

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

LES 342398
QUINZE LIVRES

DES ELEMENTS

D'EVLIDE.

Traduits de Latin en François :

*Avec un Sommaire & Abbregé de l'Algebre, qui
sert à faciliter l'intelligence du dixiesme Livre.*

Par

D. HENRION, Mathemat.



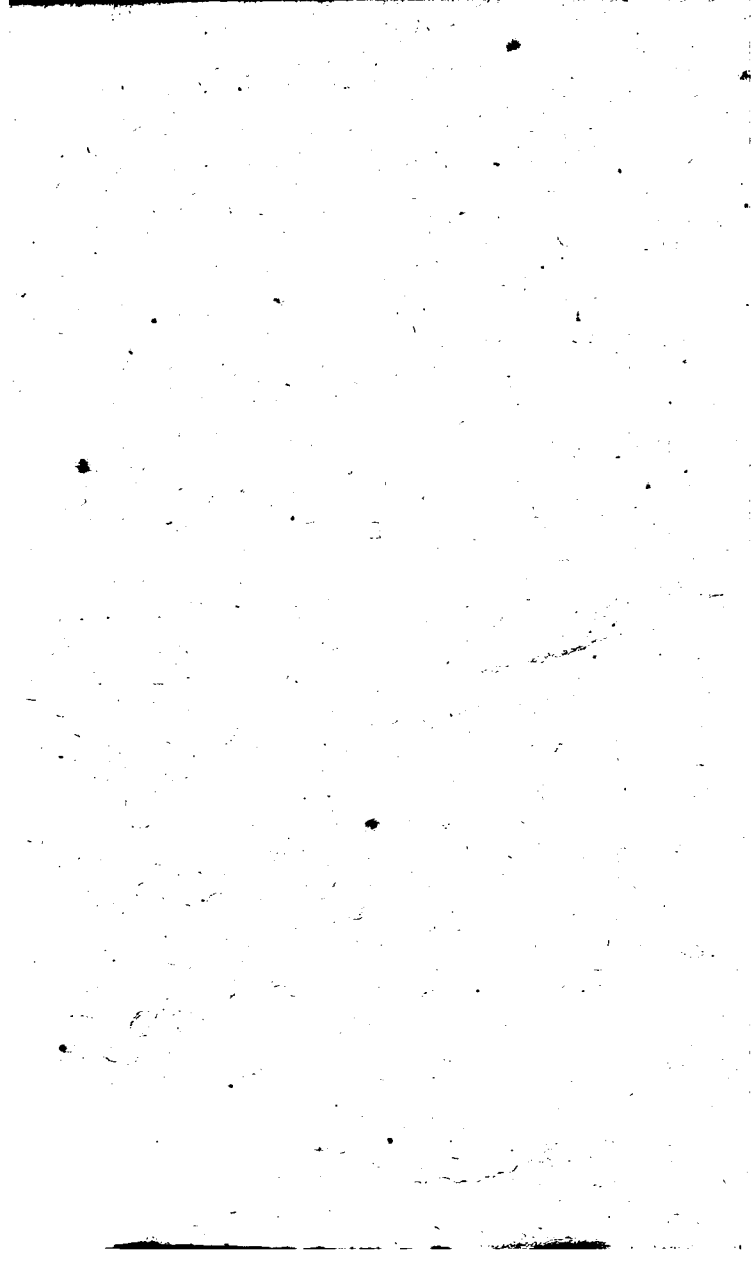
A PARIS,

Chez Jean Anthoine Ioallin, rue S. Jean de
Latran, deuant la bonne Foy.

M. DC. XV.

Avec Privilège du Roy

Ex Biblio. Miss. S^{ti} Joseph. J





D. HENRION.

AV LECTEUR.



*L*y a quatre ans ou environ, que voyant que personne n'auoit encore traduit en nostre langue, tous les Elemens de la Geometrie d'Euclide, le desir de seruir au public, m'excita d'entreprendre ceste traduction: Mais comme ie me resoluois de la mettre au iour, ie fus preueniu de Monsieur Dounot: ce qui me diuertit pour lors d'effectuer mon dessein, me persuadant que ledit Sieur se seroit contenu dans les bornes d'une iuste translation: Mais voyant en lisant ladite traduction, que ledit Dounot auoit alteré & changé le vray sens de l'Autheur en plusieurs endroicts, & mesme introduit de nouvelles demonstrations vitiueuses & erronees: cela fut cause que ie me proposay de reprendre mes premieres erres: & neantmoins i'usay de quelque surseance, esperant que par vne seconde impression, ledit Dounot pourroit emander la premiere: Mais voyant qu'en ladite seconde impression il auoit corrigé peu de fautes, & mesme qu'il y en auoit de

AV LECTEUR.

*nouuelles, cela m'a faict resoudre à mettre en lumie-
 re ceste mienne translation, pour le soulagement des
 François amateurs des disciplines Mathematiques.
 Or Voicy comme ie m'y suis comporté. Ie me suis
 efforcé de rendre les demonstrations des anciens, &
 principalement de Theon, lesquelles Proclus assure
 estre d'Euclide, quelquesfois plus briefues, autant
 que la matiere l'a peu permettre, ou pour le moins
 plus claires & intelligibles, retranchant où il y a-
 uoit de la superfluité, & esclarcissant où il y auoit
 trop de brieufeté, suyuant en ce Commandinus &
 Clavius. Outre cela i'ay adiousté en diuers endroits
 plusieurs Problemes & Theoremes vtils & dignes
 d'estre sçeus, lesquels i'ay tirez de diuers bons Au-
 theurs. D'auantage i'ay tasché d'esclaircir les plus
 obscures definitiōs d'Euclide, qui à faute d'estre bien
 prises, en ont fait chopper plusieurs, comme l'a tres-
 bien remarqué Clavius. Et d'autant que les doctes
 Commandinus, Stheuin, & Dibuadius ont estimé
 que le 10. liure (lequel est tenu par plusieurs fort dif-
 ficile) seroit rendu beaucoup plus clair & intelligible
 y ioignant les nombres, ie les ay adioustez aux en-
 droits plus difficiles & obscurs, me seruant du tra-
 uail des susdits Auteurs. Et finalement voyant que
 chacun n'entendoit pas les operations des nombres
 radicaux & sourds, comme estans esloignees de cel-
 les de l'Arithmetique Vulgaires, lesquelles neant-
 moins sont necessaires pour l'intelligence de ces de-
 monstrations numerales: i'ay faict preceder ce 10.
 liure des Elements d'Euclide, vn sommaire & ab-*

AV LECTEUR.

bregé de l'Algebre, lequel (comme i'estime) ne sera
desaggreable à ceux qui ne sçauent encore les opera-
tions d'icelle, & en desirent la cognoissance, ny trou-
ué mauuais par ceux qui l'ont desia acquise: Ie n'ay
voulu à cause de briefueté mettre en ce sommaire les
demonstrations des operations y contenues, lesquel-
les neantmoins les studieux, & desireux d'icelles,
pourront voir dans Nonius, Sthewin, ou Clavius; du
travail desquels ie me suis seruy en cest epitome. Voi-
la donc mon travail; reçoys-le (amy Lecteur) atten-
dant que ie te puisse bailler la traductiō des Elemens
Spheriques de Theodose: le second volume de mes
memoires Mathematiques, & autres œuvres.

Maintenant parce que ces Elements d'Euclide
seruent d'entree à toutes les autres disciplines Ma-
thematiques, i'ay estimé qu'il seroit bon, auparauāt
que nous Venions à les interpreter, de reciter succin-
ctement, (comme ont faict Commandin & Clavius)
d'où les disciplines Mathematiques ont pris leur
nom: quelle est leur diuision: par qui elles ont esté
premierement inuentees: & qui sont ceux par qui
elles ont esté depuis augmentees: combien grande est
leur excellence, & vtilité, & telles autres choses
qui conuiennent à nostre subiect.

Prolegomene.

Pourquoy les disciplines Mathematiques ont esté ainsi appellees.

Les disciplines Mathematiques, toutes lesquelles ont la quantité pour leur obiect, ont pris leur nom de la diction Grecque *μαθηματις*, ou bien *μαθημα*, qui signifie discipline, ou doctrine, dont on apporte deux principales raisons. La premiere est que les Pythagoriens, & Platoniciens estimans que les ames raisonnables, estoient contenues en vn nombre certain & déterminé, & qu'elles passioient d'un corps en vn autre, (ce que toutesfois la foy Chrestienne enseigne clairement estre faux) tesmoignent que ces disciplines mathematiques ont eu ce nom, pource que principalement par icelles nous acquerons le ressouvenir & la reminiscence de ceste science, de laquelle nostre ame (comme ils estimoient faulcement) estoit informée, & instruite auparavant qu'elle fust entrée dans le corps. Mais les autres estiment que ces arts mathematiques obtiennent le nom de science & de doctrine par dessus tous les autres, d'autant que seuls ils retiennent le moyen, & la raison de la science: Car ils procedent tousiours de certains principes cogneus auparavant, pour faire les demonstrations des conclusions; qui est le propre deuoir de la doctrine ou discipline; ce que ne font pas toutes les autres disciplines: car bien souuent elles amènent pour confirmer ce qu'elles veulent monstrier, les choses qui n'ont pas esté assez expliquées ny démontrées auparavant.

