinationes, quandoque acutum, rurſus verò obtuſum optant inclinationis angulum. Cæterùm Priſmatis diffinitionem, à Theone ſcriptam, theorematis demonſtrandis obſiſtere prænoſcentes, regulata methodo vallauimus. Poteramus quidem inſtar Campani illud diffinire, ſed ſolidorum demonſtrandorum compendio conſulentes, æqua ſimilia & parallela oppoſita eorum triangula citra demonſtrationis tædium comperiſſe lætamur. Sphæræ inſuper diffinitionem, à deſcriptione ſegregauimus, veram Sphæræ ſubſtantiam congrua diffinitione illuſtrantes: Tranſpoſitas item aliquas diffinitiones, iuxta optatum à natura ordinem diſpoſuimus, figurarum demum ſolidarum inſcriptiones à planorum inſcriptione diſcrepantes, iuxta neceſſariam ſolidis inſcribendis methodum diffiniuimus. Quia verò ſolido parallelepipedo ſæpius vtemur, non antea ab Euclide

diffinito, propriam diffinitionem contulimus; nè circa veram eiùs cognitionem fluctuantes, intelligendis theorematis hæsitemus, insuper decimo quinto Euclidis futuro, reperiemus Ipsiclem quinque tantùm theoremata, Campanum verò duodecim de regularium corporum inscriptione ac circunscriptione tradidisse, qui quidem Campanus (duodecimam demonstrans) ad has explendas solidorum inscriptiones, viginti optari profert theoremata, quæ ibidem nec posse demonstrari debilibus admodum concludere conatur argumentis. Et proinde optata supereſſe (viginti complendis) theoremata octo. Quæ diuinæ clementiæ fausto munere consequi fidentes, eam quæ totidem viginti inscribendis aut circunscribendis congrueret methodum, binis postremis exponimus diffinitionibus.

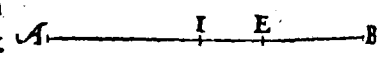
PROPOSITIO I.

Lineæ rectæ partem in subiecto plano, partem verò in sublimi esse est impossibile.



Esto (si fieri possit) linea recta A B G, cuius pars A B sit in plano A E D, eiusdem verò reliqua pars B G sit in sublimi, hoc est extra planum A E D, Dico A B G non esse rectam: quoniam planum est A E D producatur ex æquali per planum A E D recta A B versus D, quæ recta erit, per quartam diffinitionem primi: Ab aliquo signo rectæ A B D quod sit C ad signum G extra planum positum ducatur C G. Trianguli igitur B C G exterior angulus A B G, binis quidem interioribus oppositis est æqualis, per 32 primi, & igitur minor duobus rectis, per 17. eiusdem: angulum itaque efficiens linea A B G, non est recta. Lineæ itaque rectæ partem in subiecto plano, partem verò in sublimi esse est impossibile.

MONITVM.

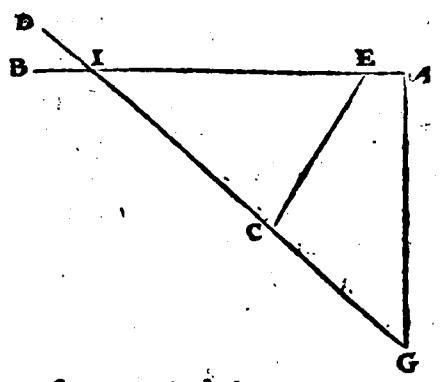


Demonstrare conatur hanc Theon ab inconuenienti, quod scilicet duæ lineæ concurrerent in pluribus signis vno, quod non adhuc patuit inconuenire: Nam binę rectę A E B I in pluribus possunt concurrere signis I E, non autem secari. Si autem eas dicamus vnicam lineam, tollemus innumerabiles demonstrandi facultates, super eadem recta plures constituentes, quod non recipit geometria ob demonstrationum facilitatem; sed quandoque totam vnicam; quandoque diuersas esse eius partes, iuxta hypothesium varietatem suscipit, & hac de causa noluit Euclides illud excludere, lineas scilicet in pluribus signis contactum nõ admittere, nec inter principia huiusmodi collocare perniciem. Campanus verò tam modicum paruipendens demonstrandum, concludit binas B D B G eidem A B in directum esse nõ posse ex decimatertia primi, quod licet aliquo labore (nõ à theoremate sed à demõstratione) tandem illud exigi possit. Tamen ex decimaquarta facilius exegisset. Quia igitur neuter eorum satis nobis fecit, nouam cogimur apponere demonstrationem. Præterea in vno plano lineam vel superficiem esse intelligamus, cùm hæc linea vel superficies in eo plano infinitè vndique producto erit aut concipi poterit: in sublimi verò, cùm aliunde extra idem infinitè productum planum steterit.

PROPOSITIO II.

Si duæ rectæ lineæ se ad inuicem secuerint, in vno sunt plano, & omne triangulum rectilineum in vno est plano.

Sint



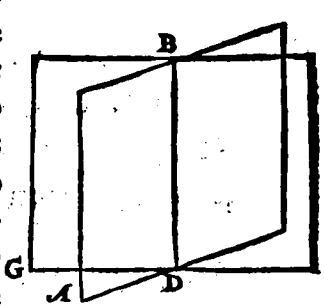
Sint duæ rectæ lineæ A B & C D sese secantes in I, & cõiuncta A G fiat triangulum A I G, Dico binas A B D G in eodem esse plano, ac triangulum A I G in eodẽ esse plano, Si quidem triangulũ sit in eodem plano, lineæ triangulũ continentes in ipso erunt eodem plano, veluti partes essentiæ ipsius trianguli rectilinei. Si verò non credatur triangulum A I G in eodem esse plano, sed eius partem aliquam esse in sublimi, siue extra planum: Esto itaque trianguli A I G pars A E C G extra planum reliqui I E C, sequetur inde lineæ I A partem I E esse in subiecto plano, partem verò E A in sublimi, quod fieri non potuit, per primam huius, nec similiter lineæ I G partem I C in plano, partem verò C G in sublimi esse. Non igitur trianguli A I G pars aliqua extra subiectum erit planum, sed in vno eodem plano erit, & proinde ipsum triangulum concludentes A B D G A G rectæ in vno erũt plano. Idem patebit, si obiiciatur D I B in sublimi esse. Si igitur duę rectæ lineæ se adinuicem secuerint, &c.

MONITVM.

Commendandum est cùm dicemus duas lineas sese secantes simul in eodem esse plano, illud potẽtia non simpliciter actu intelligi debere. Nam duæ se secantes lineæ, in diuersis planis esse possunt. Sed licet in diuersis esse possint, hoc theoremate nihilominus per vtrasque eandem planã superficiẽ duci posse concludemus, quæ vnica & sola eas simul cõcipiet: quare dicẽs Euclides in eodẽ esse plano, præ se fert in eodem cõcipi posse plano necessarium fore, licet per singulas earum infinita duci possint diuersa plana: illud tamen nõ obest quin binæ eodem foueantur plano.

PROPOSITIO III.

Si bina plana se inuicem secuerint, communis eorum sectio recta est linea.

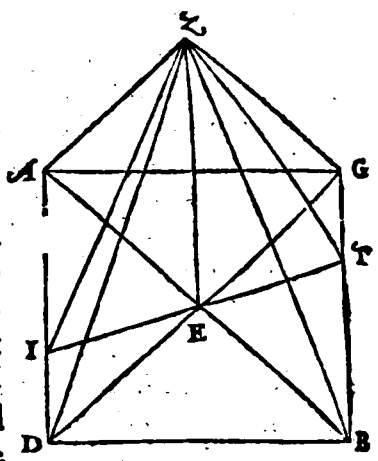


Bina plana A B G B se secẽt in linea B D: Dico B D esse rectam: quod si non credatur, cùm signa B & D in vtroque sint A B & G B plano, ex hypothesi, per ea signa duci binæ rectæ in vtroque plano poterunt, per septimam diffinitionem primi: quæ (à tota disiunctiua) aut vnicam aut binas efficiẽt rectas. Si quidem vnicã rectam, ea cõmunis sectio planorum recta est, vt petimus. Si verò binas rectas, sequeretur binas rectas superficiem concludere, cùm ab eodem B orlantur signo, & in idem D coeant, contra 12. communem sententiam, quod fieri non potest: recta igitur erit B D, communis planorum sectio. Si itaque bina plana seinuicem &c.

PROPOSITIO IIII.

Si recta linea duabus rectis se inuicẽ dispescentibus, in com-

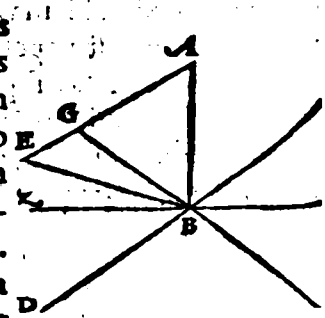
muni ſectione ad angulos rectos ſteterit, & ad earundem planum ad angulos rectos erit.



Recta linea Z E duabus rectis A B G D ſe inuicem ſecantibus in E ad angulos rectos in communi ſectione E ſtet: Dico rectam E Z ad planum (vtraſque A B G D concipiens) rectam eſſe. Ponantur inuicem æquales A E B E D E G E, coniunctis A G G B B D D A rectis, quoniam dicimus rectã Z E ad omnes in plano A G B D eam tangentes rectam eſſe, ſi aliqua ad quam E Z recta non credatur inueniri poſſit, eſto I E T in plano A B G D, connectantur à Z vertice hypotenuſæ vel ſubtendentes Z A Z I Z D Z B Z T & Z G: æquales igitur erũt A Z D Z B Z & G Z, per quartam primi, ſubtẽdunt enim æquales angulos qui ad E, æquis lateribus cõprehenſos, ſimiliter A D & B G æquales erunt, per eandem 4 primi, ſubtendunt enim æquos ad E verticem angulos, per 15 primi, æquis lateribus (ex hypotheſi) cõprehenſos. Triãgula igitur A Z D & B Z G (æquis lateribus contenta) æqualia ac æquiangula erunt per octauã primi: angulus igitur A D Z angulo B G Z æquus erit: cùm inſuper (ex eadẽ octaua primi) anguli E G B & E D A (triãgulorum æquis lineis cõpoſitorum) ſint æquales, ſequetur triãgula G E T & D E I duos angulos duobus angulis ſcilicet G E T ipſi D E I (ad verticem) & E G T ipſi E D I (vt proximè patuit) æquales habentia, & vnũ latus E G vni E D (ex hypotheſi) æquale, Reliqua latera E T T G reliquis E I I D æqualia habere, per vigeſimamſextam primi. Cùm inſuper angulus B G Z (hoc eſt T G Z) angulo A D Z (hoc eſt ipſi I D Z) æquus fuerit, & æquis lateribus T G G Z ipſis I D D Z contineantur, baſes Z T & Z I æquales erũt per quartã primi: quia demum E T T Z ipſis E I I Z rectis æquales, & baſis E Z communis oſtenſæ ſunt, anguli Z E T & Z E I (per octauam primi) æquales erunt, qui ideo (per 13 primi) recti erunt: recta enim E Z ſuper rectam I T conſtituitur: recta igitur eſt E Z ad ipſam I E T, & proinde ad quaſcunque in plano A G B D ipſam E Z tangentes, ſimiliter recta oſtendetur. Si itaque recta linea duabus rectis ſe inuicem diſpeſcentibus, &c.

PROPOSITIO V.

Si recta linea tribus rectis ſe inuicem tangentibus ad angulos rectos in communi contactu ſteterit, ipſæ tres rectæ lineæ in vno ſunt plano.



Eſto recta linea A B rectos efficiens angulos cum tribus B G B Z D B ſuper earum contactum B erecta: Dico rectas B G B Z B D in eodem eſſe plano. Quòd ſi aliqua earum in ſublimi eſſe credatur, ſit B G quæ erit in eodem plano E cum recta A B, per ſecundam huius: nam ſeſe tangunt in B: quia verò planum rectarum A B B G cõcurrit cum plano ipſarum Z B B D in B, ea plana extenſa ſeſe ſecabunt. Eſto planorum communis ſectio B E, producta autem in plano A B G recta A G in B E communem ſectionem, ſit recta A G E ſecans B E (per tertiam huius) recta erit, atque in plano rectarum Z B B D exiſtens B E, efficiet cum recta A B rectos angulos (per ſecundam diffinitionem huius)

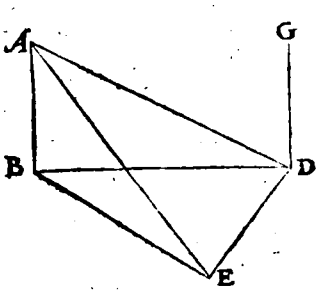
huius) eo quod(per quartam huius) ad ipſarum Z B B D planum recta ſit,& ideo ad omnes eam in ipſo plano tangentes recta erit, quoniam inſuper A B B G & B E ſunt (ex hypotheſi) in eodem plano,ſed A B E angulus rectus oſtenſus eſt,angulus ſimiliter A B G rectus (ex hypotheſi) fuit,ſunt autem in eodem plano. Rectus itaque A B G recto A B E angulo minor eſſet, quod eſſet abſurdum, ex decima communi ſententia primi: non igitur erit G B recta in ſublimi, nec proinde reliquarum vlla, tres itaque rectæ B G B Z B D in eodem erunt plano. Si ergo recta linea tribus rectis lineis, &c.

MONITVM.

Cogimur finem demonſtrationis à Theonis demonſtrato variare: concludit enim Theon impoſſibile eſſe duos angulos æquos eſſe, ſiue rectos,cùm ſint in eodem plano,licet 14 primi aliud concludat,ſcilicet non impoſſibile eſſe, ſed ex illo ſequetur tutius, eoſdem angulos inæquales eſſe,& rectos,quod impoſſibile oſtenditur,vt diximus,non autem binas rectas ad aliam angulos rectos in eodem plano efficere.

PROPOSITIO VI.

Si binæ rectæ lineæ eidem plano ad angulos rectos ſteterint, Parallelæ erunt ipſæ rectæ lineæ.



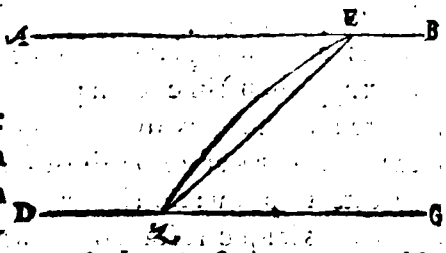
Binæ rectæ A B G D alicui plano D B E ad angulos rectos exiſtant: Dico rectas A B G D parallelas eſſe. Coniungatur recta B D, in plano verò D B E ad angulos rectos ipſi B D excitetur D E, per vndecimam primi,quæ æqualis ſecetur ipſi A B rectæ, coniunctis A D A E B E: cùm enim B D D E ſint in eodem plano, Reliqua B E in ipſo erit plano, per ſecundam huius. Æqualibus verò A B D E communis ponatur B D: Æquales erunt A B B D ipſis E D D B. Sed angulos æquos comprehendunt, nempe rectos, ex hypotheſi. Baſes itaque A D B E (per quartã primi) æquales erunt. Quia verò A D ipſi B E,& A B ipſi D E æquales fuerunt, communis occurrat A E. Triangula itaque A E B & A E D angulos A B E & E D A ſub æquis lateribus & eadem baſi comprehẽſos,æquos (per octauam primi) efficient. Rectus quidẽ eſt A B E, cùm A B ſit recta ad planũ D B E, ex hypotheſi, rectus igitur erit E D A. Et proinde recta B D ad rectas B D A D G D rectos efficiẽs angulos, vt patuit, docet ipſas B D, A D, G D in eodem eſſe plano, per quintã huius. Nam B D & D E, ex hypotheſi, A D verò ad D E, ex demonſtrato, G D autem ad D E, cùm ſit ad D B E planum (ex hypotheſi) recta, angulos rectos effecerunt. Siquidem B D A D G D in eodem ſint plano, in ipſo erit A B reliqua trianguli A D B, per ſecundam huius. Quare in eodem plano erũt A B & G D, & angulos interiores ad eaſdẽ partes A B D G D B duobus rectis æquos efficiunt, ex hypotheſi. Ipſæ itaque A B & G D (per 28 primi) parallelæ erunt. Si igitur binæ rectæ lineæ ad angulos, &c.

PROPOSITIO VII.

Si fuerint binæ rectæ lineæ parallelæ, aſſumantúrque in ipſarum vtraque contingentia ſigna, per ea ſigna ducta recta linea, in eodem eſt plano cum ipſis parallelis.

Suman

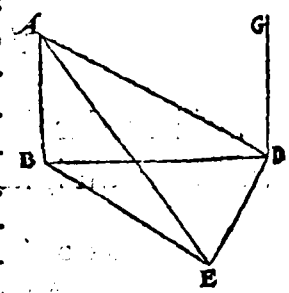
Sumantur in binis A B G D parallelis contingentia ſigna E & Z : Dico rectam, per E Z ductam, in plano A B G D parallelarum eſſe. Quod ſi ſecus fieri poſſit, eſto recta E Z per aliud planum. Quoniam E & Z ſigna ſunt in parellelarũ A B G D plano, per idem planum per eáque ſigna recta ducetur, à qua ſi differat, iam per E Z ducta, binæ rectæ ſuperficiem concludent in ſignis E & Z, quod fieri non poteſt, per 12 communem ſententiam. Quare non erit E Z recta in alio à parallelis plano. Si itaq; fuerint binæ rectæ lineæ parallelæ, &c.



PROPOSITIO VIII.

Si fuerint binæ rectæ lineæ parallelæ, Altera autem ipſarum alicui plano ad angulos rectos fuerit, Et reliqua eidem plano ad angulos rectos erit.

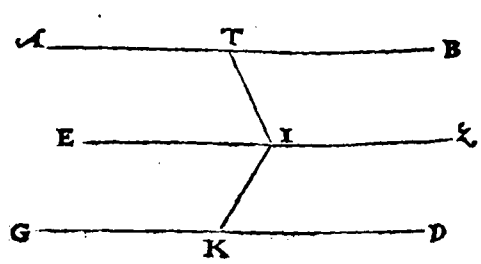
Binarum parallelarum rectarum A B & G D altera A B alicui plano D B E ſit ad rectos : Dico reliquam G D eidem D B E plano rectam eſſe. Per B & D ſigna ducatur B D, cui in plano D B E orthogonalis eſto D E, per vndecimam primi, quæ æqualis ponatur ipſi A B, communis verò B D. Sequetur binas A B B D binis E D D B æquales eſſe. Quæ quidem cùm angulos æquos (nempe ex conſtructione rectos, ſuſcipiant, baſes A D & B E (per quartam primi) efficiunt æquales. Quare A B B E ipſis E D D A æquales ſunt. Communis verò A E ipſis erit baſis. Angulus igitur A B E angulo E D A (per octauam primi) æquus erit. Rectus autem eſt A B E, cùm A B ſit ex hypotheſi, ad planum D B E recta, in quo B E ipſam A B tangit, per ſecundam diffinit. huius. Rectus itaque erit E D A, ſibi æqualis. Recta igitur E D duabus A D B D in communi contactu D ad rectos erigitur. Ad earum igitur planum & omnes eam in ipſarum A D B D plano tangentes, ipſa E D recta erit per quartam huius. Sed in plano ipſarum A D D B reperitur G D : Nam à contingentibus ſignis A & D parallelarum A B G D ducta A D, in eodem eſt plano cum ipſis parallelis A B G D, per præfatam. Ad ipſam itaque D G recta E D angulum E D G rectum efficit. Sed & G D B rectus eſt, per 29 primi, cùm A B D ſit (ex hypotheſi) rectus. Recta ideo G D (ad binas B D E D rectas in communi ſectione D exiſtens) ad earum planum D B E recta erit, per quartam huius. Si itaque fuerint binæ rectæ lineæ parallelæ, altera autem, &c.



PROPOSITIO IX.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, nec eidem in eodem exiſtentes plano, & adinuicem ſunt parallelæ.

Sint rectæ A B & G D eidem rectæ E Z parallelæ, non autem cum ipſa eidem plano inſiſtentes : Dico ipſas A B & G D adinuicem parallelas eſſe. A dato contingente ſigno I in recta E Z, ipſi E Z orthogonales excitẽtur, I T I K, ſcilicet I T per planum parallelarum A B E Z, & I K per planum parallelarum G D E Z. Recta igitur E Z ad planum ipſarum I T



I K rect

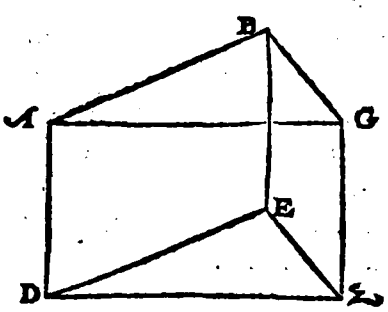
IK recta erit, per quartam huius. Ad idem itaque planum TIK rectæ erunt, AB GD, per octauam huius, cùm sint ipsi EZ parallelæ, quæ quidem plano TIK recta fuit. Si igitur duæ AB GD eidem plano TIK rectæ fuerint, parallelæ erunt (per sextam huius) ipsæ AB GD. Quæ ideo eidem rectæ parallelæ (non in eodem existentes plano) &c.

MONITVM.

Data opera excluſit Euclides ab hoc theoremate idem planum. Nam ſi liberam parallelarum hypotheſim eidem plano reliquiſſet, ambigua fuiſſet huius concluſio. Dicenti nanque, eidem parallelas inter ſe parallelas eſſe, obſtitiſſet id quod trigeſima primi monuimus, eo quòd quandoque poſſint in rectam cadere, nec ideo ſint parallelæ: hac de cauſa trigeſima primi diſiunctiuam cõtulimus (aut in rectum poſitæ) vt ſibi conſtaret demonſtratio, ea quæ idem poſcebat planum. Quare trigeſimum theorema propriæ demonſtrationi ſubiicere volentes, appoſuimus hypotheſi idem planum optari. Cùm autem ad ſolida ventum eſt, à quibus idem planum abſtulimus, hæc diuerſorum planorum hypotheſis, concluſionem parallelarum ſibi inuicem ſimplicem ac nulli diſiunctiuæ obnoxiam liberè profert. Si autem obiiceretur huic quod trigeſimæ primi obiecimus, rectaq; in rectam conſtituī, tum refragaremur hypotheſi, quæ diuerſa optat plana: lineæ nanque in rectã conſtitutæ alteri parallelæ ſemper idem poſſident planum, non ergo diuerſa ineſſent plana, contra hypotheſim, diuerſa optantem. In planis itaque, trigeſimæ primi diſiunctiuam contulimus, aut in rectam conſtitutæ: In ſolidis verò diſiunctiuam detraximus, propoſita planorum diuerſitate ſimplicem concluſionem generante.

PROPOSITIO X.

Si binæ rectæ lineæ ſeſe inuicem tangentes, ad binas rectas ſeſe ad eaſdem partes tangentes parallelæ fuerint, æquales angulos comprehendent.

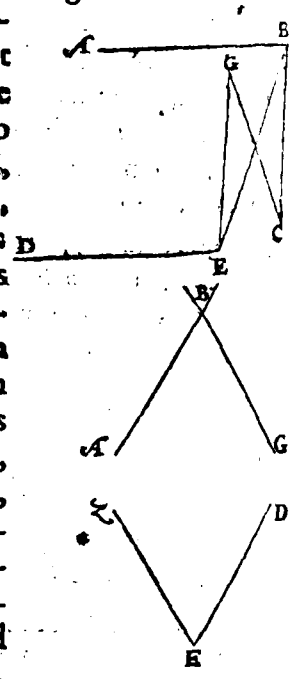


Proponantur binæ AB BG ſeſe tangentes in B, quibus binæ DE EZ ſeſe tangentes in E ad eaſdem partes B & E ſint parallelæ: Dico ipſas DE EZ æqualem angulum ipſis AB BG continere. Secentur AB & DE æquales, ſimiliter BG & EZ æquales. Subtenſis AG DZ, connexíſque AD BE GZ, Quoniam æquas & parallelas AB DE ad eaſdem partes coniungunt AD BE, Ipſæ æquales & parallelæ ſunt, per trigeſimamtertiam primi. Haud ſecus BE GZ parallelæ erunt, & proinde AD GZ eidem BE parallelæ, non in eodem exiſtentes plano, adinuicem erũt parallelæ (per nonam huius) & æquales per primam communem ſententiam. Eodem digreſſu AD & GZ æquas & parallelas, coniungentes AG DZ rectæ, parallelæ & æquales erunt, per eandem trigeſimamtertiam. Atqui AB BG ipſis DE EZ æquales, baſes AG DZ habent æquales. Ipſæ itaque angulum ABG angulo DEZ æquis lineis contento, æqualem habebunt, per octauam primi. Ipſæ igitur AB BG & DE EZ æquales continent angulos. Si itaque binæ rectæ lineæ ſeſe tangentes, ad binas, &c.

MONI

MONITVM.

Hoc theorema ex generalibus & neceſſarijs non demonſtratum à Theone vim illatam quodammodo perpeſſum ſentimus. Cùm enim parallelas ſe tangẽtes angulos concludere æquales extra idem duntaxat planũ ſinat, cogere videtur theorematis liberas facultates, ad ea tantùm quæ ſolidis congruunt, licet æquè ad idem planum & ad diuerſa eius ſeruari poſſit decretum, ſecus decimæquintæ huius, cui neceſſariò hæc conuenit hypotheſis. Quare abſtulimus à Zamberto has voces (in eodem non fuerint plano) vt reſtituta libertate planis & ſolidis figuris hoc inſerviat theorema. Cæterùm quale reliquit Euclides vix ad nos delatum ambigimus: Æqualitas nanque angulorum non neceſſariò ſequitur hanc hypotheſim à maioribus traditam. Quinimò binas proponemus (iuxta Theonis conſtructionem à Zamberto verſam) rectas A B B C ſeſe tangentes, parallelas & æquales binis D E E G ſeſe tangentibus, nec in eodem (ſi libeat) plano, attamen angulos A B G & D E G inæquales conſtituent: eſt namque B acutus, E verò obtuſus: fit igitur manca hypoth. Rurſus aliud conſurgit obiiciendum, quo ſeruata hypotheſi ac concluſione æqualium angulorum, nihilominus abeſt demonſtratio parallelarum parallelas æquales iungentiũ, ex 33 primi, hoc cypo in quouis parallelogrammo, bifariam ſecto, cuius altera pars in plano vel ſublimi, parallelas A B B G binis D B E Z conſtituat, patet eas æquales & angulos æquos concludere, nihilominus ſi parallelas iuxta demonſtrationẽ huius A B D E parallelis iungamus, eiſdem iungentibus reliquas G B E Z iungentes, parallelas non eſſe conſtat, ſicq; ruit demonſtratio. Ad hoc dicemus producendas eſſe rectas A B & G B in directum circa B, tum qui ad verticem B angulus angulo A B G oppoſitus, eidem A B G æqualis erit, ex 15 primi, iſque idem, per huius theorematis demonſtrationem angulo D E Z æqualis probabitur. Bini itaque A B G & D E Z, eidem oppoſito ipſi A B G æquales, adinuicem erunt æquales. Ad illud autem, Huius defectum quo rectas A B B C ſe tangentes, ad binas D E E G ſe tangentes parallelas & æquales proponimus, nõ tamen æquos angulos comprehendentes, ab eo oriri, quòd parallelas coniungentes ad eaſdem partes (iuxta 33 primi votum) non copulent, quorum obliti qui demonſtrandam hanc aggreſſi ſunt, in hunc cecidere caſum. Nos itaque huic obuij cõtulimus particulam (ad eaſdem partes) vt propoſitarum parallelarum contactus, ad eaſdem earum partes conſtitutus, iungentes neceſſariò ex 33 primi, parallelas & æquales ſtatuat: videmus nimirum his obiectis propoſitas parallelas, mutuos non emittere contactus circa eaſdem partes, hac demum arte conſtabit concluſio demonſtratione ſuffulta.

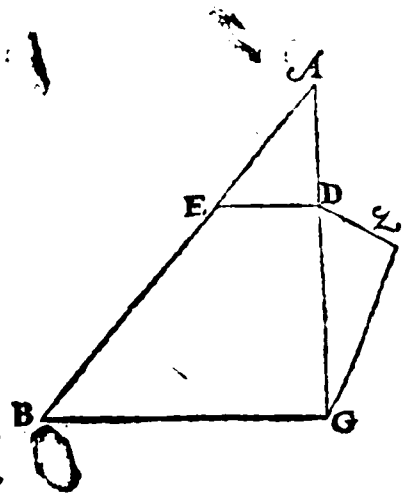


PROPOSITIO XI. PROBLEMA L.

A dato ſigno in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem lineam ducere.

Eſto A B G ſubiectum planum. In ſublimi verò ſignum ſit Z. Oportet iam ab ipſo Z ad A B G planum perpendicularem duci. A ſigno Z ad B G in ſubiecto A B G plano poſitam, perpendicularis agatur Z G per 12 primi. Rurſus eidem B G, ad rectos excitetur in A B G, eodem plano G A per 11 primi. A ſigno autẽ Z in rectam A G perpendicularis

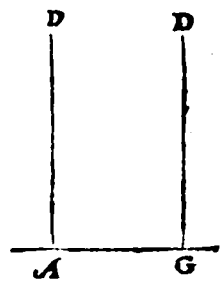
diculariſ cadat Z D, per ſignum D rectæ B G parallela fiat E D, in plano A B G. Dico rectam Z D perpendicularem, ſiue rectam eſſe ad planum A B G. Cùm ex conſtructis recti ſint anguli B G Z, B G D, recta erit B G, ad planum trianguli G Z D per 4 huius. Quare eidem B G parallela E D ad idem planum G Z D recta erit per 8 huius. Et proinde ad rectam Z D in eodem plano ipſam tangentem, eadem E D recta erit per 2 diffinitionem huius. Rectus itaque eſt angulus E D Z. Atqui rectus fuit ex conſtructione G D Z. Recta igitur D Z ad binas E D, G D, recta erit ad earum planum A B G per 4 huius. A dato itaque ſigno Z in ſublimi, ad ſubiectum planum, perpẽdicularem lineã duximus Z D.



PROPOSITIO XII. PROBLEMA 2.

Ad datum planum à dato in eo ſigno, lineam rectam ad angulos rectos excitare.

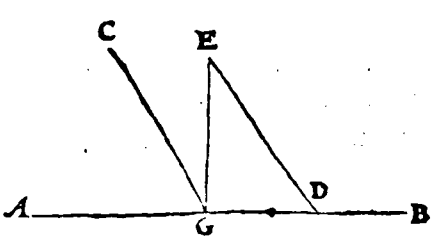
Eſto planum A G, datum verò in eo ſignum A, oportet iam ipſi plano ad ſignum A perpendicularem conſtituere. Suſcipiatur contingens ſignum extra planum, ſitq; B, à quo (per præfatam) in A G planum perpendicularis agatur B G. Ipſi autem B G (per 31 primi) per ſignum A parallela fiat A D. Cùm autem B G ſit recta ad planum A G, ex conſtructione, ad idem planum recta erit D A, eidem B G parallela, per octauam huius. Ad datum itaque planũ A G à dato in eo ſigno A, lineam rectam D A ad angulos rectos conſtituimus.



PROPOSITIO XIII.

Ad idem planum ab eodem ſigno in plano aut ſublimi ſumpto, binæ rectæ lineæ ad angulos rectos non conſtituentur ad eaſdem partes.

Sit planum A G B, ſignum verò contingens in eo ſit G, in ſublimi autem eſto ſignum E: Dico ad planum A G B à ſigno G binas rectas non poſſe excitari, nec inſuper à ſigno E ſublimi ad idem planum binas rectas poſſe dimitti. Quod ſi opponatur, Sint primùm à ſigno G binæ G C G E rectæ ad idem planum A B. Ipſæ igitur parallelæ erunt, ex ſexta huius. Sed & concurrent in G, quod eſt abſurdum, ſcilicet contra parallelarum diffinitionem. Haud ſecus ſi à ſublimi ſigno E, binæ demitti credantur E G E D ad planum A G B rectæ. Nam (per eandem ſextam huius) parallelæ eſſent, & nihilominus concurrerent in E, quod fieri non poteſt. Non igitur binæ ab eodem ſigno aut in ſublimi, aut plano exiſtenti, ad idem planum rectæ conſtituentur. Ad idem igitur planum ab eodem ſigno, &c.



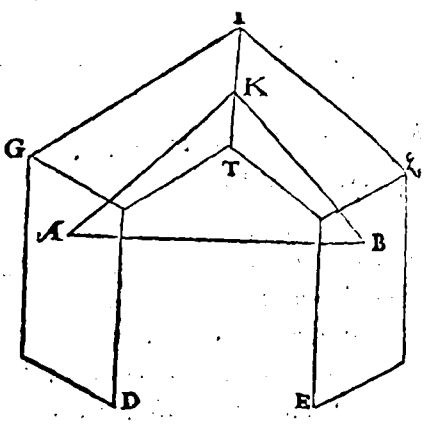
MONITVM.

Theoremati voces aliquas contulimus vt vtramque demonſtrari dicamus ſen-

tentiam, ſcilicet à ſublimi ſigno ad planum, & à plani ſigno ad ſublime, binas ſimul plano eidem orthogonales non conſtitui, quorum alterum tantùm dixerũt Campanus & Theon, qui quidem inſuper cõcludit hanc veluti & quintam huius contra decimamquartam primi, ſcilicet, impoſſibile eſſe binos rectos angulos ad idem ſignum in eodem plano conſtitui.

PROPOSITIO XIIII.

Ad quæ plana eadem recta linea recta eſt, parallela ſunt ipſa plana.



Ad bina plana G D & Z E ſit recta linea A B: Dico parallela ipſa G D Z E plana eſſe: quod ſi non ſint parallela, vndique producta alicubi concurrent. Concurrant igitur in I T, quæ erit linea recta, per tertiam huius: in ipſa I T ſumatur contingens ſignum K, per planum autem D G ducatur recta A K, per planum verò Z E fiat recta B K, quoniam A B (ex hypotheſi) eſt recta ad plana G D & Z E, ipſa A B recta erit ad omnes rectas in ipſis planis ipſam tangentes, per ſecundam diffinitionem huius. Anguli igitur A B K & B A K recti erunt, & ideo parallelæ erunt A K B K rectæ, per vigeſimamoctauam primi, cùm ſint in eodem plano per ſecundam huius, & concurrent in K, quod eſt abſurdum. Non igitur alicubi concurrunt G D & Z E plana, quare parallela erunt, per ſextam diffinitionem huius. Ad quæ itaque plana eadem recta linea recta eſt, &c.

COROLLARIVM.

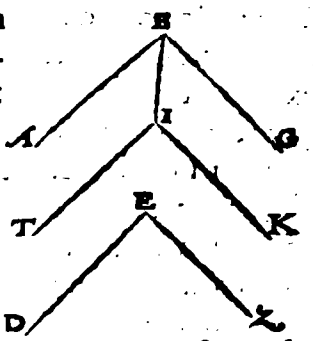
Si recta linea vni parallelorum planorum recta fuerit, & reliquo recta erit.

Nam ſi cum reliquo recta non eſſet, ipſa ad aliquam eius plani lineam angulum recto minorem efficeret, quæ quidem linea (per vndecimam communem ſententiam) tandem concurreret cum aliqua alterius plani linea, quare ipſa plana ſequeretur non eſſe parallela, contra hypotheſim, cùm parallela ſupponantur. Si itaque recta linea vni parallelorum planorum, &c.

PROPOSITIO XV.

Si binæ rectæ lineæ ſe inuicem tãgentes ad binas ſe inuicem tangentes fuerint parallelæ, nõ tamen in eodem plano exiſtentes: Parallela ſunt quæ per ipſas plana.

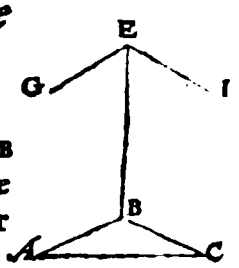
Binæ inquam rectæ A B, B G ſeſe tangentes in B, ad binas D E, E Z ſeſe tangentes in E ſint parallelæ, ſed nõ ſint in eodem plano: Dico plana quæ per A B B G, & per D E E Z parallela eſſe. A contactu B in planum rectarum D E Z perpendicularis agatur B I, per



B I, per vndecimam huius, per ſignum verò ipſius E D E Z in plano D E Z parallelæ ducantur I T FK, per trigeſimamprimam primi, quoniam parallelæ ſunt A B & T eidem E D, & adinuicem ipſæ A B I T parallelæ erunt, per nonam huius. In eas igitur cadens recta B I angulos A B I T I B rectos efficit, per vigeſimamnonam primi, cùm recta ſit ex hypotheſi B I ad planum T I K, ſiue D E Z. Similiter oſtendemus angulos G B I K I B rectos eſſe, recta itaque I B ad binas A B B G recta erit, & ideo ad earum planũ A B G recta erit, per quartam huius: Sed eadem I B ad planum T I K ſiue D E Z (ex hypotheſi) recta fuit: Ad quæ igitur plana A B G & D E Z eadem I B recta eſt, parallela ſunt ipſa plana A B G & D E Z, per decimamquartam huius. Si igitur binæ rectæ lineæ, &c.

COROLLARIVM.

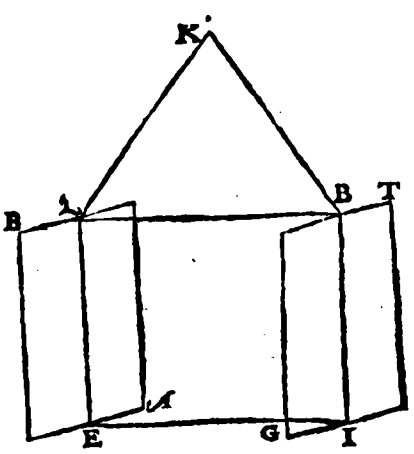
Dato plano per datum extra illud ſignum, paralle lum planum ducere.



Eſto planum A B C, ſignum verò E: per ſignum verò E ipſis A B B C parallelæ fiant G E E I, per trigeſimamprimam primi. Ipſæ igitur G E E I ſunt in plano G E I parallelo ipſi A B C plano (per hanc) cùm ſint tangentes.

PROPOSITIO XVI.

Si bina plana parallela à plano aliquo diſſecta fuerint, communes ipſorum ſectiones parallelæ ſunt.



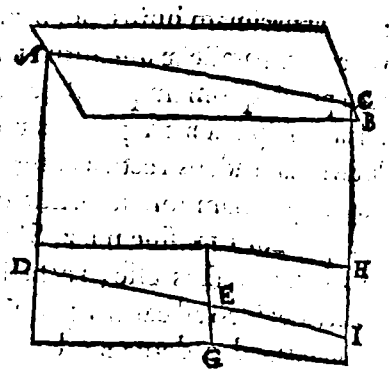
Bina plana A B & G T ſint parallela, ipſa autem plana ſecet planum Z D I E, in ſectionibus Z E & D I, quæ erunt rectæ lineæ, per tertiam huius: Dico ipſas Z E & D I rectas parallelas eſſe: quòd ſi non eſſe putentur, concurrant alicubi in K, cùm enim recta ſupponatur linea E Z K, pars verò eius Z E ſit in plano B A, & reliqua Z K in eodem B A plano producto erit, per primam huius, eadem cauſa & I D K recta in G T plano erit: concurrent igitur A B & G T plana, in ſigno K, contra ſuppoſitum, cùm ſint parallela, quod fieri non poteſt. Non igitur concurrent Z E & D I ſectiones, in plano Z D I E exiſtentes, quare parallelæ erunt. Si itaque bina plana parallela à plano aliquo diſſecta, &c.

COROLLARIVM.

Si bina plana eidem plano parallela fuerint, & ad inuicem parallela erunt, aut idem planum efficient.

Nam ſi plana D G G H eidem A B parallela, non ſint inter ſe parallela, ipſa producta concurrent, per conuerſ. ſextæ diffinitionis vndecimi, concurrant in G E rectam;

ctam: Dico G D G H in eodem esse plano: esto in plano A B aliqua recta A C, per quam & signum B extendatur planum secans bina D G G H plana, per rectas E D E I. Parallelæ igitur erunt A C. D E, & A C E I, per hanc, inter se tamen parallelæ non sunt D E E I, cùm concurrant in E. ipsæ itaque D E E I in rectum sunt positæ, per 30 primi; & ideo plana D G G H in eodē sunt plano, Triangula itaque E G D & E G I sunt in eodem plano rectarum E G D I per 2 huius: si verò nusquam concurrant, parallela erunt D G & G H plana, per sextam diffinitionem vndecimi.



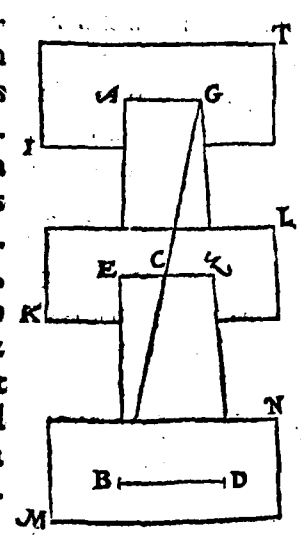
MONITVM.

Præcedens corollarium huic theoremati contulimus, futuris demonstrandis admodum vtile: quod enim trigesima primi discussimus in lineis, idem in planis hoc corollario docemus, vt in solidis exponendis eorum bases in eodem esse plano huius adminiculo sæpius ostendamus. Quare eadem necessitate qua trigesima primi compulsi, disiunctiuam conferre voluimus, vt scilicet parallela, aut equidem in eodem plano degentia sint parallela eidem plana veluti rectas eidem rectæ parallelas aut inter se parallelas, aut rectam eandem constituentes trigesima primi diximus.

PROPOSITIO XVII.

Si binæ rectæ lineæ à planis quotlibet parallelis secentur, in easdem rationes inter ea plana secabuntur.

Sint binæ rectæ lineæ A B G D in quibusuis planis positæ, illas tamen secent quotcunque plana sibi inuicem parallela I T K L M N in signis A E B G Z D: Dico rectas A B & G D secari inter plana, vt A E ad E B, sic G Z ad Z D. Coniungantur A G B D B G E C & C Z rectæ, quoniam trianguli A B G planum, secat plana K L & I T per rectas E C & A G, parallelæ sunt E C & A G rectę, per præmissam. quare E C secat rectas A B G B proportionales A E ad E B, vt G C ad G B, per 2 sexti: haud secus in triangulo G B D dicemus. Nam illud secat plana K L & M N, per rectas C Z & B D, quæ ideo (per proximam) parallelæ fuerunt. Erit itaque (per secundam sexti) sicut G C ad G B sic G Z ad Z D: sed sicut G C ad C B, sic fuit A E ad E B: Sicut igitur A E ad E B, sic erit (per vndecimam quinti) G Z ad Z D. Si igitur binæ rectæ lineæ à planis quotlibet, &c.



MONITVM.

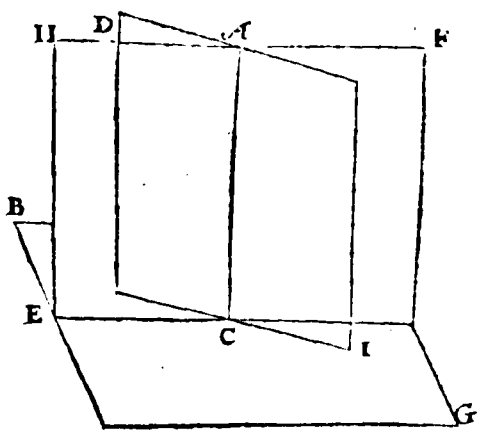
Hanc protulit Campanus in lineis sese tangẽtibus aut parallelis intelligi, Theon verò vberiorem proferens Geometriæ fructum, in quibusuis indefinitè lineis intelligit. Veruntamen illud vnum omisit, quòd sectiones illæ proportionales intelligi debeant inter plana comprehensæ. Nam si lineæ ipsa plana prætergrederentur, non sequeretur ipsas proportionaliter secari, ob contingentes earum extra

plana

plana quantitates: quare huic theoremati contulimus has voces interea plana.

PROPOSITIO XVIII.

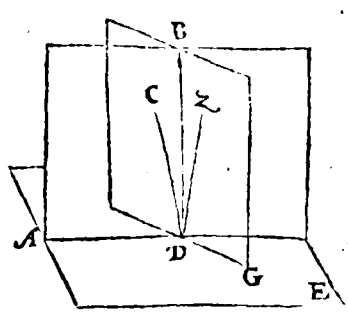
Si recta linea plano alicui ad angulos rectos fuerit, & omnia quæ per ipſam plana eidem plano ad angulos rectos erunt.



Sit recta linea A C ad planum B G recta: Dico omnia plana quæ per ipſam A C fiunt eidem B G plano recta eſſe. Sint per rectam A C quotlibet plana E F & D I, ſecet autem planum E F reliquum B G per rectam E C, ipſi porro E C in plano E F ad rectos excitetur H E: anguli itaque H E C A C E interiores recti erunt. Parallelæ igitur erũt A C H E rectæ, per 28 primi, & H E, recta erit ad planum B G, per octauam huius. Binæ igitur A C H E in plano E F ductæ, communi ſegmento E C ad angulos rectos exiſtentes, reliquo plano B G ſunt rectæ: planum igitur E F ad planum B G rectum erit, per 3 diffinitionem huius. Eodem argumento oſtendemus planum D I eidem plano B G rectum eſſe ducta per I parallela ipſi A C in plano D I. Quæ igitur (per 8 huius) recta erit plano B G, & rectos faciet cum C I communi ſegmento: quare planum D I plano B G rectum erit. Sicque reliqua per A C ducta plana ipſi B G plano recta erunt. Si itaque recta linea plano alicui ad angulos rectos fuerit, &c.

PROPOSITIO XIX.

Si bina plana ſeinuicem ſecantia plano alicui ad angulos rectos fuerint, & ipſorum communis ſectio ad idem planum ad angulos rectos erit.

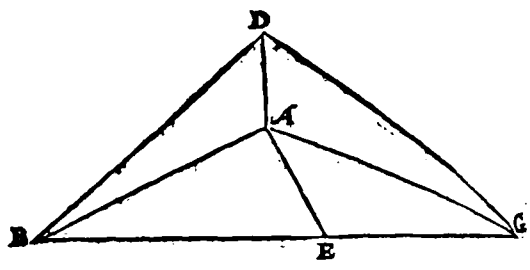


Bina inquam plana A B & G B ſeinuicem ſecantia in B D ſint alicui plano A E recta: Dico B D communem eorum ſectionem eidem plano A E rectam eſſe: quod ſi non credatur, excitetur rectæ A D communi planorũ A B & A E ſectioni, orthogonalis D C in plano A B, per 11 primi, ipſi verò D G communi planorum B G & A E ſectioni ſimiliter in plano B G ad rectos erigatur D Z. Quoniam planum A B eſt rectum ad planum A E, ex hypotheſi, & communi ipſorum ſegmento (D A) angulos rectos efficit C D, poſita in altero ipſorum planorũ. Recta igitur C D ad reliquum A E planum recta erit, per conuerſam 3 diffinitionis huius. Simili argumento recta patebit Z D ad idem A E planum eſſe, cùm recta ſit ad D G communem ſectionem. Ad idem igitur planum A E atque idem in eo ſignum D, binæ rectæ lineæ C D Z D angulos rectos efficiunt, contra 13 huius, quod fieri nequit: ſola itaque B D ad ſignum D plano A E recta erit, nec alia vlla. Si igitur bina, &c.

PROPOSITIO XX.

Si ſolidus angulus ſub tribus angulis planis comprehenda-

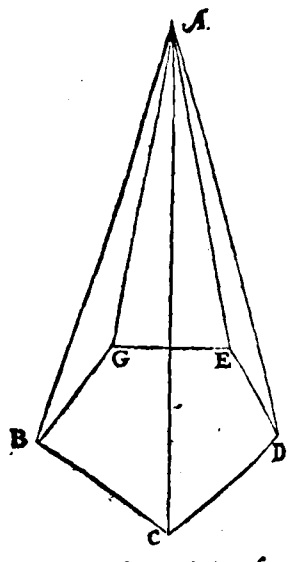
tur, planorum duo quilibet, reliquo ſunt maiores quomodocunque ſuſcepti.



Comprehendatur angulus ſolidus qui ad A, ſub tribus angulis planis BAG GAD DAB: Dico duos quoſlibet planorum reliquo maiores eſſe. Sit inquam eorum maximus BAG ducta BG. Ad ſignum autem A rectámque BA angulo DAB æqualis ponatur BAE, per 23 primi. Secetur item ipſi AE æqualis AD: coniunctis BD DG rectis. Cùm autem anguli BAD BAE æquales (ex hypotheſi) ſub æqualibus DA, AE, & communi AB concludãtur rectis, baſes BD BE erunt (per 4 primi) æquales. Quia verò trianguli BDG maiora ſunt bina BD DG reliquo BG latera, per vigeſimam primi, ſed BD & BE ſunt æqualia: reliquum igitur DG reliquo EG maius erit. Triangulorum igitur DAG EAG bina DA AG binis EA AG ſunt æqua latera, baſis verò DG baſi EG maior. Angulus itaque DAG angulo EAG (per 25 primi) maior erit: angulus autem DAB reliquo BAE æqualis fuit. Bini itaque DAB DAG anguli, reliquo BAG (toto & maiori ſumpto) maiores ſunt: multo igitur maiores erunt reliquo quolibet, qui non ſit eorum maximus. Si igitur ſolidus angulus ſub tribus, &c.

PROPOSITIO XXI.

Omnis angulus ſolidus ſub planis angulis minoribus quatuor rectis comprehenditur.



Quoniam oſtẽdimus cuiuſlibet polygoni latera numero binario excedere numerum triangulorum in angulis ipſius polygoni deſcriptorum, corollar. 32 primi: hínque ſequi duplum numerum laterum, ſeu angulorum præfati polygoni, excedere quaternario numerum angulorum rectorũ, angulis polygoni æqualium, qui quidem æquus eſt duplo triangulorum, cùm ſingula triangula binos adhibeant rectos, vt eodem corollario latius expoſuimus.

Sit itaque angulus ſolidus qui ad A, quotuis angulis planis BAC CAD DAE EAG GAB comprehenſus, quem ſubtendat baſis BCDEG. Pyramis igitur erit ABCDEG, per decimam diffinitionem huius. Quot itaque ſunt baſis latera, totidem ſunt angulum ad verticem A continentia triangula. Sed quot ſunt triangula, dupli numero ſunt anguli recti à triangulis contenti: cuiuſlibet anguli etenim binis æquipollent rectis, per 32 primi. Quot igitur ſunt anguli recti à triangulis angulum A continentibus, totus eſt laterum aut angulorum baſis BCDEG duplus numerus: Sed duplus laterum aut angulorum baſis numerus, excedit eiuſdem baſis rectorum angulorum numerum quaternario: Numerus igitur angulorum rectorum à triangulis angulum A continentibus comprehenſorũ, quaternario excedit numerũ angulorũ rectorũ ab eadẽ baſi BCDEG comprehenſorum. Omnes itaque anguli triangulorũ angulum A ſolidum componentium, quatuor rectis excedunt angulos baſis BCDEG angulum ſolidum A ſubtendentis. Cùm autem ſingulos ipſius baſis angulos componant tres anguli plani

ſolidos

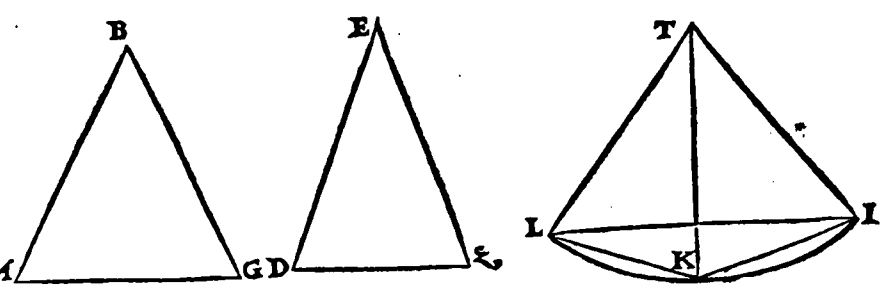
ſolidos angulos conſtituentes, vt ABG ABC GBC angulum ſolidum B componentes, ſicq; reliquos CDEG: quorum bini qui ſupra baſim ſcilicet ABG ABC reliquo GBC (angulo baſis) ſunt maiores, per vigeſimam huius: ſequetur omnes qui ad baſim angulos triangulorum angulum A conſtituentium ſimul ſumptos, angulis baſis ſimul ſumptis maiores eſſe. Cùm igitur omnes triangulorum anguli angulos baſis quatuor tantùm rectis exceſſerint: qui verò ſupra baſim eoſdem baſis angulos excedant, manifeſtum eſt reliquos qui ad A ſolidum angulum quatuor rectis minores ſupereſſe, cùm omnes triangulorum anguli ſimul ſumpti, angulos baſis quatuor tantùm rectis exceſſerint. Omnis itaque angulus ſolidus ſub planis angulis minoribus quatuor rectis continebitur.

MONITVM.

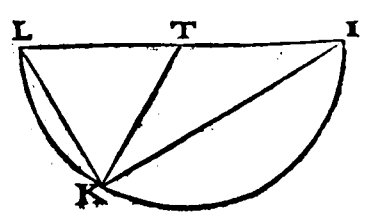
Huius demonſtrationem quadam prolixitate præter Theonem ampliare cogimur vt generalem perhibeamus, is enim in trilatera Pyramide tantùm demonſtrans, quæ ad reliquorum ſolidorum libertatem exquirebantur, omiſit: Campanus verò ſatius, ſed obſcurè paululum (corollar. 32 primi) tradidit polygonorum in triangula diſtributionem, quam memorans indemonſtratam reliquit: vt quod triangula quolibet polygono concipi debent, non oſtenderit neceſſarium fuiſſe, à quo penitus huius theorematis pendet generalis demonſtratio.

PROPOSITIO XXII.

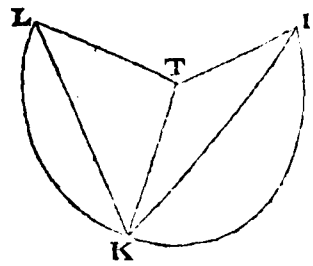
Si fuerint tres anguli plani, quorum bini reliquo ſint maiores quomodocunque ſuſcepti, comprehendant autem ipſos æquales rectæ lineæ, Ex connectentibus rectas lineas æquales, triangulum conſtitui eſt poſſibile.



Sint tres anguli plani BET æqualibus lineis AB BG DE EZ LT TK cõprehenſi, quilibet duo eorũ reliquo ſint maiores. Connectant autem lineas æquales rectæ, AG DZ LK: Dico ex ipſis AG DZ LK connectentibus triangulum fieri poſſe; ſumantur bini minores qui ſint E & T, ad rectam TK ſignúmque eius T angulo DEZ æqualis ponatur KTI, per vigeſimamtertiam primi: ipſi autem EZ æqualis ſit TI, reliqua KI æqualis erit ipſi DZ, per quartam primi: quia verò æquales ſunt TL TK TI rectæ, ab eodem ſigno T ipſæ in circunferentiam cadent, per diffinitionem circuli: ſubtendatur itaque recta LI: Trianguli LK rbina latera LK KI reliquo LI ſubtendente ſunt maiora, per vigeſimam primi, quia verò maiores ſunt (ex hypotheſi) bini DEZ LTK anguli (hoc eſt totus LTI) reliquo ABG, & æquis lateribus LT TI ipſis AB BG comprehenſi, & baſi LI baſi AG maior erit, per vigeſimamquartam primi. Multò igitur maiores erunt binæ LK KI (hoc eſt LK DZ) reliqua AG: binæ igitur minores, reliqua ſunt maiores, quare



ſumptæ non minores facilius reliqua erunt maiores. Ex tribus autem rectis A G D Z & L K, quarum duæ quælibet reliqua ſunt maiores, triangulum conſtituemus, per vigeſimamſecundam primi. Si igitur fuerint tres anguli plani, quorum bini, &c. Quòd ſi bini D E Z L T K (hoc eſt totus L T I) binis rectis ſint æquales, quæ eorum ſubtendet circunferentiam, circuli dimetiens erit, vt L I, quæ maior eſt quauis alium angulum ſubtendente, quare maior erit L I ipſa A G, quemuis angulum in circulo ſubtendente. At verò binis L T K K T I duos rectos excedentibus, vt hoc exemplo vltimo, perſpicuum eſt binas L K K I multò maiores eſſe quauis reliqua angulum ſubtendente A G, cùm ipſæ L K K I ſint maiores dimetiente, quæ maxima eſt omnium ſubtendens, per decimamquintam tertij. Quauis itaque angulorum propoſita quantitate patuit expoſitum.



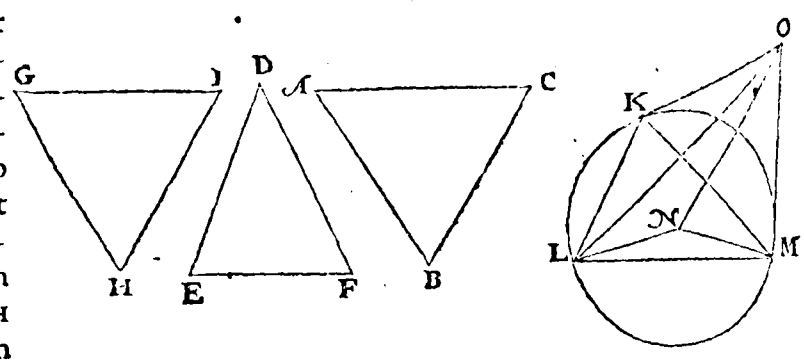
MONITVM.

Theon huius tantùm primam partem demõſtrat, cùm ſcilicet bini anguli duobus rectis minores exiſtunt, illud quidem duplici demonſtratione, mancam relinquens huius theorematis intelligentiam, quo ad poſtremas triangulorum magnitudines. Non igitur genus huius docuit, ſed tãtùm ſpeciem, quod minimè ſufficit.

PROPOSITIO XXIII. PROBL. 3.

Ex tribus angulis planis (quatuor rectis minoribus) & quorum duo quomodocunque ſumpti, reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conficere.

Proponantur tres anguli plani B D H minores quatuor rectis. Sint itẽ duo eorum quilibet reliquo maiores, oportet iam ex ipſis B, D, H angulis ſolidum



angulum conficere. Contineantur ipſi B D H anguli æquis lateribus A B B C E D D F G H H I, coniunctis baſibus A C E F G I. ex tribus autem connectentibus A C B F G I triangulum (per præfatam) conſtituamus K L M. Eſto autem rectæ A C æqualis L M, ipſi verò E F ſit æqualis L K, & K M rectæ G I, circa L M K triangulum (per quintam quarti) deſcribatur circulus, cuius centrum ſit N, connexis N L N M N K: à ſigno verò N plano L M K recta excitetur N O, per duodecimam huius, quoniam anguli B D H quatuor rectis ſunt minores, rectæ A B B C ipſis L N N M neceſſariò maiores erunt. Nam ſi æquales eſſent, æqualem angulum ipſi L N M continerent, per quartam primi: ſimiliter G H I ipſi M N K & E D F ipſi K N L, cùm vtræque inter ſe æquales ſint, ex hypotheſi, ſcilicet continentes angulos, & quæ ex centro. Tres itaque angulos B D H quatuor rectis (qui ad N centrum) æquales conſtituerent, contra hypotheſim: non igitur ſunt ipſæ, A B B C ipſis L N N M æquales. Sed neque minores ipſis L N N M, nam intra triangulum L N M caderent, ac angulis qui ad N maiores angulos efficerent, per vigeſimamprimam primi, & id propterea quatuor rectis maiores:

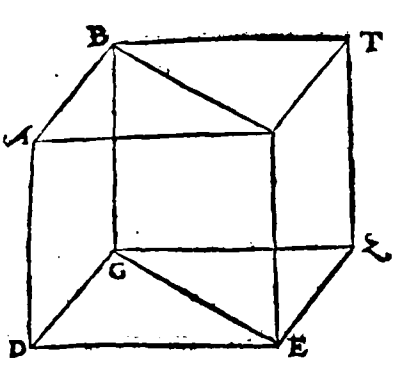
maiores: nam (per corollarium 15 primi) qui ad centrum omnes anguli quatuor rectis sunt æquales, quod rursus obstaret hypothesi. Maiores itaque erunt A B B E ipsis L N N M, quæ ex centro. A recto itaque A B quadrato, tollatur quadratum rectæ L N, reliqui (per coroll. 34. sexti) latus reperiatur, cui æqualis ponatur recta N O connexis O L, O M, O K rectis. Cùm autem recta A B possit quadrata ex L N N O, angulus verò O N L (ex constructione) rectus sit, sequetur rectam L O eadem quadrata (per quadragesimamseptimam primi) potentem, ipsi A B æqualem esse, sed ipsi L O æquales sunt singulæ O K O M, ipsi verò A B singulæ B C E D D F G H H I. Singulæ igitur ipsarum L O O K O M singulis A B B C E D D F G H H I æquales erunt; atqui rectis M L L K K M æquales fuerunt reliquæ A C E F G I. Triangula itaque O M L & A C B, æquales efficient angulos L O M & A B C æquis lateribus contentos, per octauam primi, ac eodem argumento L O K ipsi E D F & K O M ipsi G H I æquales fieri ostenduntur. Tres igitur anguli L O M L O K & K O M plani, propositis tribus æquales, ad vnum signum O constituuntur, non in eodem existentes plano, cùm O in sublimi (per constructionem) fuerit, angulúmque solidum constituunt, per nonam diffinitionem huius. Ex tribus itaque angulis planis quatuor, &c.

MONITVM.

Prolixam admodum extenuat huius demonstrationem Theon, circa diuersitatem situs trianguli K L M (scilicet aut centro intus, aut in latere, aut equidem extra constituto) valde laborãs. Quod ex se sat patet: cùm ex hypothesi omnes comprehendentes angulos fuerint æquales positæ, necessum erit alteri earum à circunferentia ad perpendicularis verticem collocatæ, reliquas ab eadem circunferentia ad eundem verticem ductas æquales fieri, quauis arte fiat trianguli dispositio, dum tamen in circulo descriptum fuerit, iuxta hypothesim. Omnes etenim rectæ illæ rectos angulos æquis lateribus, scilicet ea quæ ex centro & perpendiculari contentos subtendunt. Quare necessariò æquales, per quartam primi erunt. Et proinde quauis trianguli dispositione, semper pyramidis vertex, siue solidus angulus centro circuli basim continentis perpendicularis erit, ob hypothesim æquorum laterum angulos datos continentium: vt igitur tantos euitemus anfractus, breuiorem conati sumus afferre demonstrationem.

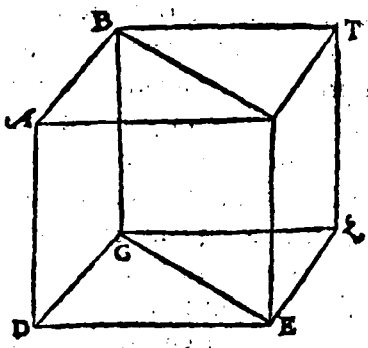
PROPOSITIO XXIIII.

Si solidum parallelis & quadrangulis planis comprehendatur, quæ ex opposito ipsius plana similia æqualia sunt, & parallelogramma.



Esto A B Z E solidum planis A E A G Z B Z I A T & D Z parallelis & quadrangulis comprehensum: Dico quælibet eius A B Z E plana opposita, esse similia æqualia & parallelogrãma. Quoniã bina plana A T D Z parallela secant planum A G, communes eorum sectiones A B & D G sunt parallelæ, per decimamsextam huius. Similiter quia eadem plana A T & D Z secant planum A E, parallelæ erunt A I D E, sicq; omnes oppositæ quadrilaterorum rectæ parallelæ patebunt. Id propterea singula plana quadrilatera & parallelis oppositis rectis comprehensa, parallelogramma erunt, per trigesimamsextam diffinitionem primi. Cùm insuper binæ A B A I sese tangentes, binis D G D E sese tangentibus sint parallelæ, non autem in

tem in eodem plano,ſed in oppoſitis, anguli BAI & GDE ſunt (per decimam huius) æquales. Sed ipſos angulos continentes rectæ BA AI ſunt oppoſitis rectis GD DE æquales,per trigeſimamquartam primi. Baſes igitur BI & GE (ex quarta primi) æquales erunt,ac triangula BAI & GDE æquiangula & æqualia. Trianguli autem BAI duplum eſt AT parallelogrammum, per trigeſimamquartam primi. Similiter & ipſius GDE duplum eſt DZ oppoſitum: æquum eſt igitur AT ipſi DZ oppoſito. Haud diſſimili argumento oſtẽdemus reliqua parallelogramma oppoſita æqualia eſſe. Sed & ſimilia,cum BA AI latera ipſis GD DE lateribus ſint æqualia, erit BA ad AI ſicut GD ad DE, quæ circum æquales angulos parallelogrammorum AT & DZ oppoſitorum,quæ ideo ſunt ſimilia, per primam diffinitionem ſexti. Ipſius itaque ſolidi ABZE plana oppoſita, ſimilia, æqualia, & parallelogramma eſſe oſtendimus. Si itaque ſolidum parallelis & quadrangulis planis, &c.



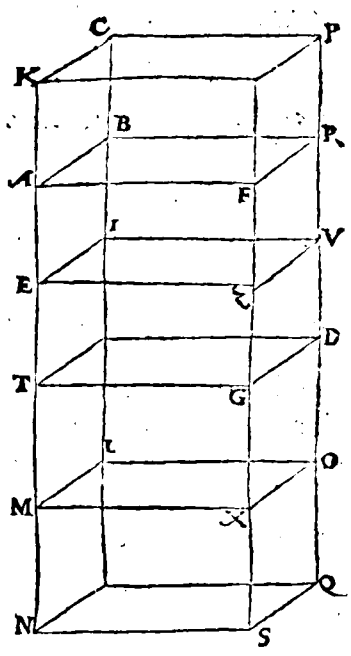
MONITVM.

Hanc demonſtraturus Campanus idem præfert demonſtrationi, quod ſolent incertarum profeſſionum interpretes diſtrahendis propoſiti ſententiis ſeipſas non tolerantibus: ab illarum etenim natura hoc theorema depromptum eſſe arbitramur. Nam cùm id quod fieri non poteſt ab exemplari ſibi propoſitum viderit,ſcilicet ſolidum ſub parallelis planis comprehenſum, producere parallela eius oppoſita plana, neceſſariò parallelogramma, percipit huiuſmodi falſam intelligentiam ad veriorem eſſe reducendam: quapropter ab hac orditur voce, quicquid dicant alij,quæ patulæ teſtatur eum non eius fuiſſe ſententiæ,quæ ab Euclide ad nos (non incorrupta) delata eſt, attamen ſolidum parallelogrammum impropriè denominans verum parallelepipedum eſſe hac demonſtratione concludere conatur. Theon verò (vt ſæpius) particulari vtitur demonſtrandi forma, vt tantùm parallelogramma oſtendiſſe arbitretur, ſi ex parallelis oppoſitis planis, contentum fuerit ſolidum, vnde illud abſurdum ſequetur, hexagonas,octogonas,& quaſlibet parium numero laterũ polygonas ſpecies,parallelogramma dici poſſe. Et idcirco ſolidum iſtud (quod tandem parallelepipedum dici reperietur) plana oppoſita, hexagona,octogona,& alia plura minimè parallelogramma recipere,quæ ſequentibus theorematis immenſa producerent diſſidia. Quare veritatem geometricam tantùm aſpectantes,arbitramur hoc nuſquam vſum fuiſſe Euclidem,vt per ea quæ ſubſequentur, perſpicuè noſcemus. Quæ prænoſcentes primi diffinitionibus parallelogrammi diffinitionem non antea diffinitam coniunximus, à qua parallelepipedi in ſolidis orta eſt forma,cuius rurſus diffinitionem (iuxta veriorem Euclidis ſententiam) huius vndecimi diffinitionibus copulauimus. Quod quidem hoc theoremate componendum ſub hypotheſi parallelorum quadrangulorum, ſolidum aliquod claudentium propoſuimus,vt inde neceſſariò otiantur oppoſita eius latera parallelogramma æqualia, cui inſuper contulimus ſimilia eſſe ipſa parallelogramma, vt amplior euadat geometriæ facultas,futuris demonſtrandis. Si verò Theonis & Campani hypotheſim recepiſſemus, Octaëdrum, Icoſaëdrum, & Dodecaëdrum (quàm abſurda) facilè huius concluſioni ac quamplura alia adaptare licuiſſet,quod vitandum monemus.

PROPOSITIO XXV.

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, parallelo exiſtente

ſtente eis quæ ex oppoſito planis, erunt baſis ſectiones inter ſe, vt ſolidi ſectiones inter ſe.



Proponatur ſolidum inquam parallelepipedum A T D R quod ſecetur plano E V parallelo exiſtente ipſis A R T D oppoſitis planis: Dico eſſe ſicut A I ad I T baſis ſectiones, ſic A V ad V T ſolidi ſectiones. Ponantur rectæ ipſi A E æquales quotlibet in rectum E A A K, aliæq; quotuis ipſi B T æquales in rectũ fiant E T T M M N. Perficiantur item parallelogramma A C T L L N. Et exinde productis æqualibus parallelis perficiantur ſolida A P T O M Q, totum C S ſolidum componentia. Quoniam parallelepipedum eſt (ex hypotheſi) A T D R, quadrangula erunt & parallela B T R G oppoſita plana, per 25 diffinit. huius. Et inſuper (ex præfata) æqualia ſimilia & parallelogramma erunt. Cùm autem A R E V & T D parallela plana, plano B T ſecentur, parallelæ erunt A B E I, per decimamſextam huius. Et ideo parallelogrammum erit A I, ſimiliter parallelogramma erunt, I T V G & V F. Quia verò æquales ſunt rectæ E A A B & A K B C, & æquos angulos continent, cùm ſint parallelæ, per vigeſimamoctauam primi, æqualia (per primam ſexti) erunt parallelogramma A I A C, & ſimilia: eadem lege æqualia oſtendentur eſſe B P, B V & K F F E, ſicq; reliqua. Et proinde ſolidum A P ſolido A V æquum erit, & ſimile (per octauam diffinitionem huius.) Haud ſecus ſimilia & æqualia oſtendentur E D T O M Q ſolida eſſe. Totum igitur E K P V ſolidum æquè multiplex eſt ſolidi E A R V, quotuplex eſt E C planum ipſius A I plani, ſcilicet quotuplex eſt E K rectæ ipſius E A. Eodem patet argumento totum N V æquè multiplex eſſe ipſius T V, quotuplex eſt N I ipſius T I. Scilicet quotuplex N E rectæ T E. Si igitur E C planum excedit, æquatur, vel deficit, N I plano, ſolidum E P (quauis facta multiplicatione) excedit, æquatur, vel deficit, ſolido E Q. Quatuor itaque ſunt magnitudines A I I T plana & A V V T ſolida, quarum primæ & tertiæ æquè multiplicia, E C planum & E P ſolidum, vnà excedunt, vnà æquantur, vel ſimul deficiunt, ab æquè multiplicibus ſecundæ & quartæ, I T plani & V T ſolidi, quæ fuerunt I N planum & ſolidum E Q, iuxta quamuis multiplicationem ductis: ſimplices igitur earum A I ad I T plana, eandem habebunt rationem quam A V ad V T ſolida, per quintam diffinitionem quinti. Si itaque ſolidum parallelepipedum plano, &c.

COROLLARIVM I.

Si Priſma plano ſecetur parallelo eis que ex oppoſito planis, erunt ad ſe Priſmatis ſectiones, vt baſis ſectiones ad ſe.

Nam baſium quæ parallelogrammæ ſunt (per vndecimam diffinitionem huius) ſectiones, parallelogrammæ ſimiliter erunt, per decimamſextam huius, cùm planum ſecans oppoſitis ſit parallelum, & inſuper æquiangulæ. Quare ſi ipſis baſibus (productis rectis) ſimiles & æquales addantur baſes, vt diximus in parallelepipedo, fient ab ipſis ſectionibus ſimilia quotuis Priſmata, vt quamlibet Priſmatis ſectionem, quauis multiplicatione ductam, per multiplicium baſium & ſectionum communem exceſſum, æqualitatem, vel defectum, ad quamlibet aliam ſectionem eam ſeruare quam baſis ſectiones inter ſe ſeruant rationem, eadem arte doceatur, ex quinta diffinitione quinti.

COROL

COROLLARIVM II.

Solida, quorum bina plana quæ ex oppoſito ſunt polygona, ſimilia, æqualia, & parallela, reliqua quæ neceſſariò erunt parallelogramma plano parallelo ipſis quæ ex oppoſito planis ſecta, habebunt baſis ſectiones ad ſe, vt ſolidi ſectiones ad ſe.

Illud enim manifeſtum oſtenditur. Nam huiuſmodi ſolida in Priſmata ſecantur, quæ commune vnum habent latus, axem ſcilicet rectam lineam quæ per baſium oppoſitarum centra ducitur. Quare quot baſibus parallelogrammis concludentur oppoſita polygona, totidem Priſmatis componetur totum illud ſolidum. Nam ea polygona in totidem ſimilia diuiduntur triangula, per vigeſimamſexti, quæ Priſmata deſcribunt. Quæ quidem Priſmata (per præcedens corollarium) ſectiones baſium ſectionibus proportionales efficiunt. Quare (per duodecimam quinti) ſicut vnius ſectiones ad ſe, ſic erunt totius ſectiones ad ſe. Horum ſolidorum infinitæ ſunt ſpecies, iuxta varietatem polygonorum oppoſitorum, & parallelorum, quæ polygona angulos circũſtantium parallelogrammorum pro ſitus diuerſitate mutant. Sed hæc propoſito nulla arte obeſſe poſſunt, quin idem ſemper ſequatur, quod oſtendimus, cùm ſemper parallelogramma ſint quæ circunſtant plana.

COROLLARIVM III.

Prædicta ſolida ex Priſmatis compoſita, plano parallelo oppoſitis planis ſecta, ad ſe ſunt vt ſecti vertices.

Nam ad ſe fuerunt vt baſes, quæ ad ſe ſunt vt rectæ ſuper quibus degunt, per primam ſexti, cùm ſint parallelogramma, quæ rectæ ſunt Priſmatum vertices.

COROLLARIVM IIII.

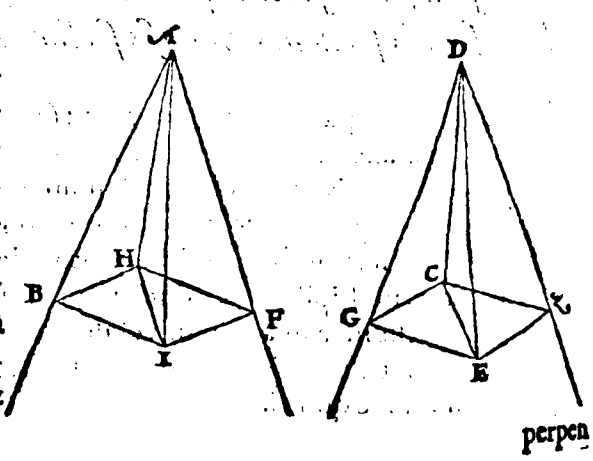
Data Priſmata vel ex eis cõpoſita ſolida in datas rationes ſecare.

Nam per corollarium 10 ſexti, ſecantur vertices in quaſcunque rationes. Quare ſecta ſolida vt vertices, per præcedens coroll. ſecantur in quaſuis rationes.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA 4.

Ad datam rectam lineam, ádque in ea ſignum, dato ſolido angulo, æquum ſolidum angulum conſtituere.

Recta linea data ſit A B, ad datum in ea ſignum A, conſtituendus eſt ſolidus angulus dato ſolido qui ad D æqualis, qui comprehenditur ſub G D Z G D E E D Z, planis quotuis angulis, quoniam ipſi G D Z G D E E D Z non ſunt in eodem plano, per nonam diffinitionem huius, à recta D E & contingenti eius ſigno E in planum rectarũ G D D Z



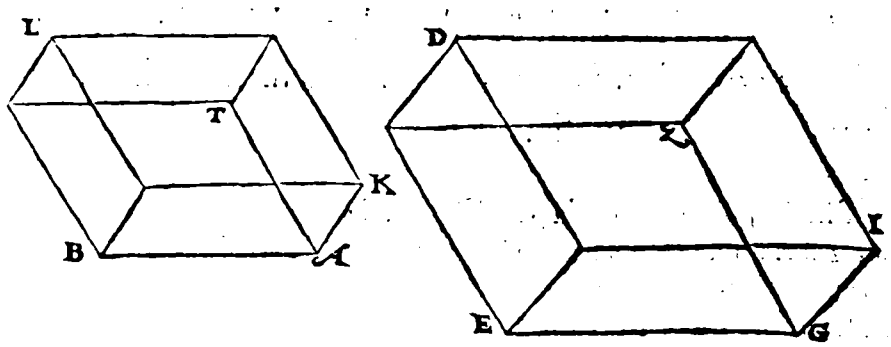
perpen

perpendicularis agatur (per vndecimam huius) E C. In ipſis porro D G D Z ſumantur contingentia ſigna G & Z, cõiungantúrque C D C G C Z G E E Z. Ad rectam autem A B ſignúmque eius A, dato angulo G D Z, æqualis conſtituatur B A F, per 23 primi, ſecentúrque ipſis D G D Z æquales A B A F. Rurſus ad eandem A B ſignúmque eius A dato G D C angulo æqualis ponatur B A H, in plano B A F: ſecetur verò ipſi D C æqualis A H. A ſigno verò H ipſi plano B A F H perpendicularis excitetur H I, per 12 huius, quæ æqualis ponatur ipſi C E, coniunctis I A I B I F H B H F: Dico angulum ſolidum qui ad A æquum eſſe ei qui ad D. Quoniam æqualis eſt angulus B A H ipſi G D C; & totus B A F toti G D Z, ex hypotheſi, reliquus H A F reliquo C D Z æquus erit, per 19 quinti; quia verò æquales ſunt A B A H A F, rectis D G D C D Z per conſtructionem. Baſes igitur B H H F baſibus G C C Z æquales erũt, per 4 primi. Quoniam item rectæ H I, E C ſunt rectæ ad plana B A F, G D Z, anguli I H A I H B I H F, necnon E C D E C G E C Z, ſunt recti, per ſecundam diffinitionem huius, & ideo æquales: ſed & æquis lateribus contenti, ſcilicet I H, H B ipſis E C, C G & I H, H A ipſis E C, C D ac I H, H F ipſis E C C Z. Baſes itaque (per eandem quartam primi) I B I A I F, baſibus E G E D E Z æquales erunt: ſed triangulorum A B I & D G E duo latera A B A I duobus D G D E, & baſis B I baſi G E ſunt æqualia. Anguli igitur B A I & G D E (per 8 primi) ſunt æquales, & ſimiliter triangulorum I A F E D Z bina latera & baſes ſunt æquales, & (per eandem) anguli I A F & E D Z æquales erũt. Atqui æquales fuerunt (ex hypotheſi) reliqui B A F G D Z: anguli igitur plani B A F B A I I A F, planis G D Z G D E E D Z æquales angulis multitudine & magnitudine, ſolidos qui ad A & D efficiunt: anguli igitur ſolidi qui ad A & D ſunt æquales, per octauam diffinitionem huius. Ad datam itaque rectam lineam ádque in ea, &c.

Hæc de trigonis angulis ſolidis demonſtrata ſolùm fuêre, vt quotcunque polygonis angulis deſeruiant. Nam omne polygonum in triangula reſolui diximus ſimilia, vigeſima ſexti: quare ſuper quauis trigoni anguli ſolidi facie alius trigonus angulus conſtitui poteſt, per hanc, & ſic quotcunque angulos polygonos ſolidos componentes, plani ſuperaddi poterunt, donec referatur optatus angulus ſolidus.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA 5.

Ex data recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

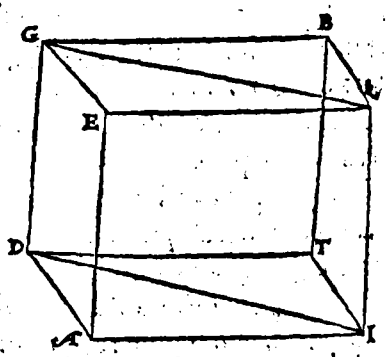


Proponatur ex data recta A B, dato G D ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum deſcribendum eſſe. Ad rectam A B & ſignum eius A angulo ſolido G æqualis angulus ſolidus conſtituatur B A T K, per præfatam, erunt igitur æquales anguli plani B A T ipſi E G Z, & T A K ipſi Z G I, ac B A K ipſi E G I. Fiat autem (per 12 ſexti) ſicut E G ad G I, ſic B A ad A K, ſicut G I ad G Z, ſic (per eandem) A K ad A T. Erit idcirco æqua ratione ſicut E G ad G Z, ſic B A ad A T, per 22 quinti, ſub ipſis A B A K parallelogrammum fiat B K, ſub A B A T verò B T, ſub A T A K autem T K. Similia igitur erunt B K B T T K parallelogramma, ipſis E I E Z Z I parallelogrammis, per primam diffinitionem ſexti: Ipſis porro B K B T T K oppoſita quadrangula parallela deſcribantur, ductis parallelis, quæ ſint L T L K L B, per corollarium 15 huius: ipſa oppoſita erunt parallelogramma ſimilia & æqualia, ſolidum A L conſtituentia, per 24 huius. Parallelepipedum itaque

erit AL, per 25 diffinitionem huius, & ipsi GD parallelepipedo simile, cùm constet similibus & totidem planis, per septimam diffinitionem huius, similitérque est positum, per ea quæ diximus super prima diffinitione sexti, cùm ad easdem partes æquales producat angulos. Ex data igitur recta linea AB, dato solido parallelepipedo GD, simile similitérque positum parallelepipedum AL descripsimus.

PROPOSITIO XXVIII.

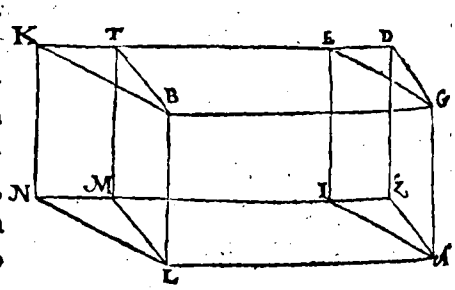
Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios eorum quæ ex opposito planorum, solidum secabitur ab eo plano bifariam.



Secetur solidum parallelepipedum AB per planum GDIZ, constitutum in dimetientibus GZ & DI planorum BE & TA oppositorum: Dico solidum AB per planum GDIZ bifariam secari. Cùm enim parallelogramma sint BE TA quæ ex opposito (per 24 huius) similia & æqualia: Dimetientes GZ & DI bifariam ipsa secant, per 34 primi: & proinde totum AB solidum in bina secatur Prismata, scilicet GBZITD & GEZIAD, per vndecimam diffinitionem huius. Quæ Prismata similibus parallelogrammis & æqualibus constant, per 24 huius, cùm bina sint binis opposita, reliquum verò commune secans triangulíque similibus & æquis, nempe dimidiis similiũ & æquarum basium oppositarũ, per 20 sexti. Ipsa itaque bina Prismata sunt (per 8 diffinitionem huius) similia & æqualia. Et proinde totum AB solidum per planum GDIZ (bina illa discernens Prismata) bifariam sectum est. Si itaque solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios, &c.

PROPOSITIO XXIX.

Super eadem basi, & sub eadem altitudine solida parallelepipeda consistentia, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inuicem sunt æqualia.



Sint inquam bina solida parallelepipeda AZ TB & AI KB, super eadem basi AB constituta, & sub eadem altitudine (scilicet parallelarum) BG & TD, quorum solidorum stantes (hoc est quatuor solidi latera in basim cadentia, vt AZ GD BT LM solidi AT, & AI GE BK LN solidi AK) sint in eisdem rectis lineis, siue parallelis NZ & KD: Dico ea solida AT & AK esse æqualia. Quoniam (ex diffinitione parallelepipedi & vigesimaquarta huius) patet, plana opposita esse similia, æqualia & parallela, æqualia erunt AM ipsi GT, & AN ipsi GK: sed AM ipsi AN super eisdem basi & vertice (per trigesimamquintam primi) æquum est, communi ablato trapezio ALMI reliqua triangula NML IZA sunt æqualia. Similiter & reliqua KTB & EDG erunt inter se æqualia, & præfatis, nam bases basibus fuerunt

æqua

æquales,quarum oppoſitæ æqualibus angulis & lateribus clauduntur,per parallelepipedorum conſtructionem.Bina itaque Priſmata K T Ϟ L M N & E D G A Z I(ſimilibus triangulis & parallelogrammis multitudine & magnitudine æqualibus,compoſita)æqualia erunt,per octauam diffinitionem huius. Commune autẽ eis addatur ſolidum inter baſes, A B I T comprehenſum, ſequetur totum A B I K parallelepipedum toti A B Z T æquum eſſe,hoc eſt A T, ipſi A K ſolido. Super eadem igitur baſi & ſub eadem altitudine,&c.

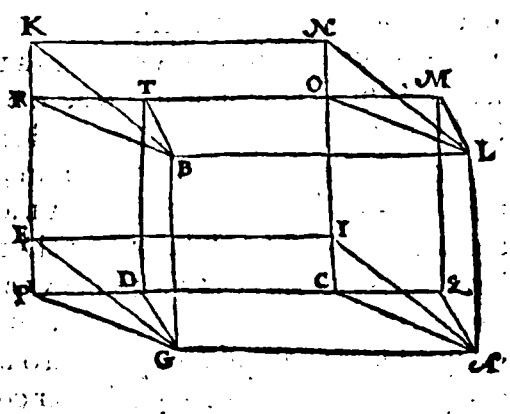
MONITVM.

Stantes dicemus eſſe quatuor rectas cuiuſlibet parallelepipedi, angulos ſupremæ & infimæ baſium coniungentes, quæ quidem iuxta ſolidorum diuerſitatem angulorum,aut perpendiculares in baſim,aut equidem ad obliquos cadunt angulos:cùm autem hoc & ſequenti theoremate ſolidorum collatorum eadem ſupponatur baſis, ſtantes manifeſtum eſt in eiſdem parallelis ad baſim degere, nempe ad duo baſis quæque latera: quia verò duo ponuntur ſolida ſuper eadem baſi,ac eadem altitudine, binæ ſolidorum ſupremæ baſes diuerſo ſitu collocari poſſunt. Nam cùm ſint æquales & ſimiles (ex vigeſimaquarta huius) aut inter eaſdem parallelas collocari poſſunt,tum quidem ſtantes in eiſdem parallelis ſiue rectis lineis eſſe dicentur in vtroque ſolido, cùm ſcilicet bina ſupremarum baſium latera eiſdem foueantur parallelis, ſi conuerſo bina eadem latera ſupremarum baſium eiſdem rectis ſiue parallelis non contineantur, nec ſtantes ipſi lateribus coniunctæ, in eiſdem rectis aut parallelis eſſe credentur. Hac de cauſa ſtantes eaſdem rectas lineas poſſidere intelligemus, cùm ſupremarum baſium latera(bina ſaltem)rectis lineis eiſdem continebuntur, quod ſupponit hæc vigeſimanona. In eiſdem verò non eſſe rectis cùm nulla bina ſupremarum baſium latera eiſdem rectis claudentur,& illud ſupponet proxima.

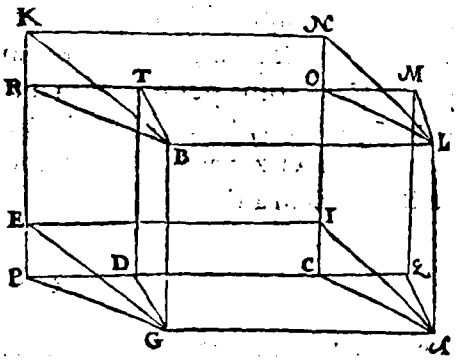
PROPOSITIO XXX.

Super eadem baſi & ſub eadem altitudine exiſtentia ſolida parallelepipeda, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis,inuicem ſunt æqualia.

Conſtituantur ſolida parallelepipeda A B Z T A B I K ſuper eadem baſi A B, & eadem altitudine (parallelarum A G Z P) quorum ſtantes A Z C D B T L M ſolidi A T & A I G E B K L N ſolidi A B I K non ſint in eiſdem rectis lineis:Dico ipſa A B Z T & A B I K ſolida eſſe æqualia,cùm ſupremæ propoſitorum ſolidorum baſes Z T & I K ſint in eodem plano ex hypotheſi altitudinis: producatur recta N I vſque ad rectã Z D in C, & M T vſque ad rectam K E in R: At Z D & K E concurrant in P, coniunctis C A, P G, R B & O L rectis: quoniam enim æqualis eſt recta O R ipſi N K, & O C ipſi M Z, cùm ſint parallelæ, & parallelis coniunctæ, per conſtructionem parallelepipedorum, æqualia erunt O P & N E plana, & ipſis æquum erit M D. eadem cauſa, ſed & æquiangula,per vigeſimãnonam primi,cùm ſint,ex hypotheſi,in eodem plano:



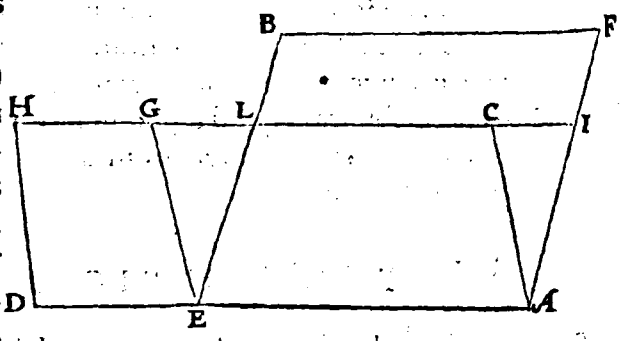
Solidum igitur ABZT & id quod inter AB & CR plana comprehenditur, habent ſtantes AZ GD BT LM, & AC GP BR & LO in eiſdem rectis AG PZ & BL RM. Ipſa igitur ABZT & ABCR ſolida (per præcedentem) ſunt æqualia: haud ſecus oſtendemus ſolidum idem ABCR ſolido ABIK æquum eſſe, cùm eorum ſtantes AC GP BR LO cum AI GE BK LM ſint in eiſdem rectis AL NC, & GB KP, per eandem: ſolida itaque ABZT & ABIK (eidem ABCR ſolido æqualia oſtenſa) adinuicem erunt æqualia, per communem ſententiam. Super eadem igitur baſi, & ſub eadem, &c.



PROPOSITIO XXXI.

Super æquis baſibus ſolida parellelepipeda exiſtentia & ſub eadem altitudine, inuicem ſunt æqualia.

Proponantur æquales baſes (tamen ad tutiorem intelligentiam omnino diſſimiles) AEBF ADHC, quarum vnum cuiuſque latus in eandem rectam cõcurrant AED, ac baſes AB AH, in idem planum (ex vigeſimaſeptima huius) ſuper quibus ſolida parallelepipeda eiuſdem altitudinis cõſtructa eſſe ſupponantur: Dico quod ſuper AB ſolidum, ei quod ſuper AH ſolido æquum eſſe. Per ſignum E ipſi AC parallela fiat EG, quæ ſi extra baſim AB cadat, producatur recta HC in I. Quoniam parallelogramma ſunt AB AH, per vigeſimamquartam huius, æquilatera adinuicem erunt triangula ACI EGL. Et (per quartam primi) æquiangula & æqualia, ac per primam diffinit. ſexti & 4 eiuſdem) ſimilia. Super ipſis igitur triangulis erecta Priſmata eiuſdem altitudinis cum ſolidis ex AB AH, æqualia & ſimilia erunt, per octauam diffinitionem huius. Nam concluduntur ſub ſimilibus planis multitudine & magnitudine æqualibus. Commune ipſis addatur quod ſuper ACLE ſolidum, ſequetur quod ſuper AB GC ſolidum, æquum eſſe ei quod ſuper AELI ſolido. Cùm autem AEBF & ADHC plana (ex hypotheſi) ſint æqualia, & ablatum AG ablato AL æquum fuerit, Reliquum BI reliquo GD æquum erit. Erit igitur ſicut AG ad GD ſic AL ad BI (nempe æquales ad æquales): Sed ſicut AG ad GD, ſic ſolidum quod ſuper AG ad ſolidum quod ſuper GD, per vigeſimamquintam huius, ſecatur enim plano ſuper GE parallelo oppoſitis. Sicutq; ſimiliter AL ad BI, ſic quod ſuper AL ad quod ſuper DP: Erit itaque (per vndecimam quinti) ſicut quod ex AG (vel AL ſibi æquum) ſolidum, ad quod ex GD, ſic idem quod ex AG vel AL, ad quod ex IB ſolidum. Æqualia igitur erunt (per ſecundam partem nonæ quinti) quæ ſuper GD & BI ſolida. Quibus æqualia addita, ſcilicet quod ſuper AG ipſi GD, quod verò ſuper AL ipſi BL. Tota itaque quæ ſuper AH & ſuper AB ſolida erunt æqualia, per communem ſententiam. Super æquis igitur baſibus, &c.



COROLLARIVM.

Super æquis baſibus ſolida parallelepipeda exiſtentia, ad ſe ſunt vt vertices.

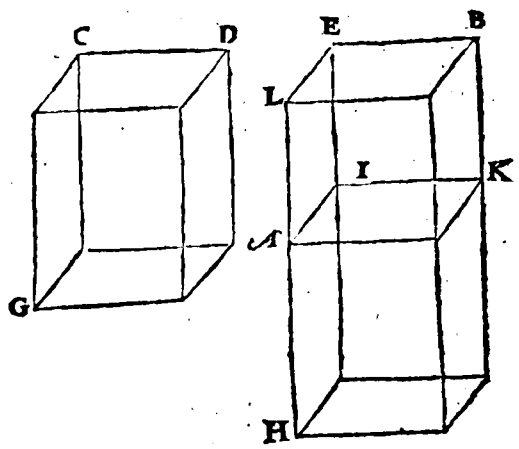
Nam ſi ea ſecẽtur plano parallelo baſibus, erunt ad ſe ſectiones vt baſium ſectarum ſectiones, per vigeſimamquintam huius. Quæ ſectiones baſium ad ſe ſunt vt latera ſeu ſolidorum vertices, per primam ſexti. Solida igitur ad ſe erunt vt vertices. Si verò baſes ſint diſſimiles, idem continget, ex corollario vigeſimæquintæ huius, quod in ſimilibus ex vigeſimaquinta oſtenſum eſt.

MONITVM.

Quia Campanus hanc ſat parcè, Theon verò prolixè admodum demonſtrarunt, demonſtratione alia hoc idem oſtendimus, qua ſolidorum tantùm baſes pro figura obtulimus, eo quòd iam ſuper eadem baſi quoquò ſe vertant ſtantes, parallelepipeda æqualia eſſe diximus, ſub eodem faſtigio, proximè præfatis. Quare pe baſium cõparationes idem oſtendiſſe facilius apparuit eadem ſuppoſita altitudine.

PROPOSITIO XXXII.

Sub eadem altitudine exiſtentia ſolida parallelepipeda, ad ſeinuicem ſunt vt baſes.



Sint bina ſolida parallelepipeda AB & GD ſub eadem altitudine exiſtentia, ſcilicet CD & EB: Dico eſſe vt baſis GC ad baſim AE, ſic ſolidum GD ad ſolidum AB. Producantur rectæ LA EI in rectum, ad rectámque AI æquale parallelogrammum ipſi GC in angulo HAI (per quadrageſimamquintam primi) conſtituamus, HI: Productis verò BK & reliquis parallelis ductis, fiant parallelogramma oppoſita, & exinde ſolidum HK ſuper baſi HI & altitudine IK: æquiangula igitur erunt ſolida AB HK, per decimam huius, cùm omnes lineæ & plana ex oppoſito ſint parallela. Sed æquum erit HK ſolidum ipſi GD ſolido, per præfatam, ſub æquis baſibus HI GC & æqua altitudine IK CD, ex hypotheſi. Eſt autem ſicut HI baſis ad AE baſim, ſic HK ſolidum ad AB ſolidum, per vigeſimamquintam huius. Secatur enim totum HB plano AK parallelo oppoſitis. Sed ſicut HK ad AB, ſic GD ad idem AB, per ſeptimam quinti. Sicut igitur HI (vel GC ſibi æqualis) ad AE baſes, ſic GD ad AB ſolida. Sub eadem igitur altitudine exiſtentia, &c.

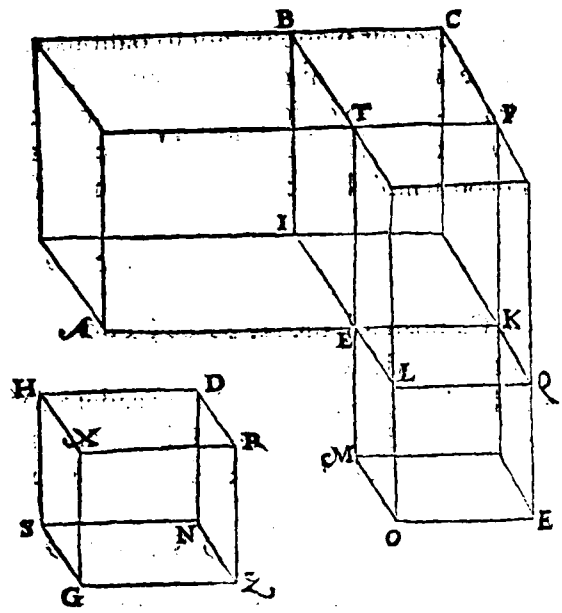
COROLLARIVM.

Æqualia parallelepipeda eiuſdem altitudinis æquales habent baſes.

Nam ſi inæquales haberent inæqualia eſſent, per hanc. Et æqualia æquas baſes habentia eandem habebunt altitudinem: Nam ſi maiorem haberent, excederent æqualia, quæ eandem habent: Si verò minorẽ, deficerent tanto ab eiſdẽ æqualibus.

PROPOSITIO XXXIII.

Similia ſolida parallelepipeda, adinuicem in tripla ſunt ratione laterum ſimilis rationis.



Proponantur bina ſolida parallelepipeda AB & GD ſimilia, vt ſcilicet AE ET EI ſint ſimilis rationis ipſis GZ ZR ZN: Dico ipſius AB ſolidi ad GD ſolidum, triplam eſſe rationem rationis AE lateris ad GZ latus. Extendantur in rectum AE in K, ſitq; EK æqualis ipſi GZ, vel HD, ac IE in L, ſitq; EL ipſi HX æqualis, TE verò in M, ſitq; EM ipſi HS æqualis: ſub ipſis autem EK EL EM perficiantur parallelogramma, & exinde parallelepipedũ, ductis parallelis, ſitq; EF OK ſolidum: quoniam ſolidorum AB & EF anguli plani qui ad verticem E ſunt æquales, ſcilicet AEI ipſi KEL, & AET ipſi KEM, ac IET ipſi LEM, æquiangula erunt AB & EF ſolida: quia verò circum æquales angulos qui ad E latera ſunt proportionalia, ex hypotheſi, cùm ſint æqualia lateribus ſolidi GD, quod ſimile fuit poſitum ſolido AB: ſimilibus parallelogrãmis deſcripta erunt, ac proinde ſimilia ipſa AB & EF ſolida, per ſeptimam diffinitionem huius, ſimilia verò & æqualia erunt EF & GD ſolida. Nam æquilatera adinuicem (ex conſtructione) ac eidem AB æquiangula, æqualia habent plana, totidémque numero, per octauam diffinitionem huius. Sub rectis item EL EK ET perficiantur parallelogramma, & ductis parallelis, concludatur ſolidum LP: ſub rectis verò EI ET EK fiat non ſecus ſolidum parallelepipedum EC: cùm autem (ex hypotheſi) proportionales ſint AE EI ET rectis HD HX HS, ipſæ proportionales erunt (per ſeptimam quinti) rectis EK EL EM, ipſis (ex hypotheſi) æqualibus poſitis. Erit igitur AE ad EK ſicut IE ad EL, ſicútque TE ad EM: ſed ſicut AE ad EK, ſic parallelogramma AI ad IK, per primam ſexti, ſicut verò IE ad EL, ſic IK ad KL, ſicútque TE ad EM ſic TK ad KM: erunt igitur (per vndecimam quinti) AI ad IK vt IK ad KL, vtq; TK ad KM plana: ſed ſicut AI ad IK baſes, ſic AB ad EC ſolida (per proximam) fuerunt: ſicut verò ſimiliter IK ad KL, ſic idem EC ad LP, ſicútque TK ad KM, ſic idem LP ad EF: continua igitur ratione proportionalia erunt AB EC LP & EF ſolida, per ſeptimam diffinitionem quinti. Primum itaque AB ad quartum EF triplam habet rationem quam idem primum AB ad ſecundum EC, per decimam diffinitionem quinti: ſicut autem fuit primũ AB ad ſecundum EC, ſic fuit primi latus AE ad quarti latus EK. Solidum igitur AB ad ſolidum EF triplam habet rationem quam latus AE ad latus EK ſimilis rationis: & igitur eandem habet AB ad GD triplam, quam AE latus ad GZ latus, cùm fuerint (ex hypotheſi) æqualia & ſimilia EF & GD. Similia itaque ſolida parallelepipeda, &c.

COROLLARIVM I.

Si quatuor recta continua proportionales fuerint, erit prima ad quartam ſicut quod à prima parallelepipedum ad id quod à ſecunda, ſimile ſimiliterque deſcriptum.

Nam

Nam prima ad quartam triplam habet quam ad ſecundam, & quod à prima ſimiliter ad id quod à ſecunda, oſtenſum eſt habere triplam quam latera rationem. Si quatuor igitur rectæ, &c.

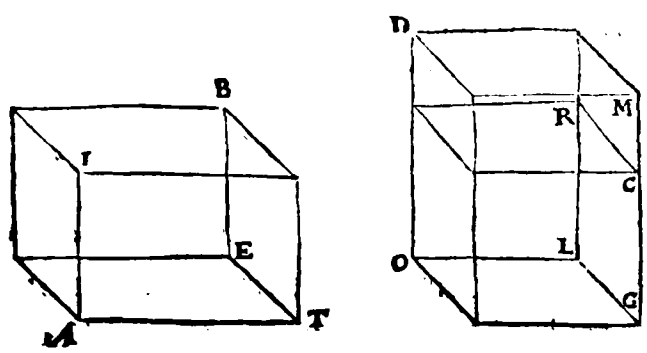
COROLLARIVM II.

Propoſitis duobus extremis ſimilibus ſolidis parallelepipedis, bina media continuè proportionalia dare ſolida parallelepipeda.

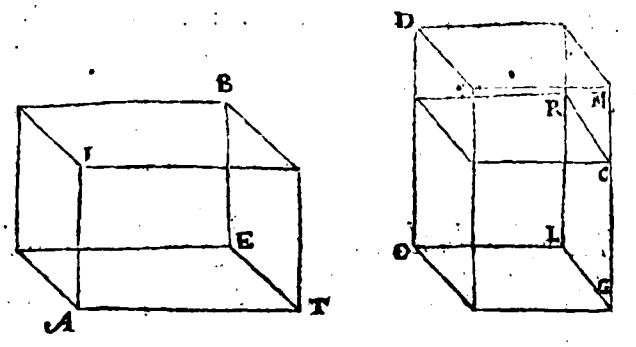
Nam quod ſuper baſi prioris, vertice verò poſtremi, erit ſecundum. Quod autem ſuper baſi poſterioris, & vertice prioris, erit tertium. Vt in ſolido E C, quod conſtituitur ſuper baſi E B prioris, & vertice B K vltimi. Super baſi verò E Q, poſtremi B F, & vertice E T prioris, conſtitui tertium L P ſolidum patet. Quæ quidem media extremis ſunt æquiangula, licet non ſemper ſimilia.

PROPOSITIO XXXIIII.

Æqualium ſolidorum parallelepipedorum reciprocæ ſunt baſes altitudinibus. Et ſolida parallelepipeda, quorum baſes altitudinibus ſunt reciprocæ, ſunt æqualia.



Supponantur ad primæ partis diſcuſſionem bina parallelepipeda, A B & G D eſſe æqualia: Dico eorum baſes A E ad G O ſic ſe habere reciprocè, vt earum altitudines G M ad A I. Sint prius ipſæ G M A I ad baſes rectæ, quoniam æqualia ſunt (ex hypotheſi) ſolida, ſi baſes æquales ſint, æquales erunt vertices, & è contra, per corollarium trigeſimæ ſecundæ huius, ſicq; reciprocè, nam eandem habent rationem, cùm ſint æquales. Si verò inæquales ſint baſes, inæquales erunt vertices, & è contrà, per idem corollarium: ſint igitur inæquales baſes ac vertices, iuxta poſitum: quoniam inæquales ſunt baſes & altitudines, eſto baſis maior A E ipſa G O, ſequetur altitudinem ipſius G D (quæ ſit G M) eſſe maiorem ipſa A I, nam minor eſſe non poteſt, cùm nec etiam æqualis eſſe poſſit, eo quod maius eſſet A B (ſuper maiori baſi) ipſo G D, per trigeſimamſecundam huius. Multo igitur maius eſſet idem A B ipſo G D ſi G M minorem ipſa A I haberet altitudinem. Quare maior erit G M altitudo altitudine A I: ipſi itaque A I æqualis ponatur G C: per ſignum verò C ſecetur ſolidum G D, ducto parallelo ipſi G O plano, per corollarium 15 huius, quoniam ſub eodem vertice ſunt A B & O C parallelepipeda, ad ſe erunt vt baſes, per trigeſimamſecundam huius. Sicut igitur A E ad G O, ſic eſt ſolidum A B ad O C, ſed ſicut A B ad O C, ſic (per ſeptimam quinti) M O ad idem O C, cùm ſint A B & M O, hoc eſt D G æqualia: ſicut itaque A E ad G O baſes, ſic M O ad C O ſolida. Eſt autem ſicut M O ad C O ſolida, ſic M L ad C L baſes, per trigeſimamſecundam huius: ſicut verò M L ad C L, ſic M G ad C G rectę, per primam ſexti. Sicut itaque (per vndecimam quinti) M L ad C L, aut M O ad C O, aut A E ad G O baſes, ſic reciprocè M G ad C G (vel A I) altitudines. Ad ſecundam verò partem ſupponantur A E ad G O baſes, vt M G ad A I vertices, & vt



prius fiat C G æqualis ipſi A I, erit ideo A E ad G O ſicut G M ad G C, ſed vt A E ad G O ſic (per trigeſimam ſecundam huius) A B ad C O, ſub eodem vertice. Sicut itaque G M ad G C ſic A B ad C O ſolida, ſed ſicut G M ad G C, ſic (per primam ſexti) M L ad C L parallelogramma, ſicq; (per trigeſimam ſecundam huius) M O ad C O ſolida: ſicut itaque A B ad C O ſolida, ſic M O ad idem C O, quare æqualia erunt M O (hoc eſt G D) & A B ſolida, per nonam quinti, quorum quidem baſes A E ad G O reciprocè fuerunt altitudinibus M G ad A I proportionales. Æqualium igitur ſolidorum parallelepipedorum, &c.

MONITVM.

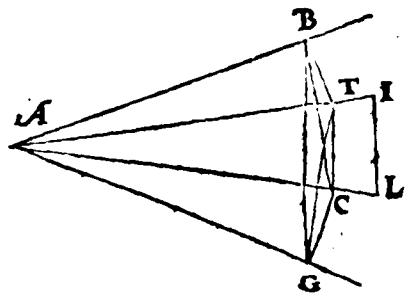
Hæc demonſtrata ſunt vbi ſtantes ſunt baſibus perpendiculares, tum idem neceſſe accidit, licet in vtramuis partem inclinentur, per 29 & 30 huius: nam ea ſolida ſolidis rectangulis eiuſdem verticis ſemper ſunt æqualia. Si itaque ſuper propoſitorum oxygoniorum vel amblygoniorum ſolidorum baſi, rectangulum ſub eadem altitudine conſtruatur ſolidum, quæ ſuper rectangulo demonſtrata ſunt, reliquis ipſis æqualibus conuenire manifeſtum erit, cùm maximæ eædem maneant baſes ac iidem vertices, quorum tantum agimus negotium.

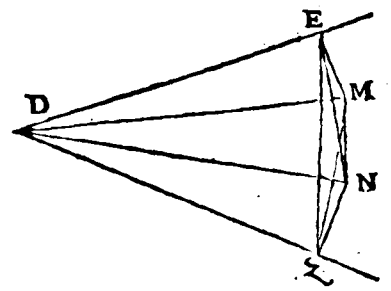
PROPOSITIO XXXV.

Si fuerint bini anguli plani rectilinei æquales, à quorum verticibus ad ſublime rectæ lineæ ductæ ſint, æquales angulos alterum alteri comprehendentes cũm lineis angulos planos continentibus, in ſublimibus autem rectis ſumpta contingentia ſigna, à quibus perpendiculares in plana eorum, qui in principio angulorum, actæ fuerint, à perpendicularibus ad angulos coniunctæ rectæ, cum ſublimibus angulos æquales comprehendent.

Sint bini plani anguli rectilinei æquales B A G & E D Z: ducantur autem ab ipſorum verticibus A & D extra eorum planum in ſublime, binæ rectæ A I D M, æquales angulos cũm ipſis A B A G & D E D Z, ſcilicet B A I angulo E D M: angulum verò I A G ipſi M D Z comprehendentes. In ſublimibus autem A I & D M, in plana ipſorum angulorum B A G & E D Z, à contingentibus earum ſignis perpendiculares mittantur I L & M N, coniunctis L A N D in planis ipſarum A B G, & D E Z: Dico angulos I A L & M D N eſſe æquales. A maiori rectarum A I D M (quæ ſit A I) minori D M æqualis abſcindatur A T, Per ſignũ verò T ipſi I L parallela fiat T C, ipſa igitur T C recta erit ad planum B A G, per octauam huius. Nam eidem plano recta fuit I L: à ſigno C ad rectas A B A G perpendiculares agantur C B C G: à ſigno verò N ad rectas D E D Z rectæ N E N Z, coniunctis B G E Z T B T G M E M Z: & quoniam recta eſt T C ad planum A B G, quod ex A T æquum eſt eis quæ ex T C C A, per 47 primi, quod verò ex

C A æquum





CA æquum eis quæ ex CG GA: quod igitur ex AT æquum eſt eis quæ ex TC CG GA: eis autem quę ex TC CG æquum eſt quod ex TG, per eandem: quod itaque ex AT æquum eſt eis quæ ex TG GA. Rectus itaque erit AGT angulus, per 48 primi. Similiter cùm quod ex AT eis quæ ex TC CA æquum ſit, quod ex CA autem eis quæ ex CB BA, ſequetur quod ex AT æquum eſſe eis quæ ex TC CB BA. Eis autem quæ ex TC CB æquum erit quod ex TB, per 47 primi. Quod igitur ex AT æquum erit eis quæ ex TB BA, & ideo rectus erit ABT angulus: haud ſecus recti oſtendentur anguli DZM & DEM eſſe, nempe recta fuit MN ad planum DEZ: quia verò binorum triangulorum ATG DMZ, duo anguli duobus ſunt æquales, ſcilicet TAG MDZ, ex hypotheſi, & AG, TD, ZM recti, vnúmque latus DM vni AT (ex hypotheſi) æquale: Reliquus angulus angulo, & latera lateribus æqualia erunt, per 26 primi: eodem argumẽto æqualia erunt, & ſimilia pariter triangula ATB DME. Rurſus quoniam æquales oſtenſæ ſunt AB AG ipſis DE DZ, & anguli BAG EDZ (ex hypotheſi) æquales, baſes BG EZ (ex quarta primi) æquales erũt, ac reliqui ABG ipſi DEZ, & AGB ipſi DEZ anguli æquales, reliquus igitur BGC reliquo EZN æquus erit. Nam bini DZN & AGC toti recti fuerunt. Eadem cauſa reliquus GBC reliquo ZEN æquus erit, cùm recti fuerint ABC DEN toti, cùm autem æquales ſint BG & EZ, triangula BCG & ENZ (per 26 primi) æqualia erunt ac æquiangula, rectæ itaque BC CG binis EN NZ æquales erunt. Quare triangula ACB DNE duo latera AB BC duobus DE EN æqualia habentia, & angulos ABC & DEN æquales, efficient baſes AC & DN æquales, per quartam primi. Quia verò AT binas poteſt AC CT, ſimiliter DM binas DN NM, cùm ſint (ex hypotheſi) recti ACT DNM anguli. Ab æqualibus AT & DM potentiis, æquales tollamus ipſarum AC & DN potentias, reliquæ TC MN potentiæ baſium erunt æquales. Et proinde TC MN rectæ æquales erunt, potentiarum quidem latera: quare (per octauam primi) triãgula TAC MDN æquales angulos TAC & MDN habebunt: ſed ipſi TAC idem eſt IAL angulus: æquales igitur ſunt anguli IAL & MDN. Si itaque fuerint bini anguli plani rectilinei æquales, à quorum verticibus ad ſublime, &c.

COROLLARIVM.

Si ad binos angulos rectilineos planos & æquales, à ſublimi ducantur bina recta æquales, æquóſque angulos cum lineis angulos planos continentibus, alterum alteri comprehendentes, à ſublimioribus earum ſignis in plana angulorum (qui in principio) demiſſæ perpendiculares æquales erunt.

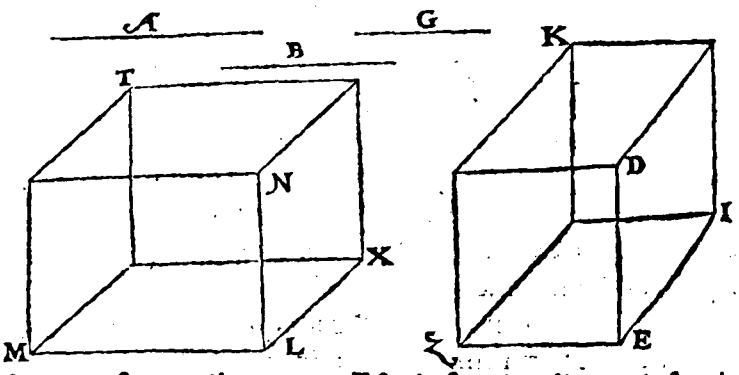
Demonſtratum fuit quod ſub hac hypotheſi rectarũm AT DM æqualium, rectæ TC MN æquales oſtenſæ fuerint. Non itaque amplioti eget expoſitione.

PROPOSITIO XXXVI.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ex ipſis tribus ſolidum parallelepipedum, æquum eſt ei quod à media fit ſolido parallelepipedo, æquilatero quidẽ, æquiangulo autẽ prædicto.

Sint

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B G, ex quibus deſcriptum ſit parallelepipedum T L, ex media verò B deſcribatur aliud K E ipſi T L æquiangulum: Dico ſolidum T L æquum eſſe ſolido K E, quoniam T L fit ex tribus A B G.

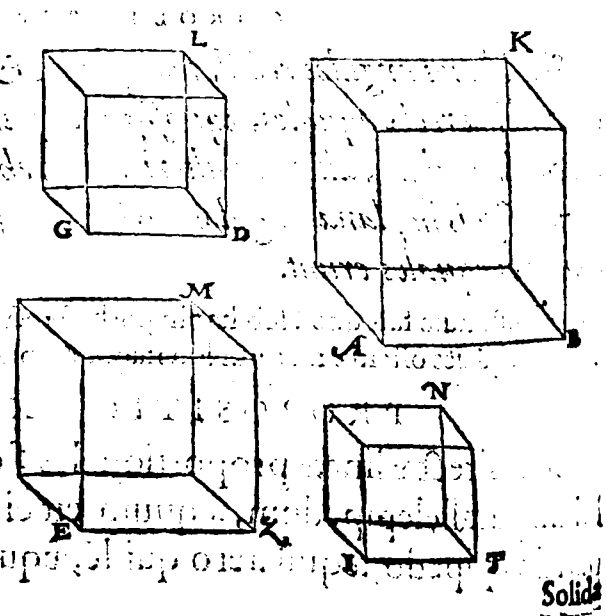


Eſto ipſi A æqualis M L, ipſi verò B æquetur N L, ipſi autem G illa X L, mediæ rurſus B æquentur latera ſingula ſolidi K E. Sint item bina T L K E ſolida ita æquiangula, vt bini eorum quique anguli ſolidi, ex ſimilibus angulis planis altero alteri componantur, vt M L N N L X M L X ipſis Z E D D E I Z E I æquentur: quoniam (ex hypotheſi) inter binas M L L X media eſt proportionalis Z E (vel E I) erit ſicut M L ad Z E, ſic Z E (vel E I reciprocè) ad L X circum æquales angulos M L X & Z E I: æqualia itaque ſunt plana M X & Z I, per 14 ſexti: quia verò ad binos angulos planos & æquales M L X & Z E I, à ſublimi ducuntur binæ rectæ æquales N L D E, æquóſque habentes angulos N L M N L X, ipſis D E Z D E I, cum lineis M L L X & Z E E I angulos planos continentibus. Sequetur (ex corollario præfato) à ſublimioribus earum ſignis N & D, in plana M X & Z I demiſſas perpendiculares æquales eſſe. Atqui eorum ſolidorum altitudo perpendiculares illæ ſunt, per quartam diffinitionem ſexti. Æquales itaque altitudines N I, D E ſuper æquis baſibus M X Z I habentia parallelepipeda T L & K E, inter ſe ſunt æqualia, per 31 huius. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ex ipſis tribus ſolidum, &c.

PROPOSITIO XXXVII.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & quæ ex ipſis ſolida parallelepipeda ſimilia ſimilitérque deſcripta proportionalia erunt, & ſi quæ ex ipſis ſolida parallelepipeda ſimilia ſimilitérque deſcripta proportionalia fuerint, & ipſæ quoque rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B ad G D vt E Z ad I T: ex quibus ſimilia ſimilitérque poſita deſcribantur parallelepipeda A K G L E M & I N: Dico ea quatuor ſolida eſſe proportionalia A K ad G L vt E M ad I N, quoniam ſimilia ſunt hęc bina ſolida ſcilicet A K ipſi G L & E M ipſi I N. Ipſa triplam habent laterum rationem, per 33 huius, ſed latera A B ad G D, eandem habent quam E Z ad I T (per hypotheſim): æqualium igitur triplæ æquales adinuicem erunt, per 15 quinti.



Solida

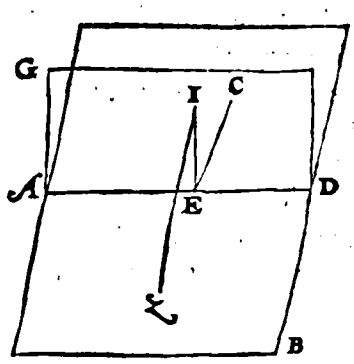
Solida itaque erunt A K ad G L, vt E M ad I N: sed iam ponantur ea similia solida proportionalia esse, quæ similiter ex lineis A B G D E Z I T descripta sunt: Dico lineas proportionales esse A B ad G D, vt E Z ad I T. Quoniam eandem habent rationem A K ad G L solida quam E M ad I N solida: quæ quidem ratio tripla est rationis A B ad G D seu E Z ad I T: rationes igitur æquales A B ad G D, seu E Z ad I T ab æqualibus solidorum rationibus, æquè multiplicatæ, æquales erunt, cùm eandem habeant earum quantitates rationem, per 15 quinti. Si itaque quatuor rectæ lineæ, &c.

MONITVM.

Poteramus demonstratione Campani prolixius vti additis binis A B & G D duabus continuè proportionalibus, similiter & ipsis E Z I T aliis, tum erit sicut A B ad quartam I T, sic solidum ex A B ad quod ex secunda G D, per corollarium 33 huius: similiter E Z ad quartam erit vt quod ex E Z prima, ad quod ex I T secunda: primæ autem ad quartas, æqua ratione proportionales sunt, per 22 quinti. Præterea animaduertendum est ea quatuor solida non sibiipsis aut eidem necessariò similia optari: sed ea tantùm quæ eadem ratione copulantur, aut simul bina antecedentia sint, aut equidem bina consequētia inter se similia esse sufficiunt. Nam si eadem copulata ratione similia tantùm fuerint, & alia rursus similia, ea in antecedentia & consequentia facilè rationum vicissitudine (ex 16 quinti) sumpta commutabuntur, quod putauimus apponendum, vt huius theorematis fœcundemus vires.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si planum ad planum rectum fuerit, à signo autem in aliquo planorum existente in alterum planum perpendicularis agatur, ea in communem planorum sectionem cadit.



Esto planum D G ad planum A B rectum, quæ sese secent in D A: A signo autem I in plano D G existente, aliqua perpendicularis in planum A B demittatur: Dico demissam in rectam D A cadere. Non enim, sed si fieri possit, cadat alibi, sitq; I Z: à signo verò I ad rectam D A perpendicularis agatur I E, per duodecimam primi: A signo autem E per planum A B eidem D A perpēdicularis excitetur E C, per vndecimam primi. Recta igitur I E ad binas E D E C recta, ad earum planum A B recta est, per quartam huius. Sed ad idem planum A B recta fuit I Z, ex hypothesi. Ab eodem itaque signo I ad idem planum A B binæ I E I Z ad rectos constituerentur, quod fieri non potest, per decimamtertiam huius. Non igitur cadit alibi quàm in A D rectam ab I signo perpendicularis. Si itaque planum ad planum rectum, &c.

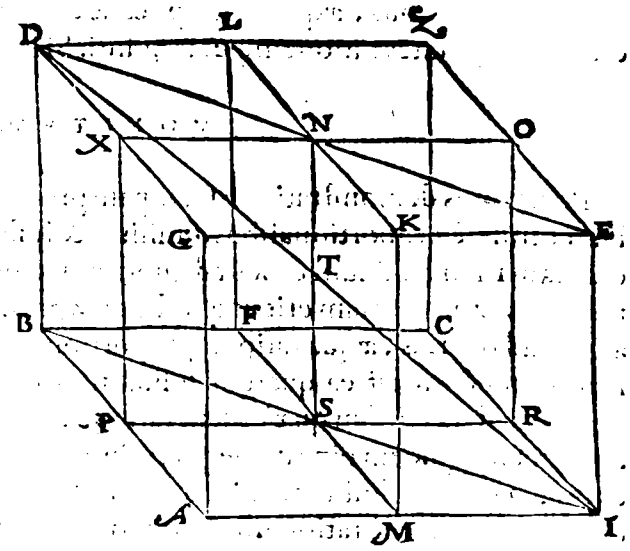
MONITVM.