Diuision des disciplines mathematiques.

Les Pythagoriens lesquels ont esté suivis presque de tous les Mathematiciens, & de plusieurs Philosophes, ont diuisé toutes les disciplines mathematiques en quatre parties, sçauoir Arithmetique, Musique, Geometrie, & Astronomie: Car puis que toute quantité, qui est leur obiect, est ou discrete, sous laquelle tous les nombres sont compris, ou continué, sous laquelle sont comprises toutes les grandeurs, & que l'une & l'autre par icelle est considérée, tant selon soy, qu'en comparaison d'une autre; il leur a semblé raisonnable d'instituer les quatre parties susdites, lesquelles considerassent l'une & l'autre quantité, selon la double consideration susdite. C'est pourquoy l'Arithmerique traite de la quantité discrete selon soy, recherchant & expliquant soigneusement

Prolegomene.

toutes les proprieté & passions des nombres. La Musique traicte de la mesme quantite discrete, ou bien d'un nombre comparé avec vn autre, entend qu'elle considere les accords des sons & harmonies. La Geometrie dispute de la magnitude ou quantite continue, aussi selon soy, comme elle est immobile. Et finalement l'Astronomie considere la grandeur, comme elle est mobile, tels que sont les corps celestes, ainsi qu'ils sont meuz d'un continuel mouuement. Or à ces quatre sciences mathematiques, desquelles l'Arithmetique, & Geometrie sont appellees pures; mais la Musique, & l'Astronomie mixte: toutes les autres traictant en quelque maniere que ce soit de la quantite, telle qu'est la Perspective, la Geographie, & autres semblables, peuuent estre reduites, voire facilement, comme à leurs sources, desquelles elles despendent.

Quelques anciens Geometres diuisent les disciplines mathematiques d'une autre maniere: car ils disent qu'aucunes d'icelles consistent seulement es choses intellectibles separees de toutes matieres, & aucunes es choses sensibles, de telle sorte qu'elles touchent la matiere subiecte aux sens: du premier genre, ils establisent deux premieres & principales sciences, l'Arithmetique, & la Geometrie: Mais au dernier genre, ils en constituent six, Astrologie, Optique, Geodesie, Canonique ou Musique, Suputatrice, & Mechanique. Ils disent que l'Astrologie, est vne science qui discourt des mouuemens du monde: des magnitudes, figures, & illuminations des corps celestes; & de leurs distances de la terre, & d'autres choses semblables: Et de rechef de ceste science, ils en constituent trois parties: La Gnomonique, laquelle s'exerce en la dimension des heures, par la position des Gnomons: La Metheoroscopique, laquelle enseigne la difference des eleuations, & trouue les distâces des astres, & enseigne plusieurs autres & diuers Theoremes Astrologiques: Et la Dioptrique, laquelle discerne par instrumens Dioptriques les distances des planettes, & autres estoilles. Ils disent que l'Optique est engendree de la Geometrie, pource qu'elle se sert de rayons visuels, comme de lignes, & d'angles qui sont constituez d'iceux rayons: Or elle est diuisee en trois parties: en l'Optique qui est le nom general, Catoptrique, & Scenographie, ou comme quelques vns ayment mieux Sciagraphie. L'Optique ou Perspective, rend la cause des apparances, lesquelles ont de coustume se presenter a nous, autrement qu'elles ne sont à cause des diuerses scituations, & distances des choses qui tombent sous la veue, comme de la coïncidence de paralle-

Prolegomene.

les, & de l'aspect des quarez, comme si c'estoient cercles: La Catoptrique ou speculaire vniuerselle, à diuerses refractions pour son obiet: Et la Sciagraphie, ou Designatrice des nombres, monstre par qu'elle maniere se peut faire, que les choses qui paroissent es images, semblent plaisantes & non difformes, pour les distances & hauteurs des choses designees. Ils appellent Geodesie la science, laquelle mesure les choses qui consistent en quantité, comme les tas & monceaux des choses materielles, ainsi que les Cones; & les puits, comme les Cylindres: Ce qu'elle faict, non pas par lignes droictes intellectuelles, comme de la Geometrie, mais seulement par les sensuelles. Ceste Geodosie, comme la Geometrie, est diuisee en la partie qui mesure les plans; & en celle qui mesure les solides. Or quelques vns entre lesquels est Pediasimus comme rapporte Clauius au commencement du 6. liure de la Geometrie pratique, disent que Geodosie n'est que ceste partie de Geometrie, laquelle enseigne à partir ou diuiser les superficies: comme s'il falloit partir vn champ ou piece de terre, ou autre superficie entre diuerses personnes, cela seroit proprement appellé Geodosie. Ces antiens-là appellent Canonique ou Musique, la science qui considere les raisons apparentes des accords des sons, & qui se sert par tout de l'aide des sens, & laquelle comme dit Platon, semble auoir preferé les oreilles à l'entendement. La supputatrice quant à eux, est la mesme que ce que nous appellons Arithmetique pratique: Car elle considere les nombres, non pas comme es choses intellectuelles, mais comme es choses sensuelles. Et finalement la Mechanique, laquelle consiste en la cognoissance des choses sensuelles & conioinctes à la matiere, ils la diuisent en plusieurs manieres: Car il y en a vne qui est effectrice des instrumens de guerre, tels que l'on dict qu'Archimede en auoit construit pour faire resistance à ceux qui auoient assiéger tant par mer, que par terre la ville de Syracuse. Il y en a vne autre qui est effectrice de choses du tout admirables: Car elle construit certains instrumens, qui par le moyen des vérs, ou de l'eau, seignent la voix de quelconques animaux, tels que Ctesibe & Heron en ont fabriqué: & d'autres qui par le moyen des pois, & des nerfs, imitent les conuolutions & mouuemens des choses animees, tels qu'Archimede, Architas Tarentin, & autres en ont construit. Il y en a vne autre qui est la cognoissance des equilibres, & des choses appellees centroponderantes. Et finalement il y en a vne qui est appelée effectrice des spheres, à l'imitation des circonuolu-

Prolegomene.

tiōs celestes, telle qu'Archimede en à aussi fabrique: Et pour dire en vn mot, toute science est mechanique, laquelle à la force de mouuoir la matiere. Or voila comme les anciens diuisoient les disciplines Mathematiques.

Les inuenteurs des disciplines Mathematiques.

Les histoires tesmoignēt que toutes les disciplines Mathematiques ont tire leur origine de diuers Autheurs, voire mesme que chacunes de ces sciēces n'ont pas acquis vne perfectiō des le cōmencement, mais qu'elles ont procede peu a peu des choses imparfaites aux choses plus parfaites: Car on croit que les premiers innēteurs de l'Arith. ont este les Pheniciēs à cause de leurs traffics & cōmerces frequens: laquelle depuis Pythagoras, & ses successeurs, & les Egyptiens, Grecs, & Arabes ont augmentee merueilleusement, & esclaircie de diuers problemes & Theoremes. Quand à la Musique plusieurs historiens ont laisse par escrit, qu'elle a este premierement inuentee par Mercure, laquelle depuis il communiqua & apprit à Orphee Musicien fort estime, & Orphee à Thamyre & à Linus; & Linus à Hercules; & ainsi par successiō cōtinuelle d'autres Musiciēs excellens, de tēps en tēps elle est paruenue iusqu'à nous. Mais la Geometrie, selon Procle a este trouuee par les Egyptiens, & a tiré son origine du mesurage des terres labourables: car comme l'inondation du fleue du Nil confondoit & gastoit les bornes des terres, tellement que chacun ne pouuoit pas recognoistre l'estendue des siennes, cela excita les Egyptiens d'appliquer leurs esprits à la maniere de mesurer les terres, afin que par ce moyen on rendist à chacun le sien: Laquelle maniere de mesurer les terres, encore que pour lors elle fut fort rude, & mechanique, si est-ce toutesfois que de là elle prit son nom de Geometrie, qui signifie autant que l'art de mesurer la terre. Or peu à peu la Geometrie cōmença à estre plus polie, & non contente de ses limites, elle s'appliqua aussi a mesurer les corps celestes, & enseigna les principes de l'Astronomie, de l'Optique, & de plusieurs autres disciplines qui depēdēt d'icelle cōme des racines. L'on dit que Thales Mile sien la transféra d'Egypte en Grece, & depuis plusieurs Philosophes & renommez Mathematiciēs l'ont enrichie & embellie de plusieurs demonstrations: entre lesquels ceux cy sont les principaux des anciens, Pythagoras, Anaxagoras Clazomenien, Hippocrates de Chios, Platon, Oenopides, Zenodore, Briton, Antiphon, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentin,

Prolegomene.