Alia vsi sumus demonstratione ob Theonis breuem ac confusam & penè indemonstratam traditionem. Et insuper nec eam meminit Campanus, eò quòd modici feratur momenti, ad compendia tantùm futurarū demonstrationum vtilis existens.

PROPOSITIO XXXIX.

Si solidi parallelepipedi eorum quæ ex opposito planorum latera

latera oppoſita bifariam ſecta fuerint, extenſáque per ſectiones plana, communis planorum ſectio & ſolidi dimetiens ſeſe bifariam diſpeſcent.



Eſto ſolidum parallelepipedum AGGZ, cuius aliquorum quæ ex oppoſito planorum BI DE oppoſita latera bifariam ſecentur, in ſignis LK XO FM & PR: Supponantur autem per eas ſectiones extendi plana LK MF & XO RP, quæ ſe ſecent per rectam NS. Dimetiens verò ſolidi eſto DI, baſium autem AC GZ dimetientes ſint BI BE: Dico communem planorum ſectionem NS & dimetientem DI bifariam ſeſe ſecare. Quoniam parallelæ ſunt, & æquales DB EI, per vigeſimamquartam huius, Cum ſint latera parallelogrammorum oppoſitorum & parallelorum, Ipſæ in eodem ſunt plano, per 35 primi diffinit. Quia verò à ſignis earum coniunguntur rectæ DE BI, Ipſæ in eodem ſunt plano cum reliquis DB EI, per ſeptimam huius, & æquales parallelæ, per 33 primi. Rurſus cùm recta LK ſecet parallelogrãmum GZ bifariam, per primam ſexti, eo quòd ſecet bifariam eius baſim DZ, Ipſa ſecabit eiuſdem dimetientem DE bifariam, per coroll. 34 primi. Non alia de cauſa recta XO eandem DE ſecabit bifariam. Concurrent igitur binæ LK XO in N medio ipſius DE ſigno, ſimiliter & ipſis oppoſitæ concurrent in S. Et idcirco recta NS, bifariam ſecat binas DE BI parallelas. A quarum ſignis DN IS ductæ rectæ DI NS in eodem ſunt cum ipſis plano, per ſeptimam huius: quare ſeſe ſecabũt. Sit igitur in T. Triangulorum itaque DNT & IST duo anguli duobus ſunt æquales, per vigeſimãnonam primi, & vnum latus DN vni IS æquum oſtenſum, nempe dimidium æqualium DE BI. Latera igitur TN TS & TD TI ſunt inter ſe æqualia, per 26 primi. Tota itaque NS communis planorum ſectio, & dimetiens ſolidi, tota DI, bifariam ſeſe in T ſecant. Si igitur ſolidi parallelepipedi eorum quæ ex oppoſito planorum, &c.

COROLLARIVM.

Omne planum per centrum parallelepipedi extenſum, ſecat illud ſolidum bifariam, non autem aliud per centrum non extenſum.

Quoniam omne planum per centrum extenſum, ſecat dimetientem parallelepipedi in centro bifariam. Oſtenſum eſt enim plana ſolidum bifariam ſecantia, dimetientem ſecare bifariam in centro. Quare omnes lineæ per centrum in eo plano ductæ angulos cum dimetiente efficient. Quia verò dimetiens cadit in parallelas ſolidi rectas, oppoſita latera deſcribentes, ſiue in parallela ſolidi plana, quæ ſcilicet angulos ad extrema diametri efficiunt. Triangula à dimetiente & recta in eo plano per centrum extenſa, & ea quæ per plana oppoſita ſolidi præfatas coniungit rectas, ſemper æqualia & æquiangula erunt, per 26 primi. Nam quæ per plana ſolidi oppoſitæ rectæ, æquales angulos ad dimetientem efficiunt, cùm ſint parallelæ, per decimamſextam huius. Sed & anguli qui ad centrum æquales ſunt, nempe ad verticem, per decimamquintam primi, vnúmque latus vni lateri, ſcilicet media dimetiens,

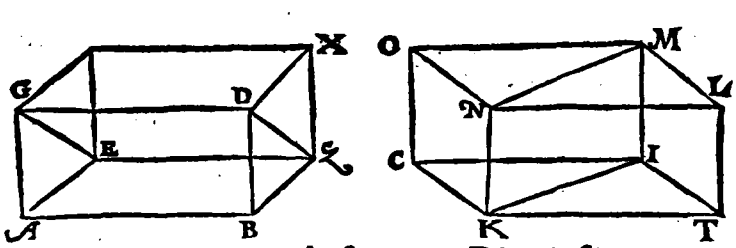
metiens. Triangula igitur à quauis recta (in plano quod per centrum parallelepipedi per idem centrum extensa) & eius dimetiente, ad solidi extrema terminata, æqualia & æquilatera, ac æquiangula erunt, per vigesimamsextam primi, vnde sequitur planum illud secans, æquales (ad partes oppositas) basium solidi partes efficere, ac æquiangulas, & proinde similes & numero æquales ac magnitudine. Quare solidi illius binæ sectiones solidæ, æquales erunt, & similes, per octauam diffinitionem huius. Quod autem aliud planum ab eo quod per centrum extenditur bifariam solidum non secet, Patet, si plano per centrum non extenso parallelum per centrum extendatur, per corollarium decimæquintæ huius. Cùm enim id quod per centrum describitur bifariam secet, manifestum est in altera æqualium solidi partium, reliquum describi planum parallelum bifariam secanti. Cùm igitur totum sua parte maius existat, necesse est alteram harum sectionum dimidio solidi esse minorem, & ideo reliquam maiorem. Omne itaque planum per centrum parallelepipedi extensum, &c.

MONITVM.

Dissunctiuam huic theoremati contulit Theon, vt illud in cubo censeat intelligi, similiter & Campanus in cubo tantùm illud explicat, licet sub parallelepipedo Cubum concipiamus: nos itaque disciplinæ genus sectantes, dicemus parallelepipedum in solidis eadem frui dignitate, qua parallelogrammum in planis: nam vt hoc quadrata, rectangula, rhombos, & rhomboides continet, sic illud Cubos, solida altero longiora rectangula, aliáque non rectangula, quorum stantes in eisdem sunt rectis, & reliqua quorum stantes in eisdem rectis non consistunt, quorum singulorum oppositæ bases & latera semper æqualia, similia & parallela existent, vnde illud solidum inter regulares enumerabimus figuras, tamen non inter perfectas, óbque eius regularem constructionem corollarium præfatum (sequuturis vtile) eidem coniunximus.

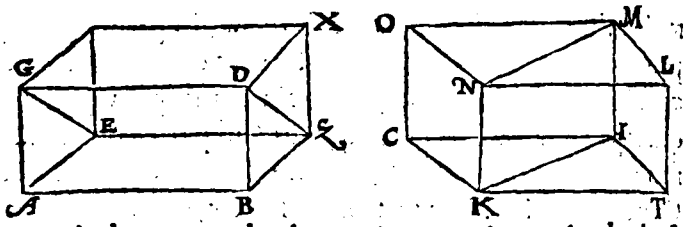
PROPOSITIO XL.

Si fuerint bina Prismata sub æquis altitudinibus, & alterum quidem basim parallelogrammum habuerit, alterum autem triangulum, duplum verò fuerit parallelogrammum ipsius trianguli, bina Prismata æqualia erunt.



Sint bina Prismata scilicet super basi parallelogramma AEZBGD, & TIKLMN super basi triangula, sub æquis verò altitudinibus AG & TL, sit autem trianguli TIK dupla parallelogramma basis AEZB: Dico ipsa AEZBGD & TIKLMN Prismata æqualia esse adinuicem: compleantur solida AX & TO parallelepipeda, ductis inquam parallelis rectis & planis oppositis, per 31 primi, & corollarium 15 huius, vt sæpius docuimus, scilicet basi AZ similis & æqualis ponatur GX, ipsi verò AD similis sit EX. Planum igitur erit BDZX basis, cùm parallelæ ponantur BZ & DX, & igitur eas coniungentes, per septimam huius BDZX DZ in eodem erunt plano. Duplum igitur erit BX trianguli BDZ, & proinde solidum AX parallelepipedum (ex binis similibus & æquis Prismatis compositum) duplum

erit ipſius AEZ BGD Priſmatis. Similiter eodémque argumento parallelepipedum erit TO ex binis æquis & ſimilibus Priſmatis TIKLMN & ICKMON compoſitum, & proinde eorum duplum erit: quoniam enim dupla eſt baſis AZ trianguli KIT, ex hypotheſi, cuius duplum eſt parallelogrammum CT, per trigeſimamquartam primi, ipſæ itaque AZ & CT parallelepipedorum AX & TO baſes, ſunt æquales, per ſextam communem ſententiam: Sed (ex hypotheſi) altitudines ſunt æquales. Parallelepipeda igitur AX & TO erunt adinuicem æqualia, per trigeſimamprimam huius: quare Priſmata AEZBGD & TIKLMN (ipſorum AX & TO dimidia) æqualia inter ſe erunt, per ſeptimam communem ſententiam. Si itaque fuerint bina Priſmata ſub æquis altitudinibus, & alterum, &c.



COROLLARIVM.

Ex prælibatis fit manifeſtum Priſmata ac ſolida ſub binis polygonis æquis, ſimilibus, & parallelis, reliquis verò parallelogrammis comprehenſa, ad ſeinuicem poſſe eiſdem conferri legibus, ac parallelepipeda.

Cùm enim (ex hac & coroll. ſecundo vigeſimæquintæ huius) conſtet, omne parallelepipedum in bina ſimilia & æqualia reſolui Priſmata, eiuſdem cum ipſo verticis: Super eadem verò aut dimidia eiuſdem baſi, eiſdémque ipſius ſolidi lateribus terminata, & ſimilis rationis: Dicemus Priſmata ſuorum parellelepipedorum ſequi diſciplinam, quoniam ſi Priſma inſtar ſui ſolidi ſecandum (ex vigeſimaquinta huius) fuerit, docuimus corollariis eiuſdem, idem ſequi quod in parallelepipedo proponitur, æquè in priſmate, vt in ſolido propoſito, à polygonis præfatis comprehenſo. Si autem ex vigeſimaſeptima deſcribendũ offeramus, Priſma ex data recta dato ſimile optatum ſequi cernimus, deſcripto ex dato Priſmate duplo ſolido, illíque ex vigeſimaſeptima ſimile ſolidum aliud ex data recta dato, cuius dimidium Priſma erit optatum propoſito ſimile, ex data recta conſtructum. Ad vigeſimamoctauam autem cùm Priſmatis oppoſita plana diagonios non ſuſcipiant, hanc Priſmata ſectionem non patiuntur, ſed (per eandem vigeſimamoctauam) æqualia inter ſe corroborantur illa eſſe Priſmata, ac ſimilia quæ eiuſdem parallelepipedi ſunt dimidia. Quod autem ait vigeſimanona & tribus ſequẽtibus, ſub eadem altitudine, ſupérque æquis aut eiſdem baſibus, eſſe æqualia parallelepipeda, aut in ratione baſium, vt per has Priſmata ſibi inuicem conferamus, illud tantùm poſtulabimus, Priſmata ſcilicet ſuper parallelogrammis ſimul, aut triangulis ſimul baſibus ad ſe comparari. Nam eadem manente ſublimitate, eadem eſt æqualium comparatio: dimidiarum verò baſium eadem eſt inter ſe quæ totarum affinitas. Priſmata igitur dimidia ſolida, eandem rationem quam tota habentia, ſub eodem vertice, baſes baſium dimidias, in eadem ratione eſſe totarum concludent. Si igitur tota ſolida ſint in ratione baſium totarum, dimidia eorum (Priſmata) erunt in ratione aut totarum, ſi parallelogrammę fuerint baſes, aut dimidiarum, ſi triangulæ exiſtant, quæ ſemper eſt eadem (per 15 quinti): ex trigeſima tertia autem inferemus, quia parallelepipeda (Priſmatum dupla) triplam habent ſimilium laterum rationem, ſequetur Priſmata dimidia (eandem quam tota rationem habentia per 15 quinti), ac eadem latera ſolidorum habentia ſuorum ſimilium laterum triplam habere rationem. Ex trigeſimaquarta verò concludemus, cùm Priſmata in ſuorum parallelepi-

pedo

pedorum ratione exiſtant, baſes verò Priſmatum (ſimul trigonæ aut ſimul quadrangulæ) in baſium polygonorum ratione, altitudines autem ſemper æquales efficiant, Priſmatum baſes & duplicium ſolidorum eiuſdem rationis baſes quoque ac vertices, eandem habere inter ſe quam ſolidorum duplicium baſes affinitatem. Nam ſi ſolidorum æqualium baſes reciprocæ fuerint verticibus, & eorum ſolidorum dimidia Priſmata ſuas baſes verticibus reciprocas habebunt. Ex trigeſimaſexta autem dicemus, Si tres rectæ proportionales fuerint, ex ipſis tribus factus Priſmatis angulus duplo ipſi parallelepipedo communis, efficit Priſma æquum ei quod à media ſimilem ſuſcipit angulum, æquis lateribus compoſitum: nam commune Priſmati & parallelepipedo illud vnum ſupponemus, tres ſcilicet linearum proportionalium dimenſiones ſimilem angulum conſtituere, ei qui fit ex media ter ſumpta. Tum ſi Priſmatis ſolidus angulus, ex tribus illis rectis conſtitutus fuerit, dupli eius parallelepipedi ex eiſdem ſimilis conſtituetur angulus. Sequetur itaque Priſmata ſemper ipſis parallelepipedis dimidia inter ſe æquiangula veluti & eorum duplicia neceſſariò eſſe, licet non æquilatera, & ea proinde æqualium ſolidorum dimidia, inter ſe æqualia eſſe, ei quod ſcilicet à media proportionali angulum fecit, æquum ei quod à tribus proportionalibus poſitum ſuſcepit. Ex trigeſimaſeptima idem inferemus quod de parallelepipedis ad Priſmata, cùm enim ex datis lineis ſimiliter deſcripta Priſmata ſint, ſimilium parallelepipedorum ſimiliterque deſcriptorum dimidia, ſequetur ea Priſmata duplicium ſolidorum inter ſe ſeruare rationem: & ideo ſi lineæ ea deſcribentes proportionales fuerint, ea proportionalia eſſe, ac è conuerſo, iuxta huius 37 legem, cùm autem 39 oppoſita ſolidi plana parallelogramma ſupponat, ipſiq; ſolido dimetientem, quam non ſuſcipit Priſma, à priſmatũ hanc diſciplina recedere cenſebimus. Cæterùm vt ſolidorum binis polygonis ſimilibus, æqualibus, ac parallelis, reliquis verò parallelogrammis comprehenſorum naturam, à Priſmatum ex quibus componuntur (vt corollar. ſecundo vigeſimæquintæ huius) oriri doceamus natura: Dicemus (ex vigeſimaſeptima huius) deſcripto parallelepipedo, eius dimidium Priſma deſcriptum eſſe, deſcriptione verò Priſmatum componetur ſimile ſolidum dato ex Priſmatis compoſito, quæ verò 29, 30, 31 & 32 poſtulant theoremata in huiuſmodi ſolidis, ſuper baſibus polygonis intelligenda ſunt. Similiter & in 34: quod autem optat 33, in quibuſuis ſimilis rationis lateribus exigit, veluti & 37, quæ ſimilis rationis latera proportionalia eſſe poſtulat. Hæc nempe ſolida, quæ Campanus lateratas dicit columnas, ex Priſmatis compoſita ſimilia ac ſimiliter deſcripta, ſuorum ſimilium Priſmatum ſequuntur doctrinam, & proinde parallelepipedorum Priſmatum duplicium. Reliqua verò ex Priſmatum conferentia, ex quibus hæc componi poſcimus ſolida, facilè conſequetur quiſque ex præfatorum intelligentia pauco ſudore.

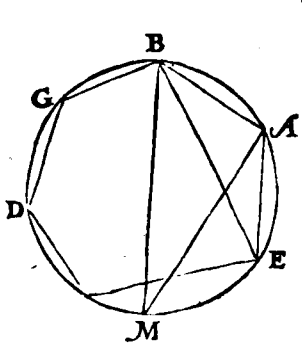
VNDECIMI LIBRI FINIS.

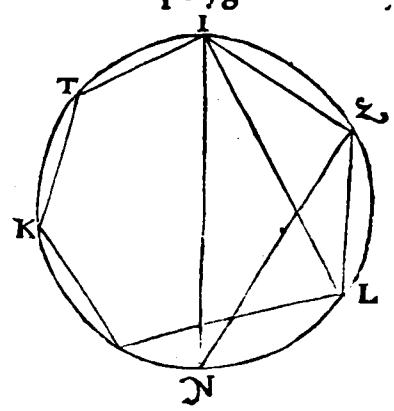
EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER DVODECIMVS.

PROPOSITIO I.

QVæ in circulis multangulæ ſimiles figuræ, adinuicem ſe habent ſicut quæ ex dimetientibus quadrata.

In circulis ABD & ZIK deſcriptæ ſint multangulæ figuræ ABGDE & ZITKL, ſimiles ſimilitérque poſitæ, circulorum verò dimetientes ſint BM IN: Dico eſſe polygonum ABGDE ad ZITKL ſicut quadratum ex BM ad quod ex IN. Coniungantur AM BE ZN IL rectæ: quoniam hæc polygona ſunt ſimilia, circum æquales angulos triangulorum BAE IZL latera IZ ZL lateribus BA AE ſunt proportionalia: quare (per ſextam ſexti) æquiangula erunt triangula, & ideo anguli AEB ZLI erunt æquales: ſed ipſis AEB ZLI æquales ſunt AMB ZNI, per 21 tertij in eodem ſegmento: Ipſi itaque AMB ZNI anguli adinuicem æquales erunt, ſed & BAM. IZN æquales ſunt, nempe recti, per trigeſimamprimam tertij. Reliquus itaque ABM reliquo ZIN æquus erit, cùm tres vtriuſque trianguli binis rectis æquentur, per corollarium primum 32 primi. Æquiangulorum igitur triangulorum AMB ZNI, proportionalia ſunt AB ad ZI, vt BM ad IN latera, per quartã ſexti: ſed polygonorum ABGDE ad ZITKL ratio, dupla eſt rationis AB ad ZI, per vigeſimam ſexti. Ipſa itaque polygonorum ratio erit dupla rationis BM ad IN, rationi AB ad ZI æqualis. Atqui quadratorum ex BM & IN ratio, dupla eſt rationis earundem BM ad IN ſuorum laterum, per eandem 20 ſexti: Polygonorum itaque & quadratorum inter ſe rationes (eiuſdem rationis dimetientium BM ad IN duplæ) eædem adinuicem erunt. Polygonum igitur ABGDE ad ZITKL erit ſicut quadratum ex BM ad quod ex IN. Quæ itaque in circulis, &c.

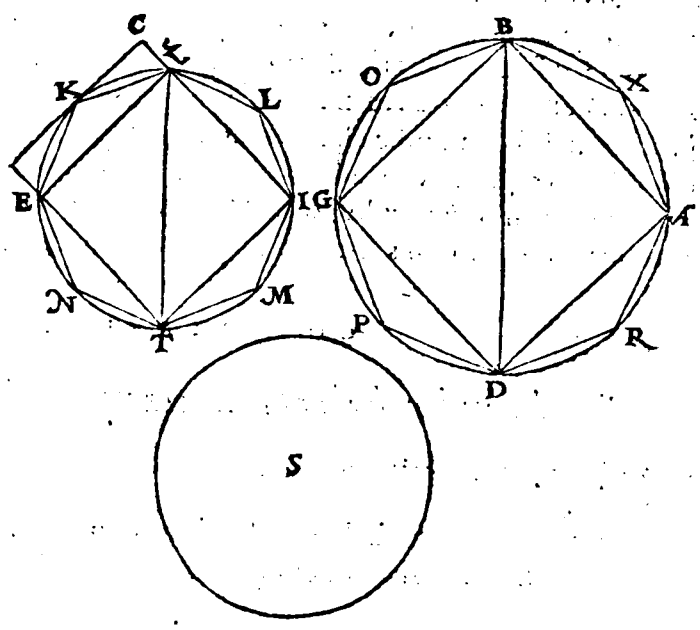




PROPOSITIO II.

Circuli ſeſe adinuicem habent, ſicut quæ ex dimetientibus quadrata.

Sint



Sint bini circuli A B G D & E Z I T, eorum autem dimetientes sint B D & Z T: Dico esse A B G D ad E Z I T circulos, sicut quod ex B D ad quod ex Z T dimetientibus quadrata. Quod si A B G D ad aliũ E Z I T eã non habeat quam quadrata rationem, idem A B G D eam quadratorum rationem ad aliam magnitudinem ipso quouis alio E Z I T maiorem, vel minorem habebit: habeat itaque prius ad minorem, (si fieri possit) quæ sit area S, quoniam positus est E Z I T circulus (ex hypothesi) maior ea area S. Auferatur ab ipsõ E Z I T circulo maius quàm dimidium, & rursus maius quàm dimidium, per primam decimi, donec relinquatur minus residuum excessu quo E Z I T ipsam S excedit, applicato, scilicet ipsi E Z I T circulo, quadrato T E Z I, quod quidem maius dimidio circuli tollit, cùm sit dimidium circunscripti quadrati, rursúsque super quadrati lateribus isosceli a describantur, sectis bifariam arcubus, vt E K Z, manifestum est triangulum E K Z maius quàm dimidium sectionis E Z K circuli tollere. Nam rectanguli E C dimidium tollit (per 41 primi) triangulum E K Z, quod quidem rectangulum sectionem continet. Relinquatur itaque tandẽ magnitudo minor præfato excessu, quæ sit sectiones illæ circuli, quibus circulus excedit polygonum E K Z L I M T N. Si igitur circulus E Z I T minori excessu excedat polygonum E K Z L sibi inscriptum, eo quod excedit aream S, maius erit polygonum E K Z L area S: ipsi itaque polygono E K Z L simile circulo A B G D inscribatur (per 18 sexti circa B D dimetientem circuli A B G D. Quoniam (ex hypothesi) fuit circulus A B G D ad aream S, sicut quadratum ex B D ad id quod ex T Z: sed sicut quod ex B D ad quod ex T Z, sic est polygonum A X B O ad simile E K Z L. per præfatam. Sicut igitur, per vndecimam quinti, polygonum A X B O ad simile E K Z L, sic A B G D circulus ad aream S, & vicissim: ideo sicut polygonum A X B O ad A B G D circulum, sic polygonum E K Z L ad aream S, per 4 quinti. Minus autem est polygonum A X B O, circulo A B G D continente: minus igitur erit polygonum E K Z L area S, per 14 quinti: Sed & maius ostensum est, quod fieri non potest. Non igitur habet circulus A B G D rationem quadratorum quæ ex B D T Z, ad magnitudinem aliquam minorem circulo E Z I T. Dico rursus neque ad maiorẽ: quod si fieri posse credatur, esto S maior circulo E Z I T, sitq; circulus A B G D ad S, vt quod ex B D ad quod ex T Z. Erit igitur conuersim area S ad A B G D circulum, vt quod ex T Z ad quod ex B D per corollar. quartæ quinti. Quia verò posita est S area circulo E Z I T maior, fiat sicut area S ad A B G D circulum, sic E Z I T circulus ad quandam aream, hæc area (per 14 quinti) minor erit circulo A B G D. Nam prima S, tertia E Z I T maior fuit posita, circulus igitur E Z I T erit ad areã minorem reliquo circulo A B G D, sicut S ad A B G D, hoc est, sicut quod ex T Z ad quod ex B D quadrata. Aequi iam ostendimus prima parte circulum quemuis non habere rationem quadratorum quæ ex dimetientibus, ad magnitudinem reliquo quouis circulo minorem, nunc autem eam habere, quod fieri non potest. Non hac de causa subsistent hypotheses, circulum scilicet ad aliam magnitudinem alio circulo maiorem vel minorem rationem habere quàm dimetientium quadrata. Eam itaque quam dimetientium

quadrata rationem habebit circulus, ad magnitudinem reliquo circulo æqualem, & proinde ad ipsum circulum, per septimam quinti. Circuli igitur sese adinuicem habent, &c. Posset lucidiùs demonstrari secunda pars, vbi ponitur s maior circulo Z T, per descriptum circa Z T polygonium, circulo s minorem, instar ostensionis primæ partis. Nam simile circa B D descripto, per 18 sexti, esset polygonium ad polygonium, vt quod ex B D ad quod ex Z T, per corollar. 20, sexti. Et proinde, vt circulus B D, ad circulũ s, ex hypoth. Maius autem polygonium esset circulo B D, minus verò Polygonium s, circulo s, quod inconueniret ex 14, quinti.

COROLLARIVM I.

Circuli eandem habent rationem quam in eis similia similitérque descripta polygona.

Nam polygona eam habere ostendimus quam ex dimetientibus quadrata habent, quam similiter habent & circuli.

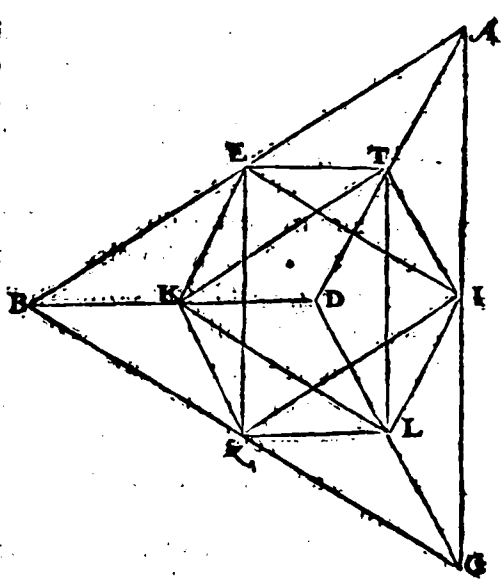
COROLLARIVM II.

Similes circulorum sectiones sunt ad se, vt quæ ex subtendentibus similiter descripta plana.

Nam ea & habent vt quæ ex dimetientibus quadrata, siue quæuis polygona.

PROPOSITIO III.

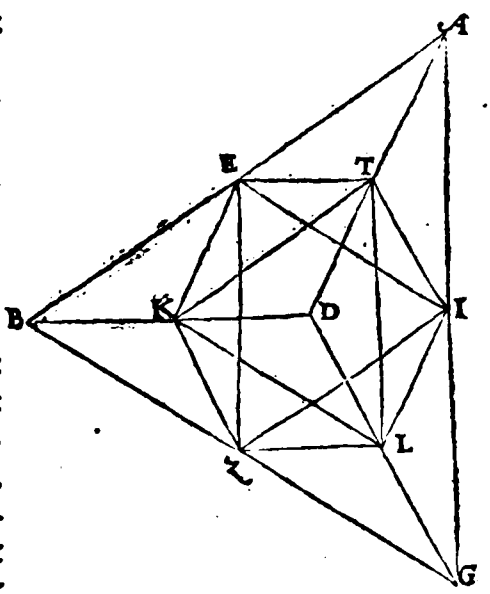
Omnis Pyramis triangularem basim habens, diuiditur in binas pyramides æquales, similes verò toti & adinuicem. Et in bina Prismata æqualia, & ipsa bina prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.



Sit aliqua pyramis A B G D, cuius basis sit A B G triangularis, vertex autem D: Dico A B G D pyramidem posse secari in binas pyramides æquas & similes toti, & adinuicem, ac in bina æqualia prismata, totius pyramidis dimidio maiora. Secentur bifariam sex pyramidis latera in E Z I T K L, coniunctis E Z Z I I E T K K L L T, & insuper I T T E E K K Z Z L L I. Quoniam omnia pyramidis latera bifariam secta sunt, ac ideo proportionaliter. Sequetur rectas trianguli T K I parallelas esse basibus A B B G G A, per 2 sexti. Similia itaque erunt, scilicet T D K toti A D B, & K D I toti B D G, ac I D T toti G D A per corollarium secundæ sexti. Quia verò parallelæ fuerunt rectæ trianguli T K L rectis trianguli A B G, Illæ æquales angulos comprehendent, per decimam vndecimi. Pyramis itaque T K L D sub similibus triangulis, & multitudine æqualibus

toti

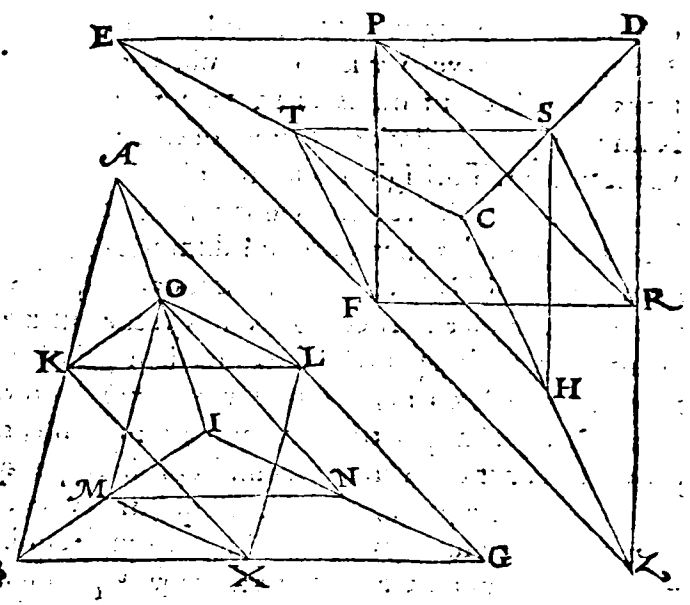
toti Pyramidi A B G D continetur, ſcilicet A B G A B D D G A D G B, ipſis T K L T K D D L T D L K. Similes itaque ſunt A B G D & T K L D pyramides, per ſeptimam diffini. vndecimi. Similiter oſtẽdemus toti A B G D reliquam A E I T ſimilem eſſe. Nam triangulo A G D ſimile eſt A I T. Triangulo verò A B D ſimile eſt A E T, & ipſi A B G illud A E I, & reliquum E T I reliquo B D G: Nam latera ſunt lateribus dimidia & parallela. Et proinde, vt oſtendimus in reliqua T K L D, totidem erũt & ſimilia. Ipſius verò T K L D pyramidis baſibus æqualia erunt huius A E I T triangula. Nam vtraque ſub dimidiis totius continentur lateribus. Toti igitur A B G D ſimiles, & adinuicem æquales & ſimiles ſunt T K L D & A E I T pyramides, per octauam diffinitionem vndecimi. Quia verò parallelæ ſunt & æquales B E K T & Z I oſtenſæ, nempe ipſius A B dimidiæ, eas coniungentes rectæ B K K Z Z B rectis E T T I I E æquales erunt & parallelæ, per trigeſimamtertiam primi. Parallelogramma itaque erunt B E T K B E I Z & K T I Z, per trigeſimamſextã diffinit. Quia verò eorũ oppoſita latera ſunt æqualia, per trigeſimamquartam primi, triangula E T I & B K Z æquiangula erunt, per octauam eiuſdem. Et proinde (per quartam eiuſdem) æqualia. Ac inſuper parallela plana, per decimamquintam vndecimi. Priſma igitur erit ſolidum B K Z E T I, per vndecimam diffinitionem vndecimi. Similiter cùm triangulorum T K L & I Z G latera, lateribus ſint æqualia & parallela, nempe dimidia laterum trianguli A B G, manifeſtum erit parallelogramma eſſe, G Z K L, Z K T I & G L T I, per trigeſimamtertiam primi, & trigeſimamſextam diffinit. eiuſdem. Priſma igitur erit totum K L T Z G I ſolidum, per vndecimam diffinit. vndecimi, ſub ipſis parallelogrammis & triangulis T K L I Z G comprehenſum. Tota itaque pyramis A B G D in binas pyramides T K L D & A E I T, ac bina priſmata B K Z E T I & K L T Z G I ſecta fuit. Cùm autem Priſmatis B K Z E T I pars ſit pyramis B E Z K, Priſmatis verò K L T Z G I ſit pars alia Z I G L pyramis, quæ quidem reliquis quæ in principio binis Pyramidibus T K L D A E I T æquales, & ſimiles exiſtunt, cùm componantur ex æquis ipſarum lateribus, ac proinde ſimilibus triangulis, nempe dimidiis totius A B G D Pyramidis lateribus: Sequetur bina Priſmata (ipſis Pyramidibus maiora) plus totius A B G D Pyramidis dimidio continere. Omnis itaque Pyramis triangularem, &c.



PROPOSITIO IIII.

Si fuerint binæ Pyramides triangulares baſes habentes ſub eadem altitudine: diuiſa verò fuerit vtraque ipſarum in binas Pyramides, adinuicem æquales, & ſimiles toti, & in bina Priſmata æqualia, & in vtraque factarum Pyramidum, is modus ſemper ſeruetur. Erit ſicut vnius Pyramidis baſis ad alterius Pyramidis baſim, ſic quæ in vna Pyramide Priſmata omnia ad ea quæ in altera Pyramide æquemulta Priſmata.

Proponantur binæ Pyramides eiuſdem altitudinis ABGI & DEZC, quarum vtraque iuxta præcedentis methodum diuiſa ſit in binas Pyramides æquales, ſimiles verò toti & adinuicem, ac in bina Priſmata æqualia. Inſuper rurſus factæ Pyramides ſimiliter ſubdiuidantur quotieſlibet: Dico eſſe ſicut ABG baſim ad DEZ baſim, ſic omnia Priſmata à Pyramide ABGI ſumpta, ad omnia æquemulta à Pyramide DEZC ſumpta, ſimili ſecta modo, ſicq; ſingula ad ſingula. Quoniã in hac Pyramidũ ſectione diuidũtur omnia pyramidũ latera biſariã, ex præfata, erit tota BG ad dimidiam GX vt tota EZ ad dimidiam ZF, per 15 quinti, & ab eis itaq; rectilinea ſimilia (per 22 ſexti) proportionalia erunt, ABG ad LXG ſicut DEZ ad RFZ, ſunt enim ſimilia, vt proxima patuit, ABG & LXG, ſicut & DEZ ipſi RFZ, viciſſim igitur (per decimamſextam quinti) erit ABG ad DEZ ſicut LXG ad RFZ triangula, ſicut autem baſes LXG ad RFZ, ſic quæ ſuper ipſis Priſmata OMNLXG ad STHRFZ, per corollarium quadrageſimæ vndecimi. Nam ſunt ipſa Priſmata ſub eadem altitudine dimidiarum Pyramidum, per præfatam, quæ Pyramides ſunt (ex hypotheſi) eiuſdem altitudinis: ſicut itaque baſis ABG ad baſim DEZ, ſic eſt Priſma OMNLXG ad Priſma STHRFZ, per vndecimam quinti, Sícque reliqua Priſmata KOLBMX ad PSRETF. Nam bina OMNLXG & KOLBMX ſunt æqualia, veluti STHRFZ ipſi PSRETF, ex præcedente: quare erunt ad ſe ſingula Priſmata ſicut Pyramidum baſes, per vndecimam quinti, ſicútque omnia ad æquemulta omnia ſimul ſumpta Priſmata, per duodecimam quinti. Cùm autem iam fuerit baſis ABG ad baſim DEZ, ſicut LXG ad RFZ, ſic erit QMN ad STH: ſunt enim æqualia & ſimilia Priſmatum oppoſita triangula ipſis LXG & RFZ: Sícque erit AKL ad DPR, ſimilia ipſis LXG RFZ, vtlacius patuit præfata: ſed ſicut baſes ad baſes, ſic oſtendimus eſſe Pyramidum Priſmata ad ſeinuicem. Sicut itaque baſes OMN vel AKL ad STH vel DPR, ſic erunt ad ſe Priſmata ex Pyramidibus OMNI vel AKLO, ad Priſmata ex Pyramidibus STHC vel DPRS ſimili methodo ſumptæ ſunt enim ſub eodem vertice, per conſtructionem, nempe dimidia totarum Pyramidum altitudine: ſicut igitur totarum baſes ABG ad DEZ, ſic omnia vel ſingula ad ſe erunt Priſmata. Si itaque fuerint binæ Pyramides triangulares baſes, &c.



MONITVM.

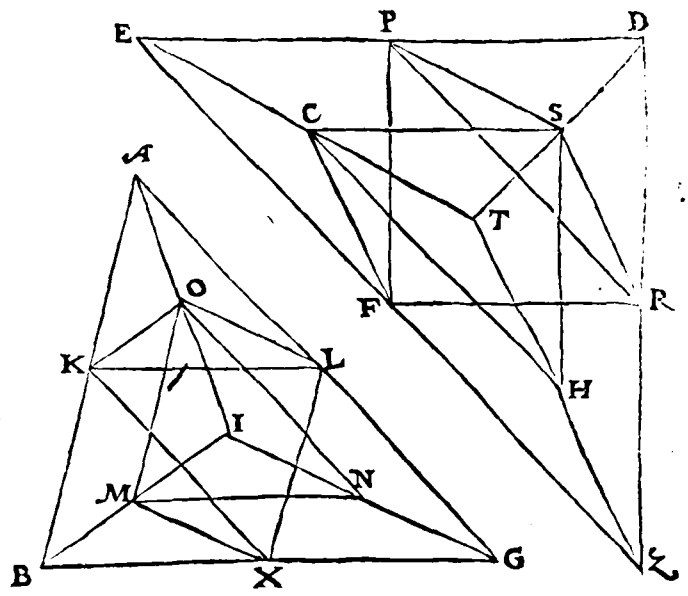
Abſtulimus circa huius theorematis finem has voces (æquemultiplicia) à Zamberto extra ſenſum relatas, vt à Græco (æquemulta) diceremus: nos autem vtrique ſatisfacere cupientes, aliàs diximus (ſimili ſectione producta) eò quòd ſimilis ſecandi forma æquam præ ſe ferat multitudinem partium, & inſuper ſimiles ſectionum eſſe cogat figuras. Quia verò hypotheſis in vtraque Pyramide hunc modum ſeruare iubet, poſuimus æquemulta quæ ſufficiunt. Is modus quidem, ad omnia ſimili ſectione producenda, æquemulta verò, ad æquam vtrarumque multitudinem arcendam.

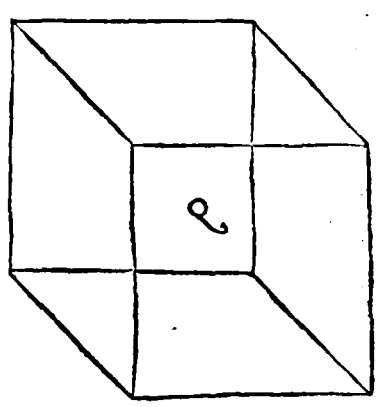
PRO

PROPOSITIO V.

Sub eodem faſtigio Pyramides, triangularéſque baſes habentes, adinuicem ſeſe habent ſicut baſes.

Supponantur binæ pyramides ABGI & DEZT triangulares baſes ABG & DEZ habentes, ſub eadem altitudine: Dico eſſe ABGI ad DEZT pyramides, ſicut ABG ad DEZ baſes, ſimili ſecundæ huius argumento, ſi pyramides ABGI & DEZT non habeant rationem baſium ABG ad DEZ, habeat aliqua earum ſcilicet ABGI rationem baſium ABG ad DEZ, ad aliquod ſolidum Q, erit igitur ſolidum Q maius vel minus reliqua pyramide DEZT: eſto prius minus pyramide DEZT ſolidum Q. A pyramide autẽ DEZT auferatur pluſquam dimidium, & reliqui pluſquam dimidium (per tertiam huius) ſcilicet ſecta pyramide in binas pyramides, & bina priſmata dimidio pyramidis maiora, & rurſus binis pyramidibus hac ſecandi lege diuiſis. Relinquetur tandem (per primam decimi) magnitudo minor exceſſu, quo pyramis DEZT excedit ſolidum Q. Reliquum itaque ipſius pyramidis DEZT, ſcilicet ea priſmata ab eadem frequentius detracta ſimul ſumpta, maiora erunt ſolido Q. Quæ priſmata ſint (ex hypotheſi) ea quæ inter triangula ECF PSR & FRZ CSH continẽtur: ſecenturq; ſimiliter pyramis ABGI in priſmata BMXKOL ac XLGMON, per eandem tertiã huius. Quoniam enim eſt ſicut baſis ABG ad baſim DEZ, ſic (per hypotheſim) pyramis ABGI ad ſolidum Q, ſicq; (per quartam huius) omnia priſmata pyramidis ABGI, ad omnia ſimili ſectione producta ex pyramide DEZT: erit igitur (per vndecimam quinti) ſicut priſmata pyramidis ABGI ad priſmata pyramidis DEZT, ſic pyramis ABGI ad ſolidum Q. Viciſſim itaque erit (ex decimaſexta quinti) ſicut priſmata pyramidis ABGI ad pyramidem ABGI, ſic priſmata pyramidis DEZT ad ſolidum Q, ſed priſmata pyramidis ABGI ipſa pyramide continente minora ſunt. Priſmata igitur pyramidis DEZT ſolido Q (per decimamquartam quinti) minora erunt, ſed & maiora oſtenſa ſunt, quod fieri non poteſt. Non habet igitur aliqua pyramidum ABGI vel DEZT rationem, quam habent baſes ad magnitudinem minorem reliqua pyramide: Dico inſuper quòd neque ad maiorem: ſi enim ſupponeretur Q ſolidum maius aliqua pyramide ſcilicet ipſa DEZT, haberétque reliqua pyramis ABGI ad ipſum Q rationem quam ABG baſis ad DEZ baſim: eſſet conuertendo (per corollarium quartæ quinti) ſolidum Q ad pyramidem ABGI, ſicut baſis DEZ ad ABG: quia verò maius eſt Q ſolidum, pyramide DEZT, ex hypotheſi, erit ſicut Q ſolidum ad ABGI pyramidem, ſic DEZT pyramis ad magnitudinem minorem pyramide ABGI, per decimamquartã quinti, ſed ſicut Q ad ABGI pyramidem, ſic fuit baſis DEZ ad ABG baſim. Sicut igitur pyramis

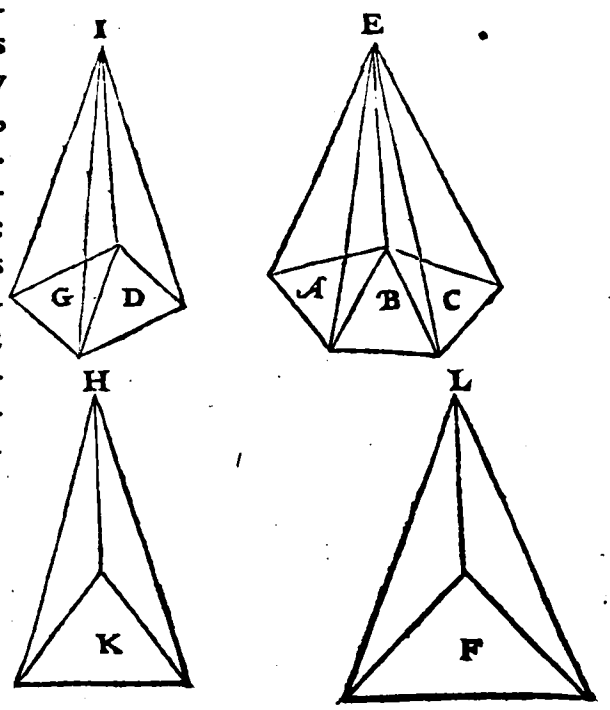




ramis DEZT ad magnitudinem reliqua pyramide ABGI minorem, ſic erit baſis DEZ ad ABG baſim, per vndecimam quinti. Aliqua igitur pyramidum ABGI vel DEZT rationem habuit quam baſes, ad magnitudinem reliqua pyramide minorem: ſed & non habere oſtenſum eſt, quod eſſet abſurdum: non igitur habet aliqua pyramis rationem baſium ad magnitudinem reliqua pyramide maiorem vel minorem, eam igitur habet ad æqualem reliquæ pyramidi, & proinde ad pyramidem ipſam per ſeptimam quinti. Sub eodem itaque faſtigio pyramides triangularéſque baſes habentes, &c.

PROPOSITIO VI.

Sub eadem altitudine Pyramides exiſtentes, multangulaſque baſes habentes, adinuicem ſeſe habent ſicuti baſes.



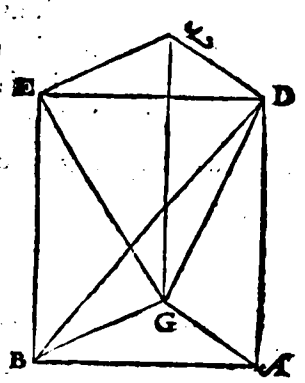
Sint ſub eadem altitudine pyramides ABCE & GDI habentes baſes polygonas ABC & GD: Dico eſſe pyramidem ABCE ad pyramidẽ GDI, ſicut baſis ABC eſt ad baſim GD. Deſcribantur (per vigeſimamquintam ſexti) triangula F & K, ipſis ABC & GD baſibus æqualia: ſuper ipſis porrò F & K pyramides ſupponantur ſub eodem vertice ipſarũ ABCE & GDI, demiſſa in baſes æqua perpendiculari, per vndecimam vndecimi. Quoniam ſicut ſingula triangula AB & C ſunt ad triangulum F, ſic ſunt ſingulæ pyramides AE BE & CE ad pyramidem FL, per quintam huius. Sed ſingula ſimul ſumpta triangula ABC totum F componunt, ex conſtructione. Singulæ igitur pyramides AE BE CE ſimul ſumptæ pyramidem FL componunt. Similiter ſigulæ GI & DI pyramides totam KH pyramidem component. Cùm autem ſit vt F ad K baſes, ſic FL ad KH pyramides, per præfatam erit vt ABC ad GD baſes, ipſis F & K æquales, ſic ABCE ad GDI pyramides, ipſis FL & KH æquales. Sub eadem igitur altitudine pyramides exiſtentes multangulas, &c.

PROPOSITIO VII.

Omne Priſma diuiditur in tres Pyramides ſibi inuicẽ æquas, triangulares baſes habentes.

Proponatur priſma, cuius baſes oppoſitæ ſint triangula ABG DZE: Dico ipſum priſma ſecari in tres pyramides inuicem æquales, triangulares baſes habentes. Ducantur rectæ BD GD GE. Quoniam parallelogrammum eſt AB ED, per vndecimam diffinitionem vndecimi, æqualia ſunt ABD & BDE triangula, per 34 primi. Quare (per quintam huius) æquales erunt pyramides ABDG EBDG, ſuper æquis baſibus ABD BDE & eodem vertice G comprehenſæ. Rurſus quia parallelogrammum

mum eſt B G Z E, æquales erunt baſes B E G & E G Z. Quare pyramis ſuper baſi E G Z, vertice verò D, æqua erit pyramidi ſuper baſi B E G & eodem vertice D conſtitutæ, per quintam huius. Atqui pyramis, cuius baſis eſt B E G, eadem eſt ei quę fuit ſuper baſi B D E vertice verò G contenta, nempe ſub quatuor triangulis B D E D E G D B G & E B G. Cui quidem pyramidi binæ reliquæ oſtẽſæ ſunt æquales, & triangulares baſes habentes totum complent priſma: tres igitur pyramides A B D G E B D G E G Z D æquales, triangularéſque baſes habentes totum efficiunt A B G D Z E priſma. Omne itaque priſma diuiditur in tres pyramides, &c.



COROLLARIVM I.

Priſma quotlibet triplum eſt Pyramidis eandem triangularem baſim habentis, & æquale faſtigium.

Vt patuit hoc theoremate, cùm diuidatur in tres æquas, quarum binæ ſunt in eadem baſi & altitudine. Si verò Priſma ſuper parallelogramma baſi conſtituatur, pyramis verò in dimidia eius baſi & æqua altitudine. Rurſus tertia pars erit ipſius priſmatis. Nam patuit (quadrageſima vndecimi) priſma, cuius parallelogramma baſis dupla eſt triangulæ alterius priſmatis, & æqua ſublimitas, eſſe reliquo priſmati æquale, vnde ſequetur illatio proxima.

COROLLARIVM II.

Si plura Priſmata eiuſdem verticis trigonas baſes ſuper eodem plano in vnum polygonum componant, Pyramidem ſuper ea baſi & altitudine tertiam eſſe eius ſolidi partem, ſub cunctis ſimul ſumptis Priſmatis comprehenſi.

Nam ſingula priſmata ſingularum ſuper ſua baſi & altitudine pyramidum tripla, concludunt omnia omnium tripla, per 12 quinti, eſſe: quare parallelepipeda tripla ſunt pyramidum eiuſdem baſis & verticis, eo quod bina continent priſmata.

COROLLARIVM III.

Si bina Priſmata ſub eadem altitudine baſes habeant ſimul trigonas, aut ſimul tetragonas, ipſa Priſmata ad ſeinuicem ſunt vt baſes.

Cùm enim ea priſmata ſint æquemultiplicia pyramidum ſuper eiſdem baſibus, & altitudine, quæ quidem ſunt vt baſes, & ipſa ſequetur eſſe vt baſes. Sunt enim tripla pyramidum ſuper baſi trigona, per præcedens corollarium.

COROLLARIVM IIII.

Pyramidum ſuper eadem baſi tetragona, & eodem vertice Priſmata ſunt ſeſquialtera.

Nam

Nam pyramis illa binas pyramides ſuper baſi trigona eiuſdem priſmatis conſtitutas continet, cùm dixerimus iam illud priſma triplum eſſe pyramidis ſuper dimidia eius tetragona baſi conſtitutæ, cuius eſt dupla reliqua ſuper tota baſi poſita, per ſextam huius. Priſma itaq; tres: tetragona verò pyramis, duas tantùm illarum pyramidum capit. Quare tetragoniæ priſma ſeſquialterum eſt.

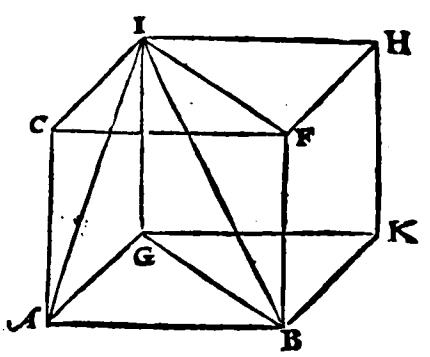
COROLLARIVM V.

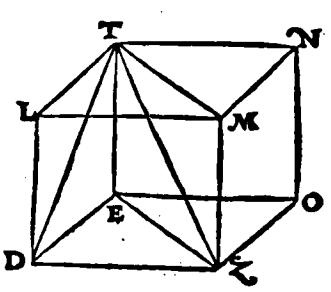
Quare ſimiliter concludemus ſolida ſecundo corollario memorata (quæ lateratas vocat Campanus columnas) ad ſe eſſe vt baſes polygona, cùm ſub eodem contineantur vertice.

Nam ſunt in ratione pyramidum ſiue priſmatum, quæ ſuper eiſdem baſibus & vertice, hoc eſt, in ratione baſium. Quare ad ea, ſimiliter priſmata eiuſdem verticis erunt vt baſes, eo quod ea laterata in priſmata eiuſdem verticis reducantur, cùm ſecantur baſes oppoſitæ in ſimilia triangula, per vigeſimam ſexti. Super quibus triangulis priſmata, ad ſe ſunt vt baſes.

PROPOSITIO VIII.

Similes Pyramides triangulares baſes habentes, in tripla ſunt ratione laterum eiuſdem rationis.





Proponantur ſimiles Pyramides triangulares baſes habentes ABGI & DZET, quarum ſimilis rationis latera ſint AB & DZ: Dico pyramides ABGI & DZET triplã habere laterum AB ad DZ rationem. Super baſi ABG pyramidis ABCI, & vertice I conſtituatur priſma, ductis ipſi IG parallelis ACBF, quod ſit AGBCIF, cui addatur aliud priſma perfecto parallelepipedo AFGH ex binis priſmatis compoſito, per corollarium quadrageſimæ vndecimi. Similiter pyramidi DZET ſuper baſi DZE fiat priſma DEZLTM, & parallelepipedũ DMEN: quoniam ſimilia ſunt parallelepipeda AFGH & DMEN, cùm ſint ex ſimilibus (ex hypotheſi) pyramidibus ſimiliter conſtructa, ipſa erunt in tripla ratione laterum AB ad DZ ſimilis rationis, per 33 vndecimi: ſed ipſa ſunt priſmatum AGBCIE & DEZLTM æquemultiplicia, nempe dupla, per coroll. 40 vndecimi: ipſa itaque priſmata parallelepipedorum habent rationem, per 15 quinti. Atqui eadem priſmata pyramidum ABGI & DZET ſunt rurſus æquemultiplicia, nempe tripla, per præcedentis corollarium. Ipſæ itaque pyramides priſmatum habẽt rationem, per eandem 15 quinti, & ideo (per 11 quinti) pyramides rationem parallelepipedorum AFGH & DMEN habebunt, quæ fuit tripla laterum AB ad DZ. Pyramides itaque ABGI ad DZET ſunt in tripla ratione laterum AB ad DZ. Similes igitur pyramides triangulares baſes habentes, &c.

COROL

COROLLARIVM.

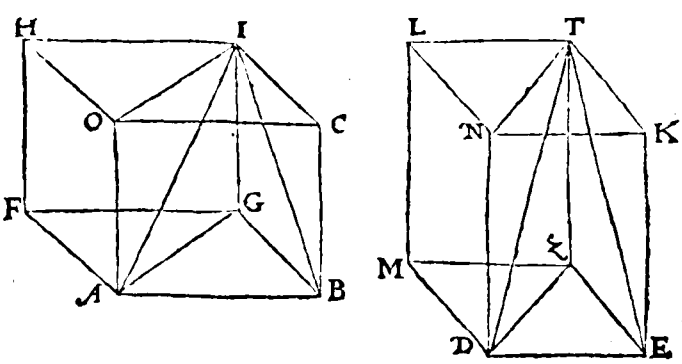
Pyramides ſimiles, polygonas baſes habentes, triplam habent rationem ſimilis rationis laterum.

Sectis enim ſimilibus polygonis, ſimiliter & in ſimilia triangula & æqualia numero, per vigeſimam ſexti, erunt ſingulæ ſectæ ſingulis ſimiles & in tripla ratione ſumptorum laterum, per hoc theorema. Quare polygonæ (trigonarũ æquemultiplices, nempe vt baſes baſium per ſextam huius) eandem habebunt ipſis rationem, per 15 quinti, & ideo triplam laterum ſimilis rationis: ſimiliter priſmata ac lateratæ columnæ, ſuper baſibus & earum pyramidum faſtigio (cùm ſint ipſarum pyramidum æquemultiplicia, nempe tripla per corollarium 7 huius) eandem ipſis pyramidibus habebunt (ex 15 quinti) rationem, & igitur triplam ſimilium laterum.

PROPOSITIO IX.

Æqualium Pyramidum triangulares baſes habentium, reciprocæ ſunt baſes altitudinibus, Et pyramides triangulares baſes habentes, quarum reciprocæ ſunt baſes verticibus, ſunt æquales.

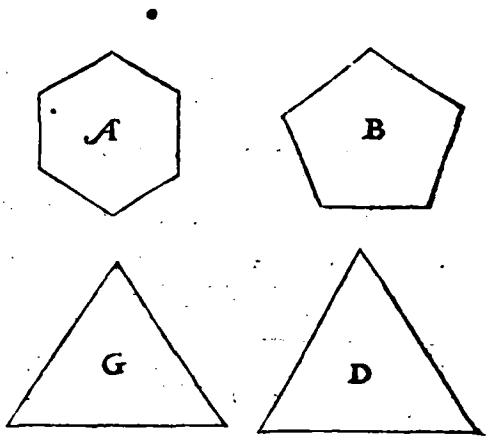
Exponantur binæ æquales pyramides triangulares baſes habentes ABGI & DEZT, quarum baſes ſint AGB DZE, vertices verò rectæ GI & ZT: Dico eſſe baſes AGB ad DZE reciprocè, ſicut ZT ad GI vertices. Perficiantur ex pyramidibus priſmata AGBOIC & DZENTK, ex ipſis verò parallelepipeda BOGH & ENZL, vt proxima diximus. Ipſa igitur BOGH & ENZL ſunt pyramidũ ſeſcupla, nempe priſmatum triplorum dupla. Æqualium itaque pyramidum ſeſcupla æqualia erunt, per commun. ſententiam. Sed & baſes habent in ratione baſium pyramidum, cùm ſint earum duplæ, ſcilicet FB ipſius AGB baſis, & ME ipſius DZE, per 34 primi. Altitudines verò GI & ZT communes habent ſolida cum pyramidibus. Sed & verticibus reciprocas habent baſes ſolida, per 34 vndecimi. pyramides igitur ſolidis eandem rationem baſium habentes, & communes altitudines, baſes habebunt verticibus reciprocas. Erit igitur baſis AGB ad DZE (pyramidum ABGI & DEZT) ſicut ZT vertex ad GI verticem reciprocè, per ſecundam diffinitionem ſexti. Ad ſecundam verò partem ponamus eſſe reciprocè AGB ad DZE baſes, vt ZT ad GI vertices: Dico pyramides ABGI & DEZT eſſe æquales. Cùm enim (per conſtructionem) duplæ ſint baſes FB ME parallelepipedorum, baſibus AGB DZE pyramidum, Erunt in ratione ſolidorum & pyramidum baſes. Quia verò ſolidorum & pyramidum æqua ſunt faſtigia, ſingula ſingulorum eandem habebunt rationem. Sed (ex hypotheſi) pyramidum reciprocæ ſiunt baſes verticibus. Et igitur ſolidorum ſimilis rationis baſes & faſtigia, reciprocè forent verticibus. Quæ itaque ſolida ſunt (per 34 vndecimi) æqualia. Sed & pyramidum ABGI & DEZT æquemultiplicia ſunt ea BH & EL ſolida, nempe vt oſtendimus ſeſcupla. Pyramides æqualium æquemultiplicium partes ſunt



tes sunt igitur adinuicem æquales, per decimamquintam quinti. Æqualium itaque pyramidum triangulares baſes, &c.

COROLLARIVM.

Hinc aſſequimur Pyramides polygonas æquales, reciprocas habere verticibus baſes.

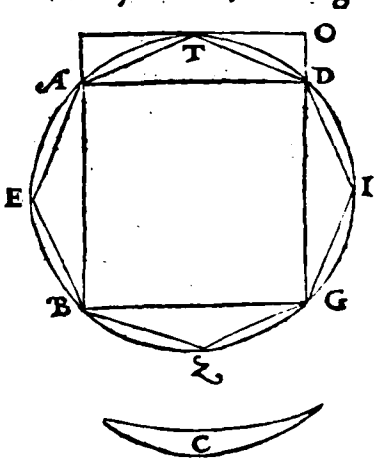


Sint Pyramides polygonæ æquales ſuper A & B: Dico earum baſes A & B reciprocas eſſe verticibus. Deſcribantur ipſis baſibus A & B (per vigeſimamquintã ſexti) æqualia triangula G & D, ſuper quibus pyramides æquè altæ ipſis A & B conſtruantur. Pyramides igitur G & D ſuper æquis baſibus & verticibus ipſis A & B erunt æquales, per ſextã huius. Ipſæ igitur reciprocas habẽt baſes G ad D verticibus D ad G, per hoc theorema. Sed ſicut G ad D baſes, ſic A ad B baſes erunt, cùm ſint æquales. Et ſicut ipſarum D ad G vertices, ſic ipſarum B ad A vertices, qui ſimiliter ſunt æquales. Sicut igitur A ad B baſes, ſic erunt reciprocè ipſarum B ad A pyramidum vertices, per vndecimam quinti. Idẽ ſequitur in priſmate & laterata columna, vt iam latius corollario quadrageſimæ vndecimi diximus. Sequuntur etenim illa (ſuper oppoſitis baſibus polygonis exiſtentia) pyramidum ſiue parallelepipedorum rationem, maximè cùm ſint æquemultiplicium partes, aut partium æquemultiplicia.

PROPOSITIO X.

Omnis Conus Cylindri tertia pars eſt eandem eidem baſim habentis, & æquale faſtigium.

Proponatur conus habens ad baſim circulum A B G D. Atque cylindrus eandem baſim habens & altitudinem: Dico conum cylindri eſſe tertiam partem, ſiue cylindrum coni triplum eſſe. Ab impoſſibile enim, Si cylindrus non ſit triplus coni, aut maior, aut triplo minor erit. Eſto prius triplo coni maior cylindrus, hac magnitudine C, fiat autem in circulo A B G D quadratum A B G D, ſectis bifariam reſiduis ſectionibus circuli in E Z I T ſignis, & coniunctis A E E B B Z Z G G I I D D T T A, rurſúſque ſectis reſiduis ſectionibus bifariam, ductis ſubtenſis quotieſlibet. Cùm autem quadratum A B G D ſit dimidium ſibi circunſcripti quadrati, per quadrageſimamſeptimam primi. Circunſcriptum verò maius ſit circulo A B G D, ſequetur quadratum A B G D plus dimidio circuli A B G D continere. Similiter quia triangulum A T D eſt dimidium parallelogrammi A O, per quadrageſimam primam primi, ſequetur idem A T D maius eſſe dimidio ſectionis A T D ipſo parallelogrammo A O minoris. Idem oſtendemus, infinitè triangula Iſoſcelia ſuper polygoni baſibus, quotcunque in ſectione deſcripta, dimidio ſectionis eſſe maiora. Quia verò oſtendimus



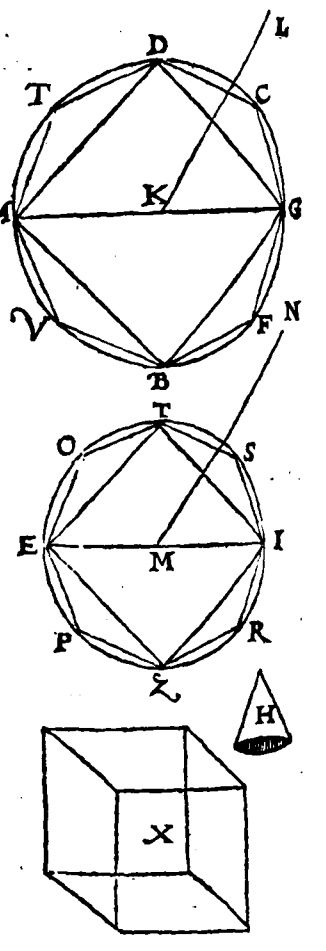
dimus (corollario ſecundo ſeptimæ huius) priſmata ac laterata ſolida (eiuſdem verticis)ad ſe eſſe vt baſes,concludemus parallelepipedum ſuper quadrato A B G D, maius dimidio auferre à cylindro qui ſuper circulo A B G D ſit ſub eodem vertice, eo quod auferat dimidium parallelepipedi ſuper quadrato circulum continente deſcripti,vt patuit. Similiter reliquæ ſectionis cylindri (quæ ſuper ſectione A T D) maius dimidio dicemus auferre priſma, quod ſuper triangulo A T D conſtituitur, ſub cylindri altitudine, eo quod præcisè dimidium auferat parallelepipedi ſuper parallelogrammo A O ſub eodem cylindri vertice deſcripti. Sícque infinitè plus dimidio reliquatum quotuis ſectionum cylindri tollere poterimus. Auferatur itaque à cylindro circuli A B G D ea arte plus dimidio,& reliqui item plus dimidio. Relinquatúrque tandem (ex prima decimi) magnitudo minor ipſo exceſſu c,quo cylindrus triplum coni exceſſit,ex hypotheſi, eáque ſit ſectiones cylindri conſtitutæ ſuper ſectionibus circuli, ſcilicet A E E B B Z Z G G I I D D T T A. Cùm autem hæ relictæ ſint exceſſu c minores,ſequetur illud quod ſupereſt lateratum ſolidum,quod ſuper polygono A T D I G,maius eſſe triplo coni conſtituti ſuper circulo A B G D, cùm cylindrus excedat lateratum ſolidum minus ipſa c, qua cylindrus exceſſit triplum coni. Multo itaque maius erit idem lateratum ſolidum triplo pyramidis lateratæ,ſuper eodem polygono & coni altitudine deſcriptæ : nam ea pyramis cono includitur , quod fieri non poteſt. Nam eiuſdem pyramidis triplum oſtenſum eſt idem lateratum ſolidum, per corollarium ſecundum ſeptimæ huius. Non igitur erit cylindrus triplo ſui coni maior: *Dico quòd neque minor.* Siquidem fieri poſſe credatur ſuper eodem typo. *Eſto minor* cylindrus triplo ſui coni aliqua magnitudine c,cùm enim oſtenſum ſit pyramides veluti priſmata aut laterata ſolida,ad ſe eſſe vt baſes ſub eadem altitudine,ex ſexta & corollario ſeptimæ huius: De cono (vt de cylindro diximus) tollatur pluſquam dimidium, & reliqui pluſquam dimidium:relinquatur verò (per primam decimi) ex triplo coni,minor magnitudo ipſa c,quæ ſit ſectiones coni ſuper baſibus quæ circa multangulas pyramides. Triplæ itaque illæ pyramides cylindro ſunt maiores, cùm plus deficiat cylindrus à triplo coni, quàm hæ triplæ pyramides à cono ablatæ, nempe ipſa c. Sed triplæ pyramides ſolido ſuper ipſarum polygono & vertice ſunt æquales,per corollarium ſeptimæ huius. Solidum itaque lateratum,quod ſuper pyramidum polygono & ſub cylindri altitudine eſt conſtitutum, cylindro ipſum continente maius erit,contra 9 commun ſentent.quod eſt abſurdiſſimum. Nam ſolidum illud ipſi cylindro incluſum eſt. Non itaque minor erit cylindrus triplo ſui coni, neque maior, vt patuit.Erit itaque ipſi triplo æqualis. Omnis igitur conus cylindri tertia pars eſt eandem eidem, &c.

PROPOSITIO XI.

Sub eodem faſtigio exiſtentes Coni & Cylindri, adinuicem ſeſe habent ſicut baſes.

Proponantur ſub eodem faſtigio coni vel cylindri, ſcilicet ſuper baſibus A B G D & E Z I T,æquali verò faſtigio K L ipſi M N: *Dico* conum & cylindrum ſuper baſi A B G D ſic eſſe ad conum & cylindrum ſuper E Z I T,ſingula ſingulis,vt baſis A B G D ad baſim E Z I T. quòd ſi conorum aliquis,ſcilicet A B G D L, non habeat rationem quam baſes ad reliquum E Z I T N, habeat eam baſium rationem ad aliam magnitudinem X,quæ aut maior aut minor cono E Z I T N erit. Sit itaque prius X minor cono E Z I T N magnitudine H, à cono autem E Z I N tollatur ſæpius maius quàm dimidium,vt proxima iam demonſtrauimus,relinquatúrque tandem(per primam decimi) magnitudo minor ipſa H magnitudine. Quæ quidem ſit ſectiones coni

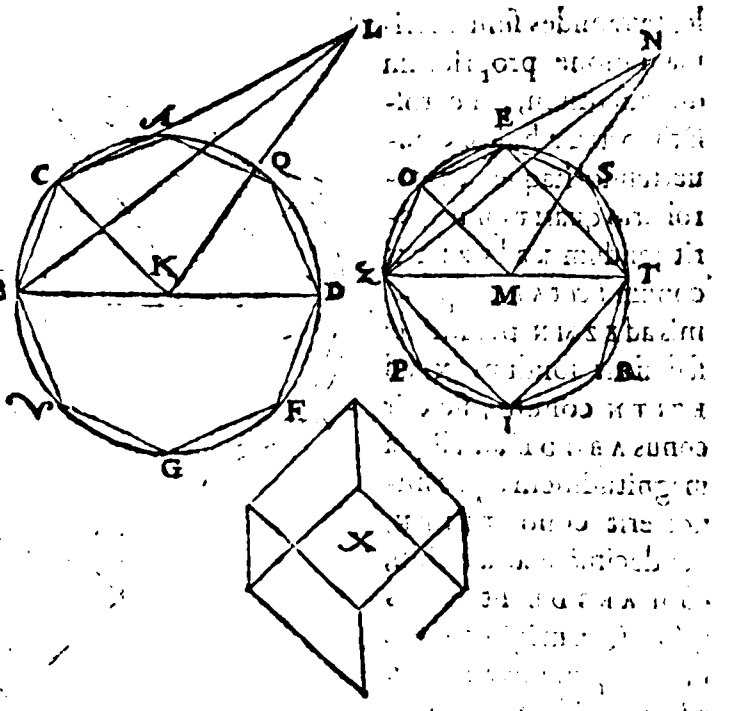
ſuper baſibus ſectionũ EP PZ ZR RI IS ST TO OB & vertice MN contentę. Pyramis itaque ſub polygona baſi & MN vertice, maior erit ipſa X: nã conus EZITN plus excedit ipſam X quàm pyramidem TEZRIN, circulo itaque ABGD ſimile polygonũ ipſi EPZRISTO fiat ad datam AG, per decimamoctauam ſexti, ſitq́ue AVBFGCDT: cùm autem ſit (ex hypotheſi) conus ABGDL ad X, ſicut baſis ABGD ad baſim EZIT, ſicut verò baſes fuerunt, ſic pyramis DABFGL ad pyramidem TEZRIN, per ſextam huius. Sicut igitur, per vndecimam quinti, conus ABGDL ad X, ſic erit pyramis DABFGL ad pyramidem TEZRIN, & ideo viciſſim conus ABGDL ad pyramidem DABFGL ſic erit, vt X ad TEZRIN pyramidem, per decimamſextam quinti, atqui minor eſt pyramis DABFGL cono ABGDL circunſcripto. Minor itaque erit (per 14 quinti) pyramis TEZRIN ipſa X magnitudine, ſed & maior oſtenſa fuit, quod fieri non poteſt. Conus igitur aliquis rationem non habet ad magnitudinem reliquo cono minorem, quam habent baſes: Dico inſuper quod neque ad reliquo cono maiorem: quod ſi fieri poſſe credamus, habeat conus AKL ad magnitudinem X reliquo cono EMN maiorem, eam quam habent baſes ABGD ad EZIT rationem, erit conuertendo (per corollar. quartæ quinti) X ad AKL conum, vt EZIT baſis ad ABGD baſim, cùm autem EMN conus ſit minor ipſa X, per hypotheſim, erit ſicut X ad AKL conum, ſic EMN conus ad magnitudinem aliquam quæ minor erit cono AKL, per decimamquartam quinti. Sicut autem X ad conum AKL ſic (per hypotheſim) baſes EZIT ad ABGD fuerunt, ſicut igitur baſes EZIT ad ABGD, ſic erit conus EMN ad magnitudinem reliquo AKL minorem, quod fieri non poſſe patuit prima huius parte. Non itaque habet aliquis conus ad magnitudinem reliquo maiorem, aut minorem, rationem quam baſes habent: eam igitur rationem habebit quilibet conus, ad reliquo cono æqualem, & proinde ad ipſum conum, per ſeptimam quinti. Cùm autem conorum ſint æque multiplices (ſcilicet triplices) cylindri ſuper eadem baſi & altitudine, per decimam huius, qui quidem (ex decimaquinta quinti) eandem igitur ipſis conis habent rationem, ſequetur cylindros ſimiliter ſub eadem baſi & vertice, rationem baſium ſequi & conos. Sub eodem itaque faſtigio exiſtentes coni & cylindri, &c.



PROPOSITIO XII.

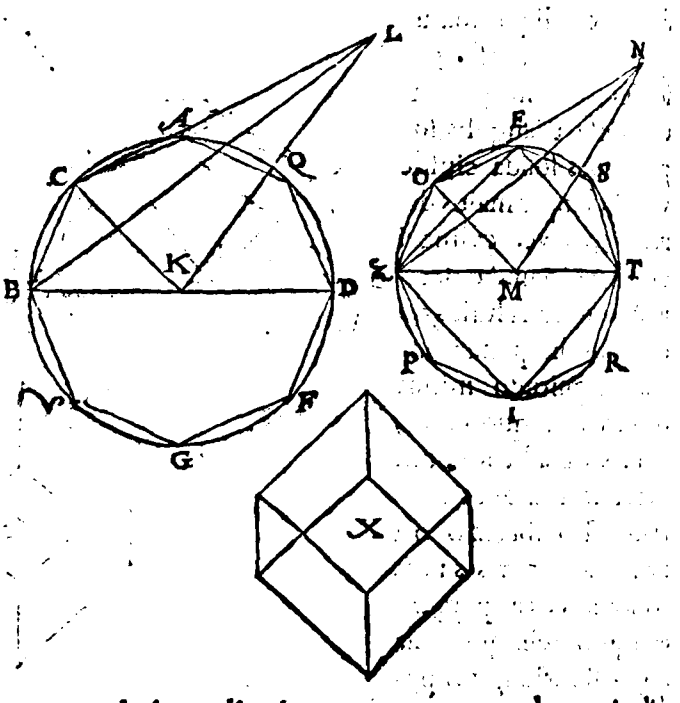
Similes Coni & Cylindri, ad ſeinuicem in tripla ſunt ratione dimetientium quæ in baſibus.

Proponantur ſimiles coni vel cylindri, is cuius baſis ABGD, vertex verò KL, & is cuius baſis eſt, EZIT, vertex verò MN, ſintq́; baſiũ dimetientes BD & ZT, centra verò K & M: Dico eos conos vel cylindros ABGDKL & EZITMN, triplam rationem habere rationis dimetientium BD ad ZT: quod ſi aliud eſſe opinemur, habeat aliquis conorum ABGDL ad aliquam magnitudinem, triplam rationem quam habent BD ad ZT baſium dimetientes: ea quippe magnitudo aut maior reliquo cono EZITN, aut equidem minor erit: eſto prius minor, ſitq́; ea X ſolidum. Quia maior eſt conus EZITN ſolido X, auferatur ab ipſo EZITN cono maius quàm dimidium,



dium, & reliqui maius quàm dimidiũ, deſcripto in eius baſi coni quadrato, & rurſus triangulis, ſuper quibus ſolida eiuſdẽ verticis, ſemper maius dimidio coni vel cylindri tollunt, vt ſecunda, decima, & vndecima huius docuimus. Relinquatur tandem magnitudo minor eo exceſſu, quo conus EZITN excedit ſolidum X, qui ſit ſectiones coni ſuper ſectionibus, EOZ ZPPIIRRTTSSE, & vertice N circa pyramidem quam relinquunt deſcriptæ: Relicta igitur pyramis EOZPN, maior erit ſolido X, nam conus plus excedit ſolidum X quàm pyramidem. Deſcribatur itaque (per decimamoctauam ſexti) circulo ABGD ſimile polygonum ipſi EOZPIRTS, ſitq; ACBVGFDQ, coniunctis CK LK LB LC & OM NM MZ NO rectis, quoniam ſimiles ſunt figuræ, erit BC ad OZ vt BD ad ZT, per primam diffinitionem ſexti, & BD ad ZT vt KL ad MN, per vigeſimã diffinitionem vndecimi, cùm ſimiles ſint coni: ſicut itaque KL ad MN ſic KB ad MZ (quæ ex centro), & anguli BKL ZMN recti, per decimam ſextam diffinitionem vndecimi. Æquiangula itaque ſunt BKL & ZMN triangula, per ſextam ſexti. Sicut igitur KL ad MN, ſic (per quartam ſexti) LB ad NZ: fuit autem BC ad OZ vt BD ad ZT, & BD ad ZT vt KL ad MN, & KL ad MN vt LB ad NZ. Æqua igitur ratione erit BC ad BL, ſic ZO ad ZN, per vigeſimam ſecundam quinti: ipſis autem LB & NZ æquales ſunt LC & NO, æqualium triangulorum ſimiles ſubtenſæ, per decimamſextam diffinitionem vndecimi: Sicut igitur LB ad NZ ſic LC ad NO: triãgula itaque LBC & NZO ſunt ſimilia, per primam diffinitionem ſexti, cùm ſint æquiangula, per ſextã ſexti. Pyramides igitur ſuper ſimilibus baſium ABGD & EZIT polygonis ſimilibus & totidem triangulis deſcriptæ, ſimiles erunt, per ſeptimam diffinitionem vndecimi: pyramis itaque ABKL triplam habet rationem ad pyramidem EZMN, quam BC ad ZO, & proinde quam BD ad ZT baſium dimetientes, per corollarium octauæ huius: ſed eandem habet (ex hypotheſi) conus ABGDL, ad ſolidum X, per corollarium octauæ huius: erit igitur conus ABGDL, ad ſolidum X, ſicut pyramis ABKL ad pyramidem EZMN, per vndecimam quinti, & viciſſim erit conus ABGDL ad pyramidem ABKL ſicut ſolidum X ad pyramidem EZMN: atqui maior eſt conus ABGDL pyramide ABKL, totum ſcilicet ſua parte. Maius itaque erit ſolidum X pyramide EZMN: ſed & minus oſtenſum fuit, quod eſſet abſurdum. Simile fiet argumentum conuertendo, ſi conferatur conus EZITN magnitudini minori ipſo reliquo ABGDL cono. Nam nihil refert an maior conus minori, an minor maiori conferatur, ſed quouis cuilibet (hac hypotheſi ſumpta) collato, ſemper conſurgit abſurdum, vt monito proximo dicemus: nullus igitur conus habet ad magnitudinem alio quouis ſimili cono minorem, triplam rationem quam habent baſium dimetientes inter ſe: Dico præterea quòd neque ad maiorem alio cono: ſit igitur (hac hypotheſi) ſolidum X maius aliquo cono, ſcilicet hoc ABGDL: ſit autem conus EZITN ad ſolidum X in tripla ratione dimetientium, ZT ad BD, erit igitur ſicut EZITN conus ad ſolidum X, ſic EZMN pyramis ad ABKL pyramidem: nam ſimi-

les pyramides ſunt in tripla ratione propriorum dimetientium, per corollariũ octauæ huius. Conuertendo itaque (ex corollario quartæ quinti) erit ſolidum X ad EZITN conum, ſicut ABKL pyramis ad EZMN pyramidẽ: ſed ſicut ſolidum X ad EZITN conum, ſic erit conus ABGDL ad aliquã magnitudinem, quæ minor erit cono EZITN, per decimãquartã quinti, cùm ABGDL ſit minus ipſo X. Quam igitur habet rationẽ pyramis ABGDL ad pyramidem EZITN, quæ fuit tripla dimetientium, eam habet aliquis conus ABGDL, ad magnitudinem aliquam reliquo cono EZITN minorem. Patuit autem quòd & nullus hanc rationem habeat, quod inconuenit: non ea de cauſa habet aliquis conorum ad aliquam magnitudinem reliquo ſimili quouis cono maiorem vel minorem, rationem triplam dimetientium quæ in conorum baſibus exiſtũt: eam itaque rationem habet quiſuis conus ad magnitudinem reliquo ſimili quouis cono æqualem: ac proinde ad reliquum conum. Cùm autem cylindri quæ ſuper baſi & conorũ vertice morantur, ſint conorum æquemultiplices (nempe tripli ex decima huius) ipſi (ex decimaquinta quinti) eadem conorum ratione ſibi adhærebunt, ac ideo triplam habebunt quam communium baſium dimetientes Z T & B D. Similes igitur coni & cylindri ad ſe inuicem, in tripla ſunt, &c.



MONITVM,

Aliqui circa ſecundæ, quintæ, vndecimæ, duodecimæ, & decimæoctauæ huius, demonſtrationes impegerũt, cùm in his antecedẽs aliquod particulare particulari conſequenti conferri arbitrarentur, veluti hoc theoremate. Si conum AKL cono EMN tanquã antecedens cõſequenti ſociãtes inferrent, quod ſcilicet antecedens AKL non habens ad magnitudinem X conſequente EMN minorem, rationem triplam eius quam habent BD ad ZT dimetientes. Concludit conſequens EMN non habere ad magnitudinem antecedente minorem, rationem cõuerſam eorundem, ſcilicet ZT ad BD, quod ex neceſſitate non ſequitur: ſed tanti fit conum AKL cono EMN conferre, quanti è conuerſo conum EMN eodem argumento cono AKL comparare, vt ſequenti typo diſcutiemus.

	AKL	EMN
Licet antecedens AKL non poſſit habere ad magnitudinem X minorem conſequente EMN, triplam rationem dimetientium BD ad ZT: Nihilominus conſequens EMN poteſt habere ad magnitudinem F antecedente AKL minorem triplam rationem conuerſæ ipſarum, ſcilicet ZT ad BD.	32	3
	F	X
Ad hæc animaduertendum eſt his aut ſimilibus demonſtrandis, antecedentia & cõſequentia non ſumi particulatim vt circuli ad circulum, coni ad conum, &c. Sed in vniuerſum veluti cuiuſuis circuli ad quemuis circulum, cuiuſuiſque coni ad quemlibet conum ſimilem aut eiuſdem faſtigij, prout exoptat	24	2
	BD	ZT
	4	4

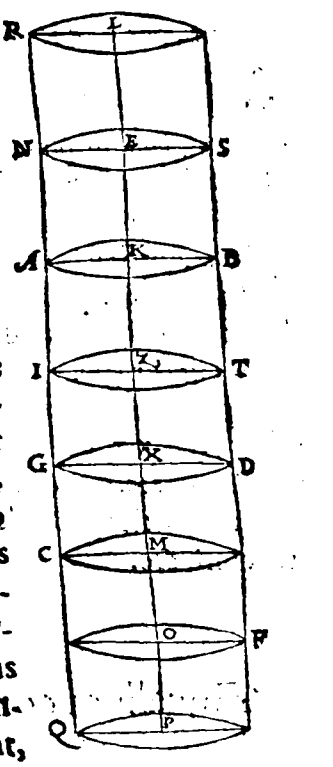
hypo

hypotheſis. Nec inſuper rationum inſpici quantitates, puta ſi fuerit dupla ſeſquialtera aut quadrupla, &c. ſed terminorum qualitates nempe baſium aut earum dimetientium, quæ ſingula & omnia docent proportiones circa genera aut ſpecies potius quàm circa individua variari: quæ proportiones cùm non per quantitatem rationum expreſſam, ſed per relationem baſium vel laterum ſuorum proportionalium exprimantur, ipſa proportionalia ſua varietate ſequẽtium, falsò argueremus à data antecedentis & conſequentis quantitate rationis immobili, vt inde conſurgat proportionalium generalium quantitas rationis. Omnes itaque circulos omnibus circulis conferentes, non propoſitorum inter ſe tantùm, ſed quorumuis ad quoſuis huiuſmodi reſpectum inquirimus, & quorum reſpectum non à quibuſuis, ſed à propriis oriri dimetiẽtibus iuxta propoſitæ hypotheſis authoritatem, haud ſecus omnes conos omnibus conis collatos, nõ quorumuis ſed propriorum dimetientium tripla coniungi ratione, cuius quidem rationis non aſpectatur quantitas, ſed terminorum qualitas, à quibus ſumenda proponitur, quales ſunt dimetientes, à quorum ratione circulorum, conorum, cylindrorúmque, necnon ſphærarum naſcitur intelligentia.

Demonſtrationes igitur hæ ab hoc abſurdo educuntur, non quòd antecedens aliqua ſumpta hypotheſi hanc haberet rationem ad conſequens, alia verò poſtmodum ſumpta nõ haberet: id namque abſurdum non pareret, ob hypotheſis diſcrepantiam eidem ſoli antecedenti adaptatam, quæ facilè oppoſita parit. Sed quoſuis circulos ad quoſlibet, ſiue quoſuis conos ad quoſlibet (hoc eſt æquè conſequens ad antecedens vt antecedens ad conſequens) rationem baſium, aut dimetientium, iuxta hypotheſis votum habere, & non habere, hæc cùm ſint in eodem ſubiecto, hoc eſt in quibuſuis circulis aut conis, oppoſita ad ſeinuicem (ſcilicet cuiuſuis ad quemuis circulorum vel conorum) facile parient abſurdum, ac perinde ab hoc per inconueniens demonſtratum. Quia verò diſcentibus moleſtum eſſe poſſet huius argumenti abſolutam intelligentiam perſcrutari, appoſuimus ſecũdo huius theoremati aliam ſecundæ partis demonſtrandæ rationem, primæ partis argumentum imitantem, quibus nec maiori nec minori eadem propoſita magnitudini, ratio quæſita congruit. Quare eidẽ neceſſariò congruet propoſitæ. Hæc demonſtrandi ratio variis circulorum collationibus elucidandis non parum affert auxilij.

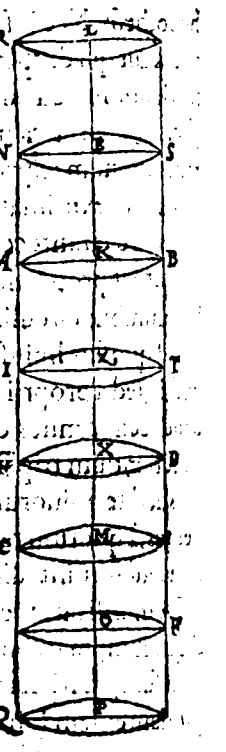
PROPOSITIO XIII.

Si Cylindrus plano ſecetur, parallelo exiſtente eis quæ ex oppoſito planis, erit cylindrus ad cylindrum, ſicut axis ad axem.



Eſto Cylindrus A B G D, cuius axis ſit K X, baſes verò oppoſitæ ſint circuli A K B & G X D: ſecetur autem cylindrus A B G D plano I Z T parallelo oppoſitis A K B & G X D planis. Dico eſſe cylindrũ A T ad cylindrũ T G, ſicut K Z ad Z X axem. Extendatur vtriuſque axis in L & P, axi autem Z K æquales ponãtur K E E L: ipſi verò Z X æquales ponantur quotuis X M M O O P. Per ſigna verò L E M O P parallela plana ipſis A K B & G X D ducantur, per corollarium 15 vndecimi, ſuper quibus planis & centris L E M O P, circuli ipſis A K B vel G X D æquales deſcribantur, extenſa circa eos ſuperficie A N R S & G C O F. Cylindri itaque erunt A T A S S R ſuper æquis parallelis baſibus A K B N E S & R L, ac æquis verticibus Z K K E E L, per 15 vndecimi, & conſtructionem, qui (per 11 huius) æquales erunt,

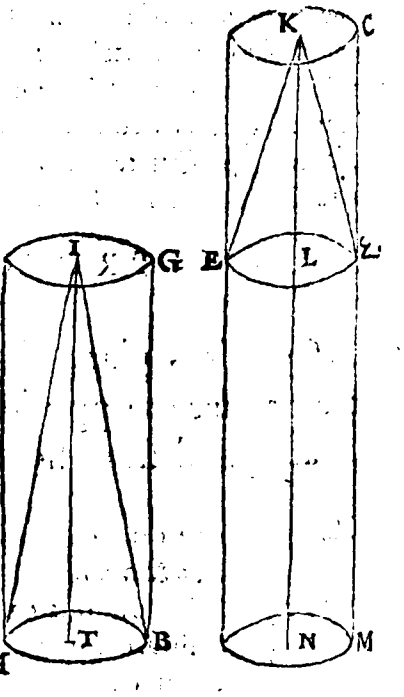
quum æquales sint eorũ bases, similes verò, per vigesimã diffinitionẽ vndecimi. Similiter I D D C C F F Q æquales erunt (ex eisdem) & similes. Quotuplus igitur erit cylindrus R T ipsius A T, tam multiplex erit axis L Z ipsius K Z, sunt enim æquales numero axes & cylindri æquales. Haud secus tam multiplex erit Q T cylindrus, ipsius G T, quotuplex est P Z, axis ipsius X Z. Si itaque axis L Z excedat axem P Z, deficiat, vel eidem æquetur, & cylindrus R T similiter excedet cylindrum Q T, deficiet, vel eidem æquabitur, augmenta etenim cylindrorum axium sequuntur augmenta, ex hypothesi. Quatuor igitur magnitudinum K Z & Z X axium, & A T, T G cylindrorum, æquemultiplicia primæ K Z & tertiæ A T, sicii cet L Z, axis, & R T cylindrus. Alia quæuis multiplicia secũdæ Z X & quartæ T G (hæc P Z axem & Q T cylindrum) simul excedunt, æquantur, vel deficiũt adinuicem sumpta. Earum igitur simplices K Z ad Z X axes, erunt vt A T ad T G cylindri, per quintã diffinitionẽ quinti. Si itaque cylindrus plano secetur parallelo existẽte eis quæ ex opposito planis, erit, &c.



PROPOSITIO XIIII.

In æqualibus basibus existentes Coni & Cylindri, adinuicem sese habent sicut fastigia.

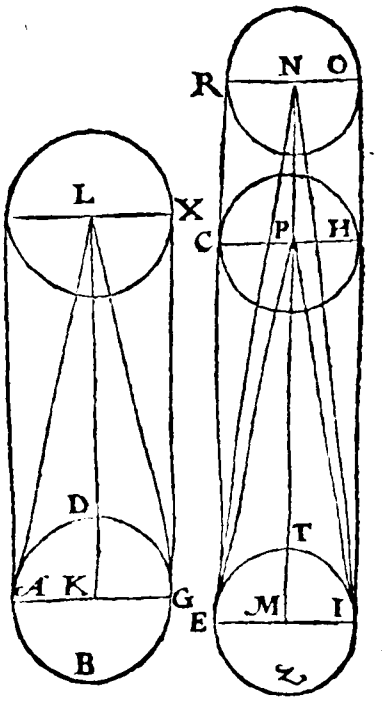
Sint super æquis basibus A B E Z cylindri A G E C aut coni A I B E K Z: Dico esse A G ac E C cylindros, aut A I B ad E K Z conos, sicut T I ad L K fastigia. Producatur cylindrus E C in N, extensa in rectum K L recta, centro autem N circulus ipsi E L Z parallelus & æqualis fiat N M, rectæ verò I T æqualis sit L N, & perficiatur cylindrus E M: cylindri itaque A G & E M æquales erunt, per vndecimam huius, sunt enim sub æqua altitudine I T ipsi L N, & æquis basibus, ex hypothesi: quoniam autem totus C E M cylindrus secatur plano E L Z parallelo existente ipsis K C & M N oppositis: Erit sicut N L ad L K axes, sic cylindrus M E ad E C cylindrum; per præfatam. Sed sicut N L ad L K, sic I T ad eandem L K, per septimam quinti, & sicut M E ad E C cylindri, sic A G ad eundem E C, ex eadem. Sicut igitur (per vndecimam quinti) I T ad L K fastigia, sic erunt A G ad E C cylindri. Quia verò A B I, & E K Z coni eorum cylindrorum sunt tertiæ partes, per decimam huius, ipsi (per 15 quinti) in eorum cylindrorum ratione erunt, & proinde sicut I T ad K L fastigia. In æqualibus igitur basibus existentes coni, &c.



PROPOSITIO XV.

Æqualium conorum & cylindrorum, reciprocæ sunt bases vertici

verticibus, & coni ac cylindri quorum reciprocæ ſunt baſes verticibus, ſunt æquales.



Sint æquales coni A G L E I N, vel cylindri A X E O, ſuper baſibus A B G D E Z I T: Ipſius autem A G L vel A B G D vertex ſit K L, Reliqui verò E O ſit M N, baſium verò dimetientes ſint A G E I: Dico eſſe reciprocè ſicut A B G D ad E Z I T baſes, ſic M N ad K L vertices: Si coni vel cylindri baſes æquas habeant, vertices æquos habebunt, per præfatam, cùm ſint æquales. Et ideo reciprocè proportionales, nempe in ratione æqualitatis erunt baſes, & vertices. Si verò baſes aut vertices ſint inæquales, & è cõuerſo reliquorum vertices aut baſes inæquales erunt. Nam ſi æquales eſſent baſes, æquales eſſent vertices, vt diximus, & è conuerſo, per vndecimam huius. Sint ergo inæquales vertices, maior autem ſit M N, minor verò K L, cui æqualis ponatur M P per ſignum C P ducto plano parallelo planis ipſius E O, per corollarium decimæquintæ vndecimi. Cylindrus igitur E O parallelo plano C P H ſecabitur. Quare (per decimamtertiam huius) erunt M N ad M P vertices, vt E O ad E H cylindri. Sed ſicut E O ad E H, ſic A X (ipſi E O æqualis) ad eundem E H, ex ſeptima quinti, ſicut verò A X ad E H, ſic A B G D ad E Z I T baſes, per vndecimam huius. Sicut igitur M N ad M P, hoc eſt, ad K L, vertices, ſic (per vndecimam quinti) A B G D ad E Z I T baſes reciprocæ, per ſecundam diffinitionem ſexti. Ad ſecundam autem, Supponantur baſes reciprocæ verticibus: Dico cylindros A X & E O eſſe æquales. Sint ideo vt A B G D ad E Z I T baſes, ſic vertex M N ad K L, vel M P. Erit baſis A B G D ad baſim E Z I T, ſicut cylindrus A X ad cylindrum E H, per vndecimam huius. Sed ſicut A B G D ad E Z I T baſes, ſic (ex hypotheſi) M N ad K L (hoc eſt M P) vertices. Et proinde (per decimamtertiam huius) ſic E O vel A X ad E H cylindri. Sicut igitur A B G D ad E Z I T baſes, ſic A X ad E H, ſicq; E O ad eundem E H cylindrum. Igitur A X & E O (ad eundem E H eandem rationem habentes) ſunt æquales, per nonam quinti, nec non ſub eiſdem baſi & vertice conſtituti coni. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocè ſunt, &c.

COROLLARIVM.

Quoniam expoſuimus tantùm conos & cylindros, quorum vertices baſibus perpendiculares incidũt: Exponendi ſunt reliqui quorum vertices angulos ad baſes efficiunt obliquos eiſdem vti actionibus ac paſſionibus quibus præfatos vti hactenus diſcuſſimus.

EX DECIMA HVIVS.

Quoniam diximus decima huius conum cylindri tertiam eſſe partem, eandem ipſi baſim & æquale faſtigium habentis, Illúdque demonſtratum eſt propoſito cylindro cuius baſis ſecatur per quadratum inſcriptum, & ſuper quadrati lateribus

bus deſcripta Iſoſcelia triangula polygonum componẽtia, rurſúſque ſub huius polygoni lateribus alia eadem arte infinitè deſcripta, plus dimidio baſis auferentia, vt frequentiùs patuit. Et ideo ſuper his baſibus ſolida quæ ſub cylindri inclinati altitudine eidem includuntur cylindro, manifeſtum eſt plus dimidio cylindri auferre, & reliqui plus dimidio, veluti in rectis cylindris oſtendimus. Nam hæc inclinata ſolida ſuper æquali altitudine, & æquis baſibus rectorum, rectis ſunt æqualia, per corollarium quadrage. vndecimi. Quare ſimiliter plus dimidio tollunt vt recta. Conferentes igitur inclinatum cylindrum, cono ſuper eadem baſi & vertice recto, ab impoſſibili inſuper arguentes, per decimæ huius demonſtrationẽ, oſtendemus lateratum inclinanti cylindro incluſum, maius eſſe triplo ſuæ pyramidis & eidem æquum, quod fieri non poteſt. Illúdque erit primæ partis deſiunctiua, qua propoſuimus cylindrum aut triplo coni maiorem eſſe, aut minorem, ſi æqualis non ſuſcipiatur. Secunda verò parte concludemus ſolidum illud lateratum cylindro conceptum, ipſo cylindro maius eſſe, quod rurſus abſurdius apparebit. Quare ſi nec triplo coni fuerit cylindrus maior, nec minor, neceſſe æqualis erit. Horum demonſtratio inclinatorum, facilè rectorum ſequitur demonſtrationem, eo quòd iam oſtenſum eſt pyramides & laterata ſuper æquis baſibus & altitudine, ſiue recta, ſiue inclinata inuicem eſſe æqualia, nempe vt baſes, per ſextam huius: Cylindrus igitur inclinatus triplus erit cuiuſlibet coni (licet recti) ſuper eius baſi & altitudine conſtituti, ſed eius coni triplus fuit cylindrus rectus, per decimã huius: Cylindrus igitur inclinatus, recto ſuper eadem baſi & vertice æquus erit. Idem fit in conis, qui tertiæ ſunt partes æqualium, & ideo inter ſe æquales erunt.

EX VNDECIMA HVIVS.

Quare ſequetur iuxta vndecimam huius, ſub eodem faſtigio exiſtentes cylindros ac conos inclinantes aut rectos, ad ſe eſſe vt baſes. Cùm enim recti ad ſe ſint vt baſes, rectis verò æquales ſint inclinati, ipſi ad ſe erunt vt baſes.

EX DVODECIMA HVIVS.

Et proinde ex duodecima huius, ſimiles coni & cylindri inclinati triplam habent rationẽ dimetientium quæ in baſibus. Cùm æquales ſint rectis eam rationem habentibus, per duodecimam huius, Ipſi eandem habebunt, cùm maximè æquales habeant baſes rectis.

EX DECIMATERTIA HVIVS.

Et ideo ſequetur ex decimatertia huius, Cylindrum inclinatum ſectum plano parallelo oppoſitis eius planis, in rationes axium ſectum eſſe. Supponantur autem ſuper eadem baſi rectus & inclinatus cylindri, ſubq; eod em vertice, qui ſecentur plano oppoſitis parallelo, manifeſtum erit vnius ſectiones alterius ſectionibus æquales eſſe, ſunt enim ſuper æquis baſibus & vertice, nempe inter parallela plana. Sed & eorum axes proportionaliter ſecantur à planis, per decimamſeptimam huius. Inclinati igitur (rectis æquales) ſuorum axium rationem veluti recti habebunt. Nam vtraque eſt eadem axium ratio.

EX DECIMAQVARTA HVIVS.

In æqualibus itaque baſibus exiſtentes coni & cylindri inclinati, ad ſe erunt (ex decimaquarta huius) vt faſtigia. Cùm enim inclinati rectis eandem baſim & faſtigium habentibus, ſint æquales, Recti verò ſunt ad ſe vt faſtigia, Inclinati igitur ad ſe erunt vt eadem faſtigia vtriſque communia.

EX DECI

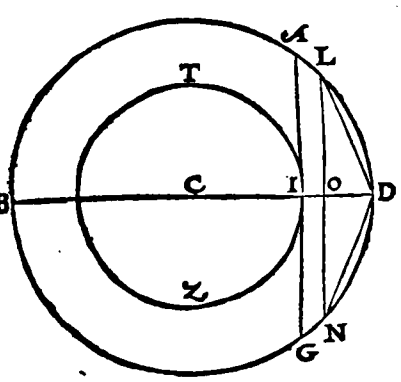
EX DECIMAQVINTA HVIVS.

Vnde reciprocè erunt æqualium conorum, vel cylindrorum inclinatorum aut rectorum, baſes verticibus, & è contrà. Cùm enim ſæpius dixerimus inclinatos & rectos æquales eſſe, qui eaſdem habent baſes & vertices. Cùm igitur recti æquales ſuorum verticum ac baſium reciprocam patiantur rationem, ſequetur inclinatos (rectis æquales) ſuarum baſium ac verticum (vtriſque communium) inſtar rectorum reciprocam rationem habere. Similiter ſi reciprocam habeant eorum vertices & baſes rationem, & ipſi æquales erunt eo quod æquales ſint rectis cylindris, ſuper eiſdem baſibus & vertice, qui quidem inter ſe ſunt æquales per eandem decimamquintam huius. Suſcipiemus itaque ea quæ de conis & cylindris hoc duodecimo diſcuſſimus, quorum vertices baſibus perpendiculares inſiſtunt, ex conorum & cylindrorum diffinitionibus, æquè intelligi in conis & cylindris, quorum vertices ad baſium plana inclinantur, ſiue obliquos efficiunt angulos. Notabimus tamen huiuſmodi conos aut cylindros inclinantes, minimè teretes eſſe veluti rectos: nam ſi ſecentur plano ſuſcipiente verticem eorum ad rectos, hæc ſectio non circulum, ſed conoïdalem figuram in eorum ſuperficie deſcribet, cuius maior dimetiens æqualis erit (in cylindris) dimetienti baſis, hoc eſt, eadem conſtabit. Necnon in conis eadem quæ in rectis contingent ſectis eadem methodo.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA I.

Binis orbibus circa idem centrum exiſtentibus, in maiori orbe multãgulum æquilaterum & parilaterum inſcribere, non tangens orbem minorem.

Sint bini orbes A B G D & Z I T, circa idem centrum C conſtituti. Sit autem maiori qui ſit A B G D inſcribendum polygonum æquilaterum, & paria numero latera habens, non tangens verò circulum Z I T minorem. Sit vtriuſque diameter recta B I D, Per ſignum autem I ipſi B D ad rectos excitetur A I G recta, Semicirculus verò B A D bifariam ſecetur, per 30 tertij, Idq; ſæpe fiat. Relinquetur magnitudo arcus minor ipſo D A, per ſecũdam partem primæ decimi. Qui eſto D L: per L verò eidem B D perpendicularis agatur L O N, coniunctis L D D N rectis. Quoniam anguli D O N & D O L ſunt recti, ex conſtructione, recta B D ſecat bifariam rectam L N in O, per tertiam tertij. Quare (per 4 primi) reliqua latera triangulorum D O N D O L, ſcilicet D L D N erunt æqualia. Si igitur circulo A B G D æquales ipſis D L D N coaptentur, per primam quarti, ipſæ conuenient in B in numero pariter pari (per 33 noni) æqualéſque arcus ſubtendent, per 28 tertij. Nam ſecti ſunt per numerum à binario duplum, ſcilicet dimidia ſectione frequenter repetita, qua quidem multiplicatum fuit circuli decrementum. Quia verò L N eſt ipſi A G parallela, per 28 primi, cùm vtraque ſit eidem B D perpendicularis, & in eodem circuli plano, per conſtructionem, Ipſa L N non tangit circulum T I Z. Minus igitur ipſum circulum T Z I tangent rectæ, D L D N. Nec proinde reliquæ ipſis æquales, per 14 tertij. Binis itaque orbibus A B G D & Z I T circa idem centrum C exiſtentibus, in maiori orbe A B G D multangulum æquilaterum & parilaterum (quod ſub D L D N & reliquis lateribus ipſis æqualibus, & numero pariter pari conſtitutis) non tangens orbem minorem Z I T inſcripſimus. Poterat eadem cauſa recta L N latus eſſe



polygoni

polygoni, cùm ſubtendat bina alterius latera, numero pari diſtributa: ac ideo minori polygono circulum complere.

COROLLARIVM.

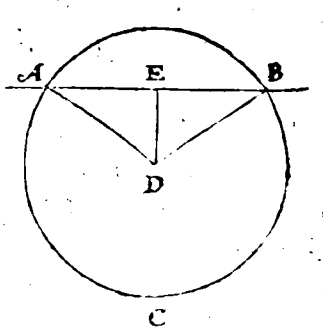
Hinc fit, perpendicularis diametro inter maiorem circulum & rectam tangentem minorem conſtituta, nullum circulorum tangit.

MONITVM.

Cogimur demonſtrationem fuſius proſequi Theone, qui primam decimi ſat impropriè aſſumit. Ea nanque vltra dimidium exceſſus tollendos præcipit, quod obſtaret componendo polygono hac propoſitione, quæ pares laterum numeros exoptat. Inſuper licet in reliquis verum proferat, illud tamen improbatum ex prius demonſtratis relinquit, vt breuitati conſulat, confusè tamen. Quare nos ſecundam eiuſdem partem citamus, à nobis demonſtratam, vt præciſum proferamus & parilaterum polygonium.

LEMMA.

Si Sphæra plana quadam ſuperficie ſecetur, communis ſuperficierum ſectio circunferentia erit circuli.



Sit ſphæra A B C ſecta plano A E B, Centrum verò ſphęræ ſit D, à ſigno autem D in planum A E B perpendicularis agatur D E, per vndecimam vndecimi. A ſigno verò E in communem plani & ſuperficiei ſphæræ ſectionem, per planum A E B ducantur quotcunque lineæ E A E B coniunctis D A D B. Quoniam æquales ſunt D E A D E B anguli recti (nam D E recta eſt ad planum): Subtendentes eos verò rectæ D A D B ſunt æquales, ex centro per 12 diffinit. vndecimi: Ipſæ D A & D B (per 47 primi) poſſunt rectas D E E A & D E E B, à quibus communis D E ablata, reliquas E B E A æquales relinquit potentia, quare & longitudine. Similiter omnes lineæ ductæ à ſigno E ad lineam vtraſque plani & ſphæræ ſuperficies ſecantem, æquales oſtendentur. Illa igitur linea circunferẽtia erit circuli, per decimamquintam diffinit. primi. Si verò planum per centrum ſphæram ſecuerit, rectæ à centro ſphæræ in communem eorum ſectionem ductæ, erunt æquales, per duodecimam diffinitionem vndecimi. Nam ea communis ſectio eſt in ſuperficie ſphæræ. Quare quauis arte circulus erit plana ſuperficies ea linea comprehenſa, cuius centrum in ſphæræ centro erit, aut in recta à centro in baſim ſecantem perpendiculari demiſſa.

COROLLARIVM I.

Inferemus, Si à centro ſphæræ æquales perpendiculares agantur in circulos ſphæram ſecantes, ipſos circulos æquales eſſe, ac demiſſas perpendiculares in eorum centra cadere ſequetur.

Nam ea quæ ex centro ſphæræ, ſemper poteſt perpendicularem, & eam quæ ex contactu in circunferentiam protenditur. Communi igitur ablata perpendicu-

lari,

culari, sequetur reliquas quotcunque, inuicem æquas esse. Quare circulos æquales describent per primam diffinit. tertij, & in eorum centra cadunt perpendiculares, per decimamseptimam diffinit. vndecimi, sunt enim conorum axes.

COROLLARIVM II.

In quos verò circulos maiores cadunt perpendiculares, minores erunt circuli.

Nam ab eadem potentia quæ ex centro sphæræ, maior perpendicularis ablata potentia, minorem relinquit eius quæ ex circuli centro potentiam, & ideo minorem efficit circulum. Si igitur æquales fuerint circuli illi, in eos demissæ perpendiculares æquales erunt. Nam si maiores vel minores essent, circuli inæquales essent, vt patuit, quod obstaret hypothesi.

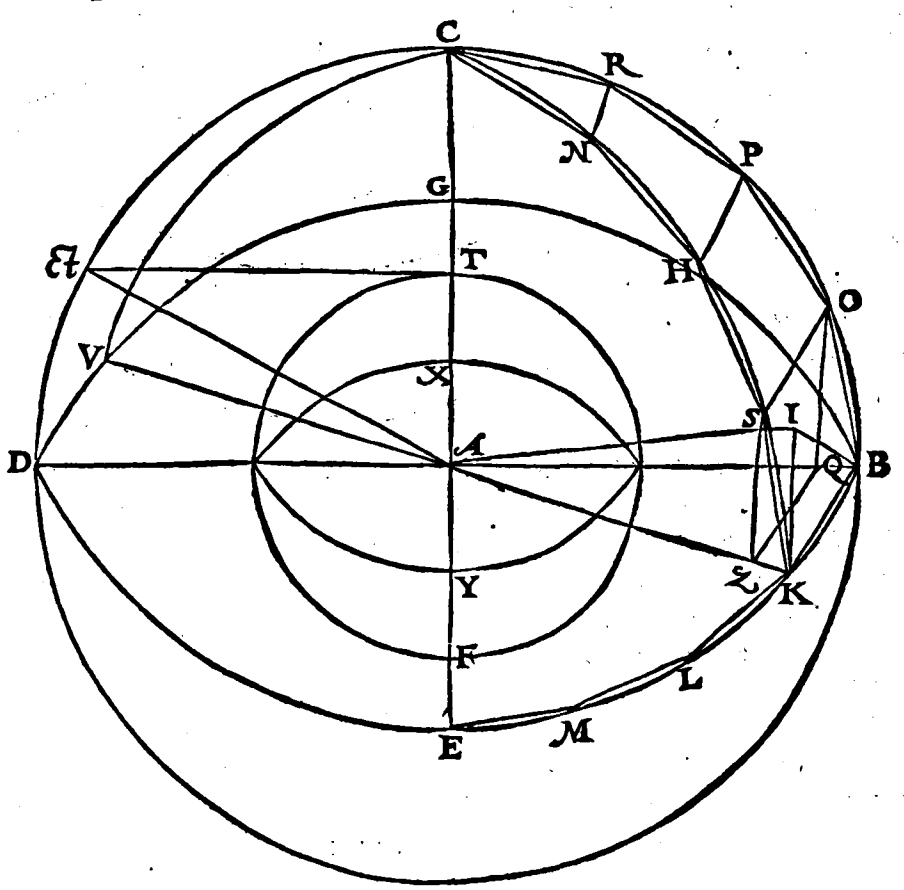
COROLLARIVM III.

Et proinde perpendiculares in bases, omnium ductarum à centro sphæræ minimæ existunt.

Nam singulæ aliæ eas possunt, & eam quæ à centro circuli secantis sphæram eas iungit.

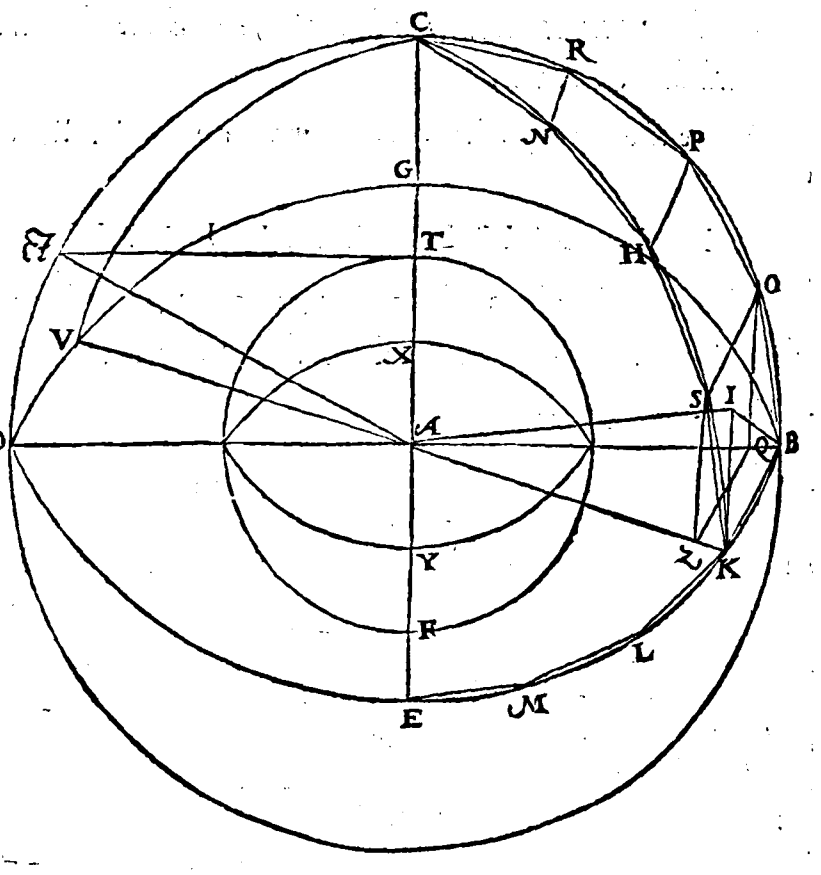
PROPOSITIO XVII. PROBL. 2.

Binis sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscribere, non tangens sphæram minorem in superficie.



Proponantur binæ sphæræ A B D & A T F, circa idem centrum A constitutæ, oportet autem maiori sphæræ A B D inscribere polyedrũ, non tangẽs minorẽ sphęrã sua superficie. Sint binæ sphęræ dimẽtientes D B & G E, ad rectos sese in A centro secantes. Per signa verò A B D G E extensum planum, secet sphæras, hæ sphærarum

ſectiones circuli erunt, per lemma præfatum, ſed & maiores (cùm per centrum ductæ ſint ſuper maxima dimetiente) qui ſint B G D E & A X Y. Minoris autem ſphæræ circulum T F tangat recta T &, quæ ad circunferentiam vſque maioris ſphæræ ducatur, coniuncta inſuper A &: Diuidatur autem bifariam quadrans E B, idque ſæpe fiat, relinquetur (per coroll. primæ decimi) arcus minor eo quem ſubtenderet recta T &, qui ſit B K. Cùm autem circuli B C D & B E G ſint æquales, per 1 diffinitionem tertij, coaptentur circulo B E D rectæ ipſi K B ſubtenſæ æquales, per primam quarti, fiet polygonum æquilaterum & parilaterum, per 16 huius, non tangens circulum ſphæræ A T F minoris: ſint itaque eius polygoni latera B K K L L M M E in quadrante A B E: cõnectantúrque dimetiẽtes K A V L A M A &c. ſuper plano A D G B E circuli. Ad ſignum A ipſi plano A B G D E perpendicularis excitetur ad ſuperficiem vſque ſphæræ maioris, quæ ſit recta A C per 12 vndecimi. Per rectam A C ducantur plana ſphæram ſecantia in ſinguliş polygoni B K L M E & reliquis ſectionibus, illæ quidem ſectiones, circuli erunt maiores, nam qui per centrum ſphæræ per præfatum lemm. & igitur æquales, per primam diffinitionẽ tertij. Diſtribuantur igitur ſimiliter ipſi quadrãti A B E, quadrantes A C B A C K horum circulorum, coaptatis (per primã quarti) rectis ipſi B K æqualibus, quæ quidem ſint B O O P P R R C & K S S H H N N C, coniungantur inſuper S O H P N R rectæ: quoniam circuli A B C D & A K C V ducũtur per rectã A C, ipſi ad planum A B G D E recti ſunt, per decimamoctauam vndecimi, quoniam æqualibus circulis æquales coaptatæ ſunt, æquales erunt S K K B B O rectæ, à ſignis autem S & O in planum B G D E perpendiculares demittantur S Z O Q, per vndecimam vndecimi, ipſæ in rectas K V B D cadent, per trigeſimamoctauam vndecimi. Triangulorum igitur S Z K & O Q B bini anguli binis ſunt æquales, ſcilicet K Z S ipſi B Q O, cùm ſint recti, & Z K S ipſi Q B O, per vigeſimamſeptimam tertij: æquales enim ſubtendunt circunferentias S C V & O C D, & vnum latus S K vni O B æquale oſtenſum: reliqua igitur latera & anguli æqualia erunt, per vigeſimamſextam primi, ſcilicet S Z ipſi O Q & Z K ipſi Q B. Reliquæ igitur A Z A Q rectæ æquales erunt, cùm totæ A K A B fuerint æquales, quæ ſcilicet ex centro. Sicut igitur A Z ad Z K, ſic A Q ad Q B, æquales ad æquales, igitur trianguli A B K ipſi B K parallela erit Q Z, per ſecundam ſexti. Cùm autem binæ S Z O Q ſint eidem plano B G D E perpendiculares, ex hypotheſi, parallelæ ſunt ipſæ S Z O Q, per ſextã vndecimi. Sed & æquales oſtenſæ



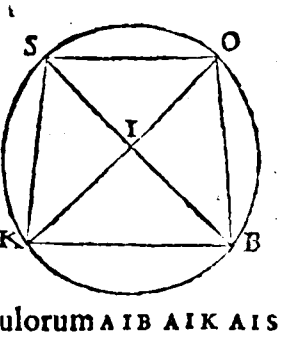
ſunt

ſunt ipſæ S Z O Q, rectæ itaque S O Z Q ipſas coniungentes, æquales & parallelæ ſunt, per trigeſimamtertiam primi. Vni verò earum ſcilicet ipſi Z Q parallela eſt B K, & reliquæ igitur S O eadem B K parallela erit, per nonam vndecimi. Rectilineum igitur B K O S in vno erit plano, per ſeptimam vndecimi.

Similiter oſtendemus quadrangula S O P H H P R N ſingula in vno eſſe plano, demiſſis perpendicularibus in planum A B G D E, vt iam diximus. Triangulum verò N R C in vno eſt plano, per 2 vndecimi. Si itaque per ſignum C & ſingula L M E ſigna, quadrantes circulorum ſphæram in centro A ſecantium ducantur, ſcilicet A C L A C M A C E, ac inter eos ſimiliter conſtituantur plana: per reliquas verò ſeptem ſphætæ ſimiles & æquales partes, ſimilis deſcriptio fiat, componemus ſolidum polyedrum præfatis & deſcriptis planis concluſum, maiori ſphæræ A B G D E inſcriptum, quod quidem non tangere minorem ſphæram ſua ſuperficie diſcutiamus.

A ſigno A in planum K B O S perpendicularis agatur A I, per vndecimam vndecimi, coniunctis I K I B rectis, in ipſo plano: recti igitur erunt anguli ipſius A I ad rectas I K I B, & reliquas ipſam in eo plano tangentes, per ſecundam diffinitionem vndecimi, nam eſt A I recta ad planum K B O S. Quia verò æquales ſunt A K A B, poteſt autem A K rectas A I I K, poteſt ſimiliter A B rectas A I I B, ſequetur binas A I I K potentias, binarum A I I B potentiis æquari: communi itaque ablata A I ſupererunt æquales I K & I B adinuicem potentia, & ideo longitudine: ſimiliter oſtendemus rectas I O I S ſuper eodem plano ductas, & præfatis & adinuicem eſſe æquales, nanque ex centro ſphæræ ſubtendunt eas cum recta A I: veluti oſtenſum eſt in rectis I K I B.

Vt igitur propoſito typo demonſtremus centro I, interuallo autem I B vel I K, &c. Circulus ducatur circa quadrangulũ planum K B O S, cùm autem tres rectæ S K K B B O ſint æquales (vt patuit) S O verò minor ipſis, eſt enim æqualis ipſi Z Q oppoſitæ, per trigeſimamquartam primi, quæ minor eſt ipſa K B, per ſecundam ſexti, ſequetur rectam B K maiorẽ angulum recto efficere B I K, eo quòd tres S K K B B O tres circuli excedant quadrantes, quare ſingulæ maiorem recto ſubtendent angulum: maior igitur erit B K reliqua I B, per decimãnonam primi, quæ ex centro. Cæterùm quia rectus eſt quilibet angulorum A I B A I K A I S & A I O, quos ſubtendunt quæ ex centro maioris ſphæræ ſcilicet A B vel A K, &c. Subtendit item quæ ex eodem centro A & rectum A T & angulum ad tangentem, per decimamoctauam tertij, æquales erunt potentiæ rectarum A I I B, potentiis ipſarum A T T &, per quadrageſimamſeptimam primi. Maior autem eſt T & ipſa I B, cùm ſit ex hypotheſi maior ipſa K B, quam nuper ipſa I B maiorem oſtendimus: reliqua itaque A I reliquam A T excedet potẽtia, ſiue igitur longitudine, ſed A T eſt ex centro minoris ſphæræ, A I verò (quæ in baſim polyedri perpendicularis) minorem ſphæram tranſgreditur, non ideo tanget polyedri baſis minorem ſphæram: minus igitur eandem minorem ſphæram tangent reliquæ polyedri baſes, cùm ſint ipſa K B O S minores. Nam ſicut oſtenſum eſt rectam S O minorem eſſe recta B K, patebit H P minorem eſſe ipſa S O & N R ipſa H P, & reliquæ quotuis vſque ad C, quare minora efficiunt quadrangula minoribus igitur circulis comprehenſa, & proinde à centro ſphæræ remotioribus per corollarium præfati lemmatis. Binis itaque ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus non tangens ſphæram minorem in ſuperficie.



COROLLARIVM.

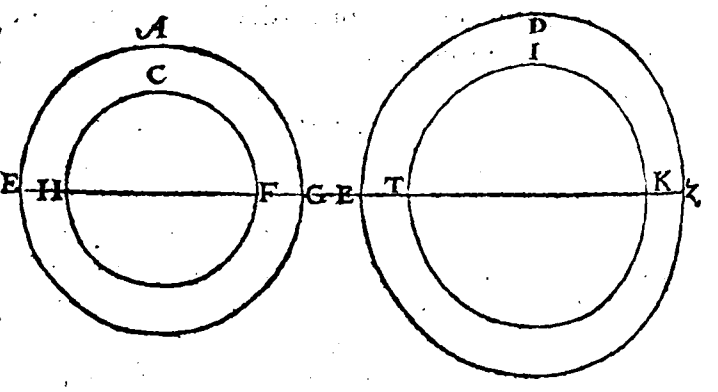
Polyedrum in Sphæra conſtitutum, ad ſimile ſimilitérque alij

Sphæra inſcriptum, triplam habet rationem quam ſphærarum dimetientes.

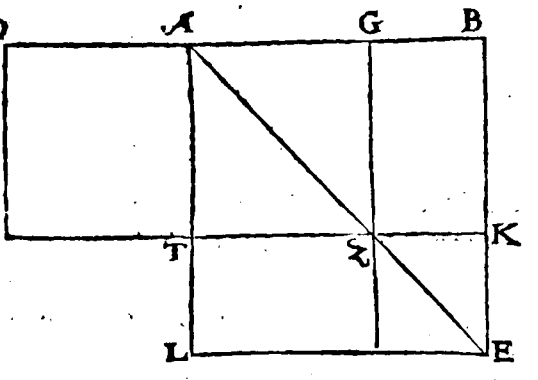
Nam à centris ſphærarum ad ſimiles baſes ductæ rectæ, ſimiles concludunt pyramides ſingulas ſingulis. quæ cùm ſingulæ ſingulis ſimilibus alterius ſphæræ, triplam habeant rationem ſimilium laterum, quæ ſunt ſphærarum rectæ, quæ ex centris, per corollarium octauæ huius. Patulum erit (ex duodecima quinti) omnes pyramides vnius ſphæræ, ad omnes alterius pyramides ſimiles, eandem (rectarum ſcilicet quę ex centris ſphærarum triplam) habere rationem: quia verò earum quæ ex centris rationem habent dimetientes ſphærarum, per 15 quinti, ſequetur polyedra triplam dimetientium ſuarum ſphærarum conſequi rationẽ. Et ideo triplam laterum rationem veluti pyramides in eis ſimiles habuerunt.

PROPOSITIO XVIII.

Sphæræ adinuicem in triplici ſunt ratione propriorum dimetientium.