Euclide, Serenus, Hypsicles Alexandrin, Archimede Syracuſien, Appolonius Pergæus, Theodoſe Tripolitain, Mileus Romain, Menelaus, Theon Alexandrin, Ptolomee, Eutocius Aſcalonite, Pappus, Proclus & pluſieurs autres innombrables, leſquels il ſeroit long de rapporter. Finalement, pluſieurs eſtiment que l'Aſtronomie a eſté premiereſment inuentee par Atlas, d'où ils veulent que la fable a tiré ſon origine, que de ſes eſpaules, il auoit ſouſtenu le ciel à cauſe de l'excellente cognoiſſance qu'il auoit de l'Aſtronomie. Les autres eſtimēt que les Chaldeens par vne obſeruation ont inuenté la ſcience deſſus aſtres. Les autres ſont les Egyptiens les premiers inuenteurs de ceſte ſcience. Les autres les Aſſyriens. Et finalement les autres eſtiment que ceſte gloire & louange doit eſtre deſerree aux Babylonienſ. Or en ceſte ſcience, comme elle eſt tres excellente, auſſi y a-il eu pluſieurs Autheurs excellents qui y ont trauaillé, leſquels nous ne rapporterons icy pour briefueté. Ces 4 principales diſciplines Mathematiques ayans eſté inuentees, toutes autres qui traitent de la quantité en quelque ſorte que ce ſoit, ont eſté facilement deriuces d'icelles, tout ainſi que petits ruiſſeaux d'vne fontaine.

L'excellence des ſciences Mathematiques.

D'autant que les diſciplines Mathematiques traitent deſſus choſes, leſquelles ſont conſiderees ſans aucune matiere ſenſible, encore qu'elles ne ſoient naturellement ſans matiere, il eſt euident qu'elles tiennent le milieu entre la Metaphyſique, & la ſcience naturelle, ſi nous conſiderons leur ſubiect, comme Procle le prouue fort bien. Car le ſubiect de la Metaphyſique eſt ſeparé de toute matiere tant intellectuelle que ſenſuelle: mais le ſubiect de la Phyſique eſt conioinct à la matiere ſenſible, d'où vient que puis que le ſubiect des diſciplines Mathematiques eſt conſideré hors de toute matiere ſenſuelle, mais non hors de toute matiere intelligible: il eſt euident qu'il eſt moyen entre ces deux-là. Mais ſ'il faut eſtimer l'excellence d'vne ſcience par la certitude des demonſtrations deſquelles elle uſe, ſans doubte les diſciplines Mathematiques tiennent le premier lieu entre toutes: Car elles demonſtrent toutes choſes deſquelles elles entreprennent la diſpute, par des raiſons tres-fermes, & les confirment de telle ſorte, qu'elles engendrent veritablement vne ſcience en l'eſprit de ſes auditeurs, & oſte tous les doubtes: ce qu'à pei-

Prolegomene.

ne pouuons nous attribuer aux autres sciēces, veu qu'en icelles souuent l'entendement est en suspend & en incertitude par la multitude des opinions, & diuersité des aduis sur la verité des conclusions: ce que tesnoignent ouuertement tant de sectes des Peripateticiēs, (afin que ie laisse tous les autres Philosophes à part) lesquelles ayant pris leur origine d'Aristote, comme les ruisseaux de leur source ou fontaine, sont tellement en discord, & entr'elles, & quelquesfois avec leur auteur mesme Aristote, qu'on ignore tout à fait ce que veut dire Aristote, d'où vient qu'une partie suit les interpretes Grecs, cōme guides & conducteurs, les autres les Latins, les autres les Arabes, les autres les Nominaux, & les autres les Philosophes qu'ils appellent Reaux, (tous lesquels toutefois se vantēt d'estre Peripateticiēs) laquelle diuersité ie n'estime pas que personne ignore combien est esloignée des demonstrations mathematiques. Car les theoremes d'Euclide, & des autres Mathematiciens retiennent auourd'huy la mesme pureté de la verité, la certitude des choses, la force & fermeté des demonstrations qu'elles ont eu par tant de siècles precedens. A cecy se rapporte ce que Platon dict en son dialogue du souuerain bien, que ceste science là est la plus digne, & la plus excelente, laquelle est la plus amatrice de sincerité & verité. Veux donc que les disciplines Math. desirēt, ayment, & cultiuent si soigneusement la verité, que non seulement elles n'admettent rien qui soit faux, mais mesme rien qui soit seulement probable, ny rien qu'elle ne confirme & fortifie par demonstrations tres-certaines, il n'y a point de double qu'il ne leur faille bailler le premier lieu entre toutes les autres sciences.

Diuerfes vtilitez des disciplines Mathematiques.

Les disciplines mathemat. ne doiuent pas estre seulement estimees vtilēs, mais aussi fort necessaires, tant pour apprendre les autres arts parfaitement, que pour bien instituer & gouverner la chose publique: Car comme enseigne fort bien Proclus, il n'y a point d'entree à la Metaphysique, si ce n'est par les Mathematiques. Car si des choses sensibles, lesquelles le Physicien considere, nous voulons esleuer nostre entendement sans aucun milieu, aux choses du tout separees de la matiere sensible, lesquelles le Metaphysicien considere, nous nous auengions nous mesmes, tout ainsi qu'il arriue à celuy qui de quelque lieu tenebreux, où il a este long temps, vient

Prolegomene.

tout soudain paroistre en vne grâde lumiere. C'est pourquoy auparavant que l'entendement monte, des choses Physiques qui sont contoinctes à la matière subiecte aux sens, aux choses Metaphysiques qui en sont separees, il est necessaire de peur d'estre esblouy de leur clarté, qu'il soit premierement accoustumé aux choses où il n'eschet pas vne si grande abstraction, telles qu'elles sont considerees par les Mathematiciens afin qu'il les puissent plus facilement comprendre. C'est pourquoy Platon assure que les Mathematiques esleuent l'esprit, & le subtilisent pour la contemplation des choses diuines. Or combien ces disciplines apportent d'utilitez pour bien entendre les saintes Escriptures, Saint Augustin, saint Hierosme, & autres Docteurs nous l'apprennent, en disant qu'il y a beaucoup de choses, qui ne sont pas entendues de plusieurs par l'ignorance des nombres, pource qu'elles ont esté couchées dans l'Escripture mystiquement: Ces mesmes Docteurs disent que la Geographie, & la Geometrie sont grandement viles aux Theologies. Et S. Basile est grâdement loué par Gregoire Nazianzene, de ce qu'il estoit fort bien versé en l'Astrologie, Geometrie, en la cognoissance des nombres, & autres sciences des Mathemat. Pareillement elles ne seruent pas peu pour acquerir parfaitement la Philosophie naturelle, Morale, la Dialectique, & autres semblables, comme l'enseigne fort bien Proclus. I'adiouste que presque tous les volumes des anciens Philosophes, & nommément d'Aristote & de Platon, lesquels à bon droit sont proposez pour guide, pour bien & sainement philosopher, & presque de tous les Interpretes tant Grecs que Latins, sont remplis d'exemples mathematiques, pour ceste raison principalement, afin que les choses qui semblent estre enuolopees de grandes difficultez fussent rendues plus intelligibles par ces exemples plus clairs, lesquels on ne sera point capable d'entendre, si on est du tout destitué de la cognoissance des Mathematiques: d'où vient qu'antiénement la frequentation du college de Platon estoit interdite à ceux qui n'estoient pas bien versez es disciplines Mathemat. C'est pourquoy en son Timee, il appelle les Mathematiques le chemin de toutes vrayes eruditions: voire mesme il dit en son Philebe, que toutes les disciplines sont viles & abiectes sans les Math. Je pourrois rapporter icy plusieurs autres tels tesmoignages tant de Platon, qu'autres Philosophes excellents, lesquels ie delaisse pour venir aux choses plus cogneues, voire mesme des plus ignorans. Car qui est celuy qui ne sçait l'utilité & necessité de l'Arithmet. non seulement à ceux qui s'employent

Prolegomene.

au commerce, mais presque à toutes sortes de personnes? Qui ne voit l'utilité de la Geometrie: puis que c'est elle qui cōduit l'Architecte en la structure des maisons & autres bastimens: l'Ingenieur en la construction des forteresses, en l'invention des machines, tant offensives, que defensives: puis que c'est elle (dis-je) qui monstre à mesurer les longueurs, largeurs, hauteurs & profondeurs; la diuision des terres; à prendre, & représenter le plan des villes ou autres lieux: à faire la Carte des Prouinces ou Royaumes; à diuiser & cōpasser en vn chāp les espaces pour camper vne armee; à celuy qui veut ranger des hommes en bataille, selon qu'elle figure ou forme, il doit ranger son armee, afin de faire paroistre le nombre de ses hommes plus grand ou moindre qu'il n'est: Bref qui ne voit combien l'Astrologie est vtile; puis que c'est elle qui enseigne la distinction des temps & des saisons. Et qui est-ce qui peut sans l'aide de la Geometrie & Astrologie, courir les mers, aller es contrees lointaines, voir le nouveau monde, & en rapporter tant de richesses que nous auons de ces quartiers-là? Et comment l'Hystorien rapportera-il la scituation des climats, les grandeurs, diametres, ou circuits des villes, sans l'aide de la Geometrie & Astronomie? Que dirons-nous plus? la cognoissance des nombres ne fust-elle pas tres-vtile à Ioseph Sacrificateur des Iuifs, lors qu'à la prise de la ville de Iotapate, par Vespasien chef de l'armee Romaine, ceste cognoissance & subtilité des nombres, luy sauua la vie. La mesme utilité apporta la cognoissance de l'Astrologie à Christophle Colomb grand Admiral de l'Ocean Occidental, sous Dom Ferrand Roy de Castille, premier explorateur du nouveau monde: Car estant paruenü pres de l'Isle qu'on nomme Iamayque, & l'ā perdu deux Carauelles que le Roy luy auoit baillee, tellement qu'il estoit sans vaisseau, les habitans d'icelle Isle ne luy voulurent par prieres, force, ou autrement deliurer aucun viure, dont luy & sa compagnie estoient en grande necessité, & par ce moyen lesdits habitans esperoient les pouoir tous vaincre & saccager: Mais ledit Colomb cognoissans par l'Astrologie qu'une nuit prochaine, il se feroit vne grande eclypse de Lune, il dict à quelques vns des habitans, que s'il ne luy vendoient des viures, & à sa compagnie, que dans peu de temps ils mourroient tous par pestes, & effusion de sang; & pour tesmoignage que cela aduiedroit ainsi, ils verroient en vn tel iour, & à vne telle heure qu'il leur nomma, la Lune toute sanglante: Ce qu'estant aduenü ainsi, lesdits habitans ignorans l'Astrologie, adiouterent foy aux me-