Proponantur binæ ſphæræ ABG & DEZ, quarum dimetientes ſint BG & EZ: Dico ſphæram ABG ad ſphęram DEZ habere triplam rationem dimetientium BG ad EZ. Quod ſi non fateamur, habeat aliqua ſphæratũ ſcilicet ABG triplam rationẽ dimetientium BG ad EZ, ad aliam ſphæram, quæ prius ſit minor reliqua DEZ, ea ſcilicet ITK, quæ ipſi DEZ concentrica ſtatuatur, ipſi verò DEZ polyedrũ inſcribatur non tangens ſphæram ITK minorem, per præfatam: polyedro verò ipſius DEZ ſimile ſimilitérque poſitum ſupponatur ſphæræ ABG inſcriptum, quoniam ſphæra ABG ad ſphæram ITK triplam habet (ex hypotheſi) rationem, rectarum BG ad EZ, ſed triplam quam BG ad EZ habet polyedrum ipſius ABG ad polyedrum ipſius DEZ per corollarium præfatum. Sicut igitur ſphæra ABG ad ſphæram ITK, ſic erit (per vndecimam quinti) polyedrum ſphæræ ABG, ad polyedrum ſphæræ DEZ. Viciſſim igitur ſicut ſphæra ABG ad polyedrum ipſius ABG, ſic ſphæra ITK ad polyedrum ſphæræ DEZ, ſed ſphæra ABG maior eſt polyedro ſibi inſcripto. Sphæra igitur ITK (per 14 quinti) maior erit polyedro ipſius DEZ eandem ITK ſphæram continente, quod fieri non poteſt. Non igitur habet aliqua earum ſphærarum triplam rationem dimetientium ad minorem reliqua: Dico præterea neque ad maiorem. quod ſi fieri poſſit, habeat ABG ſphæræ ad maiorem ſphæram EDZ alia ITK, triplam rationem dimetientium BG ad TK: quoniam ſphæra ITK eſt minor ipſa DEZ. Erit (ex 14 quinti) ſicut DEZ ad ABG, ſic ITK ad aliam ſphæram minorem ipſa ABG, quæ ideo fit CHF ipſi ABG concentrica. Erit igitur (per corollarium quartæ quinti) ABG ad DEZ ſicut EHF ad ITK. Inſcribatur itaque ipſi ABG polyedrum, non tangens ſphæram CHF, per præfatam, cui ſimile ſupponatur ſphæræ ITK inſcriptum. Cùm ABG & DEZ ſphæræ triplam habeant rationem quam BG ad TK, ex hypotheſi, eandem autem habent polyedra ipſis ABG & ITK ſimiliter in



Recta A B extrema & media ratione secetur, cuius maius segmentum esto A G. Ipsi verò A G in rectum æqualis apponatur A D: Dico totam B D extrema & media ratione secari in A, maiúsque eius segmẽtum esse ipsam A B, quę in principio posita est. Fiat ex A B quadratum A E, ex A D verò quadratum D T, ipsi autem A B similiter secetur B E in K, sintq; per signa G & K parallelæ, G Z K Z T quadrati lateribus. Quoniam extrema & media ratione secatur A B in G, quod sub A B B G (hoc est G E) æquum est ipsi A Z quadrato quod ex A G, per 17 sexti, eidem autem G E, æquum est T E. Nam supplementa G K Z L sunt æqualia, per 43 primi: ipsum igitur T E quadrato A Z æquum est, sed A Z & D T (æqualium quadrata) sunt æqualia: ipsi igitur D T æquum est T E: commune addatur A K, æquum erit ideo rectangulum D K quadrato B L, sed rectangulum D K fit sub tota D B & D A, hoc est, B K sibi æquali, quadratum enim est D T: quadratum verò B L fit ex reliquo segmento A B, per constructionem. Tres itaque rectæ B D B A A D sunt proportionales, per 17 sexti. Sicut igitur tota B D ad maius B A, sic idem B A maius ad A D minus segmentum: tota igitur B D extrema & media ratione secatur, per tertiam diffinitionem sexti, & eius maius segmẽtum est A B, quæ in principio recta linea. Si igitur recta linea, &c.

MONITVM.

Proponit Theon post hanc quintam quasdam diffinitiones, quibus quid sit resolutio priori, quid autem sit compositio posteriori enunciat, vt demum quinque præfatarum demonstrationum ita peruertat ordinem, quo suppositæ propositionis conclusione argumentum quo concluſa fuit probet priori argumento quod resolutionem vocat, subsequenti autem argumẽtum supponit, vt propositum concludat: quæ cùm nihil ad Euclidis elementa conferre percipiamus, eo quòd maximè nihil vltra propositum ostendant, data opera ob compendium omisimus, & modici aut nullius momenti ea fuisse arbitrati sumus.

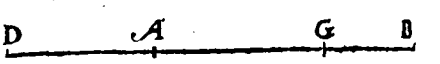
PROPOSITIO VI.

Si recta linea certa extrema & media ratione secta fuerit, vtrumque segmẽtorum incerta est, eáque appellatur Apotome.



Exponatur certa recta A B extrema & media ratione secta in G, Maius verò eius segmentum sit A G: Dico ipsorum A G & G B vtrumque segmentorum, rectam incertam esse, eámque vocari apotomen. Addatur ipsi A B recta D A in rectum, æqualis dimidiæ ipsius A B, Certa erit D A dimidia totius A B, per sextam diffinitionem decimi. Quia verò (ex prima huius) G D quintuplum potest rectæ D A, recta G D rectæ D A potentia commensurabilis erit, per sextam decimi, habent enim numerorum rationem earum potentiæ. Cùm autem habeant rationem quam quinque ad vnum (vel 20 ad 4) non quadrati ad quadratum, Ipsæ quadratorum rationem non habent, per corollar. 25 octaui. Quare recta G D potentia tantùm est ipsi D A commensurabilis, per nonam decimi, eo quòd sint longitudine incommensurabiles. Quare à certa G D aufertur certa D A potentia tantùm toti G D commensurabilis. Reliqua itaque A G est apotome, per septuagesimamter

mamtertiam decimi. Quia inſuper recta AB extrema & media ratione ſecatur, quod ex AG æquum eſt ei quod ſub AB BG, per decimamſeptimam ſexti. Sequetur itaque quod ex apotome AG ad certam propoſitam AB comparatum, latitudinem efficere GB. Quæ igitur GB (per nonageſimamſeptimam decimi) prima erit apotome. Rectæ ideo AB certæ vtraque ſectio, apotome erit, ſcilicet AG & GB. Si itaque recta linea extrema & media, &c.



COROLLARIVM.

Hinc fit, Si maius ſegmentum fuerit certa linea, minus apotome eſſe.

Vt ſi rectæ ABC maius ſegmentum AB biſariam ſecetur in D, Recta DC quintuplum poteſt rectæ BD, per tertiam huius. Quia verò BD (certæ propoſitæ AB dimidia) certa eſt, per ſextam diffinitionem decimi. Ipſi verò BD commenſurabilis (ſcilicet quintupla) potentia eſt DC. Ipſa igitur DC certa erit, per eandem diffinit. Cùm autem potentiæ DC & DB non habeant rationem quadratorum, ipſæ longitudine incommenſurabiles (ex nona decimi) erunt, & igitur potentia tantùm cõmenſurabiles. Reliqua igitur BC minus ſegmentum totius AC, eſt (per 73 decimi) apotome. Poterat breuiùs demonſtrari, ſed hac demonſtratione fuſius patebit linearum natura.



COROLLARIVM II.

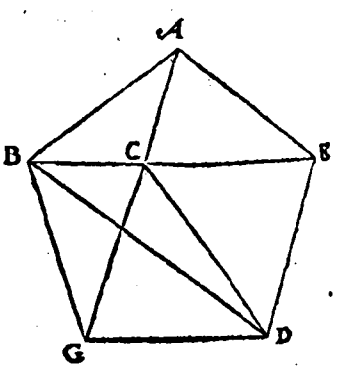
Eadem poteſt eſſe ratio Apotomes ad Apotomen quæ Certæ ad Apotomen.

Nam bina ſegmenta ſunt Apotome, tota verò Certa. Eſt autem vt tota Certa ad maius Apotome, ſic maius Apotome, ad minus Apotome.

PROPOSITIO VII.

Si quinquanguli æquilateri tres anguli, ordinatim aut non ordinatim æquales fuerint, æquiangulum erit ipſum quinquangulum.

Quinquanguli ABGDE ſint æqualia latera, & tres eius quilibet anguli. Sint prius ordinatim qui ad ABG, productis AG BE BD rectis: Dico æquiangulum fore ipſum ABGDE quinquangulum. Quoniam anguli qui ad ABG ſunt æquales, & circum eos æqualia latera, baſes quoque BE BD AG ſunt æquales, per quartã primi. Et proinde anguli AEB & GDB erunt (per octauam primi) æquales. Quia verò rectæ BD BE ſunt æquales oſtenſæ, anguli BED BDE ſunt (per quintam primi) æquales. Totus igitur AED toti GDE æquus erit, per 2 commu. ſenten. Cùm autem æquales ſint BAG ABE anguli (per 8 primi) triãguli ABC bina AC CB latera æqualia erunt, per ſextam primi. Reliquæ itaque CE CG æqua-



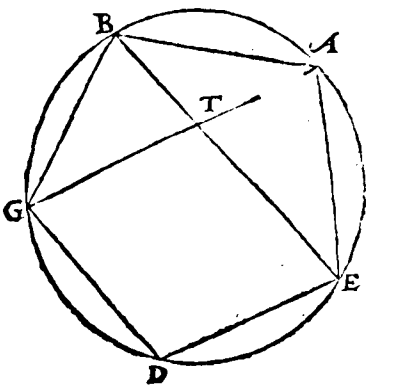
les

les erunt, per tertiam commun. sentent. Triangulorum igitur C G D & D E C bina latera C G G D, binis C E E D æqualia sunt, & basis communis C D. Anguli itaque C G D & C E D æquales erunt, per octauam primi: sed æquales sunt (per eandem) A G B & B E A: totus igitur B G D toti A E D æquus erit. Sed ipsi A E D æquus fuit F D G. Ipsi verò B G D reliqui B A E A B G. Omnes igitur quinquanguli A B G D E anguli sunt æquales. Sed iam non ordinatim. Sint æquales anguli A G D: Quoniam anguli qui ad A & G sunt æquales, & æquis lateribus (ex hypothesi) comprehensi, bases B E & B D & anguli B E A B D G æquales erunt, per quartam primi. Sed Isosceli B E D anguli B E D B D E sunt (per quintam primi) æquales. Totus itaque A E D toti G D E æquus fuit. Sed ipsi G D E æquus fuit B A E, per hypothesim. Tres itaque quinquanguli A B G D E anguli qui ad A E D ordinatim sunt æquales. Omnes igitur (ex prima parte) æquales erũt. Si igitur quinquanguli æquilateri tres anguli, &c.

PROPOSITIO VIII.

Si quinquanguli æquilateri & æquianguli binos ordinatim angulos rectæ lineæ subtendant, extrema & media ratione sese inuicem diuidunt, & maiora earum segmenta ipsius quinquanguli lateri sunt æqualia.

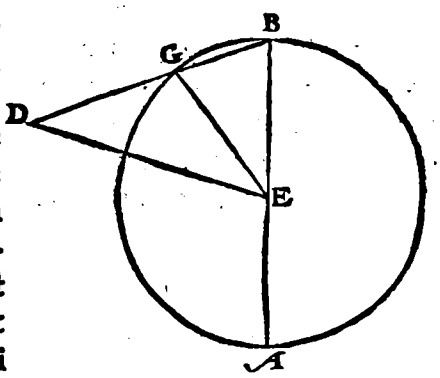
Sit pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B G D E, subtendant autem binos eius proximos angulos (qui ad A & B) rectæ A G B E, sese secantes in T: Dico rectas A G & B E se extrema & media ratione secare inuicem, & maiora earum segmenta lateribus quinquanguli æqualia esse. Pentagono A B G D E circũscribatur circulus, per decimamquartam quarti, quoniam anguli qui ad A & B sunt æquales, & çquis lateribus comprehensi, bases A G & B E æquales erunt, per quartam primi, ac reliqui anguli B A G ipsi A E B & A B E ipsi B G A æquales. Triangulorum igitur A B T & B E A bini anguli binis sunt æquales, scilicet B A T ipsi B E A, & A B T communis, reliqui itaque B T A & B A E erunt (per corollariũ trigesimæ secundæ primi) æquales, nempe residui duorum rectorum. Proportionalia itaque sunt eorum latera circum æquales angulos, B E ad B A sicut B A ad B T, per quartam sexti. Cùm autem isosceles sit triangulum A B T, similis nanque ipsi B E A, & exterior angulus A T E binis interioribus (quæ ad basim scilicet T B A & T A B) sit æqualis, per trigesimamsecũdam primi. Duplus verò sit G A E angulus ipsius B A G, per trigesimamtertiam sexti, nam dupla est G D E circunferentia ipsius B G, duplus erit igitur T A E angulus ipsius B A T anguli, cuius B A T duplus fuit A T E exterior: nam bini interiores ad basim B A sunt ei æquales, per quintam primi. Recta igitur T E æqualis erit ipsi A E çquum angulum subtendenti, per sextam primi, & proinde ĩpsi B A ac reliquis pentagoni lateribus æqualis erit ipsa T E: fuit autem B E ad B A sicut B A ad B T: erit igitur sicut tota B E ad E T (æqualem ipsi B A) sic E T ad B T, per septimam quinti. Maior autem est B E tota ipsa E T, maior itaque erit E T ipsa T B: secta igitur est B E in T extrema ac media ratione, per secundam diffinitionem sexti: cùm autem æquales sint B E & A G, à quibus æquales tolluntur B T T A, Reliquæ igitur T E & T G æquales erunt. Binæ igitur A G B E (binos angulos proximos subtendentes) sese in T extrema & media ratione secant adinuicem, & ipsius pentagoni lateribus sunt æquales. Si igitur quinquanguli, æquilateri, & æquianguli binos ordinatim, &c.



PROPO

PROPOSITIO IX.

Si hexagoni,& decagoni latus in eodé circulo deſcriptorum componantur, tota recta extrema & media ratione ſecatur, & maius ſegmentum eſt ipſius hexagoni latus.



Proponatur circulus A G B, in eo verò deſcriptarum figurarum, latus quidem decagoni ſit B G, latus verò hexagoni, ſit G D, ſint autem in rectam B G G D: Dico ipſam B D extrema & media ratione ſectam eſſe in G, maius verò eius ſegmentum eſſe G D hexagoni latus: ſit centrũ circuli A B G ſignum E, per primam tertij, dimetiens verò A E B, iungantúrque E G E D rectæ. Quoniam B G latus eſt decagoni, arcus B G quarta pars erit arcus G A, & proinde angulus G E A quadruplus erit anguli B E G, per trigeſimamtertiam ſexti, ſed & G E A binis interioribus E G B E B G (per trigeſimamſecundam primi) eſt æqualis. Igitur bini quadruplum ipſius B E G efficiunt: cùm autem E G B E B G ſint (per quintam primi) æquales, nam binæ E B E G ſunt ex centro, ſinguli eorum ſcilicet E G B vel E B G dupli erunt ipſius B E G: quia verò G D eſt latus hexagoni, ipſa æqualis erit ei quæ ex cẽtro G E, per corollarium decimæquintæ quarti, quare anguli G D E G E D (per quintam primi) erunt æquales. Atqui ipſis æquus eſt exterior B G E, per trigeſimamſecundam primi. Angulus igitur B G E duplus eſt anguli G D E: ſed & idem B G E duplus fuit ipſius G E B, ipſi itaque B D E & G E B anguli ſunt æquales, cõmunis verò eſt G B E, reliquus igitur D E B reliquo B G E æquus erit, per trigeſimamſecundam primi. Triangulorum igitur B D E B E G æquiangulorum proportionalia ſunt (per quartam ſexti) latera D B ad B E ſicut B E ad B G: æqualis autem eſt recta B E quæ ex centro ipſi G D, vt patuit. Sicut igitur tota D B ad D G æqualem ipſi B E, ſic extrema & media ratione eadem D G ad G B: maior autem eſt tota D B ipſa D G: maior igitur erit (per decimamquartam quinti) D G ipſa G B: totius igitur D B extrema & media ratione ſectæ in G, maius ſegmẽtum fuit D G hexagoni latus, minus verò G B decagoni eidem circulo inſcriptorum. Si itaque hexagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum, &c.

COROLLARIVM.

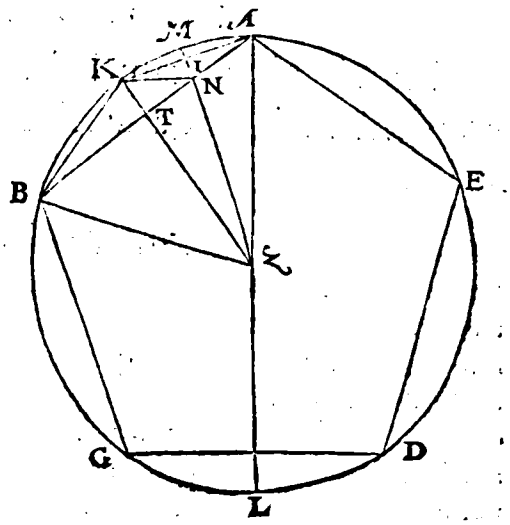
Hinc ſequitur lateris hexagoni extrema & media ratione ſecti, maius ſegmentum eſſe latus decagoni, eidem circulo inſcriptorum.

Si enim à recta D G ſecetur æqualis ipſi G B, dicemus eſſe ſicut tota D B ad totam D G, ablatam D G ad ablatam G B, erit igitur (ex decimanona quinti) reliqua ad reliquam, ſicut tota ad totam. Quare ſimiliter ſecta erit D G ipſi D B, media & extrema ratione, per tertiam diffinitionem ſexti, &c.

PROPOSITIO X.

Si in circulo quinquangulum æquilaterum deſcriptum fuerit, ipſius quinquanguli latus poteſt & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum.

Deſcri



Deſcribatur in circulo A G D quinquangulum A B G D E æquilaterum, cuius vnum latus ſit A B: Dico A B poſſe latus hexagoni & decagoni in eo circulo deſcriptorum. Sumatur (per 1 tertij) cẽtrum circuli A G D ſitq; Z, connexis autem Z B & diametro A Z L demittatur in rectam B A perpendicularis, quæ ſit Z T K ductis B K K A rectis, rurſus fiat perpendicularis à ſigno Z in rectam A K, quæ ſit Z I producta in M, ſecet rectam B A in N coniuncta K N: quoniam recta A L ſecat bifariam circulum A G D, per 17 diffinitionẽ primi, & æquales rectæ A B B G, rectis A E E D æquales arcus auferunt, per 28 tertij, reliqui G L L D erunt æquales: cùm autem (per tertiam tertij) æquales ſint B T T A, communis verò T Z, & anguli ad T recti, reliqui A Z K B Z K (per 4 primi) æquales erunt, ideo (per 26 tertij) æquales erunt arcus A K K B, quare & æquales erunt arcus A K & G L, æqualium D G & A B dimidij, & proinde ſubtenſæ A K K B, erunt latera decagoni: quia verò perpendicularis eſt Z I ad A K, ſimiliter æquales erunt rectæ A I I K, & arcus A M M K: cùm autem æquales ſint arcus G L K A, duplus erit G L ipſius K M, necnon B G ipſius B K arcus. Totus itaq; B G L totius M K B duplus erit, angulus igitur L Z B anguli B Z M duplus erit, per 33 ſexti. Sed idem L Z B angulus anguli Z A B duplus eſt, per 20 tertij. Æequales itaq; ſunt Z A B & N Z B, eiuſdem dimidij. Triangulorum ideo A B Z & B N Z bini anguli B A Z & B Z N ſunt æquales, communis verò N B Z. Reliqui itaque A Z B Z N B erunt æquales (nempe duorum rectorum reſidui, per coroll. 32 primi) æquiangula igitur erunt A Z B B Z N triangula, & proinde erit (per 4 ſexti) A B ad B Z ſicut Z B ad B N. Quod itaque ſub A B B N, æquum erit ei quod ex B Z, per 17 ſexti. Cæterùm quia A I I K rectæ ſunt æquales, angulos verò æquales ad communem I N efficiant, triangula A I N & K I N æqualia erunt, & æquiangula, per 4 primi, æqualis itaque erit A N ipſi N K, & idcirco (ex quinta primi) anguli N A K N K A æquales erunt, ſimiliter & K A B ipſi K B A, & (per primam communem ſententiam) K B A ipſi N K A, reliquus igitur B K A reliquo K N A æquus erit: æquiangula itaque erunt A K B & A N K triangula: erit igitur (per quartam ſexti) B A ad K A, ſicut K A ad A N. Quod igitur ſub B A A N æquum erit quadrato A K, lateris quidem decagoni per 17 ſexti. Patuit autem quod ſub B A B N æquum eſſe ei quod ex B Z, quod per corol. 15 quarti, eſt latus hexagoni. Sed quod ex B A latere pẽtagoni, æquum eſt binis ſcilicet ei quod ſub A B B N & ſub B A A N per 2 ſecundi. Latus igitur pentagoni A B poteſt ipſas B Z & A K (ea quæ ſub A B B N & ſub B A A N potẽtes) latera quidem hexagoni & decagoni in eodem circulo deſcriptorum. Si itaque in circulo quinquangulum æquilaterum deſcriptum, &c.

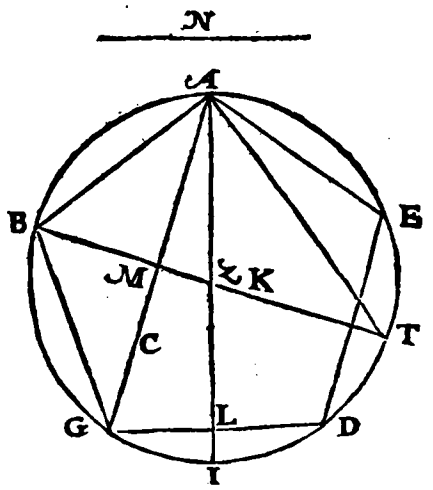
COROLLARIVM.

Ab angulo per centrum acta, baſim pentagoni bifariam ſecat.

Nam recta A L per centrum Z ducta bifariam ſecat arcum G D, vt patuit. Anguli igitur G Z L & D Z L æquales erunt, per 26 tertij, & æquis lateribus comprehenſi: baſes ideo æquales erunt, per quartam primi. Secta eſt igitur G D bifariã. & ideo ad rectos (per tertiam tertij) à recta A Z L perpendiculari.

PROPOSITIO XI.

Si in circulo certam habente diametrum quinquangulum æquilaterum inſcribatur, eius latus incerta eſt, eáque appellatur Minor.

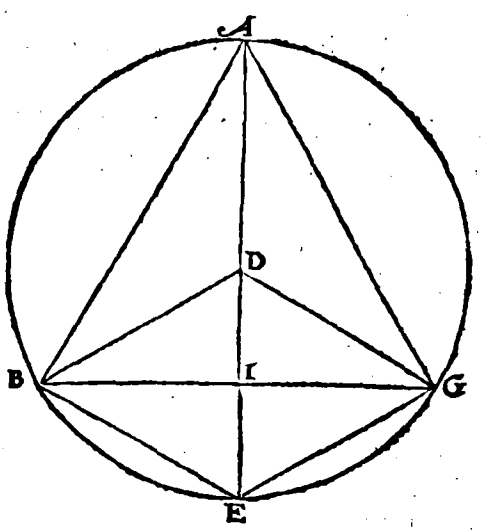


Eſto circulus A G D habens diametrum certam, illi circulo inſcribatur quinquangulum æquilaterum A B G D E: Dico eius quinquanguli latus eſſe lineam incertam, quæ dicitur minor. Sit ipſius circuli centrum Z, per primam tertij, dimetientes verò ſint A Z I B Z T. ductis A G, A T, à ſemidiametro Z T, quarta pars auferatur Z K, per nonam ſexti, ſimiliter ab ipſa G A quarta G C. Ipſa igitur Z K ſimul ac tota B K certæ erunt, per ſextam diffinitionem decimi. Cùm ab angulo in baſim per centrum acta ſit A Z L, ipſa biſariam ſecat G D latus, per corollarium præfatum: Baſes igitur G L L D æquales erunt, & dupla ideo G D rectæ G L. Similiter cùm A B B M binis G B B M ſint æquales, & anguli A B T G B T æquales, per 27 tertij, baſes A M M G (per eandem quartam primi) æquales erunt. Et proinde A G dupla ipſius M G erit. Quoniam enim triangulorum A Z M A G L angulus G A L eſt communis, rectus autem ſuit A M Z, nam B M ad rectos cadit, rectus item A L G, per tertiam tertij. Reliqui itaque A Z M & A G L æquales erunt, per coroll. 32 primi, nempe duorum rectorum reſidui. Ipſorum igitur A Z M & A G L proportionalia erunt, per quartam ſexti, latera L G ad G A ſicut M Z ad Z A. Et viciſſim (per 16 quinti) ſicut L G ad M Z, ſic G A ad Z A. Sed ſicut G A ad Z A vel Z T, ſic (per decimamquintam quinti) erunt earũ quartæ partes, ſcilicet G C ad Z K. Sicut igitur (per vndecimam quinti) L G ad M Z, ſic erit G C ad Z K: viciſſim itaque (per 16 quinti) erit L G ad G C ſic M Z ad Z K. Quare (per 15 quinti) erit ſicut M Z ad Z K, ſic G D (dupla ipſius G L) ad G M, duplam ipſius G C. Quia verò eſt M Z ad Z K ſicut G D ad G M, erit componendo (per 18 quinti) G D G M ſimul ad G M, ſicut tota M K ad Z K. Et ideo (per 22 ſexti) quod ex G D G M ſimul ſumptis, ad quod ex G M erit, vt quod ex M K ad quod ex Z K. Cùm autem rectæ G A extrema & media ratione ſectæ, maius ſegmentum ſit G D pentagoni latus, per 8 huius, Sequetur (ex prima huius) G D maius cum G M (dimidia totius) rectas ſimul ſumptas, quintuplum poſſe eius quod fit ex G M dimidia totius. Quintuplum igitur erit quod ex M K eius quod ex Z K. Nam fuit ex G D G M ad quod ex G M, ſicut quod ex M K ad quod ex Z K. Recta itaque M K certa erit, per ſextam diffinitionem decimi, poteſt enim quintuplum certæ Z K. Quoniam autem poſuimus Z K quartam eſſe ipſius T Z vel A Z ſemidiametri, quintupla erit B K ipſius Z K, & ideo qualium Z K poteſt vnam aream, earum poterit B K viginti quinque. Sed qualium Z K potuit vnam, earum M K potuit quinque. Qualium itaque B K potuit vigintiquinque, earum potuit M K quinque. Quintuplum igitur poterit B K ipſius M K, quæ quidem B K & M K cùm iam oſtenſæ ſint certæ, nempe rationem numerorum potentia habentes, ipſæ potentia commenſurabiles erunt certæ propoſitæ Z K. Sed & inter ſe potentia tantùm, cùm habeant rationem quadrati 25 ad non quadratum quinque, quæ non eſt quadratorum ratio, per coroll. 25 octaui. Et proinde latera B K & K M longitudine incommenſurabilia, per nonam decimi. Certæ ideo potentia tantùm commenſurabiles ſunt B K & K M. Reliqua igitur B M apotome erit, per 73 decimi, congruens verò ſola M K, per 79 decimi. Poſſit autem tota B K maius congruente M K, eo quod ex N. Quia verò qualium potentia B K fuit quinque,

que, earum M K fuit vnius. Ipſa itaque N exceſſus, earum poterit 4 quarum B K potuit quinque, M K verò vnum. Exceſſus igitur N toti B K longitudine incommenſurabilis erit, per nonam decimi, cùm habeant rationem quadrati 4 ad non quadratum 5, & ideo non quam quadrati habent, per coroll. 25 octaui. Tota igitur B K maius poteſt congruente M K, eo quod fit à ſibi longitudine incommenſurabili. Sed tota B K expoſitæ certæ (ſcilicet diametro B T) longitudine fuit commenſurabilis, per ſextam decimi, Cùm ipſius B T quinque octauas ſumpſerit, per conſtructionem, & ideo rationem habeant numerorum: Recta igitur B M apotome erit quarta, per quartam apotomarum diffinit. Si autem area comprehendatur ſub certa B T & apotome quarta B M, hanc aream potens vocatur minor, per 94 decimi. Quia verò trianguli A B T rectanguli (per 31 tertij) in baſim B T demiſſa perpendicularis A M, efficit (per coroll. 8 ſexti) latus A B quod ad ſegmentum B M medium proportionale, inter totam B T & ipſam B M, Sequetur quadratum quod ex A B (latere pentagoni) æquum eſſe (per 17 ſexti) ei quod ſub extremis B T certa & B M apotome quarta. Illud igitur quadratum potens A B latus pentagoni, vocatur minor, per eandem 94 decimi. Si igitur in circulo certam habente diametrum quinquangulum æquilaterum, &c.

PROPOSITIO XII.

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcriptum fu rit, ipſius trianguli latus potentia triplum eſt eius quæ ex centro circuli.



In circulo A B E G triangulum æquilaterum deſcriptum ſit A B G: Dico trianguli A B G latus, potentia triplum eſſe eius quæ ex centro circuli A B G E. Sit (per primam tertij) centrum D circuli A B E G, producta A D in E, ductis B E, B D, & G E, G D, rectis. Quoniam dimetiens A E bifariam ſecat circulum, æquales erunt arcus B E & E G. Nam æqualium A B A G ſunt reſidui. Recta igitur B E ſextam ſubtendit circuli partem, & proinde ei quæ ex centro eſt æqualis, per coroll. decimæquintæ quarti. Sed A E dimetiens (ipſius ideo B E dupla) quadruplum eius poteſt, per vigeſimã ſexti. Hoc autem quadruplũ poſſunt binę A B B E, per 47 primi. Binæ igitur A B B E quadruplum poſſunt eius quod ex B E: Ablato itaque ipſius B E quadrato, reliquum A B trianguli latus, triplum poteſt rectæ B E, ſiue eius quæ ex centro ſibi æqualis. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum, &c.

COROLLARIVM I.

Hinc ſequitur, latus trianguli ſecare bifariam eam quæ à centro ſibi perpendicularis ad circunferentiam ducitur.

Cùm enim triangula B D G B E G ſint (ex octaua primi) æquiangula, anguli D B I E B I erunt æquales, & ideo (per quartam primi) D I I E baſes, æquales erunt.

COROLLARIVM II.

Præterea trianguli æquilateri latus, potentia ſeſquitertium eſt eius quæ ab vno angulorum in latus oppoſitum perpendicularis cadit.

Nam qualium A B eſt potentia 12, earum B I (dimidia) erit trium. Reliqua igitur A I earundem partium erit 9, cùm binæ A I B I (per 47 primi) ipſam A B poſſint, quæ quidem potentia 12 eſt ipſius 9, ſeſquitertia.

COROLLARIVM III.

Cæterum trianguli latus media eſt proportionalis inter dimetientem & perpendicularem.

Scilicet A B ad A B vt A B ad A I, ex coroll. 8 ſexti.

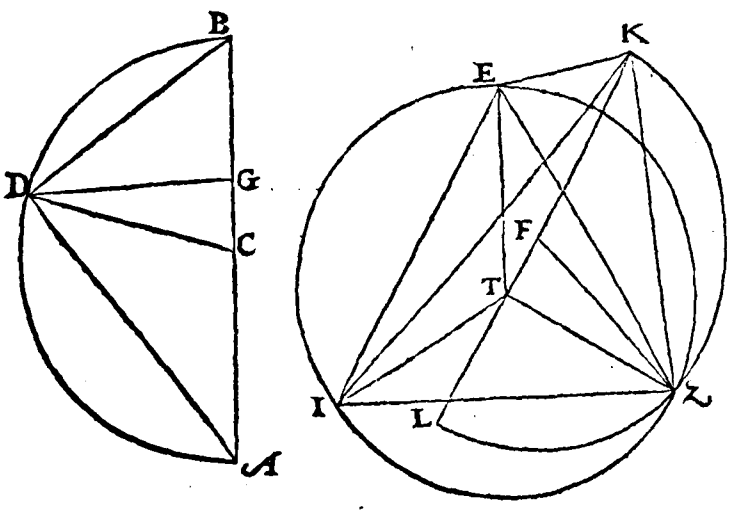
COROLLARIVM IIII.

Et inſuper quæ ab angulo perpẽdicularis, baſim bifariam ſecat, & per centrum tranſit.

Nam ſi alia duceretur ab A in I recta, quàm ea quæ per D ducitur, binæ rectæ ſuperficiem concluderent, contra 12 comm. ſentent. quod fieri non poteſt. Quare ſequitur oppoſitum, quæ ſcilicet per centrum tranſit, perpendicularis eſt baſi, per tertiam tertij.

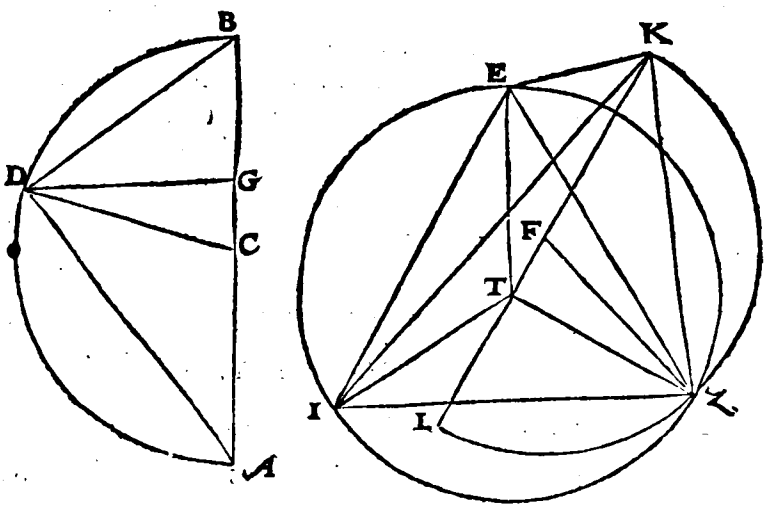
PROPOSITIO XIII. PROBLEMA I.

Pyramidem trilateram & æquilateram conſtituere, & data Sphæra comprehendere, & demonſtrare, quòd ipſius ſphæræ dimetiens potentia ſeſquialter eſt lateris ipſius Pyramidis.



Data ſphæra ſit ea quæ ſub dimetiente A B, ipſi verò A B centro C ſemicirculus deſcribatur A D B, ab ipſa porrò A B tertia pars abſcindatur (per nonam ſexti) ſitq; G B, ipſi item A B à ſigno G ad rectos excitetur recta D G, coniunctis A D D B & C D. Ponatur autem rectæ G D æqualis T E, centro verò T interuallo T E circulus E Z I fiat, cui circulo triangulum æquilaterum inſcribatur (per ſecundam quarti) E I Z, productis T E T Z T I. Ad ſignum inſuper T ad rectos excitetur plano

E Z I T, recta T K, per duodecimam vndecimi, quæ æqualis abſcindatur ipſi G A coniunctis K I K E K Z, producta verò K T in rectum, ipſi G B æqualis ponatur T L, cùm enim recta T K ſit ad planum E Z I T recta, rectos efficiet ad ipſas T E T I T Z angulos, per ſecundam diffinitionem vndecimi: cùm autem triangulorum K T Z & A G D bina latera K T T Z, binis A G G D ſint æqualia, & æquos (nempe rectos) contineant angulos, per conſtructionem, æqualia erunt ipſa K T Z & A G D triangula (per quartam primi) & æquiangula. Similiter triangula K T E & K T I eidem A G D, & proinde adinuicem erunt æqualia & æquiangula, baſes verò K E K I K Z A D (per quartam primi) æquales: erit igitur trilatera pyramis E Z I K, dico quòd æquilatera, cùm ab angulo recto A D B in baſim A B perpendicularis agatur D G, ſimilia erunt (per octauam ſexti) A B D A D G D B G triangula. Erit igitur A B ad D B ſicut D B ad G B, ſicut itaque A B ad G B, ſic quod ex A B ad quod ex D B, per corollarium vigeſimæ ſexti, tripla autem eſt A B ipſius B G, triplum igitur erit quadratum ex A B ad quod ex D B: quia rurſus ex ſimilitudine triangulorum eſt A B ad B D ſicut A D ad D G, erit (per vigeſimamſecundam ſexti) ſicut quod ex A B ad id quod ex D B, ſic quod ex A D ad id quod ex D G: triplum autem fuit quadratum A B quadrati D B, triplum igitur erit quadratum A D quadrati D G: quia verò æqualis eſt K Z ipſi A D, & T Z ipſi G D, triplum erit quadratum ipſius K Z quadrati T Z: ſed eiuſdem T Z quadrati triplum poteſt E Z, per duodecimam huius, æqualis igitur erit E Z ipſi K Z, & proinde reliqua K I K E E I Z I pyramidis E Z I K latera, ipſis & adinuicem erũt æqualia: pyramidem itaque conſtruximus æquilateram E Z I K. Cæterũ ſi æqualibus poſitis K T & A G æquales poſitæ addantur T L & G B, tota K L toti A B æqualis erit. Secetur bifariam K L in F, cùm æquales ſint K F & A C, per ſeptimam comm. ſentent. reliqua F T ipſi C G erit æqualis. Triangula igitur F T Z & C G D duo latera duobus circum æquales angulos D G C & Z T F rectos æqualia habent: baſes igitur F Z & C D æquales habebunt, per quartam primi. Eodem patebit argumẽto eandem C D æqualem eſſe eis quæ ſigna E F & I F coniungerẽt, illæ etenim æquos & æquis lateribus comprehenſos (ipſi F T Z) comprehendunt angulos, recta verò C D ipſi A C (quæ ex centro) æqualis eſt, quare recta F Z ipſi F K æqualis erit: ſimiliter & ipſis F E F I F L: centro igitur F, interuallo verò F K vel F Z ſemicirculus K Z L fiat, quo circunducto manente dimetiẽte K L, quoad vnde cœpit redeat, deſcribetur ſphæra circa F centrum, per duodecimam diffinitionem vndecimi, tangens ſingulos pyramidis qui ad K E I Z angulos, nam illi ipſius ſphæræ ſemidiametro F K à centro ſphæræ æquè diſtant, vt patuit. Pyramidem igitur trilateram ac æquilateram datæ ſphæræ cuius dimetiens eſt K L, vel A B, inſcripſimus hanc E Z I K: quod autem eius dimetiens K L ſit potentia ſeſquialter lateris K Z ipſius pyramidis patet, oſtenſum eſt quadratum D B tertiam eſſe partem quadrati A B, reliquæ verò duæ tertiæ eiuſdem ex A B ſunt in quadrato A D, per quadrageſimamſeptimam primi. Nam A B binas A D D B poteſt, ſeſquialterum itaque erit quadratum A B quadrati A D, & proinde K L ſphæræ dimetiens ipſi A B æqualis, ſimiliter ſeſquialterũ poterit ipſius K Z lateris pyramidis ipſi A D æqualis. Pyramidem igitur trilaterã & æquilaterã conſtituimus, & data, &c.



COROLLARIVM I.

Dimetiens Sphæræ quadruplum ſeſquialterum poteſt eius quæ ex centro circuli baſim Pyramidis continentis.

Cùm oſtenſum ſit dimetientem K L ſeſquialterum poſſe lateris E Z, & oſtenſum ſit inſuper latus E Z triplum poſſe eius T E (quæ ex centro circuli) triangulum E Z I ambientis, ex 12 huius, relinquetur oſtẽſum (per quintam diffinitionem ſexti) rationem K L & T E extremarum, ex quantitatibus rationum mediarum ſcilicet I $\frac{1}{2}$ per 3 inter ſe multiplicatarum 4 $\frac{1}{2}$ componere, quæ eſt ipſius A B ad T E ratio quadrupla ſeſquialtera potentia.

COROLLARIVM II.

Et inſuper ab angulo Pyramidis per centrum Sphæræ in baſim oppoſitam demiſſa, ipſi baſi vnica perpendicularis erit, & in centrum circuli baſim continentis cadet.

Nam ſi alia (ab ipſa K F T per centrũ ſphæræ in centrum circuli ducta) angulos rectos ad baſis planũ efficeret, ab eodẽ ſigno duæ rectę eidem plano ad rectos cõſtituerentur, contra decimamtertiam vndecimi, quod fieri non poteſt. Si verò alia à vertice K ad baſis centrum T non per centrum F duci poſſe credatur, binæ rectæ ſuperficiem concludent, quod erit abſurdum, contra 12 communem ſententiam. Ea igitur quæ per centrũ ſphæræ ducitur in centrum baſis, vnica perpendicularis erit. Quę verò in centrum baſis ab angulo perpendicularis erit, per centrum ſphæræ tranſibit.

COROLLARIVM III.

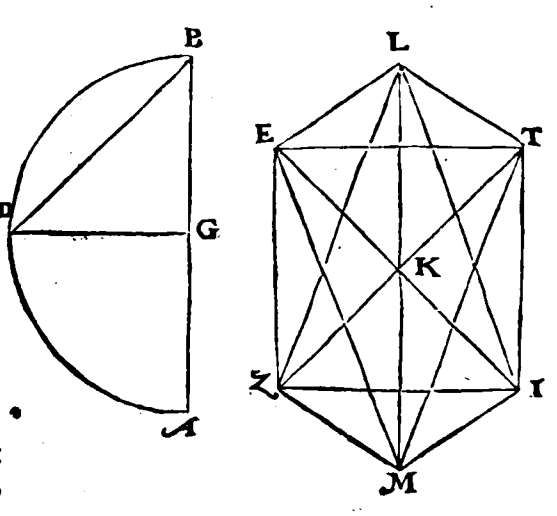
Præterea perpendicularis à centro Sphæræ in baſim Pyramidis æqualis eſt ſextæ parti dimetientis Sphæræ.

Vt patuit C G ſextam partem ipſius A B æquam fuiſſe ipſi F T, centra ſphæræ & baſis coniungenti.

PROPOSITIO XIIII. PROBLEMA 2.

Octaëdrum conſtituere, eadémque Sphæra, qua pyramidem comprehendere, & oſtendere quòd ipſius Sphæræ dimetiens potentia lateris ipſius Octaëdri duplus eſt.

Eſto propoſitæ ſphæræ præfatæ dimetiens A B, centrum verò G, ſuper A B autem ſemicirculus fiat A D B, excitetúrque ipſi A B perpendicularis D G, coniuncta D B, cui æqualis ponatur E T: ex E T verò quadratum fiat E Z I T, per 46 primi, cuius dimetientes ſint E I T Z, ſeſe in K ſecantes, qui itaque bifariam ſeſe ſecabũt, per corollarium 34 primi. Plano autem E Z I T ad ſignum K recta excitetur K L, æqualis rectæ D G, per duodecimam vndecimi. Producta autem L K in M, æqualis fiat K M ipſi K L, vel G D, quæ ex centro



ſphæræ

ſphæræ. Cùm autem æquales ſint rectæ KE KT KI KZ, & earum baſes ET TIIZ ZE æquales, nempe quadrati latera, anguli rectarũ EI TZ (qui ad K) æquales erunt, per 8 primi, & recti, per decimã eiuſdẽ diffinitionẽ. Recta igitur ET (per 47 primi) poteſt ipſarũ EK vel KT ſingularũ duplũ. Sed DB (æqualis ipſi ET poſita) duplum poteſt rectæ DG quę ex centro, per eandem 47 primi, cùm rectus ſit angulus DGB, ex hypotheſi: ipſi igitur DG quæ ex centro æquales erunt KE KT. Et proinde KI KZ, ſed & æquales poſitæ ſunt eidem DG rectæ LK KM, rectos angulos ad ipſas EI TZ facientes ad ſignum K, per ſecundã diffinitionem vndecimi. Recti igitur erunt omnes anguli quos efficiunt ad K rectæ EI TZ LM, ſed æquis lateribus comprehenſi, ſcilicet KE KI KT KZ KL KM, vt patuit. Eos itaque angulos æquales baſes LE LT LI LZ ad aliáſque partes ME MT MI MZ ſubtendẽt, per quartam primi, ſimulac quadrati latera eoſdem angulos ſubtendentia (ſcilicet ET TIIZ ZE) reliquis æqualia erunt, ex eadem quarta primi. Æquilatera igitur & æqualia erunt (ex eadem) triangula LET LTI LIZ LZE, MET MTI MIZ MZE adinuicem, quare octaëdrum erit EZITLM, per 22 diffinitionem vndecimi. Cùm autem ZT ſit æqualis dimetienti AB, nempe dupla earum quæ ex centro GD, vel GB, ſuper ipſa ZT ſemicirculus per ſigna TIZ ductus, manente recta ZT circunductus, quoad vnde cœpit redeat, ſphæram deſcribet (per 12 diffinitionem vndecimi) angulos EZ IT LM octaëdri ſua ſuperficie tangentem, eo quòd æquè diſtent à centro K, interuallo ipſius DG quæ ex centro, vt fuit oſtenſum. Sphæra igitur, cuius dimetiens fuit AB, vel ZT ſibi æqualis, octaëdrum EZITLM comprehendimus. Quòd autem eius ſphæræ dimetiens ZT duplum poſſit lateris ipſius octaëdri, indicat 47 primi. Nam rectæ EZ ET rectum quadrati EZIT angulum ZET comprehendentes, ſunt æquales: illas autem poteſt ſubtendens ZT. Ipſa igitur ZT ſingularum duplum poterit, & ideo reliquæ ipſi ZT æquales dimetientes, reliquorum laterum ipſi EZ æqualium duplum poterunt. Octaëdrum itaque conſtruximus, eadémque ſphæra quá pyramidem comprehendimus, & oſtendimus, &c.

COROLLARIVM I.

Pyramidis latus potẽtia ſeſquitertium eſt lateris Octaëdri eidem Sphæræ inſcripti.

Cùm enim dimetiens duplum poſſit lateris octaëdri, qualium dimetiens poteſt 6 earum poteſt latus octaëdri 3, ſed qualium dimetiens fuit 6, earum fuit latus pyramidis 4 potentia, per 13 huius. Qualium igitur pyramidis latus potuit 4, earum latus octaëdri potuit 3.

COROLLARIVM II.

Octaëdrum in binas Pyramides æquas & ſimiles diuiditur.

Harum communes baſes ſunt ſuper quolibet quadrato à lateribus octaëdri comprehenſo, ad quod conueniunt octaëdri octo triangula, quæ igitur pyramides (per octauam diffinitionem vndecimi) æquales erunt & ſimiles. Præfatum verò commune quadratum, dimidium eſt potẽtiæ dimetientis ſphæræ, cùm ſit quadratum lateris octaëdri.

COROLLARIVM III.

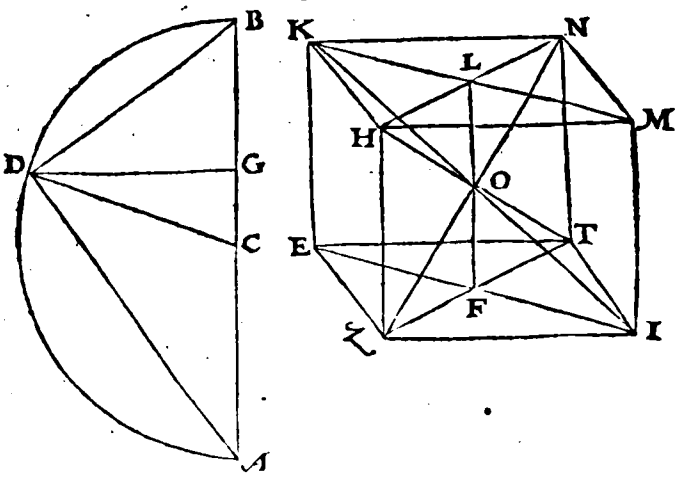
Præterea inferemus tres Octaëdri dimetientes ad rectos ſe biſariam in centro Sphæræ id continentis ſecare.

Vt patuit in ſigno K ac eiuſdem ſphæræ eſſe dimetientes.

PROPOSITIO XV. PROBL. 3.

Cubum conſtruere,& data Sphæra qua priora comprehendere,oſtenderéque quod ipſius Sphæræ dimetiens triplum poteſt lateris cubi.

Eſto datæ præcedentibus theorematis ſphæræ dimetiens A B, centrum verò C, ſuper quo ſemicirculus fiat A D B, à dimetiente A B tertia pars ſecetur B G, per nonam ſexti. Ipſi item A B ad ſignum G perpendicularis excitetur D G, per vndecimam primi, coniunctis D A D C D B. Rectæ quidem D B æqualis ponatur Z I. Ex Z I quadratum deſcribatur E Z I T, ſuper ſignis verò E Z I T perpendiculares plano E Z I T ipſi Z I æquales excitentur E K Z H I M T N, coniunctis K H H M M N N K, quæ ipſi Z I & reliquis æquales erunt (per trigeſimamtertiam primi)& parallelæ. Et inſuper angulos æquos ſuſcipient, per decimam vndecimi, qui ideo recti erunt, cùm quadratum ſit E Z I T, & reliquæ igitur baſes quadrata erunt. Cubus igitur erit E Z I T K H M N ſolidum ſub ſex quadratis æqualibus cõprehenſum, per 21 diffinitionem vndecimi. Per oppoſita igitur cubi latera K E & M I planum extendatur K E I M, per alia rurſus N T & H Z aliud planum H Z T N. Cùm horum planorum ſingula ſolidum bifariam ſecent, ſcilicet in bina Priſmata æqua & ſimilia (per 8 diffinitionẽ vndecimi) ipſa igitur plana per centrum illud ſecabunt, per corollarium trigeſimæ nonæ vndecimi. Communis igitur eorum planorum ſectio in centrum cadet quæ ſit L F. Quoniam planorum K E I M & H Z T N latera H N & K M bifariam ſeſe ſecant, per corollarium 34 primi, ſimiliter & Z T & E I. Per has itaque ſectiones ducitur communis ſecans L F, bifariam diuidens plana K E I M & H Z T N per primam ſexti, ſuper æquis baſibus & eodem vertice cubi, quare ipſa L F ſuorum planorum dimetientes bifariam ſecabit, per corollarium trigeſimæquartæ primi, ſcilicet rectas K I E M Z N H T cubi dimetientes. Ad ſignum igitur idem conuenient ſeſe ſecantes: ſit itaque illud O. Æquales igitur erunt rectæ O K O E O I O M O H O Z O T & O N, per ſeptimam communem ſententiam, cùm ſint æqualium & ſimilium rectangulorum dimetientium dimidiæ. Centro igitur O, interuallo autem aliqua earum O E vel O K &c. extenſa ſphæræ ſuperficies, ſingulos cubi angulos, qui ſcilicet ad E Z I T K H M N ſuſcipiet, per duodecimam diffinitionem vndecimi, cùm omnes à ſigno O ad angulos cubi ductæ ſint æquales. Cæterùm recta E I binas poteſt E Z & Z I æquales, per quadrageſimamſeptimam primi. Duplum igitur poteſt E I ipſius Z I: quia verò K I angulum rectum ſubtendit K E I, eo quòd K E ſit recta ad planum rectarum E Z E T, per quartam vndecimi, cùm quadratæ ſint cubi baſes, recta K I poteſt ipſam E I ac inſuper K E æqualem ipſi Z I, quare recta K I triplũ ipſius Z I poterit, ſed rectæ Z I æqualis eſt D B recta, cuius triplum potuit dimetiens A B, per decimætertiæ huius demonſtrata: ipſæ itaque K I & D B dimetientes, erunt æquales. Cubum igitur conſtruximus K I, & data ſphæra cuius dimetiens A B comprehendimus, eadem qua & priora ſolida. Oſtendimúſque quòd ipſius ſphæræ dimetiens K I vel A B, potentia tripla fuit lateris cubi, ſcilicet D B vel Z I.



COROL

COROLLARIVM I.

Sequitur inde, sphæra dimetientem posse & pyramidis & cubi sibi inscriptorum latera.

Nam pyramidis potentia lateris, ipsius dimetientis duo tertia sibi (per decimam tertiam huius) sumit, Cubi verò lateris potentia (ex hac) vnum tertium dimetientis eiusdem sumit. Pyramidis itaque & cubi latera potest sphæræ dimetiens.

COROLLARIVM II.

Cubi omnes dimetientes & singuli sese in centro sphæræ cubum continentis bifariam secant.

Ac insuper rectas centra basium oppositarum coniungentes bifariam secant in eodem signo, vt ostendit recta L O F. Nam anguli L K O & F I O sunt æquales, per vigesimamnonã primi, & æquis lateribus L K ipsi F I & K O ipsi I O ostensis compre hensi, bases igitur L O F O æquales erunt, per quartam primi. Similiter ostendentur reliquæ centra basium cubi oppositarum iungentes, bifariam secari in ipso centro O.

MONITVM.

Huius demonstrationem aliam construximus, vt inde proximum eliceremus corollarium, futuris admodum decimiquinti solidorum inscriptionibus vtile perficiendis.

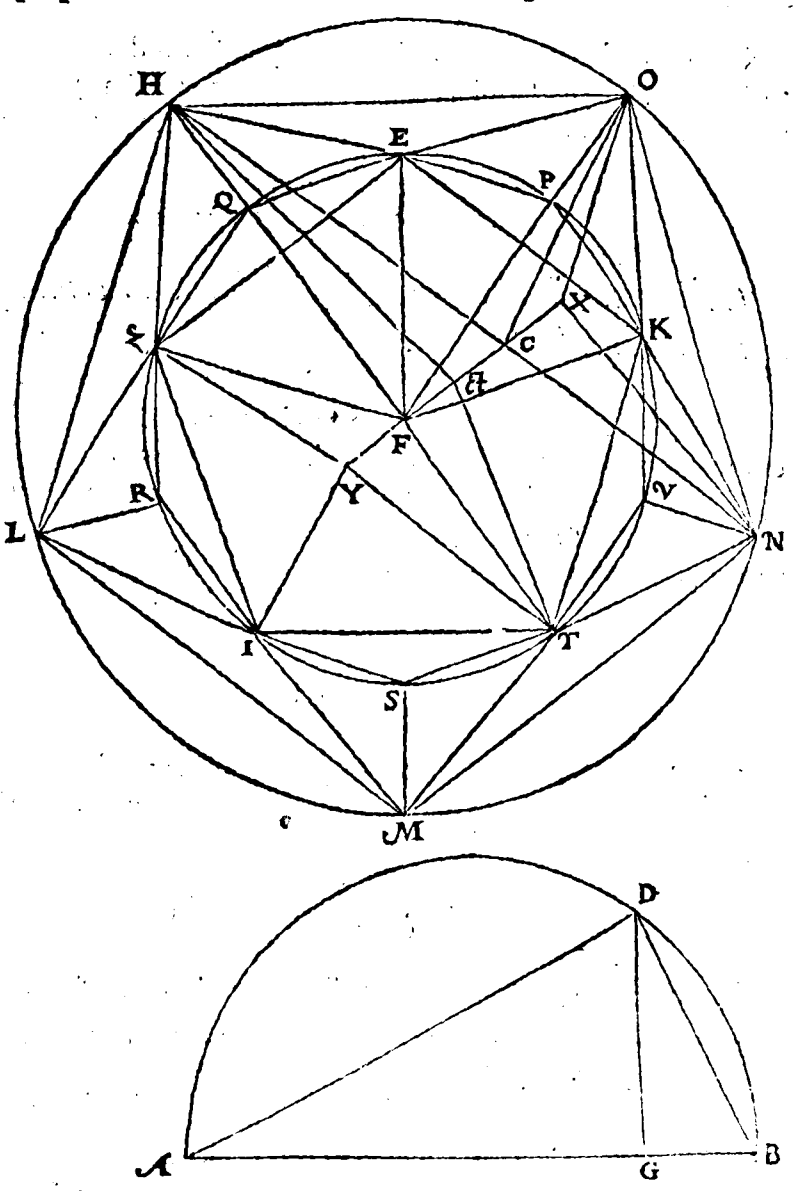
PROPOSITIO XVI. PROBLEMA 4.

Icosaëdrum construere & data Sphæra comprehendere, qua & dictas figuras, ostenderéque quòd ipsius Icosaëdri latus incerta linea est, eáque appellatur Minor.

Proponatur datæ prioris sphæræ diameter A B, à quo quinta pars (per nonam sexti) abscindatur G B, super A B verò semicirculus fiat A D B, ipsiq; A B ad signum G perpendicularis excitetur D G coniunctis D A D B rectis. Rectæ verò D B æqualis ponatur E F, centro autem F interuallo F E circulus designetur E I V, in quo (per vndecimam quarti) pentagonum æquilaterum & æquiangulum describatur E Z I T K: secentur verò (per trigesimam tertij) bifariam circunferentiæ E Z Z I I T T K K E in Q R S V P, coniunctæ igitur E Q Q Z Z R R P P K & reliquæ, erunt latera decagoni circulo E I V inscripti. Ab ipsius circuli plano, à signis verò Q R S V P F perpendiculares excitentur (per duodecimam vndecimi) Q H R L S M V N P O F C, quæ secen tur æquales ei quæ ex centro E F vel D B: ipsæ itaque (per sextam vndecimi) parallelæ erunt, & æquales. eas itaque cõiungentes rectæ C H C O C N, necnon C M & C L æquales, & parallelæ erunt rectis F Q F P F V F S & F R. Parallela igitur sunt per ipsas plana E Z I T K & H L M N O, per decimamquintam vndecimi. Centro igitur C interuallo C O vel C H circulus per H L M N O ducetur, qui æqualis erit circulo E I V. Nam quæ ex centro F Q & C H fuerunt æquales: coniunctæ igitur H L L M M N N O O H pentagonum constituent, cuius latera lateribus ipsius E Z I T K sunt æqua-

lia, per

lia, per vigeſimamnonam tertij, ſingula etenim bina decagoni ſubtendunt latera, vel quintam partem æqualium circulorum. A ſignis autem ſuperioribus, ſcilicet HLMNO, ducantur ſubtendentes HE HZ LZ LI MI MT NT NK OK OE angulos rectos, qui ſub perpẽdicularibus HQ OP LR cum reliquis, & laterib us decagoni RZQEP, &c. Cùm autem perpẽdiculares HQOPLR &c. poſitæ ſint ei quæ ex centro FE æquales, ipſq; lateri hexagoni ei circulo inſcripti æquantur, per corollariũ decimæquintæ quarti. Quare rectæ HE HZ OE OK (ſubtendentes ipſarum perpendicularium cũ decagoni lateribus angulos rectos) ipſas poterunt, per quadrageſimã ſeptimã primi: ſed decagoni & hexagoni latera poteſt latus pentagoni (ZE vel HΘ) eidem circulo inſcripti per decimã huius: Ipſæ itaque ſubtendẽtes HE HZ OE OK KN, &c. idẽ potentes ipſis pentagoni lateribus EZITK vel HLMNO æquales erunt. Et proinde æquilatera erunt, ex ipſis triangula HZE EOH OEK KNO NKT TNM MTI IML LIZ ZLH numero decem. Rurſus producatur recta FC ad vtraſque partes in Y & X: ſecentur autem æquales lateri decagoni QE, rectæ FY & CX, quia recta XY ad planum EZITK recta fuit, ipſa ad reliquum HLMNO recta erit, per corollarium decimæquartæ vndecimi. Coniunctæ itaque XO XN XM & reliquæ YZ YI YT ſubtendunt eam quæ ex centro CO & latus decagoni CX, ad rectos conſtitutas, quæ proinde (per quartam primi) æquales erunt ipſæ XO XN XM & reliquæ lateri pentagoni, eaſdem rectas ſubtendenti, per decimam huius, quare triangula ex binis illis rectis XO XN & latere pentagoni ON & reliqua XNM XML XLH & XHO ſunt æquilatera, quæ quidem ſunt quinque numero: ſimiliter eiſdem æquilatera oſtendentur reliqua oppoſita à vertice Y ad baſes pentagoni EZITK ducta, quæ itaque viginti æqualia & æquilatera triangula ſolidum componentia erunt, & ideo ſolidum illud Icoſaëdrum dicetur, per vigeſimamquartam diffinitionem vndecimi. Vt autem illud priorum ſphæra



concipi

concipi doceamus, cuius ſcilicet dimetiens ſuit A B, ſecetur biſariam F C in & coniunctis & H & T, quoniam F X recta componitur ex F C (quæ æquatur lateri hexagoni ſcilicet ei quæ ex centro F E) & C X lateri dacagoni, ipſa extrema & media ratione ſecatur in C, & maius ſegmentum eſt F C, per nonam huius. Si igitur minus C X & maioris F C dimidia & C componantur, tota & X quintuplũ poteſt eius quod ex & C, per tertiam huius: ſed quia F C & C H poſitæ ſunt æquales ei quæ ex centro, recta H C quadruplum poterit rectæ & C dimidiæ, per vigeſimam ſexti, atqui ipſas H C & C rectum angulum comprehendentes ſubtendit & H, & proinde illas poteſt, per quadrageſimamſeptimam primi, recta igitur & H quintuplum poterit rectæ & C, quare æquales erunt & H & & X eiuſdem & C quintuplum potentes. Similiter oſtendemus ipſis & H & X æquales eſſe, reliquas à ſigno & ad reliquos angulos L M N O, ſubtendunt enim rectos angulos ab ipſa C & & eis quæ ex centro comprehenſos: ſed quia ipſi C & æqualis eſt F &, ſimiliter recta ad reliquum planum E Z I T K, eadem T & cum reliquis quæ ex ſigno & in angulos reliquos E Z I T K, ſubtendent angulos rectos ſub recta F & (ipſi & C æquali) & rectis F T F K F E, &c. quæ ex centro (reliquis C H C O æqualibus) comprehenſos. Æquales igitur erunt rectæ & T & K & E & Z & I rectis & H & L & M & N & O, quibus æqualis oſtenſa eſt & X dimidia totius X Y, reliqua itaque & Y eiſdem æqualis erit: ſi igitur centro & interuallo autem altera quadam harum, ſphæræ ſuperficies extẽdatur, ipſa icoſaëdri duodecim tanget angulos, E Z I T K H L M N O X Y, quæ deſcribetur ducto ſemicirculo, (ſuper dimetiente X Y facto) manente recta X Y quoad vnde cœpit redeat, per duodecimam diffinitionem vndecimi. Cæterùm quia patuit rectam & X quintuplum poſſe rectæ & C, ſequetur totam X Y quintuplum poſſe totius F C, per decimamquintam quinti, ſunt enim duplæ, & ideo quintuplum rectæ F E, quæ ex centro ipſi F C æqualis, necnon ipſius D B eiſdem æqualis quintuplum poterit igitur ipſa X Y. Cùm autem media ſit D B, quæ ad ſegmentum G B, inter A B & G B, per corollarium octauæ ſexti, erit ſicut A B ad B G, ſic quod à prima A B ad quod ex ſecunda D B, per corollarium vigeſimæ ſexti: quintupla autem fuit A B ipſius B G, ex hypotheſi, quintuplum igitur erit quod ex A B dimetiente ſphæræ, eius quod ex D B æquali lateri icoſaëdri, ſed eiuſdem quintuplum fuit X Y ſphæræ dimetiens, ipſæ igitur A B & X Y ſphæratum dimetientes æquales erunt: in data igitur ſphæra, ex dimetiente A B icoſaëdrum depinximus: quòd autem icoſaëdri præfati latus ſit minor, patet, cùm certa ſit A B dimetiens, quæ quidem quintuplum poteſt ipſius D B ſiue ipſius E F, quæ ex centro circuli E Z I T K, certa erit E F, per ſextam diffinitionem decimi. Eius itaque E F dupla (dimetiens circuli E Z I T K) certa erit, per eandem. Pentagoni igitur latus eidem circulo inſcripti incerta erit, vocata verò minor, per vndecimam huius: eius autem pentagoni & icoſaëdri idem oſtenſum fuit eſſe latus: icoſaëdri itaque latus incerta erit appellata minor. Icoſaëdrum igitur conſtruximus, & data ſphæra comprehendimus, &c.

COROLLARIVM I.

Hinc fit dimetientem ſphæræ Icoſaëdrum continentis, quintuplum poſſe eius quæ ex centro circuli quinque Icoſaëdri angulos tangentis.

Inſuper eandem diametrum Y X componi ex latere hexagoni F C & binis decagoni F Y C X eidem circulo inſcriptorum. Nam quintuplum potuit X Y dimetiens ipſius F C, ei quæ ex centro (ſcilicet F E) æqualis. Præterea dimetiens X Y binas poteſt. eam ſcilicet quæ latera oppoſita icoſaëdri iungit, vel pentagoni angulum ſubtendit, vt H X, & icoſaëdri latus H L, cùm ea ad rectos coniungat latera, in ſemicirculo, eſtq; eiuſdem maius ſegmentum latus pentagoni vel icoſaëdri, per 8. huius.

COROL

COROLLARIVM II.

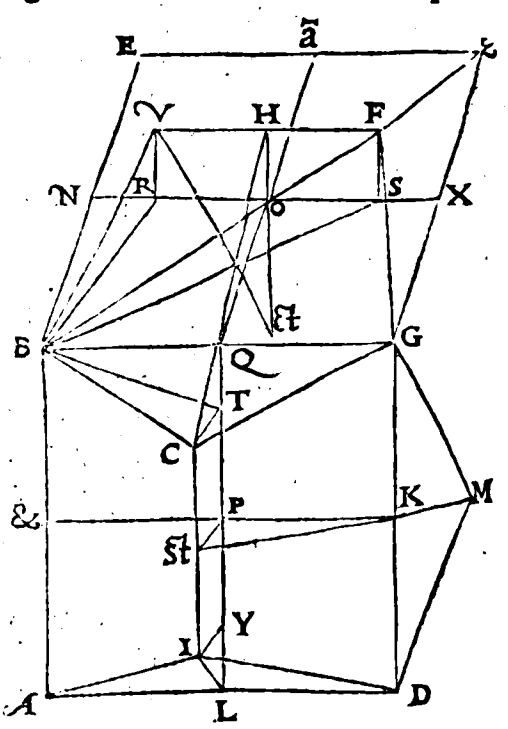
Icoſaëdri latera oppoſita ſunt parallela.

Nam ſphæræ dimetientes in oppoſitos Icoſaëdri cadunt angulos, vt patuit in rectaY X. Si itaque binæ dimetientes H T & O I ducantur, ipſæ in centro & concurrent. Quare rectæ H O T I eas iungentes in eodem ſunt plano, per ſecundam vndecimi. Quia verò ad dimetientes angulos æquales efficiunt, per octauam primi, ſcilicet triangula ex æquis ſemidimetientibus & latere Icoſaëdri, Ipſa latera H O T I parallela erunt (per 28 primi.)

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA 5.

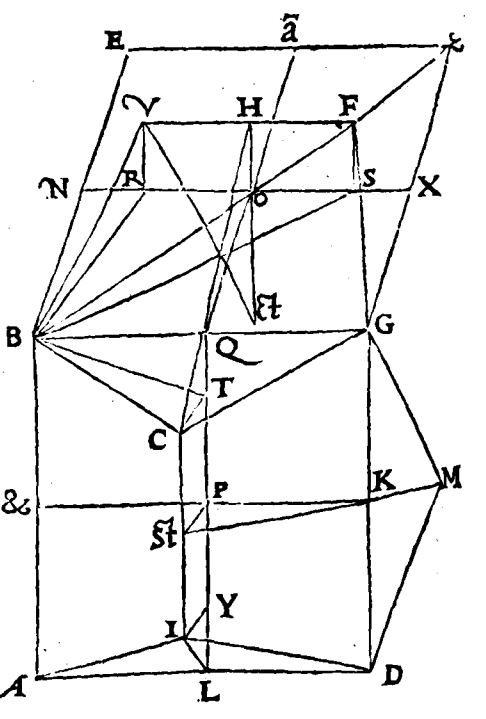
Dodecaëdrum conſtruere, & data ſphæra comprehendere, qua & prædictas figuras, oſtenderéque quòd dodecaëdri latus incerta eſt linea, eáque appellatur Apotome.

Proponãtur binæ præfati cubi baſes, hoc eſt, duo quadrata A B G D & E B G Z ſeſe in communi ſectione B G ſecantia ad rectos, iuxta ipſius cubi eidem ſphæræ qua priora Inſcripti naturam. Diuidantur ſingula eorum in quatuor quadrata, ductis rectis eorum latera bifariam ſecantibus, ſcilicet Q L & K Q̃ N X, quæ quidem in centris ipſarum baſium bifariam ſe ſecabunt, per coroll. 34 primi, ſcilicet in P & O. Secentur autem extrema & media ratione hæ quatuor rectæ P Q P L O N O X in T Y R S, per trigeſimam ſexti, maiora autem ſegmenta ſint ad O & P. A ſignis autem R O S plano E B G Z rectæ excitentur R V O H S F, per duodecimam vndecimi. A ſignis verò T P Y plano A B G D ſimiliter excitentur rectæ T C P ſt Y I. Quæ quidem R V O H S F T C P ſt Y I æquales ponantur ſingulæ ipſi O R vel O S, coniunctis H Q Q C C I B C C G G F F V V B: Dico pentagonum B C G F V eſſe in eodem plano æquilaterum æquiangulũ, & inſuper baſim dodecaëdri eadem ſphæra qua reliquæ figuræ comprehenſi: eius verò latus F V eſſe apotomen. Ad primũ itaque quod B C G F V in eodem ſit plano: Cùm rectæ R V S F ſint ad idem planum perpendiculares, ipſæ parallelæ erunt, per ſextam vndecimi, ſunt autem æquales poſitæ: Rectæ igitur R S & V F æquales & parallelæ erunt, per trigeſimam tertiam primi. Similiter æquales & parallelæ erunt T Y & C I. Ipſi autem R S parallela eſt B G, per conſtructionem. Eidem igitur B G parallela erit V F, per nonam vndecimi. Rectæ igitur B V F G ipſas coniungentes in eodem ipſarum plano erunt, per ſeptimam vndecimi. Trapezium itaque B V F G in vno eſt plano. Reliquum verò B C G in vno eſt plano, per ſecundam huius: vt autem pateat B G F V & B C G in eodem eſſe plano, oſtendamus rectas H Q Q C in rectum poſitas eſſe. Cùm rectæ R V O H S F ſint æquales & parallelæ, æquales erunt V H H F ipſis R O O S æqualibus, per trigeſimam tertiam primi, & ideo adinuicem, & proinde æquales maiori ſegmento ſectarum N O P Q, &c. ex hypotheſi. Quia igitur



igitur æquales ſunt O H T C, per hypotheſim, maiori ſegmento O R: Eſt autem minus ſegmentum T Q dimidij lateris cubi P Q: ſicut itaque tota O Q (dimidium cubi latus) ad C T maius ſegmentum, ſic erit O H maius eiuſdem ſegmentum, ad T Q minus, per tertiam diffinitionem ſexti. Triangulorum igitur H O Q & Q T C bina latera O Q Q T angulum componunt, in duabus cubi baſibus exiſtentia, binis aliis triangulorum lateribus reciproca: ſcilicet O Q ad C T vt O H ad Q T. Et inſuper ſunt eiſdem parallela, ſcilicet O Q ipſi C T, per ſextam vndecimi. Nam ſunt ad idem planum A B G D rectæ, & ſimiliter O H ipſi T Q, cùm ſint rectæ ad reliquum B B G Z. Reliqua igitur triangulorum latera H Q Q C in rectam lineam erunt, per trigeſimamſecundam ſexti. Si igitur ducatur recta B H, triangulum erit B C H, quod itaque in vno erit plano, per ſecundam vndecimi. Et proinde totum B C G F V pentagonum in vno eſt plano. Quòd autem ſit æquilaterum doceamus. Cùm enim binæ B N N R binis B Q Q T ſint æquales, nempe totæ & minora ſegmenta, & angulos rectos comprehendant, ſcilicet quadratorum B O & B B, baſes B R & B T (per quartam primi) æquales erunt. Quia verò B R B T ſunt æquales, & binæ R V T C (maiora ſegmenta) æquales. Et anguli B R V B T C recti, ex hypotheſi, baſes B V B C (per eandem quartam primi) æquales erunt. Similiter oſtendentur reliquæ coniunctis G T vel Z S rectis, æquales eſſe, F G G C ipſis B V B C. Quòd autem F V reliquis ſit æqualis, patet: cùm B N ſit æqualis toti N O ſectæ, quadrata totius B N & minoris ſegmenti N R, tripla ſunt quadrati maioris ſegmenti R O, per quartam huius. Eiuſdem quadrati R O proinde triplum erit quod ex B R ipſas B N N R potente, per quadrageſimamſeptimam primi. Addatur quadratum ex R V æquali ipſi R O. Bina ex B R & R V quadrata quadrupla erunt quadrati R O, & ideo quadratum rectæ B V (ipſas B R R V potentis) quadruplum erit quadrati R O. Sed ipſius R O quadrati quadruplum eſt quod ex V F eius dupla, per vigeſimam ſexti. Rectæ igitur B V & V F (eiuſdem quadruplum potentes) erunt æquales. Æquilaterum itaque erit quinquangulum B C G F V. Quod autem ſit æquiangulum B C G F V, Producãtur B S & B F rectæ. Quoniam enim rectæ N O extrema & media ratione ſectæ, additur O S, æqualis maiori ſegmento, totius N S maius ſegmentum erit N O (per quintam huius) minus autem O S. Quod igitur ex tota N S & minori O S (vel S F ſibi æquali) triplum eſt eius quod ex N O, per quartam huius. Quæ itaque ex N S S F cum quadrato B N, quadrupla ſunt quadrati N O. Quorum quidem iis quæ ex B N N S æquum eſt quod ex B S, per quadrageſimamſeptimam primi, cùm rectus ſit O N B quadrati angulus. Quæ igitur ex B S S F quadrupla ſunt quadrati N O: Eis autem ex B S S F æquum eſt quod ex B F, per quadrageſimamſeptimam primi: fuit enim recta F S plano E B G Z: Quod itaque ex B F quadruplum eſt eius quod ex N O: Eiuſdem verò ex N O quadruplum eſt quod ex B G, ſcilicet B G Z E quadratum: æquales igitur ſunt B G & B F. Haud ſecus oſtendentur æquales eſſe G B G V. Cùm enim æquales ſint N S ipſi X R, æqualis erit G R ipſi B S, & proinde G V ipſi B F, quæ oſtẽſa eſt æqualis ipſi G B. Triangulorum itaque B C G B V F & G F V tria latera, tribus ſunt æqualia. Anguli igitur (per octauam primi) B C G B V F & G F V erunt æquales. Quinquanguli itaque B C G F V tres anguli qui ad C V F ſunt æquales. Reliqui igitur (per ſeptimam huius) æquales erunt reliquis. Æquiangulum igitur erit B C G F V. Quia verò planum æquiangulum & æquilaterum oſtenſum eſt pentagonum B C G F V tangens vnicum cubi latus, Oſtendamus quanam arte ſingulis duodecim cubi lateribus, ſingula ſimiliter applicantur pentagona ſibi mutuo cohærentia, quæ duodecim dodecaëdri componunt baſes. Quoniam ſimiliter ſecta fuit recta P L ipſis P Q O N vel O X, & æquales ſuper ſignis T P Y, erectæ ſunt perpendiculares ipſi O H & reliquis, ſcilicet maiori ſegmento, ſequetur parallelas eſſe C I T Y, & proinde C I G D, per nonam vndecimi. Planum igitur erit G C I D, per ſeptimam vndecimi. Planum autem eſt A I D triangulum, per ſecundam huius. Iungantur itaque I A I L ſit K, Manifeſtum erit rectæ C G æquales eſſe I D I A: Nam A L L Y (ipſis B Q Q T æquales)

efficiunt ſubtenſas A Y B T æquales, per quartam primi. Et rurſus quia B T T C rectum continent angulum, B T C veluti & A Y I, cùm rectæ ſint C T I Y ad idem planum A B G D, ex hypotheſi. Ipſis B T A Y æqualibus potentiis, æquales addantur potentiæ ipſarum C T I Y. Æquales igitur componentium (per quadrageſimamſeptimam primi) erunt potentiæ ipſarum B C A I, æquales proinde erunt rectæ B C A I, ſimiliter & eiſdem I D & C G ſunt æquales. Cùm autem A I I D & A L L D ſint æquales, baſis verò I L communis, anguli A L I D L I æquales erunt, per octauam primi, & ideo recti, per decimam diffinit. primi: eadem cauſa recti fuerunt C Q B C Q G anguli. Quia verò binæ Q T T C binis L Y Y I, ſunt æquales, & æquos angulos (rectos ex hypotheſi) continentes, anguli C Q T & I L Y reliqui, erunt æquales, per 4 primi. Quare planum A I D æquè inclinatur ad planũ A B G D, vt planum B C G ad idem A B G D per 5 diffinit. vndecimi. Similiter oſtẽdemus planum C G D I æquè inclinari ad planum A B G D, vt B V F G ad E B G Z. Cùm triangulorum H O Q & ſt P K æqualibus lineis compoſitorum æquales ſint anguli H Q O ſt K P, qui ſunt inclinationis anguli. Si autem extenſa recta ſt K in M perficiatur pentagonum G C I D M, oſtendemus eadem lege illud planũ æquiangulum ac æquilaterũ eſſe, qua reliquum B C G F V oſtendimus, ſimiliter & reliqua B C I A & A I D ſi perficiantur, æqua ſimilia ſimilitérque poſita oſtendentur, cohærentia autem in communibus rectis B C C G C I A I I D. Seruata itaque hac methodo ſingulis cubi lateribus 12, ſingula pentagona 12 cohærebunt dodecaëdrum componentia. Quod autem ſphæra comprehendatur præſcriptũ dodecaëdrum, Supponantur cubi propoſitæ baſes. Secent autem (per trigeſimamnonam vndecimi) cubum plana bina per rectas N X ã Q.



Communis eorum planorum ſectio recta erit H O producta: Nam communis recta eſt ad planum E B G Z, per decimamnonam vndecimi. Qua quidem producta H O, dimetientes cubi bifariam & ipſa ſeſe ſecabunt mutuò, per trigeſimamnonam vndecimi, ſecent igitur in ſt coniuncta & V. Signum igitur ſt communis dimetientium ſectio, eſt centrum ſphæræ cubum ambientis, per demõſtrata decimaquinta huius, quare à ſigno ſt in ſingulos ductæ cubi angulos æquales erunt. Quia inſuper æqualis eſt ſt O dimidio lateri cubi, ſcilicet ipſi N O & O H ipſi O S, tota ſt H toti N S æqualis erit. Extrema itaque & media ratione ſecatur ſt H in O, & proinde quæ ex ſt H H O triplum efficiunt quadrati O ſt vel O N, per quartam huius. Sed ipſi H O æqualis eſt H V. Recta igitur ſt V ipſas ſt H H V potẽs, per quadrageſimamſeptimam primi, triplum poterit quadrati N O. Atqui ea quæ ex centro ſphæræ cubum ambientis, triplum poteſt dimidij cubi lateris, per decimamquintam quinti. Nam dimetiens tota, totius lateris triplum poteſt, per decimamquintam huius. Quæ igitur ex centro ſphæræ cubum ambientis, æqualis erit rectæ ſt V, Similiter æqualis oſtendetur reliquis ſt F ſt C ſt I, &c. ad reliquos dodecaëdri angulos ductis. Quæ igitur ex centro ſphæræ cubum ambientis, in vtroſque & cubi & dodecaëdri angulos ductæ, erunt æquales. Eadem itaque ſphæra dodecaëdrum comprehendimus, qua & cubum, & ideo qua reliquas figuras, ſcilicet centro ſt, interuallo autem quauis rectarum ſt V vel ſt B, ſphæræ extendatur ſuperficies, ipſa per ſingulos vtriuſque cubi & dodecaëdri ducetur angulos. Quod autem latus dodecaëdri ſit

apotome,

apotome, ſcilicet F V patebit. Quoniam extrema & media ratione ſecta eſt O N, erit O N ad O R ſicut O R ad R N, per tertiã diffinit. ſexti. Erit igitur (per decimamquintam quinti) inter duplas earum eadem ratio, ſcilicet N X ad R S ſicut R S ad binas N R S X. Cubi igitur lateris N X extrema & media ratione ſecti, maius ſegmentum erit R S, vel F V dodecaëdri latus. Sed cubi latus eſt certa linea. Nam dimetientis ſuæ ſphæræ, quæ certa fuit, tertiam partem poteſt, per decimamquintam huius. Si igitur certa linea N X extrema & media ratione ſecetur, eius ſegmenta apotome erunt, per ſextam huius. Apotome igitur erit recta F V, maius ſegmentum ipſius N X certæ & dodecaëdri latus exiſtens. Dodecaëdrum itaque conſtruximus, & data ſphæra comprehendimus, qua & prædictas figuras, oſtendimúſque quòd dodecaëdri latus incerta eſt linea, eáque appellatur apotome.

COROLLARIVM I.

Hinc fit cubi latere extrema & media ratione ſecto, maius oriri ſegmentum dodecaëdri latus eadem Sphæra concluſi.

Vt patuit rectam V F maius ſegmentum fuiſſe rectæ N X lateris cubi.

COROLLARIVM II.

Cubi latus æquum eſt rectæ ſubtendenti angulum pentagoni dodecaëdri eidem Sphæræ cum cubo comprehenſi.

Nam angulos B C G A I D, vel G M D ſubtendunt cubi latera B G ad G D.

COROLLARIVM III.

Dodecaëdri ſex ſunt latera bina inter ſe oppoſita & parallela, quorum bifarias ſectiones iungunt æquales tres rectæ, in centro Sphæræ dodecaëdrum continentis ſeſe ac illa bifariam ſecantes, & ad rectos.

Quoniam ſuper ſex cubi baſibus ſex reperiuntur dodecaëdri latera, vt oſtenſum eſt, quæ bifariam ſecantur à rectis centra baſium cubi coniungentibus, vt H E producta & ſimiles. Quæ quidem ſunt tres ſeſe ad rectos ſecantes, cùm ſint lateribus cubi parallelæ, & in centro Sphæræ cubũ continentis (per oſtenſa 15 huius) ſeſe bifariam ſecantes. His verò cubi ſubtenſis externæ adduntur æquales, ſcilicet H O ſt P, & reliquæ ſimiles, dimidio dodecaëdri lateri, ex hypotheſi æquales. Et proinde omnes ſunt æquales dimidia oppoſitorum dodecaëdri laterum ſigna coniungentes, eáque latera bifariam & ad rectos ſecantes.

COROLLARIVM IIII.

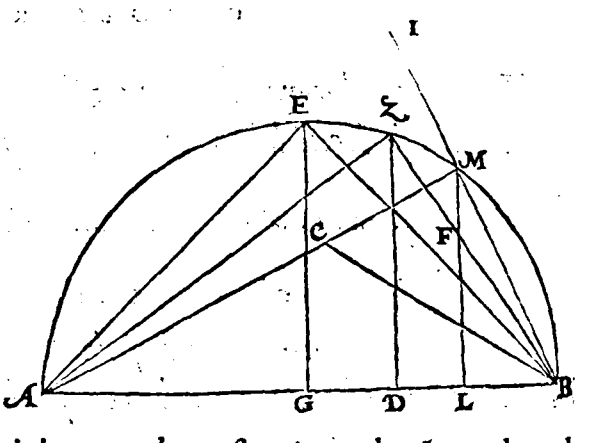
Recta oppoſita dodecaëdri latera bifariam diuidens, extrema & media ratione ſecta, efficit maius ſegmentum latus cubi, minus verò latus dodecaëdri eadem Sphæra comprehenſi.

Quoniam enim recta H & extrema & media ratione ſecta fuit in O, maiúſque eius ſegmẽtum fuiſſe dimidium cubi latus O & oſtenſa, minus verò H O dimidium

ipſius V F. Sequetur igitur (per decimamquintam quinti) duplas earum eandem habere rationem, ſcilicet duplam ipſius H F, quæ ſignum ipſi H oppoſitum coniungit, totam eſſe, maius verò ſegmentum duplam ipſius O &, quæ eſt cubi latus: minus verò duplam ipſius H O, æqualem lateri V F dodecaëdri. Et proinde ſphæræ dimetientẽ poſſe totam & minus ſegmẽtum ad rectos in ſemicirculo conſtitutas.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA 6.

Latera quinque præfatarum figurarum exponere, & adinuicem comparare.



Eſto prædictæ ſphæræ dimetiens A B, quæ ſecetur bifariam in G, ab eadem inſuper A B tertia pars B D, & quinta B L, per nonam ſexti auferantur. Ducto verò ſuper A B ſemicirculo, à ſignis G D L perpendiculares ipſi A B excitentur G E D Z L M, cõiunctis A E E B A Z Z B A M M B. Cùm autem rectus in ſemicirculo ſit angulus A Z B, media erit Z A proportionalis inter A B & A D: nam Z A eſt ad ſegmentum A D, per corollarium octauæ ſexti. Sicut igitur A B ad A D, ſic erit quadratũ A B ad quod ex ſecunda Z A, per corollarium vigeſimæ ſexti. Tripla autem eſt A B ipſius B D, per hypotheſim: ſeſquialtera igitur erit A B reliquæ A D: nam veluti 3 ad 2: ſeſquialterum igitur poterit A B dimetiens rectæ A Z. Recta itaque A Z latus erit pyramidis huic ſphæræ inſcriptæ, per 13 huius: quia autem æquales ſunt A E & E B baſes, per quartam primi, ſed eas poteſt A B dimetiens, quælibet earum A E vel E B latus erit octaëdri, nam dimetiens ſphæræ A B duplum poteſt lateris octaëdri, per 14 huius: quoniam rurſus Z B (ad ſegmentum D B) media eſt inter A B & idem ſegmentum D B, per corollarium octauæ ſexti, erit A B ad B D, ſicut quadratum A B, ad quod ex B Z media, per corollarium vigeſimæ ſexti, tripla eſt A B ipſius B D, triplum igitur poterit A B ipſius B Z, quare B Z latus erit cubi, per 15 huius. Cæterùm ſumatur latus decagoni, circulo cuius quæ ex centro eſt B M deſcripti, per corollarium decimæ ſextæ quarti, cui lateri æqualis ſecetur M C à maiore A M, coniuncta C B: quia verò quæ ex centro B M æquatur lateri hexagoni, eiuſdem circuli, per corollarium 15 quarti, Manifeſtum erit (ex decima huius) B C rectam eſſe latus pentagoni eidem circulo inſcripti: nam ipſa B C binas poteſt B M M C per 47 primi, hexagoni & decagoni latera: quia verò quintupla eſt A B ipſius B L, ex hypotheſi, eadẽ A B quintuplum poterit rectæ B M, quæ ad ſegmentum B L, vt iam patuit. Recta itaque B M erit ea quæ ex centro circuli quinque latera icoſaëdri continentis & angulos, per corollarium 16 huius. Sed circulus cuius ex centro oritur B M, quinquies continet rectam B C, vt oſtenſum fuit. Recta igitur B C latus erit icoſaëdri huic ſphæræ ſuper dimetiente B A conſtructæ deſcripti, per 16 huius. Præterea cùm oſtẽſum ſit rectam Z B eſſe cubi latus ipſam Z B ſecantes extrema & media ratione, per trigeſimã ſexti, in F efficiemus F B maius ſegmentum latus dodecaëdri eidem ſphæræ inſcripti per primum corollarium præfatæ.

Qua verò ratione conferantur horum ſolidorum latera, adinuicem excutiamus. Cùm (ex 13 huius) dimetiens A B ſeſquialterum poſſit lateris pyramidis A Z, ex 14 verò duplum poteſt lateris octaëdri A E, ex 15 autem triplum lateris cubi Z B:

Qualium

Qualium igitur ſphæræ dimetiens erit potentia 36, pyramidis latus erit 24, octaëdri 18, cubi verò 12 earum partium: pyramidis verò perpendicularis A D earundem erit 16, nam fuit duo tertia rectæ A B longitudine, potentia igitur erit dupla ſeſquiquarta. Eorum igitur triũ latera (potentia) rationem numerorum inter ſe & ad propoſitam ſphæræ dimetientem A B obſeruant: quare certæ dicentur ipſæ magnitudines, per ſextam diffinitionem decimi. nam adinuicem & propoſitæ commenſurabiles exiſtunt, per ſextam decimi: quia verò Icoſaëdri & dodecaëdri latera naturam incertarũ magnitudinum nanciſcuntur, cùm hoc apotome, illud verò minor eſſe 16 & 17 huius oſtenſa ſint, Ea latera ad propoſitam A B dimetientem, ſeu ad trium priorum latera, propoſitæ dimetienti commenſurabilia, nulla certa ſeu determinata rationis quantitate conferri poterunt, per octauam decimi, eo quòd numerorum ratione priuentur: ſed nec adinuicem, per corollarium 3 decimi. Nam ſi inter ſe commenſurarentur, eiuſdẽ eſſent denominationis, per centeſimam tertiã & centeſimãquintã decimi, cuius patuit oppoſitũ. Supereſt autem demonſtrandum maius eſſe C B icoſaëdri latus dodecaëdri latere F B. Primòæquũ nõ erit, nam cõmenſurabile eſſet, quod fieri nõ poteſt, cùm dodecaëdri Apotome, icoſaëdri verò latus Minor iam fuiſſe oſtenſa ſint, decimaſexta & decimaſeptima huius. Sit igitur, ſi fieri poſſit, F B maior ipſa E C, quoniã A B quintuplum poteſt rectæ B M, per proximè oſtenſa, qualium A B poteſt 60, earum B M poteſt 12. quia verò C M decagoni excedit dimidiũ ipſius B M hexagoni, vt patuit decimaſexta huius, recta C M plus quàm 3 poterit, & proinde recta B C (ipſas B M M C potẽs) earum partium poterit plus quàm 15, qualium A B potuit 60: ſed earum potuit Z B 20, per decimamquintam huius, nempe tertiam ipſius A B partẽ: qualiũ itaque Z B erit 20, earum B C erit plus quàm 15: quia verò F B eſt maior, ex hypotheſi recta B C, qualium B Z poteſt 20, earum F B poterit multò plus quàm quindecim. Cùm autem B Z B F F Z, ſint proportionales, per tertiam diffinitionem ſexti, earum quadrata (per vigeſimamſecundam ſexti) erunt ſicut quod ex B Z (ſcilicet 20) ad quod ex B F (ſcilicet plus quàm 15) ſic plus quàm 15 ad F Z reliquum ipſius 20, ſcilicet minus quàm 5. Sed 20 ad plus quàm 15 rationem habet ſeſquitertia minorem, per octauam quinti, cùm ſeſquitertiam habeat ad 15. Plus 15 verò ad minus quinque rationem habet tripla maiorem, & ideo ſeſquitertia maiorem multò, non itaque eſſent B Z B F & F Z proportionales potentiæ contra 22 ſexti, cùm rectæ lineæ B Z, B F, & F Z ſint proportionales, quod eſſet abſurdum: non igitur erit F B maior recta B C, nec ei æqualis, quare minor eadem neceſſariò erit.

ALITER.

Oſtendamus quarto corollario 17 huius, ſphæræ dimetientem poſſe binas, ſcilicet oppoſita dodecaëdri latera iungentem, & minus eius ſegmentum, hoc eſt dodecaëdri latus. Oſtendimus autem corollario primo 16 huius eandem ſphæræ dimetientem, binas ſimiliter poſſe, puta latera oppoſita icoſaëdri iungentem & maius eius ſegmentum, hoc eſt latus icoſaëdri. Si igitur ab eadem magnitudine auferatur tota, relinquetur minus ſegmentũ, & rurſus ab eadem tota relinquẽs maius: manifeſtum erit eam quæ minus relinquit, plus ab æqualibus tollere reliqua: maius itaq; erit icoſaëdri latus minoris ablatæ reſiduum, dodecaëdri latere maioris ablatæ reſiduo.

COROLLARIVM I.

Hinc manifeſtum aſſequimur naturam nullam pati figuram, ſub æqualibus æquilateris, & æquiangulis planis comprehenſam præter has quinque.

Cùm enim (per vigeſimamprimam vndecimi) omnis angulus ſolidus ex minus quàm quatuor rectis planis componatur, & (per nonam diffinitionem eiuſdem) plures duobus planis exoptet, neceſſe erit eos planos (plures numero duobus, & quemlibet ſolidum angulum componẽtes) minus quatuor rectis æquiualere. Cùm autem trianguli æquilateri ſex anguli quatuor rectis æquipolleant, per demonſtratum decimæquintæ quarti, Sequetur ſex eorum triangulorum angulos planos, ſolidum angulum non componere, per eandem vigeſimamprimam vndecimi. Is namque angulus ſolidus minus quatuor rectis exoptat, nec igitur plures quàm ſex eorum triangulorum anguli ſolidum conficient angulum cùm tanto plus quatuor excedant rectos, ſed quinque horum triangulorũ anguli icoſaëdri angulum, quatuor verò octaëdri, tres autem pyramidis compoſuerunt angulos, vt oſtendimus 16, 14, & 13 huius. Duo verò ſolidum angulum non efficiunt per 9 diffini. vndecimi. Ex triangulorum æquiangulorum igitur angulis, ſoli fiunt icoſaëdri, octaëdri, & pyramidis trilateræ anguli: ex quadratis verò ſolus fit cubi angulus, qui tribus angulis planis rectis conſtat per 15 huius. Nam quatuor recti ſolidum angulum excedunt, per vigeſimamprimam vndecimi, duo verò recti ſolidum non componunt (vt diximus): ex pentagonis autem tribus, genitus fuit dodecaëdri angulus vnicus. Cùm duo anguli pentagoni nullum componant ſolidum, quatuor verò aut plures rectos excedũt quatuor, eo quòd ſint rectis maiores ſinguli ſingulis: Hexagoni autem angulum ſolido conficiendo indecentem eſſe patet. Cùm enim ſex eius anguli octo rectis (per corollarium trigeſimæſecundæ primi) æquipolleant, ſequetur tres quatuor rectis æquales eſſe, & proinde tres hexagoni angulos ſolidũ nõ componere, per 21 vndecimi, duo verò nullum, quatuor autem aut plures, cùm ſint obtuſi quatuor rectis maiores erunt, & ideo ſolidum angulum non component, nec proinde Heptagoni vel aliorũ polygonorum aliqui anguli, ſolidum angulum component. Duo etenim eorum ſolidi componendi ſunt incapaces, tres verò quatuor rectos excedunt, cùm tres eorum hexagoni excedant tres angulos quatuor rectis æquales. Nullius itaque polygoni æquilateri & æquianguli anguli, ſolidum angulum præter harum quinque figurarum angulos, quemquam conſtituent. Nec proinde figuram ſolidam (quæ abſque angulis planis ſolidos angulos componentibus conſtitui non poteſt) aliam præter has quinque præfatas, ſub planis æqualibus, æquilateris, & æquiãgulis cõprehendere licebit. Cùm autem hoc theorema propoſuit Campanus, corollar. 17 decimitertij in hæc verba prorumpens: Plura verò his quinque æquilatera, quæ ſint æquiangula, eſſe eſt impoſſibile, hæc tutioribus ſubſidiis firmare debuiſſet: Nam futuris 17 & 18 dicturi ſumus de ſolidis mixtis ſeu compoſitis, quæ æquilatera & æquiangula fient, non tamen æqualibus æquilateris & æquiangulis planis comprehenſa.

COROLLARIVM II.

Vt autem ea quinque regularia ſolida, ſimiles ſingulas ſuarum baſium inclinationes habere doceamus,

Pyramidem priorem ſumemus, cuius vnum latus bifariam ſecetur, & à binis ipſi lateri oppoſitis angulis perpendiculares mittantur, ipſæ in ſectionem cadent, per corollarium duodecimæ decimitertij: ipſæ itaque angulum inclinationis planorum comprehendent, per quartam diffinitionem vndecimi, ſubtenſum à pyramidis oppoſito latere: cùm igitur reliqui pyramidis anguli inclinationis planorum, ſub binis triangulorum perpendicularibus comprehendantur, & pyramidis latere ſubtendantur, ipſi ex octaua primi erunt æquales. Pyramidis igitur plana ad ſe ſimiliter inclinari dicentur, per quintam diffinitionem vndecimi.

Cubi

Cubi verò binæ perpendiculares à bifaria vnius lateris ſectione, per bina plana ductæ, parallelæ & æquales erunt lateribus quadrati angulum rectum continentibus, cùm omnes baſium cubi anguli ſint recti: quare ipſæ in ſectionem communis lateris cadentes, rectum angulum adinuicem comprehendent, per decimam vndecimi, qui quidem eſt inclinationis angulus, per quartã diffinitionẽ vndecimi, à baſis cubi dimetiente ſubtenſus. Reliqui igitur eodem argumento recti oſtenſi, inclinationes baſium cubi ad ſe inuicem æquales efficient, per quintam diffinitionem vndecimi.

Octaëdri autem ſumatur dimetiens binos oppoſitos connectens angulos, ab his angulis in idem octaëdri latus, per binas eius baſes perpendiculares mittantur, ipſæ latus illud bifariam ſecabunt & ad rectos, vt ſæpius patuit, & ideo angulum inclinationis baſium continebunt, per quartam diffinitionem vndecimi, ſubtenſum ab octaëdri dimetiente: quare reliqui eadem lege in reliquis baſibus deſcripti, æquis lateribus comprehenſi ac ſubtenſi, inuicem æquales erunt, per octauam primi, & proinde inclinationes planorum æquales erunt (per quintam diffinitionem vndecimi) in octaëdro.

Icoſaëdri verò ab angulis duarum baſium, in commune earum latus perpendiculares mittantur, ipſæ angulum inclinationis baſium comprehendent, per quartam diffinitionem vndecimi, ſubtenſum autem à recta ſubtendente angulum pentagoni, quinque icoſaëdri latera ſuſcipientis, per decimamſextam huius, nam ea coniungit binos oppoſitos coniunctorum triangulorum angulos. Reliqui igitur inclinationis baſium anguli, pari methodo deprehenſi, æquis lateribus concepti, æquíſque baſibus ſubtenſi, ex octaua primi æquales erunt, & hac de cauſa quælibet baſium icoſaëdri inclinationes ad ſe, æquales erunt, per quintam diffinitionem vndecimi.

Dodecaëdri demum à binis proximorum pentagonorum oppoſitis angulis, in commune latus perpendiculares, per centra demittantur, ipſæ in bifariam lateris ſectionem cadent, per tertiam tertij: nam circulo continentur dodecaëdri baſes, & earum baſium inclinationem denotabit ab ipſis perpendicularibus comprehenſus angulus, per quartam diffinitionem vndecimi, oppoſitos autem præfatos angulos copulat recta æqualis rectæ oppoſitas dodecaëdri bifarias ſectiones laterum coniungenti, per trigeſimamtertiam primi. Nam ipſæ coniungunt dimidia dodecaëdri latera, parallela & æqualia per corollarium tertium decimæſeptimæ decimitertij, quæ quidem coniungentes ſunt æquales, per idem corollarium: anguli igitur æquis perpendicularibus comprehenſi, & æquis coniungentibus ſubtenſi (per octauam primi) æquales erunt, fuerúntque inclinationum anguli. Dodecaëdri itaque baſes ad ſe inuicem ſimiliter inclinari dicentur, per quintam diffinitionem vndecimi.

MONITVM.

Cogimur quinque regularium ſolidorum 13 & quatuor eam ſequentibus deſcriptorum demonſtrationes variare. Diffiniens enim Theon libro vndecimo ſphæram, deſcriptionem potius quàm ſphærę diffinitionem naturæ protulit: deſcribendam nanque per ſemicirculi ductum ſphæram edocet, non autem quæ ſit ſuæ naturæ vera eſſentia, quæ per æqualitatem rectarum ab vnico ſigno intrinſeco ortarum, in ſuperficie eius definentiũ præciſius exprimi videtur: cùm autem ipſi ſphæræ includenda ſunt regularia hæc ſolida, quarum angulos ab vnico ſigno interiori æquè diſtare neceſſum eſt, huius ſigni locus ita inquirendus eſt, vt cùm ab eo ſingulæ rectæ in ſolidi deſcribendi angulos ductæ, æquales repertæ, ſint ſphæræ ſuperficiem per eius ſolidi angulos extenſam, ſolidum verè amplecti teſtentur, cuius quidem ſphæræ deſcriptionem, ſuper dupla eius quæ ex ſolidi centro ſemicircu-

lum conſtituentes, illúmque manẽte dimetiente circunferẽtes, quoad vnde cœpit redeat abſoluemus, vt huic ſolido non tantùm ſphæræ deſcriptionem, ſed veram eius eſſentiam adhærere cõcipiamus. Ad vltimę autẽ propoſitionis poſtremam demonſtrationis partem, qua icoſaëdri latus dodecaëdri latere maius oſtendendum eſt, dicemus Theonẽ ac Campanum illud non recta methodo demonſtraſſe. Nam id probare conantur per ſimilem ſectionem extrema & media ratione factam duarum inæqualium linearum, ſupponẽtes ſectas quaſcunque rectas extrema ac media ratione, ſimiliter ſeu in eaſdem ſecari rationes, quod non hactenus oſtẽdimus, ſed ſecunda proximi libri oſtenſuri ſumus. Theon igitur illud tanquam notum quadam conniuentia præterit, Campanus verò ſæpius geometricę mentis ſequax, cùm in illud cadit, à futura decimiquarti ſecunda auxilium implorat, quod vt illi condonetur, eam ſecundam à nulla hanc ſubſequente demonſtrandam eſſe profitetur, ſed tantùm per eas quæ iam elapſæ ſunt, eandem ſecundam facilè demonſtrari poſſe. Nos itaque alias demonſtrandi ſpecies protulimus, alteram ab abſurdo per numeros illuſtratam, ne præcedentia per ſequutura demonſtremus, contra veram diſciplinæ ingenuitatem, reliquam verò geometrica ratione.

Ypſicles quinta decimiquinti planorum ſolida quinque regularia concludentium inclinationes, ab Iſidoro ſe ſuſcepiſſe profitetur, quas poſtmodum clariores proferre volens angulos inclinationis ſingulorum datos eſſe, ac acutos vel obtuſos iuxta ſolidi naturam oſtendere conatus eſt, licet hucuſque quid ſit datũ, his quindecim libris tacuerit Euclides. Datum igitur Ypſiclem ſentire noſcimus non certam tantùm aut determinatam quãtitatem, ſed eam quæ geometricis argumentis demonſtrari poteſt. Nam eorum ſolidorum latera angulos inclinationis ſuſcipientia, certa quandoque, quãdoque verò incerta demonſtrantur. Cùm autẽ hæc huic decimotertio ſolida cõponenti ſanius cõueniant, vt cõpoſitorum ſolidorum inclinationes baſium, hunc decimũtertium concludentes diſcutiamus, hinc inde hæc tranſtulimus, vt in pyramide, angulus inclinationis ſub binis triangulorum perpendicularibus continetur, latere verò pyramidis ſubtenſus quod quidem perpendicularis ſeſquitertium poteſt, per coroll. 12 huius, & ideo triangulum ex ipſis conſtans, latera certa ac inuicem potentia commenſurabilia habent.

Cubi verò cùm bina latera vnius baſium dimetiẽte ſubtenſa (aut eis æquales rectæ) angulum inclinationis componant, dimetiénſque cubi ſeſquialtera dimetientis baſis, quæ lateris potẽtia dupla (ex 47 primi) ſubſiſtat, ſequetur certas ac potentia commenſurabiles has dici lineas.

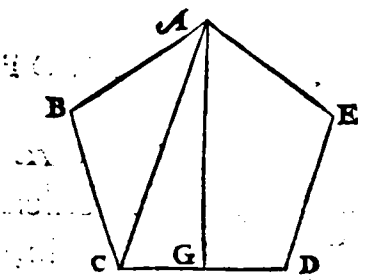
Octaëdri verò, cuius binæ baſium perpendiculares angulum inclinationis continent octaëdri dimetiente ſubtenſum, Dicemus dimetientem duplum poſſe lateris octaëdri, latus verò ſeſquitertium perpendicularis, per coroll. 12 huius. Et proinde dimetientem ipſius perpendicularis duplum tertias bipartiens poſſe concludemus. Et hac de cauſa certas ac commenſurabiles eſſe dimetientem perpendiculari, per ſextam decimi.

Icoſaëdri autem oſtendimus latus eſſe minorem, cùm certa fuerit dimetiens ſphæræ, per 16 huius. Cùm autem inclinationis ſuarum baſium angulus ſub triangulorum perpendicularibus, & ſubtendente angulum pentagoni quinque latera Icoſaëdri ſuſcipientis conſtet, perpendicularibus autem commẽſurabile ſit latus, nempe ſeſquitertium potentia, per coroll. 12 huius. Sequetur perpendiculares angulum continentes, Incertas ſiue minores dici, per 105 decimi. Quia verò dimetiens poteſt, & latus Icoſaëdri, & eam quæ præfatum ſubtendit angulum, manifeſtum erit à certa dimetientis potentia, ablatam incertam lateris Icoſaëdri potentiam, incertam relinquere ipſius ſubtendentis potentiam. Nam ſi certa eſſet, metiens numerus totam dimetientis & ablatam ſubtendentis, metiretur & reliquam lateris, ſcilicet incertam, per ſecundam communem ſentent. ſeptimi. Quod eſſet abſurdum, cùm ſit minor. Incertas itaque eſſe oſtendimus angulum inclinationis

baſium

basium Icosaëdri rectas componentes, subtendens enim ad comprehendentem, maiorem quàm tota ad maius segmentum habet rationem.

Dodecaëdri demùm inclinationis basium angulus, sub binis perpendicularibus basium dodecaëdri continetur, subtensus ea recta cuius latus cubi dodecaëdro inscripti est maius segmentum, quæ æquatur copulanti binas oppositorum dodecaëdri laterum bifarias sectiones. Quam quidem incertam esse dicemus; cùm dimetiens sphæræ certa binas possit, & copulantem & dodecaëdri latus: atqui dodecaëdri latus incerta est, nempe apotome, per 17 huius: Reliqua igitur copulans incerta erit, vt proximæ præcedenti diximus. Comprehendentes verò angulum inclinationis perpendiculares, incertas esse doceamus.



Sit pentagoni A B C D E perpendicularis A G, subtendens verò angulum pentagoni, esto A C. Quoniam A C recta latus est cubi, dodecaëdri verò latus est C D eadem sphæra descriptorum, per coroll. secundum decimæseptimæ decimitertij. Sed A C dimetienti sphæræ est commensurabilis, per 15 decimitertij, & ideo certa, per sextam diffinitionem decimi. Recta verò C D (dodecaëdri latus) incerta est, per 17 decimitertij. Quare C G eius dimidia incerta erit, per 103 decimi. Binas autem A G G C potest A C, per 47 primi. Si itaque à potentia rectæ A C certæ, potētia ipsius C G incertæ tollatur, quæ supererit (potentia quidem rectæ A G) incerta erit necessariò. Nam si A G ablata certa esset, & tota A C certa, reliqua C G certa esset, nempe iisdem numeris mensa, per secundam communem sententiam septimi. Sed incerta ostensa fuit C G, dimidia nanque totius C D apotome, per 17 decimitertij, quod fieri non potest, incerta igitur erit & A G perpendicularis, per vndecimam diffinitionem decimi. Angulus igitur inclinationis dodecaëdri, sub binis pentagoni perpendicularibus comprehensus, quem insuper subtendit recta coniungens bifarias oppositorum dodecaëdri laterum sectiones, per secundum coroll. 18 decimitertij, quam incertam esse docuimus, cùm fuerit æqualis binis A C C D, per coroll. quartum decimæseptimæ decimitertij, sub incertis dicetur contineri lineis rectis.

Præstabat igitur angulorum intelligentiam à linearum naturæ intelligentia deprehendere quàm eos simpliciter aut acutos, aut obtusos dari, vt se ab Isidoro suscepisse fatetur Ypsicles. Nam per subtendentis ad comprehendentem rationem, reperitur anguli obliquitas. Si enim subtendens duplum comprehendentis possit, rectus erit angulus, per 48 primi. Si quidem minus duplo, acutus erit, per 13 secundi. Si autem plus duplo possit, aut maiorem habeat rationem quàm tota ad maius segmentum, angulus tum obtusus erit, per 12 secundi & 4 decimitertij, in qua quod ex tota plus potest duplo maioris segmenti.

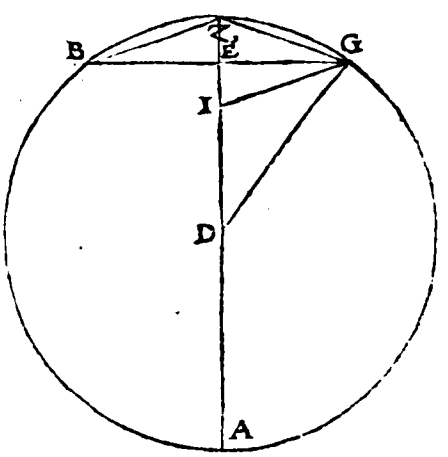
DECIMITERTII LIBRI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER DECIMVSQVARTVS.

PROPOSITIO I.

QVÆ ex centro circuli in pentagoni latus eidem circulo deſcripti perpendicularis acta, dimidia eſt binarum, quæ hexagoni & decagoni eidem circulo inſcripti.

Proponatur circulus A B G, cui inſcribatur latus pentagoni B G, ſuſcepto circuli centro D, à quo in latus B G perpendicularis agatur D E, producta in Z, ipſi verò E Z æqualis fiat E I, coniunctis G I G D & G Z: Dico rectam D E (quæ ex centro in latus pentagoni B G) dimidiam eſſe laterum decagoni & hexagoni ſimul ſumptorum, quoniam perpendicularis eſt D E ad B G, æquales erunt B E E G ſectiones, per tertiam tertij, cõmunis verò E Z, & anguli Z E G Z E B recti, ex hypotheſi, baſes itaque B Z Z G æquales erunt. Pentagoni autem eſt B G, ex conſtructione: decagoni igitur erit Z G, dimidium pentagoni ſubtendens: ipſi porrò Z G æqualis erit G I, ſubtendunt enim rectos angulos G E I G E Z æquis lateribus comprehenſos, per quartam primi, & proinde G I E G Z E anguli, trianguli G Z I erunt æquales, per quintam primi. Cùm autem Z G arcus ſit decagoni, ipſius Z G quadruplus erit arcus G A, & ideo angulus G D A anguli G D Z quadruplus erit, per trigeſimamtertiam ſexti. Quia verò idem G D A angulus qui ad centrum, duplus eſt anguli G Z A ad circunferentiam, per vigeſimam tertij, ſequetur angulum G Z A vel G Z D duplum eſſe anguli G D Z, nempe quadrupli dimidium, ſed angulo G Z D vel G Z I æqualis fuit G I Z: erit igitur G I Z exterior duplus anguli G D Z: æquales itaque erunt G D I D G I anguli. Nam binis ipſe G I Z fuit æqualis, per trigeſimamſecundam primi, quare latera I D I G æqualia erunt, per ſextam primi, & proinde I D ipſi Z G decagoni æqualis erit, per primam communem ſententiam, rectæ verò Z E æqualis eſt E I, per conſtructionem: tota igitur D E binis G Z Z B æqualis erit, quæ ideo ſimul ſumpta (ſcilicet D Z Z G) ipſius D E dupla erunt, quare dimidia erit D E (quæ ex centro in latus pentagoni) vtriuſque ſimul, ſcilicet lateris hexagoni D Z, & decagoni G Z: nam quæ ex cẽtro D Z lateri hexagoni æqualis eſt, per corollariũ decimæquintæ quarti. Quæ igitur ex centro circuli in pentagoni latus eidem circulo deſcripti, &c.



COROL

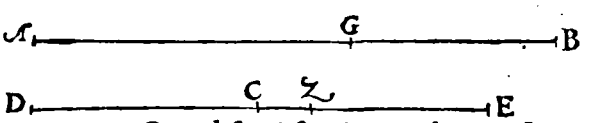
COROLLARIVM

Recta perpendicularis à centro ad latus pentagoni extrema & media ratione secta efficit maius segmentum eam quæ ab eodem centro in latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti.

Nam ea (per corollarium duodecimæ decimi tertij) est dimidia eius quæ à centro siue hexagoni: reliqua igitur erit dimidia decagoni: nam tota est binarũ decagoni & hexagoni dimidia: sed decagoni & hexagoni simul sumptarũ, maius segmentum est hexagoni, per nonam decimitertij: Dimidiæ igitur earum maius segmentum erit dimidia hexagoni, per decimãquintam quinti, quæ est à centro in trianguli latus demissa.

PROPOSITIO II.

Si binæ rectæ lineæ extrema & media ratione secentur, ipsæ in easdem rationes secantur.



Binæ inquam rectæ AB DE extrema & media secentur ratione in G & Z: Dico eas in easdem secari rationes, seu similiter rectam AB in G vt DE in Z. Quod si nõ similes credantur sectæ, secetur altera earum quæuis, scilicet DE similiter ipsi AB in C. Esto igitur DE ad DC maius, vt DC ad CE minus, per tertiam diffinitionem sexti, sed est ex hypothesi DE ad DZ vt DZ ad ZE. Cùm autem sint proportionales, quod sub DE, CE extremis, æquum erit quadrato DC, per 17. sexti. Quod verò sub DE, ZE, quadrato DZ: maius autem est quod sub DE, CE maioribus, eo quod sub DE, ZE minoribus, per corollarium 20 sexti: maius esset itaq; quod ex DC, minore, eo quod ex DZ, maiore, quod fieri non potest. Non itaque dissimiliter secantur rectæ AB DE, sed ideo similiter ac in easdem rationes: haud secus ostendemus si signum C alibi cadat, nam semper earum aliqua maior erit. Si igitur binæ rectæ lineæ extrema & media ratione secentur, ipsæ in easdem rationes secantur.

MONITVM.

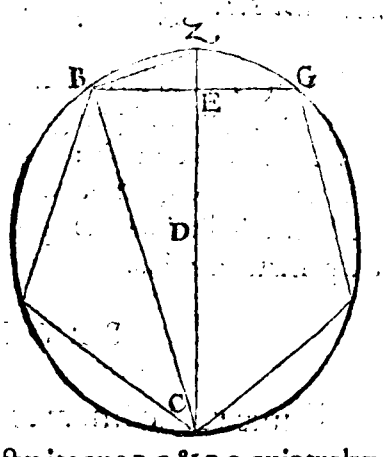
Hanc intelligentia & compendio contraximus, ne facilia per difficilia demonstraremus. Nunc demum desinunt hoc decimoquarto Theonis scripta, quæ his duobus postremis elementorum libris suscepit Ypsicles in Euclidem, eo ordine quo processerat Theon peragenda. Quæ quidem cùm eousque mutilata iacent vt hoc tantùm libro 4 theoremata, proximo verò quinque ad nos peruenerint, Ypsiclem insuper à Campano & numero, & theorematum ordine dissentientem reperimus, quare quæ ex eorum scriptis vtiliora perpexerimus, colligere non dedignabimur, vt si qua complendis his præter hæc optari cernamus, illius clementis auxilio quæ pro viribus exiguis consequemur, eo ordine quo geometrica principia faciliùs percipi posse credamus, singula præparare nitemur, & prolixitates compendio, & nubilosa elucidatione, quàm faciliùs licebit, legentibus exposita proferemus.

PROPOSITIO III.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quæ ex

latere

latere pentagoni & ea quæ pentagoni bina ſubtendit latera ſimul ſumpta quadrata, quintuplum poſſunt eius quæ ex centro circuli.



Sit in circulo B C G latus pentagoni B G, ſubtendens verò bina latera eius eſto B C. Secet autem bifariam rectam B G aliqua per centrum D ducta, dimetiens C D E, producta in Z, iungatúrque B Z: Dico rectas B C B G quintuplum poſſe rectæ D Z, quæ ex centro. Quoniam (per quadrageſimamſeptimã primi) quæ ex C B B Z æqualia ſunt quadrato C Z dimetientis, & proinde quadruplum efficiunt eius, quod ex D Z, per vigeſimam ſexti. Nam C Z dupla eſt ipſius D Z. Rectæ igitur C B B Z & Z D quintuplum poſſunt ipſius Z D: binas autem B Z Z D poteſt recta B G, per decimã decimitertij, cùm D Z ſit hexagoni, B Z verò decagoni. Coniunctæ itaque B C & B G quintuplum poſſunt ipſius D Z: hoc eſt idem quod potuerunt rectæ C B B Z & Z D. Si itaque in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, &c.

COROLLARIVM.

Si cubus & dodecaëdrum eadem ſphæra comprehendantur, latus cubi & latus dodecaëdri, quintuplum poſſunt eius quæ ex centro circuli pentagonum dodecaëdri continentis.

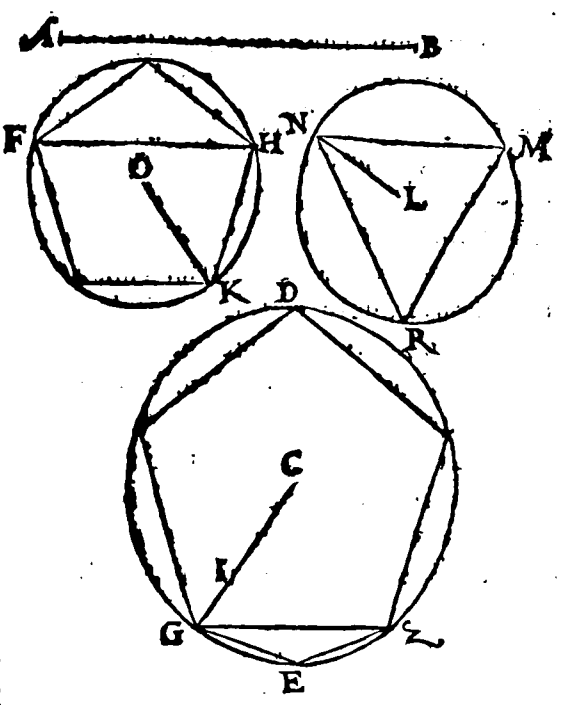
Oſtenſum eſt enim decimaſeptima decimitertij, latus cubi bina pentagoni dodecaëdri ſubtendere latera, cùm eadem capiuntur ſphæra. Cubi igitur latus bina pentagoni ſubtendens latera, & eiuſdem pẽtagoni latus eodem circulo capiuntur: quare (ex hoc theoremate) quintuplum poſſunt eius quæ ex cẽtro eiuſdem circuli pentagonum dodecaëdri capientis.

PROPOSITIO IIII.

Idem circulus comprehendit, & Dodecaëdri quinquangulum, & Icoſaëdri triangulum in eadem Sphæra deſcriptorum.

Sit propoſitæ ſphæræ dimetiens A B, in ea verò deſcriptorum icoſaëdri & dodecaëdri baſes ſint, triangulum M N R & pentagonum F K H: circa ipſas autem circuli deſcribantur, per 5 & 14 quarti, quorum quæ ex centro ſint L N O K: Dico rectas L N O K, quæ ex centro, æquales eſſe, & ideo eundem circulum vtraſque comprehendere figuras. Poſſit recta A B quintuplum alicuius rectæ, quæ ſit C G, per corollarium 6 decimi, interuallo autem C G centro C, circulus deſcribatur D Z G. Cui quidem circulo latus pentagoni inſcripti ſit Z G, per vndecimã quarti. Decagoni verò E G latus, nempe ſubtendens dimidium arcus Z G: ſecetur autem per trigeſimam ſexti, C G extrema & media ratione per 1: quoniam oſtenſum fuit (16 decimitertij) hanc C G (cuius quintuplum poteſt diameter ſphæræ A B) eſſe eam quæ ex cẽtro circuli quinque icoſaëdri angulos cõtinentis, latúſque pẽtagoni in eo D Z G circulo deſcripti, ſcilicet Z G, eſſe latus icoſaëdri in ſphæra dimetientis

A B de



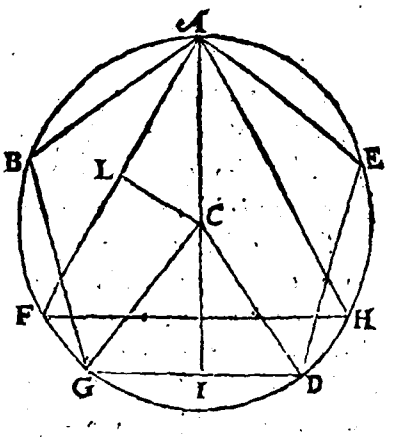
AB descripti. Æqualis itaque erit ZG recta ipsi MN, quæ posita fuit icosaëdri seu triangularis suæ basis latus. Patuit insuper 17 decimitertij, rectam FH (quæ subtendit angulum pentagoni dodecaëdri sphæræ præfatæ inscripti) esse latus cubi eidem sphæræ inscripti. Nam super cubi angulis dodecaëdri angulos constituximus. Triplum igitur poterit AB dimetiens, ipsius FH lateris cubi, per decimamquintam decimitertij: quintuplum autem (ex hypothesi) potest idem AB rectæ CG: Quinque itaque ex CG tribus ex FH æqualia erunt, nempe eidem quod ex AB: quoniam antè latus EG decagoni, secat rectam CG extrema & media ratione, per corollarium nonæ decimitertij, Similiter & HK secat ipsam FH cubi latus, per corollariũ 17 decimitertij. Ipsæ itaque CG & FH in easdem rationes secantur, per secũdã huius, æquales igitur erũt CI & BG, eiusdẽ CG maiora segmenta. Cùm autẽ quinque ex CG tribus ex FH æquipolleant, eadem ratione quinque ex GE tribus ex HK (maioribus earũ CG & FH segmentis) æqualia erunt. Quinque itaque ex CG GE, tribus ex FH HK æqualia erunt, per duodecimam quinti: ipsis autem ex CG GE æquum est quod ex ZG, per decimam decimitertij: rectæ autem ZG æqualis fuit MN: quinque igitur ex MN tribus ex FH HK, æqualia erunt. quæ autem ex FH HK quintuplum sunt ipsius OK, quæ ex centro per tertiam huius. Tria igitur ex FH HK quindecim efficiunt eorũ quæ ex OK: quia verò MN triplum potest ipsius LN quæ ex centro, per 12 decimitertij, quinque ex MN quindecim efficient quæ ex LN: atqui tribus ex FH HK fuerunt æqualia quinque ex MN. Eorum itaque æqualium æquemultiplicia decrementa (scilicet vtriusque pars quindecima) æqualia erunt per 15 quinti, quæ quidem sunt EN OK quæ ex centris. Quare ab eis circuli NRM & FKH descripti æquales erunt dodecaëdri quidem & icosaëdri bases (ex hypothesi) continentes, eadem sphæra comprehensorum. Idem igitur circulus comprehendit, &c.

PROPOSITIO V.

Si in circulo dodecaëdri quinquangulum & icosaëdri triangulum descripta fuerint, A centro autem in eorum aliquod latus perpendicularis agatur, Quod trigesies sub latere & perpendiculari sibi demissa, æquum erit superficiei eius solidi cuius lateri perpendicularis acta est.

Sit in circulo AGE dodecaëdri quinquangulum ABGDE, & icosaëdri triangulum AFH, centrum autem C, à quo perpendiculares ducantur CI in latus pentagoni, CL verò in latus trigoni: Dico rectangulum trigesies sumptum sub CI GD rectis, æquum esse superficiei dodecaëdri. Quod verò trigesies sub CL AF æquum esse superficiei icosaëdri, eidem sphæræ inscriptorum. Ducantur CA CF CG CD rectæ. Cùm autem trianguli CGD duplum sit quod sub GD basi, & IC vertice, per

41 primi, Quinque verò ſimilia & æqualia ipſi G C D pentagonũ dodecaëdri cõſtituunt A B G D E. Quinquies itaque ſub G D I C, duobus quinquanguis æquum erit. Quare & trigeſies ſub G D I C duodecim quinquangulis ſuperficiem dodecaëdri concludentibus, æquum erit. Rurſus quod ſub C L A F duplum eſt trianguli A C F. Quod igitur ter ſub C L A F binis triangulis A F H icoſaëdri baſibus æquum erit. Et proinde quod trigeſies ſub C L A F, viginti huiuſmodi triangulis A F H icoſaëdri ſuperficiem cõplentibus æquum erit. Cùm autem huius pentagoni dodecaëdrum & trianguli icoſaëdrum eadem ſphæra ſuſcipiat,



per quartam huius, C L verò in latus icoſaëdri, C I autẽ in latus dodecaëdri cadant, Quod trigeſies ſub latere & perpendiculari ſibi demiſſa, æquum erit ſuperficiei eius ſolidi cuius lateri perpendicularis acta eſt. Si itaque in circulo dodecaëdri, &c.

COROLLARIVM.

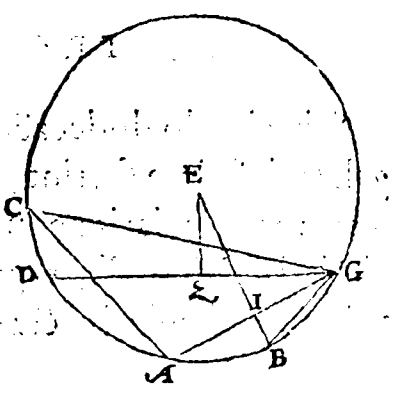
Dodecaëdri & Icoſaëdri ſuperficies in eadẽ ſphæra deſcriptorum ad ſe ſunt, ſicut quod ſub latere eius & perpendiculari à centro baſis ſuæ acta, ad id quod ſub reliqui latere & perpendiculari in ipſum à centro ſuæ baſis acta.

Nam ſicut trigeſies ad trigeſies, ſic (per 15 quinti) ſemel ad ſemel ſe habent.

PROPOSITIO VI.

Superficies dodecaëdri ad icoſaëdri ſuperficiem eidem ſphæræ inſcriptorum ſe habet, vt cubi latus ad icoſaëdri latus eadem ſphæra comprehenſi.

Eſto circulus A B G, cui (per 4 huius) inſcribantur latera dodecaëdri A G, & icoſaëdri D G, eadem ſphæra comprehenſorum: centrum verò ſit E, à quo in ipſa latera perpendiculares demittantur E I E Z. Producta verò E I in B iungatur B G, latus autem cubi eadem ſphæra contenti ſit C G. Dico eſſe dodecaëdri ad icoſaëdri ſuperficiem, ſicut C G ad G D, cùm recta E I extrema & media ratione ſecta, efficiat maius ſegmentum rectam E Z per coroll. primæ huius. Ipſius verò C G maius ſegmentum eſt A G, per coroll. 17 decimitertij. Rectæ itaque E I & C G proportionaliter ſectæ ſunt, per ſecundam huius. Sicut igitur C G ad A G, ſic erit E I ad E Z. Quod itaque ſub C G E Z extremis, æquum eſt ei quod ſub A G & E I mediis continetur, per 16 ſexti. Sicut autem quod ſub C G E Z ad id quod ſub D G E Z, ſic per primam ſexti, C G ad D G, ſub eodem vertice E Z. Erit itaque ſicut quod ſub E I A G (æquum ei quod ſub C G E Z oſtenſum) ad id quod ſub D G E Z, ſic C G ad D G. Sicut autem



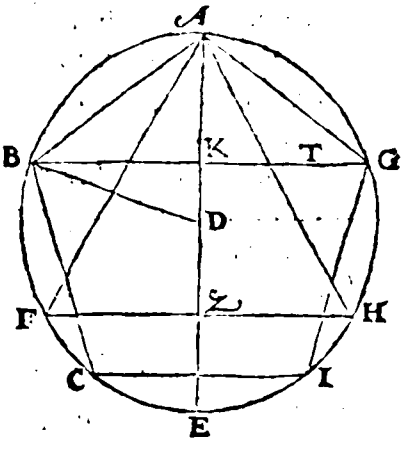
quod

quod ſub E I A G ad quod ſub D G E Z, ſic fuit (per coroll. præcedentis) dodecaëdri ſuperficies ad icoſaëdri ſuperficiem. Sicut igitur dodecaëdri ſuperficies ad icoſaëdri ſuperficiem, ſic C G cubi latus ad G D icoſaëdri latus. Superficies itaque dodecaëdri ad icoſaëdri ſuperficiem, &c.

LEMMA.

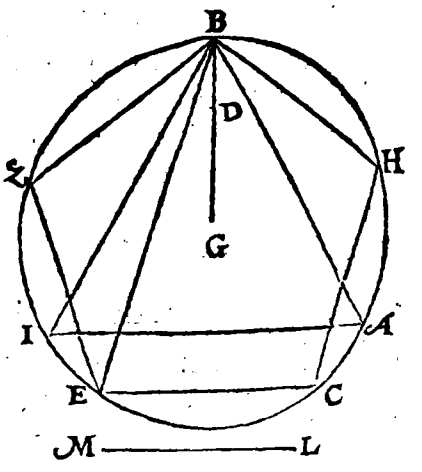
Pentagonum dodecaëdri æquum eſt ei quod ſub perpendiculari in baſim trianguli icoſaëdri, & quinque ſextis lateris cubi eidem ſphæræ deſcriptorum continetur.

Sint in circulo A B E G latera A B A G pentagoni dodecaëdri A B C I G, ſubtenſa recta B G: Triangulum verò icoſaëdri eidem ſphæræ inſcripti, per quartam huius, eſto A F H, circuli autem centrum D: Dimetiens verò ſit A D E, ſecans latus trianguli F H in Z, rectam verò B G in K, coniuncta B D. A recta verò K G tertia pars tollatur T G, per nonam ſexti. Erit igitur B G latus cubi, bina ſubtendens dodecaëdri latera, eidem ſphæræ inſcriptorum, per 17 decimitertij, triangulū verò icoſaëdri eiuſdem ſphæræ erit A F H per quartam huius. In latus autem trianguli perpendicularis erit A Z, quæ per centrum D. Quoniam enim æquales ſunt anguli G A E B A E ſub æquis circunferentiis, per vigeſimamſeptimam tertij, baſes B K K G (per quartam primi) æquales erunt. Quinque igitur ſextas ipſius B G continet B T recta: Dico quod ſub A Z B T æquum eſſe pentagono A B C I G. Cùm ſeſquialtera ſit A Z ipſius A D. Nam ſecatur D E bifariam in Z, per coroll. 12 decimitertij. Similiter ſeſquialtera K G rectæ K T, erit A Z ad A D ſicut K G ad K T. Quod igitur ſub extremis A Z K T æquum erit ei quod ſub A D & K G, per 16 ſexti. Ipſi autem K G æqualis fuit B K. Quod itaque ſub A Z K T æquum erit ei quod ſub A D & B K. Quod quidem ſub A D B K duplum eſt (per 41 primi) trianguli A B D. Quod igitur ſub A Z & K T duplum erit eiuſdem trianguli A B D. Cùm autem pentagonum A B C I G quinque ſuſcipiat æqualia ipſi A B D triangula. Quod ſub A Z & K T verò bina, Duplum ſeſquialterum erit A B C I G quinquangulum, eius quod ſub A Z & K T rectanguli. Quia verò dupla ſeſquialtera eſt B T rectæ K T, ex conſtructione: Eſt autem (per primā ſexti) quod ſub A Z B T ad id quod ſub A Z K T ſicut B T ad K T baſes: Sequetur quod ſub A Z B T eius quod ſub A Z K T duplū ſequialterū eſſe. Eiuſdem autem ſub A Z K T duplum ſeſquialterum fuit A B C I G quinquangulum. Pentagonum itaque A B C I G dodecaëdri æquum eſt ei quod ſub A Z perpendiculari, & B T quinque ſextis lateris cubi comprehenditur.



PROPOSITIO VII.

Recta linea ſecta extrema & media ratione, quam rationem habet potens totam & maius ſegmentum, ad potentem totam & minus ſegmentum, eam habet cubi latus ad icoſaëdri latus, eadem ſphæra contenti.



Proponatur circulus A B E, cui (per 11 quarti) pentagonum æquilaterum inſcribatur B Z E C H, & (per ſecundam eiuſdem) triangulum æquilaterum A B I, cuius centrum eſto G. Quæ ex centro verò G B extrema & media ratione ſecetur in D, per trigeſimam ſexti. Poſſit autem totam G B & minus eius ſegmentum B D, recta M L, per coroll. 15 decimi. Coniungantur autem B E ſubtendens pentagoni angulum, ea nanque erit cubi latus, per coroll. 17 decimitertij, B I verò icoſaëdri, & B Z dodecaëdri, per quartam huius: Dico B E latus cubi ſic eſſe ad B I latus icoſaëdri, ſicut potens rectas B G G D, ad potentem rectas G B B D. Quoniam (per duodecimam decimitertij) B I triplum poteſt rectæ B G, quæ ex G B B D verò tripla ſunt eius quod ex G D, per quartam eiuſdem. Erunt itaque (per decimamquintam quinti) quod ex B I ad quæ ex G B B D (tripla) ſic quod ex B G ad quod ex G D (ſimplicia). Sicut autem quod ex B G ad quod ex G D, ſic eſt quod ex B E ad quod ex B Z. Nam rectæ B G G D & B E B Z ſunt (per ſecundam huius) in eadem ratione, Cùm maximè B Z ſit maius ſegmentum rectæ B E, per coroll. 17 decimitertij. Sicut itaque quod ex B E ad quod ex B Z, ſic eſt quod ex B I ad quæ ex B G B D. Et viciſſim quod ex B E ad quod ex B I, ſic quod ex B Z ad quæ ex G B B D. Quod autem ex B Z æquum eſt eis quæ ex B G G D, per 10 decimitertij. Nam B G lateri hexagoni, G D verò decagoni, per coroll. 9 eiuſdē, æquantur. Erunt igitur quæ ex B G G D ad quæ ex G B B D, ſic quod ex B E ad quod ex B I. Eſt ergo potens B G G D rectas recta Z B. Potens verò G B B D recta M L. Sicut itaque Z B (potens totam B G & maius ſegmentum G D) ad M L, potentem totam G B & minus ſegmentum B D, ſic eſt B E cubi latus, ad B I icoſaëdri latus, per vigeſimamſecundam ſexti. Recta itaque linea ſecta extrema & media ratione, quam, &c.

PROPOSITIO VIII.

Dodecaëdri ſolidum ad Icoſaëdri ſolidum eſt, ſicut cubi latus ad Icoſaëdri latus, eidem ſphæræ deſcriptorum.

Quoniam oſtenſum eſt quarta huius eundem circulum comprehendere & icoſaëdri triangulum, & dodecaëdri quinquangulum eadem ſphæra conceptorum, Sequetur, cùm æquales ſint circuli eas baſes capientes, in ipſos perpendiculares à centro æquales duci, per corollar. lemmatis decimæſextæ duodecimi, & proinde pyramides ſuper eorum ſolidorum baſibus eiuſdem eſſe verticis: Nam earum pyramidum vertices in centro concurrunt. Quare ad ſe erunt vt baſes, per quintam & ſextam duodecimi. Et hac de re pyramides dodecaëdrum componentes, ad pyramides icoſaëdrum componentes, ad ſe erunt vt baſes, quæ quidem ſunt eorum ſolidorum ſuperficies. Eorum itaque ſolida ad ſe erunt vt ſuperficies. Sed ſuperficies dodecaëdri ad ſuperficiem icoſaëdri fuit vt cubi latus ad icoſaëdri latus, per ſextam huius. Sicut itaque dodecaëdri ſolidum ad icoſaëdri ſolidum, ſic cubi latus ad icoſaëdri latus, eidem ſphæræ inſcriptorum, per vndecimam quinti. Dodecaëdri igitur ſolidum ad icoſaëdri ſolidum eſt ſicut, &c.

COROLLARIVM.

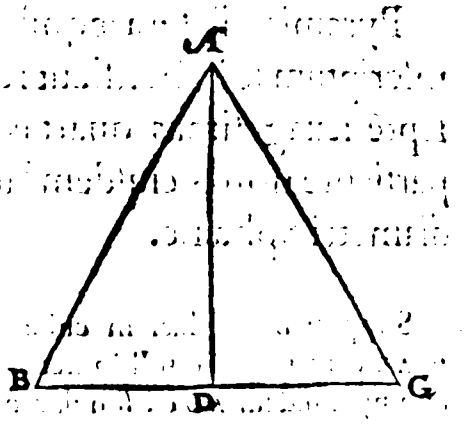
Dodecaëdri ſolidum ad Icoſaëdri ſolidum, ad ſe ſunt vt ſua ſuperficies in eadem Sphæra deſcripta, ſcilicet vt cubi latus ad Icoſaëdri latus.

Vtpa

Vt patuit, nam reſoluuntur in pyramides eiuſdem verticis.

PROPOSITIO IX.

Si trianguli æquilateri latus certa fuerit, ſuperficies incerta erit, quæ vocatur Medium.



Sit triangulum æquilaterum A B G: A ſigno A in latus B G perpendicularis agatur A D: certa autem eſto A B. Dico ſuperficiem A B G mediam eſſe: quoniam A B ſeſquitertium poteſt rectæ A D; per corollarium duodecimæ decimitertij, qualia A B poteſt duodecim, talia A D poteſt nouem. Reliqua igitur B D eorum 3 poterit, cùm A B vtraſque A D & D B poſſit. Certæ itaque erũt A D D B, propoſitæ A B commenſurabiles; per ſextam decimi. Sed quia A D ad D B rationem potentia habet quam 9 quadratus ad 3 non-quadratum, Ipſæ non ſunt in quadratorum ratione, per corollarium 25 octaui. Nec ideo longitudine commenſurabiles, per nonam decimi. Quod igitur ſub A D D B certis potentia tantùm commenſurabilibus rectis, *medium eſt*, per vigeſimamprimam decimi. Sed quod ſub A D D B duplum *eſt trianguli* A B D, per 41 primi: quod ſub A D D B itaque æquum eſt toti A B G, *ipſius* A B D duplo, per primam ſexti: quare medium erit triangulum A B G. *Si igitur trianguli æquilateri latus certa fuerit*, &c.

COROLLARIVM.

Si Octaëdrum & trilatera æquilatem Pyramis, ſphæræ cuius dimetiens certa eſt inſcribantur, eorum ſuperficies mediæ erunt.

Nam ſuperficies illæ conſtant triangulis æquilateris, quorum latera dimetienti certæ ſunt commenſurabilia, per decimamtertiam & decimamquartam decimitertij, & ideo certæ ſunt, ſed potentia tantùm ad perpendicularem commenſurabiles, & igitur medium comprehendunt triangulum, vt patuit.

PROPOSITIO X.

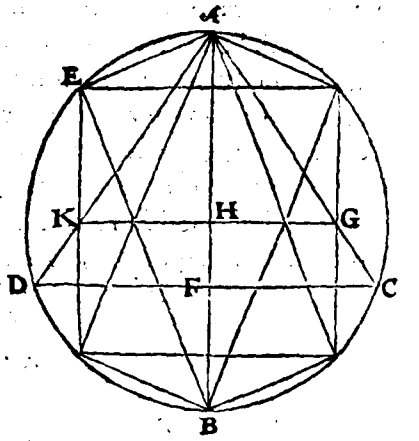
Si Pyramis trilatera, æquilatera, & Octaëdrum eidem Sphæræ inſcribantur, baſis pyramidis ſeſquitertia erit baſi Octaëdri. Octaëdri verò ſuperficies ad Pyramidis ſuperficiem, ſeſquialtera erit.

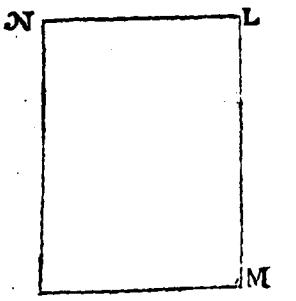
Quoniam dimetiens ſphæræ ſeſquialter eſt potentia lateris pyramidis, per decimamtertiam decimitertij, octaëdri verò lateris dupla eſt eadem dimetiens potentia, per 14 eiuſdem. Qualia igitur dimetiens poteſt ſex, eorum pyramidis latus poterit 4, octaëdri verò latus eorundem 3 poterit. Pyramidis igitur ad octaëdri latus rationem quam potentia 4 ad 3 ſeruabit, quæ quidem ſeſquitertia nominatur. Eandem item habebunt rationem ex ipſis lateribus ſimilia triangula (ſolidorum baſes) quam habuerunt ex ipſis quadrata. Nam ſingulæ duplæ ſunt rationis laterum, per vigeſimam ſexti, & proinde qualium baſis pyramidis fuit 4, eorum quatuor eius baſes erunt 16, ſimiliter qualium baſis octaëdri fuit eorundem 3, octo eius

baſes erunt 24. Octaëdri igitur baſes ad pyramidis baſes rationem habent quam 24 ad 16, quę quidem eſt ſeſquialtera. Si itaque pyramis trilatera, æquilatera, & octaëdrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c.

PROPOSITIO XI.

Pyramis trilatera æquilatera ad Octaëdrum eidem Sphæræ inſcriptum ſe habet, ſicut rectangulum ſub linea potente viginti ſeptẽ ſexageſimas quartas lateris Pyramidis, & ſub linea octopartiente nonas eiuſdem lateris comprehenſum ad quadratum diametri Sphæræ.

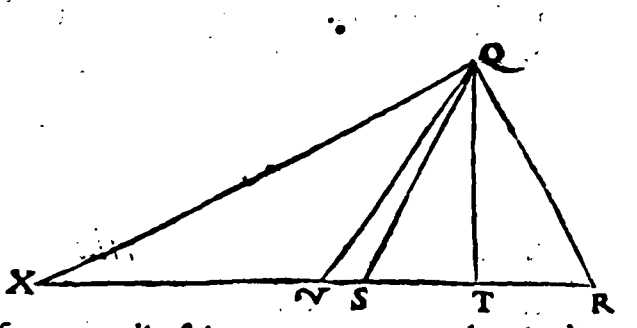




Supponamus ſphæram cuius dimetiens ſit A B, centrum verò H. Illi autem inſcriptam eſſe pyramidem A D C, ſimulac octaëdrum A E K B G, linea autem N L poſſit $\frac{17}{64}$ lateris A C pyramidis: linea verò L M ſit eiuſdem lateris longitudine octopartiens nonas: Dico pyramidem A C D ad octaëdrum A E B ſe habere, vt quod ſub N L, L M ad quod ex A B quadratum. Quoniam quæ ab angulo A per centrum H ducitur perpendicularis baſi pyramidis, in centrum F circuli baſim continentis cadit, & rectam H F ſextam ipſius A B partem efficit, per corollarium decimætertiæ decimitertij, tripla erit H A (quæ ex centro) rectæ H F, & proinde tota A F ad A H erit vt 4 ad 3. Secetur pyramis A D C plano K H G, per centrum H, parallelo ipſi D F C baſi, per corollarium decimæquintæ vndecimi. Eius itaque pyramidis triangulum A D C ſecabitur recta K G parallela ipſi D C, per 16 vndecimi. Sicut igitur A F ad A H, ſic erit A C ad A G, per ſecundam ſexti: ſeſquitertia itaque erit A C ipſi A G. Quia verò ſimilia ſunt triangula A D C & A K G, & reliqua (plano H K G) ſecta inter ſe, per quintam ſexti: ſimiles erunt pyramides A D C & A K G adinuicem, per ſeptimam diffinitionem vndecimi. Ipſæ itaque erunt in tripla ratione laterum A C ad A G, per octauam duodecimi: ſed laterum A C ad A G fuit, vt 4 ad 3 ratio. Inuentis itaque (ex ſecunda octaui) quatuor numeris, in ea ratione continuis & minimis, qui quidem erunt 64, 48, 36, 27, perſpicuum erit (ex decima diffinitione quinti) extremos 64 ad 27 triplicem habere rationem propoſitæ 4 ad 3 rationis, vel bis in ſe ducta (1 & $\frac{1}{3}$) huius rationis quantitate ea conſurget ratio 64 ad 27. Pyramis igitur A D C ad pyramidem A K G erit vt 64 ad 27, quæ eſt tripla ipſorum 4 ad 3. Quia verò A C recta ipſius A G ſeſquitertia eſt longitudine, qualium A C poteſt 64, eorum A G poteſt 36. Nam dupla eſt ratio potentiarum rationis laterum 64 ad 48, vel 8, ad 6, per vigeſimam ſexti.

Sit igitur triangulum æquilaterum Q R S, ſuper R S æquali poſita ipſi A G conſtitutum, per primam primi, demiſſa in baſim R S perpendiculari Q T. Extendatur autem R S in X, fiátque (per corollarium ſextæ decimi) ſicut 27 ad 64, ſic R S ad R X: ſecetur autem bifariam R X in V ducta Q V. Quoniam R S æqualis eſt ipſi A G,

qualium



qualium A C poteſt 64, eorum R S poteſt 36, nam A G ea poſſe oſtenſa fuit: qualium verò R S poteſt 36, eorum Q T poteſt 27, per corollariũ 12 decimitertij. Qualium igitur A C poteſt 64, eorum Q T poteſt 27: recta itaque Q T rectæ L N æqualis erit ex hypotheſi. Rurſus cùm poſita ſit R S ipſi A G æqualis, fuit autem R X eorum longitudine 64 qualium R S fuit 27, eorundem verò erit A C (quæ ipſius A G vel R S fuit ſeſquitertia) 36, qualium R X fuit 64, igitur R V (ipſius R X dimidia) eorundem erit 32, qualium A C fuit 36: recta itaque R V rectæ A C erit octopartiens nonas, & proinde ipſi L M quæ eiuſdem A C fuit octopartiens nonas æqualis erit R V: cùm autem N L ipſi Q T & L M ipſi R V æquales oſtenſæ ſint, rectangulum ſub Q T R V æquum erit rectangulo ſub N L potente $\frac{17}{64}$ lateris A C, & ſub L M octopartiente nonas eiuſdem lateris A C: ſed quod ſub Q T R V duplum eſt trianguli Q V R, per 41 primi, eiuſdem verò Q V R duplum ex Q X R, per primam ſexti: totum igitur Q X R ei quod ſub Q T R V æquum erit, & proinde rectangulo N M. Quia R X fuit poſita 64 qualium R S fuit 27, triangula Q R X & Q R S per primam ſexti in baſium ratione erunt, vt 64 ad 27, ſicut verò 64 ad 27 ſic fuit pyramis A D C ad pyramidem A K G, ſicut itaque N M vel Q R X ad Q R S, ſic pyramis A D C ad pyramidem A K G, quia verò A H ſemidiameter eſt vertex pyramidis A K G, necnon binarum pyramidum octaëdri communem baſim in quadrato octaëdri habentium æquarum & ſimilium, per corollarium decimæquartæ decimitertij, erit ſicut baſis pyramidis A K G (quæ fuit Q R S) ad bina quadrata octaëdri, hoc eſt ad quadratum diametri A B, ipſis quadratis (per quadrageſimamſeptimam primi) æquum, ſic pyramis A K G ad octaëdrũ A E B B, per ſextam duodecimi. Cùm autem fuerit N M rectangulum ad Q R S baſim, vt pyramis A D C ad pyramidem A K G, baſis verò Q R S ad quadratum A B fuit vt pyramis A K G ad octaëdrum A E B, ſequetur æqua ratione ſublatis mediis (per vigeſimamſecundam quinti) eſſe, vt rectangulum N M ad quadratum A B, ſic pyramidem A D C ad octaëdrum A E B eidem ſphæræ inſcripta: ſed N M continetur ſub N L potente $\frac{17}{64}$ lateris A C pyramidis A D C, & ſub L M octopartiente nonas eiuſdem A C, ex hypotheſi. Pyramis itaque trilatera æquilatera ad octaëdrum eidem ſphęræ inſcriptum, ſe habet, &c.

PROPOSITIO XII.

Si Cubus Sphæra comprehẽdatur, duplum eius quod ex dimetiente æquũ eſt omnibus Cubi ſuperficiebus ſimul ſumptis, perpendicularis autem à centro Sphæræ in aliquam Cubi baſim demiſſa, dimidio Cubi lateris æqualis erit.

Cùm enim (per decimamquintam decimitertij) dimetiens poſſit triplum lateris cubi, ſequetur dimetientis duplum poſſe ſextuplum eiuſdem cubi lateris: atqui ſextuplum potentiæ vnius lateris totam cubi ſuperficiem complet, nam ſex ſuperficiebus quadratis componitur cubus, per vigeſimamprimam diffinitionem vndecimi, æquis igitur lateribus comprehenſis, dupla itaque dimetientis potentia, cubi toti ſuperficiei erit æqualis: quia verò dimetiens cubi & ea quæ in baſes eius oppoſitas ſit perpendicularis, bifariam ſe in centro ſphæræ cubum continentis ſecant, per corollarium ſecundum decimæquintæ decimitertij, totáque recta centra baſium oppoſitarum coniungens, lateri cubi eſt æqualis, per trigeſimam-

tertiam primi, cùm coniungat ſemidimetientes baſium æquas & parallelas. Dimidia itaque dimidio cubi lateri æqualis erit, per decimamquintam quinti. Si itaque cubus ſphæra, &c.

COROLLARIVM.

Si potentiæ dimetientis duo tertia, in perpendicularem dimidio cubi lateri æqualem ducentes, ſolidum fecerimus, illud cubi ſolido æquum erit.

Nam duo tertia potentiæ dimetientis ſphæræ cubum ambientis, binis cubi baſibus æqua eſſe patuit. Si itaque illis dimidia cubi altitudo conferatur, ſingula dimidio cubi ſolida efficient æqualia, per trigeſimamprimam vndecimi: nam æquas habent baſes. Bina igitur toti ſolido cubi æqualia erunt.

MONITVM.

Priorum proximorum librorum theoremata abſoluentes, quæ ab eis oriri videbantur corollaria eiſdem contulimus, quorum plura huic decimoquarto Campanum tribuiſſe (cùm huc ventum fuit) reperimus, quæ iam duodecimi ac decimitertij theorematis à quibus oriuntur, coniunximus, reliquorum verò quæ ſcripſit Campanus ſingula, ſuis locis contulimus. Horum autem aliqua 4 propoſitionibus & quinque corollariis explicauit Ypſicles, ſatis tamen confusè: nos autem vt quæque ſua ſorte diſcutiamus, quæ hoc libro à Campano omiſimus, eo ordine quo ea enumerabimus, diſponuntur, vt quæque ſua diſtribuantur ſerie, ac quæ à theorematis oriuntur corollaria eiſdem aſſocientur.

Quo ordine conueniant noſtra Campani theoremata hoc decimo quarto.

Campani ordo	1	2	3	4	5	6	7	corol. 7	8	9	coroll. 9
Huius ordo	1	2	corol. 9. dec. tertij	3	4	5	5	corol. 5	6	7	lemm. 16 duodec.

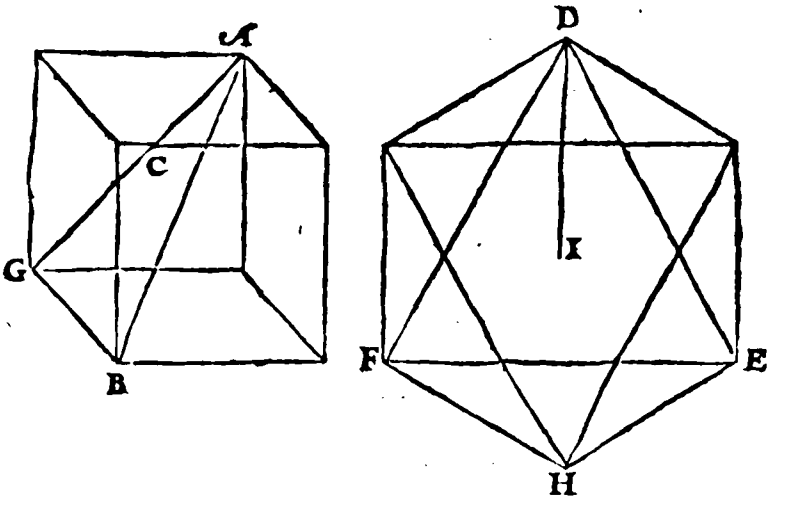
Campani ordo	10	11	12	13	14	15	16	17
Huius ordo	corol. 8	cor. 12 dec. tert.	9	corol. 9	10	cor. 13 dec. tert.	corol. 14 dec. tert.	11

Campani ordo	coroll. 17.	coroll. 17	18 cum coroll.
Huius ordo	coroll. 13. dec. ter.	coroll. 12. dec. tert.	12 cum coroll.

Expliciunt quæ partim à maioribus ſuſcepimus hoc decimoquarto. Quæ autem eidem noſtris deerant temporibus conferendis ſolidis mox ſubeunt, à nobis in lectoris ſubſidium collata.

PROPOSITIO XIII.

Idem circulus comprehendit & Cubi quadratum & octaëdri triangulum eadem Sphæra descriptorum.



Esto cubus A B G, octaedrũ esto D E F, eadem sphæra cuius dimetiens sit A B vel D H comprehensa, quæ verò ex centris circulorum bases continentiũ sint C A & I D: Dico eas esse æquales. Quoniam dimetiens A B sphæræ cubum cõtinentis potest triplum lateris cubi B G, ex quintadecima decimitertij, cuius quidem *lateris duplum* potest (ex quadragesimaseptima primi) A G dimetiens *basis cubi*, quæ & circuli basim continentis dimetiens est per nonam quarti, sphæræ dimetiens A B sesquialterum rectæ A G poterit, scilicet quarum partium A B potest 12, earum A G poterit 8, ac proinde recta A C quæ ex centro circuli erit duarum potentia. Sextuplum itaque potest sphæræ dimetiens, eius quæ ex centro circuli quadratum cubi continentis. Sphæræ verò eiusdem octaëdrum continentis dimetiens, eadem est scilicet D H ipsi A B, quæ est dimetiens quadrati quod ex lateribus fit octaëdri. Et proinde duplum potest lateris eiusdem octaëdri, per decimamquartam decimitertij, latus autem D F, eius quæ ex centro circuli triangulum octaëdri continentis (scilicet I D) triplum potest, ex duodecima decimitertij: sextuplum igitur poterit rectæ I D (quæ ex cẽtro) eadem dimetiens A B vel D H, quæ sextuplum potuit eius quæ ex centro circuli quadratum cubi continentis: rectæ ideo ex centris circulorum bases cubi & octaëdri continentium sunt æquales, & ideo circuli, ex prima tertij. Idem itaque circulus comprehendit & cubi, &c.

COROLLARIVM.

Sequitur perpendiculares in sphæra coniungentes centra circulorum oppositas bases cubi & octaëdri continentium, esse æquales.

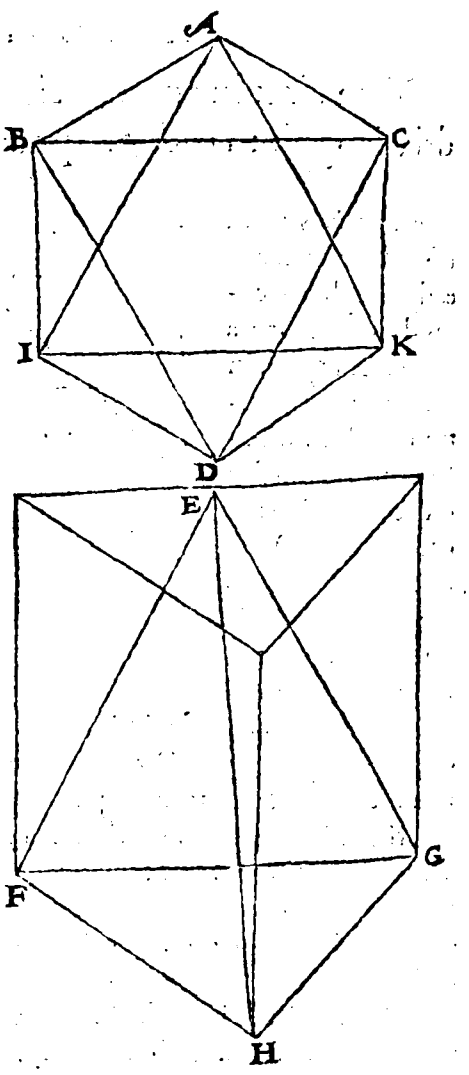
Cùm circuli sint æquales, per secundum corollarium lemmatis 16 duodecimi, ac per centrum sphæræ centra basium coniungere, per primum corollarium eiusdem: Perpẽdicularis itaque octaëdri oppositas bases copulans, lateri cubi æqualis erit: nam eorum habetur vtraque pro vertice recta.

PROPOSITIO XIIII.

Octaëdrum ad triplum Pyramidis eadem Sphæra comprehensæ rationem habet quam latera.

Esto

Eſto octaëdrum A B C D, pyramis verò E F G H, ſuper cuius baſi F G H erectis perpendicularibus vertici pyramidis æqualibus cõſtituatur priſma, illud triplum erit pyramidis E F G H, per primum coroll. 7 duodecimi: Dico octaëdrũ A B C D ſic eſſe ad priſma triplum pyramidis E F G H, vt B C latus ad F G latus. Cùm octaëdri latera baſium oppoſitarum ſint rectæ ſeſe tangentes: & parallelæ ad alias ſeſe tangentes, ſunt enim oppoſita latera quadratorum ex lateribus octaëdri compoſitorum, Parallela erunt triangula plana octaëdri oppoſita, ſcilicet A B C ipſi K I D, ac reliqua, per 15 vndecimi. Eſto octaëdri dimetiens A D, totum octaëdrum ſecatur in quatuor pyramides æquas & ſimiles ſuper baſibus octaëdri & vertice conſtitutas, ac circa dimetientem A D, ſcilicet quæ ſuper baſi B I D vertice A, & baſi B C D vertice A, ſuper baſi I K D vertice A, & ſuper baſi C K D vertice A conſtituuntur, quæ æquales erunt (nam ſingulæ binis octaëdri baſibus, ac binis triangulis ſub dimetiente A D & binis octaëdri lateribus comprehenſis conſtant) per octauam diffinitionem vndecimi. Priſma igitur quod ſuper octaëdri baſi & vertice conſtituitur, hoc eſt quod ſub vertice parallelarum baſium ac pyramidum, vt ex præcedẽte patuit, æquum eſt tribus illarum octaëdri pyramidum, per primum corollar. 7 duodecimi. Illud ideo priſma ad aliud priſma ſuppoſitum ſub eodem vertice ex totius octaëdri quatuor pyramidibus, habebit rationem baſium trigonarum, per tertium corollarium eiuſdem: quia igitur 4 pyramides ad 3 rationem habent ſeſquitertiam, ſequetur priſmatis quatuor illas totius octaëdri pyramides continentis trigonam baſim, rationem habere ſeſquitertiam, ad baſim priſmatis tres eiuſdem octaëdri pyramides ſuper eius baſi ac vertice continentis, hoc eſt ad baſim octaëdri: ſed baſis pyramidis eiuſdem octaëdri baſis ſeſquitertia fuit, per decimam huius. Æqualis itaque erit trigona baſis, ſcilicet priſmatis quatuor octaëdri pyramides ſub eius vertice continentis, baſi trigonæ priſmatis tres pyramides ſub pyramidis E F G H vertice continentis: ſed æquum eſt priſma ſuppoſitum octaëdro. Priſma verò pyramidis E F G H, eiuſdẽ pyramidis fuit triplum, quæ quidem ſuper æquis baſibus priſmata ad ſe ſunt vt vertices, per corollarium vigeſimæquintæ vndecimi: vertices autem ad ſe ſunt vt latera, nempe potentia ſeſquitertia per 18 decimitertij: Nam octaëdri vertex eſt latus cubi eadem ſphæra comprehenſi, ex corollario 13. huius: Priſma igitur æquale octaëdro, ad priſma triplum pyramidis eam habet quam vertices ſiue quam latera rationem. Octaëdrum itaque ad triplum pyramidis eadem ſphæra comprehenſæ, rationem habet quam latera.



COROLLARIVM.

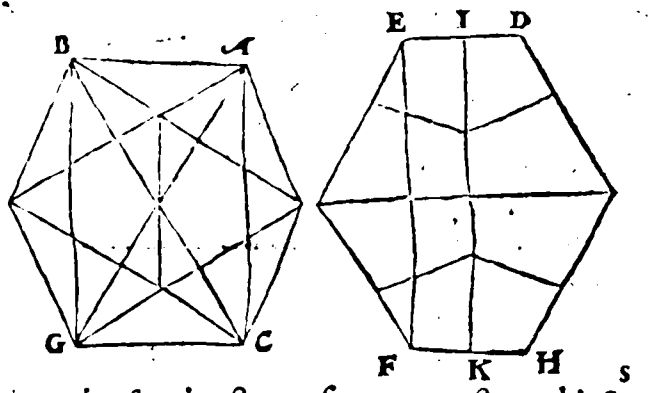
Pyramidis & Octaëdri, proportionalia ſunt latera verticibus.

Nam latera ac vertices ſeſquitertia fuêre potentia, inſuper dimetiens ſphæræ ad pyra

ad pyramidis latus, vt octaëdri latus ad cubi latus, nempe ſeſquialtera (ex 18 decimitertij) fuerunt potentia.

PROPOSITIO XV.

Si certa propoſita binas potens, totam & maius ſegmentum, rurſuſque binas, totam & minus ſegmentum fecerit, latus Icoſaëdri maius erit ſegmentum, latus autem Dodecaëdri minus eadem Sphæra comprehenſorum.



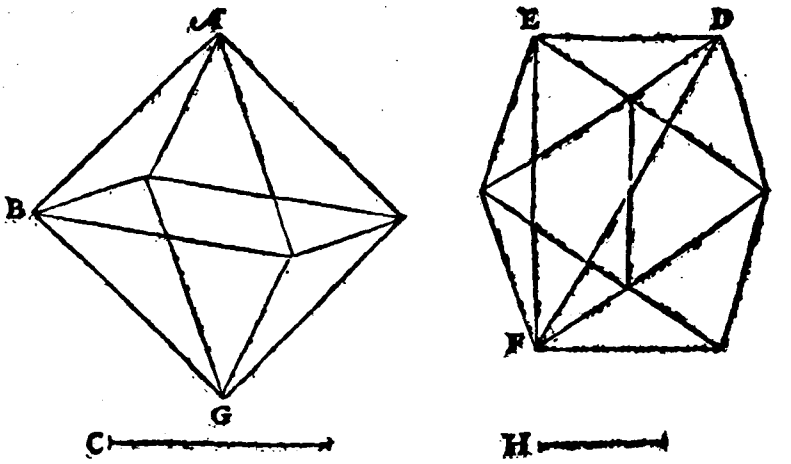
Eſto propoſita recta A G dimetiẽs ſphæræ icoſaëdrũ A B G C continentis, cuius latus ſit A B. Eſto item recta B G ſubtendens angulum pentagoni ex icoſaëdri lateribus (per 16 decimitertij) deſcripti. Sit inſuper ad eandem A G vel D F ſibi æqualem dodecaëdrum D E F H, per decimamſeptimam decimitertij, cuius oppoſita latera E D F H bifariam ſecentur in I & K iuncta I K: ſit autem recta E F binorum coniunctarum baſium oppoſitos nectens angulos: Dico latus icoſaëdri A B eſſe maius ſegmentum, quod dimetiens A G poteſt ſimul cum tota, latus verò dodecaëdri E D eſſe minus, quod eadem dimetiẽs A G vel D F ſimul cum tota poteſt. Quoniam icoſaëdri latera oppoſita A B G C dimetientibus A G B C iuncta, ſunt parallela per coroll. ſecundum 16 decimitertij, rectæ B G & A C eas coniungentes æquales & parallelæ ſunt, per 33 primi, inſuper anguli B A C A B G æquis dimetientibus ſubtenſi æquales (per octauam primi) erunt recti, per 29 primi. Recta ideo A G binas A B B G poteſt, per 47 primi: cùm autem B G ſubtendat angulum pentagoni ex lateribus icoſaëdri compoſiti, rectæ B G maius ſegmentum erit A B per octauam decimitertij, quod quidem potuit A G cum tota B G. Cæterùm quia recta I K iungens oppoſita E D F H dodecaëdri latera & parallela rectos efficit ad ea angulos, per coroll. 3 decimæſeptimæ decimitertij, Recta E F æquas & parallelas E I F K iungens, eidem I K æqualis erit, per 33 primi: Rectus ideo erit D E F angulus, per 29 primi: quare D F dimetiens binas E D E F poteſt, atqui rectæ I K minus ſegmentum eſt E D latus dodecaëdri, per 4 corollarium 17 decimitertij: reliquæ itaque E F (ipſi I K æqualis) minus idem ſegmentum erit E D. Dimetiens igitur D F binas E D E F potens, per 47 primi, poteſt E D latus dodecaëdri minus ſegmentum ſimul cum tota E F. Si ergo certa propoſita A G vel D F binas A B B G potens totã & maius ſegmentum, rurſuſque binas E F E D totam & minus ſegmentum fecerit, latus icoſaëdri A B erit maius ſegmentum, latus verò dodecaëdri E D minus, eadem ſphæra comprehenſorum.

PROPOSITIO XVI.

Si lateris Octaëdri potentia per binas rectas extrema & media ratione coniunctas exprimatur, latus Icoſaëdri eadem ſphæra comprehenſi duplum poteſt minoris earum.

Eſto

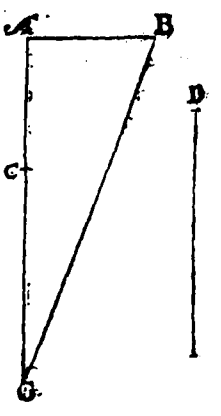
Esto octaëdri A B G latus A B, potens binas C & H rationem habentes quam tota ad maius segmentum, per coroll. 34 sexti. Sit autem icosaëdrum D E F cuius latus D E, recta verò subtendens angulos pentagoni ex lateribus icosaëdri facti esto E F: Dico rectam E D latus, duplum posse rectæ H minoris earum. Quoniam patuit ex demonstratis decimæquintæ huius latus E D icosaëdri maius segmẽtum esse rectæ E F, ac dimetientẽ D F binas E D E F posse, vt totam scilicet & maius segmentũ. Potest autem (ex hypothesi) latus A B binas C & H eadem ratione coniunctas. Erit igitur E F ad E D vt C ad H, per secundam decimiquarti. Ac vicissim E F ad C vt E D ad H, per decimamsextam quinti: & quia D F binas E D E F potest, A B antẽ binas C & H, erunt quæ ex E F E D ad quod ex D F, vt quæ ex C & H ad quod ex A B. Et vicissim quæ ex E F E D ad quæ ex C & H, sic quod ex D F ad quod ex A B. Atqui duplum potest D F dimetiens lateris A B octaëdri eidem sphæræ (ex hypothesi) inscripti, per decimamquartam decimitertij. Duplum itaque poterunt quæ ex E F E D eorum quæ ex C & H. Ac ideo vna E D vnius H potentia, per duodecimam quinti. Duplum igitur potest E D latus icosaëdri rectæ H minoris. Si ideo lateris octaëdri potentia per binas rectas extrema & media ratione coniunctas exprimatur, latus, &c.



PROPOSITIO XVII.

Si latus dodecaëdri & recta cuius id est minus segmentum, ad angulum rectum constituantur, ea quæ dimidium potest rectæ subtendentis angulum, est latus octaëdri eadem sphæra comprehensi.

Esto latus dodecaëdri A B: Recta verò cuius id latus est minus segmentum sit A C, scilicet iungens opposita dodecaëdri latera, per quartum coroll. decimæseptimæ decimitertij, angulum rectum qui ad A componentes, iuncta B G: Possit autem dimidium rectæ B G recta D, per trigesimamquartam sexti: Dico rectã D latus esse octaëdri eadem sphæra comprehensi. Quoniam recta A G efficit maius segmentum G C latus cubi eadẽ sphæra comprehẽsi, per idem quartum corol. decimæseptimæ decimitertij. Quæ verò ex tota A G & minori segmento A B tripla sunt potentiæ maioris segmenti G C, per quartam decimitertij. Insuper eiusdẽ quod ex G C latere cubi triplum potest sphæræ dimetiens, per decimamquintam decimitertij. Recta igitur B G dimetienti erit æqualis. Nam ea binas A B A G (per 47 primi) potest, siue ideo triplum rectæ G C. Atqui dimetientis dimidium potest latus octaëdri eadem sphæra concluſi, per



14 decimi

14 decimitertij. Rectæ autem B G dimidium potuit recta D, ex hypotheſi. Recta igitur D (dimidium eiuſdem dimetientis potens) erit latus octaëdri. Si itaque latus dodecaëdri & recta cuius id eſt minus ſegmentum ad angulum rectum, &c.

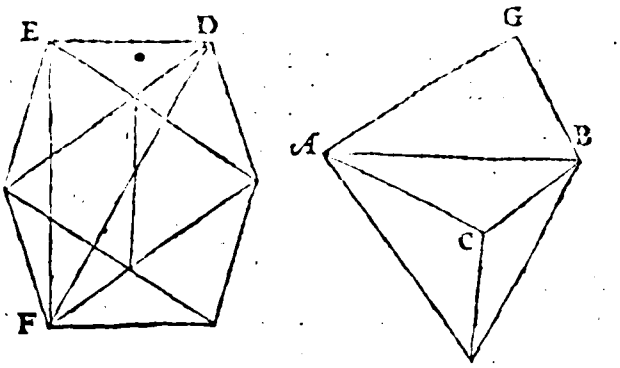
COROLLARIVM

Cuius rectæ latus octaëdri ſeſquialterum poteſt, eiuſdem latus dodecaëdri eidem ſphæræ inſcripti eſt maius ſegmentum.

Nam latus dodecaëdri eſt maius ſegmentum ſegmenti C G, cuius D latus octaëdri potuit ſeſquialterum, hoc eſt, dimidium potentiæ B G, quæ fuit ipſius G C tripla.

PROPOSITIO XVIII.

Si latus Pyramidis poſſit duas rectas extrema & media ratione coniunctas, latus Icoſaëdri eidem ſphæræ inſcripti ſeſquialterum poteſt minoris rectæ.

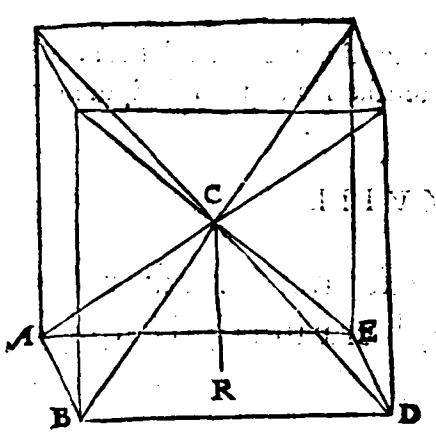


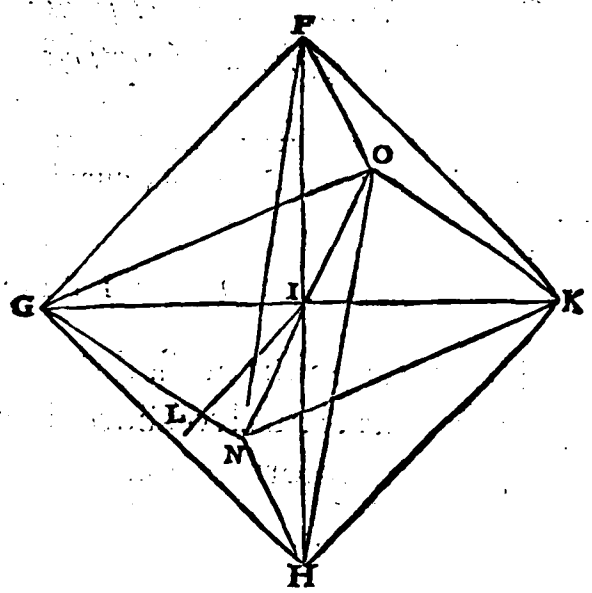
Eſto pyramis A B C, latus autem A B, cuius potẽtia ſecetur in rectas A G & G B extrema & media ratione cõiunctas, ſcilicet in A G totam, & G B maius ſegmentum, per coroll. 34 ſexti. Sit item E D latus icoſaëdri E D F eadem ſphæra conteti. Recta verò ſubtendens angulum pentagoni ex lateribus icoſaëdri deſcripti eſto E F: Dico E D latus icoſaëdri ſeſquialterũ poſſe minoris rectæ G B. Quoniam (per ea quæ demonſtrata ſunt decimaquinta huius) latus E D maius ſegmentum eſt rectæ E F angulum pentagoni ſubtendentis. Eſt autem ſicut E F tota ad E D maius, ſic idem maius ad minus, per 30 ſexti, & (per hypotheſim) recta A G fuit tota, G B verò maius ſegmentum. Erit ideo ſicut E F ad E D ſic A G ad G B, per ſecundam decimiquarti. Et viciſſim E F ad A G vt E D ad G B Cùm autem A B binas A G G B poſſit, ex hypotheſi, angulus A G B rectus erit, ex 48 primi. Rectus autem eſt D E F, per demonſtrata 15 huius. Æquiangula ideo erunt A G B F E D triangula, per ſextam ſexti. Eorum itaque proportionalia erunt latera E D ad G B vt F D ad A B, per quartam ſexti. Eſt autem (ex eiſdem demonſtratis) F D dimetiens ſphæræ icoſaëdrum ambientis, quæ ſeſquialterum poteſt lateris A B pyramidis eidem ſphæræ inſcriptæ, per 13 decimitertij: ſeſquialterum igitur poterit E D latus octaedri, rectæ G B maioris ſegmenti, ſiue minoris rectæ. Si itaque latus pyramidis poſſit duas rectas extrema & media ratione coniunctas, latus icoſaëdri eadem, &c.

PROPOSITIO XIX.

Cubi ſuperficies ad Octaëdri ſuperficiem eidem Sphæræ inſcripti, ſe habent vt ſolida.

Esto cubus A B C D E, cuius quatuor dimetiẽtes sint A C B C D C E C vtrinque producti. Sit item octaëdrum eidem sphærę inscriptũ F G H K. Cuius tres sint dimetientes F H G K O N: Dico esse cubum A B D ad octaëdrum F G H, vt cubi superficies ad octaëdri superficiem. A centro cubi in basim A B E D sit perpendicularis C R. A centro verò octaëdri in basim G N H perpendicularis I L. Quoniam tres cubi dimetientes per centrum C transeunt, ex secundo coroll. decimæquintæ decimi-





tertij, fient ex cubo sex pyramides vt hæc A B D E C toti cubo æquales, cùm sint cubi sex bases in quas æquales à centro perpendiculares cadent, per coroll. lemmatis decimæsextæ duodecimi, cum æqualibus in sphæra circulis insistant bases. Cæterùm in octaëdro tres dimetientes super octo basibus, octo constituunt pyramides verticem in centro habentes, per tertium coroll. decimæquartæ decimitertij. Bases autem cubi & octaëdri æqualibus in sphæra continentur circulis, per 13 huius. Qui itaque æquè distant à centro, ad perpendiculares C R I L æquales erunt, per coroll. lemmatis decimæsextæ duodecimi. Erunt itaque pyramides cubi sub eodem vertice cum octaëdri pyramidibus, nempe sub perpendiculari à centro in bases. Pyramides igitur sex cubi, ad octo pyramides octaëdri sub eodem vertice existentes, ad se erunt vt bases, per sextam duodecimi, hoc est, vnica pyramis super sex cubi basibus vertice autem perpendiculari, quæ ipsis sex æquatur, per eandem, ad vnicam super octo octaëdri basibus, ipsi octaëdro æqualem, ac sub eodem vertice, rationem habebit quam habent sex cubi bases, quæ totam implent cubi superficiem, ad octo octaëdri bases totam octaëdri superficiem complentes. Earum etenim solida ad se sunt vt bases, ex eadem sexta duodecimi. Cubi igitur superficies ad octaëdri superficiẽ eidem sphæræ inscripti, se habet vt solida.

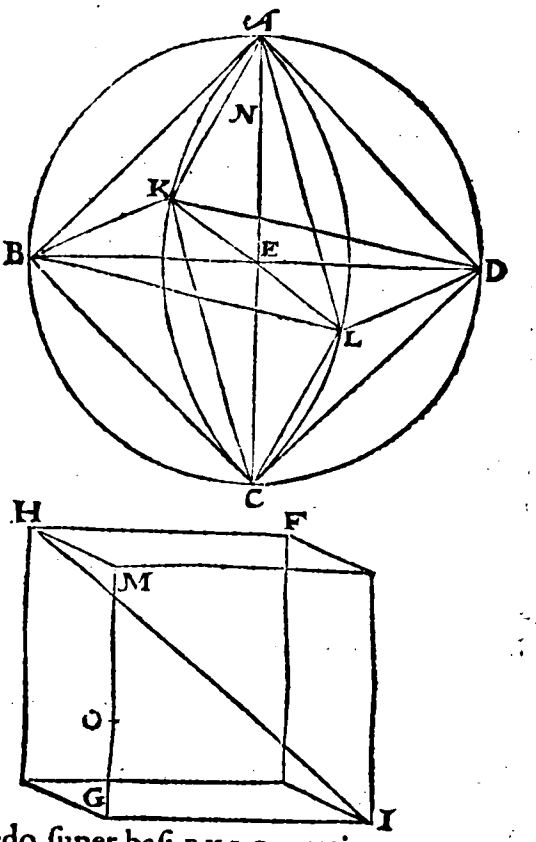
PROPOSITIO XX.

Si Cubus & Octaëdrum eadem Sphæra comprehendantur, erit eorum ratio quæ lateris cubi ad semidimetientem Sphęræ.

Esto octaëdrum A E C D B sphæræ A B C D inscriptum: cubus verò eidem sphæræ inscriptus esto F G H I M, cuius dimetiens sit H I, quæ quidem æquatur dimetienti A C, per decimamquintam decimitertij: dimetientis dimidia sit A E: Dico esse cubum F G H I M ad octaëdrum A E C D B sicut latus M G ad A E semidimetientem. Cùm dimetiens A C possit duplum lateris B K octaëdri, per decimamquartam decimitertij, triplum verò lateris cubi M G, per 15 eiusdem, sesquialterũ erit B K D L

quadratum

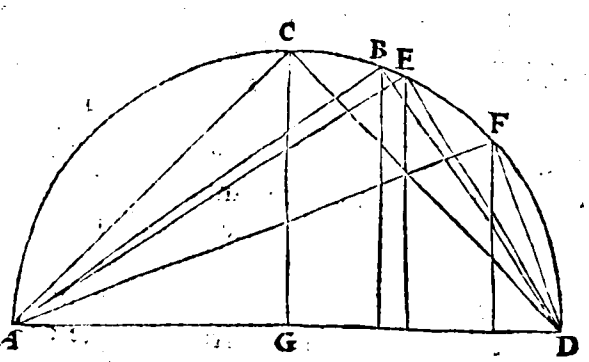
quadratum quadrati ipſius cubi F M. A recta A E ſecetur pars tertia A N, à recta M G ſimiliter tertia G O, per nonã ſexti. Duo igitur tertia rectæ A E erit E N, necnon M O rectæ M G: parallelepipedum igitur quod ſuper baſi B K D L vertice verò E A, triplum eſt eius quod ſuper eadem baſi, vertice autem A N, per coroll. trigeſimæ primæ vndecimi: ſed & triplum pyramidis A B K D L, quæ ſuper iiſdem baſi & vertice, per corollarium ſecundum ſeptimæ duodecimi: pyramis itaque A B K D L æqualis eſt parallelepipedo quod ſuper baſi ſua B K D L, vertice verò A N conſtituitur, per ſeptimam communem ſententiam. Eius porrò parallelepipedi duplum eſt quod ſuper eadẽ baſi B K D L duplo verò vertice E N, per corollarium trigeſimæ primæ vndecimi, pyramidis verò duplum eſt octaëdrum A B K D L C, per corollarium ſecundum decimæquartæ decimitertij. Octaëdrũ igitur A B K D L C æquum eſt parallelepipedo ſuper baſi B K L D, vertice autem E N conſtituto, per decimamquintam quinti, ſed parallelepipedum quod ſuper baſi B K D L, ſeſquialtera baſi F M, vertice verò duobus tertiis M O lateris cubi M G continetur, æquum eſt cubo F G, per ſecundam partem trigeſimæquartæ vndecimi, ipſi autem F M ſeſquialtera fuit B K D L baſis. Bina itaque parallelepipeda, quod ſcilicet ſuper baſi B K D L, ſeſquialtera baſi ipſius cubi, vertice verò M O duobus tertiis lateris M G cubi, quod cubo fuit æquum, ac quod ſuper eadem baſi B K D L vertice autem E N, quod octaëdro fuit æquum, ad ſe erunt vt vertices M O ad E N, per corollarium trigeſimæprimæ vndecimi, ac proinde ſicut vertices M O ad E N ſic erit cubus F G H I M ad octaëdrum A B K D L C, per ſeptimam quinti, ſicut autem M O ad E N ſic tota M G ad totam E A, per decimamoctauam quinti, ſicut igitur M G latus cubi ad E A ſemidimetientem, ſic cubus F G H I M ad octaëdrum A B K D L C eidem ſphæræ inſcripta. Si itaque cubus & octaëdrũ eadem ſphæra cõprehendantur, &c.



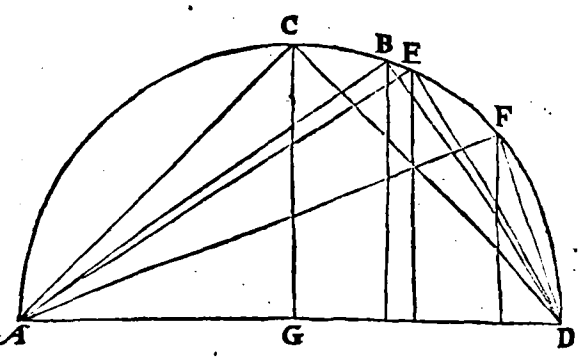
COROLLARIVM.

Quinque ſolidorum laterum potentias à dimetientis potentia diſtinguere.

Pyramidis & cubi latera ſecant potentiam dimetientis ſphæræ in binas rationem potentia duplam habentes, Octaëdrum in binas æquales, Icoſaëdrum in binas duplam extremæ & mediæ rationem habentes, quarum minor eſt latus, Dodecaëdrum verò in binas quadruplam extremæ & mediæ rationem habentes poten-



tias,quarum minor latus eſt. Nam dimetiens ſphæræ A D poteſt latus pyramidis A B & cubi B D, eiuſdem dimidium potentia, hoc eſt dimetientem, & latus baſis cubi, Octaëdri verò bina poteſt A C C D æqua lia ſphæræ dimetiens latera, Icoſaëdri autem poteſt totam A E & eius maius ſegmentum E D latus, ex decimaquinta huius. Quare earum potentię duplam rationem habentes quam latera,per primum corollarium vigeſimæ ſexti,duplam habent extremæ & mediæ rationem, dodecaëdri autem poteſt dimetiens totam A F & eius minus ſegmentum F D latus,per eandem decimamquintam. Quare tota ad minus habens duplam extremæ & mediæ rationem, ſcilicet totius ad maius, per decimam diffinitionem quinti, efficit potentiarum rationem duplæ duplam, per idem primum corollarium vigeſimæ ſexti, quæ eſt extremæ & mediæ quadrupla, per quintam diffinitionem ſexti.



MONITVM.

Hac itaque lege,data dimetiente ſphæræ dabitur cuiuſuis corporum inſcriptorum latus:eorum autem corporum cùm tria habeant latera propoſitæ dimetienti potentia tantùm commenſurabilia, longitudine verò nequaquam : (Nam eorum potentiæ ſunt in ratione quadrati ad non quadratum, quare quadratorum rationem non habent,per corollarium vigeſimæquintæ octaui,nec ideo latera longitudine commenſurabilia,per nonam decimi:) Hac de cauſa ſufficit potẽtias illorum laterum inter ſe conferre,non autem longitudines, quæ quidem potentiæ reperiuntur in dimetientis potentia, ſcilicet à potentia dimetientis auferatur potentia cubi, ſupereſt pyramidis potẽtia, ſublata verò pyramidis relinquitur cubi, ſublata autem dimidia relinquitur octaëdri lateris potentia,ſed quia dodecaëdri latera ac icoſaëdri ex ſe incerta(nam hoc minor ex decimaſexta, illud verò apotome,ex decimaſeptima decimitertij)probata ſunt,dimetienti propoſitæ certæ æquè longitudine & potentia ſunt incommenſurabilia, quare eorum affinitas nulla ratione numeris expreſſa diffiniri poteſt(per octauam decimi)nec inter ſe:nam ſunt incertarum diuerſæ ſpecies adinuicem incommenſurabiles, eo quòd ſi commenſurabiles eſſent, eiuſdem eſſent ſpeciei, per centeſimamtertiam & centeſimamquintam decimi, quod abeſt. Nos itaque potentiæ dimetientis ea conferre volentes, nec aptius quàm per rationes potentiam illam certam ac propoſitam per eorum latera ſecantes,exprimere viſum eſt, ſcilicet diuiſa dimetientis potentia per lineas rationem maioris ad minus ſegmentum habentes,illud minus latus eſſe icoſaëdri, per rationem verò totius ad minus habentes, latus dodecaëdri ſatis ſupérque expreſſum haberi,vt inter incommenſurabilia fieri licet.

Cæterùm qui,vt ſæpius diximus, Euclidis reſtitutionem in priorem ſui ortus (aut pro viribus proximum ſtatum)reducere nitimur, id vnum his decimoquarto & decimoquinto vltimis elementorum libris animaduerſione dignum arbitrati, cùm ad hos ventum eſt,comperimus Theonis cœptam operam ſubiiſſe(vt fertur) Ypſiclem, Campanum autem in omnes ſua dilataſſe expoſita. Ypſiclis attamen parcitas Campani luxum comitans,veriſimilis ab Euclide cœpti, videntur intelligentia caruiſſe. Nimirum vt verior elementorum ordo expoſtulat, poſt eidem ſphæræ inſcripta decimotertio quinque corpora, conſequens erat Euclidem decimoquarto affinitates ſeu eorum reſpectus per latera, baſes, aut angulos depro-

mere,

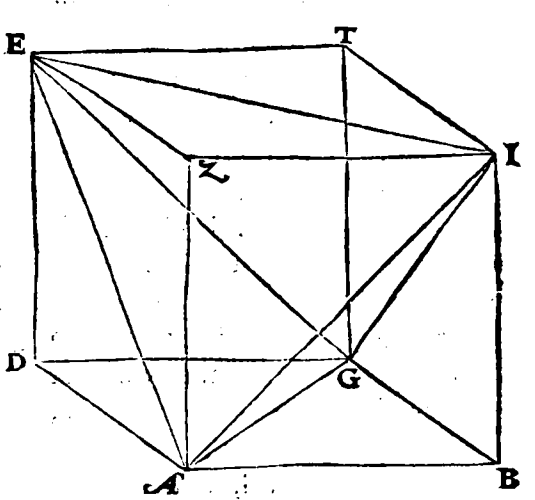
mere, vt testari cœperant 4 & corollario 4 Ypsiclis, Campani autem 8, 9, 10, 14, 17, quibus quatuor corporum conferentias, scilicet icosaëdri ad dodecaëdrum, & cubum, octaëdri verò ad cubum & pyramidem tantùm designantes, per latera circunferentias vel solida, sex reliquarum obliti, quæ optatum denarium conferentiarum complerent numerum, haud secùs quàm decimoquinto optantes 20 inscriptiones, Ypsicles 5, Campanus 12 tantùm ab Euclide se recepisse dixerunt: hic 8, ille verò 15 posteris relinquens demonstrandas. Nos idcirco geometrici cultus auidi, quæ decimoquarto competunt adiicientes, reliquas sex conferentiarum demonstrationes perfecimus: quarum tres tantùm decimoquarto apponendas rati, reliquas totidem nostro decimosexto aptiores distulimus, scilicet dodecaëdri ad cubum & pyramidem cubíque ad pyramidem. Hæc nanque licet eadem capiantur sphæra, vt decimotertio patuit, quia nihilominus eadem sibiipsis inscribuntur, vt proximo decimoquinto dicemus, inuariata eorum quãtitate aut ratione, nempe cubus & pyramis dodecaëdro, pyramisque rursus cubo, duplicem eorũ conferentiam vitantes, soli decimosexto illas cõpetere visum est, mutuas inscriptionũ conferentias exponenti. Nam sicuti decimoquarto corpora eadem sphæra decimotertio concepta cohtulimus, non secus decimoquinto inscripta, inter se conferenda decimosexto veniunt, ne Euclidis tam faustè cœptus elegans elementorum ordo, nostra depereat incuria.

LIBRI DECIMIQVARTI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONVM RESTITVTARVM, LIBER DECIMVSQVINTVS.

PROPOSITIO I. PROBLEMA 1.

IN dato cubo, trilateram æquilateram Pyramidem describere.

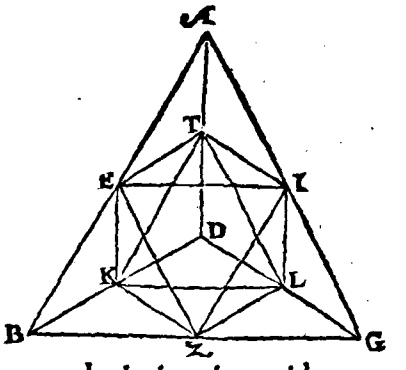


Exponatur cubus ABGDZITE, & ducantur ab vno eius angulo basiũ dimetientes EA EG EI coniunctis AG AI GI. Perspicuum est quatuor triangula AEG AEI AGI & GEI æquilatera esse, cùm ex æqualium quadratorum dimetientibus fiant. Ab vno igitur triangulo AGI à tribus cubi angulis ducto, tria constituuntur triangula AEG AEI, & GEI ad vnum signum E (angulum scilicet cubi) æquilatera. Pyramis itaque trilatera & æquilatera erit AGIE solidum, per decimam diffinitionem vndecimi, cubo ABGDZITE inscripta, per vigesi-

mamſextam diffinitionem eiuſdem. In dato igitur cubo, &c.

PROPOSITIO II. PROBLEMA 2.

In data trilatera æquilatera Pyramide, Octaëdrũ deſcribere.



Eſto pyramis trilatera æquilatera A B G D, cuius latera ſecentur bifariam in E Z I K L T, coniunctis EZ ZI IE KL LT TK EK KZ ZL LI IT TE, rectis duodecim: quæ quidem (per quartam primi) ſunt æquales. Nam ſubtendunt pyramidis baſium planos æquales angulos, æquis lateribus (nempe laterum pyramidis dimidiis) comprehenſos. Triangula igitur æquilatera erunt T K L TLI TIE TEK, &ZKL ZLI ZIE ZEK, ſolidum T K L E Z I concludentia. Quod igitur octaëdrum erit, per vigeſimamſecundam diffinitionem vndecimi, cuius quidem anguli tangunt pyramidis A B G D latera in ſignis E Z I T K L: ipſi igitur pyramidi inſcriptum erit octaëdrum. In data itaque trilatera, &c.

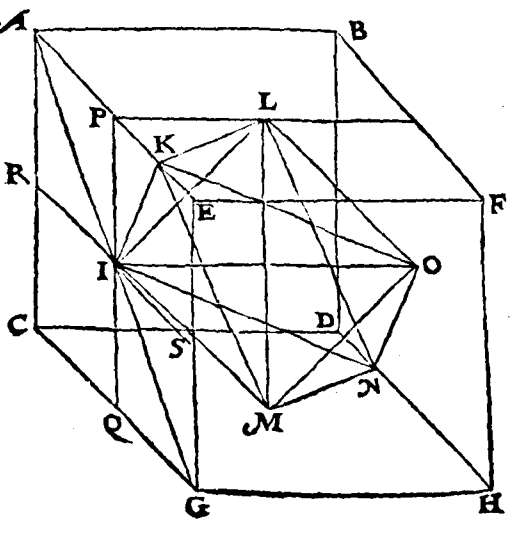
COROLLARIVM.

Hinc ſubeſt Pyramidem ſecari bifariam, tribus quadratis æqualibus Octaëdrum bifariam ſecãtibus, & ſeſe ad rectos diſpeſcentibus.

Nam tres eorum dimetientes, in centro bifariam ſeſe ad rectos ſecant, per tertium corollarium decimæquartæ decimitertij. Quæ quidem quadrata vt E K L I diſcernunt pyramides & priſmata, ſcilicet K L T D pyramidem & K L T E I A priſma, ab E K Z B pyramide, & E K Z I L G priſmate, quæ ſibi ſunt æqualia, per tertiam duodecimi: haud ſecus efficiunt reliqua K Z I T AC Z L T E quadrata, octaëdrum biſariam ſecantia, ex corollario ſecundo decimæquartæ decimitertij.

PROPOSITIO III. PROBLEMA 3.

In dato cubo, Octaëdrum deſcribere.



Sumatur cubus A B C D E F G H, cuius ſecentur ſingula latera bifariam, ductis rectis ſectiones coniungentibus, vt P Q R S, quæ æquales erunt lateri cubi, per 33 primi, ac ſeſe bifariam ſecabunt in medio dimetiente A G in ſigno I, per corollarium 34 primi. Quod igitur erit centrum baſis cubi. Sint aliarum baſium centra eadem lege comperta K L O N M, cõiunctis L I I M M O O L K I K L K M K O & N I N L N M N O. Quoniam rectus eſt angulus I P L, cùm parallelæ ſint I P P L ipſis R A A B, per decimam vndecimi, quem ſubtendit I L recta, dimidia ſcilicet cubi latera angulum I P L rectum continentia,

ſimiliter

ſimiliter IM angulum ſubtendens IQM eidem IPL æquum & æqualibus rectis comprehenſum, non aliter & reliquæ MO OL KI KL KM KO NI NL NM NO eidem angulo IPL æquales, & æquis lateribus comprehenſos ſubtendent, quæ ideo (per quartam primi) æquales rectæ erunt. Triangula itaque KLI KLO KMI KMO & NLI NLO NMI NMO æquilatera & æqualia erunt, ſolidum IKL ONM concludentia: quod igitur octaëdrum erit, per vigeſimam ſecundam diffinitionem vndecimi. Cùm autem eius anguli ſimul baſes in ſignis IKLONM ipſum continentis cubi tangãt, ſequetur octaëdrum ipſi cubo inſcriptum eſſe, per vigeſimam ſextam diffinitionem vndecimi. In dato itaque cubo octaëdrum deſcripſimus.

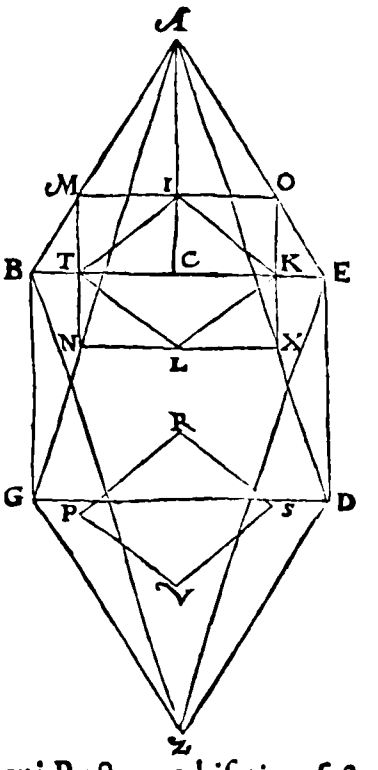
COROLLARIVM.

Rectæ baſium oppoſitarum cubi centra coniungentes, bifariam & ad rectos in centro cubi (ſiue Sphæræ eum continentis) ſeſe ſecant.

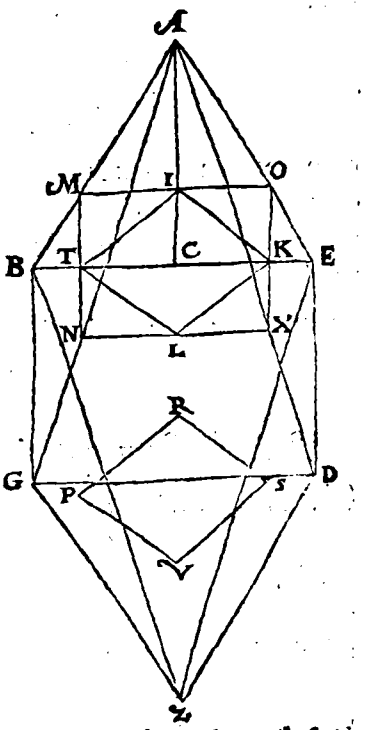
Cùm enim angulos octaëdri cubo inſcripti rectæ LM IO centra coniungentes nectant, ſequetur (ex corollario tertio decimæquartæ decimitertij) ipſas in ſigno ſeſe bifariam ſecare, ſed & dimetientes cubi bifariam ſecant, per 39 vndecimi: illud igitur ſignum centrum erit ſphæræ cubum continentis. Nam centro ſigno, interuallo verò aliqua ex ſemidimetientibus, ſphæra ducetur per cubi angulos, interuallo autem dimidia LM ſphæra haud ſecus per octaëdri angulos ducetur.

PROPOSITIO IIII. PROBLEMA 4.

In dato octaëdro, cubum deſcribere.



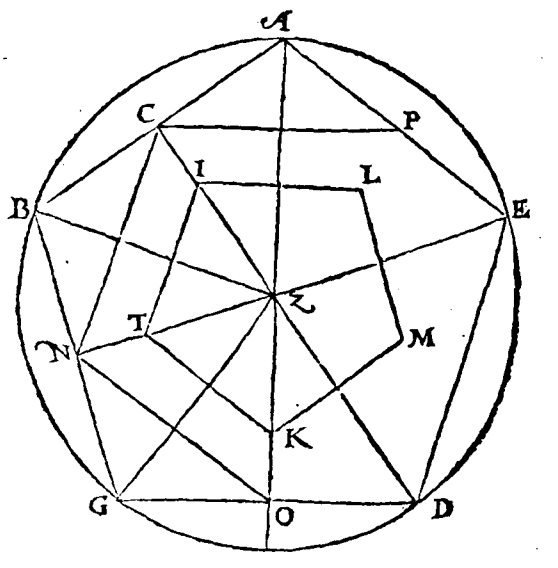
Sit octaëdrum ABGDEZ. Sintq; binæ eius pyramides ABGDE & ZBGDE. Ipſius verò pyramidis ABGDE ſumantur centra triangulorum, hoc eſt, circulorum triangula continẽtium, quæ ſint TIKL. Per ea centra parallelæ ducantur lateribus quadrati BGDE, rectæ MTN NLX XKO & OIM, quæ cùm ſecent proportionaliter rectas æquales AB AG AD AE, per ſecundam ſexti, ipſæ concurrent in ſignis MNXO. Æquales igitur erunt (per quartam primi) rectæ MN NX XO OM, angulos qui ad A æquales & æquis lateribus contentos ſubtendentes. Et inſuper cùm ſint parallelæ ipſis BG GD DE EB quadratum efficientibus, & ipſę quadratũ efficient MNXO, per decimam vndecimi, & ipſi BG DE parallelum, per 15 eiuſdem. Nam omnes ſunt tangentes ſeſe in ſegmentis. A centris autem TIKL ducantur rectæ TIIK KL LT. Coniungatur verò AIC recta. Cùm trianguli æquilateri ABE centrum ſit I, recta AI bifariam ſecat BE rectam, per coroll. duodecimæ decimitertij. Quia verò parallela MO ipſi BE aufert triangulum AIO ſimile toti ACE, per coroll. ſecundæ ſexti, Recta MO bifariam ſecta erit in I, per quartam ſexti, ſimiliter bifariam ſectas eſſe MN NX XO oſtendemus, in TLK. Quare & ſimiliter rurſus baſes TI IK KL LT, æquos angulos rectos, & æquis lateribus comprehenſos, qui ad MOXN ſubtendentes, æquales erunt. Cæterùm quia iſoſcelis TIM trianguli, qui ad baſim MTI MIT ſunt æquales anguli, per quintam primi, rectus autem fuit qui ad M, dimidium recti igitur efficient ſinguli



MIT vel MTI, per corollar. 32 tertij. Haud ſecus æquales erunt OIK OKI. Et igitur reliquus TIK rectus erit, per 13 primi. Rectæ enim TI & KI ſuper ipſam MO conſiſtunt, eodem argumẽto recti oſtendentur IKL KLT LTI reliqui anguli, & in eodem ipſius MNXO plano conſtituti, per ſeptimam vndecimi. Planorum igitur triangulorum angulum ſolidum qui ad A conſtituentium centra coniungentes rectæ, quadratum ITKL efficiunt. Similiter oſtenditur reliquorum quinque octaëdri ſolidorum angulorum qui ad BGZD & E plana triangula, in ſuarum baſium centris quadrata ſuſcipere, & proinde omnes rectarum angulos rectos eſſe, quæ quidem quadrata numero ſex erunt, cùm ſint ſex ſolidi octaëdri anguli, & æqualia: nam eorum latera æquales inclinationum angulos æquis lateribus cõprehenſos, nempe eis quæ à centro in latus triangulorum æqualium comprehendunt, per coroll. ſecundum decimæoctauæ decimitertij. Erit ITKL RPVS itaque cubus, per vigeſimamprimam diffinitionem vndecimi, angulos in octo baſium octaëdri centris habens, ideóque in eo deſcriptus. In dato itaque octaëdro cubum deſcripſimus, &c.

PROPOSITIO V. PROBLEMA 5.

In dato icoſaëdro, dodecaëdrum inſcribere.



Proponatur icoſaëdrum, cuius aliquis ſolidorum eius angulorum ſit z. Quoniam (per ea quæ 16 decimitertij oſtenſa ſunt) triangulorum angulum icoſaëdri efficiẽtium baſes, pentagonum circulo inſcriptum efficiũt, ſit illud ABGDE, ex quinque triangulorum baſibus, quorum reliqui plani anguli angulum z ſolidum componunt deſcriptum. Suſcipiantur autem centra circulorum triangula quinque prælibata continentium, quæ ſint ITKML, coniunctis IT TK KM ML LI A ſigno autem z in planum pentagoni ABGDE demiſſa perpendicularis, in centrum circuli ipſum ABGDE capientis cadit, per demonſtrata eadem decimaſexta decimitertij. Ab ipſo verò centro perpendiculares in latera pentagoni ABGDE demiſſæ in CN & O, bifariam ſecant rectas AB BG GD, per tertiam tertij. Iungantur rectæ CN NO, quæ cùm ſub tendant pentagoni angulos CBN NGO æquis lateribus contentos, æquales erunt, per quartam primi. Itidem à ſigno z perpendiculares in eaſdem AB, BG, GD baſes fiant, ipſas ſimiliter bifariam ſecabunt, per tertiam tertij. Nam perpendiculares per centrum tranſeunt, per coroll. duodecimæ decimitertij. Ipſæ itaque in ſigna CNO cadent. Cùm autem æquales ſint ZI IC rectis ZT TN & ZK KO, ex ſimilitudine æqualium triangulorum parallelæ erunt IT & CN, per ſecundam ſexti, nec non

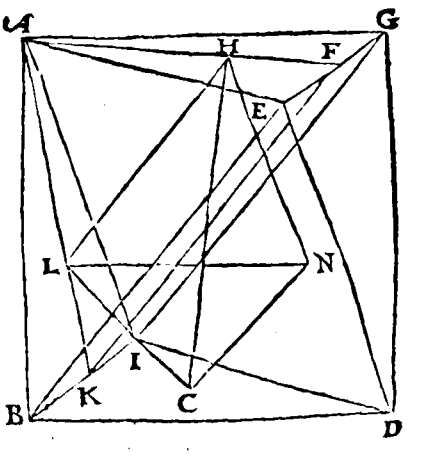
non T K N O, anguli itaque I T K C N O æquales erunt, per decimam vndecimi. Quia rursus isosceliа sunt triangula C B N N G O. Anguli B C N B N C æquales erunt, ac eisdem G N O G O N, æqualium & similium triangulorum anguli, per quintam primi. Sed tres B N C C N O O N G anguli, binis rectis sunt æquales, cùm super rectam B G consistant, per 13 primi. Trianguli verò tres B N C B C N (vel G N O) & N B C binis item rectis sunt æquales, per 32 primi. Ipsis B N C & G N O ablatis, reliquus C N O reliquo C B N æquus erit, & proinde eidem C B N æquus erit reliquus I T K, qui igitur pentagoni angulus erit: similiter ostendentur reliqui T I L I L M L M K M K T reliquis B A E A E D E D G D G B æquales esse. Quinquangulum igitur erit I T K M L æquilaterum & æquiangulum, per quartam primi. Subtendunt enim bases pentagoni I T K M L æquales, angulos æquos qui ad z æquis lateribus comprehensos. Præterea in eodem plano esse quinquangulum I T K M L patet. Cùm anguli O N C N C P in eodem sint plano A B G D E. Eidem verò plano parallela sint angulorum K T I T I L plana, per 15 vndecimi. Concurrūt autem K T I & T I L triangula. Ipsa igitur in eodem sunt plano, per coroll. 16 vndecimi. Similiter ostendemus I L M L M K M K T in eodem reliquorum K T I & T I L plano esse. Angulum igitur icosaëdri qui ad z solidum subtendit pentagonum æquilaterum & æquiangulum planum, & in centris triangulorum angulum z constituentium habens angulos planos. Similiter igitur ostendemus reliquos vndecim icosaëdri solidos angulos, æquos & similes ipsi z (per decimamsextam decimitertij) subtensos esse similibus & æquis pentagonis, & similiter constitutis ipsi I T K M L. Quorum cùm communia latera sint rectæ centra basium icosaëdri coniungentes, sequetur duodecim illa pentagona solidum concludere, quod ideo dodecaëdrum erit, per 23 diffinit. vndecimi, icosaëdro, cuius quinque latera pentagono A B G D E concipiuntur, descriptum. In dato itaque icosaëdro dodecaëdrum inscripsimus.

MONITVM.

Hactenus quæ ab Euclide tradidit Ypsicles diximus, quinque scilicet problemata eousque succincta vt obscuriora euaserint, quorum ideo demonstrationes variare cogimur, maximè huius quintæ præcipuam partem à Campano relictam, ab Ypsicle verò non plenè ostensam, scilicet constructum pentagonum in eodem degere plano, præcipuum inquam solidis construendis probandum, eorum facies planas esse. Præterea quæ demonstrat Ypsicles ea sæpius arte tradit, qua effectum proponens causam recludit, ac si ab quodam auditum receperit effectum qui causam ignoraret. Non tamen ideo Ypsiclem magni nominis virum id ignorasse dicemus, sed forsan quadam incuria aut temporum iniuria veluti si ignorasset ad nos peruenisse. Quæ vt clarius resonemus in prolixitatis quandam nos perduxerunt speciem.

PROPOSITIO VI. PROBLEMA 6.

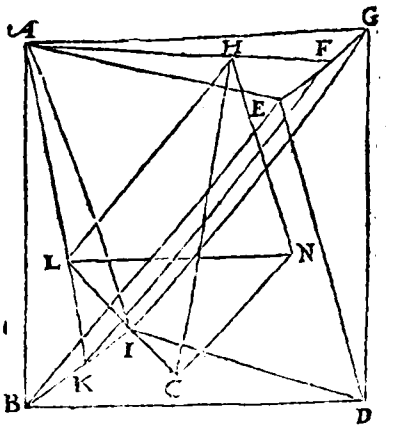
In dato Octaëdro, Pyramidem trilateram æquilateram figurare.



Esto propositum octaëdrum A B G D E I, cui inscribenda sit pyramis: sumantur octaëdri quatuor bases, hoc est tres aliquam propositam E G D ambientes, hæ quidem A E G B E D & I G D, quarta insuper propositæ opposita A I B: earum autem centra H C N L, rectis coniuncta sint H C, H N, H L, L N, L C, & C N: super triangulo H C N construatur pyramis H C N L, quoniam bases octaëdri A G E A B I cōcidunt in rectas E G B I, quæ opponuntur in quadrato G E B I octaëdri, mittantur à signo A

per

per baſium centra HL perpẽdiculares AHF ALK eas ſecantes in F & K biſariam, per corollarium duodecimæ decimitertij. Recta igitur FK ſectiones iungens parallela erit & æqualis octaëdri lateribus EBGI, per trigeſimamtertiã primi, rectáque HL ſecãs latera AF AK æqualia proportione (namque AH & AL ex centris circulorum æqualium prodeunt) parallela erit rectæ FK, per ſecundam ſexti, necnon octaëdri EBGI lateribus, per nonam vndecimi. Erit ideo AF ad AH vt FK ad HL, per quartam ſexti, ſunt enim ſimilia AFK & AHL triangula, per corollarium ſecundæ ſexti, ſed AF ſeſquialtera eſt rectæ AH, nam latus EG efficit HF dimidiam rectæ AH, per corollarium duodecimæ decimitertij, rectæ igitur HL ſeſquialterum erit FK vel GI latus octaëdri. Hac arte reliquarum HN NC CL LN CH rectarum pyramidem HNCL componentium, latera octaëdri ſeſquialtera eſſe docebimus, & proinde rectas æquales eſſe, ac ideo ex ipſis deſcripta triangula HCN HNL NCL & CHL pyramidem HNCL componentia, æqualia & æquilatera eſſe, quæ cùm angulos HCNL in centris baſium octaëdri terminet, eidem octaëdro inſcripta erit, per vigeſimamſextam diffinitionem vndecimi. In dato itaque octaëdro pyramidem trilateram, &c.



COROLLARIVM.

Pyramidis octaëdro inſcriptæ baſes, baſibus octaëdri ſunt parallelæ.

Cùm enim latera baſis pyramidis ſeſe tangentia, lateribus octaëdri ſeſe tangentibus ſint parallela, vt fuit HL lateri GI, parallela ſunt per ipſas plana, per decimamquintam vndecimi.

COROLLARIVM II.

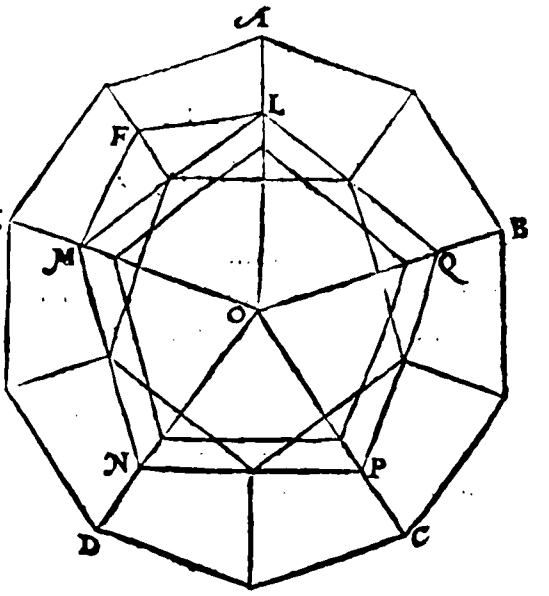
Recta coniungens centra oppoſitarum octaëdri baſium, ſeſquialtera eſt perpendicularis ab angulo inſcriptæ pyramidis in baſim.

Cùm enim pyramis & eam continens cubus ad eadem ſigna terminent angulos, ex prima huius, vtraque eodem claudentur octaëdro per quartam huius. At cubi dimetiens centra baſium oppoſitarum octaëdri iungit, & proinde eſt dimetiens ſphæræ cubum & cubo inſcriptam pyramidem continentis, per decimamtertiam & decimamquartam decimitertij, quæ dimetiens ſeſquialtera fuit eius quæ ab angulo in baſim perpendicularis in pyramide miſſa eſt: nam quæ à centro in baſim ſexta fuit dimetientis, per corollarium tertium decimætertiæ decimitertij. Qualium igitur dimetiens fuit ſex, earum perpendicularis erit quatuor.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA 7.

In dato dodecaëdro, icoſaëdrum conſtituere.

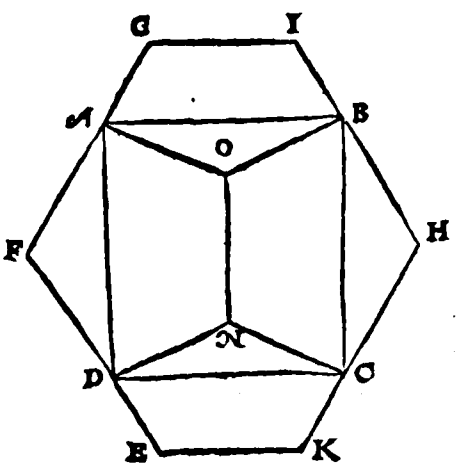
Eſto dodecaëdrum ABCDE, circulorum verò ſex eius baſes continentium, ſint centra LMNPQO quæ coniungantur rectis OL OM ON OP OQ, & reliquis LMNPQ, cùm pentagona æqualia & æquilatera circulis contineantur æqualibus, à



bus, à centro eorum in latera demissæ perpendiculares æquales erunt, per decimamquartam tertij, & bifariam secabunt dodecaëdri latera, per tertiam eiusdem. Concurrēt itaque præfatæ perpendiculares in signo bifariæ sectionis, vt LF MF, sed & angulos æquos suscipiunt, nempe inclinationem basium dodecaëdri, per secundum corollarium decimæoctauæ decimitertij, subtensæ igitur LM MN NP PQ QL & reliquæ bina basium centra coniungentes æquales erunt, per quartam primi. Triangula igitur OLM OMN ONP OPQ OQL, & reliqua similiter à centris pentagonorum orta, erunt æquilatera & æqualia: quia verò dodecaëdri duodecim pentagonorum sexaginta sunt anguli plani, quorum terni quique singulos dodecaëdri solidos efficiunt angulos, sumemus hinc viginti dodecaëdri solidos esse angulos: sed eorum singulos subtendunt singula icosaëdri triangula, quæ scilicet pentagonorum (angulum solidum componentium) centra coniungunt, vt patuit: viginti igitur triangula æqualia & æquilatera, viginti solidis dodecaëdri angulis subtensa, communia inter se latera à centris pentagonorum ducentia, icosaëdrum component, per vigesimamquartam diffinitionem vndecimi, proposito dodecaëdro inscriptum, per vigesimamsextam diffinitionē eiusdem, cùm anguli simul bases dodecaëdri simul tangant. In dato itaque dodecaëdro icosaëdrum constituimus.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA 8.

In dato dodecaëdro, cubum includere.



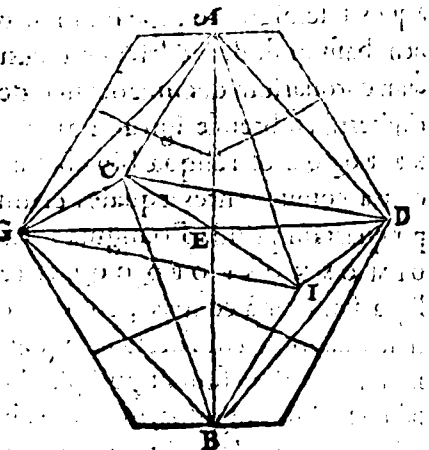
Describatur (ex decimaseptima decimitertij) dodecaëdrum, & ex eadem sumantur duodecim cubi latera, quæ singula subtendant duodecim dodecaëdri basium singulos angulos: nam cubi latus angulum huius pentagoni subtendit, per corollarium secundum decimæseptimæ decimitertij. Si igitur dato (ex eadem decimaseptima) dodecaëdro duodecim duxerimus subtēsas, octo dodecaëdri angulis terminatas, similíque situ cohærentes, vt ibidem patuit, manifestum erit huic dato dodecaëdro ab eisdem eius angulis ductas rectas præfatum cubum æquilaterum ac rectangulum designare, qui ideo in dodecaëdro inclusus erit, cùm cubi latera in basibus, & anguli in dodecaëdri sedeant angulis, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi: sumptis nanque quatuor dodecaëdri pentagonis AGIBO BHCNO CKEDN & DFAON, iungantur rectæ AB BC CD DA, quæ ideo quadrilaterum æquilaterum efficient, cùm singulæ rectæ æquos æqualium pentagonorum subtendant angulos, rectos verò vt ostendimus dodecaëdrum præfata decimaseptima constituentes. Sex itaque bases quadratæ cubum (ex vigesimaprima diffinitione vndecimi) constituunt, cuius octo anguli in octo dodecaëdri angulis cohærentes

cubum

cubum dodecaëdro inſcriptum (ex vigeſimaſexta diffinitione vndecimi) perhibent. In dato itaque dodecaëdro cubum incluſimus.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA 9.

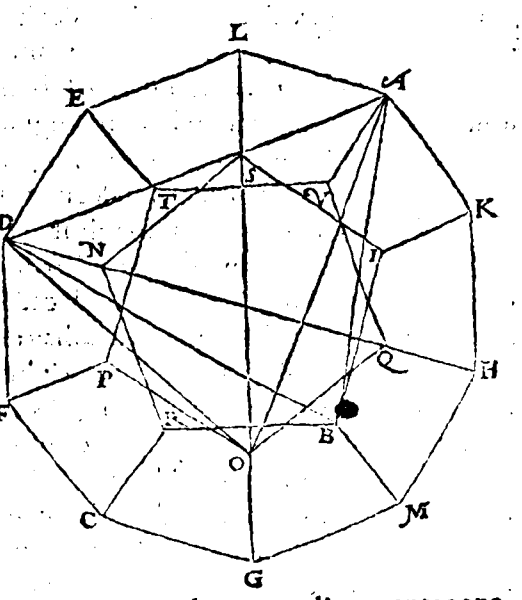
In dato Dodecaëdro, Octaëdrum concludere.



Eſto propoſitum dodecaëdrum ABGDE, cuius ſumantur (ex tertio corollario decimæ ſeptimæ decimitertij) ſex latera inter ſe oppoſita, quorum bifarias ſectiones iungunt tres rectæ ſe ad centrum ſphæræ dodecaëdrum ambientis bifariam & ad rectos ſecantes, quæ ſint AB GD CI, centrum vero E. Cùm ideo (per præfatũ corollarium) tres illæ rectæ ſint æquales, ſequetur (ex quarta primi) ſubtendentes illarum dimidias angulos rectos continentes, quæ ſunt AG GB BD DA CA CG CB CD & IA IG IB ID æquales eſſe. Ac proinde octo triangula CAG CGB CBD CDA IAG IGB IBD & IDA æqualia & æquilatera eſſe, & ideo octaëdrum eſſe AGBDCI, per vigeſimamſecundam diffinitionem vndecimi. Quod ea de cauſa dodecaëdro inſcriptum erit, quod eius anguli ſimul latera dodecaëdri ſimul tangant, per vigeſimamſextam diffinitionem vndecimi. In dato itaque dodecaëdro octaëdrum concluſimus.

PROPOSITIO X. PROBL. 10.

In dato Dodecaëdro, Pyramidem trilateram æquilateram inſcribere.



Eſto dodecaëdrum ABCD, cuius ſumantur tres baſes ad ſignum s concurrentes, ALSIK DNSLE & SIBRN, ex quibus ſumantur tres anguli qui ad ABD, coniunctis AB BD DA, dimetiens autem ſit SO, coniunctis AO BO DO rectis. Quoniam dodecaëdri anguli in ſphæræ circunſcribentis ſuperficie conſiſtunt, per decimamſeptimam decimitertij, ſuper dimetiente SO per ſignum A ſemicirculus ductus, efficit angulum SAO rectum, per trigeſimamprimam tertij, ſimiliter per ſigna DB ductus ſemicirculus efficit angulos SBO SDO rectos, ex eadem, dimetiens itaque SO vtraſque SA AO vel SB BO aut SD DO poteſt, per quadrageſimam ſeptimam primi: æquales autem ſunt SA SD SB, angulum æqualium pentagonorum ſubtendentes. Reliquæ igitur AO BO DO erunt æquales, haud ſecus patebit dimetientem HD binas poſſe HA, ſubtendentem & AD rectam, necnon binas HB ſubtendentem & BD rectam, dimetientem demum AC binas ſubtendentem CB & reliquam

reliquam B A, quare ablatis ſubtendentibus reliquæ A B B D D A A O B O D O æquales erũt rectæ. Ac ideo ex ipſis triangula A B D A O B A O D & B O D æqualia & æquilatera, pyramidem A B D O component, à baſi A B D ad ſignum O conſtitutam, cũius ſinguli qui ad A B D O anguli, ſingulos dodecaëdri ad eadem ſigna conſtitutos tangunt angulos, quare dodecaëdro inſcripta dicetur pyramis, ex vigeſimaſexta diffinitione vndecimi. In dato igitur dodecaëdro pyramidem trilateram æquilateram inſcripſimus.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA II.

In dato icoſaëdro, cubum deſignare.

Patuit ſeptima huius dodecaëdri angulos, baſium icoſaëdri centra poſſidere: atqui octaua huius oſtenſum eſt cubi angulos in dodecaëdri angulis quieſcere. Iidem itaque cubi anguli in centris baſium icoſaëdri neceſſariò collocantur. Cubus itaque icoſaëdro hac de cauſa inſcriptus erit, ex 26 diffinitione vndecimi. In dato igitur icoſaedro cubum deſignauimus.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA 12.

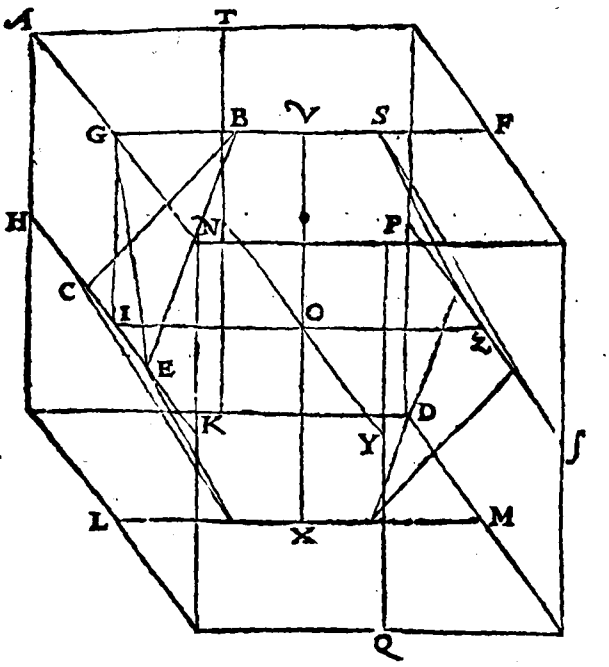
In dato icoſaëdro, pyramidem trilateram æquilateram collocare.

Simili via qua proximè diximus. Nam proxima patuit cubum ſuiipſius angulos in centris baſium icoſaëdri collocare, in cubi verò quatuor angulis, quatuor pyramidis angulos ſedere diximus prima huius. Perſpicuum itaque relinquitur, pyramidem à rectis hæc quatuor baſium icoſaëdri centra coniungẽtibus deſcriptam, eidem icoſaëdro inſcriptam eſſe, ex vigeſimaſexta diffinitione vndecimi. In dato igitur icoſaëdro pyramidem trilateram æquilateram collocauimus.

Hactenus quæ partim à maioribus ex decimoquinto Elementorum recepimus. Subſequuntur autem quæ relicta erant perficienda, à Fluſſate peracta.

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA 13.

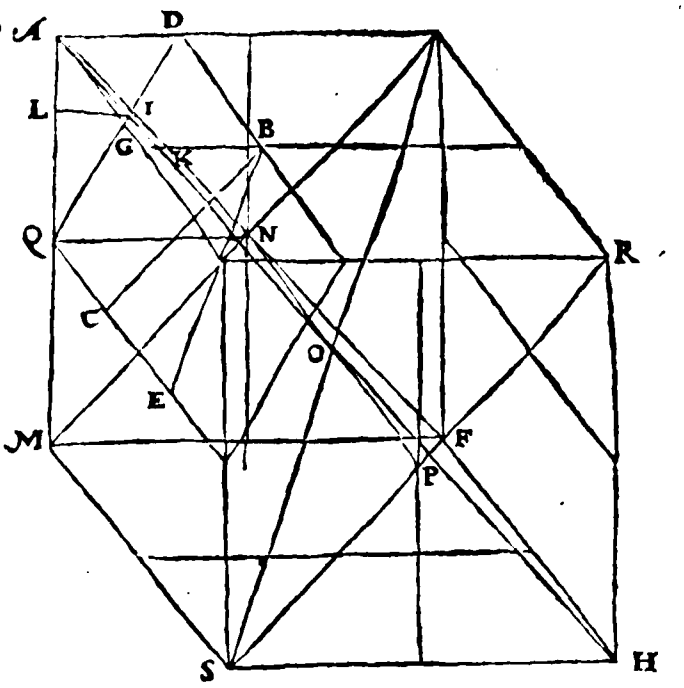
Proposito cubo, dodecaëdrum inscribere.



Proponatur cubus A D ſ L cuius ſecentur ſingula latera bifariam in ſignis T H K P G L M F P K Q S, coniunctis T K G F P Q H K P S L M rectis, quæ rurſus bifariam ſecentur in ſignis N V Y I Z X, coniunctis N Y V X & I Z rectis: quoniam tres N Y V X & I Z rectæ ſeſe cum dimetiente bifariam ſecant in centro, per trigeſimamnonam vndecimi, ſit illud O. Ne diutius autem demonſtranda protrahamus, ſciantur omnes hæ rectæ lateribus cubi æquales & parallelæ, ſeſéque ad rectos connexas eſſe, per vigeſimamnonam primi. Secentur dimidiæ earũ, ſcilicet F V G V H I K I, & ſimiles extrema & media ratione, quarum maiora ſegmenta ſint F S G B H C K E, per 30 ſexti, iunctis G I G E B C B E rectis. Quoniam G I eſt æqualis toti G V dimidio cubi lateri. Recta verò I E rectæ B V minori ſegmento æqualis eſt, quadrata ex G I I E tripla ſunt quadrati quod ex G B, per quartam decimitertij, eis verò quæ ex G I I E æquum eſt quod ex G E per 47 primi, rectus quippe eſt G I E angulus. Quod igitur ex G E triplum eſt eius quod ex G B, quia verò recta eſt F G ad planum A G K L, per quartam vndecimi, cùm ſit recta ad binas A G G I, angulus B G E rectus erit: nam G E eſt in plano A G K L. Recta itaque B E binas B G G E potens per 47 primi, quadruplũ rectæ B G poterit, eiuſdem enim G B triplum potuit G E, dupla igitur longitudine erit B E rectæ G B, per vigeſimam ſexti. Dupla autem fuit (ex conſtructione) C E rectæ I E: erunt igitur ſicut G B ad I E dimidiæ, ſic B E ad C E duplæ, per decimamquintam quinti: recta igitur C E erit maius ſegmentum rectæ B E extrema & media ratione ſectæ. Cùm autem idem oſtendi poſſit in recta B C, binæ B E B C ſunt æquales, iſoſceles triangulum B E C conſtituentes. Oſtẽdamus pentagoni dodecaëdri tres angulos eſſe B C E, Reliquos verò inter B C & B E conſtitui.

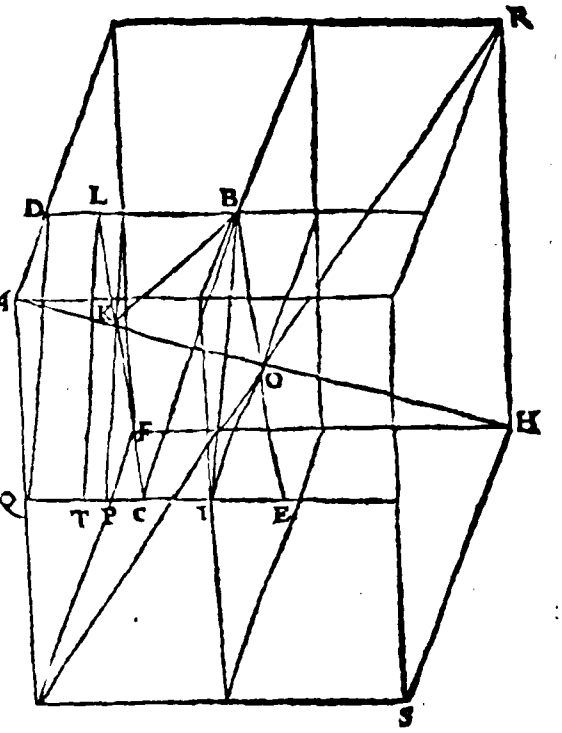
Quoniam circulus continens triangulum B C E circunſcribit pentagonum, cuius latus eſt C E, per 10 & 11 quarti, extendatur planum trianguli B C E per parallelas D B Q E, ſecans dimetientem baſis cubi A F in I, dimetientem verò cubi A H in K, fiat autem lateri A D parallela per I recta I L. Quoniam triangulum A L I tollitur à triangulo A M F parallela L I ſimile toti, per coroll. ſecundæ ſexti, æquales erunt A L L I rectæ, ſicut autem Q A ad A D ſic Q L ad L I, per ſecundam ſexti, vel ad L A æqualem illi. Sed dimidij lateris ſcilicet Q A maius ſegmentum fuit A D, hoc eſt, G B ipſi A D æqualis, per 33 primi. Rectæ igitur Q L maius ſegmentum erit L A. Sicut autem tota Q L ad maius, ſic erit maius idem Q L ad minus L A, per 5 decimitertij. Recta igitur Q A ſecta eſt in L. In triangulo verò A Q N, recta N A quæ ex centro baſis A F ſimiliter ipſi A Q ſecatur in I, per parallelam L I, ex eadem ſecunda ſexti: nam Q N M F ſunt parallelæ, per conſtructionem. Recta igitur N A extrema & media ratione ſecta eſt in I, per planum D B E Q. Cæterùm quoniam parallela eſt

lela eſt P O N centra baſium oppoſitarum cubi iungens, rectæ Q E. Per eam P O N ductum planum parallelum plano D B E Q, bina plana ſecabunt rectas A O A N in K & I, in eaſdem rationes, per 17 vndecimi, ſecta eſt autem A N in I extrema & media. Secta erit igitur ſemidimetiēs cubi in K extrema & media ratione plano trianguli B C E. Cùm autem reliqua in cubo deſcripta ſimili ſitu triangula, iiſdem legibus oſtendantur eſſe in plano ſemidimetientē cubi eadē ratione ſecante. Conuenient itaque tria

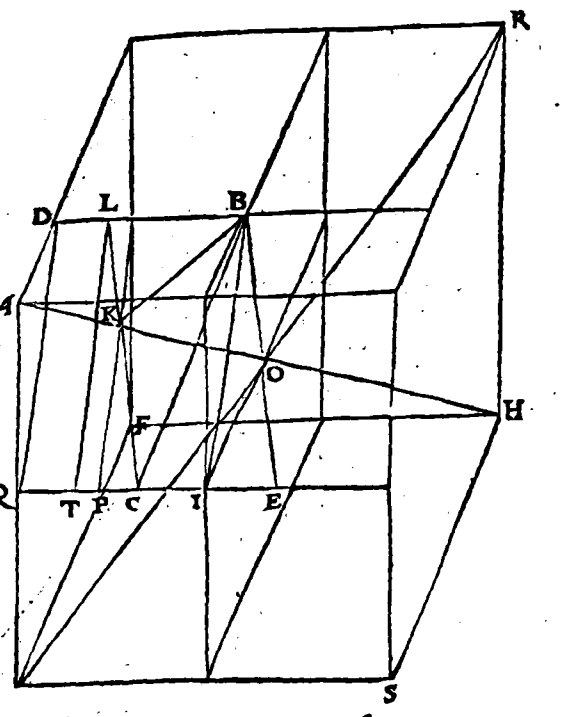


ſub quolibet cubi angulo dodecaëdri plana, ad idem ſignum ſemidimetientis extrema & media ratione ſecti. Supereſt demonſtrandum rectas id ſignum dimetientis cum trianguli B E C angulis coniungentes æquales eſſe, vt pentagona ſint æquilatera, æquiangula, & plana.

Sint binæ cubi baſes triangulum B C E ſuſcipientes, dimetiens cubi verò ſit A H, latus autem quod ad dimetientem eſto C K vel B K, centrum cubi ſuit O. Extendatur recta C K vſque ad rectam D B in L. Quoniam planum quod per rectã Q C E & centrum O (ſecans cubum biſariam) parallelũ eſt baſi cubi A D B R, per conſtructionem, Supponatur per ſignum K planum eiſdem parallelum, quod ſecabit rectas O A C L in K proportionales, per 17 vndecimi: Nam illæ extrema plana quæ per Q E O & A B R contingunt. Atqui extrema & media ſecta fuit O A in K, Extrema itaque & media ratione ſecta erit C L in K. Rurſus quoniam iſoſceles eſt triangulum B C E, Rectáque B I biſariam baſim



C E ſecuit, recti erunt B I C & B I E anguli, fiat planum per I O B (ſecans cubum biſariam) parallelum baſi A F. Eiſdem per ſignum K aliud parallelum ſupponamus K P. Illud rectas O A ſemidimetientem, & I Q dimidium latus, ſimiliter ſecat, per 17 vndecimi, in K & P. Secta eſt igitur I Q in P extrema & media ratione. Recta ideo Q P rectæ C I vel I E eſt æqualis, nempe minora ſegmenta: quia verò eſt I P ideo maius, ad I C minus, ſicut tota ad maius, A tota I P auferatur maius I C, Supererit minus C P per quintam decimitertij: ſecta eſt ideo I P in C extrema & media ratione. Rurſus aliud excitetur planum per ſignum L eiſdem parallelum, ſitq; L T. Rectæ C L & C T ſimiliter ſecantur (ex eadem 17 vndecimi) in K & P: ſecta fuit autem C L in K,



ſecta erit igitur C T in P, fuit autem I C ad C P vt maius ad minus ſegmentum, erit ideo C P maius ad P T minus, & igitur earum ratio vt tota I C ad C P maius, & C P maius ad P T minus. Tota itaque C P T maius & minus efficiens, toti I C vel I E æqualis erit. Quia verò bina plana parallela (ſcilicet quod per I O B & quod per L T) plano trianguli B C E, quod per L T I B ſecantur, communes ipſorum ſectiones L T B I parallelæ erunt, ex decimaſexta vndecimi. Rectus autem fuit B I E vel B I C angulus rectus, itaque erit L T C (per vigeſimamnonam primi) angulus. Sed æquis lateribus contenti, ſcilicet T C ipſi C I, vt patuit, L T verò rectæ B I, per trigeſimamtertiam primi. Baſes igitur C L & C B æquales erunt, ex quarta primi. Sed rectæ C B maius ſegmentum fuit C E. Rectæ igitur C L eadem C E maius erit ſegmẽtum, ſed & C K eiuſdem C L maius fuit. Rectæ itaque C E, latus dodecaëdri recta C K quæ ad dimetientem æqualis erit. Eadem arte reliqua latera quæ ad dimetientem rectis ipſi C E æqualibus æqualia oſtendentur. Quæ ideo pentágonum circulo triangulum B C E continenti inſcriptum conſtituunt, per vndecimam quarti, æquiangulum & æquilaterum. Quia verò dodecaëdrum conſtituunt bina pentagona cuilibet baſium cubi innixa, ſex autem baſes duodecim dodecaëdri angulos ſuſcipiunt, octo verò ſemidimetientes extrema & media ratione ſecti reliquos. Sunt itaque duodecim baſes pentagonæ 20 ſolidis angulis terminatæ dodecaëdrum cubo inſcribentes, per vigeſimamtertiam diffinitionem vndecimi. Propoſito igitur cubo dodecaëdrum inſcripſimus.

COROLLARIVM I.

Dimetiens Sphæræ dodecaëdrum ambientis bina poteſt latera, ſcilicet dodecaëdri & dodecaëdrum ambientis cubi.

Nam in priori figura ducta ab O centro recta O B ad angulum dodecaëdri, binas poteſt O B dimidium cubi latus, & V B dimidium dodecaëdri, per 47 primi. Dupla itaque rectæ O B dimetiens quidem ſphæræ dodecaëdrum ambientis, duplas reliquarum O V V B poterit, per decimamquintam quinti, quæ ſunt cubi & dodecaëdri latera propoſita.

COROLLARIVM II.

Cubi latus extrema & media ratione ſectum efficit minus ſegmentum latus dodecaëdri ſibi inſcripti. Maius verò ſegmentum latus cubi eidem dodecaedro inſcripti.

Nam patuit latus dodecaëdri eſſe maius ſegmentum lateris trianguli B E, latus verò B E (binis G B S F æquum) maius fuiſſe lateris G F cubi ſegmentum, quæ quidem

dem B E (ſubtendens angulum pentagoni) ſuit (octaua huius) latus cubi dodecaëdro inſcripti.

COROLLARIVM III.

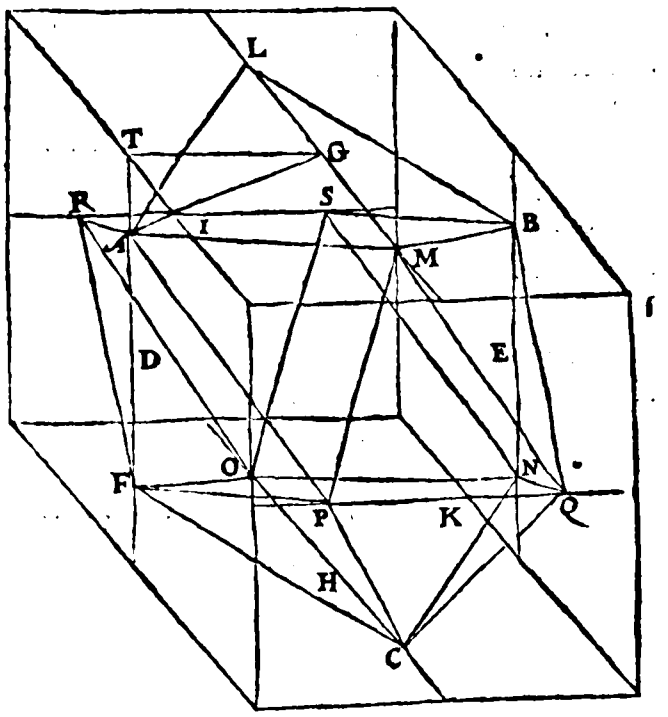
Cubi latus, dodecaëdri inſcripti & circunſcripti lateribus eſt æquale.

Patuit enim hoc theoremate latus cubi efficere minus ſegmentum dodecaëdri inſcripti latus, nempe vt prima figura G F ad S B, idem verò cubi latus patuit (decimaſeptima decimitertij) angulum pentagoni dodecaëdri circunſcripti ſubtendere, ac proinde efficere dodecaëdri ſiue pentagoni latus maius ſegmentum, per primum corollarium eiuſdem: binis igitur eſt æquale.

PROPOSITIO XIIII. PROBLEMA 14.

In dato cubo, Icoſaëdrum deſcribere.

Eſto propoſitus cubus A B C, cuius baſium centra ſint D E G H I K, per quæ in baſibus ducantur reliquis lateribus parallelæ non ſe tangentes. Quæ verò à centris VT D Y, extrema & media ratione ſecentur in A F L M N B P Q R S C O, per trigeſimam ſexti, maiora verò ſegmenta ſint circa centra, coniunctis A L A G A M T G, quoniam productæ ſectæ parallelæ ſunt cubi lateribus, angulos adinuicem rectos efficient, per vigeſimamnonam primi: quia verò ſunt æquales, earum ſectiones æquales erunt, cùm ſint ſimiles, per ſecundam decimiquarti. Æqualis itaque erit T G ipſi D T, dimidia nempe cubi latera: Quod igitur ex tota T G & minori ſegmento T A, triplum eſt eius quod ex maiori A D, per quartam decimitertij: ſed rectas A T T G poteſt A G, cùm rectus ſit angulus A T G: Recta igitur A G triplum poteſt quadrati A D: quia verò recta eſt M G L ad planum A T G, parallelum cubi baſibus, per corollarium decimæquartæ vndecimi, recta is erit angulus A G L: æqualis autem eſt L G ipſi A D, nam ſunt æqual'ũ maiora ſegmenta. Recta igitur A G (triplum potens ipſius A D) triplum poterit rectæ L G. Addito itaque eidem quadrato L G, recta A L binas A G G L (per quadrageſimamſeptimam primi) potens, quadruplũ poterit rectæ A D vel L G. Recta igitur A L rectæ A D (per vigeſimã ſexti) dupla erit, & igitur ipſi A F æqualis vel ipſi L M. Haud ſecus æquales oſtendentur quælibet aliæ proximas ſectarum ſectiones coniungẽtes, vt A M A P P F P M M Q, & reliquæ. Triangula igitur A L M A P F A M P P M Q, & cætera huiuſmodi æqualia, æquiangula, & æquilatera erunt, per quartam & octauam primi. Cùm autem circa ſingulas cubi rectas ſectas, bina conueniant triangula, ſcilicet A L M B L M fient duodecim triangula: quia verò ſub ſingulis cubi angulis octo, reliqua octo ſubtendantur triangula, vt A M P producent ex duodecim & octo triangulis, viginti triangula, æqualia, & æquilatera ſolidum icoſaëdrum componentia, per vige-



ſimamquartam diffinitionem vndecimi, quod cubo A B C inſcriptum erit, per vigeſimam ſextam diffinitionem eiuſdem, huius demonſtrandæ inuentio à præcedentis dependet origine. In dato igitur cubo icoſaëdrum deſcripſimus.

COROLLARIVM I.

Dimetiens Sphæræ Icoſaëdrum ambiẽtis, bina poteſt, & Icoſaëdri & ipſum continentis cubi latera.

Nam ducta A B, rectos efficiet ad A F angulos, cùm ſit cubi lateribus parallela: quæ igitur binos F & B oppoſitos icoſaëdri coniunget angulos, ipſas A B (latus cubi) & A F (latus Icoſaëdri, per 47 primi) poteſt: quæ dimetienti ſphæræ icoſaëdrum ambientis æqualis eſt per demonſtrationem decimæſextæ decimitertij.

COROLLARIVM II.

Sex oppoſitorum Icoſaëdri laterum bifarias ſectiones, coniungunt tres rectæ æquales in centro ſphæræ icoſaëdrum continentis, ſeſe bifariam ſecantes & ad rectos.

Sunt etenim tres ipſæ centra baſiũ cubi G H D E I K iungentes, quæ ſeſe hac lege ſecant, per corollarium tertiæ huius, & ideo lateribus cubi ſunt æquales. Ab eo autem cubi centro ductæ rectæ ad angulos icoſaëdri, ſingulæ dimidium cubi latus & dimidium icoſaëdri (angulum rectum comprehendentes) ſubtendunt, quare æquales ſunt. Et proinde centrum præfatum ſphæræ centrum eſſe demonſtrant icoſaëdrum ambientis.

COROLLARIVM III.

Cubi latus extrema & media ratione ſectum, efficit maius ſegmentum latus icoſaëdri ſibi inſcripti.

Nam dimidium cubi latus, dimidium icoſaëdri lateris maius ſegmentum efficit. Totum igitur cubi, totum icoſaëdri maius ſegmentum efficiet, per decimamquintam quinti, cùm ſint ſimiles ſectiones, per ſecundam decimiquarti.

COROLLARIVM IIII.

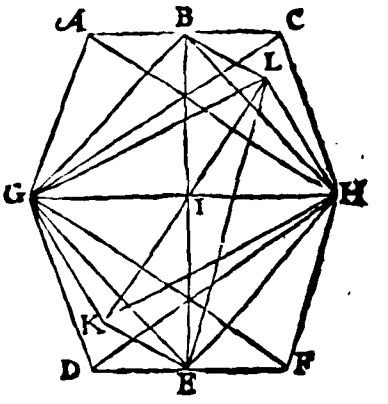
Icoſaëdri latera & baſes quæ ex oppoſito, parallela adinuicem erunt.

Cùm oppoſita icoſaëdri latera quæuis, in cubi rectis parallelis eſſe poſſint, nempe oppoſitis in cubo, quæ verò ex parallelis rectis triangula, parallela ſint, per decimamquintam vndecimi: ſequetur triangula icoſaëdri oppoſita, veluti & latera adinuicem parallela eſſe.

PROPOSITIO XV. PROBLEMA 15.

In dato Icoſaëdro, Octaëdrum componere.