Prolegomene.

naces dudist Colomb, & luy demandant pardon, luy apporterent tout ce qu'il demandoit, & le prierent qu'il les mit en la bonne grace de la Lune. Nous adioufterons encoré icy que Hieron Roy de Syracuse, ayant fait bastir vne Nauiue pour enuoyer à Ptolomee Roy d'Egypte, d'une telle grandeur que tous les Syracusins ensemble ne la pouuoient remuer de sa place, vn seul Archimede par le moyen de la Geometrie, fist que le Roy seul sans aucune peine la remua de son lien, dont le Roy, & tous les Syracusiens furent grandement esmerueillez. Qui est donc celuy qui ne doie desirer les disciplines Mathematiques sur toutes les autres sciences, puis qu'elles sont non seulement agreables, mais aussi tres-vtiles & necessaires à la vie humaine?

Recommandation d'Euclide, & de la Geometrie.

Les Autheurs ne sont pas bien d'accord, qui a esté Euclide, qui a composé ces Elemens, & en quel temps il a floré. Car plusieurs pensent que ç'a esté vn Philosophe de la ville de Megare disciple de Socrates, qui institua la secte appelée par luy Megarique. Mais si nous croyons Proclus Autheur excellent, & autres antiens, nostre Euclide a esté depuis celuy de Megare, & a floré au temps de Ptolomee premier, lequel commença à regner en Egypte apres la mort d'Alexandre la 115. Olimpiade, & l'an 399. auparavant la natiuité de nostre Seigneur, comme le rapporte Iean Lucide: Ce qui est plus vray semblable. D'autant que Diogenes Laertius rapportant tous les œuvres d'Euclide Megarien, il ne fait aucune mention de cest admirable volume des Elemens Geometriques, par lequel nostre Euclide s'est acquis vne renommée & gloire immortelle. C'est pourquoy nostre Euclide tres-subtil Geometrien, est bien autre que ce Megarien l'a, d'autant qu'estât tres-bien versé en la doctrine des Academiques, il appliqua son esprit aux Mathematiques, esquelles il se rendit si excellent que par le commun consentement de tous il a obtenu le premier lieu entre les Mathemat. Or il a escrit plusieurs volumes concernant les Mathematiques, esquels paroist sa grande diligence, & admirable doctrine, tels que sont ses Optique, Catoptrique, Musique, Phenomenes, & le liure des Donnees, l'œuvre des diuisions, que nous estimons estre ce petit liure tres-subtil des diuisions des superficies attribué à Machamet Bagdedin, qui depuis peu a esté mis en lumiere par la diligence de Iean Deé, & de Federic Commandin. Pareillemēt il a escrit les Elemens

Prolegomene.

coniques, comme dit Proclus, lesquels toutesfois ne sont pas encore paruenus iusques à nous, & autres petits traictez semblables. Mais principalement il a tissé ce volume des Elemens Geometriques, qui par le consentement de tous, ne sera iamais assez loué, avec vn ordre si admirable, & la remply d'une si grande erudition, qu'il n'y en a pas vn de tous ceux qui ont escrit de semblables Elemens, (car comme dit Proclus, il y en a plusieurs qui en ont composé) qui l'ait égalé, tant s'en faut qu'il y en ait quelqu'un qui l'ait surpassé, auquel volume comme il a fait paroistre la grande subtilité de son esprit, ainsi il n'a pas estimé qu'il fallut mettre au iour toutes les choses qui touchent la Geometrie, mais seulement les choses qui luy ont semblé viles & nécessaires pour tous, lesquelles il a confirmées & fortifiées d'argumens & raisons tres-fermes & tres-solides. Or l'on peut recognoistre clairement tant des choses que nous auons desia representées, que de ce que nous dirons encore presentement, combien est grande l'utilité & excellence de ces Elemens Geometriques d'Euclide, & consequemment de toute la Geometrie. Ces Elemens sont ainsi appelez d'autant que nous ne pouuons sans cela entreprendre aucunes ceures mathemat. tant s'en faut que nous en puissions retirer aucun fruit: Car tous les auteurs des mathemat. cōme Archimede, Appolonius Pergeus, Theodose &c. se seruent en leurs demonstrations de ces Elemens d'Euclide, comme de principes certains, & desquels les demonstrations estoient desia il y auoit lōg temps recogneues & tenues pour constantes & asseurees de tout le monde. Parquoy il est necessaire que ce uy qui desire sçauoir, & se rēdre familiere quelconque partie des mathematiques, apprenne auparauant ces Elements Geometriques. Car d'iceux Elemens, comme d'une fontaine plantureuse, est produite la dimension des latitudes, longitudes, altitudes & profondeurs: la diuision des terres, montagnes, & isles: l'observation des astres du ciel, qui se fait par les instruments: la composition des horologes scioteriques: la force des machines: la raison des pois: & ceste diuersité d'apparences qu'on voit es miroirs, es peintures, es eaux, & en l'air diuersement illuminé. Par le moyen dis-je de ces Elemens a esté trouué le milieu & centre de toute ceste machine du monde: & ont esté trouuez les poles, alentour desquels il se tourne continuellement: & a esté recherchée & trouuée la figure & quantité de toute la terre. Par la force de ceste seule science est monstree, & demonstree la conuersion de tout le Ciel, & des astres: leur leuer & coucher: leur aprochemēt

Prolegomene.

& esloignement : leur ascension & descention ; la variété du iour & de la nuit, & des temps en toute l'annee, par toute la scituation des endroits de la terre. Pareillement les conjunctions des planettes, leurs oppositions, & diuers aspects, sont cogneus si facilement, que les Mathematiciens peuuent dire leurs lieux au ciel, & predire asseurement les eclypses soit de Soleil, soit de la Lune, auparauant qu'elles aduiennent pour si long temps qu'il leur plaist. Bref, par le moyen de la Geometrie, nous voyons tout ce grand œuvre de Dieu perceptible aux yeux de nostre entendement.

La diuision de la Geometrie, & des Elemens d'Euclide.

La Geometrie est diuisee en la contemplation des plans, qui est appellee du mot general Geometrie ; & en la doctrine des solides, laquelle les Mathematiciens appellēt par vn nom propre & peculier la Stereometrie. Car la Geometrie vniuerselle se propose ce but, qu'elle constitue ou les plans, ou les solides, ou bien estans constituez, elle les compare entr'eux, ou les diuise. Or nostre Euclide voulant laisser vne parfaite cognoissance en ces Elemens des choses Geometriques, il traite des plans aux 6 premiers liures ; & aux 5 derniers, il dispute fort subtilement des solides, & recherche leurs proprietiez les plus excellentes. Et d'autant que toutes les choses Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers, qui ont de coustume d'estre appelez corps Platoniques, ne pouuoient estre traictez parfaitement sans la cognoissance des lignes commensurables & incommensurables. Euclide afin de comprendre dans ces Elemens Geometriques, tous les enseignemens requis pour l'intelligence, & dimension des magnitudes, il a mis son 10. liure deuant sa Stereometrie, auquel il discoure subtilement de ces sortes de lignes là : Et qui plus est, Euclide sçachant que ce traité des lignes commensurables & incommens. ne se peut bien faire sans la cognoissance des nombres ; deuant le 10. liure, il traite des passions ou proprietiez des nombres, es trois liures qui le precedent. C'est pourquoy tout ce volume des Elemens Geometr. cōpris en 15 liures, (desquels les 13 premiers sont attribuez de tous à Euclide sans aucun cōtrecredit,) mais les 2 derniers sont attribuez à Hypsiclès Alexandrin) se pourra à bon droit diuiser en 4. parties ; tellement que la premiere partie contenue es 6. premiers liures, traite des plans : la seconde comprenant les trois liures suiuaus, recherche les passions des nombres : La troisieme partie, laquelle le 10. liures constitue seul, traite des lignes commensurables & incommensurables.

Prolegomene.

Et finalement la 4. partie, contenue aux 5. autres liures, comprend la science des corps ou solides. La premiere partie se diuise derechef en 3: Car aux 4. premiers liures, il est traicté des plans absolument, en recherchant leur egalité & inegalité; mais au 5. liure, il est traicté en general des proportions des magnitudes: & au 6. sont examinées les proportions des figures planes.

Que c'est que Probleme, Theoreme, Proposition, Lemme, Corrolaire, & Scholie, entre les Mathematiciens.

Toute demonstration de Mathematiques, est diuisee par les Antiens Autheurs en Probleme & Theoreme. Ils appellent Probleme, ceste demonstration qui commande & enseigne à construire quelque chose: Et Theoreme, la demonstration laquelle recherche seulement, quelque passion ou propriété d'une ou plusieurs quantitez ensemble: Bref les Problemes enseignent à trouuer & cōstruire quelque chose, & les Theoremes demonstrent les affections & proprietiez des choses desia faictes & construites: Et tant le Probleme, que le Theoreme, sont appelez entre les Mathematiciens Proposition, d'autant que l'un & l'autre nous propose quelque chose. Ils appellent Lemme, quelque Probleme ou Theoreme, lequel estant necessaire à leur demonstration, ils le prennent & prouuent auparauant que venir à leur dite demonstration principale, afin de la faire plus euidente & briefue. Mais ce que nous appellons Corollaire, est vne consequence que nous tirons de ce qui a este demonstre en quelque proposition. Et finalement ce qu'on nomme Scholie, est vne annotation qu'on faict seulement, comme en passant sur quelque proposition.

Des principes des Mathematiciens.

Veü que toute doctrine & discipline est engendree d'une cognoissance precedente, comme le tesmoigné Aristote, & demonstre ses conclusions de certains principes pris & concedes, & qu'il n'y a aucune science, selon le mesme Aristote, & autres Philosophes, qui demonstre ces principes; les disciplines mathematiques auront aussi leurs principes, desquels estans posez & concedes, elles confirment leurs Problemas

Prolegomene.

& Theoremes. Or il y a entre les Mathematiciens trois genres de principes. Au premier sont mises les definitions, par lesquelles les mots & termes de l'art sont expliquez, de peur qu'en traitant de la science, estans trompez par l'ambiguité des noms, ou par l'obscurité, nous ne tombions en des paralogismes. Le second genre comprend les petitions ou demandes, qui sont choses si claires & evidentes en ceste science, qu'elles n'ont besoin d'aucune confirmation, mais requierent seulement le consentement de l'auditeur, afin qu'en faisant la demonstration, il n'y ait aucune hesitation ou difficulté. Au 3. genre sont referez les axiomes, ou communes notions de l'esprit, autrement communes sentences, qui sont choses si manifestes & evidentes, que celuy qui entendra bien les termes, n'y pourra contrarier en façon quelconque. Or Euclide en ce volume des Elemens Geometriques, met deuant les demonstrations de ses conclusions, ces trois genres de principes, lesquels sont facilement entendus de tous, pour tirer d'iceux des Theoremes admirables, auxquels iamais personne ne consentiroit, s'ils n'estoient confirmez par raisons certaines & evidentes. Or voila tout ce que nous nous estions proposé de declarer sur le subiect de ces Elemens d'Euclide, & autres preambules ou prolegomenes qu'on pourroit nommer en François Avant-propos. Nous viendrons donc maintenant à l'exposition des principes d'Euclide.

ELEMENT



ELEMENT PREMIER.

DEFINITIONS.



1. Le point, est ce qui n'a aucune partie.



Es Phisiciens disent que le point est le moindre objet de la veüe : & iceluy peut estre descrit avec ancre ou autre chose. Mais les Mathematiciens reietant ceste definition, disent que le point est vn objet de l'intellect si subtil qu'il ne peut estre diuisé en aucunes parties : Et iceluy ne se peut escrire : mais seulement entendre & imaginer : bien est vray que pour le représenter à nos sens extérieurs, nous nous seruons du point Phisique. Le point n'a donc aucunes dimensions geometriques ; c'est à dire qu'il n'a ny longueur, largeur ny espaisseur, mais bien est-il principe d'icelles.

2. La ligne, est vne longueur sans largeur.

Après le point vient la ligne, qui n'est autre chose que le flux ou collement du point en longueur, laquelle n'aura aucune largeur, comme dit Euclide; puis que le point du coulement duquel elle est produite est imaginé n'auoir aucune quantité; & par consequent la ligne, qui est la premiere espèce de quantité a seulement vne dimension, sçauoir est longueur.

3. Les extremittez des lignes, ce sont poinçts.

Cecy est intelligible, puis que toutes lignes terminees commencent a vn poinçt & acheuent aussi a vn poinçt.

4. La ligne droicte, est celle qui est egalle-
ment comprise entre ses poinçts.

Les Mathematiciens ont diuerses sortes de lignes; mais Euclide ne traicte que des deux plus simples, sçauoir est de la droicte, & de la circulaire; en ceste definition il parle de la droicte, laquelle est le plus court chemin d'un poinçt iusques à l'autre: ou comme dit Archimede, c'est la plus courte d'en-
tre ses extremittez.

5. Superficie, est ce qui a longueur & largeur
tant seulement.

Après la ligne, qui est la premiere espece de quantité con-
tinuë, & qui a vne seule dimension, Euclide definit la superfi-
cie, qui est la seconde espece de quantité, & a deux dimen-
sions, sçauoir est, longueur & largeur; & cōme la ligne est produite
par le flux ou coullement du poinçt, ainsi la ligne se mouuant
en trauers, produict la superficie.

6. Les extremittez de la superficie, ce sont li-
gnes.

Il faut icy entendre des superficies bornees, & terminees
par lignes droictes: car il y a plusieurs superficies encloses
d'une seule ligne, comme de la circulaire, & autres dont Eu-
clide ne fait mention en ces Elements cy. Comme donc la li-
gne commence a vn poinçt, & finit a vn autre poinçt, ainsi la
superficie commence par vne ligne, & finit par vne ligne.

7. Superficie plane, est celle qui est egalemēt
comprise entre ses lignes.

Ceste definition de la superficie plane se raporte a celle

3

de la ligne droite : Car comme celle-cy est la plus courte d'entre ses extremittez , ainsi aussi la superficie plane est celle qui est la plus courte d'entre ses limites ou extremittez.

8. Angle plan , est l'inclination de deux lignes, l'une a l'autre se touchant en vn plan non directement.
9. Que si les lignes comprenant l'angle sont droictes, l'angle sera appelé, rectiligne.

Quand deux lignes constituees en quelque superficie plane , concurrent en vn point d'icelle superficie , & ne se rencontrent directement , alors l'inclination d'icelles deux lignes, s'appelle angle plan. Or tout angle plan est fait, ou de deux lignes droictes, & alors il se nomme rectiligne: ou de deux lignes courbes, & alors on l'appelle curviligne: ou bien d'une ligne droite, & d'une courbe, & alors il s'appelle angle mixte. Quelques Geometres (entre lesquels est Dounot , & pource auoit-il changé ceste definition de l'angle plan en la premiere impression de sa traduction d'Euclide) ont estimé qu'afin que deux lignes fassent angle, il estoit necessaire qu'estant continuees du point de leur rencontre , elles s'entre-couppent en iceluy, dont ensuiuroit que deux cercles s'entre-touchant en vn plan , ou qu'une ligne droite touchant vn cercle ne feroit angle, ce qui est contre l'intention d'Euclide, ainsi qu'il appert, tant par ceste definition de l'angle plan, que 16. p. 3. & comme la aussi bien demonstre Clavius sur la mesme proposition, ou il refute Pelletier , qui disoit que la ligne droite touchant le cercle, ne faisoit angle ; c'est pourquoy ceux qui tiennent encore ceste opinion , se moquent bien d'Euclide, de Clavius & autres Geometres , qui disent qu'une ligne droite touchant vn cercle, fait vn angle contingent, ou d'attouchement. Or la grandeur d'un angle plan consiste en la seule inclination des lignes qui le constituent, & non en la longueur d'icelles lignes.

10. Quand vne ligne droite tombant sur vne autre ligne droite, fait les angles de part & d'autre egaux entr'eux , les angles sont droicts ; & la ligne tom-

bante, est perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe.

II. Angle obtus, est celuy qui est plus grand qu'un droit.

12. Mais l'aigu, est celuy qui est plus petit qu'un droit.

Si vne ligne droite tombant sur vne autre ligne droite, ne s'incline pas d'avantage d'un costé que de l'autre, mais fait egale inclination, & par consequent deux angles egaux entr'eux, chacun d'iceux est appelé angle droit, & la ligne ainsi tombante, perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe. Mais quant ceste ligne tombante s'incline plus d'un costé que de l'autre, elle fait deux angles inegaux entr'eux, dont le plus grand est appelé obtus, & l'autre aigu. Or d'autant que quelquesfois en vn plan concurrent plus de deux lignes en vn mesme point, & par consequent constituent plusieurs angles, les Geometres ont accoustumé (pour euitier confusion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, desquelles celle du milieu monstre le point, auquel les lignes constituent l'angle, & celle des extremes signifient les commencemens d'icelles lignes, que font iceluy angle : Comme pour exemple en ceste figure ou les lignes AB & EB concurrent au point B de la ligne CD : & EB est autant inclinée vers CB qu'à DB, mais AB panche vers la partie DB. Pour donc exprimer ces angles, nous disons que les deux CBE & DBE sont droits, puis que la ligne EB tombant sur CD ne panche d'un costé ny d'autre, comme fait AB ; & par consequent icelle EB est perpendiculaire à CD : Mais que l'angle ABC, qui est plus grand que le droit EBC, est obtus, & ABD, qui est moindre que le droit DBE, est aigu. Ce qu'on doit bien noter, afin de cognoistre facilement les angles, dont sera fait mention és demonstrations suivantes.