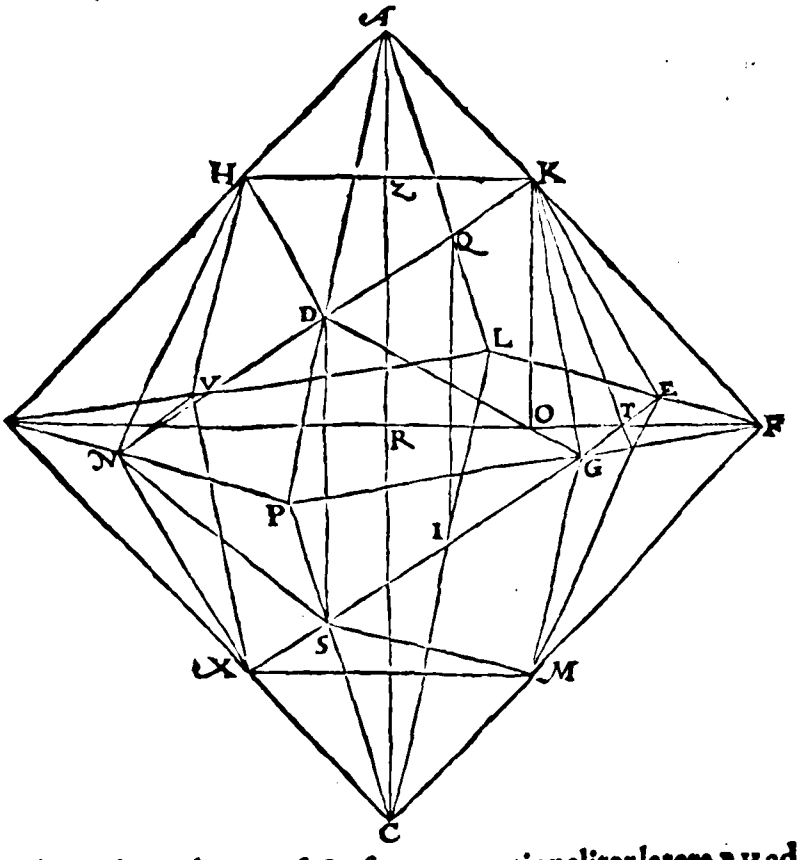
Eſto ico



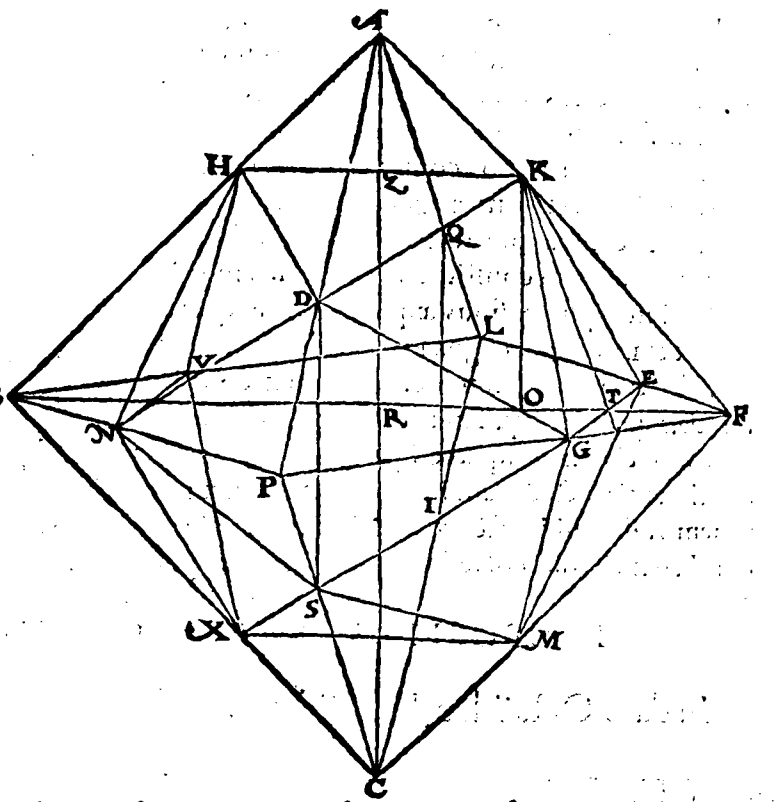
Esto icosaëdrum A C D F, cuius (per præcedens secundum corollarium) sumantur tres rectæ sese bifariam ad rectos secantes, & bifarias icosaëdri laterum sectiones coniungentes, B E G H & K L sese secantes in I signo, coniunctis B G G E E H H B: quoniam recti sunt anguli qui ad I, ex constructione, & æqualibus rectis comprehensi, bases G B H E quadratum constituent, per quartam primi. Similiter ipsis basibus æquales erunt quæ à signis K & L in singula signa B G E H ducentur, Et proinde triangula pyramidem B G E H K constituentia, æqualia & æquilatera erunt, ac eodem argumento, eisdem reliqua reliquam pyramidem B G E H L super eadem basi B G E H constituentia, octaëdrum itaque erit B G E H K L, per vigesimam secundam diffinitionem vndecimi, icosaëdro inscriptum, per vigesimam sextam diffinitionem eiusdem. In dato igitur icosaëdro octaëdrum composuimus.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA 16.

In dato Octaëdro, Icosaëdrum collocare.



Proponatur octaëdrum, cuius sex anguli sint A B C F P L, coniunctis rectis A C B F P L sese bifariam & ad rectos secantibus in signo R, per corollarium secũdum decimæquartæ decimitertij: secentur verò extrema & media ratione duodecim octaëdri singula latera, in signis H X M K D S N G V E Q T. Maiora autem earum segmenta sint B H B X F M F K A D A Q C S C T P N P G L V L E, coniunctis H K X M G E N V D S Q T, quoniam trianguli A B F secta sunt proportionaliter latera B H ad H A vt F K ad K A, per secundam decimiquarti, parallela erit H K ipsi B F, per secundam sexti: quia verò recta A C secat H K in Z, recta autem Z K parallela est ipsi R F, recta R A secta erit extrema & media ratione in Z, per secundam sexti, nempe similiter ipsi F A, maiúsque eius segmentum erit Z R. Ipsi Z K æqualis secetur R O, ducta K O, æqualis igitur erit K O rectæ Z R, per trigesimamtertiam primi, ducantur K G K E K I, quoniam æquiangula sunt triangula A R F A Z K, per sextam sexti, æqualia sunt A Z Z K latera adinuicem, per quartam sexti, cùm æqualia sint A R R F latera: rectæ itaque R A minus segmentum erit Z K, si autem maius segmentum R Z extrema



trema & media ratione ſecetur, efficiet ipſius maius rurſus ſegmẽtum, rectam Z K, quæ fuit minus totius R A, per quintam decimitertij. Quia verò binis A H A K æquales ſunt binæ F E F G, minora ſegmẽta æqualium octaëdri laterum, & anguli æquales, H A K ipſi E F G, nẽpe recti per decimam quartam decimitertij, baſes H K G E æquales erunt, per quartam primi, ſimiliter eiſdẽ æquales patebunt rectæ X M N V D S Q T: quia item rectæ A C B F & P L bifariam & ad rectos ſeſe ſecant ex conſtructione, rectæ H K & G E (ſimilia ipſis triangula ſubtendentes) bifariam ſectæ erunt in Z & I, per quartam ſexti, necnon & reliquæ N V X M D S Q T (ipſis æquales) ſimiliter ſectæ erunt, & ſimiliter ipſas A C B F P L ſecabunt: recta itaque K O (ipſi R Z æqualis) efficiet maius ſegmentum rectam R O, rectæ Z K æqualem, nam R Z fecit Z K, & igitur minus erit O I, cum tota R I rectæ R Z ſit æqualis: quæ itaque ex tota K O & minori ſegmento O I, tripla ſunt eius quod ex maiori R O, per quartam decimitertij: recta ideo K I binas K O · O I potẽs, triplum ipſius R O poterit, per quadrageſimamſeptimam primi, cùm rectus ſit K O I angulus. Cùm autem æquales ſint F E F G, minora laterum octaëdri ſegmenta, communis verò F K, & anguli K F G K F E (triangulorum octaëdri) æquales, baſes K G K E erunt (per quartam primi) æquales, quæ ideo angulos K I E K I G æquos ſubtendent, per octauam primi, qui igitur recti erunt, per decimamtertiam primi: recta itaque K E (binas K I I E potens) quadruplum poterit ipſius R O (vel I E) nam K I triplum eiuſdem R O potuit, cuius quidem I E quadruplum poteſt G E dupla, per vigeſimam ſexti: Binæ itaque K E G E erunt æquales. Eodem argumento eiſdem æquales oſtendentur reliquæ H K H N N V V X X S, & reliquæ ſectiones laterum octaëdri coniungentes. Ex ipſis igitur deſcripta triangula G E K G K D G D S G S M G M E, æqualia & æquilatera erunt, per octauam primi, angulum ſolidum qui ad G componentia: qui itaque icoſaëdri erit angulus, per decimamſextam decimitertij, in ſectione G lateris F P conſtitutus. Haud ſecus oſtendentur reliqui vndecim icoſaëdri ſolidi anguli, in ſectionibus ſingulorũ octaëdri laterũ cõſtituti eſſe, ſcilicet E N V H K M X D S Q T: duodecim igitur erunt icoſaëdri anguli. Cùm inſuper ſingulæ octaëdri baſes ſingula ſuſcipiant icoſaëdri triãgula, vt in pyramide dimidij octaëdri A B C F P, triangulum F C P in ſuorum laterum ſectionibus ſuſcipit triãgulum G M S, & C P B ipſum N X S, at B A P ſuſcipit H D N, & A P F ipſum K D G, idem oſtendi poterit in oppoſita pyramide A B C F L, erunt igitur octo triangula. Cæterùm quia ſingulis octaëdri ſolidis angulis bina ſupponuntur præter hæc triãgula, vt K E G M E G angulo qui ad F, ei verò qui ad B, X N V H N V, ei qui ad P, N D S G D S, ei qui ad A, D H K Q H K, ei qui ad L, E Q T V Q T, ei qui ad C, S X M T X M, Hæc duodecim octo præoſtenſis addita

addita producent viginti numero triangula, ſibi coniuncta æqualia & æquilatera, quæ (ex vigeſimaquarta diffinitione vndecimi) icoſaëdrum component, quod octaëdro propoſito A B C F P L inſcriptum erit, ex vigeſimaſexta diffinitione vndecimi: nam duodecim eius anguli, duodecim laterum octaëdri ſectiones ſimiles poſſident. In dato igitur octaëdro icoſaëdrum collocauimus.

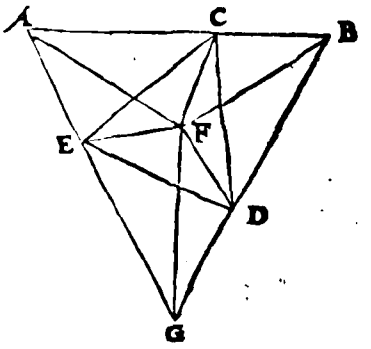
COROLLARIVM I.

Latere trianguli æquilateri extrema & media ratione ſecto, Recta ſubtendens trianguli angulum, maiori & minori ſegmentis comprehenſum, duplum poteſt minoris eiuſdem lateris ſegmenti.

Nam recta K E angulum K F E trianguli A F L ſubtendens, binis K F F E ſegmentis comprehenſum, æqualis fuit rectæ H K bina H A A K minora ſegmenta potenti, per 47 primi, cùm rectus fuerit H A K angulus. Duplum igitur poteſt K E vel H K rectæ A K.

COROLLARIVM II.

Icoſaëdri baſes octaëdri id continentis baſibus ſunt homocentricæ.

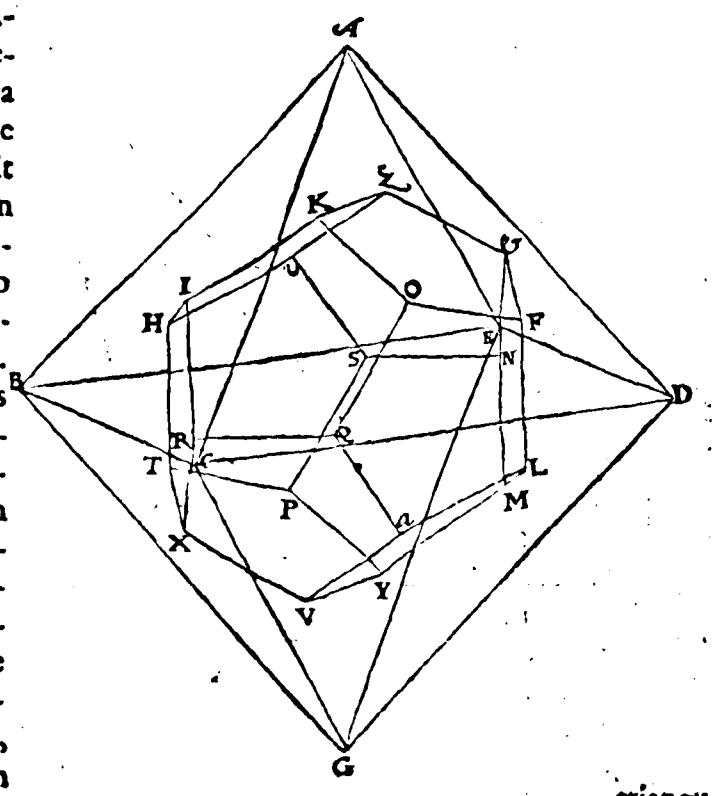


Nam ſi proponatur A B G octaëdri baſis continens E C D icoſaëdri baſim, erit centrũ baſis A B G ſignum F. Iungentur rectæ F A F B F C F E. Æquales erunt binæ F A A E binis F B B C, ſunt enim quæ ex centro & minora ſegmẽta: Sed & angulos æqualium dimidios ſubtendunt: Baſes igitur (ex quarta primi) F C F E ſunt æquales, ſicq; illis reliqua F D æqualis erit: centro igitur F interuallo F A circulus triãgulo C E D circunſcriptus, ſignum idem F centrum efficiet baſis C E D icoſaëdri.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA 17.

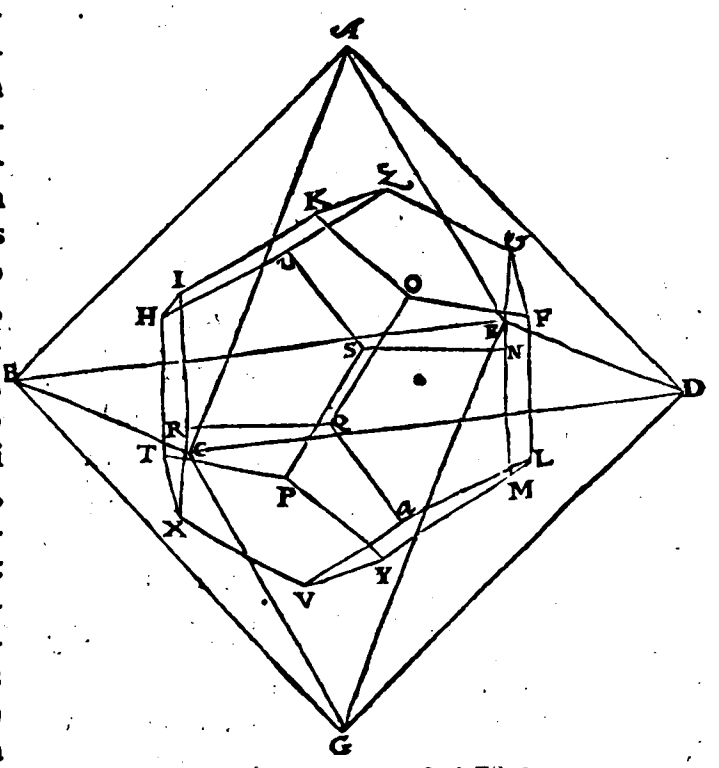
In dato Octaëdro, Dodecaëdrum collocare.

Eſto propoſitum octaëdrum A B G D E C, cuius ſecentur duodecim latera extrema & media ratione inſtar præcedentis. Patuit ex rectis has ſectiones iungentibus fieri viginti triãgula, quorum fuerũt octo baſibus octaëdri concentrica, ex proximo coroll. præfatæ. Si igitur ſingulis viginti triangulorum centris, ſinguli dodecaëdri inſcribantur (iuxta quintam huius) anguli, comperiemus octo dodecaëdri angulos in octo baſibus octaëdri centris, hos nempe I V & O M A P & X. Reliquorum autẽ duodecim, binos in centris binorum



triangu

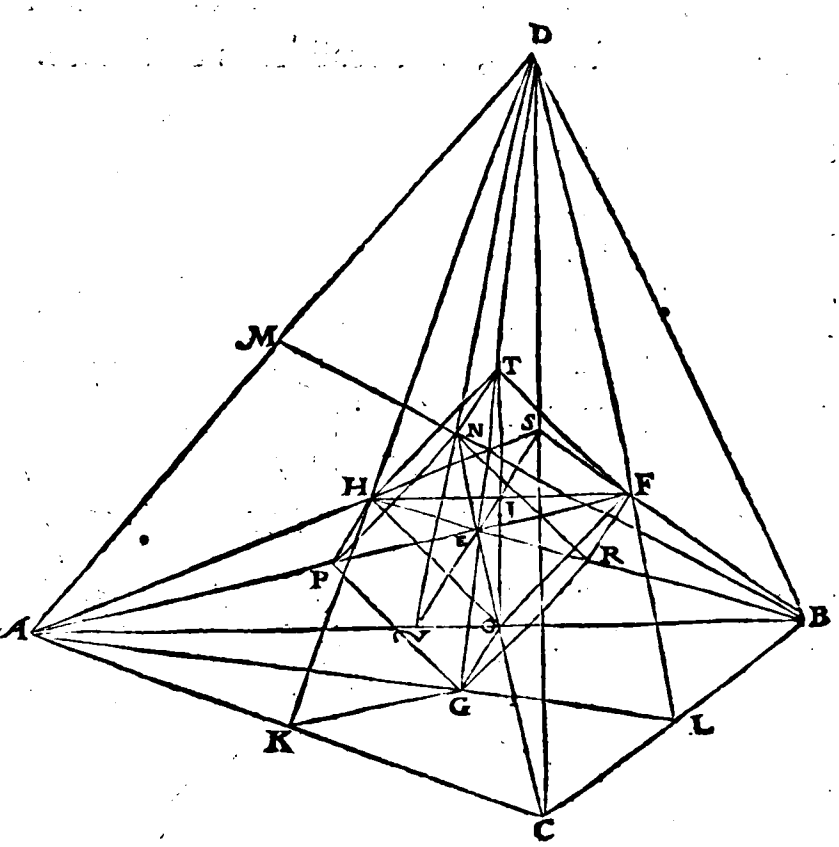
triangulorum latus commune ſub ſingulis octaëdri ſolidis angulis habentium, qui & idem dodecaëdri bini anguli ſolidi, latus commune ſub eiſdem ſingulis octaëdri ſolidis angulis habent, puta ſub angulo qui ad A binos K Z, ſub B binos H T, ſub G binos V Y, ſub D binos F L, ſub E binos S N, ſub C verò binos Q R degentes, qui ſolidi anguli cùm ſint ſex, duodecim fouent dodecaëdri angulos, ae fiunt viginti duodecim pentagonis æqualibus æquiangulis & æquilateris planis (vt quinta huius patuit) compoſiti: Dodecaëdrum autem (ex 23 diffinitione vndecimi) reſtituentes: Octaëdro verò inſcriptum eo quod ſingulæ octaëdri baſes ſingulos eius ſuſcipiunt angulos, per 26 diffinitionem vndecimi. In dato igitur octaëdro dodecaëdrum collocauimus.



PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA 18.

In data trilatera & æquilatera Pyramide, cubum conſtruere.

Eſto trilatera æquilatera pyramis, cuius baſis ſit A B C, vertex autẽ D, Ipſa ſphęra comprehendetur, ex decimatertia decimitertij. Sit eius ſphæræ cẽtrum E. Ab angulis autẽ ſolidis A B C D, per centrum E ſingulæ rectæ in baſes oppoſitas miſſæ, baſibus perpẽdiculares erunt, & in centra circulorum baſes continentium cadent, per coroll. 13 decimitertij. Sint ita



que ea

que ea centra trianguli quidem ABC signum G, trianguli ADC sit H, ipsius verò ADB sit N. Reliqui autem DBC esto F, Rectæ demissæ sint DEG BEH CEN & AEF: Per ea verò GHNF centra, ab angulis ducãtur in latera opposita rectæ AGL DHK BNM & DFL, quæ perpendiculares erũt lateribus BC CA AD & CB, per coroll. 12 decimitertij. Et ideo eas secabunt bifariam in KLM signis, per tertiam tertij. Rursus quæ à solidis angulis missæ sunt in bases oppositas, bifariam secentur, scilicet DG in T, CN in O, AF in P, & BH in R, coniunctis HT FT HO FO. Quoniam GK GL quæ à centro eiusdem trianguli ABC in latera sunt æquales, æqualium & similium triangulorum perpendiculares: Communis autem DG, anguli KDG LDG (per octauam primi) æquales erunt: Sed & æquis lateribus FD DT ipsis HD DT continentur: Nam HD DF sunt ex centro æqualium circulorum triangula ADC DBC continentium, bases igitur HT FT æquales erunt, per quartam primi. Haud secus ductis CF CH rectis, reliquæ HO FO eisdem HT FT & inter se æquales esse patebunt. Ac igitur eodem argumento reliquæ centra triangulorum & bifarias perpendicularium sectiones iungentes, vt NP GR GP RN NT PH GO & RF æquales esse ostendentur. Cùm autem à quolibet centro basium tres oriantur rectæ in bifarias perpendicularium sectiones ducendæ, centra autem sint quatuor, sequetur ductas rectas æquales duodecim esse, quarum ternæ & ternæ angulum solidum in quatuor centris basium ac perpendicularium mediis sectionibus quatuor constituunt: eius itaque solidi octo erunt anguli, duodecim æquis lateribus conscripti, quæ sex quadrangula figurabũt, scilicet HOFT PGRN PHOG GOFR FRNT & TNPH. Ea quippe rectangula esse doceamus.

Quoniam in DC communem triangulorum ADC BDC basim perpendiculares cadunt AS BS per centra H & F ductæ, Singulæ ipsarum HS SF tertiam partem singularum AS SB efficiunt. Nam AH dupla est rectæ HS & basim DC bifariam secant, per coroll. duodecimæ decimitertij. Trianguli igitur ABS latera AS BS proportionalia secta in H & F, efficiunt rectam HF parallelam reliquo AB lateri, per secundam sexti. Æquiangula igitur erunt ASB & HSF triangula, per sextam sexti. Basis igitur HF reliquæ AB tertia pars erit, per quartam sexti. Ostendamus insuper TO tertiam esse rectæ DC, cùm æquales sint EC ED rectæ, quæ ex centro sphæræ pyramidem continentis, EN verò (quæ à centro in basim) tertia pars est EC rectæ, hicq; GE rectæ ED, per coroll. decimæ tertiæ decimitertij, est enim sexta pars dimetientis. Sed ON fuit dimidia totius NC. Reliqua itaque EO tertia pars erit ipsius EC necnon ET tertia rectæ ED. Quare recta TO in triangulo DEC parallela erit rectæ DC, eiusdémque pars tertia, ex præscriptis secunda & quarta sexti, veluti HF fuit tertia pars rectæ AB. Atqui AB & DC pyramidis latera sunt æqualia. Rectæ igitur HF & TO æqualium tertiæ partes æquales erunt, per decimamquintam quinti. Æquales igitur erunt anguli HTF & TFO, similiter eis oppositi FOH OHT (per octauam primi) ipsis ac inter se æquales erunt. Sed hi quatuor rectis æquipollent, per coroll. trigesimæ secundæ primi. Recti itaque erunt quadranguli HOFT anguli. Necnon reliquorum quinque quadrangulorum, eadem lege recti ostendentur anguli. Superest ostendendum quadrangula præfata in vno plano singula esse. Suscipiamus itaque HOFT. Quoniam in triangulo ASB recta HF lateri AB parallela ostensa est, ea secat proportione rectas SV SB in I & F, per 2 sexti. Quia ideo tertia pars fuit SF rectæ SB, tertia erit SI rectæ SV. Quia præter hæc, VS medias sectiones oppositorum pyramidis laterum iungẽs, horum nempe AB DC bifariam per centrum E secatur, ex coroll. secundæ huius, cùm sit dimetiens octaëdri pyramidi inscripti, recta SI duo tertia erit dimidiæ SE. Haud secus, cùm in triangulo DEC recta TO parallela fuerit rectæ DC lateri, Illa secabit proportione in eodem triangulo rectas CE SE in O & I, per eandem. Atqui tertia fuit EO rectæ EC, tertia igitur erit EI rectæ ES. Reliqua igitur IS totius ES duo tertia erit. Quare signum I vtraſque TO HF secuit. Binæ itaque HIF TIO rectæ

sese

ſeſe ſecantes in vno ſunt plano, per ſecundam vndecimi. Ac proinde ſigna H T F Q in eodem erunt plano. Rectangulum igitur H O F T quadrilaterum & æquilaterum in plano exiſtens quadratum erit, per trigeſimam diffinitionem primi. Eadem cauſa reliquæ quinque ſolidi baſes quadratæ, oſtendentur æquales & planæ, duodecim lateribus octóque angulis æqualibus ſolidis coniunctæ, quorum quatuor in quatuor pyramidis baſium centris, quatuor verò in quatuor perpendicularium mediis ſectionibus degunt. Solidum igitur illud H O F T P G R N cubum dicemus, per vigeſimamprimam diffinitionem vndecimi, pyramidi inſcriptum, per 26. diffinitionem eiuſdem. In data itaque trilatera & æquilatera pyramide cubum conſtituimus.

COROLLARIVM I.

Quæ bifariam ſecat oppoſita Pyramidis latera, tripla eſt lateris inſcripti cubi, & per centrum tranſit.

Nam S E V recta, cuius tertia pars fuit S I, ea latera ſecat: at E I (quæ ex centro cubi in baſim) fuit tertia rectæ E S. Latus igitur cubi duplum rectæ E I tertium erit totius V S, quæ fuit dupla rectæ E S.

COROLLARIVM II.

Inſuper Pyramidis latus triplum eſt ac parallelum dimetientis cubi baſis.

Nam oſtenſum eſt, rectam A B, rectæ H F, parallelam & triplam fuiſſe.

COROLLARIVM III.

Præterea Pyramidis latus duplum poteſt eius quæ coniungit oppoſita eiuſdem latera.

Nam diximus triplum eſſe latus pyramidis ad cubi dimetientem: coniungentem verò triplam lateris: quæ ideo fuit in eadem ratione, per 15. quinti: duplum autem dimetiens cubi lateris, duplum itaque poterit latus pyramidis præfatæ coniungentis.

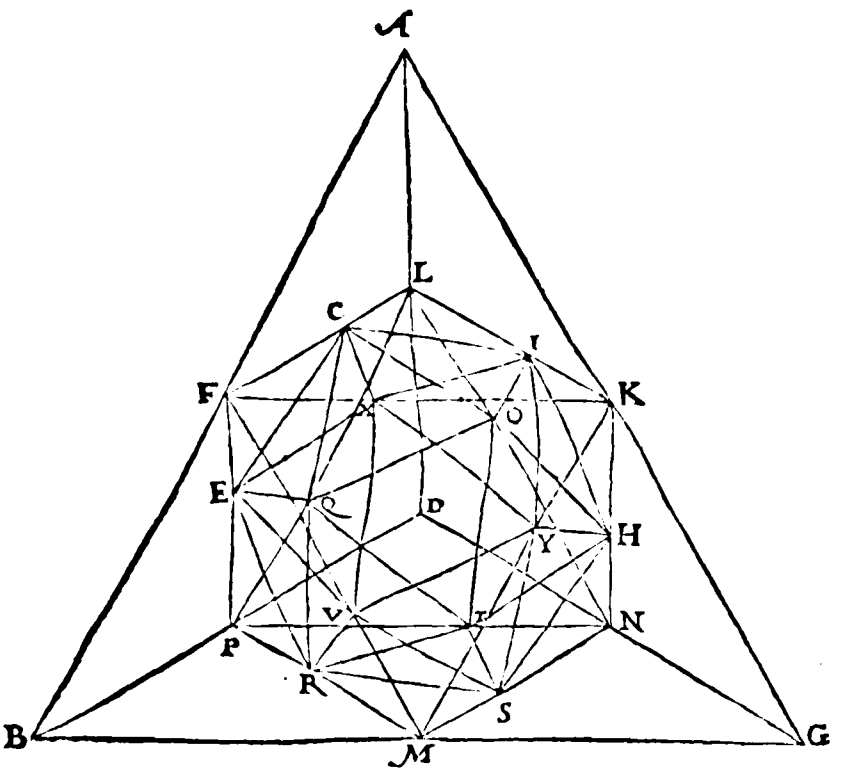
PROPOSITIO XIX. PROBL. 19.

In data trilatera æquilatera Pyramide, Icoſaëdrum deſcribere.

Eſto propoſita pyramis A B G D, cuius ſingula bifariam ſecentur latera ſignis F M K L P N, deſcriptis triangulis L F P P M N N K L & F M K in ſingulis eius pyramidis baſibus, quæ quidem triangula æquilatera erunt, per quartam primi: nam latera ſubtendunt æquos baſium pyramidis angulos dimidiis eius lateribus comprehenſos, quæ ideo ſunt æqualia. Secentur ea latera extrema & media ratione (per trigeſimam ſexti) in ſignis C E Q R S T H I O V Y X. Ipſa latera in eaſdem rationes ſecantur, per ſecundam decimæ quarti, & ideo æquales efficiunt ſimiles ſectiones, per ſecundam partem nonæ quinti: Dico præfata ſigna angulos ſuſcipere icoſaëdri pyramidi A B G D inſcripti. Fiant in præfatis triangulis alia rurſus triangula

iunctis

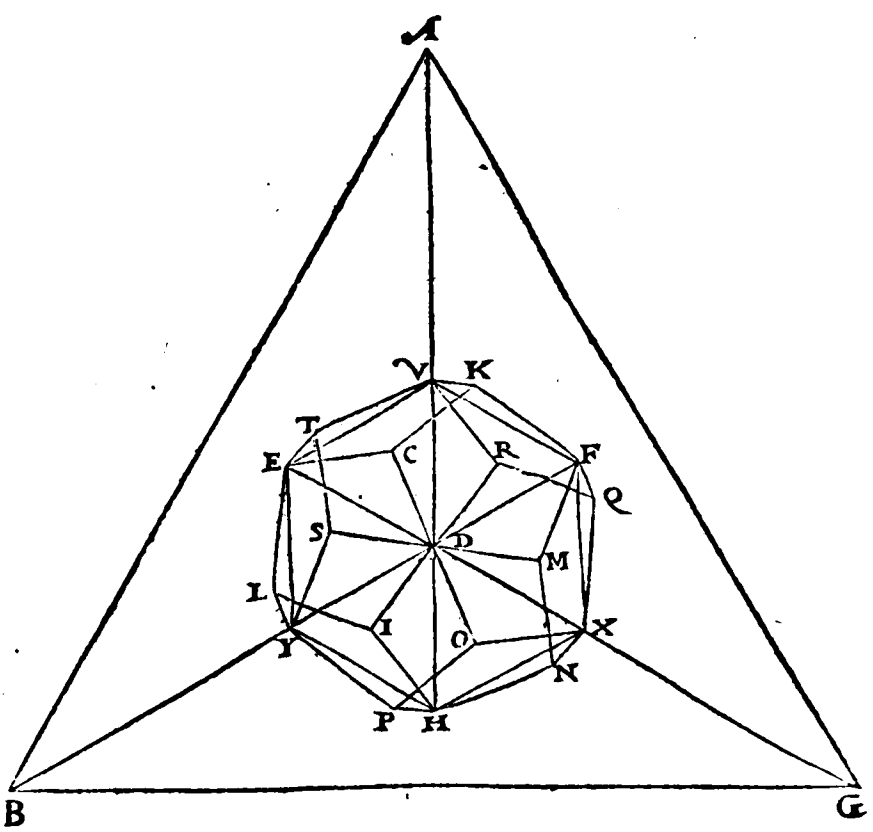
unctis ſectionibus, Sint autem hæc TRS IOH CEQ & VXY, ipſa æquilatera erũt. Singula nanque eorum latera æquales angulos triangulorum æquilaterorum ſubtendunt, & æquis lateribus (maiori ſcilicet & minori ſegmento) comprehenſos, quæ ideo (per quartam primi) erunt æqualia. Oſtendamus igitur ad aliquod præfatorum ſignorum (ſcilicet T) conſtitui angulum ſolidum icoſaëdri. Cùm triangula TRS & TQO ſint æquilatera & æqualia, æquales erunt quatuor rectæ TR TS TQ TO: & quia quadratum eſt FPNK, bifariam ſecans pyramidem ABGD per corollarium ſecundæ huius, recta TH duplum poteſt rectæ TN vel NH, per quadrageſimamſeptimam primi, minoris quidẽ ſegmenti ex cõſtructione. Quod idem duplum poteſt recta RT vel TS, angulum trianguli ſubtendens binis ſegmentis comprehẽſum, per corollarium decimæ ſextæ huius. Rectæ igitur TH TS TR TQ TO æquales erunt, necnon HS SR RQ QO OH, angulos qui ad T ſubtendentes: nam QR bina poteſt PQ PR minora ſegmenta, quæ potuit TH. Reliquæ verò angulos triangulorum æquilaterorum maiori & minori ſectione comprehenſos ſubtendunt. Quinque itaque triangula TRS TSH THO TOQ TQR æquilatera & æqualia, angulum ſolidum icoſaëdri ad ſignum T conſtituunt, per 16 decimitertij, in latere PN trianguli PNM. Eadem methodo in reliquis quatuor triangulorum PNM NKL FMK & LFP baſibus pyramidis inſcriptorum lateribus, quæ latera duodecim ſunt numero, duodecim icoſaëdri conſtituentur anguli, viginti triangulis æqualibus & æquilateris compoſiti, quorum quatuor in quatuor pyramidis baſibus, TRS HOI CEQ VXY, quatuor ſub quatuor pyramidis angulis CIX TSH ERV & TQO, & bini ſub ſingulis ſex pyramidis lateribus, ſcilicet ſub latere DG, THS THO, ſub DB, RQE RQT, ſub DA, COQ COI, ſub AB, EXC EXV, ſub BG, SVR SVY, ſub AG, IYH IYX. Viginti itaque æquilateris & æqualibus triangulis comprehenſum, ſolidum icoſaëdrum erit, per vigeſimamquartam diffinitionem vndecimi, pyramidi ABGD inſcriptum, cùm eius ſimul anguli pyramidis ſimul baſes tangunt, per vigeſimamſextam diffinitionem vndecimi. In data itaque trilatera pyramide icoſaëdrum deſcripſimus.



PROPOSITIO XX. PROBLEMA 20.

In data trilatera æquilatera Pyramide, Dodecaëdrum componere.

Esto pyramis A B G D, cuius singula latera bifariam secentur, ductis rectis sectiones iungentibus, quæ rectæ extrema & media ratione sectæ, susci pient ductis per sectiones rectis, viginti triangula icosaëdrum componentia, vt proxima patuit: si eorum triangulorum centra susceperimus, ibidem viginti dodecaëdri inscripti angulos comperiemus, per quintam huius: quia verò præfati icosaëdri quatuor bases sunt basibus pyramidis concentricæ, vt ostensum fuit corollario secundo decimæsextæ huius, quatuor angulos, scilicet E F H D dodecaëdri, in quatuor basium centris collocabimus, reliquorum verò sedecim angulorum bini singulis sex pyramidis lateribus subiiciuntur, nempe lateri A D anguli C & K, lateri B D L & I, rectæ G D M & N, rectæ A B T & S, lateri B G P & O, lateri A G R & Q supersunt quatuor, quorum verum locum designemus: cùm cubus eadem sphæra cum dodecaëdro septus, eidē dodecaëdro inscribatur, vt patuit decimaseptima decimitertij, & octaua huius, sequetur cubū dodecaëdrúmque circunscriptum iisdē continēri corporibus, eo quòd eorum anguli ad eadem signa coëant. Ostensum est autem (18 huius) quatuor angulos cubi pyramidi inscripti perpendicularium quæ ab angulis in bases oppositas pyramidis sunt missæ, medias obtinere sectiones. Dicemus itaque quatuor reliquos dodecaëdri angulos medias illas perpendicularium cum angulis cubi possidere sectiones. Has quidem V dimidiam perpendicularis A H, dimidiam verò B F anguli Y dimidiam autem G E signum X, reliquam demùm, medium signum perpendicularis D anguli, in basim oppositam. Quare quatuor illi dodecaëdri angulis, solidis pyramidis quatuor angulis directi, siue ad perpendiculum suppositi dicentur: dodecaëdrum itaque hac lege constitutum propositæ pyramidi inscriptum dicetur, eò quòd singulis pyramidis basibus singuli adhæreant dodecaëdri inscripti anguli, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi. In data igitur trilatera æquilatera pyramide dodecaëdrum composuimus.



COROLLARIVM.

Dodecaëdri & cubi in sphæra descriptorum dimetientes, dimidiæ sunt eius quæ à pyramidis angulo in basim demissa fuit:

Vt patuit demissam A H, duplam fuisse V H, dimetientis.

PROPO

PROPOSITIO XXI. PROBLEMA 21.

Cuilibet regularium ſolidorum Sphæram inſcribere.

Iam oſtenſum fuit decimatertia & quatuor ſequentibus decimitertij, ſolida quinque regularia hac lege ſphæra contineri, vt à centro ſphæræ ſiue ſolidi ad ſingulos inſcriptæ angulos rectæ ſint æquales. Quæ quidem rectæ eadem cauſa pyramides componunt, quarum vertices centrum ſphæræ ſiue ſolidi poſſident, baſes autem pyramidum ſingulæ ſunt eorum ſolidorum baſes, quæ cùm in quolibet ſolido ſint inter ſe æquales, ſimiles & æqualibus circulis deſcriptæ, hi circuli ſphæram ſecabunt: nam anguli circunferentiam circuli tangẽtes ſphæræ ſuperficiem attingunt: quare à centro ſphæræ in baſes ſiue circulorum æqualium plana demiſſæ perpendiculares, ſunt æquales, ex corollario lemmatis decimæſextæ duodecimi. Centro igitur ſphæræ ſolidum continentis, interuallo verò aliqua perpendiculariũ æqualium deſcripta ſphæra, ipſa ſingulas eius ſolidi baſes ſua ſuperficie tanget, nec excedet ſuperficies ſphæræ cùm perpendiculares ſint minimæ quæ à centro in baſes mittuntur, per tertium corollarium eiuſdem lemmatis: cuilibet igitur regularium ſolidorum ſphæram inſcripſimus, quæ quidem ſunt tantùm numero quinque, per corollarium decimæoctauæ decimitertij.

COROLLARIVM I.

Inſcriptæ ac eis circunſcriptæ regulares figuræ ſiue eas comprehendentes ſphæræ, idem centrum poſſident.

Nempe earum pyramides quarum anguli baſium ſphæræ ſuperficiem tangunt, ab his angulis ad idem ſignum æquales perducunt rectas, conos pyramidum ibidem conſtituentes, ac proinde centrum ſphærarum in eiſdem conis collocantes, cùm ab his ad curuam ſuperficiem, in baſium pyramidis angulis exiſtentem, ductæ rectæ fuerint æquales.

COROLLARIVM II.

Rectæ oppoſitarum baſium ſolidorum regularium centra, media latera vel angulos iungentes, per ſolidi centrum ducuntur, & baſibus, ac lateribus ſunt perpendiculares.

Nam quæ angulos oppoſitos iungunt figurarum ſunt dimetientes. Quæ verò baſium centra vel dimidia latera copulant, inſcriptorum eis ſolidorum ſunt pariter dimetientes: Quare per centrum ductæ ſunt. Cùm autem quæ à ſolidi centro ad ſolidos angulos ductæ ſint æquales, Et quæ à centris baſium vel dimidiis laterum ſectionibus æquales, Reliquæ à cẽtro ſolidi in centra baſium vel dimidiorum laterum communes æquales comprehendunt angulos cum iis quæ à centris baſium inter ſe vel cum dimidiis lateribus inter ſe æqualibus rectis quæ à ſolidi centro ſubtenſos & proinde rectos.

MONITVM.

Horum ſolidorum vnicum octaëdrum reliqua mutuò ſibi inuicem inſcripta ſuſcipit ſolida: nam octaëdrum capit icoſaëdrum ſibi inſcriptum: illud idem icoſaëdrum concipit dodecaëdrum eidem octaëdro inſcriptum: Dodecaëdrum verò idem, ſuſcipit cubum ipſo octaëdro conceptum: cubus ille demùm Pyramidem propoſito octaëdro inſcriptam circunſcribit. Quæ quidem ſimili iure octaëdrum, icoſaëdrum, dodecaëdrum & cubum hoc ordine ſuſcipit ſibi inuicem inſcripta. Hæc reliquis denegantur ſolidis.

LIBRI DECIMIQVINTI FINIS.

FRANCISCI FLVSSATIS CANDALLAE ELEMENTORVM GEOMETRICORVM LIBER DECIMVSSEXTVS.

PROPOSITIO I.

DOdecaëdrum ſibíque inſcriptus cubus ac eidem cubo inſcripta Pyramis, eadem capiuntur Sphæra.

Quoniam pyramis angulos cubi in quo deſcribitur poſſidet, per primam decimiquinti, Cubus verò omnes angulos in dodecaëdri ſibi circunſcripti angulis collocat, per octauam decimiquinti, Dodecaëdrum verò ſuos angulos in ſphæræ ſuperficie conſtituit, per 17 decimitertij, Sequetur itaque illa tria ſolida ſibiinuicem inſcripta, eadem capi ſphæra, per vigeſimamſextam diffinitionem vndecimi. Dodecaëdrum igitur ſibíque inſcriptus, &c.

COROLLARIVM.

Tria hæc ſolida ſimiliter eidem inſident Icoſaëdro, Octaëdro, & Pyramidi.

Nam icoſaëdro, per quintam, vndecimam, & duodecimam decimiquinti: ac eidem octaëdro, per quartam, ſextam, & decimamſextam eiuſdem: demùm eidem pyramidi, per primam, decimãoctauã, & decimamnonam eiuſdem. Nam omnium horum anguli centra baſium circunſcriptorum icoſaëdri, aut octaëdri, aut certæ pyramidis, obtinent.

PROPOSITIO II.

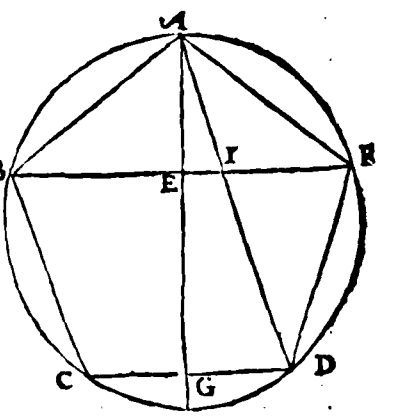
Dodecaëdri circũſcripti ad dodecaëdrum cubo inſcriptum ratio, tripla eſt extremæ & mediæ rationis.

Quoniam oſtendimus (decimætertiæ decimiquinti corollario 2) latus dodecaëdri cubo inſcripti eſſe minus ſegmentum lateris ipſius cubi extrema & media ratione ſecti. Latus verò dodecaëdri eidem cubo circunſcripti, eiuſdem cubi lateris maius ſegmentum eſſe, eadem 13 decimiquinti, docuimus: erit latus dodecaëdri circunſcripti, ad latus inſcripti, vt maius ſegmentum rectæ extrema & media ratione ſectæ, ad minus eiuſdem, quæ (ex trigeſima ſexti) dicitur extrema & media ratio, per tertiam diffinitionem eiuſdem. Sed ſimilium polyëdrorum ſolidorum ratio, tripla eſt rationis laterum ſimilium, per corollarium 17 duodecimi. Dodecaëdri

caëdri igitur circunſcripti ad dodecaëdrum cubo inſcriptum ratio, tripla erit rationis laterum, extrema & media ratione coniunctorum. Dodecaëdri itaque circunſcripti ad dodecaëdrum, &c.

PROPOSITIO III.

Omnis quinquanguli, æquianguli, & æquilateri, quæ ab vno angulorum in baſim perpendicularis, extrema & media ratione ſecatur, per rectam angulum eundem ſubtendentem.



Sit quinquangulum, æquiangulum, & æquilaterum ABCDF, ab vno autem angulorum qui ad A perpendicularis demittatur AG in baſim CD, & angulum BAF ſubtendat BF, quam ſecet AD in I, & AG in E. Dico rectam BF ſecare rectam AG extrema & media ratione, quoniam anguli GAF GAB ſunt æquales, per vigeſimam ſeptimam tertij, & ABF AFB æquales, per quintam primi. Reliqui itaque qui ad E triãgulorum AEB AEF æquales erunt, nempe reliqui duorum rectorum, per corollarium trigeſimæ ſecundæ primi. Rectus autem eſt (ex conſtructione) EGC angulus, parallelæ igitur ſunt BF CD rectæ, per vigeſimamoctauam primi: ſicut igitur DI ad IA, ſic erit GE ad EA, per ſecundam ſexti. Atqui DA ſecta eſt in I *extrema & media ratione*, per octauam decimitertij, GA igitur in E ſecta erit extrema & media ratione, per ſecundam decimiquarti. Omnis itaque quinquanguli, æquianguli, & æquilateri, quæ ab, &c.

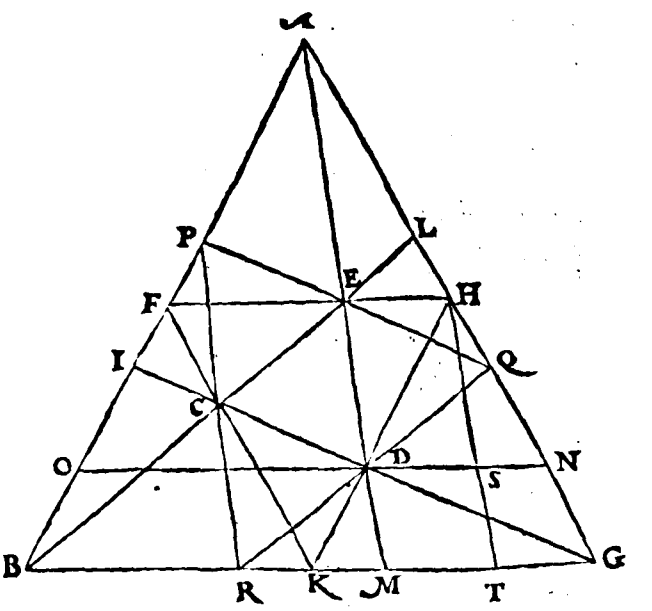
COROLLARIVM.

Quæ angulum pentagoni ſubtendit oppoſito lateri ſit parallela.

Vt patuit in BF & CD.

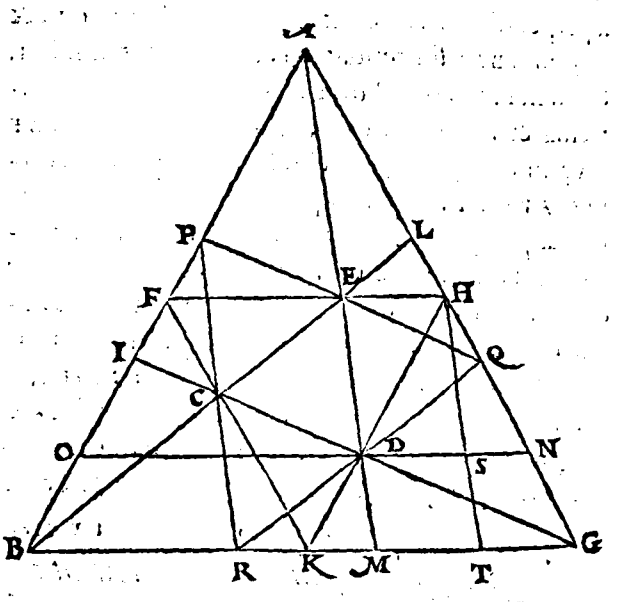
PROPOSITIO IIII.

Quæ ab angulis baſis Pyramidis latera oppoſita ſecant extrema & media ratione rectæ, ipſæ comprehendunt baſim icoſaëdri Pyramidi inſcripti, triãgulo æquilatero inſcriptam, cuius anguli latera baſis Pyramidis extrema & media ratione ſecant.



Eſto baſis pyramidis ABG, cui inſcribatur triangulũ æquilaterum FKH, ſectis biſariam lateribus, huic autem triangulo inſcribatur baſis icoſaëdri pyramidi inſcripti (ſectis extrema & media ratione lateribus FK KH HF in CDE, per decimamnonam decimiquinti): ſecentur rurſus pyramidis latera AB BG GA extrema & media ratione in IML, per trigeſimam ſexti, coniunctis AM BL GI rectis: Dico ipſas rectas triangulum icoſaëdri CDE deſcribere. Quoniam BG & FH ſunt parallelæ, per ſecundam ſexti,

per ſignum D vtrique parallela fiat O D N. Simile erit H D N triangulum ipſi H K G, per corollarium ſecundæ ſexti, æquales igitur erunt ſingulæ D N N H ipſi D H, maiori ſegmento rectæ K H vel F H: quia verò F O parallela eſt rectæ H K, & O D ipſi F H, æqualis erit O D rectæ F H toti, in parallelogrammo F O D H, per 34 primi. Sicut itaque tota F H ad F E maius ſegmentum, ſic erunt, ipſis æquales O D ad D N, per ſeptimam quinti. Recta igitur O N extrema & media ratione ſecta erit in D, per ſecundam decimiquarti. Sed ſimilia ſunt inter ſe triangula A O D A F E & A B M, necnon inter ſe A D N A E H & A M G, per corollarium ſecundæ ſexti. Sicut ideo F E ad E H, ſic eſt O D ad D N, & B M ad M G. Recta igitur A M ſimiliter ſecans rectas F H O N ipſi B G in E D M, efficit E D latus trianguli icoſaedri E C D, in ſectionibus E C D ex hypotheſi deſcripti. Haud ſecus B L G I reliqua latera E C C D eiuſdem trianguli deſcribent, per ſignum E rectæ G I parallela fiat P E Q. Cùm parallelæ ſint B M F E recta A M in E ſimiliter ipſi A B in F ſecatur, per ſecundam ſexti. Aequalis igitur erit A E ipſi E M, ac ipſi æquales erunt G D D I, ſimiliter poſitæ. Quia rurſus parallelæ ſunt D I E P in triangulo A D I, erit D I ad E P, vt A D ad A E: ſed vt A D ad A E, ſic D G ad E Q, per 2 ſexti. Sicut igitur D I ad E P, ſic erit D G ad E Q: & viciſſim D I ad D G, vt E P ad E Q: æquales autem ſunt D I D G, æquales igitur erunt E P E Q: quia verò æqualis eſt recta A H rectæ F H, cuius maius ſegmentum fuit recta H N. Tota A N extrema & media ratione ſecatur in H, per quintam decimitertij. Sicut autem A N ad A H, ſic A D ad A E, per ſecũdam ſexti, quia parallelæ fuerunt F H O N: ſicut rurſus A D ad A E, ſic (per eandem) A G ad A Q & A I ad A P, quia parallelæ fuerunt P Q G I. Rectæ itaque A G & A I extrema & media ratione ſn Q & P ſectæ ſunt, rectáque A Q maius erit rectæ A G vel A B ſegmentum. Quia verò fuit tota A G ad maius A Q vt maius A I ad reliquam A P, ipſa A P erit minus ſegmentum totius A B vel A G. Recta igitur P E Q (parallela per E rectæ G I) extrema & media ratione ſecuit rectas A G B A in Q & P. Haud ſecus recta P R (rectæ A M parallela per C) in ſectiones P R cadet, necnon R Q per ſignum D (parallela rectæ B L) in ſectiones R Q cadet: vtraque igitur P E E Q rectæ C D æqualis erit, in parallelogrammis P D Q C, per 34 primi. Cùm autem æquales fuerint rectæ P E E Q, æquales erunt ſimiliter P C C R & R D D Q. Triangulum itaque P R Q æquilaterum erit ſecans extrema & media ratione latera pyramidis in P Q & R, cui inſcripta eſt baſis icoſaedri E C D præfata pyramide comprehenſi. Quæ igitur ab angulis baſis pyramidis, &c.



COROLLARIVM I.

Idem triangulum æquilaterum, regulariter inſcribitur triangulo, extrema & media ratione baſi pyramidis inſcripto: & inſcribitur extrema & media ratione triangulo eidem baſi regulariter inſcripto.

Nam patet idem triangulum C E D, regulariter inſcribi triangulo P Q R baſis pyramidis latera extrema & media ratione ſecanti: & idem C E D extrema & media ratione

ratione secat latera trianguli F K H, basi pyramidis regulariter inscripti: hoc est sectis bifariam lateribus.

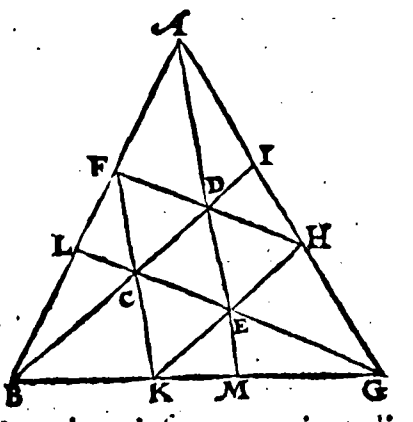
COROLLARIVM II.

Latus icosaëdri octaëdro inscripti, maius segmentum est eius quæ ab angulo basis octaëdri secat latus oppositum extrema & media ratione.

Quoniam (ex decimasexta decimiquinti) F K H est basis octaëdri, icosaëdrum basis C D E continentis, Cui F K H æquatur H K G, vt patuit, Excitetur rectæ M E per signum H parallela H T, secans D N in S, parallelogramma erunt E S D T E T, æquales inde erũt E H M T, & æqualiter sectæ E M H T in D & S, per 34 primi. Rectæ igitur H T maius segmentum est H S recta, æqualis lateri E D icosaëdri. Sed T K similiter secatur ipsi H K (ex secunda sexti) per parallelã D M. Et ideo extrema & media ratione, per secundam decimiquarti. Est autem T M æqualis rectæ E H, & igitur T K ipsi E F vel D H. Reliquæ igitur E H & T G sunt æquales: nam F H & K G sunt æquales. Latus itaque K G trianguli H K G secatur in T extrema & media ratione à recta H T cuius maius segmentum fuit E D, latus quidem icosaëdri octaëdro, cuius basis fuit H K G (vel F K H sibi æqualis,) per 16 decimiquinti, inscripti.

PROPOSITIO V.

Latus Pyramidis extrema & media ratione sectum, efficit minus segmentum potentia duplum lateris sibi inscripti icosaëdri.



Esto basis pyramidis A B G, basis autem sibi inscripti icosaëdri C D E, descripta tribus rectis quæ ab angulis basis A B G latera opposita extrema & media ratione secant, ex præfata, his scilicet A M B I & G L: Dico A I minus segmentum lateris A G, duplum posse lateris C E icosaëdri. Quoniam proxima patuit triangulum C D E inscriptum esse triangulo æquilatero, cuius anguli secãt extrema & media ratione latera basis A B G pyramidis. Sit illud F H K, secans rectam A B in F. Erit itaque F A minus segmentum æquale segmento A I, per secundam decimiquinti, nempe eadem ratione sectum, latus insuper F H trianguli F H K secatur in D bifariam, vt proxima dictum est. Ac insuper parallelogrammum fuit F C E D, & proinde æquales fuerunt rectæ C E F D, per 33 primi. Cùm autem recta F H subtendat angulum B A G trianguli æquilateri, comprehensum maiori segmento A H & minori A F, duplum potest F H rectæ A F, siue A I, minoris segmenti, per corollar. decimæsextæ decimiquinti. Atqui eadem F H quadruplum potest rectæ C E, cùm sit eius dupla, per 19 sexti. Recta igitur A I dimidium rectæ F H potens duplum poterit rectæ C E. Latus itaque pyramidis A G extrema & media ratione sectum, efficit minus segmentum A I potẽtia duplum lateris C E sibi inscripti icosaedri.

COROLLARIVM.

Latus icosaëdri pyramidi inscripti est apotome.

Nam dimetiens ſphæræ corpora continentis certa exiſtens, ſeſquialtera fuit potentia lateris pyramidis, ex 13 decimitertij, & ideo certa fuit latus pyramidis, per ſextam diffinitionem decimi. Quæ ſecta extrema & media ratione efficit minus ſegmentum apotome, per ſextam decimitertij. Igitur eidem minori ſegmento latus icoſaëdri commenſurabile (dimidium nanque potens fuit) apotome erit, per ea quæ monuimus centeſimatertia decimi.

PROPOSITIO VI.

Latus cubi dimidium poteſt lateris ſibi inſcriptæ Pyramidis triangularis æquilateræ.

Cùm enim latus pyramidis cubo inſcriptæ bina ſubtendat cubi latera angulum rectum comprehendentia, ex prima decimiquinti, patulum erit (ex 47 primi) latus pyramidis ſubtendens, duplum poſſe lateris cubi: quare & hoc illius dimidium neceſſariò poterit. Latus itaque cubi dimidium poteſt, &c.

PROPOSITIO VII.

Latus Pyramidis duplum eſt lateris ſibi inſcripti Octaëdri.

Quoniam (ex ſecunda decimiquinti) oſtendimus octaëdri latus pyramidi inſcripti, biſarias laterum pyramidis coniungere ſectiones, Pyramidis igitur & octaëdri latera parallela ſunt, ex corol. 39 primi, & ideo (ex coroll. ſecundæ ſexti) ſimilia ſubtendunt triangula. Quare (per quartam ſexti) duplum erit pyramidis latus lateris octaëdri, nempe in ratione reliquorum laterum. Latus itaque pyramidis, &c.

PROPOSITIO VIII.

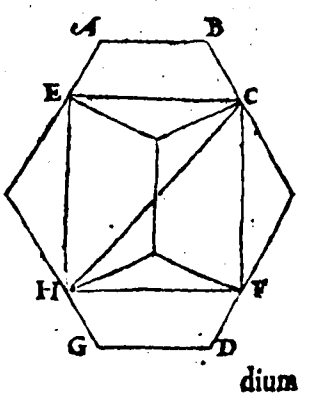
Cubi latus duplum poteſt lateris ſibi inſcripti Octaëdri.

Oſtenſum eſt (tertia decimiquinti) dimetientem octaëdri cubo inſcripti binarum oppoſitarum cubi baſium centra coniungere, & ideo iam dimetientem lateri ipſius cubi æqualem eſſe. Sed eadem eſt dimetiens quadrati ex lateribus octaëdri facti, ſcilicet ſphæræ ipſum continentis, per 14 decimitertij. Dimetiens igitur illa lateri cubi æqualis, duplum poterit lateris huius quadrati, ſiue lateris octaëdri ſibi inſcripti, per 47 primi. Cubi igitur latus duplum poteſt lateris, &c.

PROPOSITIO IX.

Dodecaëdri latus, maius ſegmentum eſt, eius quæ dimidium poteſt lateris ſibi inſcriptæ Pyramidis.

Dodecaëdri A B G D latus eſto A B, dodecaëdro verò inſcripti cubi baſis ſit E C F H, per octauam decimiquinti. Cubo verò inſcriptæ pyramidis latus eſto C H, per primam decimiquinti. Eadem igitur pyramis ipſi dodecaëdro inſcripta erit, per decimam decimiquinti: Dico latus dodecaëdri A B eſſe maius ſegmentum eius quæ dimidium poteſt lateris C H ſibi inſcriptæ pyramidis. Quoniam E C latus cubi ſectum extrema & media ratione efficit maius ſegmentum, rectam A B latus dodecaëdri, per primum coroll. 17 decimitertij (nam eadem ſphæra capiſſitur, ex prima huius,) lateris verò C H dimi

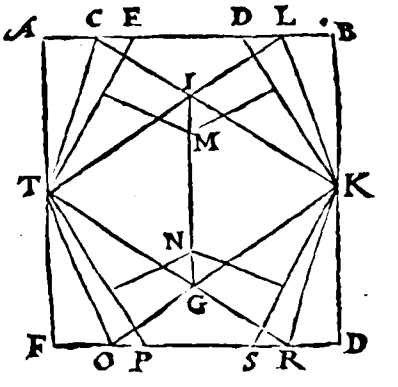


dium

dium poteſt E C latus cubi, per ſextam huius. Latus igitur dodecaëdri A B erit maius ſegmentum rectæ E C, quæ dimidium poteſt lateris C H ſibi inſcriptæ pyramidis. Dodecaëdri itaque latus maius ſegmentum, &c.

PROPOSITIO X.

Latus icoſaëdri media eſt proportionalis, inter latus cubi Icoſaëdro circunſcripti, & Dodecaëdri eidem cubo inſcripti.



Eſto cubus A B F D, cui inſcribatur icoſaëdrum C L I G O R, per 14 decimiquinti. Item dodecaëdrum E D M N P S ex 13 eiuſdem. Cùm enim icoſaëdri latus C L ſit maius ſegmentum cubi A B circunſcripti, per coroll. tertium decimæquartæ decimiquinti: Latus verò E D dodecaëdri eidem cubo inſcripti fuit minus ſegmentum lateris eiuſdem A B cubi, per ſecundum corollar. 13 decimiquinti, Sequetur A B cubi latus extrema & media ratione ſectum, efficere maius ſegmētum C L icoſaëdri ſibi inſcripti latus, minus verò ſegmentum E D latus dodecaëdri ſibi ſimiliter inſcripti. Sicut itaque tota A B cubi latus ad maius ſegmentum C L icoſaedri latus, ſic maius C L icoſaëdri ad minus E D dodecaëdri latus erit, per tertiam diffinitionem ſexti, Latus itaque icoſaëdri media eſt proportionalis inter latus cubi, &c.

PROPOSITIO XI.

Latus Pyramidis octodecuplum poteſt lateris ſibi inſcripti cubi.

Quoniam (per ea quæ oſtenſa ſunt decimaoctaua decimiquinti) latus pyramidis triplum eſt, & ideo nocuplum potuit diametri baſis ſibi inſcripti cubi, diameter autem, lateris cubi duplum (ex 47 primi) poteſt. Nocupli igitur duplum octodecuplum efficiet. Latus itaque pyramidis octodecuplum poteſt lateris ſibi inſcripti cubi.

PROPOSITIO XII.

Latus Pyramidis octodecuplum poteſt eius rectæ, cuius Dodecaëdri latus Pyramidi inſcripti, fit maius ſegmentum.

Cùm dodecaëdrum & ſibi inſcriptus cubus eidem inſideant pyramidi, per corollarium primæ huius, cubi verò inſcripti lateris octodecuplum potuit latus circunſcriptæ pyramidis ex proxima: at eiuſdem lateris cubi maius ſegmentum eſt dodecaëdri, cubum continentis latus, per corollarium decimæſeptimæ decimitertij. Latus igitur pyramidis octodecuplum poteſt eius rectæ, ſcilicet lateris cubi, cuius dodecaëdri latus pyramidi inſcripti ſit maius ſegmentum.

PROPOSITIO XIII.

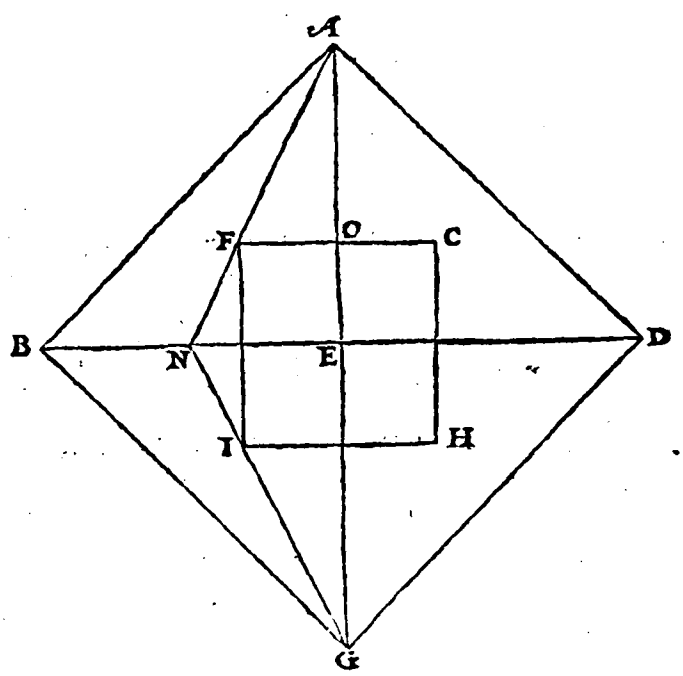
Minoris ſegmenti lateris Octaëdri duplum poteſt latus ſibi inſcripti Icoſaëdri.

Quoniam

Quoniam oſtenſum fuit (decimaſeptima decimiquinti) latus icoſaëdri octaëdro inſcripti, binas laterum octaëdri angulum rectum efficientium coniungere ſectiones extrema & media ratione genitas, hunc autem rectum angulum minoribus ipſorum octaëdri laterum ſegmentis contineri, à latere verò icoſaëdri inſcripti ſubtenſum: ſequetur itaque icoſaëdri latus ſubtendens, binis comprehendentibus æquale potentia, per quadrageſimamſeptimam primi, duplum poſſe ſingulorum comprehendentium angulum minorum lateris octaëdri ſegmentorum. Minoris itaque ſegmenti lateris octaëdri, &c.

PROPOSITIO XIIII.

Octaëdri & ſibi inſcripti cubi latera, quadruplam ſeſquialteram rationem potentia habent.



Sit octaëdrum AB GDE, ſibi verò inſcriptus cubus eſto FCHI: Dico eſſe AB latus octaëdri, lateris FI cubi quadruplum ſeſquialterum potentia. In trianguli ABE baſim BE perpendicularis agatur AN, rurſúſque alia GN: ipſæ AN GN per centra F & I tranſeunt, & dupla eſt AF ipſius FN, per corollarium duodecimæ decimitertij: dupla igitur erit AO rectæ OE, per ſecundam ſexti, cùm parallelæ ſint FONE, & proinde tripla erit AG dimetiens ipſius FI: quæ itaque AG eiuſdem FI potentia nocupla erit: ſed & lateris AB potentia dupla eſt AG, per decimamquartam ½ decimitertij: ipſa igitur AB nocupli dimidium ferens, quadruplum ſequialterum poteſt rectæ FI. Octaëdri itaque & ſibi inſcripti cubi latera quadruplam ſeſquialteram rationem habent potentia.

PROPOSITIO XV.

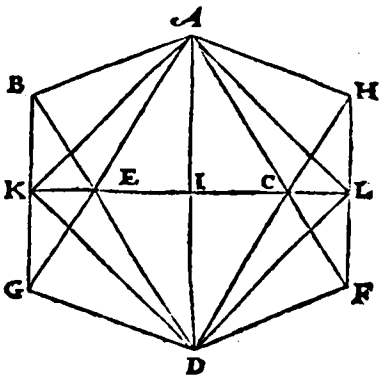
Octaëdri latus quadruplum ſeſquialterum poteſt rectæ, cuius Dodecaëdri ipſi Octaëdro inſcripti latus erit maius ſegmentum.

Quoniam ex decimaquarta huius patuit latus octaëdri, lateris ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum fuiſſe potentia: atqui latus cubi ſectum, efficit maius ſegmentum ſibi circunſcripti dodecaëdri latus, per corollarium tertium decimæ tertiæ decimiquinti: ſequetur ideo octaëdri latus quadruplum ſeſquialterum eſſe, eius rectæ (ſcilicet lateris cubi) cuius maius ſegmentum eſt latus dodecaëdri ipſi cubo inſcripti: Dodecaëdrum autem & cubus ſibi inuicem inſcripta eidem octaëdro in

ëdro insident, per corollarium primæ huius. Octaëdri igitur latus quadruplum sesquialterum potest.

PROPOSITIO XVI.

Icosaëdri latus est maius segmentum, eius quæ duplum potest lateris Octaëdri ipsi Icosaëdro inscripti.



Sit icosaëdrum ABGDFHEC, cuius latus esto BG vel EC, sibi verò inscriptũ octaëdrũ esto AKDL, latúsque eius AL: Dico latus EC esse maius segmentum eius rectæ quæ duplum potest lateris AL, quoniam figurarum inscriptarum & circunscriptarum idem est centrum, per corollarium vigesimęprimæ decimiquinti: sit illud I, per quod centrum rectæ in bifarias oppositorum laterum sectiones ductæ, scilicet AID KIL sese bifariam & ad rectos in I secant, per corollarium decimæquartæ decimiquinti: quia verò bifarias sectiones rectarum oppositarum BG & HF iungunt, ad rectos eas secant, & igitur parallelæ sunt BG HF, per quartum coroll. decimæquartæ decimiquinti, cõiuncta igitur BH ipsi KL parallela & æqualis erit, per trigesimamtertiam primi: sed BH bina pentagoni latera ex lateribus icosaëdri compositi subtendit, scilicet BA AH, ipsa itaque BH secta maius segmentum efficit pentagoni latus, per octauam decimitertij, quod idem est icosaëdri scilicet EC, ipsi autem BH æqualis KL duplum potest lateris AL octaëdri: nam rectus est quadrati AKDL angulus KAL, per quadragesimamseptimam primi. Latus igitur EC icosaëdri, maius segmentum est eius BH aut KL, quæ quidem duplum potest ipsius AL, lateris octaëdri ipsi icosaëdro inscripti. Icosaëdri itaque latus est maius segmentum eius quæ duplum potest lateris, &c.

PROPOSITIO XVII.

Cubi latus ad sibi inscripti Dodecaëdri latus, rationem habet extremæ & mediæ rationis duplam.

Quoniam patuit secundo corollario decimætertiæ decimiquinti, cubi latus extrema & media ratione sectum, efficere minus segmentum dodecaëdri sibi inscripti latus: Sed tota ad minus segmentum duplam rationem habet quàm ad maius, per decimam diffinitionem quinti, quum tota maius & minùs segmenta sint continuæ proportionales rectæ, per tertiam diffinitionem sexti: Tota igitur (scilicet cubi latus) ad sibi inscripti dodecaëdri latus, scilicet minus eius segmentum, rationem habet duplam extremæ & mediæ rationis, scilicet eius quam habet tota ad maius segmentum, quæ semper est eadem, ex secunda decimiquarti.

PROPOSITIO XVIII.

Dodecaëdri ad sibi inscripti cubi latus, rationem habet mediæ, ac extremæ conuersam.

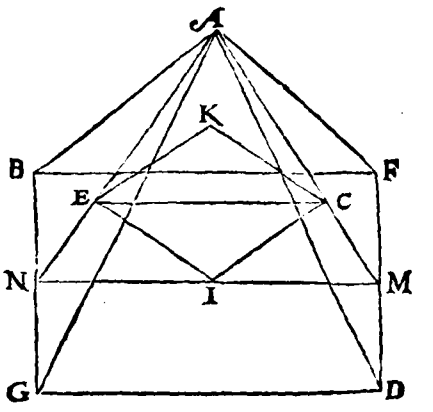
Ostensum est tertio corollario decimætertiæ decimiquinti, circunscripti cubo dodecaëdri latus eiusdem cubi maius esse segmentum: totum igitur inscripti cubi

latus

latus ad maius ſegmentum ſcilicet circunſcripti dodecaëdri latus, rationem habet mediam & extremam. Conuertendo itaque maius ſegmentum (hoc eſt dodecaëdri latus) ad totam (nempe inſcripti cubi latus) extremæ & mediæ conuerſam habet, per decimamtertiam diffinitionem quinti.

PROPOSITIO XIX.

Latus Octaëdri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ Pyramidis.



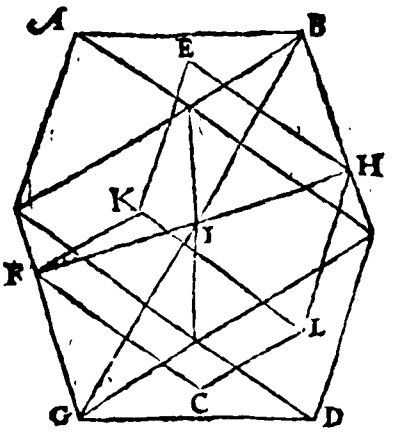
Quoniam (per corollarium decimæquartæ decimitertij) octaëdrum ſecatur in binas quadrilateras pyramides, eſto altera earũ A B G D F, circulorum autem quatuor octaëdri baſes obeuntium centra ſint K E I C, coniunctis K E E I I C C K K E C rectis: quadratũ itaque erit K E I C, & baſis cubi ipſi octaëdro inſcripti, per quartam decimiquinti. Cùm enim cubi & ſibi inſcriptæ pyramidis anguli in centris baſiũ octaëdri cubo circunſcripti habitent, per ſextam decimiquinti, & pyramidis latus oppoſitos baſis cubi angulos coniungat, per primam decimiquinti, manifeſtum erit rectam E C latus eſſe pyramidis octaëdro A B G D F inſcriptæ: Dico igitur latus G D octaëdri ſeſquialterum eſſe ipſius E C, lateris pyramidis ſibi inſcriptæ. A ſigno A perpẽdiculares in baſes B G & F D demittãtur A N A M: ipſæ (ex corollario duodecimæ decimitertij) per centra E & C ducentur: Coniungantur autem N M: cùm autem quadratum ſit B G D F per decimamquartam decimitertij, parallelæ erunt N G & M D, & æquales: nam ſectæ ſunt B G & F D à perpendicularibus in N M bifariam, per tertiam tertij: parallelæ igitur erunt & æquales N M G D, per decimamtertiam primi: quia verò ſectæ ſimiliter ſunt rectæ A N A M in E & C, ſimilium & æqualium triãgulorum perpendiculares, parallelæ erunt (per ſecundam ſexti) E C N M rectæ, & proinde (ex corollario eiuſdem) ſimilia erunt triangula A E C A N M: quare erit A N ad A E ſicut N M ad E C, per quartã ſexti. Eſt autem A N ipſius A E ſeſquialtera, cùm A E dupla ſit ipſius E N, per corollarium duodecimæ decimitertij: recta igitur N M, ſiue G D ſibi æqualis, ſeſquialtera erit rectæ E C. Latus itaque G D octaëdri, lateris E C ſibi inſcriptæ pyramidis, ſeſquialterum erit.

PROPOSITIO XX.

Si ab Icoſaëdri dimetientis potentia, tripla auferatur lateris ſibi inſcripti Cubi potentia, reliqua ſeſquitertia erit potentiæ lateris ipſius Icoſaëdri.

Proponatur icoſaëdrum A B G D, ſibi verò inſcripti cubi binæ baſes coniunctæ ſint E H K L F C, dimetiens cubi ſit F H, latus verò E H, dimetiens autem icoſaëdri ſit B G, latus verò A B: Dico ſi à potentia dimetientis G B auferatur tripla ipſius E H lateris cubi potentia, reliquam ſeſquitertiam eſſe potentiæ lateris A B icoſaëdri, cùm centra inſcriptarum & circũſcriptarum figurarum, idem ſignum poſſideant, per corollarium vigeſimæ primæ decimiquinti, dimetientes B G & F H in eo ſeſe bifariam

bifariam ſecabunt: nam vertices æqualium & ſimilium pyramidum in eo conuenire docuimus, per idem corollarium: ſit illud ſignum I centrũ: anguli igitur cubi qui ad F & H, centra baſium icoſaëdri poſſident, per vndecimã decimiquinti: recta itaque F H vtriſque icoſaëdri baſibus perpendicularis erit, per corollariũ lemmatis decimæſextæ duodecimi: recta igitur F B binas I H H B poteſt, per quadrageſimamſeptimam primi, eſt autem H B quæ ex centro circuli baſim icoſaëdri ſuſcipientis, nempe angulus B in circunferentia locatur, H verò centrum eſt: tota itaque B G totas F H & dimetientẽ circuli (ipſius B H duplam) poteſt, per decimamquintam quinti, ſed dupla rectæ H B dimetiens, ſeſquitertium poteſt lateris trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti, per corollarium duodecimæ decimitertij, eſt enim ad latus, vt latus ad perpendicularem trianguli, per corollarium octauæ ſexti. Dimetiens verò cubi F H, triplum poteſt lateris E H eiuſdem cubi, per decimamquintam decimitertij: ſi itaque à potentia dimetientis B G auferatur tripla potentia lateris E H inſcripti cubi, hoc eſt potentia rectæ F H, reliqua (ſcilicet potentia dimetientis *circuli duplæ ipſius* H B) ſeſquitertia erit lateris trianguli ipſi circulo *inſcripti*, quod idem eſt icoſaëdri latus A B. Si igitur ab icoſaëdri dimetientis potentia, &c.



COROLLARIVM.

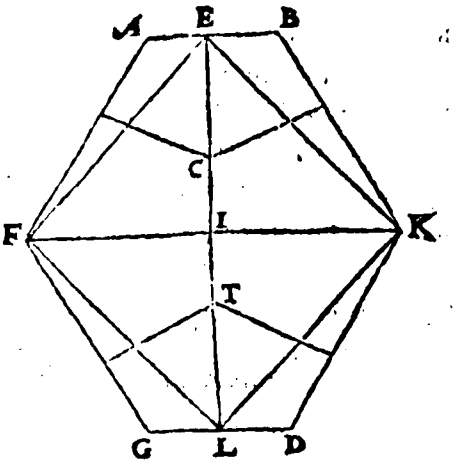
Dimetiens Icoſaëdri binas poteſt dimetientem inſcripti cubi quæ baſium oppoſitarum centra iungit, & dimetientem circuli baſim icoſaëdri continentis.

Patuit enim dimetientem B G poſſe rectam F H centra iungentem, & duplam rectæ B H, hoc eſt dimetientem circuli baſim circa centrum H continentis.

PROPOSITIO XXI.

Dodecaëdri latus minus ſegmentum eſt, eius quæ duplum poteſt lateris Octaëdri, eidem Dodecaëdro inſcripti.

Exponatur dodecaëdrum A B G D C T, cuius vnum latus ſit A B. Ipſi dodecaëdro inſcriptum octaëdrum eſto E F L K I, cuius latus ſit E F: Dico A B latus dodecaëdri eſſe minus ſegmentum cuiuſdã rectæ (extrema & media ratione ſectę) quæ duplum poteſt lateris E F, octaëdri dodecaëdro inſcripti. Iungantur octaëdri dimetientes E L F K, ipſæ bifarias ſectiones oppoſitorum dodecaëdri laterum A B & G D coniungunt (per nonam decimiquinti, & tertium corollarium decimæſeptimæ decimitertij) ſingulæq; earum extrema & media ratione ſectæ, minus efficiunt ſegmentum latus dodecaëdri, per quartum corollarium eiuſdem. Rectæ igitur F K minus ſegmentũ eſt A B latus, ſed recta F K binas poteſt E F E K æquales, per 47 primi: nam rectus eſt F E K angulus quadrati F E K L octaëdri. Recta itaque F K duplum poteſt rectæ B F: erit ideo A B latus



minus ſegmentum eius F K, quæ duplum poteſt ipſius E F, lateris octaëdri. Dodecaëdri igitur latus, minus ſegmentum eſt eius quæ, &c.

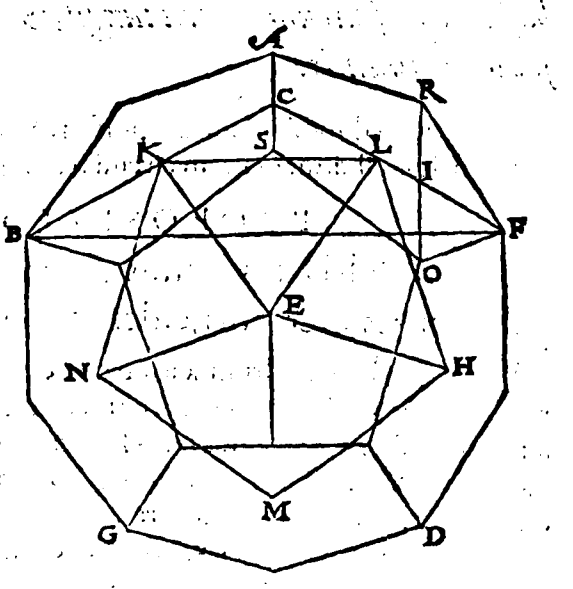
PROPOSITIO XXII.

Dimetiens Icoſaëdri poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Icoſaëdro inſcriptæ Pyramidis ſeſquialterum.

Cùm enim oſtenſum ſit, à dimetiente icoſaëdri ablato triplo lateris cubi ſibi inſcripti, relinqui ſeſquitertium lateris ipſius icoſaëdri potentia, per vigeſimam huius. Sed tripla lateris cubi potentia eſt dimetiens ipſius cubi, per decimamquintam decimitertij, cubus autem & ſibi inſcripta pyramis eadem ſphæra concipiuntur, per primam huius, eodémque icoſaëdro, per corollarium eiuſdem. Idem itaque diameter cubi ſiue ſphæræ cubum & pyramidem continentis, ſeſquialterum poterit lateris pyramidis, per decimamtertiam decimitertij. Sequetur itaque à dimetiente Icoſaëdri ablata tripla potentia lateris cubi, ſiue ſeſquialtera lateris pyramidis, quæ ſunt eiuſdem dimetiẽtis potentiæ, relinqui ſeſquitertium lateris ipſius Icoſaëdri. Dimetiens igitur icoſaëdri poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, & lateris icoſaëdro inſcriptæ pyramidis ſeſquialterum.

PROPOSITIO XXIII.

Dodecaëdri latus ad Icoſaëdri ſibi inſcripti latus, ſe habet vt minus ſegmentum perpendicularis pentagoni, ad eam quæ ex centro in latus eiuſdem pentagoni.



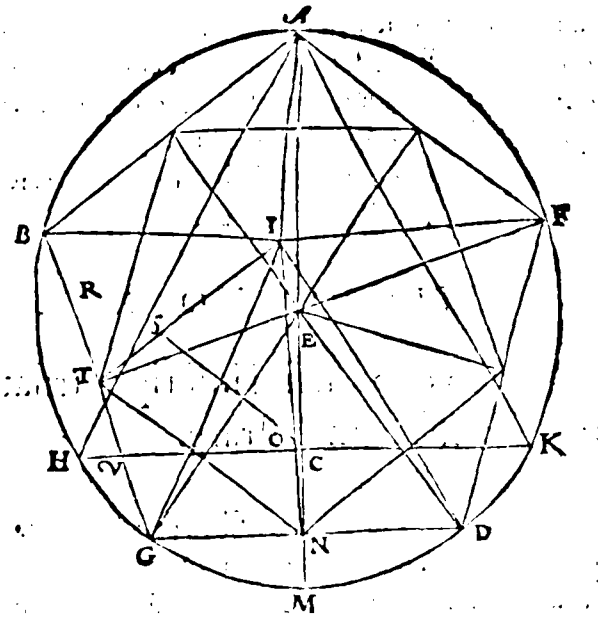
Proponatur dodecaëdrũ ABGDFSO, cuius latus ſit A S vel S O, ſibi verò inſcriptum icoſaëdrum eſto K L H M N E, cuius latus ſit K L. A binis autem pẽtagonorum B A S F A S dodecaëdri angulis, in cõmunem baſim A S perpendiculares mittantur B C F C, ipſæ per centra pẽtagonorũ K & L trãſeunt, per corollariũ decimæ decimitertij. Iungantur B F R O. Quoniam R O ſubtẽdit angulum pẽtagoni dodecaëdri O F R, ipſa ſecat rectã F C extrema & media ratione per tertiam huius: ſecet in I: quia verò K L eſt latus icoſaëdri dodecaëdro inſcripti, ipſa centra K L coniungit, nam anguli icoſaëdri in centris baſium dodecaëdri morantur, per ſeptimam decimiquinti: Dico dodecaëdri latus S O ſic eſſe ad icoſaëdri latus K L, vt minus ſegmentum I F rectæ C F perpendicularis, ad L C quæ ex centro L in latus A S pẽtagoni. Cùm triãguli B C F bina latera C B C F ſimiliter ſecta ſint in L & K centris, proportionaliter ſectæ parallelas efficient rectas B F K L, per ſecundam ſexti: æquiangula igitur erunt triãgula B C F & K C L, per corollariũ eiuſdẽ: ſicut itaque C L ad K L, ſic erit C F ad B F, per 4 ſexti. Sed C F efficit minus ſegmentum I F per tertiam huius, & B F efficit minus S O, latus inquam dodecaëdri, per corollarium ſecũdum decimetertiæ decimiquinti. Nam B F iungens angulos B & F baſium

dodeca

dodecaëdri, æquatur lateri cubi dodecaëdrum capientis, ex decimatertia decimiquinti. Sicut itaque tota C F ad totam B F, sic erit minus segmentum I F ad minus S O (nempe similiter sectarum, per secundam decimiquarti): sed sicut C F ad B F, sic fuit C L ad K L. Sicut itaque I F ad S O, sic erit C L ad K L, vicissim igitur (per decimã sextam quinti) vt I F minus segmentum perpendicularis pentagoni F A S ad L C eam quæ ex centro pentagoni in basim, sic erit S O latus dodecaëdri ad K L latus sibi inscripti icosaëdri. Dodecaëdri igitur latus ad icosaëdri sibi inscripti latus sic habet, vt minus segmentum, &c.

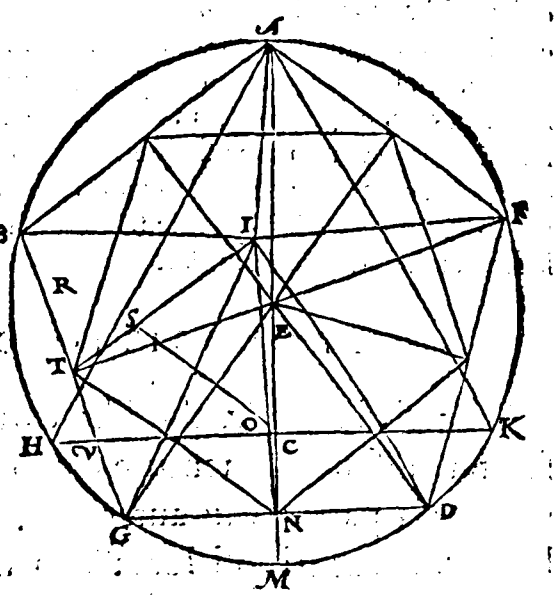
PROPOSITIO XXIIII.

Si lateris icosaëdri dimidia extrema & media ratione secta fuerit, minúsque segmentum eius à toto latere tollatur, Reliquæ verò tertia pars rursus auferatur, quæ supereſt, æqualis erit lateri Dodecaëdri ipsi Icosaëdro inscripti.



Sit quinquãgulũ A B G D F quinque icosaëdri latera comprehendens, per 16 decimitertij, circulo cuius centrum sit E contentum: super huius autem quinquanguli lateribus excitentur triangula angulum solidum icosaëdri qui ad I componentia, per 15 decimitertij. In circulo autem A B D triangulum æquilaterum inscribatur A H K. A centro E in bina H K & G D latera trianguli ac pentagoni perpendicularis mittatur E C N M recta, ductis E G E D I G I D rectis. Secetur bifariam B G in T coniunctis I N I T T N E T. Quoniam in rectis I T I N sunt centra circulorum triangula æquilatera I B G I G D continentium, per coroll. primæ tertij, sint hæc S & O, coniuncta S O recta: lateris porrò icosaëdri B G, dimidia T B extrema & media ratione secetur in R, per trigesimã sexti, minúsque eius segmentum esto R B. Cùm enim triangulorum I B G I G D centra coniungat recta S O Ipsa (per quintam decimiquinti) erit latus dodecaëdri icosaëdro cuius latus est B G inscripti. A B G igitur latere tollatur B R, minus segmentum dimidiæ. A reliquo verò G R tertia pars auferatur (per nonam sexti) G V: Dico reliquam R V æqualem esse ipsi S O lateri inscripti dodecaëdri. Cùm autem perpendicularis E N secetur in C extrema & media ratione, per coroll. primæ decimiquarti. Maiúsque eius segmentum sit E C: Ipsi verò E C sit æqualis C M, per coroll. 12 decimitertij: Erit E C ad C N vt C M ad eandem C N, per septimam quinti. Sed sicut E C ad C N sic tota E N ad maius segmentum E C, per tertiam diffinit. sexti. Sicut itaque (per vndecimam quinti) tota E N ad maius segmentum E C, sic C M ad C N. Recta ideo C M extrema & media ratione secatur in N, nempe similiter ipsi E N, per secundam decimiquarti. Recta igitur E M excedit rectam E N minori segmento dimidiæ sui ipsius, quod est M N. Cùm insuper E G D sit triangulum pentagoni æquilateri & æquianguli A B G D F, & E T N sit similiter triangulum similis pentagoni ipsi A B G D F inscripti. Erit (ex vigesima sexti) E T N ipsi E G D simile. Sicut itaque

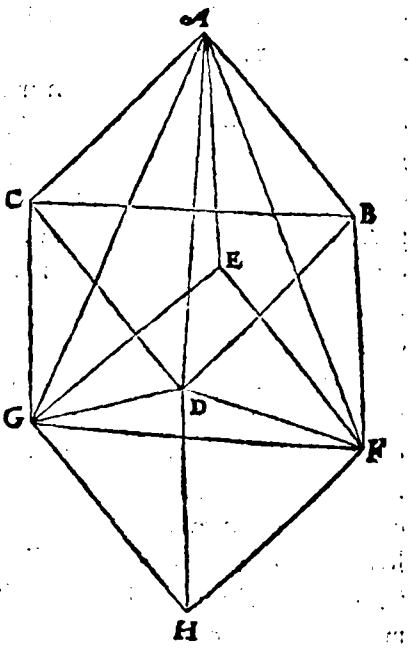
EG ad EN ſic erit (per quartam ſexti) GD ad NT. Recta igitur GD (vel BG ſibi æqualis) excedit rectam NT minori ſegmento dimidiæ ſui ipſius BG: nam EG exceſſit ſimiliter ipſam EN. Eſt autem minus illud ſegmentum BR: Reliqua igitur RG rectæ NT æqualis erit. Quoniam triangulum æquilaterum eſt IBG. Perpendicularis ST dimidia eſt eius quæ à centro SI, per coroll. duodecimæ decimitertij. Recta itaque IT excedit rectam IS tertia ſui ipſius parte. Quia verò SO ſectiones coniungens, parallela eſt ipſi TN, per ſecundam ſexti: nam ſimiliter ſectæ ſunt IT IN per S & O: Similia erunt ITN ISO triangula, per coroll. ſecundæ ſexti. Sicut itaque IT ad IS, ſic (per quartam ſexti) TN ad SO. Excedit autem IT rectam IS tertia parte: Excedet igitur TN rectam SO tertia parte. Sed ipſi TN æqualis fuit RG: Recta igitur RG excedet rectam SO tertia ſui parte, quæ quidem fuit GV: Quare reliqua RV rectæ SO erit æqualis lateri quidem dodecaëdri, icoſaëdro cuius latus fuit BG inſcripti. Si itaque lateris icoſaëdri dimidia extrema & media ratione ſecta fuerit, minúſque, &c.



PROPOSITIO XXV. PROBLEMA I.

Datum cubum ſibi inſcriptæ trilateræ æquilaterę Pyramidis, triplum eſſe demonſtrare.

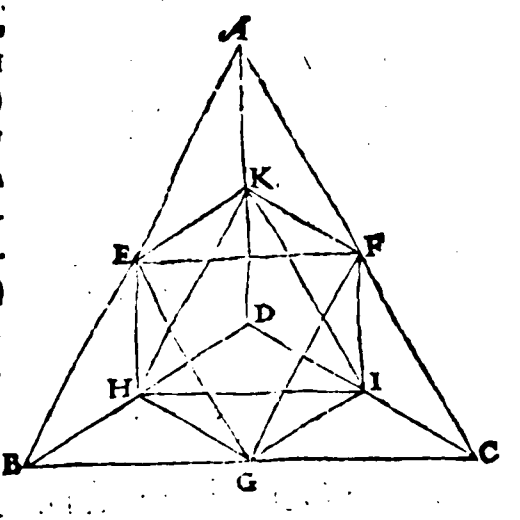
Datus cubus ſit ABCH, ſibi verò inſcripta pyramis eſto AGDF: Dico cubum ABCH pyramidis AGDF triplum eſſe. Quoniã baſis AFD communis eſt pyramidibus AFDB & AFDG, pyramis AFDB extra pyramidem AFDG erit. Similiter & reliquæ inſcriptæ pyramidis baſes communes ſunt reliquis pyramidibus extrinſecus poſitis, quæ ſunt AGDC ſuper baſi ADG, & AEGF ſuper baſi AGF. Super baſi verò GDF pyramis GDFH. Quæ quidem pyramides extrinſecus ſumptæ ſunt quatuor, æquales adinuicem & ſimiles, per octauam diffinit. vndecimi. Nam ſingulæ tribus hemiquadris cubi vnáque pyramidis inſcriptæ baſi concluduntur. Quælibet itaque earum ſuper dimidia cubi baſi ac ipſius cubi altitudine continetur, vt pyramis AEGF baſim habet dimidiam quadrati EH, eam ſcilicet EGF, cubi verò altitudinem AE. Quæ ideo ſexta erit ipſius cubi pars. Nam ſi ſecetur cubus in bina priſmata plano CBFG, priſma ACBGEF triplum erit pyramidis AEGF, ſuper eadẽ eius baſi EGF & vertice EA, per coroll. primum ſeptimæ duode



duodecimi. Totius igitur cubi ipſa A E G F pyramis exterior ſexta pars erit. Et proinde ipſa eadem cum tribus reliquis A F D B A G D C, & G D F H totius cubi duo tertia complebit. Quare reliqua A G D F inſcripta reliquum cubi tertium comprehendet, & proinde cubus ipſius triplum conuerſim continebit. Datum itaque cubum ſibi inſcriptæ trilaterę æquilaterę pyramidis, triplum eſſe demonſtrauimus.

PROPOSITIO XXVI. PROBL. 2.

Pyramidem trilateram æquilateram, ſibi inſcripti octaëdri duplam oſtendere.



Proponatur trilatera pyramis A B C D, cuius ſex latera bifariã ſecentur in E H G I F K, deſcripto (ex ſecunda decimiquinti) in ipſa octaëdro. Pyramides igitur A E K F B E G H C G I F & D H K I extra inſcriptum octaëdrum cadunt, per eandem ſecundam decimiquinti. Sed pyramides extrinſecæ (ſcilicet A E K F, & tres reliquæ) ſunt toti ſimiles, per ſeptimam diffinit. vndecimi. Nam ſecantur earum baſes in triãgula ſimilia, per parallelas, ex coroll. ſecundæ ſexti. Tota itaque ad ſingulas earum triplam habet laterum rationem, per octauam duodecimi. Dupla autem fuit laterum A B ad A E ratio, per conſtructionem. Pyramis itaque A B C D pyramidis A E F K, ac ſingularum ipſi A E F K æqualium, octupla erit. Dupla nanque bis in ſe ducta octuplam reſtituit. Sequetur igitur quatuor pyramides A E F K B E G H C G F I, & D K H I ſimul ſumptas, dimidium totius A B C D pyramidis efficere. Reliquum igitur, ſcilicet octaëdrum E F I H K G, dimidium totidem reſtituet. Pyramis ideo ipſius octaëdri duplum referet. Pyramidem igitur trilateram æquilateram ſibi inſcripti octaëdri duplam oſtendimus.

COROLLARIVM.

Octaëdrum eſt pyramidis quæ ſuper baſi & vertice continetur, quadruplum.

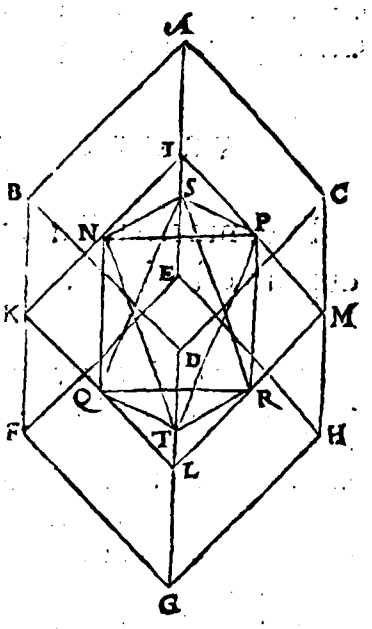
Nam oſtendimus quatuor pyramidum ſibi æqualium, ſingulas ſuper eius baſi ac vertice, ſcilicet dimidio pyramidis, contineri.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA. 3.

Cubum ſibi inſcripti octaëdri, ſextuplum eſſe propalare.

Exponatur cubus A B C D E F G H. Cuius quatuor ſtantes A E B F C H & D G bifariam ſecentur in I K M L: per ea vetò ſigna ducatur planum K L M I, quod quadratum erit & parallelum quadratis B C F H, per decimamquintam vndecimi.

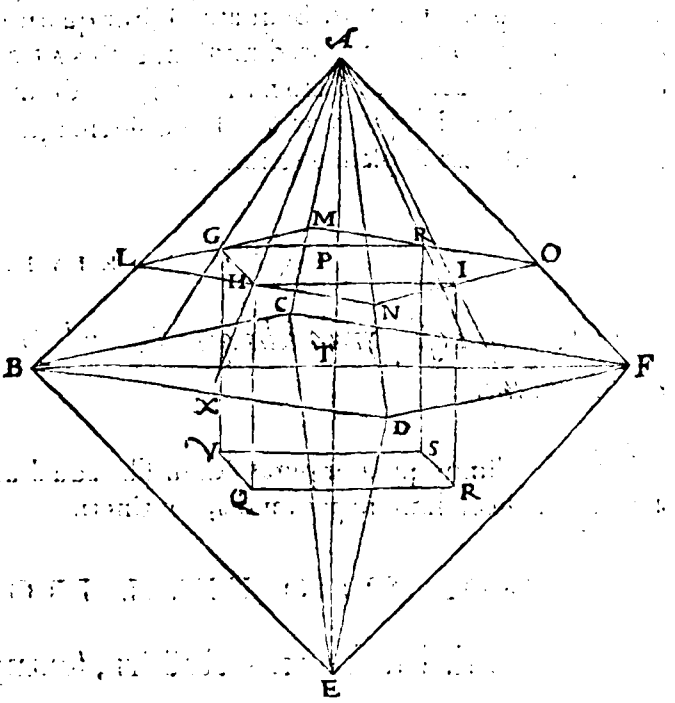
In ipſo igitur erit baſis communis binis pyramidibus octaëdri in ipſo cubo inſcripti, per oſtenſa tertia decimiquinti. Sit igitur ipſa baſis quadratum N P R Q centra baſium cubi coniungens, ſuper ipſa verò (ex eadem tertia decimiquinti) conſtruantur binæ octaëdri pyramides N P Q R S & N P Q R T. Quoniã binæ illæ pyramides totius cubi altitudini æquantur ſub imitate, ſingulæ dimidiã habent cubi altitudinem, ſcilicet dimidium cubi latus K B. Cùm autem quadratum K L M I quadrati N Q R P ſit duplum, per 47 primi, reliqua cubi quadrata ipſius N Q R P dupla erunt ſingula. Quia verò cubus, vt patuit vltima decimiquinti, reſoluitur in ſex pyramides, quarum baſes ſunt baſes cubi, vertices verò, quæ ex centro in baſes, dimidio cubi lateri æquales, ſequetur cubi ſingulas ſex pyramides, ſuper duplici baſi, eodẽ autem vertice, ipſis octaëdri pyramidibus, duplas eſſe pyramidum octaëdri, per ſextam duodecimi. Cùm itaque ſingulæ cubi pyramides binis octaëdri pyramidibus ſint æquales, ſex cubi pyramides totius octaëdri ſextuplum proferent. Cubum itaque ſibi inſcripti octaëdri ſextuplum eſſe propalatum eſt.



PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA 4.

Datum Octaëdrum, ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum patefacere.

Proponatur octaëdrum A B C D F E, Ipſi verò inſcriptus cub⁹ eſto G H I K V Q R S: Dico octaëdrum inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterũ fore. Cùm à centro octaëdri, ſiue ſphæræ illud cõtinẽtis in ſuarum baſiũ cẽtra ductæ, æquales oſtẽſæ ſint, per 21 decimiquinti. Cubi verò anguli in harũ baſium centris degant, per quartã decimiquinti. Sequetur, ipſas eaſdẽ rectas ab eodẽ cubi & octaëdri cẽtro ortas eſſe, cùm idem ſit cõmũ cẽtrum, per coroll. 21 decimiquinti. Sit igitur illud cẽtrum T. Baſis itaque B D F C ſecans octaëdrum in binas æquas & quadrilateras pyramides, per coroll. 14 decimitertij, ſecabit cubum bifariam, per coroll. 39 vndecimi. Nam ea per centrum T tranſit, per demonſtrata 14 decimitertij. Cùm autem baſis cubi in G H I K quatuor centris baſium



basium pyramidis A B D F C consistat, per ea signa extensum planum L N O M parallelum erit plano B D F C, per ostensa quarta decimiquinti, secabitque pyramidem in signis L N O M, & parallelæ erunt L N B D, & N O D F, necnon O M F C, & L M B C, & quadrato L N O M inscriptum erit quadratum cubi G H I K, per eandem. Duplum igitur erit L N O M ipsius G H I K, per 47 primi. Demittatur à solido angulo A perpendicularis in planum B D F C, quæ cadat in T, sitque A T, secta plano L N O M in P. Ipsa recta similiter erit ad L N O M planum, per coroll. 14 vndecimi. Demittatur rursus ab angulo B A D trianguli A D B, per centrum trianguli scilicet H in basim, recta A H X. Sesquialtera igitur erit A X ipsius A H, per coroll. 12 decimitertij: quare dupla fiet A H ipsius H X. Similiter igitur sectæ erunt reliquæ A B A D A F A C, per 17 vndecimi: atque perpendicularis A P T. Dupla igitur erit A P rectæ P T. Et proinde ipsius cubi erit altitudo A P, cùm dimidia fuerit P T. Quia verò super G H I K cubi basi, & altitudine A P, eiusdem cubi constituitur pyramis A G H I K, ipsa cubi tertia pars est, per coroll. 7 duodecimi. Sed pyramidis A G H I K dupla est pyramis A L N O M, super dupla basi, per sextam duodecimi. Pyramis igitur A L N O M duo tertia cubi complet. Cùm autem similes sint pyramides A L N O M & A B D F C, per septimam diffinitionem vndecimi, ipsæ triplam habent quam latera A H ad A X, vel A L ad A B rationem, per coroll. octauæ duodecimi. Sed A B ipsius A L sesquialterum fuit latus, sesquialtera igitur quantitas rationis ter sumpta (per 5 diffinitionem sexti) triplam tripartientem octauas componet, hæc est, $3\frac{1}{7}$ quantitas rationis. Nam $1\frac{1}{2}$ in se efficit $2\frac{1}{4}$, quod rursus, per $1\frac{1}{2}$, efficit 3 & $\frac{3}{8}$. Erit igitur pyramis A B C D F ad pyramidem A L N O M, sicut 27 ad 8, in ea scilicet ratione $3\frac{3}{7}$. Sed qualium A L N O M pyramis fuit 8, cubus fuit 12, sesquialterum nempe pyramidis. Qualium igitur cubus fuit 12, eorum totum octaëdrum (duplum scilicet pyramidis A B D F C) erit 54. Quæ quidem 54 ad 12 rationem habent quadruplam sesquialteram. Totum itaque octaëdrum inscripti cubi quadruplum sesquialterum erit. Datum igitur octaëdrũ, sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterũ patefecimus.

COROLLARIVM.

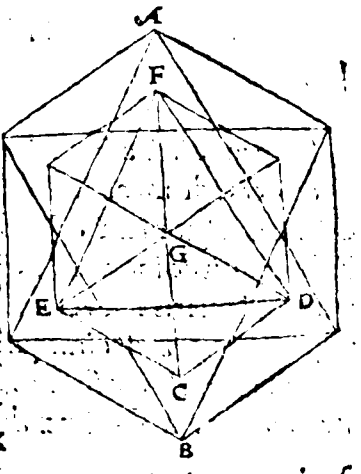
Octaëdrum & sibi inscriptus Cubus rationem quam latera potentia habent.

Nam 14 huius latus octaëdri quadruplum sesquialterum potuit lateris sibi inscripti cubi.

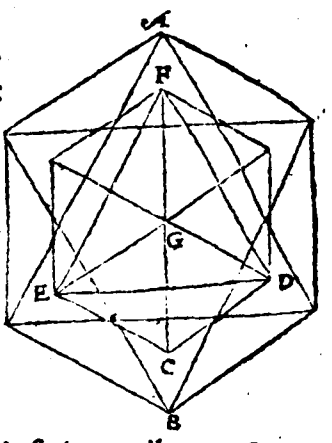
PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA 5.

Propositum Octaëdrum, sibi inscriptæ trilateræ æquilateræ Pyramidis, tredecuplum sesquialterum ostendere.

Propositum octaëdrũ esto A B, cui inscribatur cubus F C E D, per quartam decimiquinti: ipsi verò cubo pyramis F E G D, per primam decimiquinti, inscribatur: quoniam anguli pyramidis (ex eadem) in cubi angulis morantur, cubi verò anguli in centris basium octaëdri consistunt F E C D G, per quartã decimiquinti, anguli itaque pyramidis in centris basium octaëdri F E G D constituentur. Pyramis igitur F E D G octaëdro (per sextam decimi quinti) inscripta erit: Cùm autem octaëdrum A B sibi inscripti cubi F C E D (per præfatam) quadruplum sesquialterum ostensum fuerit, cubus verò C D E F pyramidis F E D G sibi inscriptæ (ex



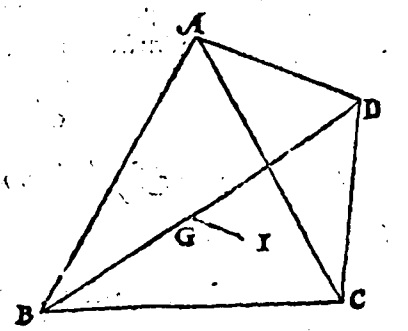
vigeſimaquinta huius) triplus eſſe demonſtretur. Tribus igitur magnitudinibus expoſitis, octaëdro ſcilicet,cubo,& pyramide extremorum (octaëdri ſcilicet ad pyramidem) rationem, ex rationibus medijs (ſcilicet octaëdri ad cubum, & cubi ad pyramidem) eliciamus,iuxta ea quæ decimam quinti diffinitionẽ exponentes docuimus. Tum igitur multiplicãdæ erunt rationum (octaëdri ad cubum quæ fuit $4\frac{1}{7}$, & cubi ad pyramidem quæ fuit 3) quantitates, ex quinta diffinitione ſexti, vt oriatur $13\frac{1}{7}$ octaëdri ad ſibi inſcriptam pyramidem ratio:nam $4\frac{1}{7}$ per 3 ducta, $13\frac{1}{7}$ reſtituent: pyramidis igitur inſcriptæ octaëdrum tredecuplum ſeſquialterum erit. Propoſitum itaque octaëdrum ſibi inſcriptæ trilateræ, &c.



PROPOSITIO XXX. PROBLEMA 6.

Trilateram æquilateram Pyramidem, ſibi inſcripti cubi nocuplam eſſe demonſtrare.

Eſto pyramis A B C D, cuius duæ baſes ſint A B C D B C, quarum centra G & I iungat recta G I. Hæc erit baſis cubi pyramidi inſcripti dimetiens, per 18. decimiquinti : latus verò pyramidis A D erit dimetiens cubi pyramidi circumſcripti, per 1 decimiquinti. Atqui idem pyramidis latus ſiue cubi circumſcripti dimetiens dimetientis inſcripti cubi triplum fuit, ex corollario 18 decimiquinti: quæ ratio eſt eadem quæ laterum cuborum:(nam dimetientes ſunt laterum æquemultiplices) per 33 vndecimi. Tripla itaque ter ſumpta laterum ratio,vicecuplam ſeptuplam producet, quæ eſt 27 ad 1: nam quatuor terminis 27,9,3,1, in tripla ratione conſtitutis, erit (per decimam diffinitionem quinti) tripla ratio primi 27 ad quartum 1,ſuæ rationis primi 27 ad ſecũdum 9, quæ quidem eſt tripla laterum ratio, ſimilibus conueniẽs ſolidis. Qualium itaque circumſcriptus cubus erit 27, eorum inſcriptus erit vnius: ſed qualium circumſcriptus cubus fuit 27, eorum ſibi inſcripta pyramis fuit 9, per vigeſimamquintã huius : qualium igitur pyramis A B C D erit 9, eorum pyramidi inſcriptus cubus erit vnius. Trilaterã igitur æquilateram pyramidem,ſibi inſcripti cubi nocuplam eſſe demonſtrauimus.



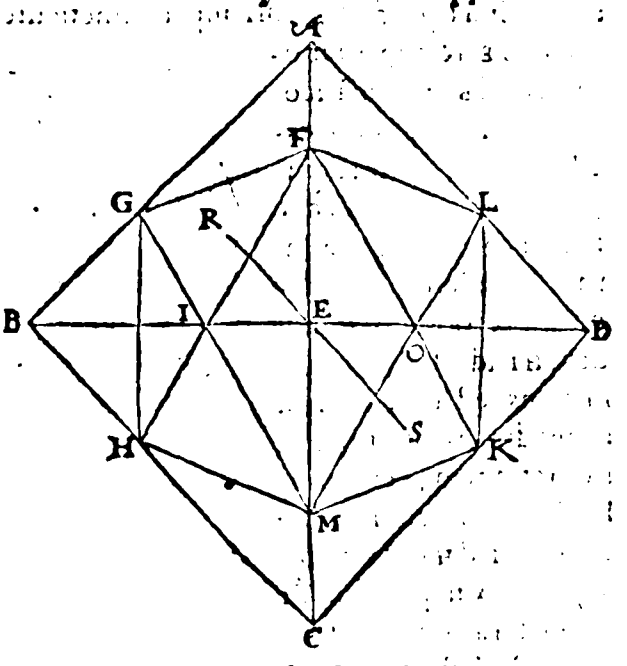
PROPOSITIO XXXI.

Octaëdrum ad ſibi inſcriptum Icoſaëdrũ eam ſeruat quam binę Octaëdri baſes ad quinque Icoſaëdri baſes rationem.

Sit propoſitũ octaëdrũ A B C D, ſibi verò inſcriptũ icoſaëdrũ eſto F G H M K L I O: Dico octaëdrum ad icoſaëdrum eſſe, ſicut duæ octaëdri baſes ad quinque icoſaëdri baſes. Quoniam octaëdri ſolidum conſtat octo pyramidibus, ſuper octaëdri baſibus altitudine verò recta à centro in baſim perpendiculari conſtitutis, ſit ea perpendicularis E R vel E S, demiſſa ab E centro ſolidorum eodem (per corollar. vigeſimæprimæ decimiquinti) in centra baſium R & S. Tres igitur pyramides, cùm ſint æquales & ſimiles,æquales erunt priſmati ſuper eadem baſi, & altitudine per corollarium ſeptimæ duodecimi. Sed huius priſmatis duplum eſt quod ſuper

eadem

eadem basi dupla verò altitudine, scilicet tota R S, per corollarium vigesimæquintæ vndecimi: nam æquum est binis æquis & similibus ex quibus componitur. Prisma itaque super basi octaëdri, altitudine verò R S æquum erit sex pyramidibus super basibus sex octaëdri vertice verò E R constitutis. Supersunt autē binæ pyramides, cùm sint octo octaëdri bases, quæ igitur æquales erunt prismati, quod super tertia basis octaëdri parte, & altitudine R S continetur: nam prismata eiusdem verticis ad se sunt vt bases, per corollarium septimæ duodecimi. Bina igitur prismata quæ super octaëdri basi & tertia eius parte, vertice verò R S, octo octaëdri pyramidibus, siue toti octaëdri solido, sunt æqualia. Cùm autem octaëdro inscriptum icosaëdrum in basibus octaëdri suas bases statuat,



per decimamseptimam decimiquinti: sequetur pyramides super basibus icosaëdri constitutas, atque ad idem centrum E conos deducentes, sub eadem altitudine pyramidum octaëdri contineri, scilicet ipsa E R vel E S: & proinde prisma super basi icosaëdri, altitudine verò dupla pyramidis, scilicet tota R S, æquum esse sex pyramidibus super basi icosaëdri, vertice autē E R vel E S constitutis, vt ostendimus in octaëdro. Viginti igitur basium icosaëdri pyramides, æquantur tribus prismatis super basi icosaëdri, vertice autem R S constitutis, ac insuper alteri prismati super tertia icosaëdri basis parte, vertice verò eadem R S contento, quod prisma prioris tertia pars est, per corollarium septimæ duodecimi, cùm ad se sint vt bases. Bina itaque prismata, quæ super basi octaëdri & eius tertia parte, vertice autem R S continentur, ad quatuor quæ super tribus icosaëdri basibus, & vnius basis tertia parte, sub eodem verò R S vertice continentur, ad se erunt vt bases, hoc est vt quatuor tertiæ basis octaëdri (quæ sunt vni basi & $\frac{1}{3}$ æquales) ad decem tertias basis icosaëdri, quæ sunt tribus & $\frac{1}{3}$ basibus æquales, siue vt duæ tertiæ octaëdri ad quinque tertias icosaëdri, sed duæ tertiæ basis octaëdri, ad quinque tertias basis icosaëdri, sunt vt duæ bases ad quinque bases, per decimamquintam quinti, partes nanque æquemultiplicium. Bina verò octaëdri prismata, ad quatuor icosaëdri prismata, ad se sunt vt octaëdri solidum ad icosaëdri solidum, cùm vtraquè singulis solidis sint æqualia. Erunt igitur (per vndecimam quinti) octaëdrum ad sibi inscriptum icosaëdrum solida, vt duæ octaëdri bases ad quinque inscripti icosaëdri bases. Octaedrum itaque ad sibi inscriptum icosaëdrum, eam seruat quam, &c.

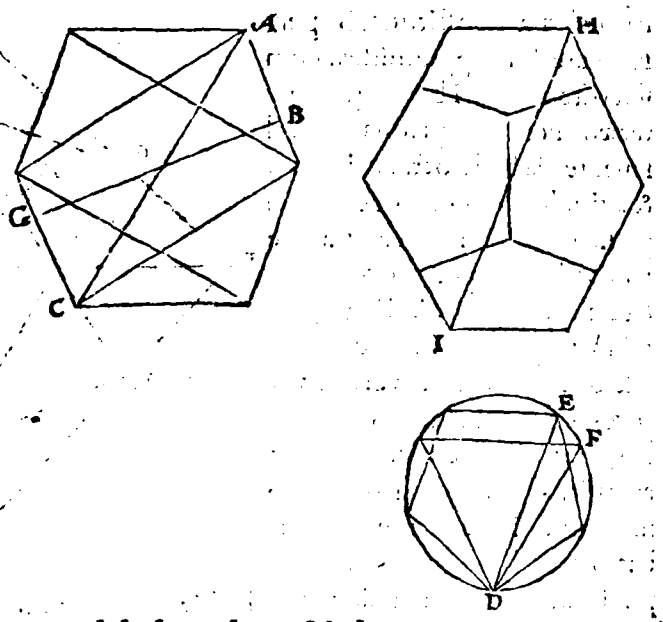
PROPOSITIO XXXII.

Icosaëdri solidi ad sibi inscriptum dodecaëdri solidum ratio constat, ex ratione lateris Icosaëdri ad latus cubi eadem Sphæra comprehensi, & ratione tripla dimetientis, ad eam quæ coniungit oppositarum Icosaëdri basium centra.

Esto dodecaëdrum cuius dimetiens sit H I, icosaëdrum verò eadem sphæra conceptum sit A B C, cuius dimetiens A C. Recta autem oppositarum basium

centra

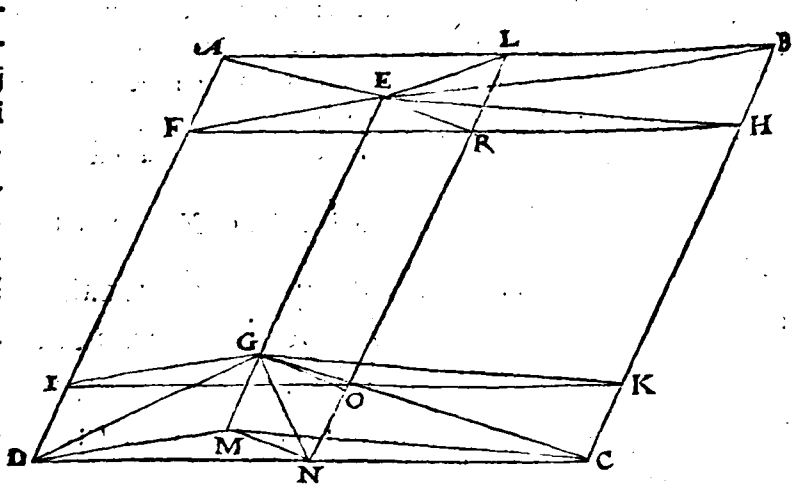
centra iungens, esto BG, idem insuper icosaëdro inscriptum dodecaëdrum sit quod sub dimetiente BG, per quintam decimiquinti: latus cubi esto DE, icosaëdri verò esto DF, eadem sphæra descriptorum: Dico rationem icosaëdri ABGC solidi ad sibi inscripti dodecaëdri super dimetiente BG solidum constare, ex ratione DF ad DE, & tripla rationis AC ad BG: quoniã icosaëdri ABGC & dodecaëdri HI, eadẽ sphæra comprehensorum solida, ad se sunt, vt DF ad DE, per octauam decimiquarti. Dodecaëdrũ verò cuius dimetiens HI ad illud cuius dimetiens est BG, triplam habet dimetientium HI ad BG, rationem, per corollariũ decimæseptimæ duo decimi: sed HI & AC sunt æquales ex hypothesi. Vt igitur HI ad BG, sic est AC ad BG. Ratio itaque extremorum, scilicet icosaëdri ABGC ad dodecaëdrum sub dimetiente GB centra iungente constat, per quintam diffinitionem sexti, ex rationibus mediorum, scilicet ex ratione icosaëdri ABGC ad dodecaëdrum HI (quæ fuit eadem rationi DF ad DE) & ratione eiusdem HI ad reliquum dodecaëdrum sub dimetiente BG, eidem icosaëdro ABGC inscriptum, per eandem quintam decimiquinti, quæ fuit tripla rationis rectæ HI (vel AC) ad GB iungentem centra oppositarum icosaëdri basium. Icosaëdri itaque solidi ad sibi inscriptum dodecaëdri solidum ratio, &c.



PROPOSITIO XXXIII.

Dodecaëdri solidum excedit cubi sibi inscripti solidum, parallelepipedo solido, quod super eiusdẽ cubi basi, vertice verò cubi lateris maiori & dimidio minoris segmentis constituitur.

Quoniam patuit decimaseptima decimitertij & octaua decimi quinti, basim cubi dodecaëdro inscripti suis lateribus quatuor pentagonorũ ad idẽ dodecaëdri latus concurrentiũ, angulos subtendere, Si igitur basis cubi ABCD, quatuor verò bases dodecaëdri circũscripti ad latus quod sit EG cõcurrant, cõprehendentes solidum

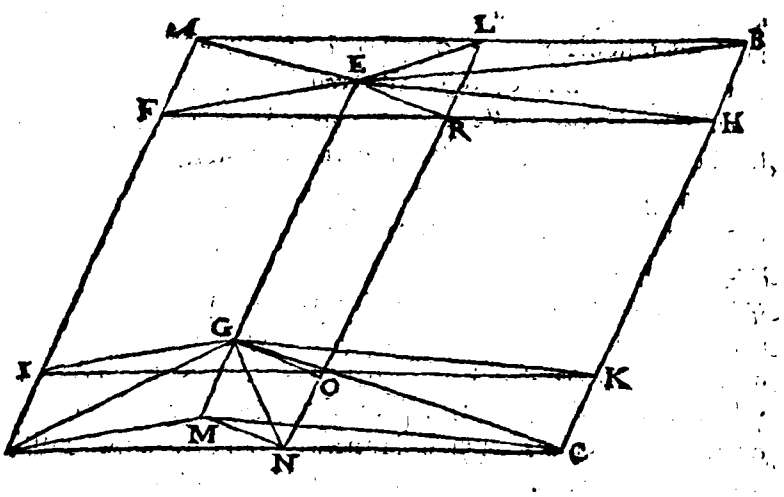


AEBDGC

A E B D G C ſubſultans ſuper A B C D baſi, ſecentur bifariã latera A B & D C in L & N ducta L N, quæ parallela eſt lateri E G, vt patuit decimaſeptima decimitertij, necnõn perpẽdiculares E R G O ipſas tangentes æquales eſſe, ſingulas dimidio E G lateri, eſſẽque maius ſegmentũ dimidij cubi lateris, & proinde totam E G totius L N cubi lateris maius eſſe ſegmentum. Ducantur per ſigna R & O rectæ parallelæ lateribus A B & C D hæ F H I K: quoniam F H E R tangẽtes ad binas I K G O tangentes ſunt parallelæ non in eodem plano, parallela ſunt quæ per ipſas plana E F H & G I K, per decimamquintam vndecimi, ſolidum A E B D G C ſecantia. Duæ itaque fiunt pyramides quadrãgulæ A B H F E, & I K C D G, ſuper quadrãgulis A B H F, & I K C D: verticibus autem E R, & G O: quæ quidem ſunt æquales. Nam baſes ſub cubi latere, & dimidio minoris eius ſegmenti, vertices autem ſub E R, & G O, dimidio maioris E G, continentur. Producatur in rectum E G, & fiat alteri rectarum K C, vel I D, æqualis G M, iunctis M D, M C, & M N. Pyramis igitur quæ ſuper triangulo C D M, vertice verò M G, perficiet priſma I G K D M C per 11 diffinit. vndecimi, quod pyramidis erit triplũ per 1 corollariũ 7 duodecimi. Reliqua igitur pyramis, quæ ſuper quadrãgulo C D I K, & vertice G O, dupla erit huius C D M G. Quare eidẽ dupla erit A B H F E, ſimilis & æqualis eidẽ C D I K G. Quia verò duodecim ſunt quadrangulæ pyramides circa ſex dodecaëdri latera, quarũ ſingulæ æquipollent binis ipſi C D M G, æqualibus, erunt 24 pyramides, quarũ ternæ priſmata cõſtituent, priſmati I G K D M C, æqualia & ſimilia, vnde octo orientur priſmata, per 1 corollariũ 7 duodecimi, quorum bina priſmati F E H I G K, addita, totum priſma conſtituent, quod ſcilicet ſuper cubi baſi A B C D, vertice verò, dimidio dodecaëdri latere E R, vel G O: octo igitur ea priſmata, ſuper quatuor cubi baſibus, cum quatuor priſmatis, ipſi F E H I G K, æquis & ſimilibus, priſma ipſi A B C D E G, quadruplum conſtituent, per 3 corollarium 7 duodecimi. Quia vero priſmata habent baſes reciprocas verticibus, per corollariũ 40 vndecimi, quatuor illa priſmata, quæ ſuper quadrupla ipſius A B C D, baſi, & vertice dimidio dodecaëdri latere E R, æqualia erunt priſmati, quod ſuper eadem cubi baſi, quadruplo verò vertice ipſius E R. Hoc eſt binis dodecaëdri lateribus. Rurſus, quia priſmata ſiorum duplicium parallelepipedorum ſequuntur affinitates, ex corollario 40 vndecimi, ſequitur parallelepipedum priſmatis duplum, ſuper eadem baſi A B C D, vertice autem binorum dodecaëdri laterum contineri. Quare & huic priſmati æquum dimidium parallelepipedum, ſuper eadem A B C D baſi, vertice verò dodecaëdri latere vnico continebitur, cùm ſint baſes reciprocæ verticibus, per 34 vndecimi. Quatuor igitur cubi baſibus ſuperſcripta priſmata, cum octo priſmatis quæ ex duodecim quadrangulis pyramidibus ipſi A B H F E, ſimilibus, ſolidum conſtituent, quod ſuper baſi cubi, vertice autem maiori eius lateris ſegmento, hoc eſt, latere dodecaëdri conſtituitur. Superſunt adhuc ſuper reliquis duabus cubi baſibus, bina priſmata, ei quod ſuper baſi F H K I, vertice verò E R, G O, æqualia, quæ quidem conſtituunt duplum, ſcilicet, quod ſuper triangulo I G K, vertice verò duplo ipſius E G, dodecaëdri latere. Sed ſicut bina (hoc eſt dupla ipſius F I, maioris ſegmenti) ad totam A D, latus cubi, ſic duo maiora ſegmenta verticis E R, ad ipſam E R, per 2 decimiquarti. Sicut igitur, per 1 ſexti, baſes duplæ ipſius F K, ad totam A C, ſic vertex dupla maioris ſegmenti verticis E R, ad ipſam E R. Priſma igitur quod ſuper dupla baſi ipſius F K, vertice vero E R, æquum erit ei quod ſuper tota baſi A C, vertice verò dupla maioris ſegmẽti ipſius E R, per corollarium 40 vndecimi. Atqui dupla maioris ſegmenti ipſius E R, eſt maius ſegmentum duplæ eiuſdem E R: hoc eſt lateris dodecaëdri. Maius autem lateris dodecaëdri, eſt minus lateris cubi, per 5 decimitertij: Priſma igitur quod ſuper baſi A B C D, vertice verò dupla maioris ſegmẽti ipſius E R, idem erit, quod ſub vertice minoris ſegmenti cubi lateris. Quia verò iam oſtendimus eidem priſmati æquum eſſe parallelepipedum quod ſuper eadem baſi, vertice verò dimidia verticis priſmatis, æquum erit illud priſma ei quod ſuper cubi baſi, vertice

tice

tice verò, dimidia minoris ſegmẽti cubi lateris; quod quidem parallelepipedum, iunctum præcedenti oſtenſo, quod ſuper eadem cubi baſi, vertice autem ſui lateris maiore ſegmẽto cõſurget omnis exceſſus dodecaëdri, in ſibi inſcriptum cubũ, comprehenſus ſub ſolido quod ſuper baſi eiuſdem cubi, vertice autẽ maiori ſui lateris ſegmento, cum minoris ſegmenti dimidio: Dodecaëdri igitur ſolidum, excedit cubi ſibi inſcripti ſolidum, parallelepipedo ſolido, quod ſuper eiuſdem cubi baſi, vertice verò cubi lateris maiori & dimidio minoris ſegmenti conſtituitur.



COROLLARIVM.

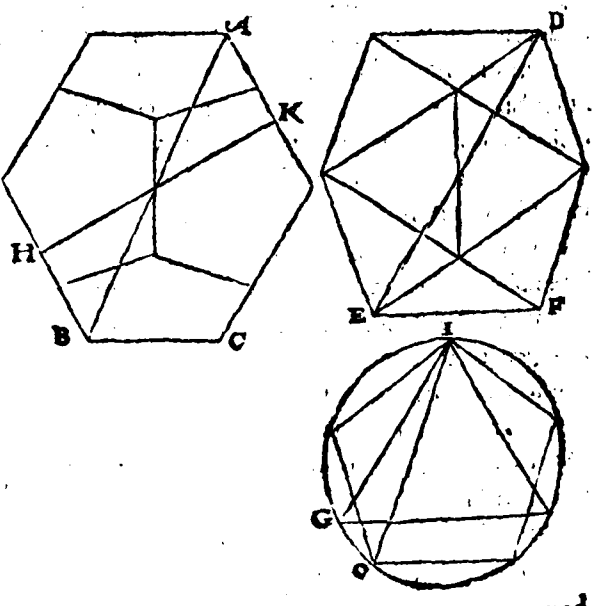
Dodecaëdrum deficit à duplo ſibi inſcripti cubi, dimidio minoris ſegmenti cubi.

Cùm enim exceſſus cubi ſit ſolidum ſuper eiuſdem baſi, vertice verò maiori & dimidio minoris ſegmentis, ſi illi exceſſui conferatur reliquum dimidium minoris ſegmenti, fiet ſolidum ſuper baſi & vertice cubi: quod igitur eidem erit æquale per 3 corollarium 25. vndecimi.

PROPOSITIO XXXIIII.

Dodecaëdri ad ſibi inſcriptum Icoſaëdri ſolidum ratio, conſtat ex tripla rationis dimetientis ad eam quæ cõiungit oppoſitarum Dodecaëdri baſium centra, & ratione lateris cubi ad latus Icoſaëdri, eidem Sphæræ inſcriptorum.

Eſto dodecaëdrum A H B C K, cuius dimetiens A B, recta verò oppoſitarum baſium centra iungens ſit K H, dodecaëdro autem A B C inſcriptum icoſaëdrum eſto D E F, cuius dimetiẽs D E, quia idem circulus comprehendit dodecaëdri quinquangulum, & icoſaëdri triangulum, eidem ſphæræ deſcriptorũ (per quartam decimiquarti): ſit ille circulus I G O, erit ideo cubi latus I O, latus quidem icoſaëdri I G, per eandem: Dico rationẽ dodecaëdri A H B C K ad icoſaëdrum D E F ſibi inſcriptum conſtare, ex tripla rationis A B ad K H & ratione I O ad I G: quoniam icoſaëdrum D E F dodecaëdro A B C inſcriptum eſt, ex hypotheſi, æqualis erit dimetiens D E rectæ K H, per ſeptimam decimiquinti. Dodecaëdrum igitur



quod

quod ſuper dimetiente K H eidem ſphæræ cui icoſaëdrum D E F inſcribetur: atqui dodecaëdrum A H B C K ad dodecaëdrum quod ſuper dimetiente K H, triplam habet rationem quam A B ad K H dimetientes, per corollarium decimæſeptimæ duodecimi: idem autem dodecaëdrum quod ſuper dimetiente K H, ad icoſaëdrum D E F (quod ſuper eadem dimetiente, aut ſibi æquali, ſcilicet D B) rationem habet, quam I O cubi latus ad I G icoſaëdri latus, eidem ſphæræ inſcriptorum, per octauam decimiquarti. Dodecaëdri itaque A H B C K ad icoſaëdrum D E F ſibi inſcriptum ratio conſtat, ex tripla ratione dimetientis A B ad eam K H, quæ coniungit oppoſitarum dodecaëdri baſium centra (quæ fuit ratio dodecaëdri A H B C K, ad dodecaëdrum quod ſuper dimetiente K H) & ratione lateris cubi I O ad latus icoſaëdri I G (quæ fuit dodecaëdri quod ſuper dimetiente K H ad icoſaëdrum D E F) eidem ſphæræ deſcriptorum, per quintam diffinitionem ſexti. Dodecaëdri itaque ad ſibi inſcriptum icoſaëdri ſolidum ratio conſtat, ex tripla ratione, &c.

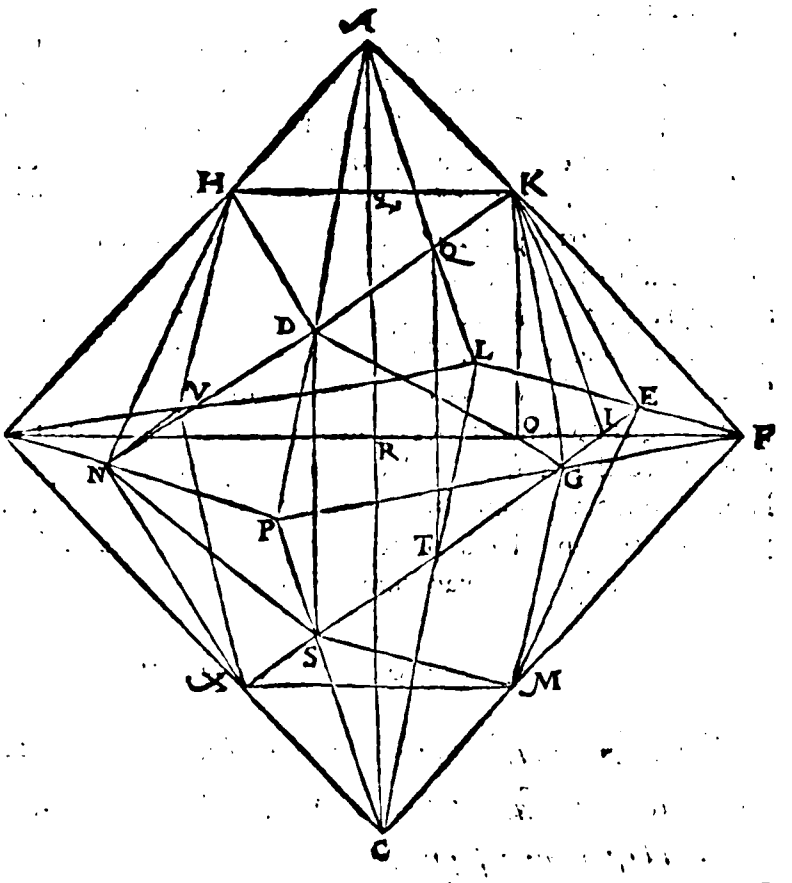
PROPOSITIO XXXV.

Dodecaëdri ſolidum Pyramidis ſibi circunſcriptæ ſolidi bipartitur nonas, dempto vnius nonæ (extrema & media ratione ſectæ) dimidio minoris ſegmenti.

Oſtenſum eſt dodecaëdrum cum ſibi inſcripto cubo eadem contineri pyramide corollar. primæ huius: Dodecaëdrum autem *eiuſdem cubi duplum* fuiſſe, dempto dimidio minoris ſegmenti, corollar. 33 huius patuit. Atqui pyramis eiuſdem cubi ſibi inſcripti nouuplum complexa eſt, per trigeſimam huius. Dodecaëdrum itaque pyramidi inſcriptum bis continẽs eundem cubum, dempto eodem dimidio minoris ſegmenti, ſibi ſumet, ſiue bipartietur nonas ſolidi pyramidis (quarum ſingulæ præſcripto cubo ſunt æquales) dempto hoc eodem exceſſu. Dodecaëdri igitur ſolidum pyramidis ſibi circunſcriptæ ſolidi, &c.

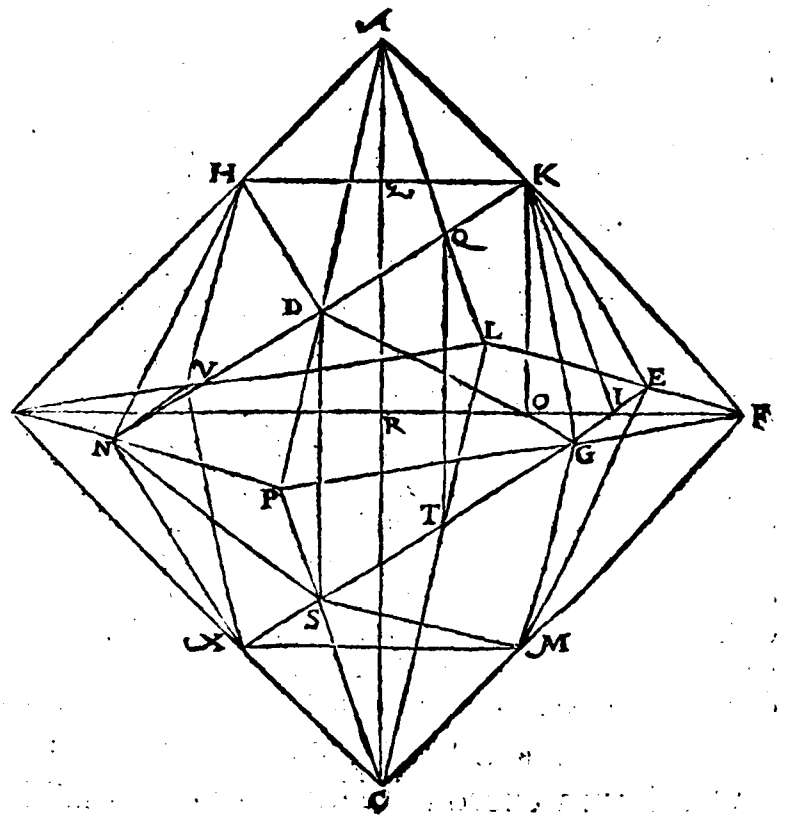
PROPOSITIO XXXVI.

Octaëdrum excedit ſibi inſcriptum icoſaëdrum ſolido parallelepipedo quod ſuper potẽtia lateris Icoſaëdri, vertice autem ea quæ ſemidimetiẽtis Octaëdri eſt maius ſegmentum.



Eſto octaëdrũ A B C F P L, cui icoſaëdrum inſcribamus H K E G M X N V D S Q T, per 16 decimiquinti, ductis dmetientibus

AZRC BROIF, & perpendiculari KO, parallela rectæ AZR: Dico ABCFPLoctaëdrum inſcripto icoſaëdro maius eſſe, parallelepipedo quod ſuper potentia lateris HK vel GE, vertice autem recta KO vel RZ maiori ſemidimetientis AR ſegmento continetur. Quoniam oſtenſum eſt eadem 16, triangula KDG & KEQ in baſibus octaëdri APF ALF deſcripta eſſe. Quare circa angulum ſolidum F remanent ſuper baſi FEG tria triangula KEG KEF KFG, pyramidem KEFG concludentia, cui eadem cauſa æqualis & ſimilis erit, oppoſita ſuper eadem baſi FEG pyramis MEFG. Haud ſecus totidem ſupererunt ſingulis octaëdri ſolidis angulis, ſcilicet binæ pyramides ſuper baſi AHK, binæ item ſuper BNV, binæq; ſuper DPS, ac binæ ſuper QLT, æquales & ſimiles, ex diffinit. 8 vndecimi. Duodecim itaque fiĕt pyramides, ſuper baſi comprehenſa latere icoſaëdri & binis minoribus ſegmentis lateris octaëdri angulum rectum continentibus, vt GEFK. Cùm autĕ latus GE angulum rectum ſubtendens, duplum poſſit (ex 47 primi) ſingularum EF FG, ſicque HK laterũ AH AK, ſingulæque AH AK vel EF FG duplum poſſint ſingularum AZ vel ZK angulum rectum continentium, hoc eſt, trianguli ſiue baſis AHK. Sequetur latus GE vel HK quadruplum poſſe trianguli EFG vel AHK. Pyramis autem KEFG, baſim EFG in plano octaëdri FLBP habens, ſuſcipit verticem perpendicularem KO, per 4 diffinit. ſexti, quæ quidem eſt maius ſegmentum ſemidimetientis octaëdri, per 16 decimiquinti. Tres itaque pyramides ſub eodem vertice & æquis baſibus, priſmati quod ſuper eiſdem baſi & vertice conſtruitur erunt æquales, per 1 coroll. 7 duodecimi: quatuor igitur priſmata ſuper quadrupla baſi ipſi GEF (quæ æquatur potentiæ lateris GE) vertice verò KO, (vel RZ maiori ſegmẽto ſibi æquali) cõprehendent ſolidum duodecim pyramidibus æquum. Quæ quidem duodecim pyramides componunt exceſſum octaëdri in icoſaëdrum ſibi inſcriptum. Octaëdrum itaque excedit ſibi inſcriptum icoſaëdrum ſolido, &c.



COROLLARIVM.

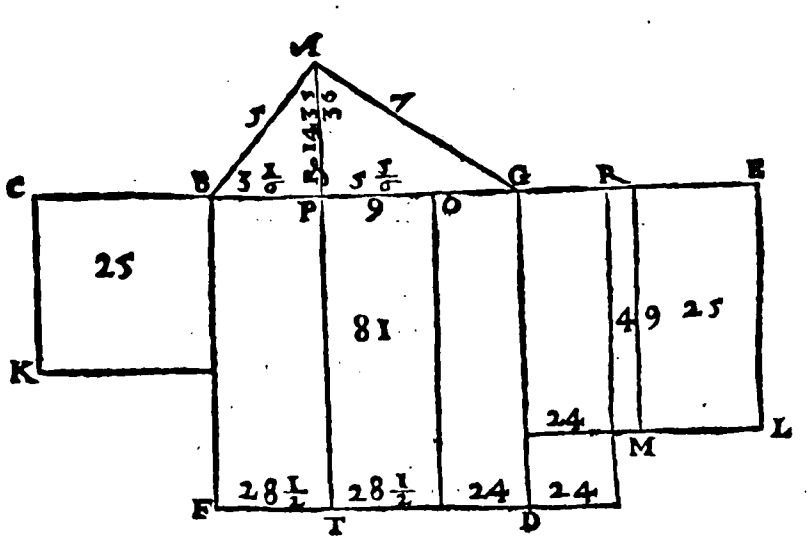
Pyramis excedit ſibi inſcripti icoſaëdri duplum, ſolido quod ſuper lateris icoſaëdri ſibi inſcripti potentia, vertice autem ea tota, cuius id eſt maius ſegmentum.

Nam pa

Nam patuit 19 decimiquinti, octaëdrum & sibi inscriptum icosaëdrum eidem insidere pyramidi. Ostendimus insuper 26 huius, pyramidem octaëdri comprehensi duplam fuisse. In binis itaque octaëdris bini icosaëdrorum duplicantur in vnum excessus. Nam dimidia pyramis, octaëdro icosaëdrum continenti est æqualis. Quare singulæ dimidiæ, singulos octaëdri cõprehendunt excessus, qui quidem super eadem basi latere icosaëdri comprehensa constituuntur, vertice autem dupla rectæ K O perpendicularis, quæ dupla scilicet iungẽs opposita latera H K X M, efficit maius segmentum idem icosaëdri latus ex primo & secũdo coroll. decimæquartæ decimiquinti. Quare super eadem basi & duplo vertice solidum, solidi duplum erit, ex coroll. trigesimæprimæ vndecimi. Posset alias dici, pyramidem excedere sibi inscriptum icosaëdrum pyramidis dimidio, & insuper excessu, quo octaëdrum excedit icosaëdrum eidem pyramidi inscripta. Nam pyramis excedit octaëdrum dimidio, ex 26 huius: & octaëdrum sibi inscriptum icosaëdrum, solido hoc theoremate ostenso: cum pyramis vtraque suscipiat solida, per vltimum 15 monitum.

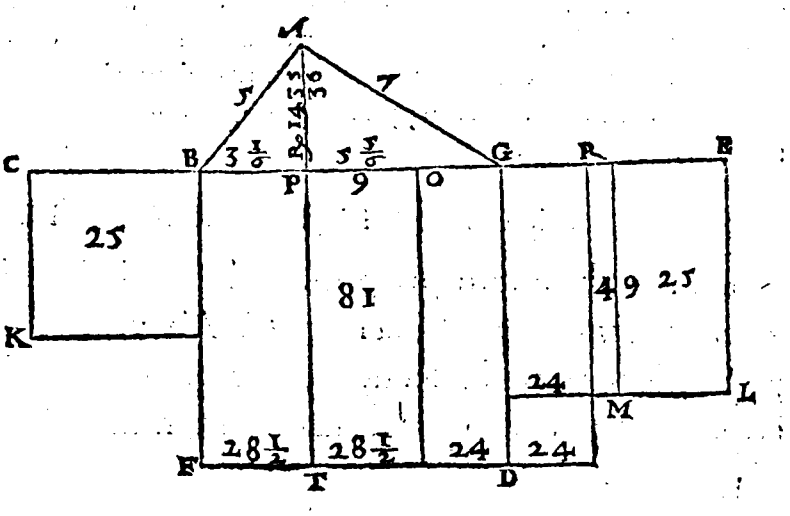
PROPOSITIO XXXVII.

Si trianguli certam propositam basim habentis, latera basi potentia commensurabilia fuerint, Ab vertice autem demissa perpendicularis basim secuerit, Sectiones toti basi longitudine, Perpendicularis verò potentia commensurabiles erunt.



Proponatur triãgulum A B G, cuius basis B G sit certa proposita, latera verò A B & A G eidẽ B G potẽtia saltem cõmẽsurabilia existant. A vertice autẽ A in basim B G perpendicularis basim secet in P: Dico basis sectiones toti B G cõmensurabiles esse longitudine, perpendicularem verò A P eidem B G basi potentia saltem commensurari. Producatur vndique recta B G in C & E, Ipsi verò A G æqualis ponatur G E, rectæq; A B recta B C, & describantur ex ipsis quadrata B K B D & G L. A maiori autem quadratorum quæ ex A B vel A G, quod esto G L, minori B K æquum auferatur E M, per 45 primi, ac per eandẽ reliquo G M æquum ad rectã G D cõparetur O D. Cum enim recti sint A P B & A P G anguli, recta A G binas A P P G potest: rectáque A B, binas A P P B, per 47 primi. Quanto igitur recta A G plus potest recta A B, eodẽ plus potest P G reliqua B P: nempe ablato cõmuni quadrato ex A P relinquitur excessus quadrati P G ad quadratũ B P. Sed quadratum ex A G (quod est G L) excedit quadratũ ex A B (ipsum quidem B K) rectangulo G M (vel O D) per constructionem. Quadratũ igitur quod ex P G, excedet quadratum ex B P, rectangulo O D. Quoniam autẽ quadratis A B, A G æqualia fuerũt ex A P P B & ex A P P G quadrata: ablatúsque fuit eorum excessus, rectangulum scilicet O D: relinquentur quadrata A P P O quadratis A P P B æqualia. Communi verò ex A P ablato quadrato, reliqua

ex B P & P O quadrata æqualia erunt, & proinde eorum latera (rectæ B P & P O) æqualia erunt. Cæterùm cùm quadrata G L & B K (ex hypotheſi) certa, & proinde commenſurabilia exiſtant, eorum exceſſus O D ipſis commenſurabilis erit, ex coroll. vndecimæ decimi, & igitur certus, per 9 diffinitionẽ decimi. Certũ itaque O D ad certã G D (vel B G) proiectũ, latitudinem O G certã efficiet, & lõgitudine ipſi B G toti cõmenſurabilem, per 20 decimi. Si autem tota B G vni partiũ O G commenſuretur, ipſæ B O O G & B G commenſurabiles erunt, per eandem vndecimam decimi, & coroll. eius. Quare & recta O G dimidiæ ipſius B O (ſcilicet rectæ P O vel F B) commenſurabitur, per decimam decimi. Quia verò binæ P O O G commenſurabiles ſunt, tota P G rectæ P O (ſiue ipſi B P) cõmenſurabitur, per eandem 11 decimi. Et vtraque ideo P G P B toti B G commenſurabilis erit, per eandem. Id propterea rectæ B G P B & P G rationem inter ſe quã numeri ſeruant, per quintam decim. Sectiones igitur P B P G baſis B G eidem baſi lõgitudine cõmenſurabiles erunt, per ſextam decimi. Quòd autem perpendicularis A P baſi B G potentia commenſurabilis fuerit, patet. Cùm quod ex A B ei quod ex B G (per hypotheſim) fuerit commenſurabile. Ei verò quod ex A B certo commenſurabile ſit certum ex B P, per decimã decimi. Reliquum igitur ex P A eidem ex B P cõmenſurabile erit, per ſecundam partem 11 vndecimi. Et proinde toti ex B G per decimam decimi. Recta itaque A P perpendicularis rectæ B G baſi potentia cõmenſurabilis erit, per tertiam diffinitionem decimi, quod fuit poſitum. Hanc demonſtrantes nuſquam laterum A B A G longitudinem, ſed ſolius baſis B G expreſſimus, eò quòd propoſita recta ſit B G: Reliquæ verò A B A G potentia tantùm ipſi commenſurabiles exquirũtur. Itaque, vt fortiori pateat argumẽto, ſi id demonſtretur cùm latera baſi potentia tantùm commenſurabilia fuerint, facilius idem ſequetur, ſi eadem latera potentia ſimul & longitudine eidem baſi commenſurabilia exhibeantur, hoc eſt, ſi earum longitudines per quadratorum numerorum radices expreſſæ ſint, veluti ſuppoſito indicauimus typo.



COROLLARIVM I.

Hoc ſuppoſito acquirimus: Si à potentijs baſis & vnius laterum, reliqui lateris potentia dematur: Eius autem quod ſupereſt dimidium ad totam baſim cõparetur: latitudinem efficiet ſectionem baſis quæ ad primum latus copulatur.

Nam à potentijs baſis B G & vnius laterũ A G, hoc eſt, à quadratis B D & G L. Reliqui lateris A B potentia B K (hoc eſt, E M) auferetur. Eius autẽ quod ſupereſt (ſcilicet quadrati B D & rectanguli O D, ſiue D R ex hypotheſi ipſi O P æqualis ſumpti) dimidiũ (ſcilicet totius F R quod erit P D: nam G R & P B rectis G O & P O æquantur) ad totam B G (vel G D) cõparetur, latitudinẽ efficiet P G, ſectionem quippe baſis B G, quæ ſectio ad primum latus A G copulatur. Haud ſecus in reliquo latere, ſi à quadratis

dratis B D & B K quadratum G L tollatur, supererit rectangulum F O. Nam E M rectangulum ipsi B K æquatur, G M verò ipsi O D. Reliqui igitur F O dimidium F P, latitudinem efficit B P, sectionem quæ ad sumptum prius latus A B copulatur.

COROLLARIVM II.

Si perpendicularis ab angulo trianguli basim secuerit, sectiones reliquis lateribus potentia sunt arithmetica ratione proportionales.

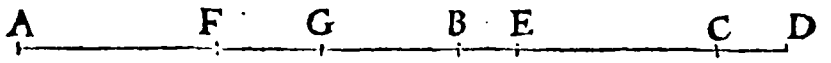
Nam patuit idem excessus potentiarum ex A G & A B, qui fuit earum quæ ex P G & P B. Si itaque potentiæ æqualiter sese excedant, ipsæ Arithmetica ratione proportionales erunt.

SVBEVNT IX. THEOREMATA NOuissima editione huic decimo sexto collata.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si proposita recta assumat maius, & dimidiæ minus segmenta, totius autem suscipiatur minus maioris segmenti, cubus ad sibi inscriptum dodecaëdrum, habet rationem quam proposita ad idem minus segmentum.

Proponatur recta A B, quæ assumat sui ipsius maius segmentum B C, & dimidiæ minus, vel (quod idem est) minoris segmenti dimidium C D. Sit autem totius A D, maius A E: maioris verò maius A G, & minus A F. Dico cubum, ad sibi inscriptum dodecaëdrum esse, sicut proposita A B, ad minus segmentum A F, maioris A E, totius A D. Quoniam ostendimus 33 huius, dodecaëdrum continere cubum sibi inscriptum, semel, & insuper solidum quod super eiusdem cubi basi, vertice autem, maiori segmẽto & dimidio minoris



cubi lateris: Erit solidum quod super basi cubi qui ex A B, vertice autem tota A D, (hoc est toto A B, cubi latere, & insuper maiori eius segmento B C, & dimidio minoris, ipso C D,) æquale dodecaëdro, cubo ex A B, circumscripto. Quare erit dodecaëdrum, ad sibi inscriptum cubum, sicut eis æqualia solida, scilicet, quod super cubi qui ex A B basi, vertice verò A D, dodecaëdro æquum, ad eum qui super eadem basi, vertice verò A B, cubum. Nam solida super eadem basi, ad se sunt vt vertices: & proinde, erit dodecaëdrum ad sibi inscriptum cubum, vt A D, ad A B, per corollarium 31 vndecimi: dodecaëdri verò cubo circumscripti latus, ad eidem cubi inscripti latus, habent extremam & mediam rationem, cùm eiusdem cubi sint maius & minus segmenta latetis (per 2 corollarium 13 decimiquinti) sed similia solida, ex similibus pyramidibus, vel prismatis composita, triplam habẽt laterum rationem, per 2 corollarium 8 duodecimi, dodecaëdrum circumscriptum, ad dodecaëdrum eidem cubo inscriptum, triplam habet rationem; totius A D ad A E maius. Sed triplam quam A D prima, ad A E secundam, habent A D prima, ad A F quartam, per 10 diffinitionem quinti. Nam quatuor sunt proportionales A D A E A G A F singularum segmenta, ex hypothesi. Sicut igitur solidum, sub vertice A D ad quod sub vertice A F super eadem basi, sic erit dodecaëdrum cubo circumscriptum, ad dodecaëdrum cubo inscriptũ, quæ quidem sunt ad se vt vertices A D ad A F, per idem co-

rollariũ 31 vndecimi. Sicut ante

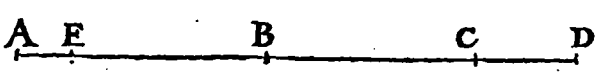


A D ad A B, ſic fuit dodecaëdrum ad cubum ſibi inſcriptum: Et ſicut A D, ad A F, vertices, ſic cubus ex A B, ad quod ſuper eadem baſi, vertice verò A F, ſolidum per idem corollarium 31 vndecimi. Sed ei quod ſub A F, vertice, æquum fuit dodecaëdrum cubo qui ex A B, inſcriptum. Sicut igitur A B, ad A F, vertices, ſic erit cubus qui ex A B, ad ſibi inſcriptum dodecaëdrum, ſolido quod ſuper eadem baſi cubi, vertice verò A F, comprehenſum. Si itaque propoſita recta A B, aſſumat maius B C, & dimidiæ minus C D, totius autem A D ſuſcipiatur maius A E, & eiuſdem A E, maioris, minus A F: Cubus qui ex A B, ad ſibi inſcriptum dodecaëdrum (æquale ei quod ſuper eadem baſi ſolido, vertice autem A F) habet rationem quam A B, ad A F, vertices: hoc eſt propoſita A B, ad prædictum minus ſegmentum A F.

PROPOSITIO XXXIX.

Si propoſita recta aſſumat maius, & dimidium minoris ſegmenta, tota recta ad tertium propoſitæ ſe habet, vt dodecaëdri ſolidum, ad ſibi inſcriptæ pyramidis ſolidum.

Eſto propoſita recta A B, ſecta extrema & media ratione, per 30 ſexti in B: cui addatur æqualis maiori ſegmẽto B C, & alia æqualis dimidio minoris ſegmenti C D. Secetur à propoſita A B, per 9 ſexti, tertia pars A E. Dico dodecaëdrum ad ſibi inſcriptam pyramidem ſe habere, vt tota A D, ad tertium A E, propoſitæ A B. Quoniam oſtendimus, 33 huius, dodecaëdrum excedere ſibi inſcriptum cubum, ſolido parallelepipedo ſuper cubi baſi, vertice verò cubi maiore & dimidio minoris ſegmentis. Oſtendimus præterea ſuper eadem baſi (cubi ſcilicet) ſolida ad ſe eſſe vt vertices (coroll. 31 vndecimi): Erit igitur cubus qui ſuper ſua baſi, vertice verò A B, ſuo latere, ad dodecaëdrum ſibi circunſcriptum, ſicut vertices A B, ad A D. Nam A D, excedit propoſitam A B, maiore B C, & dimidio minoris C D, per idem corollarium. Conuertendo igitur, erit A D tota, ad propoſitam A B, ſicut dodecaëdrũ ad ſibi inſcriptum cubum. Cùm autem cubus angulos in angulis dodecaëdri inſcribat, pyramis autem cubo inſcripta ſimiliter angulos in angulis cubi collocet, per 1 decimiquinti, ſequetur cubo dodecaëdro inſcripto deſcriptam pyramidem, eidem dodecaëdro inſcriptam eſſe, per 26 diffinitionem vndecimi: Atqui cubus ſibi inſcriptæ pyramidis triplus, ex 25 huius, oſtenſus eſt: Recta autem B A, ex hypotheſi, tripla rectæ A E fuit: Erit igitur B A, ad A E, ſicut cubus qui ex B A, ad ſolidum ſuper eadem baſi, & vertice A E per corollarium 31 vndecimi, ſcilicet triplus. Quare ſolidum ſuper baſi cubi & vertice A E, tertio lateris, æquale erit pyramidi eidẽ cubo inſcriptę. Sicut igitur dodecaëdrum ad cubum, ſic fuit A D, ad A B: Et ſicut cubus ad pyramidem, ſic fuit A B, ad A E: ſui tertium. Erit itaque æqua ratione, dodecaëdrum ad pyramidem, ſicut tota A D ad A E, tertiũ propoſitæ A B, per 22 quinti: Si igitur propoſita recta A B aſſumat maius B C, & dimidium minoris C D, ſegmenta: tota A D, ad tertium A E, propoſitæ A B, ſe habet, vt dodecaëdri ſolidum, quod ſub vertice A D, ad ſibi inſcriptæ pyramidis ſolidũ, quod ſub vertice A E, & iiſdẽ baſibus. Si itaque propoſita recta aſſumat, &c.

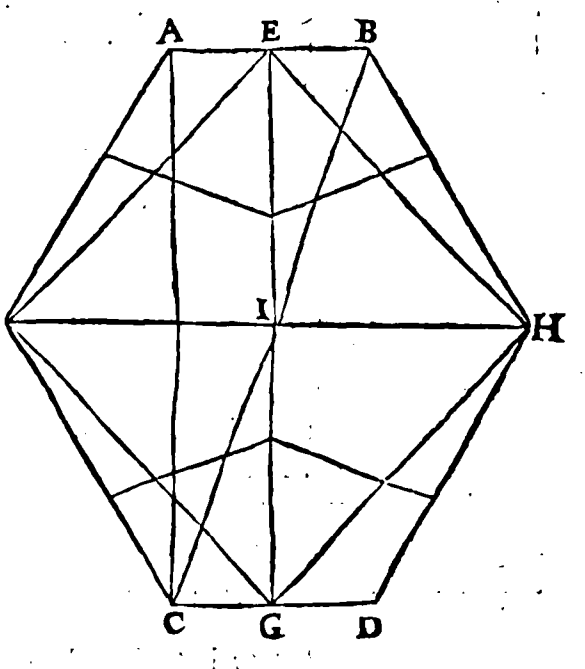


PROPOSITIO XXXX.

Si dodecaëdri dimetiens, totam & minus ſegmentum poſſit, quod

quod ſuper totius dimidia potentia, vertice verò eiuſdem totius tertio comprehenſum ſolidum, æquale erit Octaëdro eidem Dodecaëdro inſcripto.

Eſto propoſitum dodecaëdrum A B C D, cuius dimetiens ſit B C, iungens verò oppoſita latera E G vel A C. Sibi verò inſcriptum octaëdrum ſit E F G H. Cùm A B, & C D latera ſint partes laterum dodecaëdro circunſcripti cubi, per 13 decimiquinti: recta E G, dimidia cubi latera iungens, eiſdem lateribus ad rectos erit: eſt enim parallela æquis cubi lateribus: Eſt item parallela iungenti A C, & æqualis, per 33 primi: quare recta B C, poteſt totam A C, & A B (per 47 primi) minus eius ſegmentum, per 4 corollarium decimæſeptimæ decimitertij, cùm ſit angulus B A C, rectus. Quia verò octaëdrũ conſtat binis pyramidibus æquis & ſimilibus ſuper quadrato E F G H, lateris octaëdri per 2 corollarium 14 decimitertij, quarum vertices ſunt dimidiæ dimetientis E I, vel I G, octaëdri à centro in eius ſolidos angulos ductæ, & proinde ſũt æquales perallelepipedo quod ſuper eadem baſi E F G H, & tertio verticis E I vel I G, per 2 corollariũ 7 duodecimi, pyramides. Namq; tertiũ ſuorũ parallelepipedorum poſſident, per idẽ corollarium, & ideo duo tertia dimidiæ, totius E G tertium complent. Dimidia autem totius A C, vel E G, potentia, eſt latus E F octaëdri, per 47 primi Sequitur itaque dodecaëdri dimetientem B C potuiſſe totam A C, & minus eius ſegmentum A B. Super dimidia autem totius A C, potentia, ſcilicet quadrato E F G H, lateris octaëdri E F, vertice verò tertio rectæ E G, octaëdri dimetientis comprehenſum ſolidum, æquale eſſe octaëdro E F G H, eidem dodecaëdro inſcripto. Si igitur dodecaëdri dimetiens, totam & minus ſegmentum poſſit, quod ſuper totius dimidia potentia, vertice verò eiuſdem tertio totius comprehenſum ſolidum, æquale erit octaëdro, eidem dodecaëdro inſcripto.



COROLLARIVM.

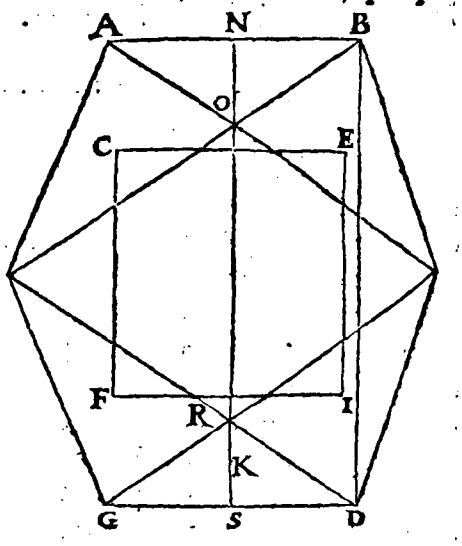
Octaëdri ſolidum eſt æquale parallelepipedo, quod ſuper quadrato ſui lateris, vertice verò tertio dimetientis.

Vt oſtenſum eſt ſuper quadrato E F G H, & tertio dimetientis octaëdri E G, pro vertice ſumpto.

LEMMA.

Latus Icoſaëdri excedit ſibi inſcripti cubi latus, tertio minoris ſegmenti. Detur icoſaëdrum A B G D, cuius latus ſit O R, & illi cubus C F B I inſcriptus. Ducta B D recta, ſumantur centra baſium icoſaëdri, vno latere diſtantium, ac oppoſitos

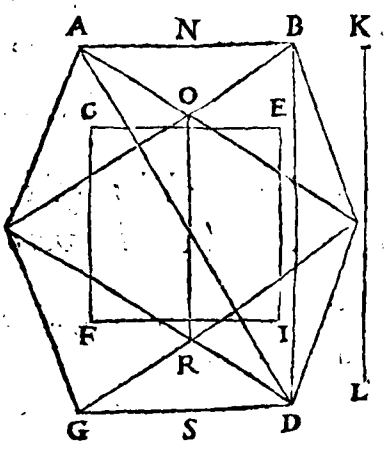
coniunctarum dodecaëdri Icoſaëdro inſcripti baſium angulos, ſuſcipientia, quæ ſint L K, per 5 decimiquinti. Recta L K, æqualis eſt iungenti oppoſita dodecaëdri inſcripti latera. Cum ea ſunt parallela, per 3 corollarium 17 decimitertij: quæ quidem iungens L K, efficit maius ſegmentum C F, latus cubi dodecaëdro inſcripti, per 4 corollarium eiuſdem. Quare efficit maius eiuſdem cubi icoſaëdro A B G D, inſcripti. Nam cubus angulos in dodecaëdri icoſaëdro inſcripti angulis collocat, per 8 decimi quinti. Latus itaque C F, iungentis L K, eſt maius ſegmentum. Quia verò B D, ſubtendit bina pẽtagoni Icoſaëdri latera, ipſa B D ſecta efficit maius ſegmẽtum O R, icoſaëdri latus, per 8 decimitertij. Erit igitur B D ad O R, ſicut L K, ad C F, per 2 decimiquarti: & viciſſim B D ad L K, ſicut O R, ad C F. Cùm autem O R, ſit maius rectæ B D, recta N S, ipſi B D æqualis, ſuperabit O R maius, minori ſegmento. Sed O L, ab angulo trianguli A O B in centrum, dupla eſt reliquæ perpendicularis N L, per 1 corollarium 12 decimitertij. Ducta igitur plana per O, & L, ipſi K L, recta, ſecabunt rectas N S, B D, & L K, in eaſdem rationes, per 17 vndecimi. Cùm itaque N L, & S K, tertium auferant minoris ſegmenti, ſcilicet binarum O N, & R S: ſequetur rectam B D, excedere iungentem L K, tertio minoris ſegmenti, cùm parallelæ ſint B D, N S, & L K. Sed ſicut B D, ad L K: ſic fuit O R, ad C F. Excedit igitur O R, latus icoſaëdri, latus C F, ſibi inſcripti cubi, tertio minoris ſegmenti. Latus itaque icoſaëdri, excedit ſibi inſcripti cubi latus, tertio minoris ſegmenti.



PROPOSITIO XXXXI.

Si dimetiens icoſaëdri totam & maius ſegmentum poſſit, ab ea autem tota, tertium minoris ſegmenti tollatur, quod ex reliquæ, media & extrema ratione ſectæ, maiori ſegmento, ſolidum rectãgulum, æquale erit cubo, eidem icoſaëdro inſcripto.

Icoſaëdron A B G D, cuius dimetiens A D, iungens autem oppoſita eius latera ſit B D, contineat cubum C E I F: Dimetiens autem A D, poſſit totam B D, & maius eius ſegmẽtum A B, latus quidem icoſaëdri, per 1 corol. 16 decimitertij. Excedat autem B D rectam L K, tertio minoris ſegmenti, dico ſolidum rectangulum, quod ſuper maiori ſegmento rectæ K L, æquum eſſe cubo icoſaëdro A B G D inſcripto. Quoniam oſtẽdimus prę-fato lemmate latus O R Icoſaëdri, excedere C F, latus cubi tertio minoris ſegmẽti, ſequetur rectas, quarum ea ſunt maiora ſegmenta, ſimili exceſſu ſe ſuperare, per 2 decimiquarti: dimetiens autem A D binas A B latus, & B D, iungentem, poteſt, per 1 coroll. 16 decimitertij: Et per idem O R, eſt maius ſegmentum iungentis B D. Erit igitur O R, maius rectæ B D, ad F C, maius alterius, ſicut tota B D ad totam alteram, per eandem 2 decimiquarti. Atqui O R, excedit C F tertio minoris ſegmenti, per

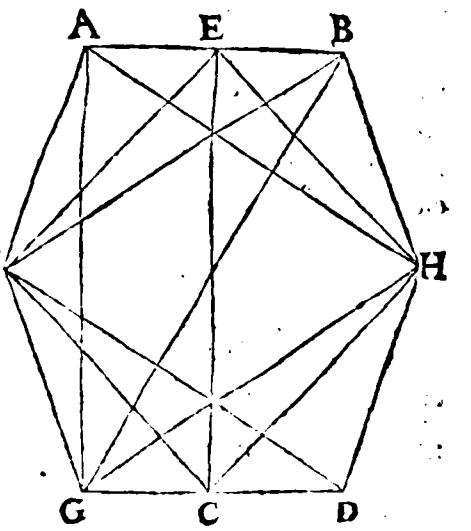


antepo

antepoſitum lemma. Tota igitur B D maioris O R, excedit totam maioris G F, eodem tertio minoris ſegmenti. Quia verò B D, exceſſit L K, eodem tertio, erit L K, tota lateris C F, cubi. Si itaque dimetiens A D, icoſaëdri A B G D, totam B D, & maius O R, poſſit, ab ea autem tota B D, tertium minoris ſegmenti tollatur, quo B D ſuperauit L K, quod ex reliquæ L K, media & extrema ratione ſectæ, maiori ſegmento C F, ſolidum rectangulum C E I F, æquale erit (quinimo idem) cubo C E I F eidē Icoſaedro A B G D, inſcripto. Si igitur dimetiens icoſaëdri, &c.

PROPOSITIO XXXXII.

Si dimetiens Icoſaëdri totā & maius ſegmentum poſſit, quod ſuper totius dimidia potentia, vertice autem eiuſdem tertio comprehēſum, ſolidum æquale erit octaëdro eidem icoſaëdro inſcripto.



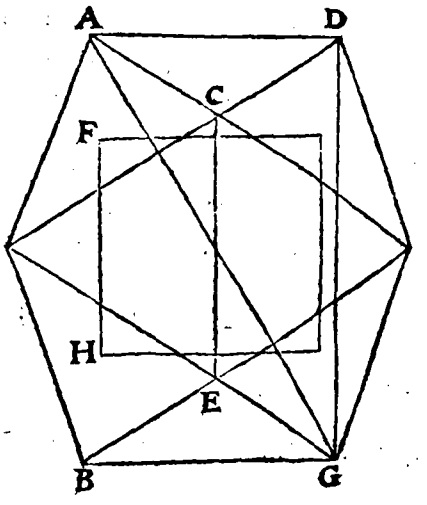
Sit icoſaëdrū A B G D, cuius dimetiens ſit B G: poſſit autem B G, totam iungētem A G, & maius ſegmentum A B latus. Sit inſuper icoſaëdro A B G D, inſcriptum octaëdrum E F C H. cuius dimetiens E C, per 15 decimiquinti. Dico ſuper dimidia potentia totius A G, vertice verò eiuſdem A G tertio, comprehenſum ſolidum, æquale eſſe octaëdro E F C H. Quoniam tota A G, iungit parallelas A E & G C, ipſa æqualis eſt dimetienti E C octaëdri, per 33 primi. Dimetiēs autem E C, duplū poteſt lateris E F, per 14 decimitertij. Octaëdri autem ſolidum, eſt æquale ſolido, quod ſuper quadrato E F, & vertice tertio dimetientis E C, per corollarium 40 huius. Erit igitur idem octaëdrum E F C H, æquale ſolido quod ſuper dimidia potentia rectæ E C, vel totius A G, ſibi æqualis, vertice verò tertio eiuſdem E C, vel A G, totius. Si itaque dimetiens B G, icoſaëdri A B G D, totam A G, & maius ſegmentum A B, poſſit, quod ſuper totius A G, dimidia potentia (quadrati ſcilicet E F C H, lateris E F, quod quidem dimidium potuit rectæ A G, vel C E) vertice autem eiuſdem A G, vel E C, tertio comprehenſum ſolidum, æquale erit octaëdro, eidem icoſaëdro inſcripto.

PROPOSITIO XXXXIII.

Si dimetiens icoſaëdri totam & maius ſegmētum poſſit, à totius autem maiori ſegmento, dimidium ſui minoris tollatur, quod ſuper reliquæ quadrato, vertice verò eiuſdē tertio, comprehenſum ſolidum, æquale erit pyramidi eidem, icoſaëdro inſcriptæ.

Icoſaëdri A B G D, dimetiens A G, poſſit totam D G, & maius ſegmentum A D, per 1 coroll. 16 decimitertij. Sit, per idem, totius D G, maius ſegmentum C E, latus, à quo ablato

ablato dimidio minoris ſegmenti ſui ipſius, ſuperſit F H per lemma 40 huius. Dico ſuper quadrato F H, & vertice eiuſdem F H, tertio, comprehenſum ſolidum, æquari pyramidi icoſaëdro A B G D inſcriptæ. Cùm idem cubus & ſibi inſcripta pyramis, eodem capiantur icoſaëdro, per corollarium 1 huius, latus verò icoſaëdri C E, excedat ſibi inſcripti cubi latus dimidio minoris ſegmenti, per lemma 40 huius, erit cubi, icoſaëdro A B G D inſcripti, latus F H Nam C E exceſſit F H, eodem exceſſu, à conſtructis. Cùm autem cubi ſolidum, pyramidis ſibi inſcriptæ ſolidum



triplicet, ex 25 huius, erit ſolidũ ſuper quadrato F H, cubi, & vertice tertia eiuſdem F H, parte, vel cubi verticis, æquale pyramidi eidem cubo, qui ex A F, inſcriptæ. Nam ſuper eadem cubi baſi, ſolida ad ſe ſunt vt vertices, per corollar. 31 vndecimi. Tertia igitur cubi pars pyramis, ſuper eadem cubi baſi, & tertio verticis eiuſdem, comprehenditur. Si igitur A G, dimetiens icoſaëdri A B G D, totam D G & maius ſegmentum A D, poſſit: à totius autem D G, maiori ſegmento C E, dimidium ſui minoris tollatur, relicta F H, quod ſuper eiuſdem reliquæ F H, quadrato, vertice verò eiuſdem F H, tertio, comprehenſum ſolidum, cubi qui ex F H, tertium, æquale erit pyramidi, eidem icoſaëdro A B G D, inſcriptæ. Si itaque dimetiens icoſaëdri totã & maius, &c.

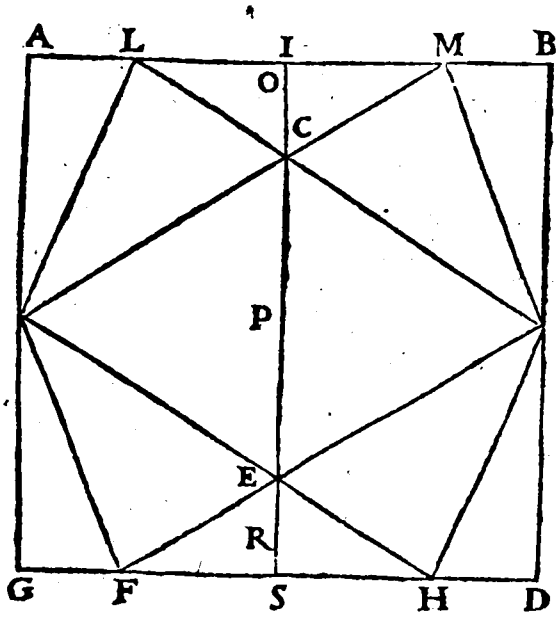
PROPOSITIO XXXXIIII.

Pyramis ad ſibi inſcriptum dodecaëdrum, rationem habet, quam nouem ad vnam, cum maiori & dimidio minoris eius ſegmentis, magnitudines.

Quoniam dodecaëdrum, & ſibi inſcriptus cubus, eadem continentur pyramide, per corollarium 1 huius, pyramis autem ſibi inſcripti cubi eſt noncupla, per 30 huius. Dodecaëdrum verò excedit cubum ſibi inſcriptum, maiori verticis eius ſegmento, & dimidio minoris, per 33 huius. Qualium itaque cubus eſt vnius magnitudinis (ſcilicet verticis) earum dodecaëdro æquale ſuper baſi cubi ſolidum, eſt vnius & maioris & dimidij minoris ſegmentorum, verticis. Cùm autem ſuper eadem baſi ſolida, ſint ad ſe vt vertices, qualium cubus erit vnius verticis, earum pyramis circumſcripta (cubi noncupla) erit nouem. Sed earundem fuit dodecaëdrum, vnius & maioris & dimidij minoris ſegmentorum. Qualium itaque pyramis eſt nouem, eorundem ſolidorum ſibi inſcriptum dodecaëdrum, erit vnius & maioris, & dimidij minoris ſegmentorum. Pyramis igitur ad ſibi inſcriptum dodecaëdrum rationem habet, quam nouem ad vnam, cum maiori & dimidio minoris eius ſegmentis, magnitudines.

PROPOSITIO XXXXV.

Si à lateris cubi potentia, tollatur tertium potentiæ ſui maioris ſegmenti, quod ſub vertice quintupartiente ſextas eius quæ reliquum poteſt, & ſuper triangulo quod ex dupla eiuſdem maioris ſegmenti ſolidum, æquale erit icoſaëdro eidem cubo inſcripto.

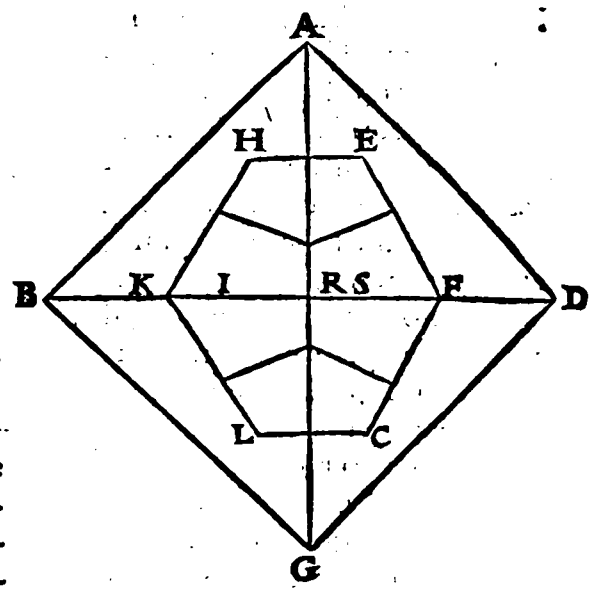


Proponatur cubus A B G D, cui inſcriptum ſit icoſaëdrum L M F H, cuius latus ſit L M, vel C E. Sit iungens oppoſita icoſaëdri latera I S lateri cubi æqualis. Sit item O R iungens oppoſitarum baſium icoſaëdri centra O, & R. Quoniam P I quæ ex centro, in latus, binas poteſt, ſcilicet perpendicularem P O & O I. Nã angulus qui ad O rectus eſt, per 2 corollarium 21 decimiquinti: dupla itaque rectæ P I ſcilicet I S latus cubi, binarum P O & O I duplas poteſt O R, & O C, quæ dupla eſt perpendicularis O I in triangulo L C M, per 1 corollarium 12 decimitertij. Cùm autem L M latus ſeſquitertium poſſit, perpendicularis C I per 2 corollarium eiuſdem qualium L M poterit 12 earum C I poterit 9. Sed qualium C I poteſt 9 earum C O poteſt quatuor. Sunt enim in C O duo tertia totius C I. Qualium itaque L M poteſt 12, earũ O C poteſt 4, hoc eſt eius tertium. Quia verò latus I S cubi, potuit iungentem O R & rectam O C, quæ tertium potuit lateris L M, quod quidem lateris I S cubi eſt maius ſegmentum per corollarium 1 decimæſextæ 13. Ablato à potentia lateris cubi I S tertio potentiæ O C ſui maioris ſegmenti L M quæ reliquum poteſt, erit O R iungens oppoſita baſium icoſaëdri centra. Nam latus I S binas O C & O R potuit. Cùm autem icoſaëdrum conſtet 20 pyramidibus, quæ ſuper eiuſdem 20 baſibus, vertice verò perpendiculari quæ à centro P in baſium centra, veluti P O & P R: tres earum pyramidum component priſma, quod ſuper baſi F E H vertice R P per 1 corol. 7 duodecimi. Quia verò priſmata ſuper eadem baſi, ad ſe ſunt vt vertices, ex corollar. 31 & 40 vndecimi, ſequetur ex 12 pyramidibus quatuor fieri priſmata ſuper æquis baſibus & vertice: Superſunt octo pyramides, quæ priſma prioris quadruplum, bipartiente tertias verticis augebunt. Nam octonarius duodenarij tertias bipartitur. Totius igitur priſmatis 20 pyramides continentis, ſuper quadrupla icoſaëdri baſi conſtituti, vertex ipſius, P R ſuperbipartiens tertias erit vel totius O R duplæ verticis P R quintupartiens ſextas, quæ idem conferunt ſolidum, ſuper baſi (ſcilicet triangulo æquilatero ſuper duplo lateris L M) conſtitutum, vertice verò quintupartiente ſextas iungentis O R, quæ fuit reliquum potens lateris cubi I S, ablato tertio C O potentiæ ſui maioris ſegmenti L M. Si igitur à lateris cubi I S potentia quæ ex O C & O R tollatur tertium O C potentiæ ſui maioris ſegmenti L M, quod ſub vertice quintupartiente ſextas eius O R quæ reliquum poteſt lateris cubi I S ablato O C tertio potentiæ maioris ſegmenti L M, & ſuper triangulo quod ex dupla eiuſdem L M maioris ſegmenti, hoc eſt quadrupla ipſius L C M baſi cõprehenſum ſolidum priſma, æquale erit icoſaëdro L M F H eidem cubo A B G D, inſcripto. Si itaque à lateris cubi potentia, tollatur tertium potentiæ, &c.

PROPOSITIO XXXXVI.

Octaëdri ſolidum ad ſibi inſcripti dodecaëdri ſolidum, ſe habent, vt quadratum lateris octaëdri, ad quod ſub tertio dimetientis, & ea quæ idem tertium excedit ſui ipſius maiori & dimidio minoris ſegmentis, comprehenditur rectangulum.

Propona



Proponatur octaëdrum ABGD, cui ſit inſcriptum dodecaëdrum HEFCLK. Dimetiens AG, ſit tertium BI: tertij autem maius & dimidium minoris ſegmenta ſint IR, RS. Dico octaëdrum ABGD, ad dodecaëdrũ HEFCLK, rationem habere, quam quadratum ABGD, lateris octaëdri, ad rectãgulum ſub BI, & BS rectis cõprehenſum. Quoniam octaëdrum diuiditur in binas pyramides æquas & ſimiles ſuper eodẽ quadrato ſui lateris, & vertice dimetientis AG, dimidia, per 2 corollarium 14 decimitertij, erũt pyramides illæ æquales ſolido parallelepipedo, ſuper eodẽ quadrato ABGD, vertice autem BI, tertio dimetientis AG, conſtituto. Nam ſuper eadem baſi ſolida, pyramidum ſunt tripla, per 2 corollarium 7 duodecimi. Cùm autẽ dodecaëdrum & ſibi inſcriptus cubus, eodem capiantur octaëdro, per corol. 1 huius: dodecaëdri verò ſolidum, à duplo ſibi inſcripti cubi tantum deficiat, dimidio minoris ſegmenti ipſius cubi, per corollarium 33 huius: ſequetur dodecaëdrũ HEFCLK, æquale eſſe ſolido ſuper baſi cubi, vertice autẽ eius lateris, maiori & dimidio minoris ſegmẽtis, comprehenſo. Nam ſolida ad ſe ſunt vt vertices ſuper eadem baſi, per corollarium 31 vndecimi. Atqui cubi octaëdro inſcripti latus, tertium BI, dimetientis AG poſſidet. Nam dimetiens duplum poteſt lateris AB, per 14 decimitertij. Latus autem AB, quadruplum ſeſquialterum lateris cubi poteſt, per 14 huius. Quare dimetiens nonuplum potens eiuſdẽ lateris cubi, triplũ eiuſdem cõmenſurabile erit longitudine, per 2 partem 9 decimi. Quia verò BI, tertio dimetientis AG, vel BD, poſita fuit æqualis, eadẽ BI, lateri cubi octaëdro ABGD, inſcripti, æqualis erit. Et proinde dodecaëdrũ HEFCLK, æquale erit ſolido ſuper quadrato BI, vertice autem eadem BI, & maiori IR, & dimidio minoris RS, ſegmentis comprehenſo. Sed hoc ſolidum æquale eſt ſibi ipſi, ſuper baſi quæ ſub BI, tertio dimetientis AG, & BS, latere compoſito ex tertio, maiore, & dimidio minoris ſegmentis, vertice verò, eodem tertio comprehenſo. Solidum itaque ſuper quadrato ABGD, lateris octaëdri, vertice autem BI, tertio dimetientis AG, octaëdro æquum, & ſolidum ſuper rectangulo quod ſub BI, & BS, vertice verò eadem BI, ipſi dodecaëdro, æquale oſtenſum, ad ſe ſunt, vt quadratum ABGD, ad quod ſub BI, & BS. Sub eodem autem vertice BI, parallelepipeda, ad ſe ſunt vt baſes, per 32 vndecimi. Erit igitur octaëdri ABGD, ſolidum, ſuper quadrato BI, ad dodecaëdri HEFCLK, ſolidum, ſuper rectangulo ſub BI, & BS, contentum, ſicut baſes, cùm ſint ſub eodem vertice, nempe BI, tertio dimetientis AG, per eandem 32 vndecimi. Octaëdri igitur ABGD, ſolidum, ad ſibi inſcripti dodecaëdri ſolidum HELC, ſe habent, vt quadratum lateris octaëdri ABGD, ad quod ſub tertio dimetientis BI, & ea quæ tertium BI, excedit, ſui ipſius BI, maiori IR, & dimidio minoris RS, ſegmentis, totam BS, componentibus comprehenditur rectangulum. Octaëdri itaque ſolidum, &c.

DE NATVRA PYRAMIDIS TRILATERAE AEQVILATERAE.

Pyramis æquilatera trilatera, ſecatur bifariam tribus quadratis æqualibus, ab ea quæ ex dimidia ſui lateris, ſeſe in centro pyramidis bifariam & ad rectos ſecantibus, & quorum anguli in mediis laterum pyramidis ſectionibus degunt, eadem

pyramis

pyramis ſuſcipit, octaëdron octaëdro inſcripta icoſaëdron exoctaëdron & icoſi dodecaëdron, icoſidodecaëdro inſcriptum dodecaëdron, & dodecaëdro inſcriptum cubum. A pyramide tolluntur quatuor pyramides ſimiles toti, pyramidíſque latera penitus auferentes, reliquum autem pyramidi inſcriptum octaëdrum efficientes, cui quidem omnia à pyramide concepta ſolida inſcribuntur. Perpendicularis ab angulo in baſim pyramidis, dupla eſt dimetientis inſcripti cubi. Recta verò medias oppoſitorum pyramidis laterum iungens ſectiones, tripla eſt lateris eiuſdem cubi: triplum item pyramidis latus ad baſis cubi dimetientem. Idem itaque pyramidis latus, oppoſitorum laterum ſectiones iungentis rectæ duplum poteſt. Rectæ verò ab angulo in baſim perpendicularis, ſeſquialterum. Perpendicularis igitur, iungentis ſeſquitertium poterit. Pyramis, ſibi inſcriptum octaëdrum, octaëdróque inſcriptum icoſaëdrum, eandem ſphæram ſuſcipiunt. Pyramis ſibi circunſcripti cubi veſtigium obturat.

DE NATVRA OCTAEDRI.

Octaëdri quatuor perpendiculares, à duobus oppoſitis eius angulis, per baſes ſe iungentes rhombum deſcribunt, cuius vna dimetientium reliquæ duplum poteſt: ea quippe dimetientis ad latus eſt ratio. Octaëdri baſis ad ſibi inſcripti icoſidodecaëdri baſin ſe habet, vt pyramidis ad ſibi inſcripti icoſaëdri baſim. Iungens oppoſitarum baſium centra, eſt media proportionalis, inter dimetientem & cubi inſcripti latus. Octaëdrum & ſibi inſcriptum icoſaëdrum, eandem ſphæram ſuſcipiunt. Octaëdri ſolidi dimetiẽs, potentia ſeſquialtera eſt dimetientis circuli baſim comprehendentis, tripla verò iungentis oppoſitarum baſium centra, & dupla bipartiens tertias perpendicularis ſiue lateris præfati rhombi: iungentis autem proximarum baſium centra longitudine tripla. Angulus autem inclinationis baſium octaëdri, cum angulo inclinationis baſium pyramidis, duobus rectis æquos efficit angulos.

DE NATVRA CVBI.

Cubi dimetiens ſeſquialterum poteſt dimetientis baſis, lateris verò triplum: iungentis autem proximarum baſium centra, ſextuplum. Inſuper cubi latus eſt ad ſibi inſcriptorum latera, Icoſaëdri quidem, vt tota ad maius ſegmentum, Dodecaëdri verò vt tota ad minus. Octaëdri duplum poteſt lateris, Pyramidis verò lateris dimidium. Cubus præterea pyramidis triplus fuit. Cubi autem dodecaëdrum fere duplum. Idem itaque dodecaëdrum eiuſdem pyramidis ferè ſextuplum eſſe comperietur. Cubi dimetiens ad ſibi inſcripti dodecaëdri dimetientem, eſt vt tota ad maius. Ad icoſaëdri verò dimetientem, vt potens triplum totius, ad potentem totam & maius ſegmentum: excedit autem cubi dimetiens iungentem oppoſita exoctaëdri triangula, tertio.

DE NATVRA ICOSAEDRI.

Icoſaëdri angulum ſolidum conſtituunt quinque triangula, quorum reliquæ baſes pentagonum componunt. Si itaque ab oppoſitis baſibus aliud deſcriptum ſumatur pentagonum, hæc pentagona dimetientem icoſaëdri angulos præfatos copulantem ita ſecabunt, vt quæ inter plana maius ſegmentum ſit, quæ verò à plano ad angulum reliqua, minus. Siquidem binarum coniunctarum baſium oppoſitos angulos recta cõiungat, huius rectæ maius ſegmentũ eſt latus icoſaëdri. A centro autem icoſaëdri ad angulos ducta, quintuplum poteſt dimidiæ eius quæ inter pentagona fuit ſuſcepta, ſiue dimidiæ eius quæ à centro circuli præfatum

pentagonum capientis, quæ ideo ſunt æquales. Singulas ipſarum poteſt latus icoſaëdri, tum etiam minus ſegmentum poteſt ab angulo ſolido in pentagonum cadens. Icoſaëdri dimetiens poteſt totam oppoſitos angulos coniunctarum baſium copulantem, & maius eius ſegmentum, hoc eſt latus icoſaëdri. Quæ ab angulo baſes octaëdri latus oppoſitum extrema & media ratione ſecat, æqualis eſt iungenti oppoſita latera ſibi inſcripti icoſaëdri: vtriuſque enim icoſaëdri latus eſt maius ſegmentum. Poteſt etiam dimetiẽs quintuplum eius quæ inter pentagona ſuſcepta fuit, ſiue eius quæ à centro pentagoni ex lateribus icoſaëdri compoſiti. Dimetiens poteſt rectam centra baſium oppoſitarum icoſaëdri coniungentem, & dimetientem circuli baſim continentis. Dimetiens inſuper poteſt dimetientem circuli pentagonum continentis, & eam quæ ex eiuſdem centro, hoc eſt quintuplum eius quæ ex centro, iungens centra oppoſitarum baſium, poteſt iungentem centra proximarum, & reliquam cuius latus cubi icoſaëdro inſcripti eſt maius ſegmentum, iungens medias oppoſitorum laterũ ſectiones, tripla eſt lateris inſcripti dodecaëdri. & poteſt iungentem centra oppoſitarũ baſium & eam quæ ex earum centro. Quare ſi latus icoſaëdri & eius maius ſegmentum componantur, totius tertia pars, eſt latus dodecaëdri icoſaëdro inſcripti.

DE DODECAEDRI NATVRA.

Dodecaëdri dimetiens poteſt latus, & eam cuius latus eſt minus ſegmentum. cubi verò inſcripti maius: illa porrò eſt recta, quæ ſubtendit angulum inclinationis baſium, binis perpendicularibus baſium dodecaëdri cõprehenſum. Si binæ dodecaëdri baſes longitudine vnius lateris diſtantes ſumantur, earum centra coniungens extrema & media ratione ſecta, efficit maius ſegmentum coniungentem centra proximarum baſium. Si per centra quinque baſium circa vnam baſim conſtitutarum, ducatur planum, & per centra baſium quæ circa oppoſitam baſim, aliud planum: centra autem oppoſitarum baſium coniungat recta, ipſa à planis ita ſecatur, vt ſingulæ extra plana conſtitutæ, ſint maius ſegmentum eius quæ inter plana concluditur. Latus dodecaëdri, eſt maius ſegmentum ſubtendentis angulum pentagoni. Quæ à centro dodecaëdri in vnam baſiũ perpendicularis, quintuplum poteſt dimidiæ eius quæ inter plana eſt, & ideo tota baſium oppoſitarum centra coniungens, quintuplum poteſt totius quæ inter plana. Subtendens angulum baſis dodecaëdri & baſis latus, poſſunt quintuplum eius quæ ex centro circuli baſim continentis. Sectio ſphæræ continens tres dodecaëdri baſes, ſumit dimetientis tertiam partem. Dodecaëdri latus & angulum pẽtagoni ſubtendens, æquantur rectæ cõiungenti medias oppoſitorum dodecaëdri laterum ſectiones. Bina dodecaëdri latera iungentes & dodecaëdri lateris potentias æquales eſſe bina icoſaëdri latera iungentis & icoſaëdri lateris potentiis eadem ſphæra comprehenſarum: nam vtraſque poteſt ſphęræ dimetiens.

DE EXOCTAEDRI NATVRA SEORSVM.

PROOEMIVM DECIMI SEPTIMI GEOMETRICORVM ELEMENTORVM LIBRI.

QVVM priori nostræ Elementorum geometricorum ab Euclide redactorum restitutioni, plura, quæ solidis regularibus inscribendis, & ad se inuicem conferendis, necessaria fuerant, contulissemus, & solidorum regularium ab antiquis relictas, nihilominus optatas, peregissemus inscriptiones, vt decimũquartum & decimũquintum suis ordine & numero absolutos proderemus, præter hæc decimumsextum huic labori contulimus, quo regularium illorum latera & solida eodem globo concepta ad se compararemus. Hortante autem, necnon vrgente, Caroli christianissimi Regis præcepto, quo hoc operis sibi dicandum breuiq; excudendum fore sæpius vrgeret, ac vota demum exigeret, necessitate compulsi, theoremata nouem, quæ decimo sexto conficiendo apponenda forent, prætermisimus. Attamen cùm instante typographo adesset tempus operis absoluendi, apposuimus quædam fragmenta, quibus lectoris anxietatem leuaremus, tum in decimo sexto perficiendo, tum in componendorum regularium solidorum solamen huic disciplinæ incumbentibus adhibendum, vt ibidem in compositis regularibus solidis pateret, quod antea præmiseramus in simplicibus. Accidit autem, nescimus si nostrorum exemplarium inopia, aut alia quadam culpa defuerint libelli, nos à typographis subinde rogatos fuisse, nostram hanc elementorum restitutionem repedare, necnon incremento quodam illustrare, si tamen otij facultas succumberet.

Cui petito flagitiosorum æstus in hoc regno tam frequens scaturientes, breui finituros præstolantes, biennio obstitimus, quod disciplinarum & philosophiæ semina, inter tam acerbas & varias rerum iacturas, mentium perturbationes & sceleratorum insultus, ægerrime nos attingere liceret. Attamen petentium votis pro viribus indulgere cupientes, temporum minuta illa interualla, quibus vix inter tot grassantium impetus salutis ope frui liceret, huic impẽdimus operæ, vt tandem hortantium animos pro votis expleremus. Si itaq; aliqua non penitus ad runcinam examinata emerserint, causam leuius habere lectorem obtestamur.

Quare, ordinem ab Euclide inchoatum sequuti, qui decimoquarto solidorum, decimo tertio in eadem sphæra constructorũ affinitates exponi decreuit: haud secus decimoquinto sibi inuicem inscriptorum, eorumdem collationes decimo sexto exponendas fuisse censuimus, vt fusius monito ad decimiquarti finem apposito disseruimus. Supererant decimo sexto numero & ordine peragendo, nouem theoremata, quæ ad eiusdem calcem, ne perturbaretur numerorum series, constituimus.

Contulimus insuper decimumseptimũ librum, quodam argumento priori editione designatum, quo regularium solidorum coagmentum, siue admirandam con-

nexionem discussimus, solidorum componendorum diffinitionibus, constructionibus, ac inscriptionibus, ornatum. Hunc sequitur illico decimusoctauus, inscriptorum & circunscriptorum latera necnon solida sibi inuicem conferens, numero absolutum theorematum, & ordine. Hæc autem, vt cuiq; matheseõn studioso pateat disciplinarum cultus, in immensa volumina propagari posse, modico sudore, adhibita cura, & excitato sibi discendorũ voto. Vt igitur rem attingẽtes de mixtorũ seu cõpositorum solidorum conditione differamus, componuntur & miscentur solida regularia, cùm singula in alia trãsformantur solida, seruatis laterũ basium forma, numero, æqualitate, & inclinatione: variatis tamen solidis angulis: tumq; bina cõeunt in vnum solida, hac solertia in se congressa, vt idem compositum corpus, vtriusq; componentium latera, planos angulos, bases, & basium aspectus seu inclinationes contineat, singulaq; iisdem numeris dimensa. Quia verò necessariò variantur solidi anguli, vt misceri possint solida solidis, bases basibus, & anguli angulis: hanc ob rem non permanent idem solidi anguli, quinimo alij fiunt, hacq; copula, simplicium singula vnico priuantur angulo, reliquis omnibus, composito corpori collatis. Vt exemplo diluci demus, copulantes bina dodecaëdri & icosaëdri solida in vnicum corpus, exibit icosidodecaëdron, quod quidem constabit duodecim dodecaëdri basibus pentagonis, viginti trigonis, ab icosaëdro sumptis, sexaginta lateribus, trigenis scilicet à singulis susceptis, centum viginti planis angulis: nam â singulis sexagenis, trigoni quidem ab icosaëdro, pentagoni verò à dodecaëdro, commodatis. Cùm autem dodecaëdri viginti sint solidi anguli, icosaëdri verò duodecim, ablato à singulis vnico, supererunt 30 icosidodecaëdri compositi anguli solidi. Haud secus bina cubi & octaëdri solida copulantes, in vnum exoctaëdron, componetur illud sex quadratis à cubo surreptis, octo verò triangulis ab octaëdro subfuratis, & viginti quatuor lateribus, cùm à singulis duodecim susceperit. Insuper 48 planis angulis, à singulis quatuor & viginti, rectis quidem à cubo, trigonalibus autem ab octaëdro totidem acceptis. Quia verò cubus octo, octaëdrum autem sex habent solidos angulos, ablato à singulis vnico supererunt duodecim exoctaëdri anguli solidi. Hæc autem de compositione mixtorum regularium solidorum, bina simplicia regularia solida suscipientium. Cùm autem his regularibus, aquis & similibus planis lateribus & angulis compositis, vnica superst pyramis, quæ veluti deplorata comparis inopia, nihil componere putetur. At ipsum tamen solidum, in conficiendis reliquorum simili sumptione solidis, tanto κεφαλαιωδέστερον quanto post habendum videbatur, apparebit. Nam pyramis bis sumpta duodecim producet latera, quatuor & viginti planos angulos trigonales, triangula etenim octo, solidas autem angulos totidem, à quibus binis sublatis, supersunt sex. Quæ omnia & singula, solidum conficiunt, non tantùm heteroclitum, aut aliorum methodo regulare mixtum, verùm etiam ipsum octaëdrum, reliquorum instar regulare simplex & compositum à bina pyramidis sumptione reliquis pari & eadem arte productum.

Componuntur autem hæc solida mixta, per vtriusuis componentium bifariam secta latera, & ablatas eisdem sectionibus laterum comprehensas pyramides: quod supereſt solidum, constabit binis illud componentibus solidis: nempe dodecaëdro, vel icosaëdro, icosidodecaëdrum: cubo autem, vel octaëdro, exoctaëdron. Vnica verò bis

sumpta

ſumptâ pyramide, octaëdron. Quorum ſingula regularia hac arte patefient, quòd eorum æqualia erunt & latera, componentium autem baſes, æquales & ſimiles, tum inclinatione, tum numero regularem ſolidi normam referentes. Cùm autem ea quæ de octaëdro à pyramide compoſito dicenda eſſent, inſcribendo, circumſcribendo, & cæteris conferendo, iam pridem decimo quarto & binis eum ſequentibus libris acta ſint, ſuperſedendum duximus: id nempe ſuo ſimplicium ordine, ad reliqua compoſita inſcribi, circumſcribi, & conferri docebitur, ne fruſtra prælibata repetamus. Compoſitaq; hæc regularia ſolida nil præ ſe ferre minus concipienda conceptura, ſiue collatura, præcipuis quinque ſolidis ſimplicibus.

FRANCISCI FLVSSATIS CANDALLAE GEOMETRICORVM ELEMENTORVM LIBER XVII.

Qui & ſolidorum regularium compoſitorum primus.

DIFFINITIO I.

EXOCTAEDRON eſt figura ſolida, æquilatera & æquiangula, ſex æqualibus quadratis, octóque triangulis æqualibus & æquilateris comprehenſa.

Dicitur Exoctaëdron comprehendi ſex quadratis, à cubo quidem ſuſceptis, octóque triangulis, ab octaëdro ſumptis, vt eodem ſolido, bina idem componentia complectatur, & miſceat ſolida.

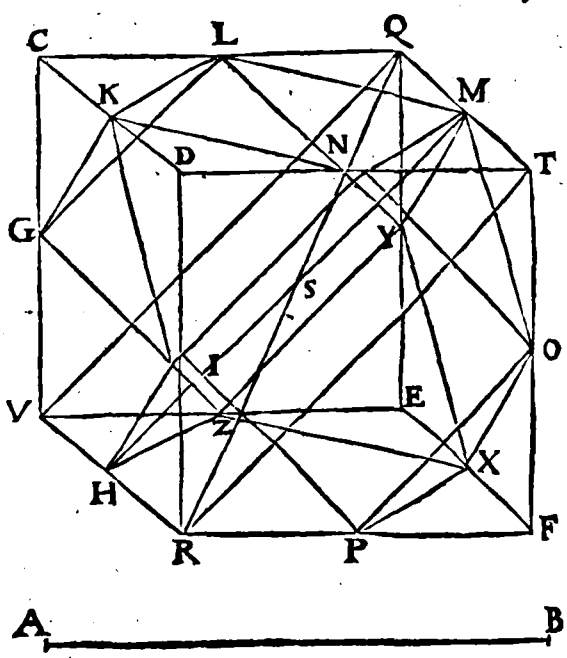
DIFFINITIO II.

Icoſidodecaëdron eſt figura ſolida, æquilatera & æquiangula, duodecim quinquangulis æquilateris, æqualibus & æquiangulis, vigintíque triangulis, æqualibus & æquilateris comprehenſa.

Prioris inſtar dicitur, icoſidodecaëdron duodecim contineri quinquangulis, à dodecaëdro ſumptis, viginti verò triangulis, ab icoſaëdro ſuſceptis, vt, icoſaëdrõ dodecaëdro mixtum, eodem foueat ſolido.

PROPOSITIO I. PROBLEMA I.

Exoctaëdron æquilaterum & æquiangulum conſtruere, & data ſphæra comprehendere, oſtenderéque dimetientem lateris duplum eſſe.



Proponatur ſphæra, cuius dimetiens ſit AB. Ipſi AB æqualis fiat TR: circa dimetientē TR ſit quadratum DRFT (per ſextā quarti): ſuper quadrato verò, cubus CDEFQTVR (per 15 decimi tertij), cuius dimetiēs ſit QR, & centrum s. Diuidantur bifariā cubi latera in G,H,I,K,L,M,N, &c. coniunctis ſectionibus à rectis IN,NO, OP,PI, & ſimilibus quadratorū angulos ſubtendentibus, quæ quidem ſunt æquales (per 4 primi) & angulos rectos continent, velut NIP: nam qui ad iſoſcelis baſium NID, recti dimidius eſt, necnon illi oppoſitus RIP: Reliquus itaque NIP rectus erit, & ſimiles. Quadratum ideo erit NIPO: & eadem cauſa quadrata erunt reliqua, NMLK, & KGHI, & illis oppoſita reliquis cubi baſibus inſcripta, quæ ſunt ſex, iuxta baſium cubi numerum. Rurſus quia triangulum KIN ſubtendit angulum cubi ſolidum qui ad D: ſimiliter KGL, eum qui ad C, & reliqua octo cubi ſolidos angulos ſubtendentia, quæ quidem ſunt æqualia & æquilatera, nempe æquis lateribus conſtructa, & quadrata concludentia, vtq; patuit quadrata triangula concludere, exoctaëdron erit, LMOXPHGKNYZI, (per diffinitionem) æquilaterū: nam ſub æqualibus ſubtēdentibus rectis: & æquiangulum, quum ſolidus quiſque eius angulus duobus quadratorum, & binis triangulorū æquilaterum cōtineatur planis angulis. Ceterū, quia parallela ſunt oppoſita cubi latera QT, VR, & dimetientes QVTR, baſium, parallelogrammum erit planum, quod per rectas QTVR. Quia item in eo plano iacet cubi dimetiens QR, rectáque idem planum bifariam ſecat MH, angulos exoctaëdri oppoſitos iungens, hæc ideo dimetientem bifariam ſecat, per coroll. 34 primi, ac ſeipſam, in eodem ſigno, per 4 primi. Oſtendetur eodem argumento reliquas angulos oppoſitos exoctaëdri iungētes, bifariam in centro s cubi ſe adinuicem ſecare. Nam ſinguli exoctaëdri anguli, in ſingulis cubi medijs lateribus degunt. Centro itaque s, interuallo SH, vel SM, ſphæra ducta ſingulos exoctaëdri angulos à ſigno s æquidiſtantes tanget. Quia verò AB, propoſitæ ſphæræ dimetiens, æqualis poſita eſt dimetienti RT, baſis cubi, cui æqualis eſt MH, per 33 primi, quæ quidem per centrum oppoſitos exoctaëdri iunget angulos: ea itaque dimetiens eſt propoſitæ ſphæræ exoctaëdron concipientis. Denique quum trianguli RFT latera, bifariam ſecet recta POR, proportionalia ſecat baſibus FR, ad RT, vt FP ad PO, per 2 ſexti. Atqui dupla eſt FR rectæ FP, ex hypotheſi. Dupla igitur erit RT, vel HM, dimetiens, rectæ PO lateris exoctaëdri. Haud ſecus oſtendemus ſectis bifariam octaëdri lateribus, ablatos ab eis comprehenſos ſolidos angulos, idem exoctaëdron relinquere. Quum enim mediæ laterū ſectiones coniunctæ, ſub ablatis ſolidis angulis totidem quot ſunt anguli quadrata deſcribant, per rectas quadrati Octaëdri lateribus dimidias & parallelas, per 2 ſexti: ſingulis verò Octaëdri triangulis ſimilia inſcribant triangula,

gula, nempe æquilatera, ex quadratorum lateribus constituta, idem relinquetur octaëdron, sex quadratis, octo verò triangulis æquilateribus constitutum. Exoctaëdrum itaque æquilaterum & æquiangulum construximus, &c.

COROLLARIVM I.

Cubi lateribus bifariam sectis, ablati solidi anguli ab eis comprehensi, solidum exoctaëdrum relinquunt, & proinde exoctaëdri angulos dimidias cubi circunscripti laterum sectiones possidere.

Nam circa singulos exoctaëdri solidos angulos, ablatæ sunt binæ pyramides, hinc inde dimidia cubi latera tollentes, vt ostensum est.

COROLLARIVM II.

Exoctaëdri quadrata cubi basibus inscripta sunt, & ideo omocentrica, & eandem ipsis inclinationem habent.

Nam inscripti anguli circunscripti latera dimidia tangunt, ex diffinit. Et insuper æquè à centro basis cubi distant, nempe dimidio cubi latere.

COROLLARIVM III.

Exoctaëdri dimetiens lateris est dupla.

Vt patuit R T, vel H M, duplam fuisse lateris P O.

Insuper octaëdri latera bifariam secta & ablata, idem quod similiter sectus cubus restituunt.

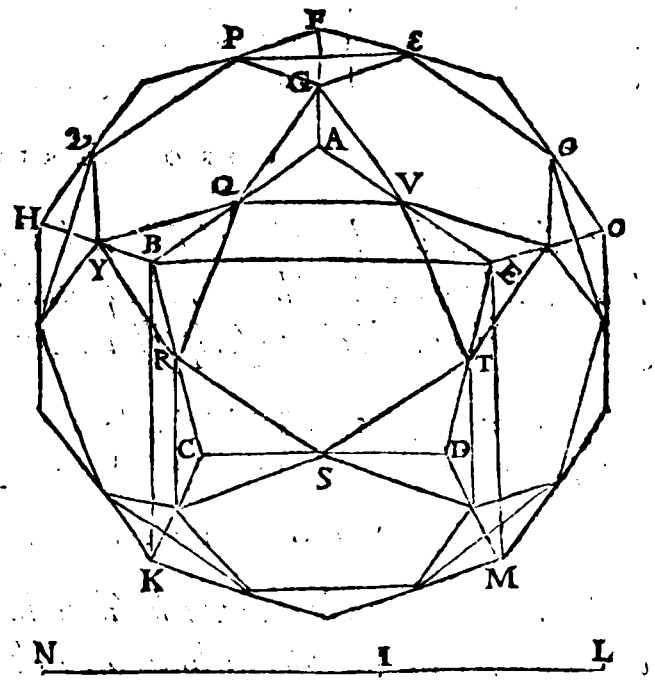
Nempe exoctaëdron, cuius triangula triangulis octaëdri inscripta, relinquuntur æqualia & æquilatera inter se octo octaëdri basibus, per iungentes medias laterum sectiones descripta: sex verò quadrata ab eisdem iungentibus, sub sex angulis solidis octaëdri delineata: ĩnuariatis itaque basium centris, cubi & octaëdri basibus circunscriptis, omocentrica remanent exoctaëdri triangula, ac quadrata, vt patuit, &c.

PROPOSITIO II. PROBLEMA 2.

Icosidodecaëdron æquilaterum & æquiangulum constructere, & data sphæra comprehendere, ostendereq; dimetientem extrema & media ratione sectam efficere maius segmentum, duplum lateris icosidodecaëdri.

Esto propositæ sphæræ dimetiens N L, quæ (per 30 sexti) secetur in I, efficiens maius segmentum N I, cui sit æqualis B E. Ex B E recta describatur cubus B E K M (per 15 decimi tertij): huic cubo circumscribatur dodecaëdrõ (ex 17 decimi tertij). Sit

tij) Sit autẽ illud ABCDEFHKMO, cuius latera ſingula bifariam diuidantur ſignis Q, R, S, T, V, X, Y, Z, P, t, θ, G, &c. coniunctis ſectionibus à rectis angulos pentagonorum ſubtendentibus, veluti QG, GV, VQ, QY, YR, RQ, VT, TX, XV, &c reliquis. Quoniam hæ rectæ ſubtendunt æquos pentagonorum angulos, æquis (nempe dimidiis) lateribus cõprehenſos, ipſæ ſunt (ex 4 primi) æquales. Triangula igitur æquilatera erunt, GQV, YQR, VXT, & reliqua ſolidos dodecaëdri angulos tollentia. Rurſus, quia cuilibet pẽtagono deſcribuntur quinque rectæ æquales



medias laterum ſectiones iungentes, vt ſunt QV, VT, TS, SR, RQ: illæ pentagonum in plano pentagoni dodecaëdri deſcribunt, circulo comprehenſum: nempe à centro pentagoni dodecaëdri, in huius pentagoni angulos demiſſæ ſunt æquales, cùm ſint perpendiculares in ſectas baſes (per 12 quarti): æquiangulum itaque & æquilaterum eſt pentagonum QRSTB (per 11 eiuſdem). Pari forma patebunt æqualia & ſimilia reliqua pentagona, in baſibus dodecaëdri deſcripta. Quæ igitur ſunt numero 12. Triangula verò æqualia & ſimilia, 20 ſolidos dodecaëdri angulos ſubtendentia, ſiue tollentia, ea de cauſa numero 20 erunt. Icoſidodecaëdron itaque conſtruximus (per diffinitionem) æquilaterum quidem, cùm omnia triangulorum latera ſint æqualia, & pentagonis communia: æquiangulum autem: nam ſinguli eius ſolidi anguli, ex binis pentagoni, & binis triánguli planis angulis, conſtant. Quod autem datę ſphæræ, cuius dimetiens fuit NL, cõtineatur, oſtendamus. Quoniam à centro dodecaëdri in dimidias laterum ſectiones, perpendiculares ſunt æquales, & dimidiæ earum quæ oppoſitas coniungunt dodecaëdri laterum medias ſectiones (per 3 cor. 17 decimi tertij), quæ per idem ſeſe bifariam in centro ſecant: ab eo itaque ſigno in angulos conſtitutos in ſectionibus ductæ ſunt æquales, quæ quidem ſunt triginta, iuxta laterum dodecaëdri numerum: poſſident namque ſinguli anguli, ſingulorum dodecaëdri laterum dimidias ſectiones. Super dimetiente itaque per ſingulos à centro æquidiſtantes angulos, ſphæra deſcripta ſolidum icoſidodecaëdron concludet. Quia verò huius ſolidi dimetiens eſt ea recta, cuius maius ſegmentum eſt BE latus dodecaëdro inſcripti cubi (per 4 cor. 17 decimitertij): Sed eiuſdem BE maioris ſegmenti tota fuit propoſita NL ex hypotheſi: Illud itaque ſolidum ſphæra data, cuius dimetiens fuit NL, concluſimus. Quòd inſuper huius lateris QV ſit duplum dimetientis NL maius ſegmentum BE doceamus: Quia trianguli AEB latera bifariam ſecant ſigna Q, & V, parallelæ ſunt QV, BE, (per 2 corol. 39 primi): proportionalia itaque ſunt AE, AD, AV, ſicut EB, AD, VQ, (per 2 ſexti). Dupla autem eſt AE recta AV: dupla igitur erit EB reliquæ VQ, (per 4 ſexti). Sed BE eſt latus inſcripti cubi (per 2 corol. 17 decimitertij) quæ fuit maius ſegmentum dimetientis NL. Maius itaque propoſitæ NL dimetientis, duplum eſt lateris QV icoſidodecaëdri datæ ſphæræ inſcripti. Icoſidodecaëdron itaque æquilaterum & æquiangulum conſtruximus, & data ſphæra, &c.

COROL

COROLLARIVM I.

Icosidodecaëdri pentagona basibus dodecaëdri ipsum constituentis inscripta sunt.

Vt QVTSR ipsi ABCDE inscribi ostensum est.

Et proinde basium centris omocentrica.

Nam à centro in inscripti angulos ductæ, sunt basibus circunscripti perpendiculares, & ideo æquales.

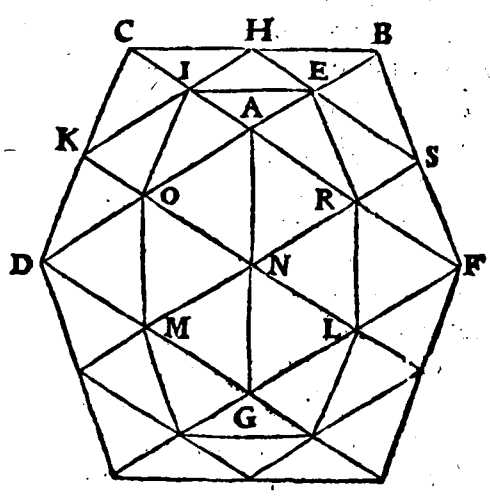
COROLLARIVM II.

Triangulorum coniunctorum opposita latera, & icosidodecaëdri opposita sunt adinuicem parallela.

Ex 2 sexti, vt latera PS, QV, lateri cubi BE, & sibi in eadem basi opposito, & reliqua illis opposita, & CD lateri QV oppositum cum sibi in triangulo continenti opposito, lateri cubi KM parallelum, & reliqua huiusmodi.

PROPOSITIO III.

Idem describitur icosidodecaëdron ablatis icosaëdri solidis angulis, quod à dodecaëdro persimiles laterum sectiones.



Describantur quinque triangula, pentagonum icosaëdri constituentia (per 16 decimitertij) quæ sint ABC, ACD, ADG, AGF, & AFB: quorum latera bifariam secta sint in E, I, O, N, R. Perspicuum est similiter EIONR pentagonum esse æquilaterum. Nam secta sunt bifariã latera (per 12 sexti), & æquiangulum (per 10 vndecimi), & planum, priori parallelum per 15 vndecimi. Pentagonum itaque EIONR angulum icosaëdri solidum tollit & subtendit dimidiis icosaëdri lateribus constitutum, ad signum A. Quare ablatis similiter reliquis icosaëdri solidis angulis, duodecim constituentur pentagona, cùm 12 sint eius anguli. Quia verò ablata dimidia latera solidos angulos tollentia, cuilibet icosaëdri basi triangulum regulariter inscribunt, (nam singuli eorum anguli, singulorum laterum similes tangunt sectiones: nempe dimidias, vt HEI, KIO, MON, LVR, SRE,) æquilaterum est quodlibet horum (ex 4 primi) & æqualia adinuicem: Viginti itaque viginti basibus icosaëdri inscripta relinquentur, duodecim pentagona (12 solidos icosaëdri angulos subtendentia) suis basibus concludentia. Idem itaque describitur icosidodecaëdron, ablatis icosaëdri solidis angulis, quod à dodecaëdro per similes laterũ sectiones descriptũ est.

COROLLARIVM.

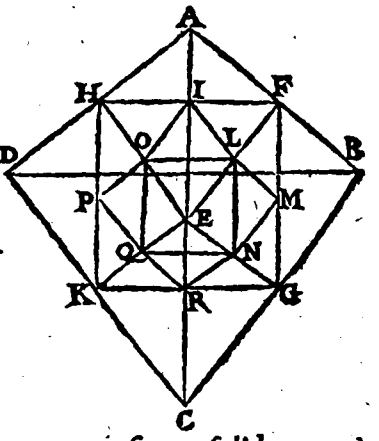
Icosidodecaëdri triangula, basibus icosaëdri illud constituentis inscripta sunt.

Vt HEI,

Vt H E I, vel K I O, basibus A B C, & A C D, inscripta esse ostendimus. Et proinde quia 30 sunt icosaëdri latera, 30 erunt icosidodecaëdri solidi anguli, dimidijs singulis lateribus coaptati.

PROPOSITIO IIII. PROBLEMA 3.

Propositæ pyramidi trilateræ & æquilateræ exoctaëdrō inscribere.



Esto pyramis trilatera æquilatera A B C D, cuius diuidantur bifariam latera singularum basium, A B C, A D C, &c. inscriptis triangulis E F G, E H K, &c. Rursus eisdem inscribantur sectis bifariam lateribus alia, L M N, O P Q, &c. Quoniam triangula E F G, E H K, sunt bases octaëdri pyramidi inscripti (per 2 decimiquinti), Triangula verò L M N, O P Q, basibus octaëdri inscripta, bases sunt exoctaëdri ab octaëdro detracti, per 3 cor. primæ huius), quatuor itaque bases pyramidis, quatuor exoctaëdri triangula continebunt, vt L M N, & O P Q, & proinde duodecim eiusdem exoctaëdri solidos angulos, cùm singula triangula singulis pyramidis basibus tres conferant solidos angulos. Cùm autē sub singulis quatuor pyramidis solidis angulis, quatuor basiū octaëdri singulæ contineantur bases, vt E F H, E K G, Sequetur sub eisdem angulis alia quatuor iacere, octaëdri basibus inscripta exoctaëdri triāgula, per eandē 1 huius; vt O I L, Q R N. Octo itaque exoctaëdri triangula, sub quatuor pyramidis angulis, & quatuor eiusdem basibus contineri, manifestum est. Ostendamus sex eiusdem exoctaëdri quadrata sub sex pyramidis lateribus consistere. Cùm triangula æquilatera sint E F G, E H K, æquales angulos basium pyramidis æquis lateribus comprehensos subtendentia, (per 4 ptimi,) ipsaque latera E F, E G, bifariam secta, parallela erit L N rectæ F G, per 2 sexti. Eodem item argumento, parallela erit F G, rectæ A C, in triāgulo A B C. Rectæ itaque A C, L N, eidem F G, parallelæ, ad se parallelæ erūt per 30 primi. Eadē causa eidē A C parallela erit O Q, & proinde reliquæ L N, parallela erit eadē O Q, per 9 vndecimi, & æqualis, nempe æqualium laterū F G, H K, dimidiæ (per 2 sexti). Eas itaque coniungentes rectæ O L, Q N, æquales erunt & parallelæ (per 33 primi). Quadrangulum itaque æquilaterum erit O L N Q, & planum per 7 vndecimi. Quod autem sit rectangulum patet, nam continetur quatuor rectis parallelis quadrati octaëdri quatuor lateribus, vtpote quadrati H F G K: quare æquales angulos comprehendunt per 10 vndecimi: & igitur rectos. Eadem ratione reliqua sub reliquis quinque pyramidis lateribus quadrilatera, quadrata ostendentur, exoctaëdron cum præfatis triangulis constituentia. Propositæ igitur pyramidi trilateræ & æquilateræ exoctaëdrum inscripsimus.

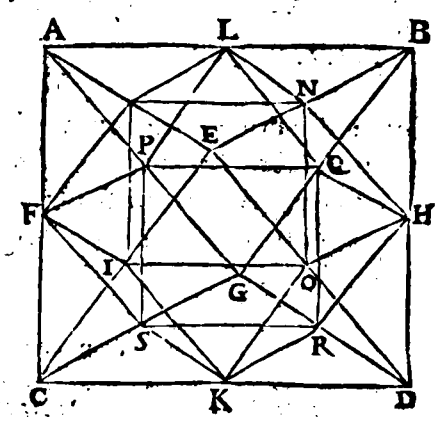
PROPOSITIO V. PROBLEMA 4.

In dato octaëdro exoctaëdrum collocare.

Proponatur octaëdrum A B C D E G, cuius secentur bifariam singula latera, scilicet quæ ad angulum A in signis L, M, P, F, quæ ad angulum B, in signis L, N, Q, H, quæ ad angulum D, in signis H, O, R, K, quæ verò ad angulum C, in signis F, I, S, K, quæ autem ad angulum E, in signis M, I, O, N, quæ demum ad angulum G in signis P, S, R, Q, quæ quidem signa sex quadrata coniunctis rectis designabunt, sub sex octa-

ëdri

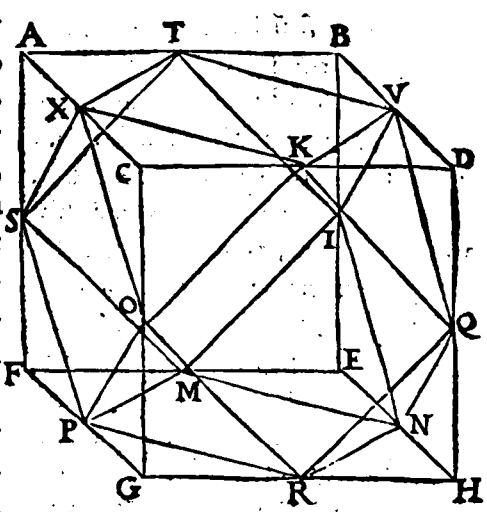
ēdri angulis conſtituta: & quadratis octaëdri parallela, vt quadratum LMFP, quadrato BECG: & quadratū LNQH, quadrato ABDG, & cetera (per 2 ſexti) nam ſecantur biſariam triangulorum octaëdri latera: Quare & ex eorum quadratorum lateribus, in ſingulis octaëdri triangulis conſtituuntur triangula ſingula, nempe in triangulo ABE, conſtituitur LMN, in triangulo AEC, triangulum MIF, in BGD, aliud QRH, & ſic reliqua, quæ quum ſint octo, iuxta baſium octaëdri numerum, ſex quadratis coniuncta, exoctaëdron conſtituent, per primam huius diffinitionem. Nam ex æqualibus triangulorum lateribus conſtant ſingula eius latera, anguli verò ſolidi ex binis rectis quadratorum angulis, & binis æquilaterorum triangulorum componūtur: & ideo æquilaterum & æquiangulum, octaëdro verò inſcriptum, cùm ſinguli eius ſolidi anguli ſingula octaëdri dimidia latera tangant, per 26 diffinitionem vndecimi. In dato itaque octaëdro exoctaëdrum collocauimus. Hæc obiter, cùm ſit fere primæ huius tertium corollarium.



PROPOSITIO VI. PROBLEMA 5.

In propoſito cubo exoctaëdron conſtituere.

Detur cubus ABGH, cuius ſecentur biſariam latera, ſcilicet quadrati ABCD, in T, V, K, X, quadrati FEGH, in M, N, R, P: quadrati ACFG, in X, O, P, S: quadrati BDEH, in V, Q, N, I: quadrati ABFE, in T, I, M, S: & quadrati CDGH, in K, Q, R, O. Coniunctæ ſectiones quadrata deſcribent, vt TVKX, vel TIMS. Nam rectæ TV, TI, angulos rectos æqualibus rectis comprehenſos TBV, TBI, ſubtendunt, quadratorum ABD, ABE: quare æquales erunt eædem TV, TI, per 4 primi: ſimiliter & reliqua præfata quadrāgula deſcribentes. Quia verò rectus eſt TBI, angulus iſoſcelis BIT, reliqui BTI, BIT, ſinguli, dimidium recti poſſidebūt, per 5 & 32 primi. Similiter dimidius recti erit EIM, rectus itaque erit reliquus TIM, ex 13 primi: quadratum igitur erit TIMS, & planum: nempe quadrato ABEF inſcriptum. Similiter quadrata erunt reliqua ſex quadrangula, ſex cubi baſibus inſcripta. Quia verò ex eorum quadratorum lateribus deſcripta triangula, vt, TXS, vel TVI, angulos octo cubi ſolidos ſubtendunt, æqualia æquilatera & æquiangula, ſunt dimidia cubi latera ſumentia, per conſtructionem: Relinquitur exoctaëdron ſex quadratis octóque triangulis deſcriptum propoſito cubo ABGH, per corol. 1 primæ huius, cùm dimidia ſingula cubi latera ſinguli exoctaëdri anguli tangant, per 26 diffinit. vndecimi. In propoſito itaque cubo exoctaëdrum conſtituimus. Hæc primam huius imitatur ferè.



COROLLARIVM I.

Ex his aſſumimus, cubi dimetientes, centra triangulorum oppoſitorum,

torum, in exoctaëdro, ſiue circulorum ea triangula circunſcribentium, pertranſire.

Cùm enim dimetientes cum cubi lateribus æquales angulos comprehendant, per 8 primi, ſubtenſæ in trianguli T S X, à dimetiente A H, in ſingulà ſigna S, X, T, erunt æquales, per 4 primi, & ideo in dimetiente centrum erit circuli, per 9 tertij. Quare ea centra triangulorum iungentes rectæ, æquales erunt, nempe æqualium ablatarum reliquæ.

COROLLARIVM II.

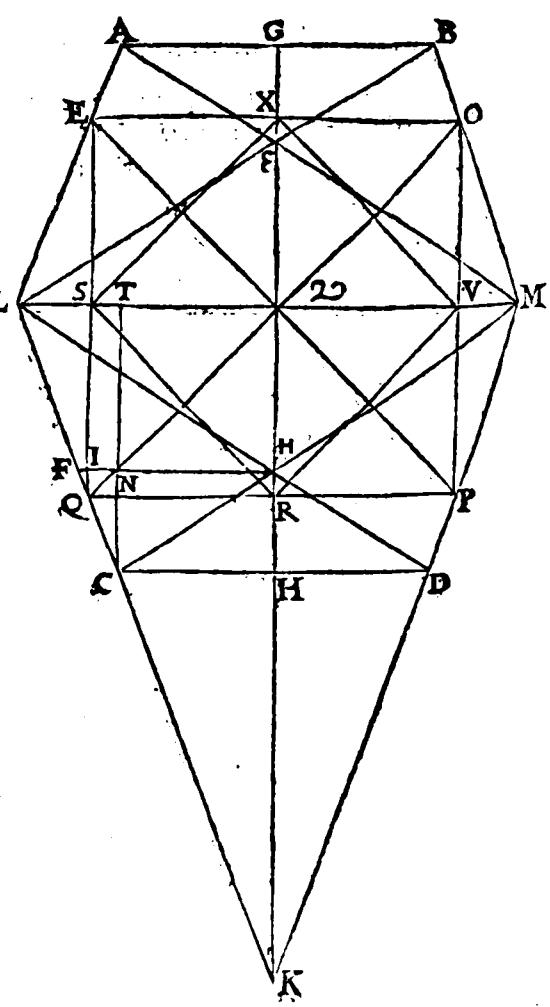
Inſuper ſecatur exoctaëdron bifariam tribus quadratis, ſe ad rectos in centro ſecantibus.

Nempe à quadratis, quæ fiunt ex dimetientibus quadratorum exoctaëdri, quæ ſunt rectæ medias ſectiones oppoſitorum laterum in cubi baſibus iungentes, quæ quidem tria quadrata conſtituunt, cubi reliquis baſibus æqualia & parallela, cùm ſint æquis lateribus comprehenſa: ſecant autem cubum bifariam per corol. 39 vndecimi, cùm ſint per centrum acta: & ideo exoctaëdron cubo concentricum produnt.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA 6.

In dato icoſaëdro exoctaëdron concludere.

Eſto propoſitũ icoſaëdron ABCD, cuius ſumantur ſex oppoſita latera tribus rectis ſe ad rectos bifariam in centro ſecantibus, bifariã ſecta (per 2 corol. 14 decimiquinti) vt A B, C D, & quæ per L & M: Inſuper ε ϖ, & ſibi oppoſitum latus, quæ ſunt ſex bifariam ſecta, rectis G H, L M, & ea, quæ à ſigno Z in oppoſitũ ducitur. Quoniam ea bina oppoſita latera vt A B, C D, ſunt parallela (per 2 corol. 16 decimitertij) ducatur per ea planum A L C D M B, quod quidem planum eſt: nam icoſaëdri dimetientes A D, B C, & iungentes oppoſita latera G H, L M, ei quæ per Z, & ſignum oppoſitum, fuerunt ad rectos (per præfatũ 2 corol. 14 decimiquinti). Reliquæ igitur A D, B C, in eo plano ipſam quæ per Z bifariam ſecantes ad rectos eidem erunt, per 4 vndecimi. Quia verò per ſingulas rectarũ G H, L M, & eam quæ per Z, poſſunt duci plana, ponamus plana ducta continentia binas earum: erunt igitur tria ad rectos ſe ſecãtia (ex 18 vndecimi) quorum vnum eſt A B C D L M, con-

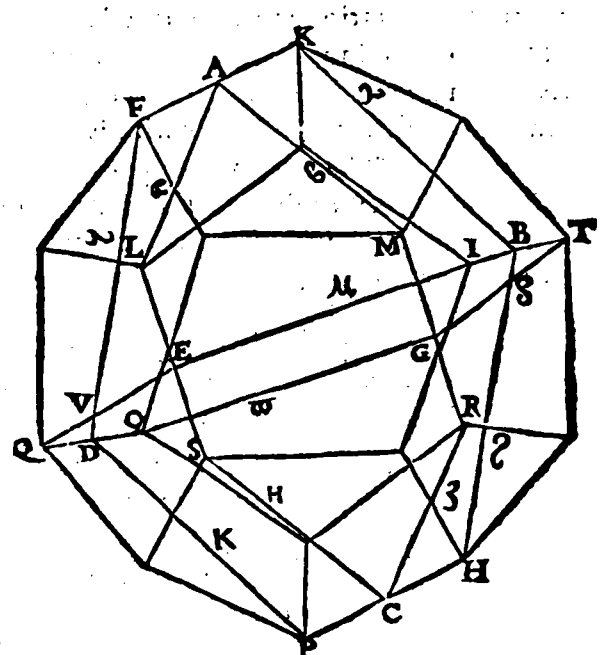


tinens

tinens binas earum G H, L M, & bina latera A B, C D, icosaëdri basium perpendiculares erunt, ab angulo A, in dimidium latus quod per L, velut A L, B M, C L, D M: Quæ secentur extrema & media ratione, vt L C, in F, & rursus secetur minus eius segmentum F C in ratione totius Q C, ad minus eius segmentum F Q, (per cor. 10 sexti) & similiter reliquæ in E, O, P, secentur iunctis E Q, Q P, P O, O E. Producatur iungens G H in K: producantur etiam perpendiculares L C, M D, quæ necessariò concurrant in K. Nam anguli inclinationis icosaëdri qui ad L, & M, sunt æquales: recti autem qui ad V, & latera V M, V L, quæ æquis adiacent angulis æqualia. Triangulorũ igitur K L Z, K M Z subtensæ L K, M K, erunt æquales (per 26 primi). A signis C, & F, fiant parallelæ, scilicet C T rectæ G H, secãs Q P, in N, & F S, rectæ L M, secãs Q E, in I. Quoniam iungentis L M, maius segmentũ est C D, (per 1 cor. 16 decimitertij) erit dimidiæ Z L, similiter maius C H dimidia (per 15 quinti): Quare totius K L, maius erit K C, (per 2 sexti): est namque C T parallela reliquo lateri Z K. Quia verò L F, fuit maius rectæ L C, erit sicut tota K C, ad maius L C, sic L C, ad minus L F: nam vndique cadit extrema & media ratio (per 5 decimitertij & 2 decimiquarti). Qualium igitur K C, est tota, L F erit minus. Atqui fuit C Q, tota ad F Q minus: Erit itaque sicut vna K C, ad vnam L F, sic omnes K C Q, ad omnes L F Q per 12 quinti, & diuisæ K C, ad K Q, sicut L F, ad L Q: & proinde (per 2 sexti) R N, ad R Q, vt S I, ad S Q. Sed R N, (vel C H, sibi æqualis) fuit maius rectæ L Z: fuit autem L F, maius rectæ L C, & proinde (per eandem 2 sexti) Z S, fuit maius rectæ Z H, cui quidem Z S, est æqualis S I, inter parallelas. Sed dimidiæ Z L, & Z H, iungentium, fuerunt æquales: earum ideo maiora segmenta R N, & S I, erunt æqualia: fuit autem R N, ad R Q, vt S I, ad S Q: Erit igitur vicissim R N, ad S I, vt R Q, ad S Q. Sunt autem R N, S I, æquales: Erunt igitur R Q, S Q, similiter æquales (per 14 quinti). Et ideo Q P, & Q E, earum duplæ, æquales erunt: quæ cum oppositis E O, O P, quadratum constituent E O P Q, cùm latera eius sint parallela rectis G H, L M, se ad rectos secantibus. Haud secus in tribus præfatis similibus planis, similiter constituentur quadrata, quorum duodecim anguli, duodecim exoctaëdri angulos, in duodecim basium icosaëdri perpendicularibus constituent: latera verò eorum, dimetientes erunt quadratarum exoctaëdri basium: quæ verò harum dimetiẽtium extrema iungunt, latera sunt exoctaëdri, quæ sunt æqualia, (ex 4 primi) nam subtendunt rectos angulos, à semidimetientibus quadratorum æqualium, in planis ad rectos se secantibus constitutis, comprehensos, ex constructis & 2 corol. 14 decimiquinti. Quæ quidem sex eiusdem quadrata sub sex icosaëdri oppositis præfatis lateribus, duodecim bases icosaëdri copulantibus constituuntur, vt quadratum S R V X, sub latere icosaëdri ss, quadratum verò eidem oppositum, sub eidem ss, opposito latere circa dimetientes X R, & eidem oppositam, & latera quadrati E O P Q, reliquorum quadratorum exoctaëdri dimetientes. Quod autem exoctaëdri quadrata sint plana, quæ scilicet per dimetiẽtes E O, O P, P Q, vel Q E, patet, cùm eadẽ perpendicularis Z R cadat in dimetientem Q P, & reliquam quæ per signum R est eidem ad rectos, in quadrato quod per Q P, & sic in reliquis, binæ dimetientes se se tangentes in R sint in eodem plano (per 2 vndecimi), & ideo earum quadrata. Triãgula verò octo sub reliquis octo eiusdem icosaëdri basibus singula angulos constituentia, in perpẽdicularibus trium basium similiter sectis, harũ octo singulas bases obeuntium. Quod quidem exoctaëdron æquilaterum est: Nam constat lateribus quadratorum circa æquales dimetientes constitutorum, vt quadratum V R S X, circa X R dimetientem & reliqua circa eidem X R, oppositam, & reliquas E O, O P, P Q, Q E, dimetientes. Quia verò tria hæc plana ad scinuicem recta sunt, latera E X, E S, S X, triangulis & quadratis communia, sunt æqualia, nempe æquos angulos æquis lateribus comprehensos (vt sæpius ostendimus) subtẽdentia. Exoctaëdron itaque erit sub 12 angulis, S R V X, & quatuor oppositis, & reliquis E O P Q, cõprehensum, icosaëdro proposito inscriptũ. In dato igitur icosaëdro exoctaëdron conclusimus.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA 7.

In dato dodecaëdro exoctaëdron inſcribere.



Proponatur dodecaëdrō ABCD, cuius ſumantur ſex latera, tribus rectis ſe ad rectos bifariam ſecantibus, bifariam ſecta(per 3 cor. 17 decimi tertij),quæ ſecentur in ſignis A, B, C, D, E, G, à quibus excitentur perpendiculares binæ, in oppoſitos angulos binarum baſium his lateribus coniunctarum, quæ ſint AL, AM, BK, BH, CS, CR, DF, DP, EQ, EI, GO, GT. Secentur autem illæ duodecim perpendiculares extrema & media ratione (per 30 ſexti) maioribus ſegmentis ad latera iunctis, in ſignis α,β,γ,δ,ζ,θ,κ,λ,μ,ν,ϖ,ϱ, dico hæc duodecim ſigna duodecim exoctaëdri dodecaëdro inſcripti ſuſcipere angulos. Quoniam inſcripti dodecaëdro cubi duodecim latera, ſubtendunt hos duodecim pentagonorum angulos, à quibus in oppoſita latera cadunt perpendiculares (per 8 decimiquinti): eadem autem cubi latera, ſecant perpendiculares extrema & media ratione (per 3 decimiſexti) quæ eadem à perpendicularibus per centrum actis bifariam ſecantur(per 3 tertij:)Nam ad rectos ſecatur, cùm ſit parallela oppoſito lateri pentagoni (per cor. 3 decimiſexti:) Atqui in medijs laterum cubi ſectionibus inſcribuntur exoctaëdri anguli (per ſextam huius) qui quidem tangunt huius dodecaëdri igitur baſes in medijs ſubtendentibus,vt α,β,γ,λ, &c. Exoctaëdron itaque erit his duodecim ſignis α,β,γ, δ,ζ,θ,κ,λ,μ,ν,ϖ,ϱ deſcriptum. In dato igitur dodecaëdro exoctaëdrum inſcripſimus.

COROLLARIVM.

Idem dodecaëdron ſuſcipit cubum, & cubo inſcriptū exoctaëdron.

Nam diximus inſcripti cubi latera, ſecare perpendiculares pentagonorum, & in his ſectionibus angulos octaëdri cubo inſcripti conſtitui ex 6 huius.

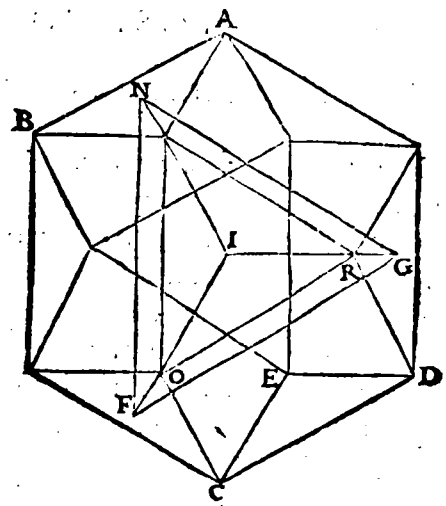
PROPOSITIO IX. PROBLEMA 8.

In dato exoctaëdro pyramidem trilateram & æquilateram inſcribere.

Proponatur exoctaëdron ABCD, cuius triangulum ſit DEC: huic triangulo proxima trium triangulorū centra ſumantur (ex 3 quarti) quæ ſint I, G, F. Trianguli ipſi CED oppoſiti ſumatur centrum (ex eadem), ſitq; N: iungantur FI, IG, GF, N,F,N,I,N,G. Dico pyramidem eſſe NFGI & exoctaëdro ABCD inſcriptam eſſe. Quoniam octaëdri exoctaëdrum conſtruentis baſium centra ſunt communia(per 3 cor. primæ huius) recta FG iungit centra binarum octaëdri baſium oppoſitarum angulum ſolidum conſtituentium, ſuper quadrato CDRO, per 6 decimiquinti,

quæ

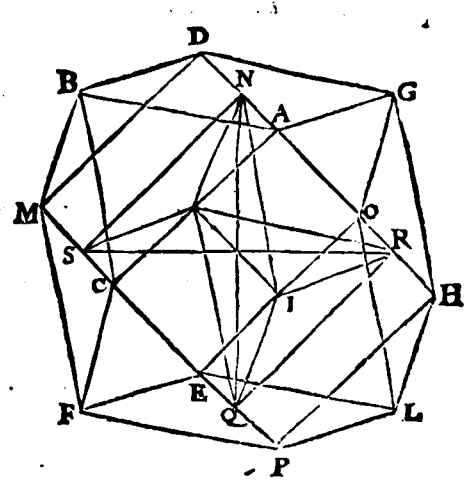
quæ & in exoctaëdro iungit centra triangulorum eodem quadrato diſtantium. Huic & reliquæ FI, IG, NF, NI, & NG, ſimili ſitu centra baſium iungẽtes, æquales oſtendantur in triangulis ex binis baſiũ octaëdri perpendicularibus, & rectis centra earum iungentibus, quæ per 4 primi æquales erunt, cùm æquos angulos æqualibus rectis comprehenſos ſubtendant in octaëdro. Et proinde in ab eo producto exoctaëdro, cuius non variãtur baſium centra per 3 cor. huius. Aequilatera igitur & æqualia erunt quatuor triangula FIG, NFI, NIG, & NFG, quæ igitur pyramidem conſtituunt, cuius ſinguli quatuor qui ad F, G, I, N, anguli ſingularum quatuor exoctaëdri baſium centra poſſident: pyramidem itaque ſibi inſcriptam ſuſcepit exoctaëdron ABCD, per 26 diffinitionẽ vndecimi. In dato igitur exoctaëdro pyramidem trilaterã & æquilateram inſcripſimus. Hanc eandem ſuſcipit octaëdrũ exoctaëdro circumſcriptum.



PROPOSITIO X. PROBLEMA 9.

In dato exoctaëdro octaëdron conſtituere.

Eſto exoctaëdrõ BDLP, cuius ſex quadratæ baſes ſint ABDG, GHLO, LPFE, FMBC, MDOE, & ACPH. harum ſex baſium ſumantur centra N, R, Q, S, T, I, quæ tribus rectis NQ, SR, & TI, iungantur. Quoniam rectæ illæ cẽtra baſium oppoſitarum cubi iungunt: nam ſunt eadem centris oppoſitorũ exoctaëdri quadratorum (ex 3 cor. primæ huius) æquales erunt cubi lateribus, ſiue vertici, & ſeſe in centro bifariam, & ad rectos ſecant (per cor. 3 decimiquinti). Quæ igitur angulos à dimidijs earum in centro contentos ſubtendunt, æquales ſunt (per 4 primi) ſcicet NR, NT, NI, NS, QR, QT, QI, QS, TR, RI, IS, ST, quæ ſolidum octo triangulis æqualibus & æquilateris NRT, NTS, NTI, NIS, QRT, QTS, QSI, QIR, comprehenſum reſtituunt, quod ideo octaëdrum dicetur (ex 22 diffin. vndec.) exoctaëdro BDLP inſcriptũ: eo quòd ſinguli eius ſex, N, S, Q, R, T, I, anguli ſingulas ſimul eius quadratas baſes tangant (per 26 diffinit. vndec.) In dato igitur exoctaëdro octaëdron conſtituimus.



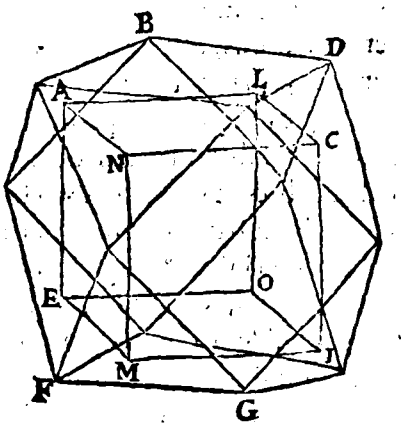
COROLLARIVM.

Idẽ octaëdron cubo, & ab ipſo producto exoctaëdro inſcribitur.

Nam in vtroque bina octaëdri latera angulum rectum continẽtia, æquales ſubtendunt rectas, nempe latus aut verticem cubi, qui & dimetiens quadrati exoctaëdri: & hac de re ſibi inuicem ſunt æqualia: præterea octaëdri anguli vtriuſque quadratorum centra inuariata poſſident.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA 10.

In dato exoctaëdro cubum deſcribere.



Detur exoctaëdron B D G F, cuius triangulorum centra ſint A, L, C, N, E, O, I, M, iunctis A L, N C, A N, L C, E O, M I, O I, E M, A C, N M, L O, & C I, quæ quidem ſunt in octaëdro proximarum baſium centra iungentes, ſiue cubi latera, per 4 decimiquinti: quæ ſingula dimetientis octaëdri nonam poſſunt partem, ex 14 decimiſexti: quare æqualia erunt ad inuicem: ſcilicet quæ ſex hæc quadrangula iunctis baſium centris deſcribũt. Atqui concẽtricæ ſunt exoctaëdri & octaëdri baſes (ex 3 corol. 1 huius) quadrata hæc continentes, A L C N, E O I M, A N M E, L C I O, A L O E, & N C I M, cubum octaëdro inſcribentia, ex eadem 4 decimiquinti. Quare & eadem quadrata erunt ipſi exoctaëdro ſimiliter cubum deſcribentia. In dato igitur exoctaëdro cubum deſcripſimus.

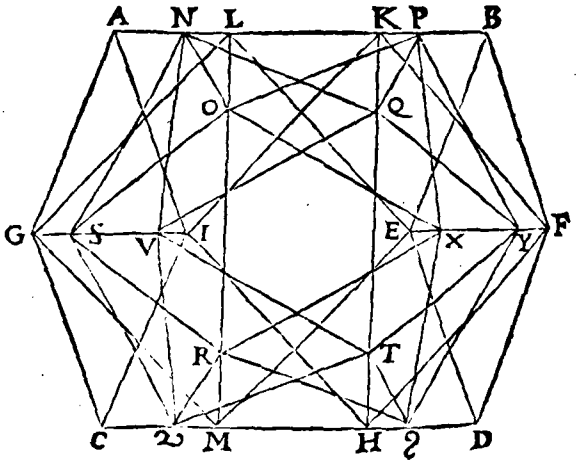
COROLLARIVM.

Idem cubus octaëdro, & ab ipſo producto exoctaëdro inſcribitur.

Nam eadem exoctaëdri baſium centra, quæ ab octaëdro inuariata ſumpſit, obtinet, ex 3 corol. 1 huius.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA 11.

In dato exoctaëdro icoſaëdron deſignare.



Eſto propoſitum exoctaëdron A B C D, cuius ſex quadratorum dimetiẽtes ſint, ſcilicet E F, quadrati B E D F: G I, quadrati A G C I. K H, quadrati I K F H: L M, quadrati L G M E: A B, quadrati quod in plano A L K B: & C D quadrati C M H D, quæ bifariam diuiſæ, extrema & media ratione ſecentur (per 30 ſexti) maioribus ſegmentis circa totius mediũ poſitis. Sint autem dimidiarum ſectiones N P, S V, O R, Q T, X Y, & Z Q. Quoniam ſex ſunt quadrata exoctaëdri, ſex erunt eorum dimetientes, quarum quęlibet binas ſectiones extremæ & mediæ rationis ſuſcipit, à conſtructione. Duodecim itaque erunt ſigna, in ſex dimetientibus conſtituta, baſium exoctaëdri. Dico ea ſigna duodecim icoſaëdri exoctaëdro inſcripti ſolidos angulos continere. Ducantur rectæ N S, N V, N Q, N P, N O, angulum N, conſtituentes: Item rectæ S N, S O, S R, S Z, S V angulum S: Rectæ V S, V Z, V T, V Q, V N,

V N, ipſum V: Simili ordine reliquos deſcribemus icoſaëdri angulos qui ad O, P, Q, Y, X, S, T, Z, R. Et cùm baſium exoctaëdri dimetiẽtes eædem ſint rectæ, eis quæ baſium cubi oppoſita biſariam ſecant latera, ex conſtructione exoctaëdri & prima huius: Quæ verò baſium cubi oppoſita ſecant biſariam latera, ſunt quæ ſimili harum dimetientium ſectione duodecim angulos icoſaëdri cubo inſcripti ſuſcipiunt (per 14 decimiquinti): Exoctaëdro itaque A B C D, inſcriptum erit icoſaëdrum, per 26 diffinit. vndecimi. Nam ſinguli duodecim eius anguli, duodecim quadratorum dimetientium exoctaëdri ſimiles ſectiones, ſimul tangunt. In dato igitur exoctaëdro icoſaëdrum deſignauimus.