13. Terme, est l'extremité de quelque chose.

Ainsi les points sont termes ou extremités des lignes; les lignes des superficies, & les superficies des corps.

14. Figure, est ce qui est compris d'un, ou de plusieurs termes.

Toute quantité ayant termes, n'est pas dictée figure; ains seulement celles que les termes enuironnent: ainsi la ligne terminee par deux poinçts n'est pas dite figure: mais toutes superficies, & solides, finis & limitez, sont nommez figures, pour ce qu'ils sont enuironnez d'un seul, ou de plusieurs termes: d'un seul, comme le cercle, l'Eclipse, la sphere: de plusieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, &c.

15. Cercle, est vne figure plane, contenuë par vne seule ligne qu'on appelle circonference; vers laquelle toutes les lignes droictes menees d'un seul poinçt de ceux qui sont en icelle figure, sont egales.

16. Et ce poinçt là est appellé centre du cercle.

17. Diametre du cercle, est vne ligne droite, menee par le centre du cercle, & finissant de part & d'autre à la circonference d'iceluy cercle, le diuise en deux egallement.

18. Demi cercle, est vne figure comprise du diametre, & moitié de la circonfetence.

Toutes ces definitions sont aisees; car le cercle, la circonference, son centre, son diametre, le demy cercle declarez en icelles definitions, sont toutes choses cognues, voire aux plus ignorans.

19. Section de cercle, est vne figure comprise d'une ligne droicte, & de partie de la circonference.

Ceste deffinition est repetee au troiesme liure, auquel lieu elle conuient mieux qu'en cestuy-cy.

20. Figure rectiligne, est celle qui est comprise de lignes droictes.
21. Figure de trois costez, est celle qui est comprise de trois lignes droictes.
22. Figure de quatre costez, est celle qui est comprise, de quatre lignes droites.
23. Figures multilateres ou de plusieurs costez, sont celles qui sont comprises de plus de quatre lignes droictes.

Le nombre des figures rectilignes est infiny: Les Geometres les nōment, tantost par le nombre de leurs costez, tantost par le nombre de leurs angles.

24. Or des figures de trois costez, celle se nomme, Triangle equilateral, qui a les trois costez egaux.
25. Triangle Ifofcele, qui a deux costez egaux seulement.
26. Scalene, qui a les trois costez inegaux.
27. Encores des figures de trois costez, celle se nomme triangle rectangle qui a vn angle droit:
28. Ambligone, qui a vn angle obtus.
29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.
30. Mais des figures de quatre costez, celle qui a les quatre costez egaux, & les quatre angles droicts, s'appelle quarré.
31. Quarré long, qui a les quatre angles droicts, mais non pas tous les costez egaux.

- 32. Rhombe, qui a les quatre costez egaux, mais non pas les quatre angles droicts.
- 33. Rhomboide, qui a les angles, & aussi les costez opposez egaux entr'eux, sans estre equilaterale ny rectangle.
- 34. Toute autre figure de quatre costez, est appellee trapeze.
- 35. Lignes droictes paralleles, sont celles qui estant sur vn mesme plan, & prolongees de part & d'autre ne se rencontrent iamais.

Icy finissent les definitions du premier liure d'Euclide: Mais d'autant qu'en ce mesme liure est souuent parle de parallelogramme, lequel Euclide n'a point desiny, nous adiouterons icy sa definition.

- 36. Parallelogramme, est vne figure quadrilaterale qui a les costez opposez parallels ou equidistans.

Telle figure est tousiours l'une de ces quatre : Quarré, Quarré long, Rhombe, Rhomboide.

PETITIONS OV DEMANDES.

- 1. D'un point donné, à vn autre point mener vne ligne droicte.
- 2. Continuer infiniment vne ligne droicte donnee & terminee.
- 3. Descrire vn cercle de quelque centre & interual que ce soit.

Euclide ne se sert en ces Elemēs cy que de 2. sortes de lignes simples, sçauoir est de la droicte, & de la circulaire; la descri-

prion desquelles estant fort facile, il demande qu'il luy soit permis de descrire ou de s'imaginer des lignes droictes de telle longueur qu'il voudra: Pareillement des cercles de tel diametre qu'il voudra, sans qu'il soit contrainct de demonstrier que cela est possible.

COMMUNES SENTENCES.

1. Les choses egales à vne mesme, sont egales entr'elles.
2. Si a choses egales, on adiouste choses egales, les toutz sont egaux.
3. Si de choses egales, on oste choses egales, les restes sont egaux.
4. Si a choses inegales, on adiouste choses egales, les toutz sont inegaux.
5. Si de choses inegales, on oste choses egales, les restes sont inegaux.
6. Les choses doubles d'une autre sont egales entre elles.
7. Les choses qui sont moitez d'une mesme ou de choses egales, sont egales entr'elles.

Est aussi manifeste que les choses triples d'une mesme, ou quadruple, ou quintuple, &c. sont aussi egales entr'elles. Pareillement que les choses qui sont tierces parties d'une mesme, ou quart, &c. sont aussi egales entr'elles.

- 8 Les choses qui conuiennent entr'elles, sont egales entr'elles.

C'est a dire, que deux grandeurs seront egales, si estant posees l'une sur l'autre, l'une n'excede l'autre, mais toutes deux ensemble s'adiustent entr'elles, comme deux lignes droictes, seront dictes estre egales, si l'une estant posee sur

l'autre, celle qui est posée dessus s'ajuste à toute l'autre, tellement qu'elle ne l'excede, ny ne soit excedée d'icelle. Ainsi aussi deux angles rectilignes seront égaux, quand le sommet de l'un, estant posé sur le sommet de l'autre, l'un n'excede l'autre, c'est à dire que les lignes de l'un, tombent sur celles de l'autre; car par ainsi les inclinations des lignes seront égales. Ainsi aussi deux superficies seront égales, quand l'une estant posée sur l'autre, elle ne l'excede, ny n'est excedée par icelle, mais s'ajustent totalement entr'elles. Or Donnott dit que conuenir, c'est auoir les extremités sur les extremités; ce qui n'est pas vray en toutes grandeurs; Car pour exemple vne ligne droite peut bien auoir ses extremités sur les extremités d'une ligne courbe, laquelle neantmoins ne luy sera égale. Ainsi aussi vne ligne courbe peut bien auoir ses extremités sur les extremités d'une autre ligne courbe, laquelle ne luy sera pas pourtāt égale. Or il est manifeste que de cest axiome on peut biē conuertir & prédre pour principe, *que les lignes droites égales conuiennent.* Pareillement, *Que les angles rectilignes égaux conuiennent.* Semblablement, *Que les superficies planes égales & semblables conuiennent.* On peut biē encore tirer quelques autres conuerses de cest axiome: mais de le vouloir conuertir vniuersellement (comme quelques-vns) c'est se moquer, veu que si on trouue vne ligne courbe égale à vne droite, elles ne conuiendront pas pourtant: & aussi qu'à tout angle rectiligne, il s'en peut bailler vn curuiline égal; lesquels neantmoins ne conuiendront iamais: voire mesme faire vn quarré égal à vn triangle, ou à quelconque autre figure rectiligne; lesquels pourtant ne peuuent iamais conuenir. Ce qu'a bien recogneu Donnott en cest endroit, & neantmoins il conuertit vniuersellement ce principe au scholie de la 4. p. 1. concluant ainsi: *Car c'est vne necessité geometrique que les choses égales conuiennent, & que celles qui conuiennent soient égales.*

9. Le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous les angles droicts sont égaux entre-eux.

De ce principe, nous pouuons conuertir & prendre pour maxime, que tout angle rectiligne égal à vn angle droict, est aussi droict.

11. Si vne ligne droicte tombant sur deux

deux autres lignes droictes ; faict les angles interieurs d'un mesme costé plus petits que deux droicts , icelles estant continuees à l'infini , se rencontreront du costé ou les angles sont plus petits que deux droicts.

12. Deux lignes droictes n'enferment pas un espace.



E L E M E N T

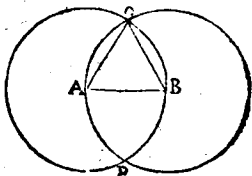
P R E M I E R.

PROBL. I. PROP. I.

Sur vne ligne droite donnee & terminee, des-
crire vn triangle equilateral.

SOIT la ligne droicte donnee AB; sur laquelle il faut faire
vn triangle equilateral.

Du centre A, & de l'intervalle de AB, soit descript le cer-
cle BCD: Item du centre B, &
de l'intervalle de la mesme AB,
soit descript vn autre cercle ACD
coupant le premier es poinçts
C & D, de l'un desquels, sçavoir
de C, soient menees les deux li-
gnes droictes CA & CB. Je dis
que le triangle ABC cõstruit sur
la ligne droicte donnee AB est equilateral.