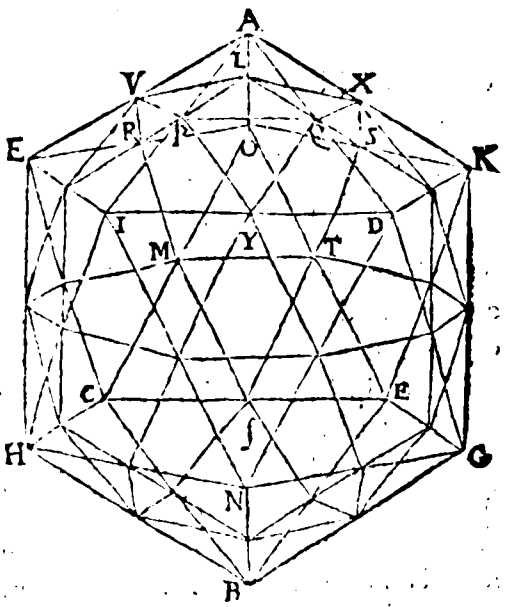
COROLLARIVM.

Idem icoſaëdron cubo, & ab eo deſcripto exoctaëdro inſcribitur.

Nam eædem rectæ in vtroque icoſaëdri ſuſcipiunt angulos, & intima ſigna iungunt.

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA 16.

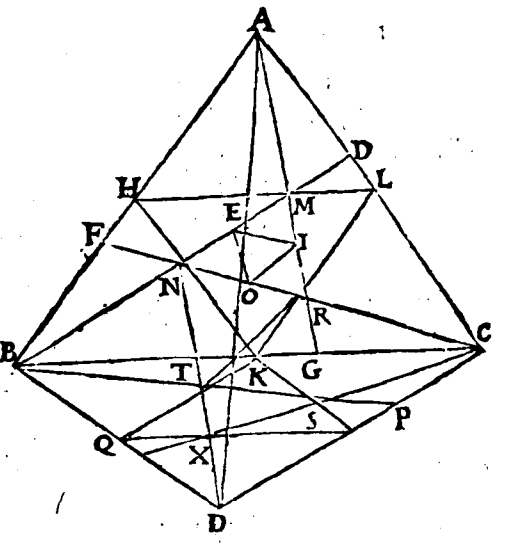
In dato icoſaëdro icoſidodecaëdron deſcribere.



Eſto propoſitum icoſaëdrum, *cuius* duodecim ſint anguli A, F, H, B, G, K, O, I, C, N, E, D: ſecentur ſingula eius latera biſariam, iunctis rectis ſecantibus ſingulis eius baſibus, triangula inſcribentibus, vt pote in triangulo A F O, triangulum V R L, in A O K, L X S, in A I D, P Q Y, in O C E, M T S, & ſic reliqua (per 3 huius). Relinquetur ablatis icoſaëdri ſolidis angulis, dimidijs lateribus eius comprehenſis icoſidodecaëdron (ex eadem) ipſi icoſaëdro inſcriptum: nam ſinguli eius anguli, dimidia icoſaëdri tangunt latera, cùm biſariam ſecta ſint à rectis icoſidodecaëdron deſcribentibus (ex eadem & eõſtructione). Quare quot ſunt icoſaëdri baſes, tòtidem erunt icoſidodecaëdri triangula: nempe ſingula ſingulis inſcripta, ſcilicet 20. Præterea, quoniã horum triangulorum latera, auferunt icoſaëdri ſolidos angulos, vt oſtendimus, deſcribentur totidem pentagona ſolidos icoſaëdri angulos ſubtendentia, & tollentia, quot ſunt iidem anguli, ſcilicet 12: nempe angulum qui ad A, ſubtendit pentagonum L V P Q X: angulum verò qui ad O, pentagonum L R M T S, & ſimiliter reliqua. Quæ quidem ſingula triangulis ſunt obſita, triangulaque pentagonis ex conſtructione. Icoſidodecaëdron itaque 20 triangulis, duodecim pentagonis, ac 30 ſolidis angulis, in triginta icoſaëdri mediis lateribus conſtituimus. In dato igitur icoſaëdro icoſidodecaëdron deſcripſimus.

PROPOSITIO XIIII. PROBLEMA 17.

In data trilatera & æquilatera pyramide, icoſidodecaëdron collocare.



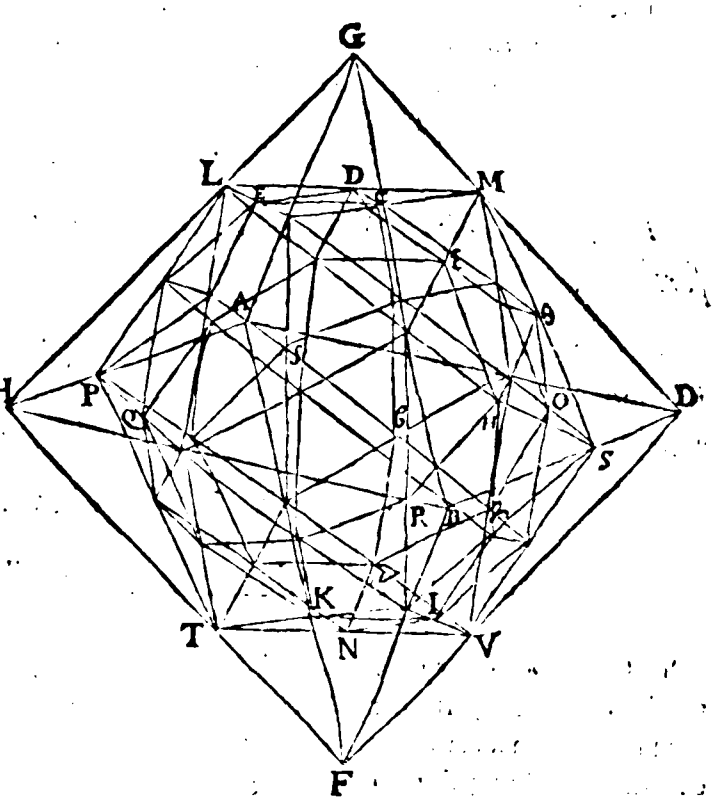
Esto propoſita pyramis trilatera æquilatera ABCD: Ab eius baſium angulis mittantur rectæ, ſecantes oppoſita latera extrema & media ratione. Vt in baſi ABC, rectæ AG, BD, CF: ipſæ deſcribunt triangulum icoſaëdri pyramidi inſcripti (per 4 decimiſexti) ſit illud MRN: Cùm autem icoſaëdro contineatur icoſidodecaëdron (ex 3 huius) cuius triangula baſibus icoſaëdri inſcripta ſunt (per eandem 3) ſit icoſidodecaëdri triangulum EIO, baſi MRN, inſcriptum. Sequetur pyramidis baſim ABC tres icoſidodecaëdri continere angulos ſolidos, qui ad E, I, O: Et proinde quatuor pyramidis baſes in 4 icoſaëdri baſibus 12 continere icoſidodecaëdri angulos ſolidos. Præterea cùm icoſaëdri pyramidi inſcripti baſis, octaëdri eadem pyramide comprehenſi baſi contineatur, ſcilicet baſi HLK, per corol. 2 decimiquinti; quæ quidem deſcribitur coniunctis mediis laterum pyramidis ſectionibus (per 19 decimiquinti,) & ſubtendent octaëdri baſes, pyramidis ſolidos angulos (per 2 decimiquinti), & proinde quatuor octaëdri baſes, quatuor pyramidis angulis ſupponentur, necnon quatuor icoſaëdri eidem octaëdro inſcripti, quæ recipit eadem pyramis (per 19 decimiquinti:) Quare & quatuor icoſidodecaëdri baſes, icoſaëdri baſibus inſcriptæ eiſdem quatuor pyramidis angulis ſupponentur. Erunt igitur 12 icoſidodecaëdri anguli, quatuor pyramidis ſolidis angulis ſuppoſiti, qui cum duodecim quatuor pyramidis baſes poſſidentibus, efficient 24 icoſidodecaëdri angulos. Superſunt ſex. Iungantur oppoſitarum pyramidis laterum mediæ ſectiones, tribus rectis bifariam ſe in centro ſecantibus, quæ quidem erunt octaëdri pyramidi inſcripti dimetientes, ex corol. ſecundæ decimiquinti, ſecentur earum dimidia extrema & media ratione (per 30 ſexti), maioribus ſegmentis ad centrum ſtantibus: Dico in his ſex ſectionibus, ſex reliquos icoſidodecaëdri pyramidi inſcripti conſtitui angulos. Patuit 16 decimiquinti, latus icoſaëdri octaëdro inſcripti ſecuiſſe ſemidimetientem octaëdri extrema & media ratione, & ab ea bifariam ſectum fuiſſe, eiuſdem ſectionis ſigno. Patuit inſuper tertia & decimatertia huius, icoſidodecaëdron icoſaëdro inſcriptum, angulos in mediis laterum circunſcripti conſtituere ſectionibus. Dicemus itaque ſex icoſidodecaëdri pyramidi inſcripti reliquos angulos ſex earum quæ iungunt pyramidis oppoſitorum laterum medias ſectiones, ſignis dimidias iungentes extrema & media ratione ſecantibus, inſidere: qui quidem ſex anguli aſſumptis 24 præfatis, 30 icoſidodecaëdri angulos conſtituunt, pyramidi verò inſcripti, cum eius terni quique anguli ſingulas pyramidis baſes ſimili ſitu poſſideant, & reliqui ſex ſimiles ſecantium ſectiones haud ſecus denotent. In data igitur trilatera & æquilatera pyramide icoſidodecaëdron collocauimus.

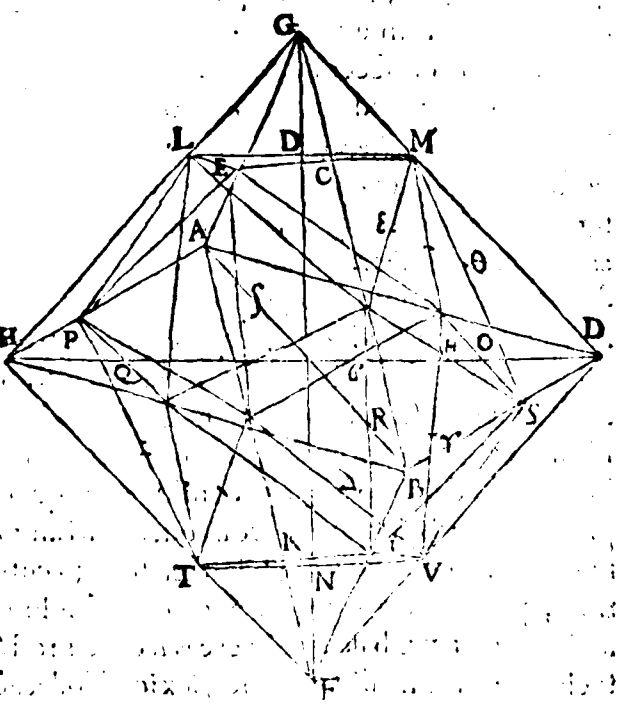
PROPOSITIO XV. PROBLEMA 14.

In dato octaëdro icoſidodecaëdron conſtituere.

Proponatur octaëdrum ABDGHF, cuius latera ſingula extrema & media ratione ſecentur, vt ſecta ſunt decima ſexta decimiquinti; coniunctis à ſectionibus rectis, quæ rurſus bifariam ſectæ ſunto, in ſignis C, D, F, K, N, I, R, S, Q, O, & reliquis mediis coniungentium ſignis. Dico ſubtenſarum coniunctarum media ſigna triginta

icoſidodecaëdri angulos poſſidere. Cùm enim rectæ laterum octaëdri extrema & media ratione ſectorum ſectiones iungentes, icoſaëdrum octaëdro concluſum deſcribant, ſcilicet L M P S T V, per 16 decimiquinti: icoſaëdrum autem ſuis baſibus inſcripta ſuſcipiat icoſidodecaëdri triãgula, per corol. 3 huius, quæ quidem triangula cum pentagonis 12 icoſaëdri ſolidos angulos ſubtendentibus, ex tertia huius, triginta icoſidodecaëdri angulos ſolidos conſtituunt (per eiuſdem 3 corol.) Quia verò icoſaëdri 8 baſes octaëdri octo baſibus inſident (ex 16 decimiquinti) ſequetur ſimiliter octo icoſidodecaëdri triangula, illis octo icoſaëdri baſibus inſcripta, eaſdem octaëdri baſes poſſidere, vt in baſi octaëdri B G D, triangulum icoſidodecaëdri erit ι κ ℓ, in triangulo A D F, erit ϛ γ ſ, &c. Cùm autem octo illa triangula 24 angulis icoſidodecaëdri conueniant, per ſecundam huius, erunt 24 icoſidodecaëdri anguli, in octo octaëdri baſibus conſtituti. Præterea, quia icoſaëdri baſes, ſectis octaëdri extrema & media ratione lateribus inſidẽt, per eandẽ 16 decimiquinti, icoſidodecaëdri verò anguli in mediis icoſaedri lateribus iacere oſtenſi ſunt, ex 3 huius, ſequetur itaque prędictos 24 angulos icoſidodecaedri, in ſignis C, D, E, K, N, I, &c. ſubtenſas, bifariam ſecantibus, in octo octaëdri eſſe baſibus. Superſunt itaque ſex icoſidodecaedri anguli, extra octaędri baſes conſtituti: hempe in ſex icoſaedri lateribus, ſex octaedri ſolidis angulis ſuppoſitis, ſiue bina laterũ minora ſegmenta ſubtendentibus, in octaedri quadratis, ex eadem 16 decimiquinti, qualia ſunt rectæ L D M, & T N V. Quia inſuper octaëdri dimetiens eas rectas bifariam ſecat, (vt oſtẽſum eſt eadem 16): quæ à cẽtro verò extrema & media ratione ſecatur in D, vel N, ex eadem: ſunt autem quæ à centro ſex: quare ab eis ſecta icoſaedri bifariã latera erunt ſex, nempe in D, N, Q, O, S, R ſignis, quæ reliquos ſex icoſidodecaedri poſſident angulos. Erunt itaque 24 icoſidodecaedri anguli, in octo octaedri baſibus poſſidentes dimidias earum quæ laterum octaëdri ſectiones iungunt





gunt: ſex verò ſigna poſſidentes quæ ſemidimetientes extrema & media ratione ſecant, qui reſtituent 30 ſolidos icoſidodecaëdri angulos, octaëdro propoſito inſcripti. Iñ dato igitur octaëdro icoſidodecaëdron conſtituimus.

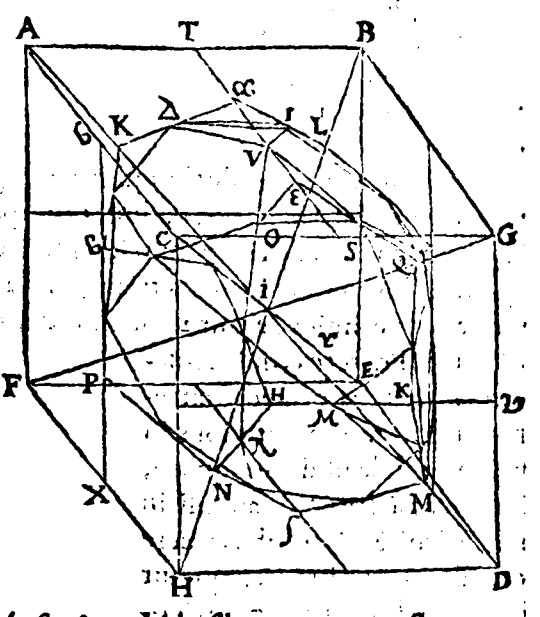
COROLLARIVM.

Idem icoſidodecaëdron octaëdro & ſibi inſcripto icoſaëdro inſcribitur.

Nam oſtendimus inſcripti icoſidodecaëdri angulos, media icoſaëdri octaëdro inſcripti latera poſſidere. Quorum quæ baſes octaëdri incolunt, icoſidodecaëdri angulos, in octaëdri baſibus ſuſcipiunt, & ideo eidem octaëdro inſcribunt.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA 15.

In dato cubo icoſidodecaëdron inſcribere.



Sit Cubus A B C G F E H D, cuius dimetientes ſint A D, B H, F G, C E, in centro I ſeſe biſariã ſecantes (per 2 cor. 15 decimitertij) in ſignis K, M, L, N, P, Q, O, R: extrema & media ratione ſectæ ſint dimetientium dimidiæ, quæ à centro per 30 ſexti: Ducantur rectæ cubi baſium oppoſita latera biſariam ſecantes, quas duximus 13 deciminquinti, vt T s, V X, Y Z, & reliquæ illis oppoſitæ, quarum dimidiæ extrema & media ratione ſecẽtur, minoribus ſegmentis circa mediam remanentibus, vtpote in α, ι, β, P, ϰ, κ, & ſignis oppoſitis in cubo. Dico hæc ſectionũ ſigna iungentes rectas, biſariam ſectas, icoſidodecaëdri angulos in medijs earũ ſectionibus ſuſcipere, horumq; ſex in cubi baſibus, per tres rectas æquales ſeſe biſariam & ad rectos ſecantes in centro conſtitui. Quoniam (per 13 deciminquinti) in cubo rectæ per has rectarum ſectiones ductæ, à ſecantium cubi baſes ſectionibus, in ſemidimetientium ſectiones dodecaëdrum cubo inſcriptum delineant. Ex 1 cor. verò ſecundæ huius, patet in medijs laterum dodecaëdri ſectionibus, icoſidodecaëdri angulos conſiſtere. Sequetur itaque per hæc ſectionum ſigna, ductas biſariam ſectas, icoſidodecaëdri angulos in medijs earum ſectionibus ſuſcepiſſe. Quia verò in ſingulis rectis baſium cubi oppoſita latera biſariam ſecantibus, quales ſunt T s, V X, Y Z, & eis oppoſitis binæ harum ſectionum reperiuntur, ſcilicet α ι, β P, H K, baſes verò vel eas ſecantes rectæ, ſunt ſex (per 21 diffinit. vndec.) ſex itaque earũ mediæ ſectiones, ſex icoſidodecaëdri ſolidos angulos in cubi baſibus conſtituent. Cùm autẽ mediæ illæ ſectiones ſint mediæ dodecaëdri laterũ oppoſitorum, nam oppoſitæ ſunt ex conſtructione rectæ ſecantes cubi baſes, ſequetur ſex illas ſectiones, per tres rectas conſtitui, ſiue iungi æquales in centro ſeſe biſariam & ad rectos ſecantes, ac eadem latera, ex tertio corol. 17 deciminitertij. Quia verò ſingulis dodecaëdri pentagonis, ſingula icoſidodecaëdri inſcribuntur pentagona, pentagono α K β O ι, aliud inſcribetur A R ζ θ V, & pentagono B P N H O aliud, pentagono verò N H K M s aliud: ſicq; de ſingulis quorum inſcriptorum latera deſcribunt

ſcribunt triangula, ablatos dodecaëdri ſolidos angulos tollentia, ac ſubtendentia, vt patuit 2 huius, ſcilicet angulum ſolidum α ſubtenditaé tollit Δ I V, triangulum: Angulum verò O, tollit ζθω: Angulum item H tollit triangulum ωλμ, ſimiliter & reliquos ſolidos dodecaëdri tollunt angulos triangula dimidias laterum ſectiones iungentia, vt inde icoſidodecaëdron (per 3 huius) conſtituant. Sex igitur erunt icoſidodecaëdri ſolidi anguli, in cubi ſex baſibus conſtituti. Quia verò à 12 dodecaëdri angulis ſingulis, in cubi baſibus conſtitutis, binæ rectæ ad dimetientium ſectiones ducuntur, erunt viginti quatuor rectæ 24 reliquos icoſidodecaëdri ſolidos angulos bifariam ſectæ ſuſcipientes, ex præfato cor. 1 ſecundæ huius, qui quidem cum ſex prioribus 30 ſolidos eiuſdem adimplebunt angulos. In dato itaque cubo icoſidodecaëdron inſcripſimus.

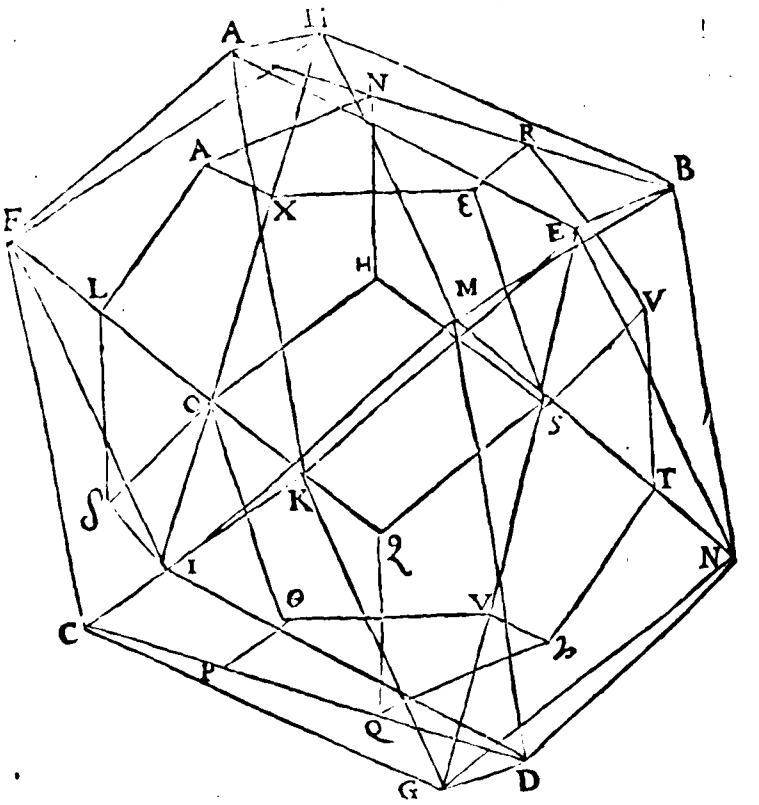
COROLLARIVM.

Eidem cubo dodecaëdrum, & dodecaëdro inſcriptum icoſidodecaëdrum inſcripta ſunt.

Nam α κ ϐ ο ς dodecaëdri baſis ſuſcipit ϛ ρ ζθ ν icoſidodecaëdri baſim eidem cubo A B D H inſcripti. Quare anguli qui ad α, & ς, dodecaëdri, & angulus qui ad γ icoſidodecaëdri eandem cubi baſim tanguntA B C G.

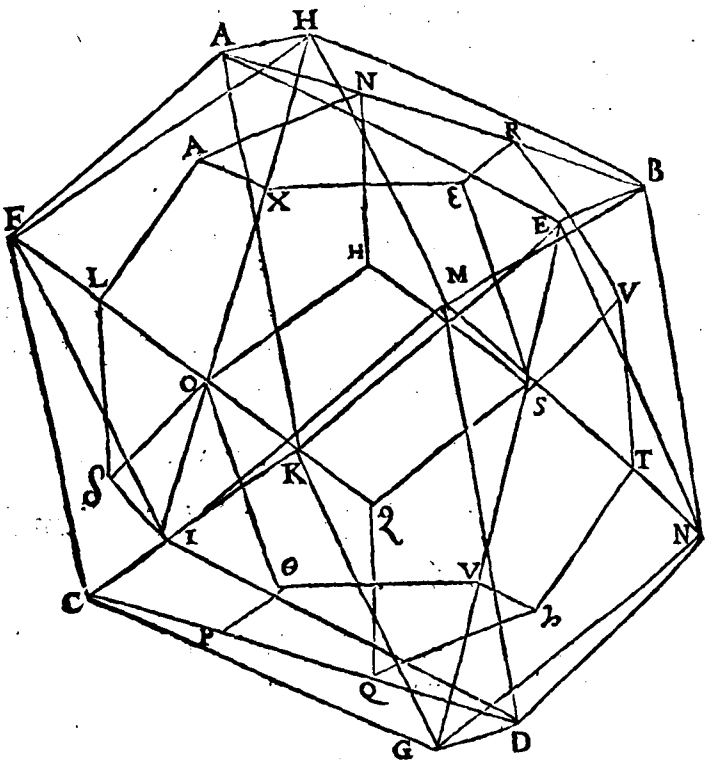
PROPOSITIO XVII. PROBLEMA 12.

In dato exoctaëdro dodecaëdron inſcribere.

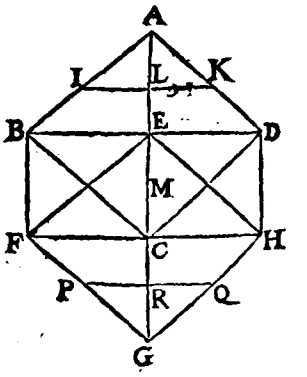


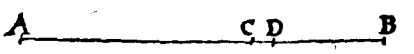
Detur exoctaëdron A B C D, cuius baſium dimetientes ſint, quadrati quidem H E, recta A B, quadrati F G, recta C D, quadrati F M, recta H I, quadrati K N, recta E G, quadrati B D, recta M N, & quadrati A C, recta F K. Dimetientium verò dimidiæ ſecentur extrema & media ratione, per N R P Q X O, S V, L O, S T, minoribus ſegmentis circa dimidium totius remanẽtibus. Quoniam prima huius oſtẽſum eſt, exoctaëdrum ſolis cubi angulis ſolidis à dimidiis eius lateribus comprehenſis, à cubo diffare, dicemus reliquum illud cubi (quod exoctaëdron diximus) eaſdem inſcriptiones, quas cubus hoc reſiduo ſuſcepit, ſimiliter ſuſcipere. Quare duodecim dodecaëdri anguli, his duodecim ſectionibus dimetientium exoctaëdri baſium conuenient (per 13 decimiquinti). Quia verò dodecaëdrum viginti ſolidis angulis conſtat, ſupererunt octo, qui quidem octo exoctaëdri triangulis, hoc eſt octo cubi ſolidis angulis, ſuppoſiti ſunt (ex eadem 13 decimiquinti): Nam exoctaëdri

ëdri triãgula cubi ablatos ſubtendunt ſolidos angulos, per ea quæ prima huius oſtenſa ſunt. Perficiatur itaque exoctaëdrõ in cubum, ductis quatuor cubi dimetientibus, quæ quidem in centro ſeſe bifariam ſecant, vt patuit 13 decimiquinti: dimidiæ inſuper dimetientium extrema & media ratione ſectæ, maioribus ſegmẽtis circa totius dimidiũ remanentibus, ſuſcipiũt dodecaëdri angulos, cubi ſolidis angulis ſuppoſitos, vt oſtenſum eſt eadem 13 decimiſexti. Quare octo anguli inſcripti dodecaëdri ſub cubi ſolidis angulis conſtituti, in exoctaëdro ſub octo triangulis angulos cubi ſubtendentibus conſtituentur. Quod autem non excedant triangulorum plana demonſtremus.



Eſto cubus A B C D E F G H, cuius dimetiens ſit A G, centrum verò M. Diuidantur bifariam latera A B, A D, A E, in I, K, L, vt in exoctaëdri compoſitione, ducto plano per I, L, K, per ſigna B, E, D: extendatur item B E D planum ſimiliter per F C H, & P R Q, plana ducantur. Quoniam æquales ſunt A K, K D, necnon A L, L E, ad inuicem, parallelæ erunt L K, E D (per 2 ſexti), ſimiliter parallelæ erunt L I, E B, & I K, B D. Atqui ipſæ angulos æquales continent, nempe triãgulorum æquilaterorum: plana itaque per I L K, & per B E D, ſunt parallela, ex 15 vndecimi. Similiter oſtendentur reliqua per P R Q, & F C H plana inter ſe & reliquis parallela eſſe, ex iiſdem 2 ſexti & decimaquinta vndecimi. Quia verò ea plana ſecant dimetientes A C, E G, bifariam per alias dimetientes B D, F H (ex corol. 34 primi) nempe in dimidias A E, E C, C G, ſequetur ea ſecare totam A G cubi dimetientem trifariam (per 17 vndecimi): æquales igitur erunt A E, C G dimetientes cubi partes. Atqui æquales ſunt G M, A M, quæ à centro: reliquæ igitur E M, C M, æquales erunt: & proinde A L, L E, eiſdem æquales erunt. Quare M L, eius A N, quæ ex centro duo tertia poſſidebit, quæ & trianguli exoctaëdri baſim attinget: nam ſecatur plano baſis I L K exoctaëdri, eadem M L. Dico hæc duo tertia maiora eſſe maiore ſegmento eius quæ ex centro extrema & media ratione ſectæ. Proponatur cubi dimetiens A B, extrema & media ratione ſecta in C: per duo tertia verò in D: ſequetur quadrata ex A B, B D, ſimul ſũpta, decem efficere, quarũ ex A D, erit quatuor. Nam tripla eſt A B rectæ B D, à conſtructis: quadrata igitur ex A B, B D, duplum ſeſquialterum poterunt eius quod ex reliqua A D. Quæ verò ex eadem A B & B C, triplum poſſunt eius quod ex reliqua A C, (per 4 decimitertij): Recta igitur B C maior eſt recta B D, & proinde A D duo tertia maiora ſunt maiore ſegmento A C. Item





A D, A C, segmenta non sunt æqualia: nam commensurabilia essent A C, C B, rationem numerorum habentia per 6 decimi: at incerta sunt A C, C B, nempe in ratione certæ ad apotomē (per corol. 1 decimitertij): Non itaque sunt æquales A C, A D: siquidem sit A D, minor segmento A C, sequetur quadrata totius A B, & B C, minoris, plus posse in A C maiorem quàm quadrata eiusdem totius A B, & B D maioris possent in A D minorem segmento A C, quod fieri non potest: Duo igitur tertia A D, rectæ A B, maiora sunt segmento maiore A C eiusdem A B extrema & media ratione sectæ. Quare dodecaëdri angulus sub exoctaëdri triangulo constitutus, maiori segmento à centro distans ex 13 decimiquinti, non attinget triangularem exoctaëdri basim duabus tertiis ab eodem centro distantem. In dato igitur exoctaëdro dodecaëdrum inscripsimus.

COROLLARIVM I.

Hinc fit sex exoctaëdri quadratorum dimetientes, sex dodecaëdri latera suscipere.

Vt patuit N R, P Q, X O, S V, L O, S T, in A B, C D, H I, E G, F K, M N dimetientibus basium quadratarum constituta esse.

COROLLARIVM II.

Idem dodecaëdrū inscribitur cubo & exoctaëdro ab eo descripto.

Nam dimetientes basium latera dodecaëdri suscipientes inuariatæ permanent, Per præcedens corollarium, & reliqui dodecaëdro inscripti anguli, triangula exoctaëdri non attingunt, vt patuit in fine huius.

COROLLARIVM III.

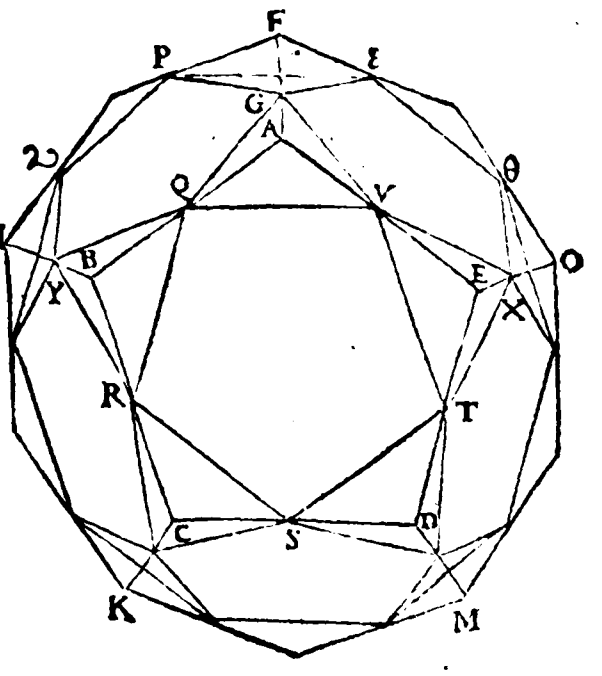
Cubi exoctaëdro circunscripti dimetiens, dimetientis eidem exoctaëdro inscripti cubi, sesquialtera est.

Nam R L dimetiens inscripti dodecaëdri, qui est dimetiens inscripti cubi, per cor. 6 huius, cùm possideat centra triangulorum, fuit dimetientis A G cubi circunscripti bipartiens tertias, per ostensa.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA 17.

In dato dodecaëdro icosidodecaëdron constituere.

Proponatur dodecaëdrū FHKMO, cuius abscindantur singula latera bifariam: patet ex 2 huius, ablatis solidis angulis dodecaëdri his lateribus comprehensis, relinqui icosidodecaëdron, quod quidem ipsi dodecaëdro inscriptum erit, cùm 12 eius pētagona, duodecim dodecaëdri pentagonis inscripta sint: & ideo triginta ipsius icosidodecaëdri anguli, in triginta laterum dodecaëdri mediis constituantur sectionibus: viginti verò eiusdem triangula, quæ sexaginta pentagonorum lateribus cōstant, subtendūt viginti dodecaëdri solidos angulos, ex tribus tantùm planis angulis compositos, ac tri-



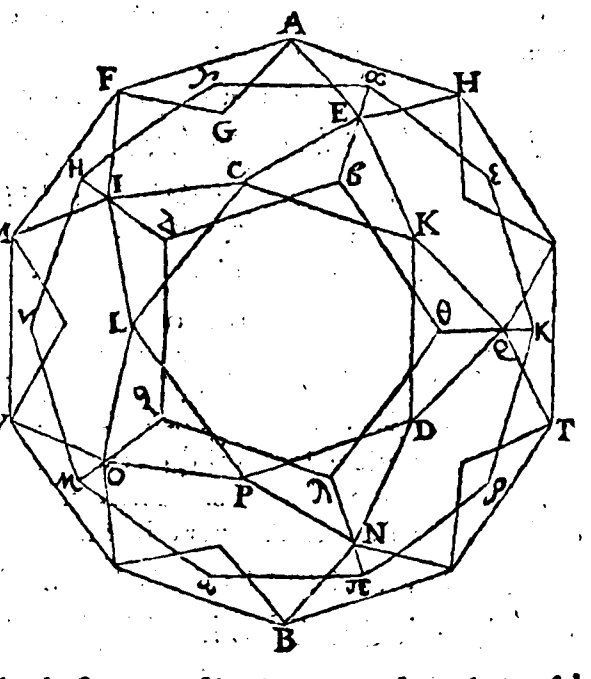
bus re

bus rectis hos angulos dodecaëdri ſolidos tollentibus, & ſectiones laterum iungentibus ſubtenſos. Hæc autem latera triangulorum ſimul ac pentagonorum ſingula triangula, tribus pentagonis: ſingula verò pentagona, quinque triangulis obſita, conſtituunt, vt iam ſecunda huius oſtendimus. In dato itaque dodecaëdro icoſidodecaëdron conſtituimus.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA 18.

In dato icoſidodecaëdro dodecaëdrum inſcribere.

Eſto icoſidodecaëdron A B C D, cuius pentagona ſint A F I C E, I M V O L, C L P D K, H E K Q, T Q D N, O P N B, & reliqua totidem eis oppoſita, quæ non pingimus, ne linearum copia obruatur figura: eiuſdem verò triangula ſunto, ſcilicet circa pentagonum A F I C E, triangula A F G, F I M, I C L, C E K, E A H: circa autem pentagonum C L P D K, hæc, C L I, L P O, P D N, D K Q, K C E, & ſimiliter deſcripta reliqua: horum triangulorum centra iungantur, ſingula tribus proximis triangulorum centris, vt α β, α γ, α δ, ſimiliter Δ π, Δ ϱ, Δ ζ, & reliqua. Quæ rectæ centra triangulorum quæ circa pentagona iungentes, pẽtagona neceſſariò deſcribent. Nam iungunt centra triangulorum duodecim icoſidodecaëdri ſingula pentagona ambientium. Dico has iungẽtes dodecaëdrum deſcribere. Quoniam icoſidodecaëdri triangula, inſcripta ſunt baſibus icoſaëdri illud componẽtis, per cor. 3 huius, eadem itaque cum icoſaëdri baſibus centra poſſident: cùm hæc ſint relicta media baſium icoſaëdri triãgula centrum poſſidentia, ablatis extremis ad angulos baſium conſtitutis, per eandem 3 huius, ſed iungentes icoſaëdri baſium centra, dodecaëdrum deſcribunt, ex quinta decimi quinti. Sequetur igitur iungẽtes in icoſidodecaëdro eadem icoſaëdri illud cõponentis centra baſium, dodecaëdrũ deſcribere: nempe has ſex ipſius baſes, α β Δ π γ, π δ ζ μ ν, μ ζ λ π ω, λ π ρ κ θ, θ κ ϑ α β, β Δ ζ λ θ, & ſex eiſdem oppoſitas: quod quidem ideo icoſidodecaëdro inſcriptum erit, cùm viginti dodecaëdri anguli ſolidi, viginti icoſidodecaëdri triangulorum centra ſiue baſes in centris tangant, ex eadem 5 decimiquinti. In dato itaque icoſidodecaëdro dodecaëdrum inſcripſimus.



COROLLARIVM.

Hinc fit centra triãgulorum icoſidodecaëdri æque diſtare inter ſe.

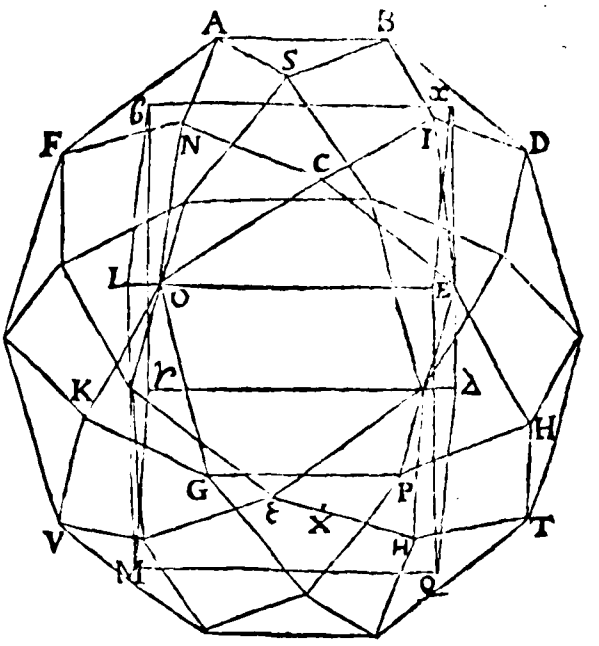
Nam continent æqualia dodecaëdri latera.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA 19.

In dato icoſidodecaëdro cubum collocare.

Sumatur

Sumatur icosidodecaëdron ABDFVT, cuius duo pentagona ad vnum angulum c, concurrentia sint ABICM, CEPGO. Sumãtur illorum pentagonorum singulorum duo latera, lateribus angulo c oppositis contigua, scilicet AN, BI, & OG, EP. Insuper sint icosidodecaëdri triangula super his quatuor pentagonorum lateribus constituta AFN, BID, OKG, & EPH, quorũ centra coniungantur rectis αζ, ζγ, αΔ, Δγ: Sint demum in icosidodecaëdro ipsis α, ζ, γ, Δ, signa opposita, M, Q, E, L. Dico per ea signa cõiunctas rectas cubũ describere. Quoniã ex præcedẽti ostẽdimus dodecaëdri angulos solidos singulos singula triangulorum icosidodecaëdri centra possidere: ex 8 verò decimiquinti demonstrauimus, cubi angulos octo dodecaëdri angulos obtinere: Sequetur itaque icosidodecaëdri octo triangula in centris octo cubi angulos suscipere: Quod autem hæc sint cẽtra, α, ζ, γ, Δ, E, L, M, Q, pateat, cùm dodecaëdri icosidodecaëdro inscripti basis, ex præfata, angulos in centris triangulorum pentagonum icosidodecaëdri ambientium constituat, sequetur duo dodecaëdri pentagona, triangula quæ circa icosidodecaëdri bases ABICN, & CEPGO possidentia commune latus habere sub signo c, in triangulis CNO, CIE. Et proinde habent angulos communi basi oppositos in triangulis, quorum bases sunt AB, & GP. Hos autem angulos in dodecaëdri inscripti pentagonis subtendunt rectæ αζ, γΔ, ex dodecaëdri constructione 17 decimitertij. Quare pictis triangulorum centris αs, ζs, latus αζ cubi, angulum qui ad s subtendet: similiter latus γΔ, angulum qui ad x subtendet: quatuor igitur hæc signa α, ζ γ, Δ, cubi dodecaëdro inscripti angulos continent, & ipsis quatuor opposita reliquos, ex 8 decimiquinti. Quæ cùm sint in trigonis icosidodecaëdri basibus constituta (per proximam) cubum icosidodecaëdro inscriptum suscipient, ex 26 diffinit. vndecimi. Idem ex icosaëdro ostendetur. Nam triangulorum ANF, BID, OKG, & EPH, & oppositorum centra ab icosaëdro inuariata & basibus concentrica sumpta sunt corol. 3 huius: Quæ cubum icosaëdro inscriptum designant ex 11 decimiquinti: Quare & icosidodecaëdro eadem signa possidenti. In dato igitur icosidodecaëdro cubum concluſimus.



COROLLARIVM.

Hinc consequimur rectas iungentes centra triangulorum quæ ad latera opposita pentagonorum esse æquales.

Nam sunt latera cubi inscripti.

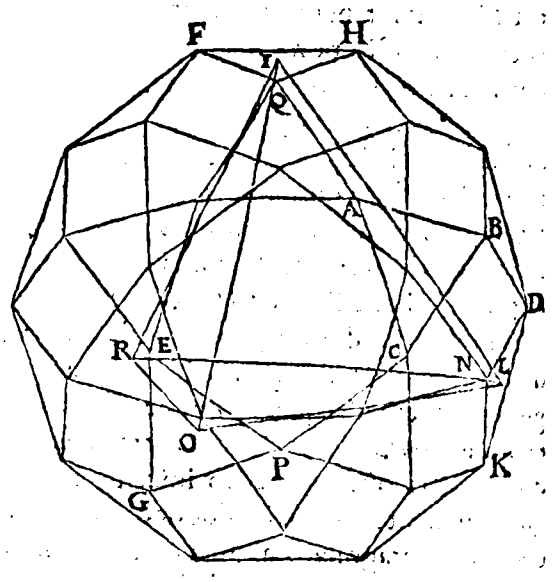
Insuper rectas centra triangulorum binis lateribus pẽtagonorum vel triangulorum distantium iungentes esse ad inuicem æquales.

Nam sunt æqualium cubi basium dimetientes, vt patuit in centris ζΔ, & LQ: quæ distant lateribus NC, CE, vel γs, sγ.

PROPOSITIO XXI. PROBLEMA 20.

In dato icoſidodecaëdro pyramidem trilateram æquilateram conſtituere.

Eſto propoſiti icoſidodecaëdri triangulum A B C: quia verò ſingulis triangulorum lateribus ſingula cõcurrunt pentagona, ſumant ſinguli huius trianguli anguli ſingula triãgula, quæ ad baſes ſingulorũ pentagonorũ oppoſitas: ſcilicet angulo A opponatur triangulum E G P: cuius centrũ ſit O: Angulo item B, opponatur triangulum F H Q, eius verò centrum ſit I: Angulo demum C, opponatur triangulum D N K, cuius cẽtrum ſit L. Sumatur inſuper triangulo A B C, triangulum in icoſidodecaëdro oppoſitum, cuius centrum ſit Z. Dico per ſigna I, R, O, L, ductas coniungentes, pyramidem trilateram æquilateram deſcribere. Quoniam (ex præfata) triangula F Q H, & D N K, ſiue E G P, ſuſcipiunt in eorum centris baſium cubi dimetientes, diſtant nempe à ſeinuicem duobus pentagonorũ lateribus, per corollarium præcedentis: triangula igitur I R L, I R O, I O L, & R O L, æquilatera & proinde æqualia erunt pyramidem I R O L, componentia per 10 diffinit. vndecimi. Atqui baſium cubi dimetientes cubo pyramidem à cubi ſolidis angulis inſcribunt, ex prima decimiquinti. Cubus autem angulos ſolidos icoſidodecaëdri triangulorum centris copulat, ex præcedente. Pyramis igitur inſcripta cubo in icoſidodecaëdro collocato, eidem icoſidodecaëdro inſcribetur: vtpote cuius ſolidi anguli triangulares icoſidodecaëdri baſes in centris tangent. In dato igitur icoſidodecaëdro pyramidem trilateram æquilateram conſtituimus.



COROLLARIVM.

Pyramis & ſibi circunſcriptus cubus cuboq; circunſcriptum dodecaëdrum eodem concipiuntur icoſidodecaëdro.

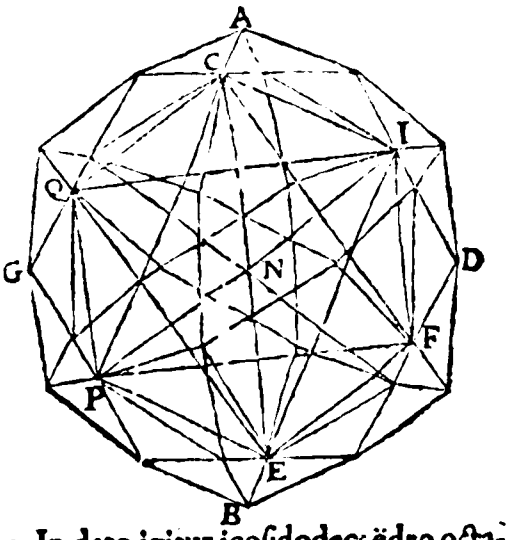
Nam omnium anguli centra triangulorum icoſidodecaëdri poſſident ex binis præcedentibus.

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA 21.

In dato Icoſidodecaëdro octaëdron deſcribere.

Exponatur icoſidodecaëdron A B C D. Quoniam Icoſidodecaëdrum habet angulos ſolidos in mediis lateribus dodecaëdri illud componentis, vel circunſcribentis, ex 2 & 19 huius: præterea dodecaëdri ſex ſunt latera, quorũ medias ſectiones iungunt tres rectæ æquales, ſeſe ad rectos & biſariam ſecantes in centro (ex 3 corol. 17 decimitertij). Icoſidodecaëdro autem ſex ſunt anguli, in mediis illis ſectionibus

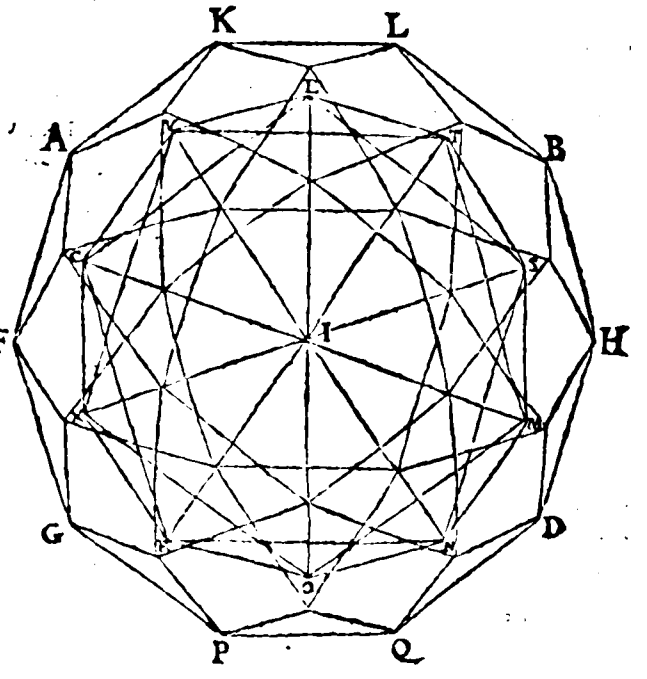
ctionibus constituti, qui sint C, I, F, E, P, Q, per rectas C E, I P, F Q, coniuncti, quæ quidem se secãt in centro N. Quoniam æquales sunt N C, N I, N F, & reliquæ dimidiæ, & angulos æquales (nempe rectos ex constructione) continent, bases itaque C Q, C P, C F, C I, nec non E Q, E P, E F, E I, & insuper Q P, P F, F I, I Q, sunt æquales. Quare ex illis constituta triangula æquilatera sunt & adinuicem, C I F, C F P, C P Q, C Q I, & E F I, E I Q, E Q P, E P F, quæ quidem sunt octo. Et proinde octaëdron constituunt per 22 diffinit. vndecimi icosidodecaëdro inscriptum: nam singuli eius anguli icosidodecaëdri angulos possident, ex constructione. In dato igitur icosidodecaëdro octaëdron descripsimus.



PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA 22.

In dato icosidodecaëdro icosaëdron inscribere.

Esto icosidodecaëdron A B G D, cuius pentagonarum basium centra sint, E, C, R, N, S, I, ac reliqua eis opposita totidem, O, M, T, V, X, L: Dico rectas ea centra proximis iungentes, icosaëdrum in icosidodecaëdro describere. Patuit cor. 2 huius, icosidodecaëdri pentagonorum centra possidere basium dodecaëdri ipsum constituentis centra. Patuit item 7 decimiquinti, dodecaëdri basium centra æque distare ab inuicem, nempe lateribus sibi inscripti icosaëdri. Sequetur itaque pẽtagonarum basium centra æquè distare, ac proinde icosaëdri similiter latera designare. Icosaëdrum igitur erit E S N R C I, ex eadem 7 decimiquinti. Quod ideo icosidodecaëdro inscribetur, cùm singuli eius anguli singularum icosidodecaëdri pentagonarum basium centra possideant, ac proinde bases tangant, ex diffinit. In dato igitur icosidodecaëdro icosaëdrum inscripsimus.

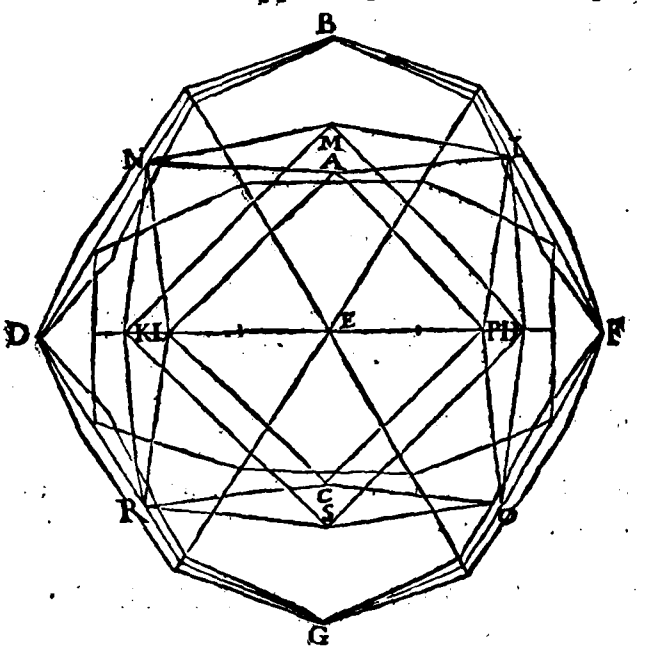


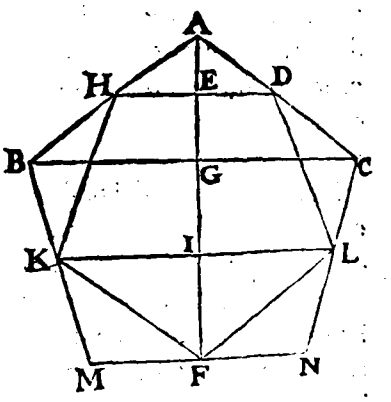
PROPOSITIO XXIIII. PROBLEMA 23.

In dato icosidodecaëdro exoctaëdron describere.

Detur icosidodecaëdron B D G F, cuius sumantur anguli sex, sibi inuicem bini oppositi, octaëdri angulos suscipientes (ex 22 huius) qui sint B, D, G, F, E: & reliquus

ipſi B oppoſitus. Ab iis angulis mittãtur in baſes oppoſitas pentagonorũ binæperpendiculares, quæ ſingulæ ſecentur (per 30 ſexti): maiora ſegmenta, quæ ad baſes rurſus ſimiliter ſecta ſint (relictis ad baſes minoribus ſegmentis) in ſignis A, C, H, L, & eis oppoſitis M, S, P, K, præterea I, O, N, & R, quæ quidem erunt duodecim ſigna perpendicularium. Dico hæc ſigna, A, L, C, H, & quatuor reliqua eis oppoſita, S, P, M, K, ſimul ac I, N, R, O, angulos duodecim exoctaëdri icoſidodecaëdro B D G F inſcripti ſuſcipere. Quoniam dodecaëdrum icoſidodecaëdrũ cõſtituens ſuſcipit medias laterum ſibi inſcripti cubi ſectiones, in mediis ſubtendentium angulos quinquangulorum ſectionibus. Nam ſubtendentes illæ ſunt 12 cubi latera, (per 2 corol. 17 decimitertij, & 8 decimiquinti): in his autem ſectionibus, cubus duodecim exoctaëdri ſuſcepit angulos, ex ſexta huius. Sequetur igitur dodecaëdrum in mediis illis ſubtendentibus 12 exoctaëdri ſuſcipere angulos per 8 huius. Oſtendamus ſigna ſectionum ſecare maiora ſegmenta quæ ad baſes perpendicularium pentagonarum icoſidodecaëdri baſiũ extrema & media ratione. Eſto dodecaëdri baſis ABCMN: icoſidodecaëdri verò pentagonum ſit H D L F K, vtriuſque perpendicularis ſit A F, ſcilicet dodecaëdri tota ſecta extrema & media ratione in G, icoſidodecaëdri verò F E, ſimiliter ſecta in I, (per 3 decimiſexti). Quoniã H D K L F, ipſi A B C M N, inſcriptum eſt (ex corol. 2 huius) ſecans A B, A C, latera bifariam, recta H D, (ex 2 ſexti) bifariam ſecat minus ſegmentum A G totius A F, per E. Quia verò I F eſt minus ſegmentum rectæ E F, eadem I F erit maius maioris ſegmẽti E I, per 5 decimitertij. Cùm autem K L bifariam ſecet B M, C N, latera, eadem per 39 ſexti, bifariam ſecat rectam G F, in I: nam parallelæ ſunt B C, M N, & K L, (per corol. 39 ſexti & 3 decimiſexti). Vtraque igitur rectarum G I, I F, erit dimidia maioris ſegmenti G F, rectæ A F: Quare ſicut G I, ad E G, ſic G F, ad reliquam A G, (per 15 quinti) recta igitur B C, latus quidem cubi, ſecat perpendicularis F E maius ſegmentum I E, hac arte qua I E ſecta eſt extrema & media ratione in G: eſt autem E I, maius ſegmentum perpendicularis E F baſis icoſidodecaëdri à latere cubi B C, ſectum extrema & media ratione relicto ad baſim H D, minori ſegmento E G, & ſuſcipit in G (vtriuſque rectæ ſectione) angulos inſcripti exoctaëdri, nempe in mediis ſectionibus laterum cubi, quale eſt recta B C. In dato itaque icoſidodecaëdro exoctaëdron deſcripſimus.





COROLLARIVM.

Maius ſegmentum perpendicularis pentagoni inſcripti, eſt dimidia perpendicularis circunſcripti.

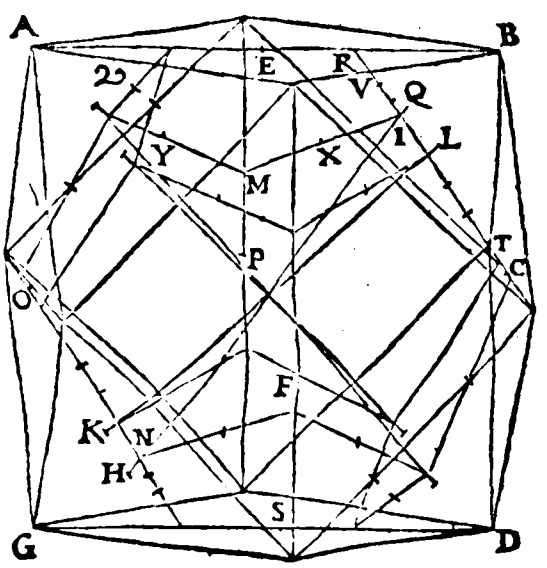
Nam

Nam E I, maius ipſius E F, continet binas, G I, G E, æquales reliquis I F, E A, totam A F cum illis reſtituentes.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA 24.

In dato exoctaëdro icoſidodecaëdrum inſcribere.

Eſto datum exoctaëdrum A B G D, cuius quadratorum centra ſint, E, O, S, C, P, & ipſi P, ſignum F oppoſitum. Dico ſex icoſidodecaëdri angulos ſolidos, exoctaëdri quadrata in his, E, O, S, C, P, & ipſi P oppoſito F, ſignis tangere. Quoniam dodecaëdri ſex ſunt latera, quorum medias ſectiones iungunt tres rectæ in centro biſariam, & ad rectos ſe ſecantes (per 3 cor. 17 decimitertij:) Hæc autem ſex latera dodecaëdri octaëdro inſcripti ſuſcipiunt ſex quadratorum exoctaëdri dimetientes, per corol. 13 huius. Inſuper cùm latera dodecaëdri conſtant binis minoribus ſegmentis dimidiarum dimetientium baſium exoctaëdri, vt oſtendimus 17 huius, idem ſignum biſariam ſecabit dimetientes baſium exoctaëdri, & latera ſibi inſcripti dodecaëdri, cùm ſint conſtituta circa dimidias dimetientes, vt ibidem patuit. Atqui ſex illa dodecaëdri ſigna, ſex ſolidos ſibi inſcripti icoſidodecaëdri ſuſcipiunt angulos (ex 18 huius). Sex igitur exoctaëdri baſium dimetientes eadem ſigna poſſidentes icoſidodecaëdri ſex ſuſcipient ſolidos angulos. Superſunt 24 icoſidodecaëdri anguli, quorum loca in exoctaëdro perquirantur. Cùm exoctaëdri triangulorum oppoſitorum centra tangant rectæ in centro ſolidi ſe ſecantes, nempe dimetientium circunſcripti cubi partes (per corol. 6 huius) vt H Q, K L, illæque tangentes ſint à centro æquales, vtpote ſemidimetientium duo tertia, per ea quæ 17 huius oſtenſa ſunt. Quæ quidem duo tertia cùm ſint maiora ſegmento maiore eiuſdem rectæ, extrema & media ratione ſectæ, per vltima demonſtrata eadem 17 huius, ſecentur à ſingulis earum præfata maiora ſegmenta, per 10 ſexti, quæ circa ſolidi centrum remaneant, qualis eſt H Q in I, & N. Ab iis ſectionibus ducantur recta in proximas dimetientium baſium quadratarum ſectiones, vt I M, I R, I T, tres erunt à ſingulis ductæ, cùm circa ſingula triangula tria ſint tantùm proxima quadrata: octo verò ſectiones, cùm octo ſint exoctaëdri triangula. Quare 24 erunt rectæ. Dico has rectas biſariam ſectas in mediis ſectionibus reliquos viginti quatuor icoſidodecaëdri angulos ſuſcipere: Nam illæ rectæ ſunt dodecaëdri exoctaëdro inſcripti latera, per eandē 17 huius: Quæ cùm in medijs eorū ſectionibus icoſidodecaëdri angulos ſuſcipiāt, per 18 huius, ſex autem ſunt latera dodecaëdri in baſium exoctaëdri medijs dimetientibus cōſtituta: Sex igitur icoſidodecaëdri anguli ſex exoctaëdri baſes tangent quadratas: Reliqui verò 24 in medijs 24 rectarum ſectionibus, vt V X, Y Z, & ſimilibus, quæ à ſectionibus vtpote I N, & ſimilibus earum H Q, K L, & ſimiliū quæ à centro cubi ad baſium dimetientium ſectiones, R, T, M, ducuntur, conſiſtunt: vnde fiunt triginta icoſidodecaëdri anguli exoctaëdro inſcripti. In dato igitur exoctaëdro icoſidodecaëdron inſcripſimus.



PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA 25.

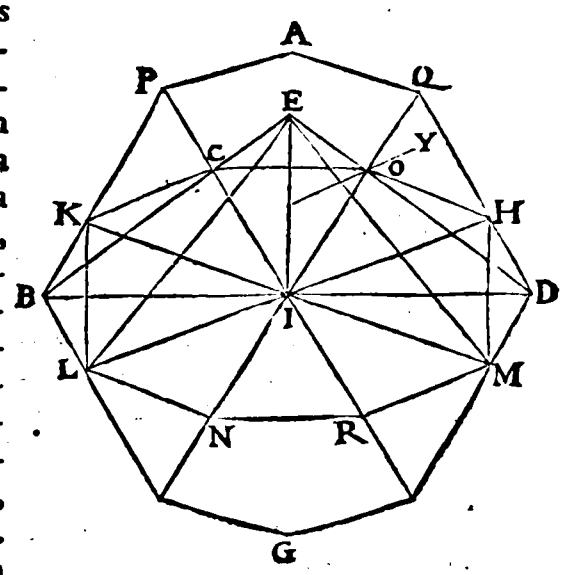
Icoſidodecaëdri & exoctaëdri baſes, & latera oppoſita, parallela adinuicem eſſe demonſtrare.

Cùm icoſidodecaëdri pentagona dodecaëdri pentagonis concepta ſint, per corol. 2 huius, dodecaëdri verò latera oppoſita ſint parallela (per 3 corol. 17 decimiquarti) & cum proximis angulos æquales comprehendant, nempe angulos pentagonorum, parallela erunt quæ per ipſas plana per 15 vndecimi, & proinde, his planis inſcripta icoſidodecaëdri pentagona parallela adinuicem erunt. Similiter parallela erunt eiuſdem triangula, nempe parallelis icoſaëdri baſibus (per 4 cor. 14 decimiquinti) inſcripta per cor. 3 huius. Exoctaëdri rurſus quadrata, cubi quadratis inſcripta (ex cor. 2 primæ huius) parallela eſſe patet: Triangula verò eiuſdem octaëdri triangulis inſcripta, per cor. 3 eiuſdem, eſſe manifeſtum eſt: & ideo parallelas habent baſes oppoſitas (ex 14 vndecimi) nam ad eas eadem centra iungens recta eſt (per cor. 13 decimiquarti). Quod autem icoſidodecaëdri latera oppoſita ſint parallela, patet, quoniam icoſidodecaëdri anguli in medijs dodecaëdri lateribus conſtituti ſunt, ex conſtructione eiuſdem, per 2 huius: Eadem autem media latera oppoſita iungunt rectæ æquales in centro ſeſe bifariam ſecantes per 3 cor. 17 decimiquarti. Quæ itaque oppoſitos iungunt icoſidodecaëdri angulos, æquales erũt, & bifariã in centro ſectæ. Atqui rectæ quæ à cẽtro æquales, & æquales baſes (nempe icoſidodecaëdri latera) cõprehendunt, æquales ad illas angulos continẽt per 8 primi, & in eodẽ plano ea conſtituũt (ex 2 vndecimi.) Quæ igitur in binas rectas latera quidem icoſidodecaëdri cadens, ea quidem quæ per centrum eas iungens angulos alternos ad illas æquales efficit, parallelas illas denotat, per 27 primi: Parallela itaque ſunt icoſidodecaëdri oppoſita latera Haud ſecus in exoctaëdro continget. Nam quæ oppoſita cubi latera bifariam ſecant, in centro ſolidi bifariam ſectæ concurrunt, cùm ſint quadratorum cubum bifariam ſecantium dimetientes, per centrum actæ: Quæ quidem angulos exoctaëdri qui ex oppoſito iungunt, ex eiuſdem conſtructione & prima huius: & proinde oppoſita exoctaëdri latera eodem argumento parallela denotant, ex eadem 27 primi. Icoſidodecaëdri igitur & exoctaëdri baſes & latera oppoſita parallela eſſe demonſtrauimus.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA 26.

Icoſidodecaëdrum ſecari bifariam, ſex decagonis æquilateris, & æquiangulis oſtendere.

Eſto icoſidodecaëdrũ A B G D, cuius centrum ſit I: vnum verò pentagonorum ſit A P C O Q E: ſumantur circa illud pentagonũ quinque proximorum pentagonorum latera oppoſita vna cum triangulorum lateribus, ea latera coniungentibus, quæ ſint C O, K B, L N, R M, & H D. His autem baſibus oppoſitæ baſes, vel latera triangulorum iungentia ſint N R, D M, H O, C K, & B L. Dico has decem rectas, latera eſſe decagoni icoſidodecaëdrum bifariã ſecantis. Quoniam icoſidodecaëdri pentagona baſibus dodecaëdri continentur, & eiſdem ſunt homocentrica, per cor. 2 huius, ducatur recta iungens baſium



oppo

oppoſitarum cẽtra per centrum I, quæ ſit E I S, per 2 cor. 21 decimiquinti. Ipſa per idem cor. baſium planis recta erit, nempe perpendicularis baſibus dodecaëdri, & proinde baſibus icoſidodecaëdri eadem centra & plana poſſidentibus. Ducantur quinque dimetientes, B D, K M, C R, O N, H L: Ipſæ per centrum I tranſeunt, nam ſunt iungentes oppoſita dodecaëdri latera, bifariam in centro ſe ſecantes, ex 3 cor. 17 decimitertij: Quia verò latera C O, N R, oppoſita coniunctorum triangulorũ, ſunt in dodecaëdro, parallela oppoſitis eiuſdem baſis cubi ſibi inſcripti lateribus, per 2 cor. 2 huius, parallela erunt ad inuicem eadem C O, N R. Quia inſuper latus X Y, baſis dodecaëdri quod per O, in plano A P C O Q, parallelum eſt lateri R M: nam vtrumque eſt parallelum rectæ I H, per cor. 3 decimiſexti, & cor. 39 ſexti: Sed rectæ C O, X Y, ſunt tangentes & parallelæ ad binas N R, R M, tangentes: Parallela itaque erunt quæ per ipſas plana, ſcilicet A P C O Q, & quod per N R M, ex 15 vndecimi. Similiter oſtendentur eidem A P C O Q, parallela eſſe reliqua quæ per N L B, B K C, C O H, H D M, quæ plana cum ſeinuicem tangant, idem planum efficiunt, per cor. 16 decimiquinti, cùm ſint eidem parallela, ex 14 quindecimi: Nempe eadem recta E I, plano A P C O Q recta, ad reliqua plana (ipſi parallela) recta eſt, ex cor. eiuſdem 14 quindecimi: Planum itaque erit decagonũ B K C O H D M R N L, & in eo ductæ dimetientes æquales, K M, C R, O N, H L, & D B, decagoni angulos poſſidentes, æqualibus icoſidodecaëdri lateribus comprehenſos. A centro igitur I per ſingulos angulos deſcriptus circulus, decagonum continebit: Et ideo æquiangulum, cùm eius anguli in æqualibus circunferentijs & ſuper æquales conſiſtant, ex 26 & 27 tertij, nempe quintis circuli ſectionibus. Quod autem icoſidodecaëdrum bifariam ſecet, fit manifeſtum. Nam continet extremas quinque baſes pentagonorũ circa idem pentagonũ deſcriptorum, ex conſtructione: ſex igitur pentagona. Inſuper continet quinque triangula, inter præfata pentagona conſtituta, ac quinque circa prius pentagonum deſcripta. Decem igitur triangula, & ſex pentagona, & totidem ex oppoſito diſtribuens decagonum illud, icoſidodecaëdrum bifariam ſecat: nam totum duodecim pentagonis, 20 verò conſtituitur triangulis (ex 2 huius). Quod autem ſint ſex decagona, patet. Nam quinque prius obeunt per eius 5 latera quinquangulum, reliquum verò baſes quinquangulorum ſibi coniunctorum, oppoſitas delineat (ex conſtructione): Icoſidodecaëdrum itaque ſecari bifariam ſex decagonis æquilateris & æquiangulis oſtendimus.

COROLLARIVM.

Hinc aſſequimur icoſidodecaëdrum componi 12 pyramidibus quinquangulis, æquis, & ſimilibus, & 20 pyramidibus triangulis æquis & ſimilibus.

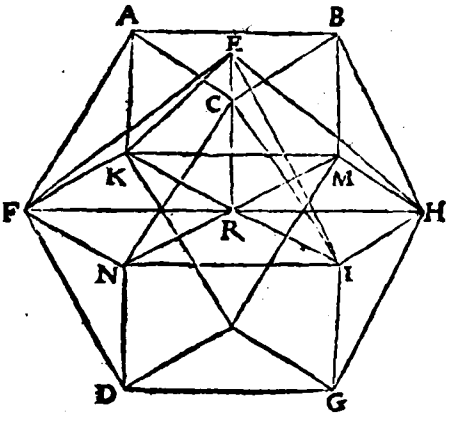
Cùm rectæ quæ ex centro ad angulos ſint æquales, & præfatas pyramides à centro I in æquales baſes deſcribẽtes: ſequetur, quot baſes, tot deſcribi pyramides.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA 27.

Exoctaëdron quatuor exagonis æquilateris, & æquiangulis bifariam ſecari.

Eſto propoſitum exoctaëdron A B C D G, cuius triangulum ſit A B C, latera autem quadratorum triangulis oppoſita ſint K M, I H, N F. Reliqua verò latera illa iun-

gentia ſint N I,H M,K F, ductis dimetientibus F H, K I, M N. Quoniam parallela ſunt trianguli A B C latera quadratorum lateribus K M, H I,N F, ex quadrati natura, & illa item oppoſitis in exoctaëdro lateribus N I, H M, & K F parallela, per 26 huius: inſuper, quia AB, B C,C D,ſimiliter K M,M H,H I,I N,N F,F K,tangentes & parallelæ ſunt,parallela erunt quæ per ipſas plana,ex 15 vndecimi. Cùm autem binarum quæque earum plana, eidem A B C plano ſint parallela, & tamen ſeſe tangant, vnum planum efficiunt, per corol. 16 decimiquinti. Planum eſt itaque exagonum F K M H I N,& æquilaterum, nam æqualia ſunt exoctaëdri latera quibus conſtat: Et circulo conceptũ, cùm à centro R, ad angulos eius rectæ ſint æquales eiuſdem exoctaëdri lateribus, ex 1 huius: Quare æquiangulum erit, per 26 & 27 tertij,nam in æqualibus circunferentijs conſiſtunt ipſius anguli: Exagonum itaque planum æquilaterum & æquiangulum erit F N I H M K: Similiter & reliqua quæ per tria trianguli A B C, latera exagona oſtendentur: quæ quidem biſariam exoctaëdron ſecant, cùm vtrinque tria quadrata quatuor verò triangula relinquant, dimidium ſolidi tollentia, (ex eiuſdem cõſtructione). Exoctaëdron itaque quatuor exagonis æquilateris & æquiangulis biſariam ſecari docuimus.



COROLLARIVM.

Icoſidodecaëdri latus lateris exoctaëdri eadem ſphæra conceptorum, eſt maius ſegmentum.

Nam huius maximus circulus exagonum, illius verò decagonum continet ſidem: quare latus lateris eſt maius ſegmentum, per corol. 9 decimitertij.

FRANC

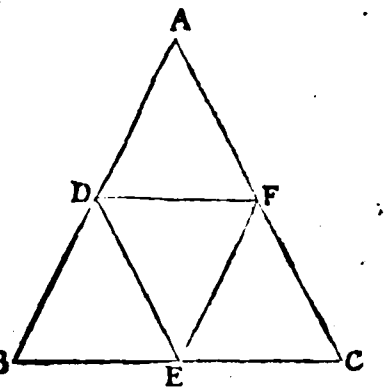
FRANCISCI FLVSSATIS CANDALLAE GEOMETRICORVM ELEMENTORVM

LIBER XVIII.

Qui & solidorum regularium compositorum secundus.

PROPOSITIO I. PROBLEMA I.

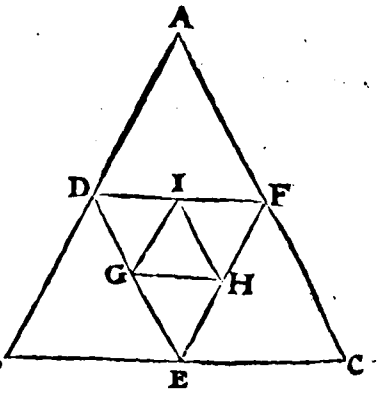
OCTAEDRI latus, sibi inscripti exoctaëdri lateris duplum demonstrare.



Sit octaëdri basis A B C, cui inscribatur basis exoctaëdri D E F, (per 5 decimiseptimi.) Quoniam secantur (ex eadem) latera basis octaëdri bifariam, recta D F, reliquo lateri B C, est parallela (per 2 corol. 39 primi) quæ ideo secat latera proportionaliter (per 2 sexti) & simile erit A D F triangulum, toti A B C, (per corol. eiusdem). Quare erit sicut A B ad B C, sic A D ad D F: æqualis est A B tota toti B C, æqualis igitur erit dimidia A D, reliquæ D F, per 14 quinti: quæ itaque A B, latus octaëdri dupla erit rectæ D F lateris sibi inscripti exoctaëdri. Octaëdri igitur latus sibi, &c.

PROPOSITIO II. PROBLEMA 2.

Pyramidis trilateræ & æquilateræ latus, lateris sibi inscripti exoctaëdri quadruplum esse ostendere.

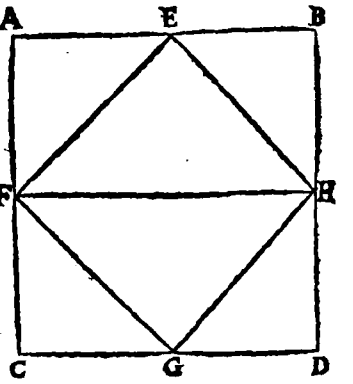


Esto pyramidis propositæ basis A B C: Quoniam triangulum exoctaëdri pyramidi inscripti, continetur basi octaëdri, eadem pyramide comprehensi, per 4 decimiseptimi, sit octaëdri basis D E F, exoctaëdri igitur triangulum erit G H I. Quoniam ex præfata ostendimus F D, dimidiam esse totius A B, similiter ostendemus G H, exoctaëdri latus, dimidium esse totius D E, octaëdri. Atqui octaëdri latus dimidium fuit lateris sibi circunscriptæ pyramidis (per 7 decimisexti). Sequetur itaque A B, latus pyramidis rectæ G H, lateris sibi inscripti exoctaëdri, quadruplum esse. Pyramidis igitur trilateræ æquilateræ latus, lateris sibi inscripti exoctaëdri quadruplum esse ostendimus.

PROPO

PROPOSITIO III. PROBLEMA 3.

Cubi latus, duplum posse lateris sibi inscripti exoctaëdri manifestare.

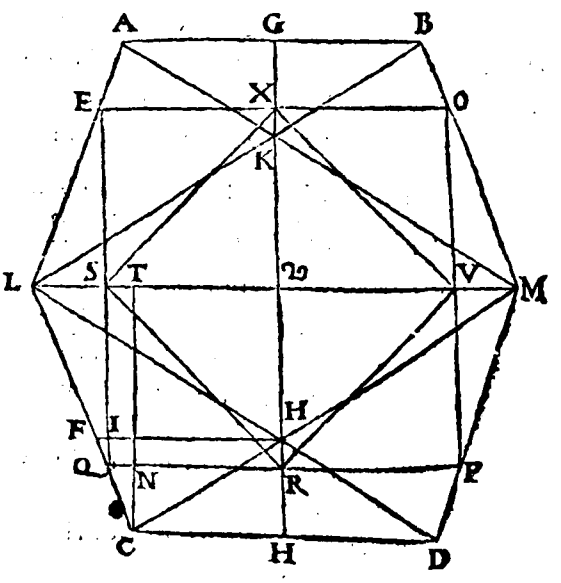


Esto cubi propositi basis A B C D, cui inscriptum est exoctaëdri sibi inscripti quadratum (per 6 decimi septimi) quod quidem sit E F G H. Quoniam æqualis est recta F H lateri A B quadrati in parallelogrammo A H, illa subtendit angulum F E H, exoctaëdri lateribus comprehensum, qui rectus est, cùm sit E F G H quadratum: recta igitur F H, quadrati cubi latus, binas potest, E F, E H, latera scilicet exoctaëdri sibi inscripti (per 47 primi). Cubi itaque latus duplum posse lateris sibi inscripti exoctaëdri manifestauimus.

PROPOSITIO IIII.

Si icosaëdri lateris maius segmẽtum secetur in totam & minus, latus icosaëdri assumens idem minus, duplum potest lateris sibi inscripti exoctaëdri.

Detur icosaëdron A B C D, cuius K H, sit latus: sibi verò inscriptum exoctaëdron E O P Q, cuius latus S R, per 7 decimiseptimi. Quoniam G H iũgit opposita icosaëdri latera, latus K H est eius maius segmentũ (per 1 cor. 16 decimitertij): erit igitur dimidia Z H maius dimidiæ Z H, & proinde maius erit H H, rectæ Z H, (per 2 decimiquarti. Sit item F C maius ipsius L F, (per 30 sexti) secetur verò F C in totam C Q & minus Q F, (per 10 sexti) ductis parallelis Q R P, ipsi C D, & Q S E ipsi G H, vel K H. Ipsi demum L M, erit parallela F I H, cùm sint L C, & Z H similiter sectæ in F, & H, per cor. 39 sexti. Quoniam ostendimus (7 decimiseptimi) quadratũ quod ex dimetientibus basium exoctaëdri icosaëdro inscripti, esse E O P Q, & rectas R N, S I, esse æquales dimidio lateri icosaëdri C H, & proinde in triangulo Q L S, similiter sectas esse L Q in F, vt S Q in I, sed L F, assumens F Q minus segmentum, sui maioris secti in totam & minus, vt patuit, recta igitur S I assumens I Q, assumit simile sui ipsius segmẽtum, & producit S Q, dimidiũ latus quadrati E O P Q, vt patuit eadem 7 decimiseptimi. Dimidium itaque latus icosaëdri Z H, ipsi S I æquale, simile sui ipsius segmentum suscipiet H R, ipsi I Q æquale inter parallelas F H, Q R. Duplum igitur ipsius Z H, latus K H, duplum ipsius H R, (scilicet H R, & K X,) assumens, simile sui segmentum assumet (per 12 quinti). Atqui tota X R, dimetiens quadrati X S R V, exoctaëdri, duplum potest sui lateris S R, per 47 primi. Lateris itaque icosaëdri K H, maius segmentum, scilicet

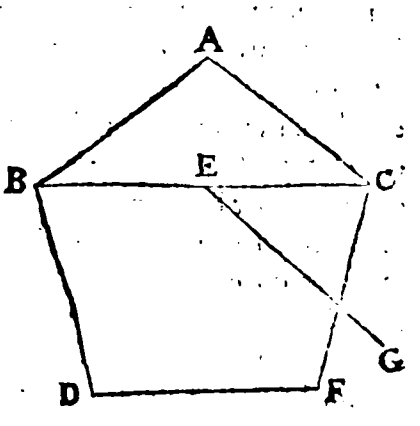


dupla

dupla ipſius R H ſectum in totam & minus, producens minus ſegmentum H R, & X K, aſſumptum ab icoſaëdri latere K H, in totam X R, duplum poteſt lateris S R, exoctaëdri icoſaëdro inſcripti. Si igitur icoſaëdri lateris, &c.

PROPOSITIO V.

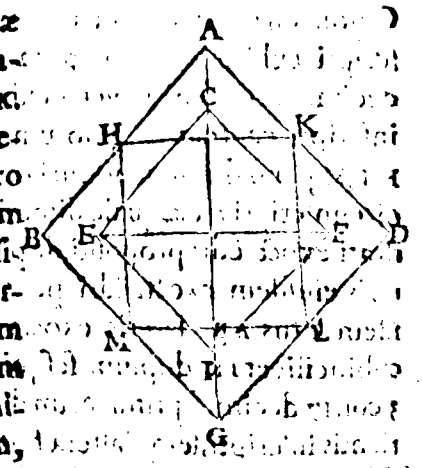
Dodecaëdri latus ad exoctaëdri ſibi inſcripti latus eſt, ſicut maius ſegmentum rectæ extrema & media ratione ſectæ, ad eam quæ poteſt dimidium totius.



Proponatur dodecaëdri baſis A B C D F, latus verò ſibi inſcripti cubi ſit B C, per 8 decimiquinti. Cubo verò inſcripti exoctaëdri latus ſit G E, (per 6 decimiſeptimi.) Quoniam latus cubi dodecaëdro inſcripti deſcribitur in eiuſdem dodecaëdri baſi, per eandem 8: exoctaëdri autem angulus in medio latere cubi conſtituitur (per eandem ſextam decimiſeptimi): Quare idem angulus exoctaëdri cubo inſcripti, medium eius quæ angulum pentagoni ſubtendit, obtinet, per cor. 8 decimiſeptimi. Eſt autem exoctaëdri latus, huius ſubtendentis B C, ſiue lateris cubi ſibi circumſcripti dimidium potentia, per tertiam huius: eiuſdem autem B C, extrema & media ratione diſſectæ maius ſegmentum eſt A B, dodecaëdri, per 8 decimitertij. Sequetur ideo latus dodecaëdri A B, maius quidem ſegmentum totius B C, eam habere rationem ad E G, ſibi inſcripti exoctaëdri latus, quod quidem dimidium potuit totius B C, quam habet maius ſegmẽtum A B, ad potentem dimidiam totius B C: dodecaëdri itaque latus ad exoctaëdri ſibi inſcripti latus eſt ſicut maius ſegmentum rectæ extrema & media ratione ſectæ, ad eam quæ poteſt dimidium totius.

PROPOSITIO VI.

Exoctaëdri latus ſibi inſcriptæ trilaterę æquilaterę pyramidis lateris, tripartitur quartas.



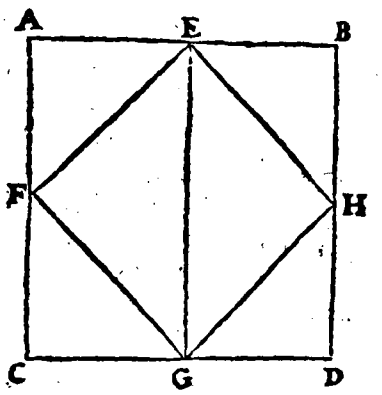
Proponatur baſis cubi exoctaëdrõ cõtinẽtis, quæ ſit A B G D. Quia quadrato cubi inſcribitur exoctaëdri quadratum, ex 2 cor. primæ 17, ſit illud H L M K. Quia rurſus cubi exoctaëdro circunſcripti dimetiens, ſeſquialtera eſt dimetientis eidẽ exoctaëdro inſcripti cubi (per 3 cor. 13 decimiſeptimi), eadem erit ratio dimetientium quæ in baſibus, nempe ſimilis rationis laterum. Sint hæ dimetientes A G circunſcripti A B G D, & C I inſcripti E F I H: Quoniam cubus, & ſibi inſcripta pyramis, angulos in eiſdem ſignis collocant (ex prima decimiquinti); pyramidis verò latus, eſt dimetiens baſis cubi, ex eadem, erit exoctaëdro inſcriptæ pyramidis latus E I. Qualium igitur dimetiens exoctaëdri, ſiue baſis cubi A G, eſt ſex magnitudinum, earum H M, latus exoctaëdri, erit trium: nempe eius dimidium (ex prima 13) ſed qualium A G, eſt ſex partium, earum ſunt E I quatuor: nempe ſunt K G, eiuſdem ſeſquialtera, per 3 cor. 13 decimiſeptimi.

ſeptimi. Qualium itaque H M fuit trium, earundem fuit C I, quatuor. Exoctaëdri igitur latus H M, ſibi inſcriptæ trilaterę æquilaterę pyramidis lateris C I tripartitur quartas.

PROPOSITIO VII.

Latus exoctaëdri lateri ſibi inſcripti octaëdri, eſt æquale.

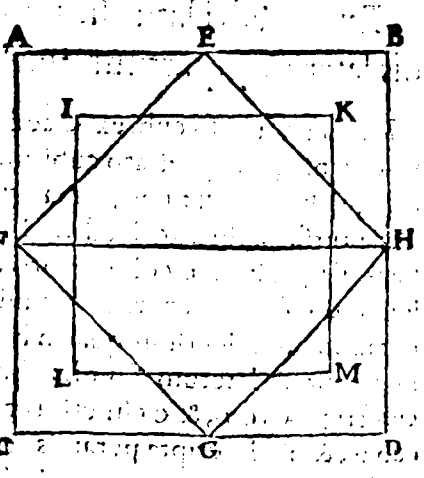
Eſto cubi quadratum A B C D. Quoniã exoctaëdri quadrata, baſibus cubi inſcripta ſunt, ſectis biſariam lateribus (per cor. 2 primæ decimiſeptimi) ſit exoctaëdri quadratũ E F G H: Cùm cubi latus A C, ſit æquale dimetienti baſis exoctaëdri E G; Idem cubi latus duplum poteſt lateris ſibi inſcripti exoctaëdri E F, vel F G, per 3 huius; Idem inſuper cubi latus, duplum poteſt lateris ſibi inſcripti octaëdri, per 8 decimiſexti: octaëdri itaque & exoctaëdri cubo inſcriptorum æqualia ſunt latera: nam eiuſdem ſunt dimidiæ potentiæ, Atqui idem octaëdron cubo, & ſibi inſcripto exoctaëdro inſcribitur per cor. 10 decimiſeptimi. Sequetur itaque latus exoctaëdri E F, æquale eſſe lateri ſibi inſcripti octaëdri. Nam quadratum octaëdri inſcriptum eſt quadrato exoctaëdri, ex dimetientibus ſuorum quadratorum conſtituto, ex eiuſdem 10 cõſtructione, quod quidem quadrato cubi æquatur. Latus igitur exoctaëdri, lateri ſibi inſcripti octaëdri eſt æquale.



PROPOSITIO VIII.

Exoctaëdri latus, lateris ſibi inſcripti cubi ſeſquioctauum poteſt.

Eſto quadrata baſis exoctaëdri E F G H, cubi verò circumſcripti baſis eſto A B C D: Eidem exoctaëdro inſcripti cubi baſis ſit I K L M: Quoniam exoctaëdri quadratum, baſi circũſcripti cubi inſcribitur, per 2 corol. primæ decimiſeptimi, baſis verò cubi exoctaëdro inſcripti, centra triangulorum poſſidet, vt I, K, L, M, per 11 decimiſeptimi: latus autem cubi circunſcripti A B, æquale dimetienti F H, quadrati exoctaëdri propoſiti, duplum poteſt lateris eiuſdem exoctaëdri, per 3 huius, poteſt idem latus A B, lateris exoctaëdro inſcripti cubi, ſcilicet I K, duplum ſeſquiquartum, per 3 cor. 17 decimiſeptimi. Nam dimetiẽs dimetientis inſcripti, ſeſquialtera fuit longitudine, & ideo latus lateris 2 $\frac{1}{2}$ poteſt ſimiliũ figurarum. Quare potentia erit A B latus circunſcripti lateris I K, inſcripti, duplum ſeſquiquartum. Qualium igitur A B, poteſt 18, earum I K, poterit 8. Sed qualium A B poteſt 18, earum E F poteſt 9, nempe dimidium. Qualium itaque E F, latus exoctaëdri poteſt nouem, earum I K, latus inſcripti cubi, eſt octo partium potentia.



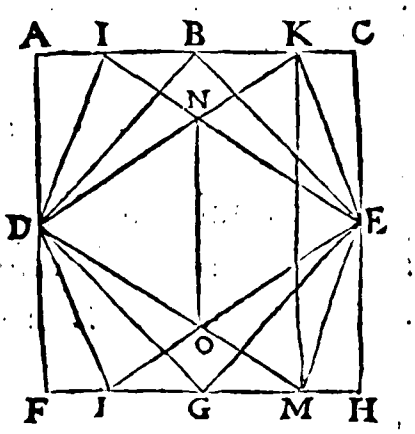
Exocta

Exoctaëdri igitur latus, lateris ſibi inſcripti cubi ſeſquioctauum poteſt.

PROPOSITIO IX.

Latus exoctaëdri ad latus ſibi inſcripti icoſaëdri, rationem habet quam recta potens dimidium rectæ, extrema & media ratione ſectæ, ad maius ſegmentum totius.

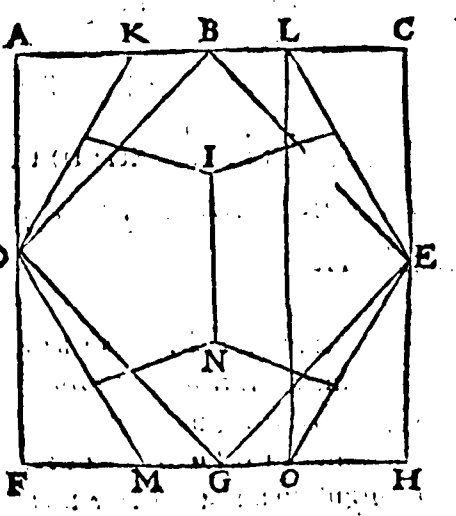
Eſto exoctaëdrum A B C D E F G H, ſibi verò inſcriptũ icoſaëdrũ I K D E L M N O, cuius latus ſit N O, ducta K M: latus autem exoctaëdri ſit B D: Dico B D habere rationem ad N O, quam potens dimidiam, ad maius eius ſegmentum. Quoniam A C F H, eſt quadratum ex 4 dimetientibus baſium exoctaëdri deſcriptum, ex conſtitutione eiuſdem, æquale autem quadrato cubi circunſcribentis illud, cùm ſint lateribus cubi parallelæ: Quare ſuſcipit exoctaëdri quadratum B D G E, per 2 cor. 1 decimiſeptimi. Quia verò huius quadrati A C F H, bina oppoſita latera, quatuor inſcripti icoſaëdri ſuſcipiunt angulos, in exoctaëdro (per 12 decimiſeptimi) ſcilicet I, K, L, M. Cùm inſuper recta K M, oppoſitos coniunctarum baſium icoſaëdri iungens angulos, extrema & media ratione ſecta, efficiat maius ſegmentũ latus icoſaëdri N O, per 1 cor. 16 decimitertij: Quæ quidem K M, æquatur lateri C H, quadrati: nam K C, & M H, ſunt æqualium dimidiorum laterum minora ſegmenta, ex eadem 12 decimiſeptimi & 14 decimiquinti, & ideo æqualia in parallelogrammo K C H M. Rectæ autem C H, dimidium poteſt B D, exoctaëdri latus per 47 primi, nempe C H, eſt æqualis ſubtendenti B G. Sequetur itaque latus exoctaëdri B D, dimidium poſſe rectæ K M, cuius maius ſegmentum eſt latus N O, icoſaëdri exoctaëdro inſcripti. Ratio igitur lateris B D, exoctaëdri, ad latus N O, icoſaëdri, eſt ea, quam habet B D, recta, potens dimidium rectæ K M, extrema & media ratione ſectæ, ad N O, maius ſegmentum totius K M. Latus itaque exoctaëdri, ad latus ſibi inſcripti icoſaëdri, rationem habet, quam recta potens dimidium rectæ, extrema & media ratione ſectæ, ad maius ſegmentum totius.



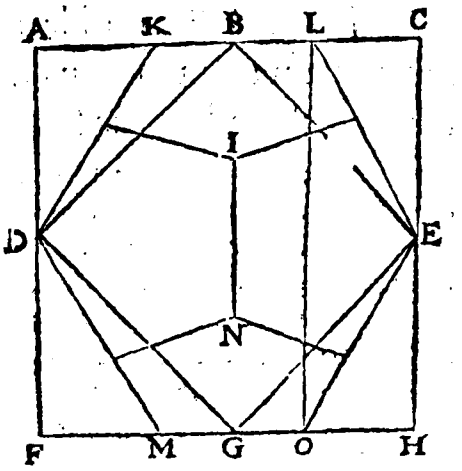
PROPOSITIO X.

Exoctaëdri latus ad dodecaëdri ſibi inſcripti latus, ſe habet vt potens dimidium rectæ extrema & media ratione ſectæ, ad minus eius ſegmentum.

Eſto propoſitum exoctaëdrũ A B C D E F G H, cuius latus B D: ipſi verò inſcriptum dodecaëdrum eſto K L D E M O, eius latus K L: Dico latus B D, ad latus K L, ſe habere vt potens dimidium, ad minus ſegmentum totius. Cùm oſtenſum ſit baſis exoctaëdri dimetientem A C, æqualem eſſe lateri circunſcripti cubi, per 2 corol. primæ decimiſeptimi: nam inſcribitur exoctaëdri baſis, baſi cubi: Cubi verò latus A C, duplum poteſt lateris B D, ex 3 huius. Quia verò idem dodecaëdrum cubo,



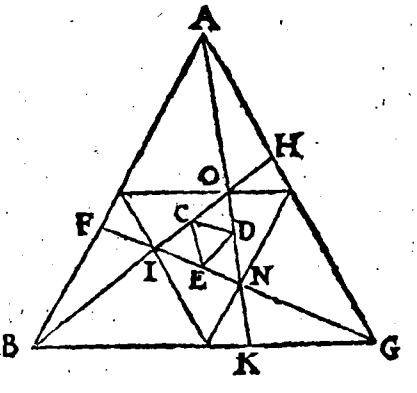
& ab eo deſcripto exoctaëdro, inſcribitur, ex 2 corol. 17 decimiſeptimi, latus dodecaëdri K L, minus erit ſegmentum rectæ A C, lateris cubi, per 2 corol. 13 decimiquinti. Atqui eiuſdem A C, dimidium potuit latus B D, exoctaëdri, ex præfata 3 huius: Exoctaëdri itaque latus B D, ad dodecaëdri ſibi inſcripti latus K L, ſe habet vt B D, potens dimidiũ recta A C, extrema & media ratione ſectæ, ad minus eius ſegmentum K L.



PROPOSITIO XI.

Pyramidis lateris extrema & media ratione ſecti minus ſegmẽtum, octuplum eſt lateris ſibi inſcripti icoſidodecaëdri potẽtia.

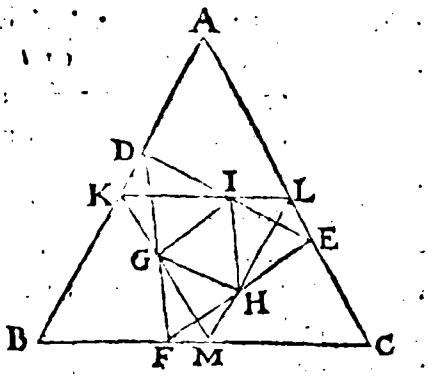
Proponatur pyramidis baſis A B C, cuius latera extrema & media ratione diuidantur in F, H, K, ductis A K, B H, G F. Quoniam tres hæ rectæ comprehendunt baſim icoſaëdri pyramidi inſcripti, per 4 decimiſexti, ſit icoſaëdri baſis O I N. Quia inſuper baſi icoſaëdri pyramidi inſcripti, inſcribitur triangulum icoſidodecaëdri pyramidi eidem inſcripti, per 14 decimiſeptimi; ſit huius icoſidodecaëdri baſis triangula C E D, latus verò C D. Dico latus pyramidis A G, extrema & media ratione ſectum in H, efficere minus ſegmẽtum A H, octuplum potentia lateris C D, ſibi inſcripti icoſidodecaëdri. Quoniam O N, eſt latus icoſaëdri pyramidi inſcripti, ex conſtructis, ſegmentum A H; duplum poteſt lateris O N (per 5 decimiſexti). Atqui duplum eſt O N, lateris C D: nam C D, ſecat proportionaliter latera, ſcilicet biſariam, & igitur parallela eſt ad latus I N (per 2 ſexti): quare ſimilia erunt O I H, & C O D triangula per corol. 2 ſexti. Sicut igitur tota O N, ad totam N I, ſic dimidia O D, ad dimidiam D C: dupla igitur O N, quadruplum poteſt dimidiæ C D (per 19 ſexti). Quare recta A H, duplum potens rectæ O N, octuplum poterit rectæ C D. Pyramidis igitur lateris extrema & media ratione ſecti minus ſegmentum A H, octuplum eſt lateris C D, ſibi inſcripti icoſidodecaëdri potentia.



PROPOSITIO XII.

Octaëdri latus extrema & media ratione ſectum, efficit minus ſegmentum, duplum potentia lateris ſibi inſcripti icoſidodecaëdri.

Proponatur octaëdri baſis A B C, huic autẽ inſcribatur icoſaëdri baſis, ſectis extrema & media ratione lateribus, in D, E, F, (per 16 decimiquinti) eidem verò D E F inſcribatur regulariter baſis icoſidodecaëdri I G H (per 17 decimiſeptimi.) Eidem item baſi octaëdri A B C, regulariter ceu ſectis biſariam lateribus, inſcribatur triangulum K L M: Dico A D, minus ſegmentum lateris octaëdri A B, duplum poſſe



posse lateris G I, sibi inscripti icosidodecaëdri. Quoniam basis icosaëdri pyramidi inscripti, inscripta est basi octaëdri eidem pyramidi inscripti, sectis extrema & media ratione lateribus (per 19 decimiquinti): Triãgulum verò icosidodecaëdri octaëdro inscripti, regulariter inscribitur basi icosaëdri, eidem octaëdro inscripti, sectis bifariam lateribus (ex 15 decimiseptimi): Sequetur itaque basi octaëdri A B C, inscriptam esse icosaëdri basim, sectis extrema & media ratione lateribus in D, E, F, cui regulariter, vel sectis bifariam lateribus, inscriptum est icosidodecaëdri triangulum G I H. Si verò supponamus A B C, pyramidis esse basim, sequetur octaëdri sibi inscriptam esse basim K L M, cui extrema & media ratione sectis lateribus inscribitur icosaëdri basis G I H, vt ostensum est: Atqui idē triangulum G I H, regulariter inscribitur triangulo D E F, & extrema & media ratione triangulo K L M, ipsi A B C, inscriptis, (per corol. primum 4 decimisexti.) Erit igitur, sicut pyramidis basis latus A B, ad icosaëdri latus G I, sic octaëdri latus idem A B, ad icosidodecaëdri latus G I: Sed pyramidis lateris minus segmentum A D, duplum potest lateris G I, sibi inscripti icosaëdri (per 9 decimisexti: octaëdri igitur latus idē A B, extrema & media ratione sectum in D, efficit minus segmentum A D, potentia duplum lateris G I, sibi inscripti icosidodecaëdri. Octaëdri igitur latus, &c.

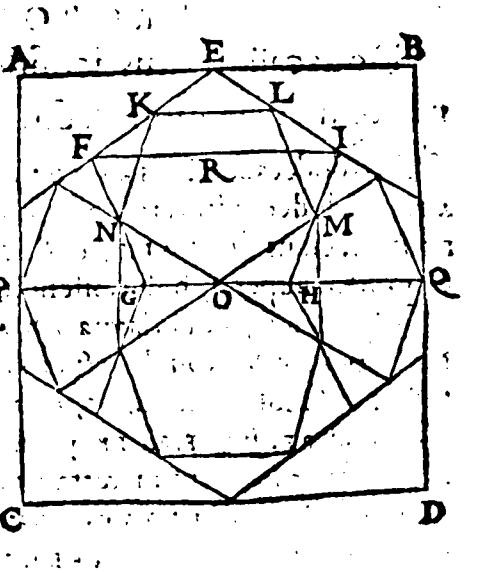
COROLLARIVM.

Pyramidis latus ad sibi inscripti icosaëdri latera, se habent vt octaëdri ad sibi inscripti icosidodecaëdri latera.

Nam singula singulis similiter inscripta sunt, vt patuit prælibata.

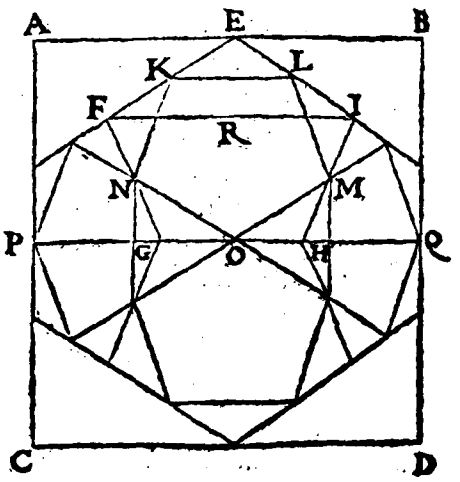
PROPOSITIO XIII.

Lateris cubi dimidia extrema & media ratione secta, efficit maius segmentum latus icosidodecaëdri, eidem cubo inscripti.



Esto cubi propositi basis A B C D, sibi verò inscripti dodecaëdri basis E F G H I. Cùm autem eidem cubo dodecaëdrum & dodecaëdro inscriptum icosidodecaëdrum insideat (ex cor. 16 huius) sit icosidodecaëdri quinquangulum K L M O N, ducta F I, subtendente. Quia P Q, est æqualis lateri cubi A B, & bifariam secta in O, dimidiæq; eius O B, O Q, extrema & media ratione sectæ in G H, latus dodecaëdri constituentes, per dodecaëdri constructionem 17 decimitertij, sit dodecaëdri latus G H vel E I, icosidodecaëdri verò latus sit K L, dico dimidiam lateris cubi E B, vel O Q, extrema & media ratione sectam, efficere maius segmentum Q H, æquale lateri icosidodecaedri K L, eidem cubo A B C D, inscripti. Quoniam bifariam secta sunt dode-

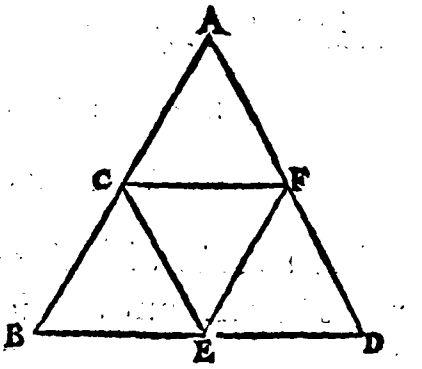
caëdri latera R I, E F, (ex 2 & 16 decimiſeptimi) parallela erit K L rectæ F I, (per 2 ſexti): erit igitur I E, dupla ad L E, ſicut I F, ad L K, (per eandem): & hac de cauſa dupla eſt F I, ſubtendẽs angulum pentagoni dodecaëdri, lateris K L, icoſidodecaëdri: Sed tota F I, ſubtendens, efficit cubi dodecaëdro inſcripti latus, per 8 decimiquinti: quæ eſt maius ſegmentum lateris A B, vel O P, cubi circumſcripti, (per 2 cor. 13 decimiquinti. Quare dimidia eius, ſcilicet R I, erit maius ſegmentum dimidij cubi lateris O Q, quæ quidem R I æqualis fuit ipſi K L, lateri icoſidodecaëdri: Sequetur itaque K L, dimidiam F I (quæ fuit maius ſegmentum lateris A B, vel P Q, cubi) eſſe, (per 15 quinti) æqualem rectæ H Q, quæ fuit maius dimidij cubi lateris O Q. Dimidia igitur lateris cubi O Q, extrema & media ratione ſecta, efficit maius ſegmentum Q H, æquale ipſi K L lateri icoſidodecaëdri, cubo A B C D inſcripti. Lateris igitur cubi dimidia, extrema & media ratione ſecta, efficit maius ſegmentum latus icoſidodecaëdri eidem cubo inſcripti.



PROPOSITIO XIIII.

Icoſaëdri latus, lateris ſibi inſcripti icoſidodecaëdri duplũ eſt.

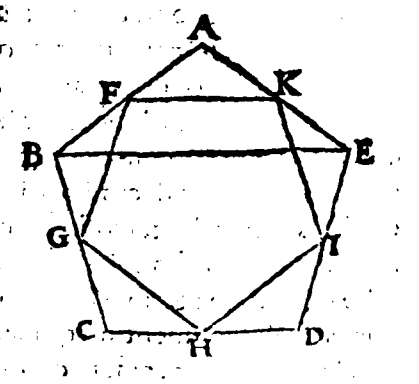
Quoniam icoſidodecaëdri triangulum, icoſaëdri baſi inſcribitur, per cor. 3 decimiſeptimi, ſit icoſaëdri baſis A B D, icoſidodecaëdri verò triangulum C F E, quorum latera ſint A B, & C F. Quoniam C F, ſecat rectas A B, A D, biſariam, parallelæ erunt C F, & B D, per 2 cor. 39 primi. Sicut itaque A B ad A C, ſic B D ad C F, per 2 ſexti. Quare dimidia erit C F ipſius B D, quæ æqualis eſt lateri A B, icoſaëdri icoſidodecaëdrum, cuius latus eſt C F, comprehendentis. Icoſaëdri igitur latus lateris ſibi inſcripti icoſidodecaëdri duplum eſt.



PROPOSITIO XV.

Dodecaëdri latus, icoſidodecaëdri ſibi inſcripti lateris extrema & media ratione ſecti, maioris ſegmenti duplum eſt.

Eſto dodecaëdri baſis A B C D E, cuius latus ſit A B: Icoſidodecaëdri verò ſibi inſcripti baſis eſto F G H I K, cuius ſit latus F K, iuncta B E, ſubtenſa. Quoniam nuper, 13 huius, oſtendimus, in triangulo ipſi A B E, ſimili, latera A B, A E, ſecari biſariam per F K, & proinde rectã B E, duplam eſſe rectæ F K, ſimul ac rectam A B, rectæ A F: ſicut igitur A B, ad B E, ſic A F, ad F K, per 4 ſexti. Atqui A B, eſt maius ſegmentum rectæ B E, (per 8 decimitertij): igitur A F, erit maius rectæ F K, per 2 decimiquarti: dupla autem fuit A B, maioris ſegmẽti A F. Dodecaëdri igitur latus A B, icoſidodeca-



ëdri

ëdri ſibi inſcripti lateris F K, extrema & media ratione ſecti, maioris ſegmenti A F, duplum eſt.

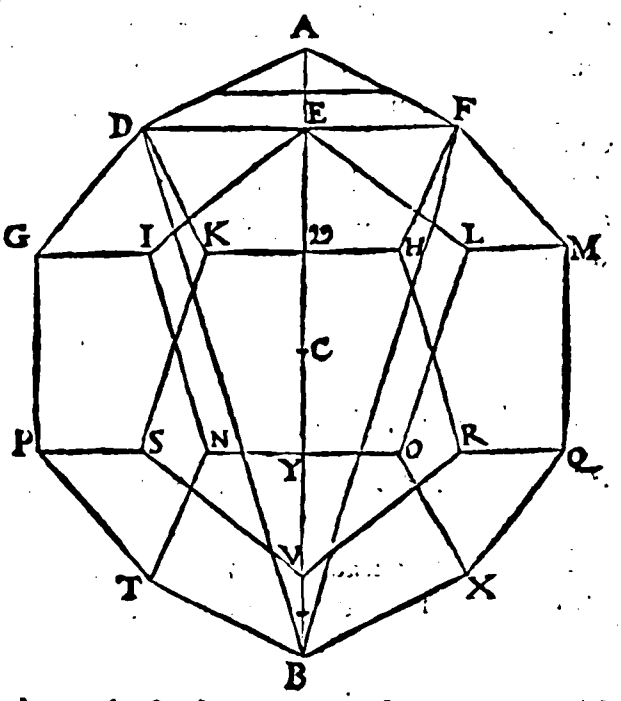
COROLLARIVM.

Dodecaëdri latus excedit icoſidodecaëdri latus ſibi inſcripti, dimidio minoris ſegmenti.

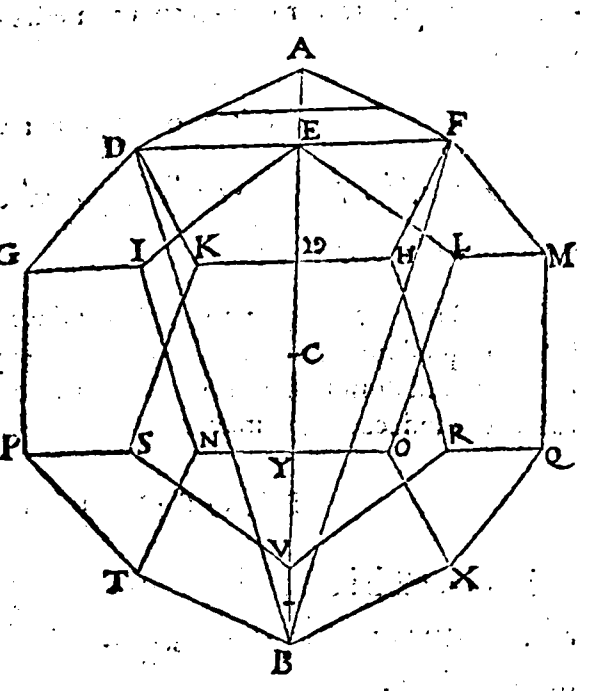
Nam ſi à tota A B, tollatur A F, maius ipſius F K, relinquetur tollendum minus ipſius F K, quod quidem eſt maius dimidiæ F B: præterea relinquetur minus dimidiæ F B, hoc eſt dimidium minoris ſegmenti totius A B, & eſt A B, dodecaëdri latus, ad F K, icoſidodecaëdri, vt maius ſegmentum ad dimidiam eiuſdem B E.

PROPOSITIO XVI.

Dodecaëdri dimetiens quatuor planis orthogoniꝭ ſecatur, ad vtraſque centri partes, extrema & media ratione ſegmenta iungentibus.



Eſto dodecaëdrum A B G D F M, cuius dimetiens A B, centrum C, latera verò A D, A F. Ab angulo F, cadat in dimetientem perpendicularis F E, iunctis E D, F B, D B, rectis. Quoniam triangulorũ E B F, E B D, bina latera E B, B F, binis E B, B D, ſunt æqualia: Nam D B, B F, oppoſitos coniunctarum baſium dodecaëdri iungunt angulos, quæ (per 2 cor. 18 decimitertij) ſunt æquales, & cõmunis E B: Aequales autem angulos A B F, A B D, per 8 primi, continent. nam baſes A D, A F, ſunt æqualia dodecaëdri latera: Reliquæ itaque baſes E D, E F, æquales erunt, & anguli qui ad E, recti, cùm rectus fuerit B E F, vel A E F, ad perpendicularem: Igitur ab angulis ſolidis D, E, & F in dimetientem perpendiculares actæ, ſunt æquales, in idémque ſignum cadentes. Quia verò dimetiens A E, vel B E tribus rectis ſe inuicem tangentibus, ſcilicet perpendicularibus ad rectos ſtetit, ipſæ tres rectæ in vno ſunt plano (per 5 vndecimi): Et eadem dimetiens ad earum planum recta eſt, per 4 eiuſdem. Similiter oſtendemus perpendiculares ab angulis ſolidis G, I, K, H, L, M, cadentes in dimetiẽtem æquales, & idem eius ſignum poſſidere, ac aliud idem planum. Nam ductæ A G, A I, A K, A L, & ſimiles angulos pentagònum ſubtendentes, ſunt æquales, & reliquæ B G, B I, B K, &c. æquales, nempe dodecaëdro inſcriptæ pyramidis ſunt latera ex 10 decimiquinti. & proinde dimetientem ad harum perpendicularium planum rectam eſſe demonſtrant, per eandem 4 vndecimi. Quia verò dimetiens eadem ad duo plana, ſcilicet quæ per D E F, & per G I K H L M, recta eſt, parallela ſunt hæc plana (per 4 vndecimi), eodẽ argumẽto firmabimus reliqua plana quæ per P S N O R Q, & per



T V X, parallela ad inuicem, ac eisdem esse, cùm ad ea recta sit eadé dimetiens. Rursus cùm in pentagono E I N O L, perpendicularis E Y, secta sit plano G I K H L M, extrema & media ratione, per rectam I L, in eodé plano existenté, in signo Z, per 3 decimisexti: similiter in pentagono A D K H F, recta Z A, secabitur in E, (per eandem): Haud secus ostendemus ad alias centri C. partes, rectam Z V secari in Y, rectam verò Y B, secari in V, cùm sint pentagonorum similes perpendiculares (per eandem 3 decimisexti): Quare dimetientem A B, quatuor planis D E F, G I K H L M, P S N O R Q, & T V X, in Z, E, & alias centri C, partes, in Y, V, similiter ipsis Y E, Z A, Z V, Y B, sectam (per 17 vndecimi) dicemus extrema & media ratione, & segmenta eius ad rectos copulari eisdem quatuor planis: vtpote sicut tota Y E, ad maius segmentum Y Z, ita pars dimetientis ab eisdem planis diuisa, ad suam partem: & sicut Z A, in pentagono A D K H F, ad maius Z E, ita pars reliqua dimetientis eisdem planis secta ad partem rectæ, extrema & media ratione coniunctæ, & non secus in reliquis centri C partibus secantur, Z V, in Y, & Y B, in V, per ostensa. Dodecaëdri itaque dimetiens quatuor planis orthogoniôs seu ad rectos secatur ad vtrasque centri partes extrema & media ratione, segmenta iungentibus.

COROLLARIVM I.

Inde consequimur bina media plana, quæ per bases pẽtagonorum, ad idem signum concurrentium, dimetientem trifariam secare.

Nam est tota Y Z, ad maius Z E, sicut idẽ Z E ad minus E A. Quæ quidem Z E, maius, & E A minus, totam Y Z, componũt: haud secus Z B, reliquis Y Z, Z A, æqualis erit.

COROLLARIVM II.

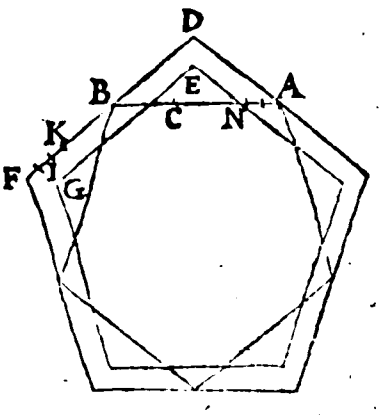
Dodecaëdri dimetiens, excedit icosidodecaëdri sibi inscripti iungentem oppositorum triangulorum centra, siue dodecaëdri eidem icosidodecaëdro inscripti dimetientem, minori segmento tertiæ partis.

Cùm enim icosidodecaëdri triangulum secet dodecaëdri latera A D, A E, A F, bifariam, per 2 decimiseptimi, cuius latera lateribus plani D E F, sunt parallela (per 2 sexti) & ideo plana D E F, & idem triangulum parallela (per 15 vndecimi), quod quidem secat bifariam minus segmentum E A, tertiæ partis dimetientis (per 17 vndecimi) & similiter oppositum B V: Excedit igitur tota A B iungentem, binis medijs minorum segmentorum A E, & B E, hoc est toto segmento A E: Quæ quidem iungens centra triangulorum oppositorum icosidodecaëdri, æqualis est dimetienti

tienti ſibi inſcripti dodecaëdri: nam oppoſiti eius anguli in eorundem triangulorum centris conſtituti ſunt(per 19 decimiſeptimi). Idem inſuper eſt dicere minori ſegmento tertiæ partis, ac tertia parte minoris ſegmenti. Nam ſi tertiorum tria ſumantur minora ſegmenta, ea componunt minus totius, cuius tertia pars eſt alterum illorum.

PROPOSITIO XVII.

Icoſidodecaëdri latus ad dodecaëdri ſibi inſcripti latus, rationem habet, quam tota & maius, ad totam maius & tertium minoris ſegmenti, eiuſdem totius.

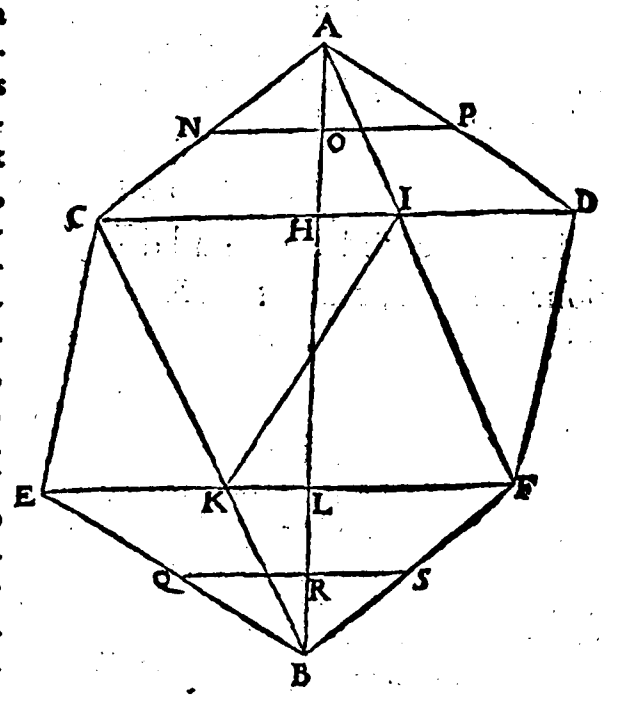


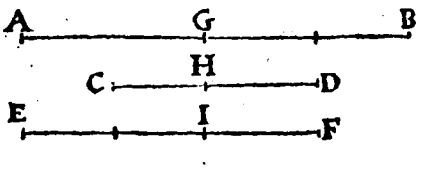
Eſto icoſidodecaëdri latus A B, ſectum in totam A C, & maius ſegmentum B C (per 9 decimitertij): eſto dodecaëdri inſcripti latus E G, dodecaëdri verò eidem icoſidodecaëdro circunſcripti latus ſit D F: Totius A C, ſit minus ſegmentum A N. Dico eſſe A B ad E G vt tota A C, & maius eius ſegmentum C B, vel C N, ad eandem totam & maius ſegmentum, cum tertio N A, minoris ſegmenti. Quoniam F D, dodecaëdri duplum eſt maioris ſegmenti A C, icoſidodecaëdri ſibi inſcripti per 15 huius, æqualis erit D B, eidem A C: nam latus A B, inſcriptum, ſecat bifariam D F, in B, (per 2 & 18 decimiſeptimi): Secetur B F, extrema & media ratione per 30 ſexti) in K, erit B K, maius rectæ B F, vel D B, ſibi æqualis, & ideo maius totius A C, quare tota A B, rectæ D K, æqualis erit. Quia verò rectæ A C, & B F, ſunt æquales, minora earum ſegmenta A N, & K F, erunt æqualia (per 2 decimi quarti). Cùm autem dodecaëdri icoſidodecaëdro circũſcripti dimetiens, excedat dimetientem dodecaëdri eidem inſcripti, minori ſegmento tertiæ partis, vel tertia parte minoris ſegmenti, quæ idem ſunt, per 2 corol. præcedentis, latus D F, eodem excedet latus E G, cùm ſint ſimilium figurarum proportionalia latera. Et quia B F, dimidia totius D F, eſt ſeſquialtera ad eiuſdem D F, tertium erit eadem cauſa K F, (dimidiæ minus ſegmentum) ſeſquialtera ad tertiæ partis totius D F, minus ſegmentum (per 15 quinti), quod quidem ſit F I: Sed latus D F, latus E G exceſſit tertiò minoris ſegmenti, quod fuit F I: reliqua igitur D I, ipſi E G, lateri, æqualis erit. Quia verò A C tota, æqualis fuit toti D B, maius eius ſegmentum B C, maiori B K, æquale erit, & proinde tota A B, toti D K æqualis: E G verò ipſi D I, fuit ſimiliter æqualis: excedet itaque recta E G rectam A B, magnitudine K I. Cùm autem K F, fuerit ſeſquialtera rectæ I F, reliqua K I, ipſius K F, eſt tertia pars. Atqui K F, vel N A, fuerunt minora ſegmenta totius A C, vel B F, ſibi æqualis: Latus itaque B A, ad latus E G, rationem habet quam tota A C, & maius C B, ad totam D B, & maius B K, eiſdem æquales. & inſuper tertium K I, minoris ſegmenti F K, vel N A, eiuſdem totius A C: toti namque D I, fuit æqualis E G. Icoſidodecaëdri itaque latus A B, ad dodecaëdri ſibi inſcripti latus E G, rationem habet quam tota A C, & maius B C, ad totam D B, maius B K, & tertium K I minoris ſegmenti N A, eiuſdem totius A B, quæ ſimul tota D I lateri E G, æqualis fuit.

PROPOSITIO XVIII.

Icoſidodecaëdri latus deficit à latere ſibi inſcripti icoſaëdri, dimidio maioris ſegmenti lateris icoſaëdri.