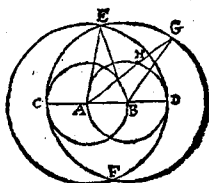


Car le costé AC est egal au costé AB par la 15. deff. d'au-
tant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circon-
ference: & par la mesme raison, le costé BA est egal au costé
BC. Donc par la 1. com. sent. les costez CA & CB seront
egaux, estant chacun egal à AB: & partant le triagle ABC des-
crit sur AB est equilateral; qui est ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

*Quelques Interpretes ont icy enseigné à descrire aussi sur une li-
gne droicte donnee vn triangle Isoscelle, & vn Scalene, ce que nous
ferons aussi en ceste maniere. Soit vne ligne droicte donnee AB, à
l'entour de laquelle des centres A & B, soient descripts deux cercles,
ainsi que dessus. En apres soit prolongee icelle AB, de part & d'au-
tre vers les circonferences infques en C & D: puis du centre A, &*

intervalle AD , soit descript le cercle DEF : Item du centre B , & intervalle BC , le cercle CEF , couppant le premier es points E & F , de l'un ou l'autre desquels, qui est de E , soient menex aux points A & B , les deux lignes AE , EB . Je dis que le triangle AEB , fait sur la ligne donnee



AB , est Isoscelle, qui est que les deux costez AE , EB , sont egaux entr'eux; & plus grands que AB . Car d'autant que par la 15. def. AE est egal à la ligne AD , & icelle AD est double de AB , d'autant que BA , DB sont egales entr'elles: aussi AE sera double de AB . De rechef parce que BE est egal à BC , & icelle BC est double de AB , aussi BE sera double d'icelle AB . Ven donc que l'un & l'autre costé AE , BE est double de la mesme AB , ils seront egaux entr'eux par la 6. com. sent. & partant plus grande que la ligne AB . Donc le triangle AEB est Isoscelle. Maintenant si du point A , on tire la ligne droite AG à la circonference EGF , qui ne soit la mesme que AE ou AD , couppant la circonference EHD en H , & de G on mene à B la ligne droite GB , sera constitué le triangle AGB sur la ligne AB , lequel ie dis estre scalene. Car par la 15. def. tant AH , AD que BG , BC sont egales. Mais AD , BC sont doubles de AB , d'icelle seront aussi doubles AH , BG , & partant plus grandes qu'icelle AB . Ven donc que AG est plus grande que AH , ou que BG , le triangle AGB sera scalene.

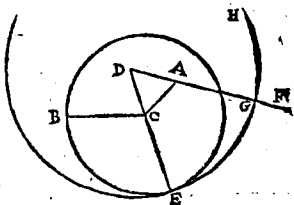
PROB. 2. PROP. II.

D'un point donné, mener vne ligne droite egalle à vne ligne droite donnee.

Soit le point donné A , & la ligne droite donnee BC , & il faut du point A , mener vne ligne droite egalle à icelle donnee BC .

Del'un ou l'autre extreme de la ligne donnee BC , qui est de C , comme centre, & de l'intervalle de CB , soit descript le cercle BE : puis du point donné A , au centre C , soit menee la ligne droite AC (sinon que le point A fut donné en la ligne BC , par la precedente prop. soit descript le triangle equilateral ADC ; & soit continué le costé DC , iusques à ce qu'il ren-

contre la circonference en E, mais le costé D A tant qu'on voudra en F. En apres du centre D, & de l'intervalle de la ligne droite DE soit descript le cercle EGH coupant la ligne DF. Je dis que la ligne A G qui est menee du point donné A, est egale à la ligne droite donnee BC.

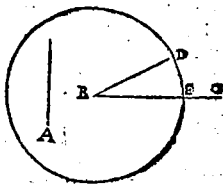


Car DG & DE sont egalles, d'autant qu'elles procedent de mesme centre vers vne mesme circonference, desquelles si on oste D A & D C qui sont egalles, estant D A C triangle equilateral, les restes CE & A G seront egalles par la 3. com. sent. Mais CB est egale a CE, parce qu'elle procede de mesme centre vers mesme circonference. Donc A G sera egale à CB, parce que les choses egalles à vne sont egalles entre elles. Nous auons donc du point donné A mené la ligne A G egale à la ligne droite donnee BC. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 3. PROP. III.

Deux lignes droictes inegales estants donnees, oster de la plus grande, vne ligne droite egale à la plus petite.

Soient les deux lignes inegales A & CB, desquelles BC est la plus grande: & d'icelle, & il faut oster vne ligne egale à A. A l'un ou l'autre des extremes de la plus grande ligne BC, sçauoir est au point B, soit posee par la precedente prop. la ligne BD egale à la moindre A: puis du centre B, & de l'intervalle BD soit descript vn cercle coupant BC en E. Je dis que la ligne BE est egale à A. Car d'autant que par la 15. des. les lignes BD, BE sont egales, & par la constructio BD est egale à A; par la 1. com. sent. BE sera egale à A. Nous auons donc osté de BC, la ligne BE egale à A, ainsi qu'il falloit faire.

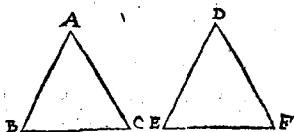


Cette construction a esté retenüe par tous les Interpretes d'Euclide, excepté Donnott qui l'a chägee: car à l'extremë de la moindre ligne, il en pose vne egale à la plus grande; quoy faisant il aduient que d'icelle plus grande ligne donnee, il n'en coupe pas vne egale à la moindre, comme est requis, ains seulement d'une egale à icelle.

THEOREME I. PROP. III.

Si deux triägles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien; & l'angle contenu d'iceux, egal à l'angle: la base sera fera egale à la base; & les autres angles, egaux aux autres angles chacun au sien; & le triangle egal au triangle.

Soient les deux triangles ABC & DEF, desquels le costé AB soit egal au costé DE, & AC à DF, & l'angle A egal à l'angle D: Je dis que la base BC sera egale à la base EF, & l'angle B egal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F, & le triangle au triangle.



Qu'il ne soit ainsi: si on entend le point D estre posé sur le point A, & que DE tombe sur AB, aussi DF tombera sur AC, autrement l'angle A ne seroit pas egal à l'angle D. Et d'autant que les costez AB & AC sont egaux aux costez DE & DF, chacun au sien, ils conuiendront par la 8. com. sent. conuertie, & partant les extremitez B & C, tomberont sur les extremitez E & F. Ainsi les deux bases BC & EF cōuendront, & seront egales par la mesme 8. com. sent. Et le triangle conuiendra avec le triangle, & l'angle B conuiendra avec l'angle E, & l'angle C avec l'angle F: partant egaux. Ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 2. PROP. V.

Les triangles Iſoſceles, ont les angles ſur la baſe egaux : & les coſtez egaux eſtans continuez, les angles extérieurs ſoubs la baſe, ſont egaux.

Soit le triangle Iſoſcele ABC. Je dis que les angles ABC, & ACB, ſur la baſe BC, ſont egaux.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soient prolongez AB & AC, coſtez egaux juſques en D & E : & ſoit fait AF egalle à AD par la 3. p. 1. & ſoient menées les lignes BF & CD. Les deux triangles ADC, & AFB, ayans l'angle A com-



mun, ont les deux coſtez AD & AC egaux aux deux coſtez AF & AB, chacun au ſien; & par la 4. p. 1. la baſe BF ſera egale à la baſe CD, & l'angle ABF egal à l'angle ACD, & l'angle D egal à l'angle F. Item les triangles DCB, & FBC, ayant l'angle D egal à l'angle F, & les deux coſtez DB, & DC egaux aux deux coſtez CF & FB. (car BF a eſté prouvé tantôt egal à DC; & AD AF eſtans egaux; & AB, AC auſſi egaux; les reſtes BD, & CF ſeront auſſi egaux) par la 4. p. 1. la baſe ſera egale à la baſe, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au ſien : ſçavoir l'angle BCD, ſera egal à l'angle CBF. Et qui des angles egaux ABF & ACE, oſte les angles egaux CBF; & BCD; les demeurans ABC, & ACB, ſeront egaux.

Pour la ſeconde partie. Que les coſtez egaux AB & AC eſtans continuez, les angles extérieurs ſoubs la baſe BC, ſont egaux, ſçavoir DBC à BCF, elle a eſté ſuffiſamment demonſtrée, lors qu'on a prouvé que les triangles DBC, & CFB, auoient leurs angles egaux, chaſcun au ſien.

S C H O L I E.

Ceſte propoſition eſt auſſi vraie es triangles equilateraux. Car les deux coſtez AB, AC du triangle ABC eſtans egaux entr'eux; on

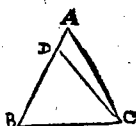
L'autre costé CB, est pareillement egal à iceux, comme il aduient au triangle equilateral; ou bien inegal, comme il arriue au triangle Iso-scelle; Il s'ensuit necessairement, que les angles de dessus la base BC, sont egaux entr'eux, & ceux de dessous la mesme base aussi egaux entr'eux, comme il apert par la demonstration cy dessus.

THEO. 3. PROP. VI.

Si vn triangle a deux angles egaux entr'eux;
les costez soustendans iceux angles seront
aussi egaux entr'eux.

Soit le triangle ABC, duquel les deux angles ABC, & ACB sur la base BC sont egaux. Je dis que les deux costez AB & AC sont aussi egaux.

Autrement soit AB plus grand que AC, s'il est possible: on en pourra donc retrancher vne partie egale à AC par la 3. p. 1. soit icelle BD egale à AC, & soit menée la ligne DC: ainsi les triangles DBC, & ACB, ont les deux costez BD, & BC egaux aux deux costez AC, & CB, & l'angle B egal à l'angle ACB, & par la 4. p. 1. ils seront egaux, ce qui est impossible: car l'un est partie de l'autre. Donc les costez AB, & AC n'estoient pas inegaux: ce qu'il falloit demonstrier.