Proponatur icoſaëdrũ ABCDEF, cuius dimetiens ſit AB: Quia oſtẽdimus decimaſexta decimitertij, icoſaëdrum ſecari duobus pentagonis parallelis, ex lateribus icoſaëdri compoſitis, ſint horũ pẽtagonorũ plana CGHID, & EKLF. Quia inſuper oſtendimus 3 decimiſeptimi, pentagonum icoſidodecaëdri inſcripti, ſecare bifariam icoſaëdri latera, quæ circa eundem angulũ, ſit planum pẽtagoni illius NOP, ſibi verò oppoſitum ſit QRS. Quoniam oſtẽdimus eadem 16 decimitertij, eam quæ inter duo pentagona icoſaëdri, partem dimetientis HL, æquari ei HD quæ ex centro circuli pentagonum CHID continentis, ſiue lateri exagoni: reliquarum verò AH, & LB, ſingulas lateri decagoni eodem circulo comprehenſi: Sequetur eſſe HL ad AH, vel LB, ſicut tota ad maius ſegmentum (per corol. 9 decimitertij). Cùm autem pentagona NOP, & CHID, conſtent lateribus parallelis, per 2 ſexti, & æquales angulos, nempe pentagoni, comprehendant, parallela erunt ea pentagona (per 15 vndecimi) ſimiliter & reliqua EKLF, & QRS. Cùm autem planum NOP bifariam ſecet latera AC, & AD, ſimiliter ſecabit rectam AH, (per 17 vndecimi). Quare binarum AH, LB, æqualium, dimidiæ AO, RB, alteri earum (ſimul ſumptæ) æquales erunt. Et proinde tota AB, dimetiens ad rectam OR, quæ inter oppoſita icoſidodecaëdri pentagona, erit vt tota HL, & bina maiora ſegmenta AH, LB, ad totam HL, & maius ſegmentum alterum illorum, ſcilicet AH. Atqui oſtendimus angulos oppoſitos icoſaëdri, icoſidodecaëdro inſcripti, pentagona oppoſita icoſidodecaëdri poſſidere, 23 decimiſeptimi, & ideo eiuſdem dimetientem: dimetientis itaque AH, circunſcripti, ad dimetientem OR, inſcripti, ratio erit ſicut tota & bina maiora ſegmẽta, ad totam & maius ſegmentum. Quia verò ſimilium figuratum proportionalia ſunt latera, erit latus AD, icoſaëdri icoſidodecaëdro circunſcripti, ad latus inſcripti, vt tota & bina maiora, ad totam & maius ſegmentum. Latus autem icoſaëdri circunſcripti, duplum eſt lateris icoſidodecaëdri, per 14 huius: Sint igitur tria hæc latera, tota, cum binis maioribus ſegmentis, ſcilicet AB, icoſaëdri circunſcripti latus: eiuſdem dimidia CD, continens totius AC dimidiam CH, & reliquæ CB, dimidiam HD, alterum ſcilicet maiorum ſegmentorum, quæ quidem CD eſt icoſidodecaëdri inſcripti latus. Tertia erit EF, icoſaëdri icoſidodecaëdro inſcripti latus, continens totam EI, æqualem ipſi AG, & alterum maiorum ſegmentorum IF. Quare CH, eſt dimidia ipſius EI, cùm ſit dimidia totius AG, ipſi EI, æqualis: HD verò maius ſegmentum, maiori IF æquale fuit: excedit itaque tota EF, totam CD, dimidia totius EI: vel erit icoſidodecaëdri latus ad ſibi inſcripti icoſaëdri latus, vt dimidia maioris CH, & minus HD, ad maius EI & minus IF: Icoſidodecaëdri igitur latus CD deficit à latere EF, ſibi inſcripti icoſaëdri, dimidio maioris ſegmenti EI, lateris EF, eiuſdem icoſaëdri: hoc eſt deficit æquali magnitudi

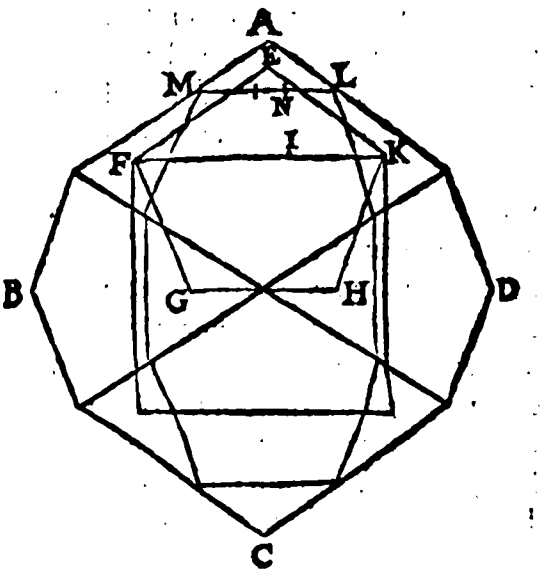




gnitudine ipſi C H. Icoſidodecaëdri itaque latus, &c.

PROPOSITIO XIX.

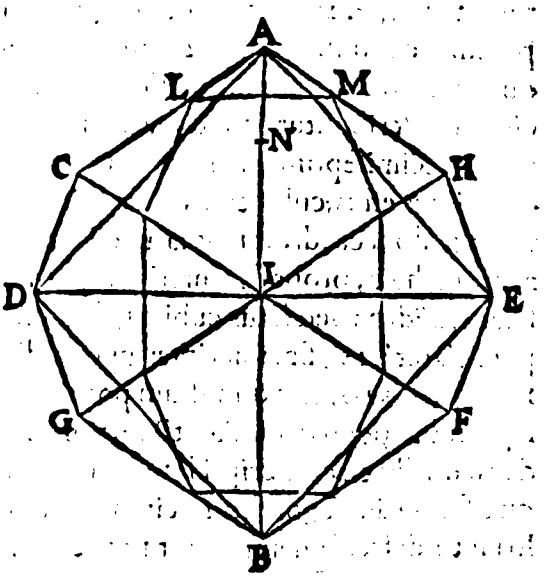
Icoſidodecaëdri latus ſectum in totam & maius deficit à latere ſibi inſcripti cubi, minori eius ſegmento, & inſuper tertia parte minoris ſegmenti prædictæ totius.



Eſto icoſidodecaëdron A B C D, baſis verò ſibi inſcripti dodecaëdri eſto E F G H K (per 19 decimiſeptimi:) Cùm autem cubus angulos in dodecaëdri angulis cõſtituat, ſit latus cubi vtrique, icoſidodecaëdro ſcilicet & dodecaëdro inſcripti F K: Icoſidodecaëdri verò latus, M L: Dico M L deficere à latere F K, minori ſegmento eiuſdem F K, ſcilicet I K, & inſuper tertia parte minoris ſegmẽti totius M N, extrema & media ratione ſecti. Quoniam oſtendimus 17 huius, icoſidodecaëdri latus M L, habere ad latus E F, ſibi inſcripti dodecaëdri, rationem, quam tota & maius, ad totam, maius & tertiũ minoris ſegmenti, eiuſdem totius extrema & media ratione ſecti: Intelleximus ML, ſectam eſſe extrema & media ratione per N, vt maius ſegmentum M N, ad minus N L, rationem haberẽt quam tota ad maius, ex 30 ſexti: præterea eandem totam M N, quæ fuit maius rectæ M L, ſecari rurſus extrema & media, vt ſumamus minoris eius ſegmenti tertium, quo quidem E F exceſſit M L, ex eadem 17 huius. Sed E F, æquale eſt maiori ſegmento F I, lateris cubi F K, per 1 corol. 17 decimitertij: ſequetur itaque rectam F I, excedere rectam M L, eodem tertio minoris ſegmenti totius M N. Atqui F K excedit rectam F I minori lateris cubi F K ſegmento I K. Sequetur ideo latus icoſidodecaëdri M L, ſectum per N, in totam M N, & maius N L, deficere à latere F K, ſibi inſcripti cubi, minori cubi lateris ſegmento I K, & inſuper tertia parte minoris ſegmenti prædictæ totius M N, qua eadem F I, vel F E, exceſſit latus M L. Icoſidodecaëdri itaque latus ſectum in totam, &c.

PROPOSITIO XX.

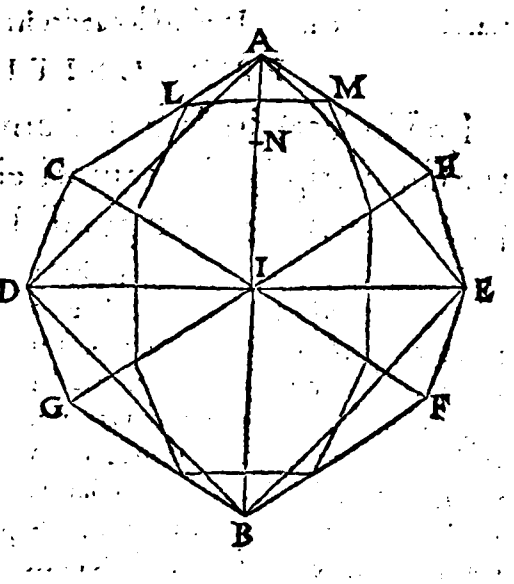
Latus icoſidodecaëdri aſſumens maius eius ſegmentum, dimidiũ poteſt lateris ſibi inſcripti octaëdri.



Exponatur icoſidodecaëdrum A B C D G F E H, eius dimetiẽs A B, latus verò L M: Sit autem quadratũ ſibi inſcripti octaëdri A D B E, per 22 decimiſeptimi, cuius latus A E, & dimetientes ſint A B, D E, ad rectos ſe ſecantes. Dico latus L M, aſſumens maius eius ſegmẽtum, dimidium poſſe lateris A E, octaëdri. Quoniam octaedri & icoſidodecaëdri eædem ſint dimetiẽtes, cùm inſcripti & circũſcripti

ad eadem

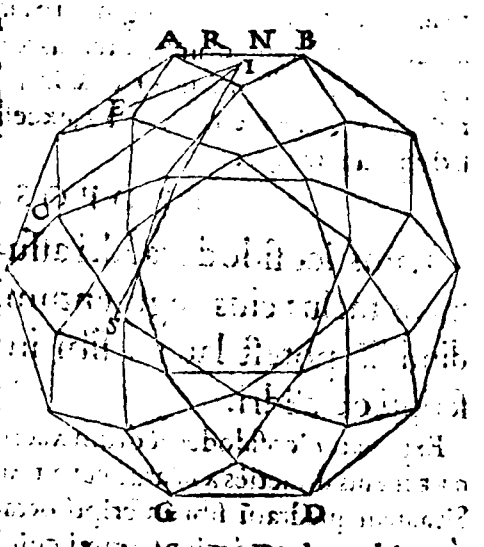
ad eadem ſigna ſint oppoſiti anguli (per eandem 22 decimiſeptimi) erit A B, vtriuſque dimetiẽs. Quæ verò ex centro A I, extrema & media ratione ſecẽtur in N, per 30 ſexti: Quia ſecunda huius oſtẽſum eſt, latus L M, eſſe dimidium maioris ſegmenti dimetientis A B icoſidodecaëdri, recta I N, (maius ſegmentum dimidiæ) æqualis erit lateri L M: Nam ſecantur rectæ in eaſdem rationes (per 2 decimiquarti): ſicut igitur tota A I, ad maius I N, ſic maius I N, ad minus N A: totius igitur I N, maius erit N A: & ideo maius lateris L M, ſibi æqualis. Atqui tota I A, ſcilicet latus I N, & maius eius ſegmentum N A, in vnam compoſita rectam, hæc dimidium poteſt lateris A E, octaëdri (per 47 primi) nam rectus eſt A I E, angulus, æquis A I, I E, quæ ex centro, comprehenſus: Sequetur itaque latus icoſidodecaëdri L M, vel ſibi æquale N I, aſſumens N A, maius eius ſegmentum, in totam A I, dimidium poſſe lateris A E, eidem icoſidodecaëdro inſcripti octaëdri. Latus igitur icoſidodecaëdri aſſumens maius eius ſegmentum, &c.



PROPOSITIO XXI.

Icoſidodecaëdri lateris maiore ſegmento, extrema & media ratione ſecto, tertium minoris eius ſegmenti, eſt exceſſus, quo totum latus deficit à maiori ſegmento eius, quæ dimidium poteſt lateris icoſidodecaëdro inſcriptæ pyramidis.

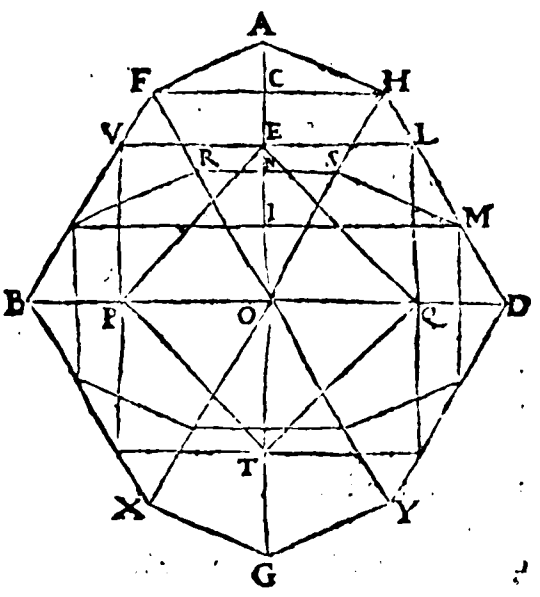
Proponamus datum icoſidodecaëdron A B G D, cuius latus A B ſecetur per 30 ſexti, per N, & rurſum A N, maius eius ſegmentum per R: ſibi verò inſcripti dodecaëdri latus ſit I E, (per 19 decimiſeptimi): inſcripti verò cubi latus I O, inſcriptæ autem pyramidis latus eſto I S (per 20 & 21 eiuſdem): Quoniam pyramis cubo inſcripta, & cubus, eodem dodecaëdro cõcluduntur: Tria verò hæc; eidem inſcribuntur icoſidodecaëdro: Per cor. 21 decimiſeptimi inſcripta erit pyramis, cuius latus eſt I S, cubo, cuius latus fuit I O, & vtraque dodecaëdro, cuius latus eſt E I: tria namque hæc, propoſito inſcripta ſunt icoſidodecaëdro: Sed latus cubi O I, dimidium poteſt lateris I S, ſibi inſcriptæ pyramidis (per 8 decimiſexti). Dodecaëdri verò latus A I, eius I O, quæ dimidium potuit lateris I S ſibi inſcriptæ pyramidis, maius eſt ſegmẽtũ (per 9 decimiſexti): Atqui ex 17 huius, idem latus E I, exceſſit icoſidodecaëdri ſibi circunſcripti latus A B, tertia parte minoris ſegmenti A R, totius A N, quæ fuit maius ſegmentum eiuſdem lateris A B, icoſidodecaëdri. Nam hoc A B, illo tanto defeciſſe demonſtrat 17 theorema. Sequetur itaque icoſidodecaëdri lateris A B, maiore ſegmento A N, extrema & media ratione ſecto in R, tertium minoris



notis eius ſegmenti A R, eſſe exceſſum quo totum latus A B, deficit à maiori ſegmento E I, eius O I, quæ dimidium potuit lateris I S, eidem icoſidodecaëdro A B G D inſcriptæ pyramidis. Icoſidodecaëdri igitur lateris maiori ſegmento, &c.

PROPOSITIO XXII.

Latus icoſidodecaëdri dimidium poteſt lateris ſibi inſcripti exoctaëdri.



Deſcribatur icoſidodecaëdrũ A B G D, cuius latus ſit R S, ſibi verò inſcriptum exoctaëdron eſto L V X Y, cuius latus ſit E P. Dico R S, dimidium poſſe lateris E P: Quoniam anguli exoctaëdri icoſidodecaëdro inſcripti, ſecant baſium pentagonarũ icoſidodecaëdri perpendiculares, in bina maiora, & vnum minus ſegmentũ: hoc eſt, ſecant maius ſegmentum perpendicularis extrema & media ratione, per 24 decimiſeptimi, vt angulus qui ad V, ſecat perpendicularem H F, qui ad E, perpendicularem A N, qui ad L, reliquam D H, & ſimiles. ſequetur per ſectiones D, M, L, H, ducta ipſi L E V, parallela plana, dimetientem A G, ſimiliter ipſi D H, inter O, & C, ſecare, in ſignis I, & E per 17 vndecimi. Haud ſecus diuidetur pars eiuſdem dimetientis A N, ſimiliter ipſi perpendiculari A N, in C, E, per eandem. Sed qualium bina maiora ſegmenta ſunt D M, M L, æqualia, earum minus ſegmentum eſt H L, vt oſtenſum eſt eadem 24 decimiſeptimi: Qualium igitur bina maiora ſunt O I, I E, earum minus eſt E C. Atqui E C, ipſi C A, per eandem, eſt æqualis: nempe bina maiora, qualium E N, eſt minus in perpendiculari A N. Qualium itaque O I, I E, ſunt bina maiora, earum E C, C A, ſunt bina minora: Tota ideo A O, extrema & media ratione ſecatur in E (per 15 quinti): Eſt autem O A, quæ ex centro E O, quadrati P E Q T, ſemis dimetientis, reliquis dimetientibus V X, L Y, quadratorum exoctaëdri æqualis. Tota igitur A G, extrema & media ratione ſecta, efficiet maius ſegmentũ E T, quadrati exoctaëdri dimetientem. Sed dimetientis A G, icoſidodecaëdri maius ſegmentum E T, duplum eſt lateris icoſidodecaëdri (per 2 decimiſeptimi): latus igitur R S, icoſidodecaëdri, æquale erit rectæ E O, dimidiæ maioris ſegmenti E T, ipſius verò E O, duplum poteſt exoctaëdri latus P E, per 47 primi, cùm rectus ſit E O P, angulus: Latus igitur icoſidodecaëdri R S, ipſi E O, æquale, dimidium poterit lateris E P, exoctaëdri ſibi inſcripti. Latus itaque icoſidodecaëdri dimidium poteſt lateris, &c.

COROLLARIVM.

Icoſidodecaëdri dimetiens extrema & media ratione ſecta, efficit maius ſegmentum, exoctaëdri ſibi inſcripti quadratorum, dimetientem.

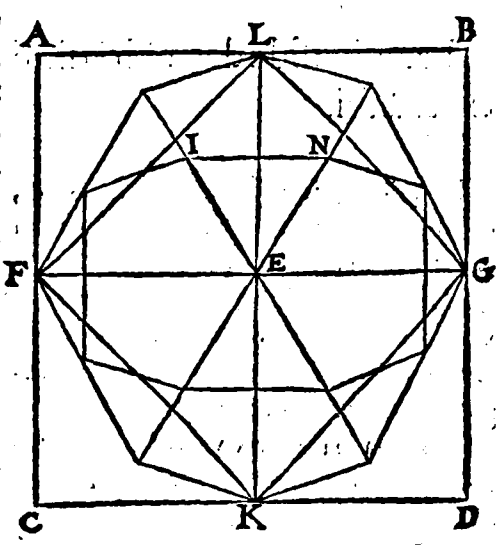
Nam E T fuit maius totius A G.

PROPO

PROPOSITIO XXIII.

Latus exoctaëdri duplum poteſt eius, cuius latus ſibi inſcripti icoſidodecaëdri eſt maius ſegmentum.

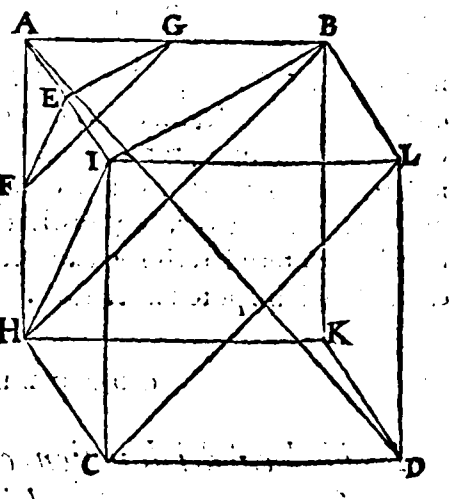
Eſto exoctaëdron A B C D, ſibi verò inſcriptũ icoſidodecaëdron ſit L F K G E, per 25 decimiſeptimi, cuius latus I N. Sit autem exoctaëdri quadratum F G L K, cuius dimetiẽs L E K, latus verò L F: Cùm (ex eadem 25 icoſidodecaëdron conſtituat angulos oppoſitos, in medijs quadratorum exoctaëdri dimetiẽtibus, æqualis erit quadrati dimetiens L K, dimetienti ipſius icoſidodecaëdri: nam ea biſariam ſecat latera A B, C D, quadrati, & eſt reliquis A C, B D, parallela. Sed dimetientis icoſidodecaëdri maius ſegmentum, duplum eſt lateris eiuſdem (ex 2 decimiſeptimi): Et igitur dimidiæ dimetientis E L, erit maius ſegmentum latus icoſidodecaëdri I N: Atqui exoctaëdri latus L F, duplum poteſt rectæ L E, (per 47 primi (cùm binæ icoſidodecaëdri dimetientes L K F G, ad rectos coincidant: Latus igitur L B, exoctaëdri, duplum poteſt eius L E, cuius latus I N icoſidodecaëdro inſcripti, eſt maius ſegmentum. Latus itaque exoctaëdri duplum poteſt, &c.



PROPOSITIO XXIIII. PROBLEMA 4.

Cubum ſibi inſcripi exoctaëdri ſeſquiquintum eſſe demonſtrare.

Sit propoſitus cubus A B C D, triangulum verò ſibi inſcripti exoctaëdri, ſit E F G: Quoniam, ex prima decimiſeptimi E, F, G, ſigna, biſariam ſecant cubi latera, pyramis A E F G, (cubi pars) extra exoctaëdron cadet. Iungantur cubi latera A B, A H, A I, rectis B H, H I, I B, baſim pyramidis A B H I, conſtituentibus: Cùm enim pyramidum A E F G, & A I H B, ſimiles ſint baſes, nempe æquilatera triangula ex dimidiis baſium cubi dimetientibus, & integris cõſtituta: quæ verò angulum ſolidum continent, qui ad A, triangula rectangula iſoſcelia: inſuper proportionalibus lateribus conſtituta, nempe dimidiis, erunt pyramides A E F G, & A I H B, ſimilia ſolida per 7 diffinit. vndecimi: Quæ ideo in tripla erunt ratione laterum A B, ad A G, ſimilis rationis (per 8 duodecimi). Sed A B, ad A G, latera, duplam habent rationem, cùm ſit A B ſecta biſariam, per 1 coroll. 20 ſexti: pyramides igitur A I H B, ad A E F G, octuplam habent rationem, nempe duplæ triplicem. Secetur cubus in bina priſmata, A B H I L C, & D C L K H B, quæ quidem

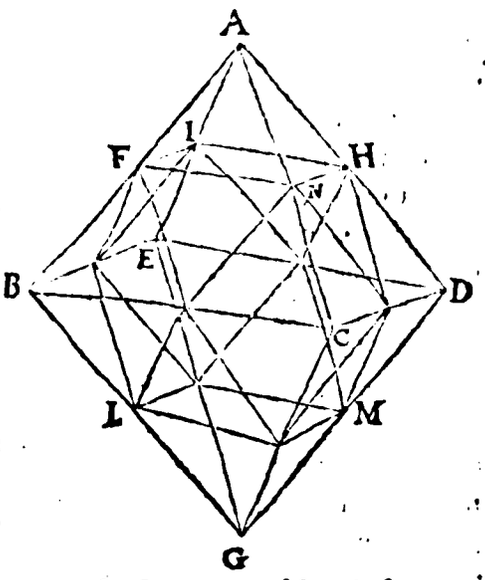


dem ſunt æqualia (per 8 diffinit. vndecimi). Cùm autem priſma ABHILC, & pyramis AIBH, ſint ſuper eadem baſi trigona ABH, & eodem vertice AI, pyramidis triplum eſt priſma (per 1 corol. 7 duodecimi) : priſmatis autem duplus eſt cubus, vt patuit : pyramidis igitur AIBH, ſextuplum capiet cubus ABCD. Quia verò pyramis AIBH, eſt octupla pyramidis AEGF, extra exoctaëdrum conſtitutæ, eiuſdem AEGF, erit cubus 48, qualium ea eſt vnius. Atqui cùm octo ſint cubi anguli, octo eorundem ipſi (AEGF æqualium) erunt excellus : Qualium igitur exoctaëdron erit 40, earum erit cubus 48: quæ quidem ipſarum 40 efficiunt ſeſquiquintum. Cubum itaque ſibi inſcripti exoctaëdri ſeſquiquintum eſſe demonſtrauimus.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA 5.

Octaëdron ſibi inſcripti exoctaëdri ſupertripartiens quintas eſſe.

Eſto octaëdron ABGDEC, ſibi verò inſcriptum exoctaëdron FHLM, cuius quadratum ſecãs quatuor octaëdri latera, quæ ad A, ſit FINH, per 3 decimiſeptimi : pyramis erit, quæ ſuper baſi FINH, vertice verò A, extra exoctaëdron conſtituta : ſimiliter conſtituentur reliquis octaëdri angulis ſimiles & æquales, extra exoctaëdrum conſtitutæ, numero quidẽ ſex, ex deſcriptione exoctaëdri eadem 3 decimiſeptimi. Atqui pyramis AFINH, ad dimidiam octaëdri pyramidem ABECD, eſt octaua pars, nempe in tripla ratione laterum AF, ad AB, (per 1 corol. 8 duodecimi) : Qualium igitur octaëdrum erit ſedecim, earum partium pyramis AFINH, erit vnius. Quia verò octaëdron excedit ſex pyramidibus ipſi AFINH, æqualibus exoctaëdron FHLM ſibi inſcriptum, cùm ſint ſex octaëdri anguli, qualium erit octaëdrum ſedecim, earum erit exoctaëdron ſibi inſcriptum decem partium : Et ideo qualium octaëdrum erit octo, earum exoctaëdrum erit quinque.

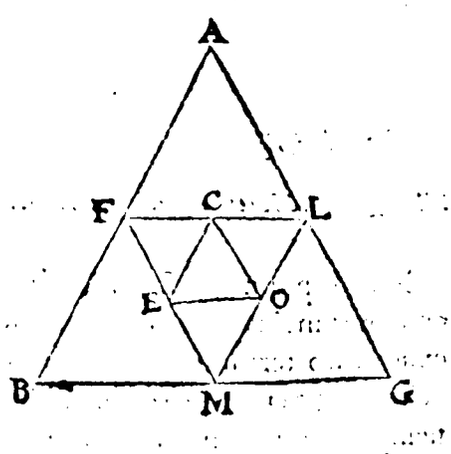


Octaëdrum itaque ſibi inſcripti exoctaëdri ſupertripartiens quintas eſſe manifeſtauimus.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA 6.

Trilateram æquilateram pyramidem ſibi inſcripti Exoctaëdri triplam ſeſquiquintam eſſe.

Detur pyramidis trilateræ æquilateræ baſis ABG: Quoniam baſes octaëdri pyramidi inſcripti, continent exoctaëdri eidem pyramidi inſcripti triangula, per 4 decimiſeptimi : Pyramidis autem baſes, octaëdri baſes continent, per 2 decimiquinti: Erunt igitur FLM octaëdri, CEO verò oxoctaëdri, eidem pyramidi inſcriptorũ triangula: Cùm autẽ pyramis oſtenſa ſit, ſibi inſcripti octaëdri dupla (per 26 decimiſexti) octaëdrum verò ſibi inſcripti exoctaëdri ſuperſextupartiens decimas, vel $1\frac{1}{7}$ ex 25 huius : Qualium erit exoctaëdron CEO decem, earum erit octaëdron FLM ſedecim, pyramis verò



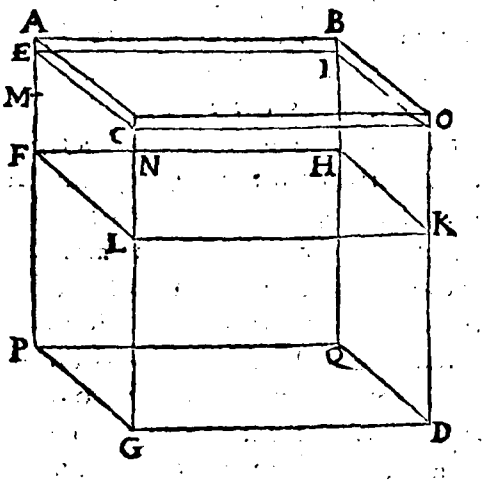
A ABC

A B C triginta duarum partium. Qualium igitur pyramis A B C erit 32, earum erit exoctaëdron C E O, decem, quæ quidem componunt rationem triplam ſeſqui quintam. Triilateram itaque æquilateram pyramidem ſibi inſcripti exoctaëdri, triplam ſeſquiquintam eſſe docuimus.

PROPOSITIO XXVII.

Dodecaëdri ſolidum, excedit exoctaëdri ſibi inſcripti ſolidum, parallelepipedo ſolido, quod ſuper baſi cubi dodecaëdro inſcripti, vertice autem maiori ſegmento, dimidio minoris ſegmenti, & ſexta parte lateris cubi.

Eſto cubi ſolidum A B G D: Quoniam dodecaëdrum ſuſcipit cubum, & cubo inſcriptum exoctaëdron (per cor. 8 decimiſeptimi: Dodecaëdrum autem excedit cubum ſibi inſcriptũ, ſolido, quod ſuper baſi cubi, vertice verò lateris eius maiori ſegmẽto, & dimidio minoris, per 33 decimiſexti: Eſto ſolidũ ſuper baſi cubi P Q G D, vertex autem cubi A P, ſecta in maius ſegmentum P F, ex 30 ſexti, & dimidium minoris F A, in M: Erit igitur quod ſuper baſi P D, vertice verò P M, exceſſus dodecaëdri ſolidi, in cubi inſcripti ſolidum. Quia rurſus cubus excedit ſibi inſcriptũ exoctaëdron ſexta ſui parte, cùm ſit illi ſeſquiquintus (per 24 huius): Sexta autem pars rectæ P A, minor eſt reliquo minoris ſegmenti dimidio: nam minus ſegmentum rectæ, maius fuit tertia parte (per 13 decimiſeptimi): Sit ea ſexta pars M E, minor dimidio M A, minoris ſegmẽti F A: Erit ideo pars cubi quæ inter plana quæ per M & E: reliquis per A & P parallela, minor ea quæ inter M & A, ſupereſt (per 1 ſexti & 25 vndecimi): fuit autẽ M E, ſexta cubi pars, quæ addita exceſſui, quod inter plana P, & M, quo dodecaëdrum exceſſit cubum, conſtituet ſolidum, quod inter plana P & E, ſuper baſi P Q D G, vertice verò maiori ſegmento F P, & dimidio minoris F M, & ſexta lateris A P parte E M, comprehenſum, quo dodecaëdrum excedit exoctaëdrum, cubo & eidem dodecaëdro inſcriptum. Dodecaëdri igitur ſolidum, excedit exoctaëdri ſolidum, parallelepipedo ſolido, quod ſuper baſi cubi dodecaëdro inſcripti, vertice autem maiori ſegmento, dimidio minoris ſegmenti, & ſexta parte, lateris cubi.



COROLLARIVM.

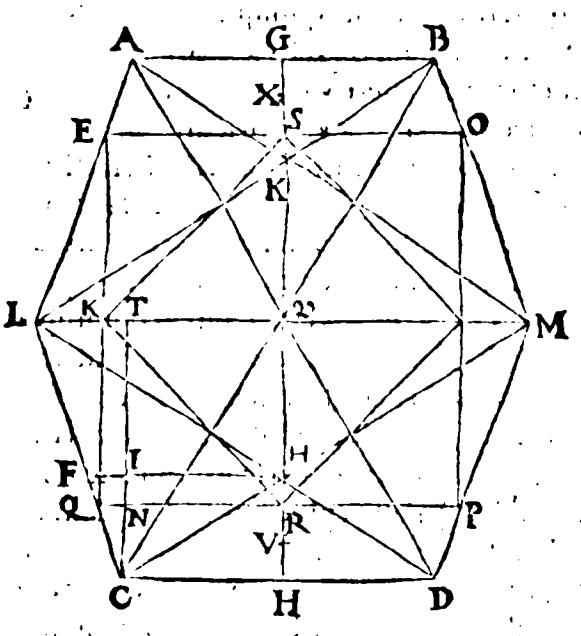
Dodecaëdrum excedit duplum exoctaëdri inſcripti, exceſſu, quo tertium excedit dimidium minoris ſegmenti.

Nam duplum exoctaëdri, cubum & inſuper $\frac{1}{3}$ continet: dodecaëdrum verò, cubum & maius cum dimidio minoris, ſegmenta: ſupereſt igitur ad duplum cubi, exoctaëdro tertium, dodecaëdro verò dimidium ſegmenti minoris. Quare tertij in hoc ſegmentum exceſſus, idem erit qui dodecaëdri in exoctaëdri duplum, nempe quo tertium excedit minoris ſegmenti dimidium.

PROPO

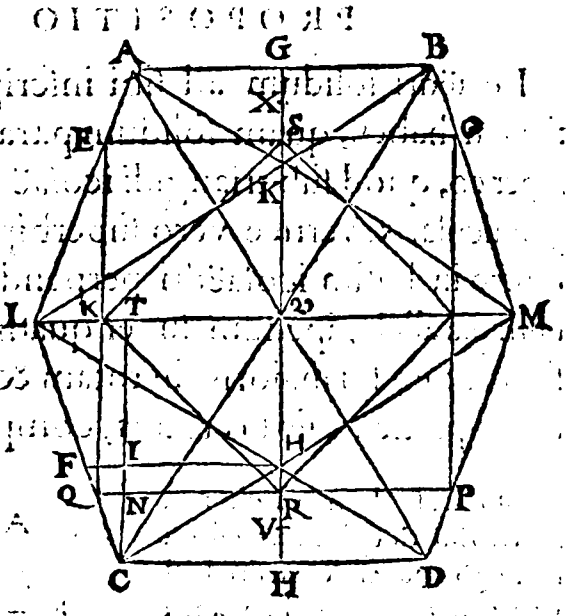
PROPOSITIO XXVIII.

Icosaëdri solidum ad sibi inscripti exoctaëdri solidum, rationem habet, quam solidum parallelepipedum, constitutum super eo, quod sub trianguli icosaëdri latere, & dupla suæ perpendicularis, vertice verò superbipartiente tertias, eius quæ à centro in basim icosaëdri perpendicularis continetur, ad solidum parallelepipedum super quadrato lateris sumentis minus segmentum sui maioris, in totam & minus secti, vertice autem quintupartiente sextas totius, comprehensum.



Esto icosaëdron ABCDKπ, sibi verò inscriptum exoctaëdron EOPQ: Sit super icosaëdri basi AKB, pyramis AZKB, in quam à centro Z, cadat perpendicularis ZX: Ei pyramidi opposita similis & æqualis sit (ex icosaëdri constructione) ZDπC, cuius perpendicularis ZV: Quoniam prisma, quod super basi AKB, vertice verò XZ, triplum est pyramidis AZBK, per 1 corol. 7 duodecimi, prisma illius duplũ scilicet super eadem basi AKB, vertice verò XV, dupla ipsius XZ, sextuplum erit eiusdem pyramidis AZKB, nam prismata ad se sunt vt vertices per cor. 40 vndecimi): Quare prisma super eadem basi, vertice verò quinque sextarum partium ipsius VX, æquale erit quinque pyramidibus ipsi AZBK æqualibus. Quia verò icosaëdron constat 20 pyramidibus, eidem AZBK, æquis & similibus nempe super icosaëdri 20 basibus, à centro constitutis, sequetur has 20 pyramides componere prisma, quadruplum eius quod quinque pyramidibus constitit, puta super eiusdem ABK, quadrupla basi, & eiusdem ⅔VX, vertice (per idem corol. 40 vndecimi): Atqui quadrupla basis est triangulum quod ex duplo latere similiter descriptum (per 20 sexti): Totum igitur icosaëdrum æquale erit prismati, quod super trigono duplum latus sui lateris Kπ, habente, vertice autem quinque sextarum ipsius XV, hoc est superbipartiente tertias dimidiæ ZX quæ à centro in basim perpendicularis. Quia rursus rectangulum super eadem basi, & vertice trianguli, duplum est, per 41 primi, prismata autem sub eodem vertice ad se sunt vt bases, per 32 vndecimi & corollarium 40 eiusdem, erit solidum quod super rectangulo quod sub duplo icosaëdri latere, & dupla eius perpendiculari, vertice verò superbipartiente tertias, perpendicularis ZX (per eandem 32 vndecimi) duplum totius icosaëdri. Quare eius dimidium, scilicet quod super latere vno & dupla perpendiculari, vertice verò eadem superbipartiente tertias eiusdem ZX, æquale erit solido icosaëdri.

Demum quia ostendimus dimetientem EQ, quadratorum exoctaëdri, æqualem esse lateri Kπ, icosaëdri, & insuper minori segmento ϕR, Ks sui maioris segmenti, ϕHKG, in totam HR, GS, & minus Rπ, SK secti (quarta huius, & septima decimiseptimi) Ostendimus item cubum exoctaëdro circunscriptum, huic dime-



tienti S R, vel E Q, habere latera æqualia: nam vtraque possunt lateris S K, exoctaëdri duplum (prima decimiseptimi & 5 huius): Quare solidum super quadrato rectæ S R vel E Q, vertice verò eadem S R, vel E Q, ipse cubus est: Qui quidē suo exoctaëdro, (scilicet ipso E O P Q, proposito) maior sexta parte ostensus est (24 huius): Relinquetur itaque exoctaëdron æquale solido, quod super quadrato cubi, siue lateris E Q, vertice autem quinque sextarum eiusdē E Q, vel S R, continetur. Sed lateri E Q, vel S R, æquale fuit latus K Σ, icosaëdri, cum minori segmento (sui maioris, secti in totam & minus) scilicet binis Σ R, & S K. Exoctaëdron igitur E O P Q, icosaëdro A B C D inscriptum, æquale erit solido parallelepipedo super quadrato icosaëdri lateris K Σ, sumentis minus segmentum (binas quidem Σ R, & S K) sui maioris (quod fuit Σ H, & K G) in totam H R, G S, & minus Σ R, S K, secti, vertice autem quintupartiente sextas totius R S, comprehensum. Erit igitur ratio icosaëdri A B C D, ad sibi inscriptum exoctaëdrum, eadem quæ inter illis æqualia solida, scilicet inter solidum super rectangulo, quod sub latere icosaëdri, & dupla suæ basis perpendiculari, vertice verò superbipartiente tertias, perpendicularis, à centro in basim, scilicet Z X, continetur, æquale icosaëdri solido, & solidum parallelepipedum super quadrato lateris icosaëdri K Σ, vel C D, sumentis minus segmentum sui maioris, secti in totam & minus, quod fuit totum S R, vel E Q, vertice autem quintupartiente sextas eiusdem S R, totius, comprehensum, æquale inscripto exoctaëdro (per 7 quinti). Icosaëdri igitur solidum, ad sibi inscripti exoctaëdri solidum, rationem habet, quam solidum parallelepipedum constitutum, &c.

COROLLARIVM.

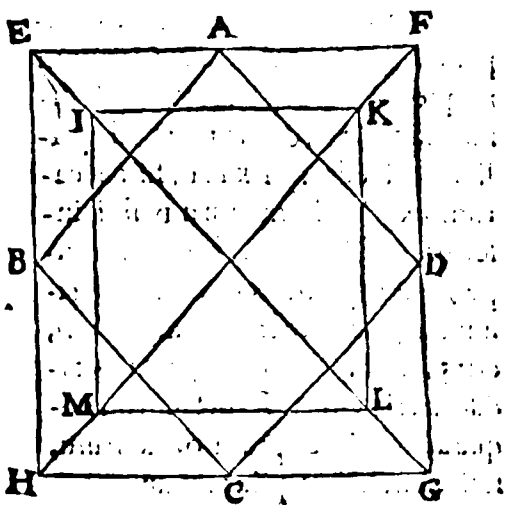
Icosaëdrum est æquale solido parallelepipedo super eo, quod sub latere basis, & dupla perpendiculari, vertice autem superbipartiente tertias, eius, quæ a centro in basim icosaëdri, vt ostensum est prima parte.

Quod item æquum similiter est solido quod sub eodem vertice, & quadrupla icosaedri basi, quæ rectangulo quod sub latere & dupla perpendiculari, æqualis est (per 41 primi) vertice autem quinque sextarum iungentis oppositas icosaëdri bases, quæ eidem superbipartienti tertias eius, quæ à centro in basim icosaëdri, fuit æqualis.

PROPOSITIO XXIX.

Exoctaëdri solidum ad sibi inscriptæ trilateræ æquilateræ pyramidis solidum rationem habet octuplam superseptupartientem decimas sextas.

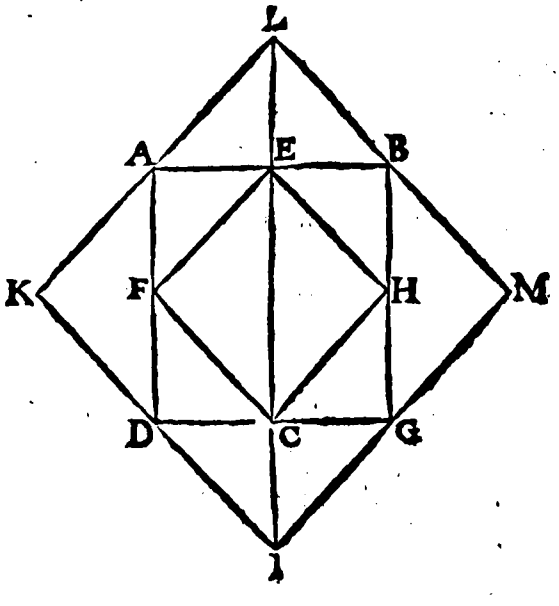
Propo



Proponatur exoctaëdrõ A B C D: circunſcripti verò illi cubi baſis ſit E F G H, inſcriptus autem cubus ſit I K L M, in cuius angulos cadat exoctaëdro inſcripta pyramis I L K M, (ex I vndecimiquinti): Cuborum dimetientes ſint E G circunſcripti, I L inſcripti. Dico exoctaëdri ſolidũ A B C D, eſſe pyramidis I L K M ſibi inſcriptæ octuplum ſuperſeptupartiens decimas ſextas. Quoniam inſcriptus exoctaëdro cubus, angulos in centris triãgulorum collocat I, K, L, M, per II decimiſeptimi: Pyramis verò eidem inſcripta exoctaëdro, angulos in eiſdem centris conſtituit, per 9 eiuſdem: cubi autem circunſcripti dimetiens E G, inſcripti dimetientis I L, ſeſquialtera eſt, per 3 cor. 13 decimiſeptimi: Quare cubus E F G H, ad cubum I K L M, rationem habens triplam laterum, vel dimetientium (per 33 vndecimi) rationem ſeſquialteræ triplam habebunt, ſcilicet quam arithmeticis 162 ad 48 dicimus triplam tripartientem octauas: Quia verò inſcriptus cubus, inſcriptam exoctaëdro pyramidem ſuſcipit, per 9 & 11 decimiſeptimi: nam vtraque angulos in eiſdem baſium centris collocãt: Cubi verò ad pyramidem ratio fuit tripla, ex 25 decimiſexti: Qualium igitur fuit cubus exoctaëdro inſcriptus 48, earum vtrique inſcripta pyramis erit 16, tertia quidem ipſorum 48 pars; Et earumdem circunſcriptus exoctaëdro cubus, fuit 162: Qualium ergo circunſcriptus fuit 162, earum pyramis exoctaëdro inſcripta erit 16: Sed qualium cubus eſt 162, earum exoctaëdrum ſibi inſcriptum eſt 135, nempe quintupartiens ſextas, per 24 decimioctaui: Qualium itaque inſcripta pyramis fuit 16, exoctaëdrum ſibi circunſcriptum erit 135, quæ quidem habent ad 16, rationem octuplam ſuperſeptupartientem decimasſextas, vt multiplicatione ſubiicitur. Exoctaëdri itaque ſolidum, ad ſibi inſcriptæ trilateræ æquilateræ pyramidis ſolidum, rationem habet octuplam ſuperſeptupartientem decimasſextas.

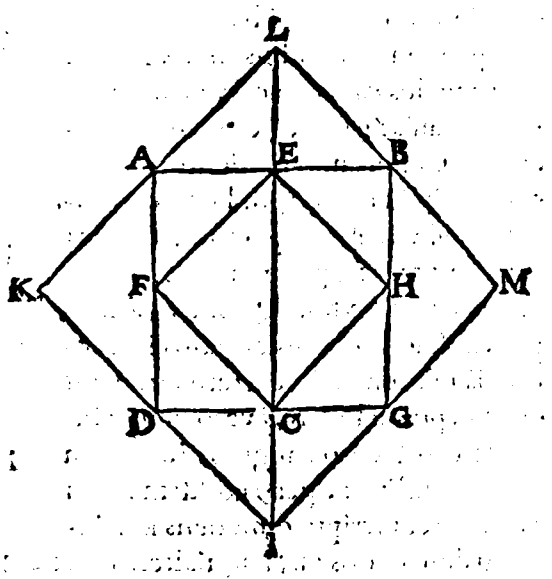
PROPOSITIO XXX.

Exoctaëdrum ad ſibi inſcriptum octaëdrum, rationem habet quintuplam.



Quoniam exoctaëdrum ſuſcipit octaedrum, in ſuorum quadratorum centris, ex 10 decimiſeptimi, ſit exoctaëdron A B G D, ſibi verò inſcriptum octaëdron ſit E F C H, circunſcriptum verò exoctaëdro octaëdron, ſit L M I K, cuius dimetiens L I, octaëdri verò inſcripti dimetiẽs E C: Quoniam circunſcripti latera L K, K I, bifariam ſecta ſunt in A, & D, ſimiliter oppoſita in B, & G, dupla erit L I, dimetiens, dimetientis E C, ſecantis A D, æqualis (ex 2 ſexti),

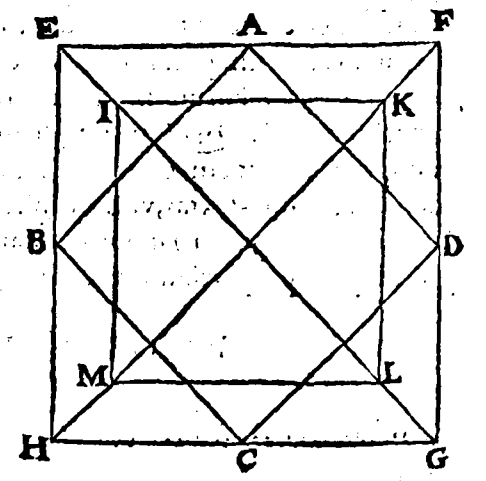
Quare octaëdrum L M I K, ad inſcriptum E F C H, rationẽ habebit octuplam, per 33 vndecimi. Qualium itaque octaëdrum L M I K, erit 8, inſcriptũ E F C H, erit vnius: Sed qualium octaëdrum L K I M, ſuit 8, earum exoctaëdrum A B G D ſibi inſcriptum ſuit 5 (ex 25 huius), nempe ſupertripartiens quintas: Qualium igitur exoctaëdrum A B G D, erit 5, earum ſibi inſcriptum octaëdron erit vnius. Exoctaëdron itaque ad ſibi inſcriptum octaëdrum, rationem habet quintuplam.



PROPOSITIO XXXI.

Exoctaëdri ſolidum ad ſibi inſcripti cubi ſolidum rationem habet duplam ſupertredecupartientem decimas ſextas.

Exponatur exoctaëdrũ E A F G C H, cui inſcriptus cubus ſit I K L M: Quoniam cubus exoctaëdrum circunſcribens, æqualia habet latera dimetientibus E F, E H, quadratorum exoctaëdri, vt oſtendimus 1 & 6 decimiſeptimi, dimetiens cubi E F G H, ſeſquialtera erit dimetientis cubi I K L M, per 3 corollarium 15 decimiſeptimi: Et proinde circunſcripti cubi ſolidum, ad inſcripti cubi ſolidum, triplam habens rationem (ex 33 vndecimi) dimetientium, vel laterum, eam habebunt triplam tripartientem octauas, quam 54 ad 16, quæ eſt ſeſquialteræ dimetientium tripla: Sed cubi E F G H, exoctaëdro E A F G C H, circunſcripti, ratio fuit ſeſquiquinta (ex 24 huius): Qualium igitur cubus E F G H, fuit 54, earum exoctaëdron E A F G C H, erit 45: Sed qualiũ cubus circunſcriptus E F G H, fuit 54, earum cubus I K L M, inſcriptus exoctaëdro E A F G C H, fuit 16. Qualium itaque exoctaëdron erit 45, earum ſibi inſcriptus I K L M, cubus, erit 16, quæ habent rationem duplam ſupertredecupartientem decimaſſextas. Exoctaëdri igitur ſolidum, ad ſibi inſcripti cubi ſolidum, rationem habet duplam ſupertredecupartientem decimas ſextas.

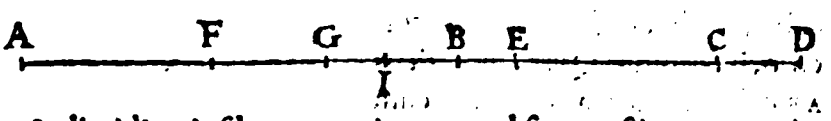


PROPOSITIO XXXII.

Si propoſita recta aſſumat ſui maius, & dimidiæ minus ſegmenta, Totius autem ſuſcipiatur minus maioris ſegmenti, exoctaëdrum ad ſibi inſcriptum dodecaëdrum habebit ra-

tionem

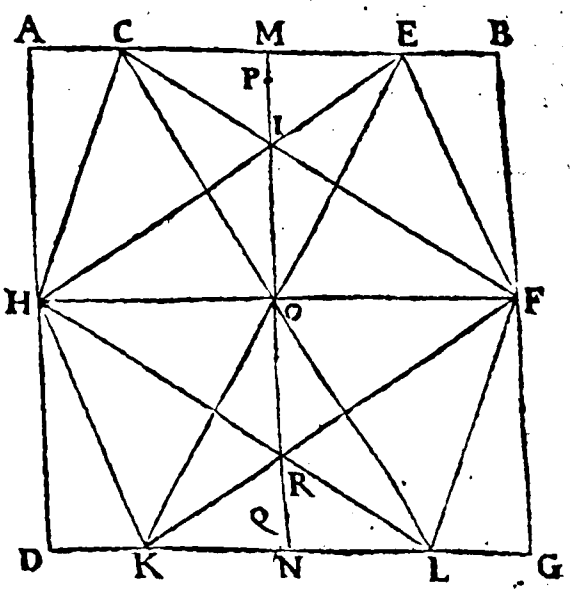
tionem, quam propoſitæ quinque ſextæ, ad idem minus ſegmentum.



Proponatur recta A B, quæ aſſumat ſuiipſius maius ſegmentum B C, & dimidiæ eiuſdem A B, minus, quod ſit C D. Sit autem totius A D, maius A E, cuius quidem maioris extrema & media ratione ſecti, minus ſit A F, maius verò A G: Sint itē propoſitæ A B, quinque ſextæ partes A I. Dico exoctaëdrum ad ſibi inſcriptum dodecaëdrum, rationem habere, quam habent propoſitæ A B, quinque ſextæ A I, ad idem minus ſegmētum A F, maioris A E, totius A D. Quoniam oſtendimus 38 decimiſexti, dodecaëdrum ad inſcriptum cubum eſſe vt A D, ad A B, & cubum ad inſcriptum ſibi dodecaëdrum, rationem habere quam ſuper huius hypotheſi habet A B, propoſita ad A F, minus ſegmētum. Idem autem dodecaëdrum inſcribitur cubo, & exoctaëdro ab eo deſcripto (per 2 cor. 13 decimiſeptimi): Cubus verò ad ſibi inſcriptum exoctaëdron, ſeſquiquintus fuit (24 huius): Qualium igitur ſuper eadem baſi cubus fuit æqualis ſolido, quod ſub vertice A B, dodecaëdrum ſibi inſcriptum æquale erit ſolido, quod ſub vertice A F: Nam ſuper eadem baſi ſolida, ad ſe ſunt vt vertices (per corol. 31 vndecimi): Et quia idem cubus ſibi inſcripti exoctaëdri ſeſquiquintus fuit, ex 24 huius, ſuper qua baſi ſolidum cubo æquale, erit verticis A B, ſolidum, exoctaëdro æquale, ſuper eadem baſi erit verticis A I. Nam A B, ſeſquiquinta poſita eſt ipſi A I, ex conſtructione. Super qua itaque baſi, dodecaëdron erit verticis A F, ſuper eadem exoctaëdrum erit æquale ſolido ſub vertice A I. Quare per idem corol. 31 vndecimi erit exoctaedrum ad ſibi inſcriptum dodecaëdrum vt A I, quinque ſextæ propoſitæ A B, ad A F, minus ſegmentum maioris A E, totius A D. Si igitur propoſita recta A B, aſſumat ſui maius B C, & dimidiæ minus C D, ſegmenta: Totius autem A D, ſuſcipiatur minus A F, maioris ſegmenti A E, exoctaëdrum (ſub vertice A I,) ad ſibi inſcriptum dodecaëdrum (ſub vertice A F,) habebit rationem, quam propoſitæ A B, quinque ſextæ A I, ad idem A F, minus ſegmentum. Si igitur propoſita aſſumat, &c.

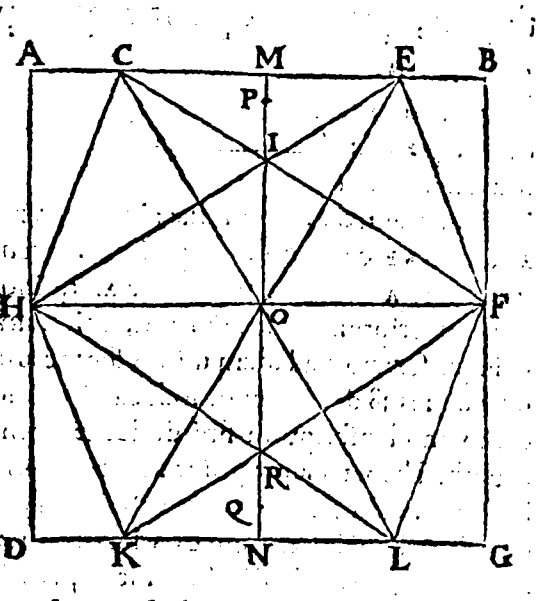
PROPOSITIO XXXIII.

Exoctaëdrum ad icoſaëdrum ſibi inſcriptum, ſe habet ſicut ſolidum parallelepipedū ſuper quadrato lateris icoſaëdri, cum maiori eius ſegmento, vertice autem quintupartiente ſextas totius comprehenſum, ad ſolidum parallelepipedum ſuper eo quod ſub icoſaëdri eodem latere, & tripla ſibi potentia, vertice autem quintupartiente ſextas iungentis oppoſitarū eiuſdem baſium centra.



Sit exoctaëdron A B G D, ſibi verò inſcriptū icoſaëdrū eſto C E I R K L. Quoniam icoſaëdri ſex oppoſita latera, ſex quadratorum exoctaëdri dimetientes poſſident, erunt A B, G D, binæ dimetiētes bina oppoſita

icoſaëdri latera C E, K L, continentes (ex 12 decimiſeptimi): ex eiuſdem autem corollario, idem icoſaëdron cubo, & ab eo deſcripto exoctaëdro, inſcribitur: Quare dimetiens A B, cubi lateri æqualis exiſtēs (cùm iungat dimidia cubi latera) efficiet maius ſegmentum C E, icoſaëdri latus per 3 cor. 14 decimiquinti, & lateris C E, maius vtramque A C, & E B, ſimul, per 5 decimitertij: Quia verò exoctaëdri ſolidū, eſt æquale ſolido parallelepipedo ſuper cubi A B G D, baſi, vertice autem quinque ſextis lateris eiuſdem A B, vel A D, conſtituto (per 24 huius) nam deficit à cubo ſexta parte, æquale erit



exoctaëdron A B G D, ſolido parallelepipedo, quod idem eſt ſuper quadrato lateris C E, cum maiori eius ſegmento, binis quidē A C, E B, ſcilicet tota A B, vertice autem quintupartiente ſextas totius A B, comprehenſo: Nam deficit à cubo ſexta parte: Icoſaëdri autem C E I R K L, oppoſitæ baſes ſunt C I E, K R L, quarum centra iungat recta P Q, dupla quidem eius, quæ à centro O, in baſim perpendicularis O Q: Quia oſtendimus 28 huius, icoſaëdri ſolidum, æquari ſolido parallelepipedo ſuper eo, quod ſub C E, latere & dupla perpendicularis baſis, vertice autē quinque ſextis rectæ P Q, vel ſuperbipartiēte tertias dimidiæ O Q, vel O P, quæ eſt à centro O, in baſim C I E, perpendicularis, quæ idem proferūt: cùm autē demiſſa in latus triplū poſſit dimidiæ C M, lateris, dupla demiſſæ, idem triplum poterit totius C E, in triangulo duplorum laterū ipſi C E, per 12 decimitertij: quare dicemus icoſaëdron C E I R K L, æquum eſſe ſolido parallelepipedo ſuper eo, quod ſub eiuſdem icoſaëdri latere C E, & dupla perpendicularis quæ triplum poteſt totius C E, vertice autem, quintupartiente ſextas rectæ P Q, iungentis oppoſitarum baſium C I E & K R L, centra R, & Q, quod idem eſt, ſuperbipartienti tertias dimidiæ P O, vel O Q: Ratio igitur exoctaëdri A B G D, ad icoſaëdrum C E I R K L, ſibi inſcriptum, ea erit, quæ inter ſolida eis æqualia: nempe vt quod ſuper quadrato lateris C E, cum maiori eius ſegmento, ſcilicet tota A B, vertice autem quintupartiente ſextas totius eiuſdem A B, exoctaëdro A B G D, æquum comprehenſum: Ad quod continetur ſuper rectangulo ſub C E latere, & dupla perpendicularis trianguli ex C E, quæ triplum poteſt ipſius C E, vertice verò quintupartiēte ſextas rectæ P Q, iungentis centra P, & Q, oppoſitarum eiuſdem icoſaëdri baſium C I E, K R L, eidem icoſaëdro æquum.

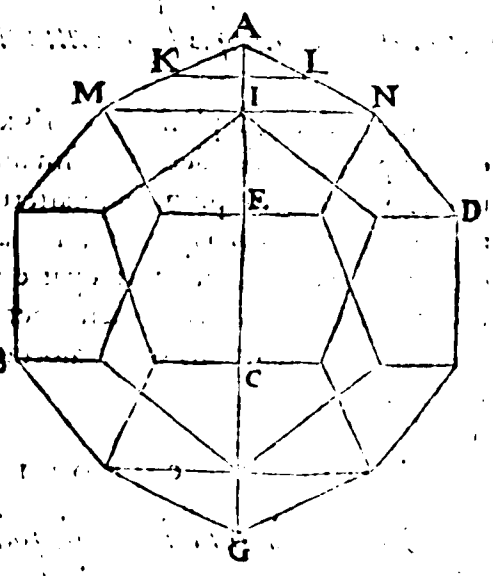
Exoctaëdron itaque ad icoſaëdrum ſibi inſcriptum, ſe habet ſicut ſolidum parallelepipedum ſuper, &c.

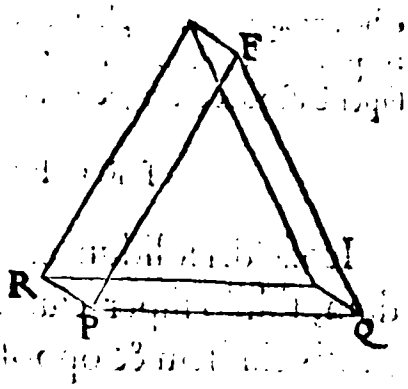
PROPOSITIO XXXIIII.

Dodecaëdron excedit ſibi inſcriptum icoſidodecaëdron, ſolido priſmate, cuius baſis eſt æquilaterum triangulum, ſuper binis eorum lateribus deſcriptum, vertex autem minoris ſegmenti dimetientis dodecaëdri duo nona.

Sit propoſitum dodecaëdron A B G D, cuius dimetiens ſit A E C G: ſibi verò inſcripti icoſidodecaëdri latus ſit K L: Deſcribatur ſuper binis lateribus dodecaëdri A N,

ëdri A N, icoſidodecaëdri verò K L, compoſitis in rectam P Q, triangulum per I primi P Q F, ſuper eo conſtituatur priſma, ſumptis pro vertice duabus rectæ A I, tertiis P R: Dico dodecaëdron A B G D, excedere ſibi inſcriptũ icoſidodecaëdron, priſmate P Q F R, cuius vertex eſt duarum minoris ſegmenti dimetientis A G, nonarum. Quoniam oſtendimus, 16 huius, dodecaëdri dimetientem, ſecari quatuor planis ad rectos, ad vtraſque centri partes, extrema & media ratione, & eiuſdem cor. 2 oſtendimus eandem dimetientem, binis mediis planis trifariam ſecari: Erit A G, trifariam ſecta in E, & C, ſicut B C, tota ad maius E I: ſic erit maius E I, ad minus I A, eritque I A, minus ſegmẽtum tertiæ partis A E, dimetientis A G. Quia rurſum latus icoſidodecaëdri dodecaëdro inſcripti, ſecat latera bifariam, & tollit angulos dodecaëdri ſolidos, mediis eius lateribus cõprehenſos, per 18 decimiſeptimi, tollet latus icoſidodecaëdri K L, cum pyramide K L A, dimidium minoris ſegmenti A I, per 17 vndecimi: Quare pyramis erit K L A, ſuper triangulo æquilatero A B icoſidodecaëdri latere K L, deſcripto, vertice autem dimidia minoris ſegmẽti A I: Quia verò A N, latus, eſt maius ſegmentum ſubtendentis M N, per 2 cor. 13 decimiquinti, & K L, dimidia ipſius M N, per 2 ſexti: Maius ſegmentum A N, aſſumens totius M N, dimidia K L, ſcilicet P Q; hæ conſtructis quintuplum poterit eius, quod à dimidia K L per 1 decimitertij: & ideo triangulum P Q F, quintuplũ poteſt trianguli ex K L deſcripti; per 22 ſexti: pyramis igitur ſub eodem vertice, & ſuper triangulo P Q F, quintupla erit pyramidis K L A (per 5 duodecimi). Quia verò 20 ſunt dodecaëdri anguli, 20 tolluntur pyramides ipſi K L A, æquales: Quæ quidem quatuor efficiunt ipſi, ſuper P Q F, & eodem vertice æquales, quarum tres, priſma ſuper eadem baſi P Q F, & vertice, componunt, per 1 cor. 7 duodecimi. Quatuor itaque idem priſma, & tertium eiuſdem component: ſunt enim 4 trium ſeſquitertia: Priſma igitur ſuper baſi P Q F, vertice autem ſeſquitertia dimidiæ minoris A I, 20 pyramides ipſi K L A, æquales cõtinebit: nã ad ſe ſunt vt vertices, per cor. 31 & 40 vndecimi. Atqui P Q F R, priſma poſitum fuit ſuper triangulo à maiore A N, & dimidia totius M N, hoc eſt latere K L, deſcripto, vertice autem duabus tertiis minoris ſegmenti A I, ſcilicet rectæ P R, eiſdem æquali poſita, quæ quidem duo tertia minoris A I, tertiæ partis, dimetientis, duabus nonis minoris ſegmenti totius æquipollent. Priſma itaque P Q F R, ſuper baſi P Q F, ex binis A N, K L, factum, vertice verò P R, duo dimetientis A G, minoris ſegmenti nona capiente, erit exceſſus, quo dodecaëdrum A B G D, excedit icoſidodecaëdrum ſibi deſcriptum, cuius latus fuit K L. Dodecaëdrum igitur excedit ſibi inſcriptum icoſidodecaëdrum, ſolido priſmate cuius baſes, &c.





COROLLARIVM.

Propoſitus exceſſus æqualis eſt priſmati ſuper triangulo lateris

cubi

cubi dodecaëdro inſcripti, vertice verò quintupartiẽte decimas octauas eiuſdem minoris ſegmenti totius A G.

Nam M N, latus, duplum eſt lateris K L: Quare pyramis M N A, pyramidis K L A, eſt octupla (per 8 duodecimi) cùm ſint ſimiles pyramides, & ideo 20 pyramides ipſi K L A, æquales, duplum ſeſquialterum ipſius M N A efficiũt, ſcilicet ſuper eodem triangulo, vertice verò ipſius A I, dupla ſeſquialtera, quæ reducitur in priſma ſuper eadem baſi, vertice verò tertia parte duplæ ſeſquialteræ, quæ eſt quintupartiens ſextas ipſius A I, minoris ſegmenti, per 1 cor. 7 duodecimi, & 1 cor. 25 vndecimi. Et proinde quintupartiens decimaſoctauas minoris ſegmenti totius A G, ipſius A I, triplicis.

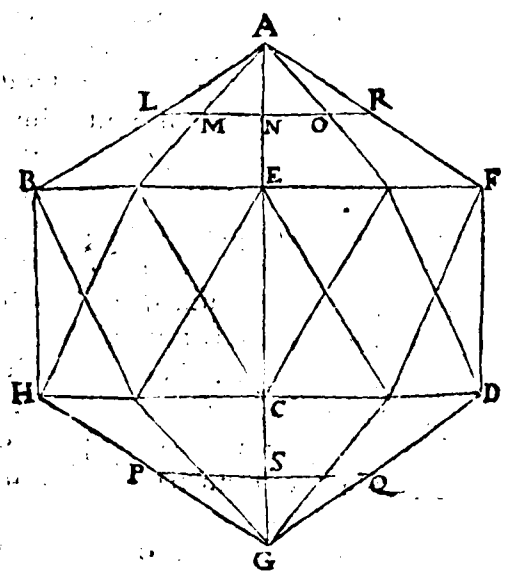
COROLLARIVM II.

Dodecaëdrum eſt æquale ſolido ſuper ſua baſi, vertice verò dupla iungentis oppoſito ſui baſes.

Nam iungens dupla eſt eius, quæ à centro in baſim, per 3 cor. 17 decimitertij. Pyramis itaque ſuper ea baſi, & vertice ea quæ à centro duodecima dodecaëdri pars eſt, cùm ſint 12 baſes: Atqui tres pyramides lateratum ſuper eadem baſi & conſtituunt ex 1 cor. 7 duodecimi. Et ideo ſex pyramides idem lateratum duplum efficient, ac 12 quadruplum, ex corol. 31 vndecimi. Quod quidem duplam iungentis pro vertice ſumit, cùm ſit quadrupla eius quæ ex centro: Quare eidem ſolido ſuper baſi dodecaëdri, & vertice dupla iungentis baſes, æquale erit dodecaëdrum.

PROPOSITIO XXXV.

Icoſaëdri ſolidum excedit ſibi inſcripti icoſidodecaëdri ſolidum, ſolido ſuper eiuſdem pentagona baſi, vertice verò iungentis eiuſdem & oppoſitæ baſis cẽtra, dupla minoris ſegmenti conſtituto.



Eſto icoſaëdri ſolidum A B G D, cuius ſit dimetiens A G: Secet eius angulum ſolidum qui ad A, icoſidodecaëdri ſibi inſcripti pentagonum L M N O R, ſectis bifariam lateribus A B, A E, A F, &c. per 17 decimiſeptimi. Tollat ſimiliter angulum ſolidum qui ex oppoſito ad G, pentagonum planum P S Q: Sit N S, iungens centra pentagonorum quæ per L R, & P Q: Dico icoſaëdron A B G D, excedere icoſidodecaëdron ſibi inſcriptum, ſolido ſuper L M N O R, pentagono, vertice verò dupla minoris ſegmenti iungentis N S. Oſtendimus 16 decimitertij, dimetientem icoſaëdri A G, ſecari binis pentagonorum B F, & H D, icoſaëdri planis, in totam E C, & bina maiora ſegmenta A E, & C O, vel maius E C, habere bina maiora A C, & C G, quæ

idem

ſdem conferunt. Oſtendimus inſuper 17 decimiſeptimi, icoſidodecaëdron icoſaëdro inſcribentes tolli 12 icoſaëdri ſolidos angulos, ſiue pyramides, inſcriptum icoſidodecaëdrum ſuperantes. Quia igitur pyramis A L M N O R, ſecat pyramidis A B E F, bifariam latera, ſecabit ſimiliter bifariam verticem A E, per N, ex 17 vndecimi. Quia verò duodecim ſunt pyramides ipſi A L N R æquales, & ſimiles, quot ſunt ſolidi icoſaëdri anguli ternæ quæque, lateratum ſuper eadem pentagona baſi, & vertice A N, component ex 1 cor. 7 duodecimi: Quare cùm ſint duodecim, quatuor conſurgent laterata, quæ ſuper eadem baſi ſimul ſumpta, quadruplum habebunt verticem rectæ A N, per corol. 31 & 40 vndecimi. Atqui quadrupla rectæ A N, dupla erit ipſius A E, quæ fuit minus ſegmentum totius A C, vel maius totius E C. Quæ quidem A C, eſt æqualis iungenti N S: Nam auferuntur à tota A C, binæ A N, S G, toti C G æquales, vnde reliquæ A C, & N S, æquales ſuperſunt: Erit itaque harum 12 pyramidum ipſi A L N R, æqualium, exceſſus quidem icoſaëdri ſolidũ ſuper pentagono L M N O R, & vertice dupla ipſius A E, minoris quidem ſegmenti iungentis N S, conſtitutum, quo icoſaëdrum A B G D, ſibi inſcriptum icoſidodecaëdron cuius baſis pentagona fuit L M N O R exceſſit. Icoſaëdri itaque ſolidum excedit ſibi inſcripti icoſidodecaëdri ſolidum ſolido ſuper eiuſdem icoſidodecaëdri pentagona baſi L M N O R, vertice verò iungentis eiuſdem L M N R O, & oppoſitæ P S Q, baſis centra N S, dupla minoris ſegmenti ſimul ſumptarum N E, & C S, conſtituto.

COROLLARIVM I.

Inde conſequimur hunc exceſſum contineri ſuper pentagono lateris icoſaëdri, vertice autem dimidio maioris ſegmenti, eius quæ à centro pentagoni.

Nam 12 pyramides ipſi L M N O R A, æquales, ſeſquialterum efficiunt pyramidis A B E F, quæ ſuper duplo latere ſimilis deſcripta eſt, quæ quidem prioris eſt octupla, ſcilicet in tripla ratione duplorum laterum, (per 1 corol. 8 duodecimi): octonarij autem ſeſquialterum eſt duodenarium: quare ſeſquialtera eſt A B E F, pyramidis E A, quæ 12 ipſi A L M N O R, pyramidi æqualibus æquipollet: & ideo ſuper vertice ſeſquialtera ipſi A E, conſiſtet (per corol. 31 vndecimi), cùm ſint in ſolidorum ratione cui pyramidi æquale erit ſolidum ſuper eadem pentagona baſi E B F, vertice verò tertia parte verticis pyramidis, recta ſcilicet N E, per 2 corol. 7 duodecimi: nam triplum eſt ſuæ pyramidis ſolidum illud: quæ quidem N E, eſt dimidia maioris ſegmenti A E, ipſius E C, quæ eſt æqualis ei, quæ ex centro pentagoni B E F, per 16 decimitertij, oſtenſa.

COROLLARIVM II.

Iungens oppoſita icoſidodecaëdri pentagona, eſt ad dimetientem icoſaëdri circunſcripti, vt tota ad totam & minus ſegmentum.

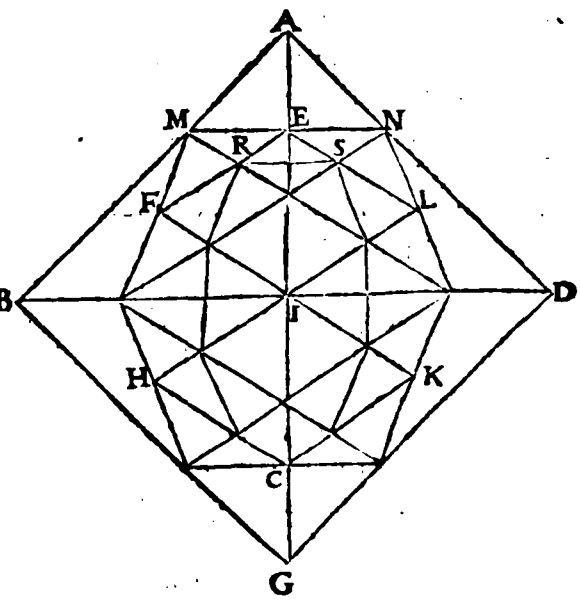
Nam S N, iungens oppoſitas L N R, & P S Q, baſes, deficit à dimetiente A G, binis A N, G S, quæ ſunt minoris ſegmenti iungentis N S, dimidiæ: Nam E C, ad binas C S, & E N, ipſis A N, G S, æquales, fuit vt maius ad minus: Quare tota S N, efficiet minus ſegmentum binas A N, G S, ipſis C S, E N, æquales.

PROPOSITIO XXXVI.

Octaëdri ſolidum excedit ſibi inſcripti icoſidodecaëdri ſolidum ſolidis, quę ſuper quadrato duplæ lateris icoſidodecaëdri,

vertice

vertice verò ea, quæ ex eiuſdem centro, & ſuper pentagono ſui eiuſdem lateris, vertice autem binis minoribus ſegmentis, iungentis oppoſitorum pentagonorum centra, conſtituuntur.



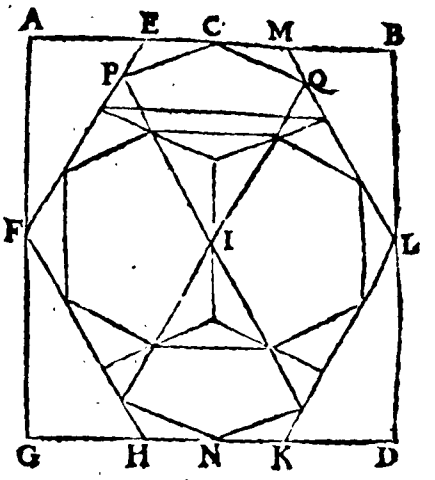
Eſto propoſitũ octaëdron ABGD, ſibi verò inſcriptum icoſidodecaëdron BFHCKL, cuius latus ſit RS: Quia octaëdro & ſibi inſcripto icoſaëdro, idem icoſidodecaëdron inſcribitur, per corol. 15 decimiſeptimi, ſit icoſaëdri octaëdro inſcripti, & icoſidodecaëdro circunſcripti, latus BMN: oſtẽdimus 36 decimiſexti, octaëdrum excedere ſibi inſcriptum icoſaëdrum, ſolido ſuper quadrato lateris icoſaëdri, vertice verò maiori ſemidimetientis octaëdri ſegmento: Cùm autem icoſidodecaëdron icoſaëdro inſcribatur, ſectis bifariam lateribus, per 17 decimiſeptimi, duplum erit icoſaëdri latus, lateris icoſidodecaëdri (per 2 ſexti) quare quadratum lateris icoſaëdri, idẽ erit quadrato duplæ lateris icoſidodecaëdri. Quia rurſus oſtendimus 16 decimiquinti, ſemidimetientis AI maius eſſe ſegmentum EI, quæ quidem eſt ex centro icoſidodecaëdri, ad angulum E, extenſa: Erit igitur EI, vertex ſolidi, quo octaëdron excedit icoſaëdron, ſuper quadrato ſui lateris MN, hoc eſt duplæ lateris RS, icoſidodecaëdri. Oſtendimus inſuper 35 huius icoſaëdron cuius latus MN, excedere ſibi inſcriptum icoſidodecaëdron, ſolido ſuper pentagono RSI, ſui eiuſdem lateris RS, hoc eſt ſuo pentagono, vertice autẽ dupla minoris ſegmenti iungentis eiuſdem & oppoſitæ baſium centra: Sequetur itaque octaëdron binis illis ſolidis excedere icoſidodecaëdron icoſaëdro ſibi inſcripto inſcriptum, ſcilicet, eo quod ſuper quadrato rectæ MN, duplæ ſui lateris RS, vertice verò recta ei, quæ ex eiuſdem icoſidodecaëdri centro, & eo quod ſuper eiuſdem icoſidodecaëdri pentagono RSI, ſiue ſui lateris RS, vertice verò binis minoribus ſegmentis eius; quæ iungit centra pentagoni RSI, & ſibi oppoſiti: quæ quidem iungens, deficit ab icoſaëdri dimetiente, in totam & minus ſecta, eodem minori ſegmento, vt proxima oſtenſum eſt. Octaëdri igitur ſolidum excedit ſibi inſcripti icoſidodecaëdri ſolidum, ſolidis quæ ſuper quadrato duplæ lateris icoſidodecaëdri, vertice verò ea, quæ ex eiuſdem centro, & ſuper pentagono ſui eiuſdem lateris, vertice autem dupla minoris ſegmenti, iungentis oppoſitorum pentagonorum centra, conſtituitur.

PROPOSITIO XXXVII.

Si cubi dodecaëdro inſcripti latus, aſſumat maius, & dimidiæ minus ſegmenta. Totius autem ſuſcipiatur minus maioris ſegmentum, cubus dodecaëdro circunſcriptus excedet ſibi inſcriptum icoſidodecaëdrum, ſolido quod ſuper baſi cubi inſcripti, vertice verò ea, qua latus eiuſdem cubi excedit idem minus maioris ſegmentum, & inſuper priſmate ſuper triangulo

lateris

lateris eiuſdem cubi, vertice autem quintupartiente decimas octauas minoris ſegmenti dimetientis dodecaëdri, conſtituto.



Eſto propoſitus cubus A B G D, cui inſcriptum ſit dodecaëdron E F H K L M, per 13 decimiquinti: Eidem autem dodecaëdro inſcriptum ſit icoſidodecaëdron C F N L I, per 18 decimiſeptimi: latus autem cubi dodecaëdro inſcripti P Q, per 8 decimiſeptimi. Quoniam eidem cubo dodecaëdron & dodecaëdro inſcriptum icoſidodecaëdron inſcribitur (ex corol. 16 decimiſeptimi) icoſidodecaëdron C F N L I, cubo A B G D, inſcriptum erit. Oſtendimus autem 38 decimiſexti, cubum excedere dodecaëdron ſibi inſcriptum, ſolido parallelepipedo ſuper baſi cubi ſibi inſcripti, & vertice ea, qua latus cubi excedit minus ſegmentum maioris totius rectæ, compoſitæ ex latere cubi maiori, & dimidio minoris ſui ſegmentis. Quare cubus A B G D, eodem exceſſu dodecaëdrũ E F H K L M, excedet: nempe ſibi inſcriptum. Sed dodecaëdrum E F H K L M, excedit icoſidodecaëdrum C F N L I, ſibi inſcriptum, priſmate, cuius baſis eſt triangulum iſopleuron, ſuper binis dodecaëdri, & icoſidodecaëdri ſibi inſcripti lateribus deſcriptum, vertice verò duabus nonis minoris ſegmenti dimetientis dodecaëdri, per 34 huius. Quod priſma æquale oſtenſum eſt priſmati, quod ſuper triangulo lateris P Q, cubi dodecaëdro inſcripti, vertice autem quincupartiente decimas octauas minoris ſegmenti dimetientis dodecaëdri, (per cor. 34 huius). Cubus igitur A B G D, excedens dodecaëdrum E F H K L M, quod quidem excedit icoſidodecaëdrum C F N L I, illis inſcriptum, excedet idem icoſidodecaëdrum, binis illis exceſſibus, ſcilicet, ſolido ſuper baſi cubi inſcripti, & vertice ea, qua latus eiuſdem cubi excedit prædictum minus, maioris ſegmentum quo exceſſu cubus A B G D, dodecaëdrum ſuperat, & reliquo, ſcilicet priſmate cuius baſis eſt triangulum ſuper latere P Q, cubi, vertice autem quincupartiente decimas octauas minoris ſegmenti dimetientis dodecaëdri (vel dimetientis inſcripti cubi, quæ eadem ſunt) quo exceſſu dodecaëdrum ſibi inſcriptum icoſidodecaëdron ſuperauit, ex corol. 34 huius. Si igitur cubi dodecaëdro inſcripti latus, aſſumat maius, & dimidiæ minus ſegmenta, totius autem ſuſcipiatur minus maioris ſegmentum, cubus dodecaëdro inſcriptus excedet ſibi inſcriptum icoſidodecaëdron, ſolido, quod ſuper baſi cubi inſcripti, vertice verò, &c.

PROPOSITIO XXXVIII.

Pyramis trilatera æquilatera icoſidodecaëdri ſibi inſcripti ſuperat duplum, ſolido parallelepipedo, ſuper quadrato dupli ſui lateris, vertice autem dimetiente comprehenſo, & ſolido ſuper pentagono eiuſdem dupli lateris, vertice verò maiori ſegmento eius, quæ à pentagoni centro, conſtituto.

Quoniam icoſidodecaëdri triangula baſibus icoſaëdri circunſcripti inſident (ex 17 decimiſeptimi): icoſaëdri verò baſes pyramidis circunſcriptæ baſes poſſident (ex 19 decimiquinti) ſequetur icoſaëdrõ & ſibi inſcriptum icoſidodecaëdron,

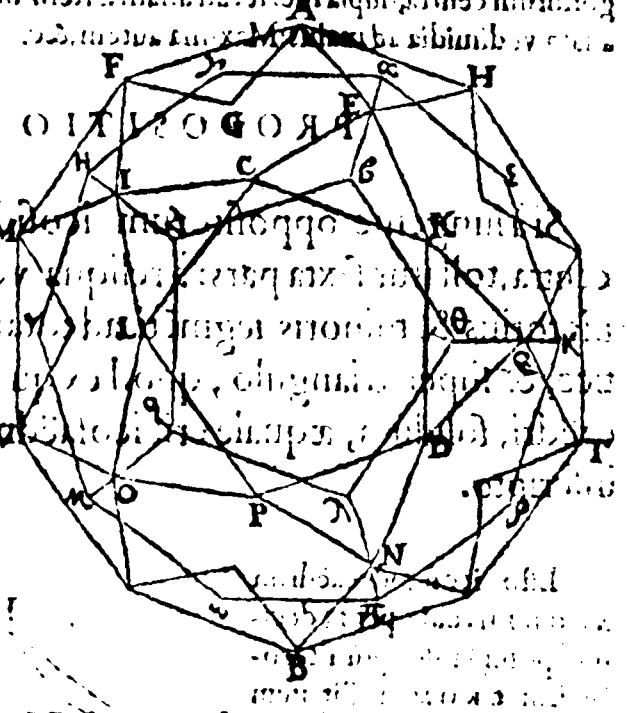
eadem concipi pyramide. Oſtendimus autẽ corollario 36 decimiſexti pyramidem bina icoſaëdra excedere ſolido, ſuper icoſaëdri lateris quadrato, vertice autem ea, cuius id latus eſt maius ſegmentum. Oſtendimus etiam latus icoſaëdri, duplum eſſe lateris ſibi inſcripti icoſidodecaëdri 14 huius. Oſtendimus item icoſidodecaëdri dimetientem, quæ ſcilicet oppoſitos eius angulos copulat, oppoſita icoſaëdri latera nectere, cùm in mediis lateribus conſiſtant anguli (per 17 decimiſeptimi) eius autem quæ oppoſita icoſaëdri iungit latera, maius ſegmẽtum, eſt icoſaëdri latus, per 16 decimiſexti: Nam ea eſt dimetiens ſibi inſcripti octaëdri (per 16 decimiquinti). Solidum igitur illud quo pyramis duplum icoſidodecaëdri ſibi inſcripti primum ſuperat, continetur ſuper quadrato dupli lateris ſui, vertice autem eiuſdem icoſidodecaëdri dimetiente, quæ eadem eſt dimetienti inſcripti icoſaëdro octaëdri. Quia verò icoſaëdron excedit icoſidodecaëdron, ſolido ſuper pentagono lateris icoſaëdri, quod eſt lateris icoſidodecaëdri duplum, & vertice dimidia maioris ſegmenti eius, quæ à centro pentagoni conſtituto, per cor. 35 huius: pyramis autem bina excedẽs icoſaëdra, binos icoſaëdri in icoſidodecaëdrum exceſſus producit. Quare ſolidum quod ſuper pentagono duplicatum, ſcilicet ſub duplo vertice, producet ſolidum ſuper pentagono dupli lateris icoſidodecaëdri, hoc eſt lateris icoſaëdri, vertice verò duplo maioris ſegmenti dimidiæ, hoc eſt toto maiori ſegmento eius, quæ à pentagoni centro conſtituto, per idem corol. 31 vndecimi. Sequetur itaque pyramidem icoſidodecaëdri ſibi inſcripti ſuperare duplum, ſolido parallelepipedo ſuper quadrato dupli lateris icoſidodecaëdri, vertice autem dimetiente eiuſdem icoſidodecaëdri comprehenſo, & ſolido ſuper pentagono eiuſdem dupli lateris, vertice verò maiori ſegmento, eius, quæ à pentagoni centro conſtituto. Pyramis igitur trilatera æquilatera icoſidodecaëdri ſibi inſcripti ſuperat duplum, ſolido parallelepipedo ſuper quadrato lateris, &c.

PROPOSITIO XXXIX.

Si recta iungentis oppoſitorum icoſidodecaëdri pentagonorum centra, dupla fuerit, ad aliam autem ſit vt dimidia ad maius & idem ad aliam vt dimidia ad maius, Maxima autem ad aliam ſit tripla in ratione totius ad duo tertia, & maius ſegmentum, Quod ſub reliquæ vertice, & pentagona baſi ſolidum, æquale erit dodecaëdro, icoſidodecaëdro inſcripto.

Propoſitum ſit icoſidodecaëdrum A B C D, cui inſcriptum ſit per 19 decimiſeptimi dodecaëdrum α ϐ ν ζ λ κ: Sit rurſus recta C D, dupla iungentis oppoſitorum icoſidodecaëdri quinquangulorum centra: ſupponatur dodecaëdrum propoſito icoſidodecaëdro A B C D, circunſcriptum: Quoniam dodecaëdri, & ſibi inſcripti icoſidodecaëdri pentagona ſunt omocentrica, ex corol. 2 decimiſeptimi, iungens oppoſitarum dodecaëdri baſium centra, iungẽti centra baſium icoſidodecaëdri eiſdem omocentrica, eadem erit. Quare C D, dupla quidem iungentis oppoſitas icoſidodecaëdri baſes, iunget & dodecaëdri. Sit autem recta C D, ad aliam C E, vt dimidia recta cuiuſdam, ad maius eius ſegmentum, per corol. 10 ſexti. Rurſuſque per eandem, ſit C E, ad E F, vt dimidia ad maius ſegmentum: hoc eſt in prædictarum ratione: Erit conuertendo F C, ad E C, vt maius ad dimidiam, per cor. 4 quinti: Similiter E C, ad D C, cùm ſint eædem rationes: Prima igitur F C, ad tertiã D C, duplicem rationem habebit, quam ad ſecũdam E C, hoc eſt duplam rationis maioris ſegmenti ad dimidiam, per 10 diffinit. quinti. Secetur iteratò tota C F, ablato minore ſegmento tertiæ partis, quod ſit C G, in G, & reliqua G F, ſimiliter in H: reliqua item H F, in

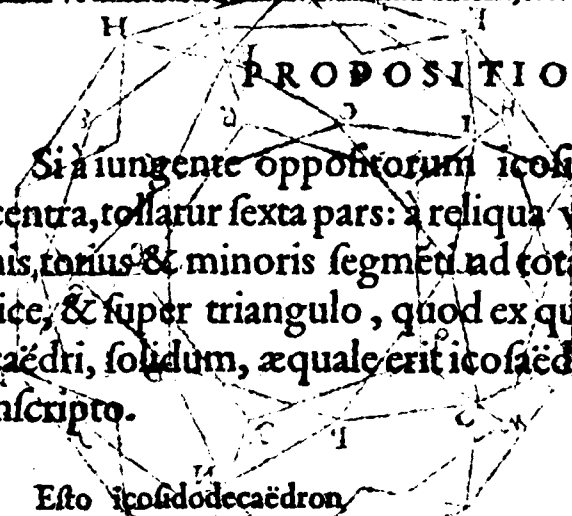
H F, ad X, per 10 sexti. Erunt C F, ad C F, vt C F, ad M, & vt M, ad XR, coniunctim proportionales, cuius sint similiter sectæ primæ: igitur C F, ad quartam C R, triplicem rationem habebit quam ad secundam C F, per eandem diffinitionem decimi quinti: hoc est cubi lobi quam habet recta C R, ad duo eius tertia & maius segmentum ipsius C F, constat, vt dictum est. Cùm ostenderimus 2 corol. 34 huius, dodecaëdrum esse æquale solido quod super sua basi, vertice autem iungentis oppositas eius bases, dupla, constituto, iungentes eidem dodecaëdri & sibi inscripti icosidodecaëdri esse æquales, ex corol. 2 decimiseptimi, cùm sint pentagonæ omocentricæ, æquale erit dodecaëdrum icosidodecaëdro circunscriptum, solido quod super sua basi, vertice verò C D, dupla iungentis opposita pentagona vtrorúque. Cùm autem solida quæ super basi dodecaëdri, & super pentagono icosidodecaëdri, sub eisdem C D, verticibus, ad se sint vt bases pentagonæ, per 32 & corol. 40 vndecimi: Bases autem duplam habent rationem quam latera, per 20 sexti, latera autem ostendimus sic esse vt maius segmentum ad dimidiam eiusdem rectæ, corol. 15 huius: Erunt igitur bases in dupla ratione maioris segmenti ad dimidiam, per eandem 20 sexti. Atqui ratio rectæ F C, ad C D, dupla fuit eiusdem F C ad Z C, rationis scilicet maioris segmenti ad dimidiam, vt ostensum est. Erit itaque sicut dodecaëdri basis, ad icosidodecaëdri inscripti quinquangulum, sic F C, vertex, ad D C, verticem. Quia verò solidorum, quæ super basi dodecaëdri, vertice verò C D, & super quinquangulo icosidodecaëdri, vertice verò C F, reciprocè sunt bases (dodecaëdri quidem ad quinquangulum icosidodecaëdri) verticibus C F, ad C D, ea sunt æqualia, per 34 vndecimi, & corol. 40 eiusdem. Sequetur itaque solidum quod super icosidodecaëdri quinquangulo, vertice verò C F, æquum esse dodecaëdro supposito, icosidodecaëdro A B C D, circunscripto. Cùm autem ostenderimus 2 corol. 16 huius dodecaëdri dimetientem, excedere icosidodecaëdri sibi inscripti iungentem oppositorum triangulorum centra, siue dodecaëdri eidem icosidodecaëdro inscripti dimetientem minori segmẽto tertiæ partis, erit dimetiens dodecaëdri circunscripti ad dimetientem inscripti, sicut C F, ad C F: Nam ea fuit quæ totius C F, ad duo tertia, & tertij maius C F, ex constructis. At Dodecaëdrum circunscriptum, & inscriptum, triplicem habent rationem dimetientium per 2. cor. 8 duodecimi. Triplicem autem quam tota ad duo tertia & maius segmentũ, habuit C F, prima, ad X F, quartam, ex ostensis. Erit igitur dodecaëdrum circunscriptum, ad dodecaëdrum æ ſ λ icosidodecaëdro A B C D, inscriptum, sicut C F, ad X F: fuit autem quod super icosidodecaëdri quinquangulo, vertice verò C F, solidum, dodecaëdro circunscripto æquale, vt docuimus: Erit itaque dodecaëdrum inscriptum, æquale solido quod super pentagona icosidodecaëdri basi, vertice verò X F: Nam quæ super eadem basi solida, ad se sunt vt vertices, per cor. 31 vndecimi, & corol. 40 eiusdem. Colligemus itaque si recta C D, iungentis oppositorum icosidodecaëdri pentagonorum centra, dupla fuerit (vt ex hypothesi), ad aliam autem C Z, sit vt dimidia C D, ad maius segmentum C Z. Et idem segmentum C Z, ad aliam C F, sit vt dimidia C D, ad maius C Z. Maxima autem C F, ad



aliam vt habeant triplam rationem eam quam recta ad duo tertia, & tres vltimæ, quinque primæ quadruplam rationem quam recta ad duo tertia, reliquæ, &c. Quare & reliqua ad reliquam, &c. Quod erat demonstrandum, & ideo solidum, quod circa icosaedrum describitur, & icosaedro inscripto, si inter se opponantur, ut dodecaedri pentagonorum centra, dupla fuerit, ad aliam autem sit vt dimidia ad totam: Maxima autem, &c.

PROPOSITIO XXXX.

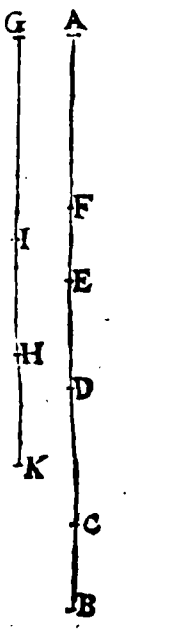
Si à iungente oppositorum icosidodecaëdri triangulorum centra, tollatur sexta pars: à reliqua verò auferatur triplum minoris, totius & minoris segmenti ad totam, quod sub reliquæ vertice, & super triangulo, quod ex quadrupla lateris icosidodecaëdri, solidum, æquale erit icosaëdro eidem icosidodecaëdro inscripto.



Esto icosidodecaëdron ABGDFH, cui (per 23 decimiseptimi) inscriptum sit icosaëdron CROMSI: Sit item rectus insuper oppositorum icosidodecaëdri triangulorum centrorum AK, secundum conditiones. Ea quidem æqualis est iungenti oppositas icosaëdri circumscripti basium habet triangula inscripta, & concentrica, ex totius & huius. Quare ipsum iungentis AK, sexta pars sit CK, per 9 secti: Sit insuper cohærens rectæ AK, recta KN, sectæ inæqualiter in O, media ratione in I, per 30 sexti: Maior autem IK, æqualis addatur IH, per 3 primi: Erit recta OK, sectæ in totam OH, & minus HK, in H, data: & KC similiter secetur in D, & totum similiter AD, in B, & AB in P, per eandem sequetur proportionales esse quadratas AC; ad AD, vt AD, ad AK, & AK ad AN, cum lineæ similiter sectæ, nempe in ratione totius OH, & minoris HK, (hoc est totius OK) ad totam OH. Erit ergo, prima AC, ad quartam AN, triplicem habebit rationem, quam eadem AC, ad secundam AK, hoc est quam CK, ad CH, quæ sunt totius & minoris segmenti ad totam. Recta itaque AC, habebit ad rectam AN, triplicem rationem totius & minoris ad totam. Dico prisma super triangulo quod ex quadrupla icosidodecaëdri lateris, vertice autem K, æquale esse icosaëdro proposito icosidodecaëdro inscripto. Quoniam icosaëdron icosidodecaëdro proposito circumscriptum, est æquale prismati quod sub vertice quinque sextarum rectæ AK, iungentis oppositas eorum triangulorum, (quæ sextæ rectæ AK, comprehensæ sunt) & super basi trianguli, quod ex duplo icosaëdri latere, hoc est quadrupla basis, per corol. 28 huius: Prisma igitur quod super quadrupla icosaëdri basis, quæ sit super

duplo

duplo eius latere, vertice autem A C, icosaëdro circunscripto, æquale, eam habet rationem ad aliud prisma, super eadem basi, vertice verò A F, quam vertices A C, ad A F, per corol. 31 vndecimi: hoc est triplicem rationis totius & minoris segmenti ad totam. Cùm autem icosaëdrō icosidodecaëdro inscriptum, angulos in centris pentagonarum icosidodecaëdri basium collocet, ex 23 decimiseptimi, centra autem oppositorum pentagonorum icosaëdri inscripti, dimetientem suscipiant, ex eadem: Iungens autem opposita pentagona, ad dimetientem icosaëdri circunscripti est, vt tota ad totam & minus, per 2 corol. 35 huius: Erit igitur dimetiens icosaëdri inscripti, ad dimetientem circunscripti, vt tota A D, ad totam A D & minus D C, hoc est, vt A D, ad A C, & conuertendo (per corol. 4 quinti) circunscripti dimetiens ad dimetientem inscripti sicut A C, ad A D: Quia verò similia solida triplam habent laterum rationem, icosaëdrum circunscriptum ad icosaëdron inscriptum, triplam habebit rationem, quam A C, ad A D: Triplam autem quam A C, ad A D, habuit A C ad A F: Erit itaque icosaëdrum circunscriptum ad icosaëdron inscriptum, vt A C ad A F. Sicut insuper A C ad A F, fuerunt prismata, super basi icosaëdri circunscripti quadrupla, verticibus verò A C, & A F, nam sunt vt vertices: Sicut igitur (super eadem basi) prisma verticis A C, ad quod sub vertice A F, sic icosaëdron circunscriptum ad inscriptum: & vicissim (per 16 quinti) sicut prisma sub vertice A C, ad icosaëdrum circunscriptum, ita prisma sub vertice A F, & æquis basibus, ad icosaëdrum inscriptum: Æquale autem fuit icosaëdron circunscriptum prismati, quod sub vertice A C, vt ostendimus: Æquale igitur erit prisma sub vertice A F, icosaëdro, proposito icosidodecaëdro inscripto. Quia verò icosaëdri latus duplum est sibi inscripti icosidodecaëdri lateris, ex 14 huius, triangulum super duplo icosaëdri latere constitutum idem erit ei, quod super quadrupla lateris icosidodecaëdri sibi inscripti constituetur, quod quidem fuit basis prismatum: prisma itaque super basi trigona, ex lateris icosidodecaëdri quadruplo constituta, vertice verò A F, relicto à iungente A B opposita icosidodecaëdri triangula, detractis sexta B C, & tripla rationis G K, ad G H, quæ fuit totius & minoris, ad totā (hoc est tota C F), est æquale icosaëdro E C R O M S, icosidodecaëdro A B G D F H, proposito inscripto. Si itaque à recta A B, iungente oppositorum icosidodecaëdri triangulorum centra, tollatur sexta pars B C, à reliqua verò A C, auferatur tripla rationis G K, ad G H, quæ fuit totius & minoris segmenti, ad totam, hoc est C F, quod sub reliquæ A F, vertice, & super triangulo, quod fit ex quadrupla lateris icosidodecaëdri, hoc est dupla lateris icosaëdri circunscripti, solidum, nempe prisma, æquale erit icosaëdro eidem icosidodecaëdro inscriptæ.



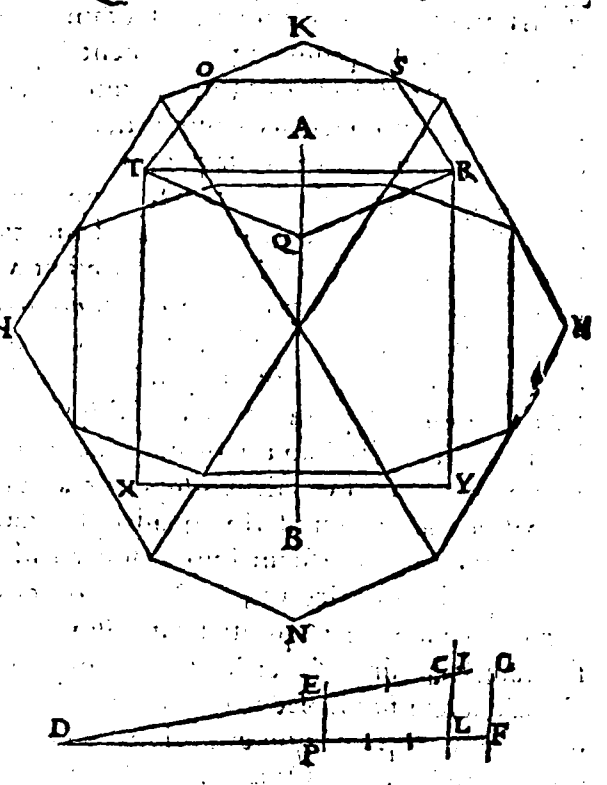
Si igitur à iungente, &c.

PROPOSITIO XXXXI.

Si iungens oppositorum icosidodecaëdri quinquangulorum centra aliquam tertio minoris segmenti superet, Eandem autem excedat alia quarto minoris segmenti, Quod sub excedentis vertice, & super pentagono eius, quæ proximorum icosidodecaëdri triangulorum centra iungit, solidum, æquale erit cubo eidem icosidodecaëdro inscripto.

Proponatur icosidodecaëdrō K H N M, cuius iungens oppositarum basium centra sit A B: Sit eidem inscriptum dodecaëdrum O T Q R S: Cubus eidem inscriptus

sit T R X Y: Rectæ A B, æqualis ponatur D G, secta in E, per 30 sexti. A minori E G, tertia pars secetur C G, & quarta G I, per 9 sexti: Rectæ D C, æqualis ponatur D L: ductæ I L, parallelæ fiant E P, & G F: Quoniam D F, secatur in L, & P, similiter ipsi D G, in I, & E per 10 sexti: Est autem E I, tripartiés quartas minoris segméti E G, totius D G, ex constructis: Erit igitur P L, simile segmentum tripartiens quartas minoris segmenti P F, totius D F: sicut autem E G, ad G D, sic P F ad F D, per 2 sexti: est autem rectæ G D, minus G E: minus igitur erit F P, rectæ F D, per 2 decimiquarti: Excedit autem G D, rectam D I, quarto minoris segmento: Excedet itaque F D, rectam D L, quarto minoris segmenti; quare eadem D F, eodem quarto excedet D C, rectæ D L, æqualem: Excedit igitur D G, iungens opposita pentagona, rectã D C, tertio minoris segméti G C per constructa.: Excedet igitur F D, eandem D C, quarto minoris segmenti, vt patuit. Dico solidum quod sub excedentis D F, vertice, & super pentagono O T Q R S, iungentis proximorum triangulorum centra T, Q, icosidodecaëdri, constitutum, æquale esse cubo T R Y X icosidodecaëdro K H N M, inscripto. Quoniam dodecaëdron & cubus sibi inscriptus eodem continentur icosidodecaëdro: Nam vtriusque anguli centra triangulorum eius possident, per 19 & 20 decimiseptimi: Erit cubus T R Y X, inscriptus dodecaëdro O T Q R S, & icosidodecaëdro K H N M, ei circunscripto. Quia insuper dodecaëdri icosidodecaëdro circunscripti dimetiens, excedit dimetientem dodecaëdri, eidem inscripti, siue iungentem opposita icosidodecaëdri triangula, tertio minoris segmenti per 2 cor. 16 huius: Sequetur iungentes oppositas circunscripti & inscripti bases, eodem tertio sese excedere, cùm sint similis rationis latera: Et hac de causa A B, iungens bases icosidodecaëdri, excedet eodem tertio minoris segmenti, iungentem bases dodecaëdri sibi inscripti: Nempe eadem recta dodecaëdri & icosidodecaëdri inscripti oppositas bases iungit: cùm sint omocentricæ, per cor. 2 decimiseptimi. Erit igitur D C, iungens opposita dodecaëdri inscripti pentagona, quæ ex hypothesi defecit à recta A B, tertio minoris segmenti: Quia verò dodecaëdri anguli icosidodecaëdri K H N M, circunscripti centra triangulorum possident, ex 19 decimiseptimi, erunt dodecaëdri huius latera iungentes proximorum triangulorum centra, per eandem 19 decimiseptimi. Atqui dodecaëdrum est æquale solido, super sua basi, & vertice dupla iungentis oppositas bases, per cor. 34 huius: Erit igitur dodecaëdrum icosidodecaëdro inscriptum æquale solido, quod super pentagono suo, siue iungentis proximorum triangulorum icosidodecaëdri centra, vertice verò dupla rectæ D C, quæ iungit oppositas eiusdem pentagona: Cùm autem super æquis basibus parallelepipeda ad se sint vt vertices (per 5 corol. 25 vndecimi,) dodecaëdrum autem deficit à duplo sibi inscripti cubi dimidio minoris segmenti cubi per corol. 33 decimisexti: Sequetur dodecaëdrum O T Q R S, quod sub duplo rectæ D C vertice, deficere à duplo sibi inscripti cubi T R Y X, dimidio minoris segmenti, solidi cubi super



eadem

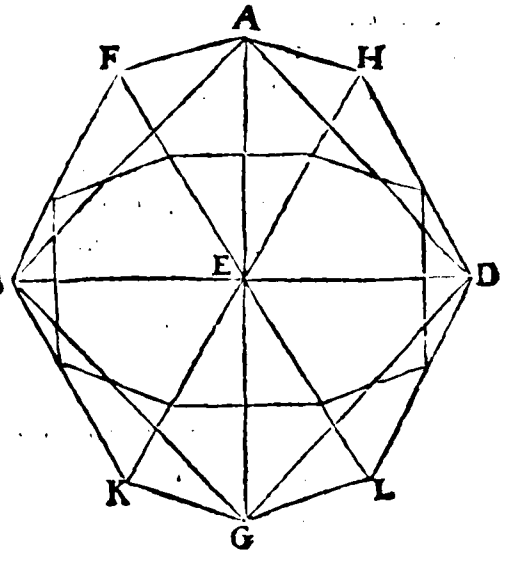
eadem basi constituti: Sed rectæ D C, fuit æqualis D L: Dodecaëdri itaque solidum super O T Q R S, basi, & vertice dupla rectæ D L, constitutum, deficit à duplo cubi T R Y X, super eadem basi constituti, dimidio minoris segmenti cubi verticis. Si autem dupla rectæ D L, deficiat à duplo cubi, vertice, dimidio minoris segmenti, recta D L, dimidia duplæ, deficiet à vertice cubi (dimidio sui dupli) quarto minoris segmenti: Nam dimidium quarti, duplum est. Defecit autem D L, à recta D F; quarto minoris segmenti eiusdem D F: Erit igitur D F, vertex solidi cubo æqualis, quod super basi O T Q R S, dodecaëdri, quæ fit ex T Q, Q R, vel O S, iungente proximorum icosidodecaëdri triangulorum centra. Si igitur iungens oppositorum icosidodecaëdri quinquangulorum centra A B, vel D G, sibi æqualis, aliquam D C, tertio minoris segmenti G C, superet: Eandem autem D C, vel D L, sibi æqualem, excedat alia D F, quarto minoris segmenti F L: quod sub excedentis D F, vertice, & super pentagono O T Q R S, eius Q R, vel O S, quæ proximorum icosidodecaëdri triangulorum centra iungit, solidum, æquale erit cubo T R X Y, eidem icosidodecaëdro Inscripto.

Si itaque iungens oppositorum icosidodecaëdri quinquangulorum centra, aliquam tertio minoris segmenti superet, eandem autem, &c.

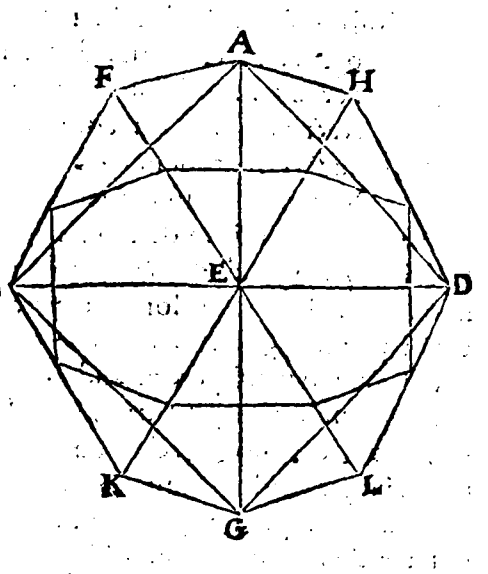
PROPOSITIO XXXXII.

Octaëdri solidum est æquale solido parallelepipedo, quod sub vertice icosidodecaëdri circunscripti dimetiente, & super quadrato eius quæ sextum dimetientis potest.

Detur octaëdrum A B G D E, icosidodecaëdro F H L K, inscriptum (per 22 decimiseptimi,) cuius dimetiens sit A G: Quoniam icosidodecaëdri angulos oppositos possident octaëdri inscripti anguli, per eandem 22 decimiseptimi, vtriusque eadem erit A G, dimetiens: Octaëdri autem duæ sunt æquales pyramides super quadrato B D, laterũ eius & vertice A E, quæ ex centro, per octaëdri constructionem. Quia verò parallelepipedum super basi pyramidis & vertice constitutum, eiusdem pyramidis triplum est (per 2 cor. 7 duodecimi) erit pyramis A B E D, æqualis solido super eadem basi, & tertia parte verticis A E, constituto: Et hac de causa binæ totius octaëdri pyramides æquales erunt solido super eadem basi & dimetientis tertio vertice constituto. Cùm autem hæc basis (scilicet octaëdri lateris quadratum) triplum sit quadrati eius, quæ ex centro basis octaëdri, per 12 decimitertij: Dimetiens verò duplum possit lateris octaëdri (per 14 eiusdem): Sequetur dimetientem sextuplum posse eius, quæ ex centro circuli basim octaëdri obeuntis. Cùm insuper solida parallelepipeda, quarum reciprocæ sunt bases, verticibus sint æqualia (per 34 vndecimi): sit autem sicut tertium dimetientis ad totam, ita tertium potentiæ quadrati octaëdri, hoc est, quod ex ea, quæ ex centro circuli basim octaëdri continentis, ad quadratum sui lateris, sequetur solidum super quadrato octaëdri, & tertio dimetientis constitutum, æquale esse solido quod super quadrato eius, quæ ex centro circuli triangulum octaëdri continentis & dimetiente A G, vertice. Nam sicut quadratum



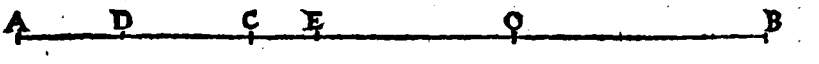
dratum octaëdri, ad quadratũ eius quæ ex centro, ſuæ baſis: ſic reciprocè, dimetiens ad tertium dimetientis: nempe in tripla ratione. Atqui ſolidum quod ſub vertice dimetientis A G, & ſuper quadrato eius quæ ex centro circuli triangulum octaëdri continentis eſt, ſuper ea quæ ſextum poteſt dimetientis A G: colligemus itaque octaëdri ſolidum eſſe æquale ſolido parallelepipedo, quod ſub vertice icoſidodecaëdri circunſcripti dimetiente A G, & quadrato eius quæ ſextum poteſt dimetientis, ſcilicet eius quæ ex centro circuli triangulum octaëdri continentis. Octaëdri igitur ſolidum eſt æquale ſolido parallelepipedo quod ſub vertice icoſidodecaëdri circunſcripti dimetiente, & quadrato eius quæ ſextum dimetientis poteſt.



PROPOSITIO XXXXIII.

Si ab icoſidodecaëdri dimetiente tertium minoris ſegmenti tollatur, Reliqua verò extrema & media ratione diuidatur, Erit quod ſuper maioris ſegmenti quadrato, vertice verò eiuſdem tertia parte ſolidum, æquale pyramidi eidem icoſidodecaëdro inſcriptæ.

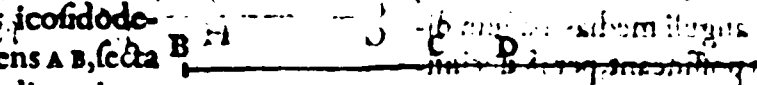
Sit recta A B, dimetiẽs icoſidodecaëdri: à qua (per 30 ſexti) ſecta in C, tollatur (per 9 eiuſdem) tertia pars A D, minoris A C, relinquens D B, quæ ſecetur (per eandem 30 ſexti) in E: maioris E B, tertia pars ſit E O. Dico ſuper quadrato maioris ſegmenti B E, vertice verò E O, tertio eiuſdem B E, ſolidum, æquari pyramidi icoſidodecaëdro inſcriptæ: Quoniam dodecaëdri angulos poſſident inſcriptæ pyramidis & cubi anguli, per 8 & 10 decimiquinti, vtriuſque anguli centra triangulorum icoſidodecaëdri eiſdem circunſcripti poſſidebunt, per 20 & 21 decimiſeptimi: Et ideo icoſidodecaëdrũ capiet dodecaëdrum & dodecaëdro inſcriptum cubum, & cubo pyramidem inſcriptam, per 21 decimiſeptimi: Cùm autem icoſidodecaëdron conſtituat angulos ſolidos in mediis dodecaëdri circunſcripti lateribus, erit icoſidodecaëdri dimetiẽs ea, quæ iungit medias oppoſitorum dodecaëdri circunſcripti laterum ſectiones, per 18 decimiſeptimi: Dodecaëdri autem circunſcripti dimetiẽtem, vel ſimilis rationis latera, oſtendimus excedere ſimilia inſcripti latera, tertio minoris ſui ſegmẽti (2 cor. 16 huius): Erit igitur iungens oppoſita dodecaëdri icoſidodecaëdro circunſcripti latera, ſiue eiuſdem icoſidodecaëdri dimetiens A B, ad iungentem inſcripti dodecaëdri latera oppoſita D B, ſicut A B, ad D B: Nam A B, excedit D B, tertio minoris ſegmenti totius A B: Quia verò D B, iungit oppoſita dodecaëdri inſcripti latera, ex hypotheſi, eadem, extrema & media ratione ſecta, efficit maius ſegmentum latus cubi dodecaëdro eidem inſcripti, per 4 cor. 17 decimitertij: quare idem cubi latus ſegmento E B, æquum erit: Cùm autem cubo inſcripta pyramis tertium cubi capiat (per 25 decimiſexti), eadem pyramis æqualis erit ſolido quod ſuper quadrato cubi, vertice autem eo, lateris cubi tertio, (per cor. 31 vndecimi & per 2 cor. 7 duodecimi): Atqui cubo



qui cubo inscripta pyramis, proposito dodecaedro inscripto. Nam pyramis, cubus, & dodecaedrum sibi inuicem inscripta, eidē icosidodecaedro inscripta sunt (per cor. 21 decimiseptimi). Pyramis igitur æqualis erit solido quod super basi cubi, hoc est, quadrato maioris segmenti B E, vertice autē E O, tertio lateris eiusdem B E, maioris segmenti, quod quidem fuit latus cubi. Si igitur ab icosidodecaedri dimetiente A B, tertium A D, minoris segmenti A C, tollatur: Reliqua autem B D, extrema & media ratione diuidetur in E: Erit quod super maioris segmenti E B, quadrato, vertice verò eiusdem E B, tertia parte E O, solidum, æquale pyramidi eidem icosidodecaedro inscriptæ. Si itaque ab icosidodecaedri dimetiente, &c.

PROPOSITIO XXXIIII.

Si icosidodecaedri dimetiens extrema & media ratione diuidatur, quod super maioris segmenti quadrato, & vertice quintupartiente sextas eiusdem comprehensum solidum, æquale erit exoctaedro eidem icosidodecaedro inscripto.

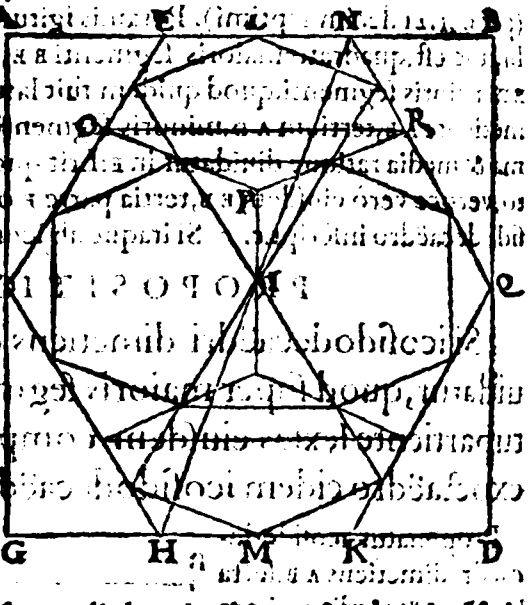


Proponatur icosidodecaedri dimetiens A B, secta extrema & media ratione in C, (per 30 sexti): A maiori segmento (per 9 eiusdem) tollatur sexta pars C D: Dico quod super quadrato A C, & vertice A D solidum, æquale esse exoctaedro prædicto icosidodecaedro inscripto. Quoniam dimetiens icosidodecaedri dodecaedro inscripti, iungit opposita dodecaedri latera dimidia, per eiusdem constructionem: iungens autem dodecaedri opposita latera, facit maius segmentum cubi dodecaedro inscripti latus, per 4 cor. 17 decimitertij: Sed eidem dodecaedro inscriptus cubus, efficit solidum super quadrato, & vertice maioris segmenti A C, cum sit A C, eius latus, vt patuit: Cubus autem sibi inscriptum exoctaedrum sexta sui parte superat (per 24 huius): Exoctaedron itaque cubo qui ex A C, inscriptum, æquale erit solido quod super quadrato A C, & eodem vertice sexta C D, parte minus, scilicet vertice A D: nam solida super æquis basibus adsē sunt vt vertices (per cor. 11 undecimi). Atqui cubus & sibi inscriptum exoctaedron, eodem continentur dodecaedro (per cor. 8 decimiseptimi): Idem autē exoctaedron angulos collocat in pentagonis dodecaedri & sibi inscripti icosidodecaedri, per 24 decimiseptimi. Nam maius segmentum perpendicularis basis icosidodecaedri, est dimidia perpendicularis basis dodecaedri (per eiusdem corollarium) & hac de causa, in vtroque eadem signa possident exoctaedri inscripti anguli: Et proinde cubus dodecaedro inscriptus, suscipit exoctaedron inscriptum icosidodecaedro, quod eidem dodecaedro cui cubus inscriptus est. Si igitur icosidodecaedri dimetiens A B, extrema & media ratione diuidatur in C, quod super maioris segmenti A C, quadrato, scilicet inscripti cubi, & vertice A D, quintupartiente sextas eiusdem A C, lateris cubi comprehensum, solidum, æquale erit exoctaedro eidem icosidodecaedro inscripto. Si itaque icosidodecaedri dimetiens, &c.

PROPOSITIO XXXV.

Si super quadrato maioris segmenti dimetientis basis exoctaedri, vertice autem quadrati latere, maiori & dimidio minoris segmentis eiusdem, comprehendatur solidum, ab hoc detractum quod super æquilatero triangulo eiusdem lateris, vertice verò quintupartiente decimasoctauas minoris segmenti eius quæ triplum potest eiusdem lateris solidū, relinquit, æqua-

le icosidodecaëdro eidem exoctaëdro inscripto solidum.



Proponatur exoctaëdron A B G D, cui inscriptum sit, per 13 decimiseptimi, dodecaëdrũ E F H K Q N, cuius dimetiens sit N H: dodecaëdro verò inscriptum sit icosidodecaëdron (per 18 decimiseptimi) L I M: subtendat recta O R, angulum basis dodecaëdri O P X: Quoniam latus dodecaëdri E N, est pars dimetientis A B, basis exoctaëdri, per 1 cor. 13 decimiseptimi, suscipitque idem E N, latus, angulum icosidodecaëdri solidum, qui ad L, sequetur dodecaëdro E N H K, inscriptum icosidodecaëdron, similiter inscriptum esse exoctaëdro A B G D, cùm eius anguli medias basium dimetientes possideant, per 18 decimiseptimi: Quia insuper dimetiens A B, est æqualis lateri cubi exoctaëdro circumscripti, per 1 decimiseptimi: Nam idem dodecaëdron inscribitur cubo & exoctaëdro ab eo descripto, per 2 cor. 15 decimiseptimi. Erit dimetientis A B, maius segmẽtum R O, latus cubi dodecaëdro E N H K, inscripti: minus verò E N, latus dodecaëdri, per 2 cor. 13 decimiquinti. Cùm autem dodecaëdrum excedat sibi inscriptum cubum, solido super cubi basi, vertice verò maiori & dimidio minoris, segmentis constituto, per 33 decimisexti, æquale erit idem dodecaëdrum solido super basi cubi, vertice verò toto latere, maiori & dimidio minoris segmentis, cõprehenso: nam ad se sunt vt vertices, per 3 cor. 25 & cor. 31 vndecimi. Atqui dodecaëdrum E N H K, excedit sibi inscriptũ icosidodecaëdrum L I M, solido quod super triangulo lateris O R, vertice verò quintupartiente sextas minoris segmẽti tertiæ partis dimetientis N H, dodecaëdri, per 1 cor. 14 huius. Quæ quidem sectio eadem est quintupartienti decimasoctauas minoris segmenti totius dimetientis: Quæ rursum N H, dimetiens bina potest latera E N, & A B, vel A G, per 1 cor. 15 decimiquinti. Quæ igitur ex dimetiente N H, potente totam A B, & minus segmentum E N, tripla sunt eius quod ex maiori segmẽto O R, per 4 decimitertij. Ablatum itaque à dodecaëdro solidum illud, super triangulo lateris O R, & vertice quintupartiente decimasoctauas minoris segmenti, totius N H, dimetientis, quo dodecaëdron superat sibi inscriptum icosidodecaëdron, supererit reliquum æquale icosidodecaëdro sibi inscripto. Colligemus itaque, si super quadrato maioris segmenti O R, dimetientis A B, basis exoctaëdri, vertice verò quadrati O R, latere, maiori & dimidio minoris segmẽti (qui quidem fuit vertex solidi dodecaëdro æqualis,) comprehendatur solidum, ab hoc solido detractum, quod super æquilatero triangulo eiusdem lateris O R, vertice verò quintupartiente decimas octauas minoris segmenti eius N H, quæ triplum potest eiusdem lateris O R, solidum, relinquit æquale icosidodecaëdro eidem exoctaëdro inscriptum solidum. Si igitur super quadrato maioris segmenti dimetientis basis exoctaëdri, &c.

QVAE SEQVVNTVR POTERANT, VEL etiam debuerant, addi ad calcem pag. 506.

DE NATVRA EXOCTAEDRI.

Exoctaëdri dimetiens poteſt dodecaëdri & cubi circũſcriptorum dimetientis duo tertia, & eſt ſeſquitertia eius quæ ſubtendit bina coniuncta latera: Quæ verò centra oppoſitorum exoctaëdri triangulorum iungit, dimetientis cubi duo tertia ſumit longitudine. Quæ centra proximorum quadratorum iungit, dimetientis eſt dimidia. Triangulorum verò proximorum centra iungens, dimetientis duo nona poteſt. Exoctaëdron ſecatur quatuor exagonis æquilateribus & æquiãgulis bifariam. Quæ verò his planis parallela ſunt plana per quadratorum centra ducta, bifariam rurſus dimidiam eius quæ oppoſita triangula iungit ſecant. Quæ verò per triangulorum centra ducta, totam iungentem bifariam ſecant. Quod verò planum per centra duorum quadratorum & quatuor triangulorum, bifariam ſolidum & eius dimetientem ſecat ad rectos. Iungens oppoſitorum triangulorum centra, triplum poteſt iungentis proxima, cuius duplum poteſt iungens centra triangulorum vno quadrato diſtantium. Iungens proxima quadratorum centra, ad iungentem oppoſita eſt ſicut iungens proxima triangulorum, ad iungentem ea quæ vno diſtant quadrato. Dimetiens eſt lateris dupla.

DE ICOSIDODECAEDRI NATVRA.

Icoſidodecaëdri dimetiens ad dodecaëdri circunſcripti dimetientem eſt, vt tota ad potentem totam & minus. Dodecaëdri dimetiens excedit iungentem oppoſitorum icoſidodecaëdri triangulorum centra, tertio minoris ſegmenti. Icoſidodecaëdron ſex planis decagonis bifariam ſecatur. Iungens oppoſitorum pentagonorum centra, ad circunſcripti icoſaëdri dimetientem eſt, vt tota ad totam & minus, & ſecatur bifariam à decagono æquiangulo & æquilatero plano, ſingulæq; eius dimidiæ partes extrema & media ratione ſecantur, à pentagonis quæ fiunt à ſubtendentibus angulos pentagonorum, ad oppoſitorum pentagonorum angulos concurrentium. Iungens proximorum pentagonorum centra, eſt maius ſegmentum eius quæ iungit centra pentagonorum duobus triangulis diſtantium. Si à perpendicularibus quinquangulorũ quæ ad dimetientem tollatur dupla minoris ſegmenti quæ ad contiguos angulos, iungentes ſectiones plana quadrata deſcribent. Iungens oppoſita triangulorum centra, bifariam & ad rectos ſecatur, duobus planis ſingulis per ſex triangulorum centra ductis: bifariam verò, exagono à ſubtendentibus pentagonorum angulos conſtituto. Iungens centra triangulorum binis coniunctis quinquangulis diſtantium, efficit maius ſegmentum, iungentem centra triangulorum vno latere diſtantium, minus verò, coniunctorum. Iungens centra triangulorum binis lateribus diſtantium, duplum poteſt iungentis centra triangulorum vno latere diſtantium. Iungens verò oppoſita triangula, triplum. Quæ oppoſitorum quinquangulorum iungit centra, poteſt totam iungentem centra oppoſiti, & proximi, & maius eius ſegmentum, ſcilicet iungentem centra proximorum. Latus icoſidodecaëdri eſt maius ſegmentum eius quæ ex centro