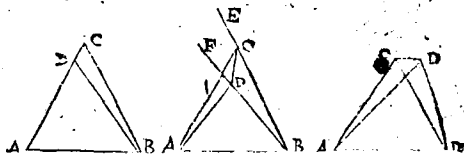


THEOR. 4. PROP. VII.

Si des extremités de quelque ligne droicte, on
meine deux autres lignes droictes, se
rencontrant en vn point; des mesmes ex-
tremités on n'en pourra mener deux au-
tres egales à icelles, chacune à la sienne, &
de mesme part, se rencontrant à vn autre
point.

Soit la

Soit la li-
gne AB,
des extre-
mittez de
laquelle
soient me-



nees les deux lignes droictes AC, & BC se rencontrant au point C. Je dis que des mesmes extremittez A & B, & de la mesme part que C, on ne peut mener deux autres lignes droictes egales a icelles AC, BC, chacune a la siene, qui se rencôtrant a un autre point que C; c'est a dire, que si de l'extremite A on mene la ligne AD egalé a AC, & de l'extremite B, la ligne BD egalé a BC, il ne peut estre que le point de rencontre D, soit autre que le point de rencontre C.

Car si faire se peut que le point de rencontre D tombe ailleurs qu'au point C, ou iceluy point D tombera sur l'une ou l'autre des lignes AC, BC; ou dans le triangle ACB; ou hors iceluy.

Premierement iceluy point de rencontre D, ne peut estre sur la ligne AC: car il faudroit que les deux lignes AD, & AC fussent égales entr'elles, sçavoir est la partie autout: ce qui est absurde; partant la rencontre D, ne se fera point sur AC; ny sur BC a cause de la mesme absurdité.

Soit donc iceluy point de rencontre D dans le triangle ABC: & apres auoir prolongé BC iusques en E, & BD iusques en F, soit menée CD. Puis que les deux lignes AC, & AD sont posées égales, le triangle ACD sera Isocele, & par la s. p. r. les deux angles ACD & ADC sur la base CD seront égaux. Mais l'angle ACD est moindre que l'angle DCE: (car il n'est que partie d'iceluy) donc l'angle ADC est aussi moindre que le mesme angle DCE; & par consequent l'angle CDF, qui n'est que partie d'iceluy ADC, sera beaucoup moindre que le mesme angle DCE. Derechef puis que les lignes AC, BD, sont posées égales, le triangle CDB doit estre Isocele; & partant les angles CDF & DCE sous la base DC seront égaux par la s. p. r. Mais il a esté démontré que l'angle CDF est beaucoup moindre que l'angle DCE: donc le mesme angle CDF est moindre que l'angle DCE, & aussi égal a iceluy: ce qui est absurde.

Soit donc finalement iceluy point de rencontre D, hors iceluy triangle ACB, comme en la 3. figure: apres auoir mené la ligne CD, il s'ensuira que les deux triangles CAD & CBD

seront Iſoſceles ; & partant qu'ils feront les angles ſur la baſe CD egaux : ſçavoir eſt $\angle ACD$ à $\angle ADC$ & $\angle BCD$ à $\angle BDC$. Mais iceluy $\angle BDC$ eſt plus grand que $\angle ADC$: donc auſſi $\angle BCD$ eſt plus grand que $\angle ACD$; c'eſt à dire la partie que le tout : ce qui eſt abſurde. Le point de rencontre D ne tombera donc pas hors le triangle ABC, ny dedans iceluy, ny ſur les lignes AC & BC : Il faut donc qu'iceluy point de rencontre D tombe au premier point de rencontre C : ce qu'il falloit demonſtrer.

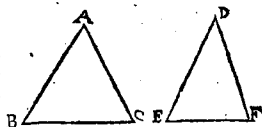
SCHOLIE.

Donnot a traduit ceste proposition ainſi. Si deux lignes droictes menees des extremittez d'une autre ligne droite ſe rencontrent en un point, & des meſmes extremittez on en meſme deux autres egales aux deux premieres, elles ſe rencontreront au meſme point, pourueu que chacune ſoit du coſté de ſon egale. Ce qui eſt fort eſloigné de l'intention d'Euclide : car il ne dit pas que les deux lignes ſe rencontreront (choſe qui eſt euidentement faulſe, veu qu'infinies lignes peuvent eſtre menees, cōme dit eſt, leſquelles ne ſe rencontreront pas.) Mais bien que ſi elles ſe rencontrent, ce ſera au meſme point que les premieres.

THEOR. 5. PROPOS. VIII.

Si deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chaſcun au ſien, & la baſe egale à la baſe, ils auront auſſi l'angle egal, compris d'iceux coſtez egaux.

Soient deux triangles ABC, DEF, deſquels le coſté AB eſt egal à DE ; AC à DF, & la baſe BC à la baſe EF. Je diſ que les angles A & D compris d'iceux coſtez egaux, ſont egaux.



Car puis que la baſe BC eſt egale à la baſe EF ; ſi on entend icelles eſtre poſées l'une ſur l'autre, elles conuiendront tombant le point E ſur le point B ; & F ſur C : & par la 7. p. 1. les deux lignes ED & FD, qui ſont egales à BA & CA, ſe ren-

contreront au point A, & conuiendront avec les lignes BA & CA: partant conuiendront aussi les angles A & D cōtenus d'icelles lignes; & par cōséquent setont egaux par la 8. com. sent. ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E.

Puis que la base EF conuient avec la base BC & les costez DE, DF conuiennent aussi avec les costez AB, AC. Il s'ensuit qu'on nom seulement l'angle A est égal à l'angle D; mais qu'auſſi l'angle E est égal à l'angle B, & l'angle F, égal à l'angle C, & tout le triangle égal à tout le triangle.

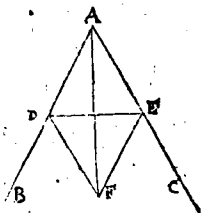
PROBL. 4. PROPOS. IX.

Couper en deux également vn angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné BAC, lequel il faut couper en deux également; c'est à dire en deux angles egaux entr'eux.

Soit de AB, & AC retranché deux parties egales AD & AE: & après auoir mené la ligne DE, sur icelle, soit décrit le triângle equilateral DEF par la 1. p. 1. & soit menée la ligne AF. Je dis que icelle ligne coupe l'angle BAC en deux également.

Car les deux lignes AD & AE du triângle DAE estans egales aux deux lignes AE & AF du triangle EAF, & la base DE égale à la base EF (estant DFE triangle equilateral) par la 8. p. 1. l'angle DAE sera égal à l'angle EAF: & partant l'angle BAC est coupé en deux également. Ce qu'il falloit faire.



S C H O L I E.

Nous auons enseigné la pratique de ceste propo. en nostre Geometrie pratique Prob. 5. Or il apert parce que dessus qu'on peut aussi couper vn angle rectiligne en 4. parties egales, en 8. en 16. en 32. & ainsi cōsécutiuement en pcedant tousiours par augmentation double.

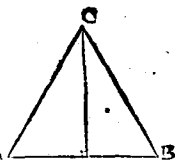
Car après qu'un angle rectiligne est coupé en deux également, si on diuise derechef chaque partie en deux également, on aura 4. angles égaux. Que si on coupe derechef chacun d'iceux en deux également, nous aurons 8. angles égaux, & ainsi conséquemment.

PROBL. 5. PROP. X.

Couper en deux également vne ligne droite donnée & terminée.

Soit la ligne droite donnée & terminée AB : laquelle il faut couper en deux également.

Soit sur icelle ligne construire le triangle équilatéral ACB par la 1. p. 1. & par la précédente prop. soit l'angle C coupé en deux également par la ligne CD. Je dis que CD coupe AB en deux également en D.



Car puis que les angles du point C sont égaux, & le triangle ACB est équilatéral, les deux triangles ACD, & BCD, ont deux costez égaux à deux costez, & un angle égal à un angle; & partant par la 4. p. 1. la base AD sera égale à la base DB. Donc AB est coupée en deux également en D. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

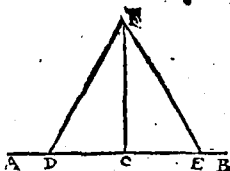
Nous auons enseigné la pratique de ceste propo. en nostre Geometrie pratique Prob. 1. Or il apert par ce que dessus qu'on peut aussi couper vne ligne droite finie en quatre parties égales, en 8. en 16. en 32. &c. ainsi que nous auons dit en la précédente prop. de la diuision de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diuiser vne ligne droite terminée en tant de parties égales qu'on voudra, nous l'auons enseigné en nostre Geometrie pratique Prob. 7. & ce tant Geometriquement, que mechaniquement avec le compas de proportion.

PROBL. 6. PROP. XI.

Sur vne ligne droite donnée, & d'un point en icelle, mener vne ligne perpendiculaire.

Soit la ligne droite donnée AB, & le point en icelle C : d'iceluy point il faut mener vne ligne perpendiculaire à icelle AB.

Soient du point C prinſes les deux lignes egalles CD & CE par la 3. p. 1. & ſur DE ſoit fait le triangle equilateral DFE, & de C à F ſoit menee la ligne CF. Je diſ qu'icelle CF eſt la ligne perpendiculaire demandee.



Car les triangles DFC & CFE ayans deux coſtez egaux à deux coſtez, chaſcun au ſien, ſçauoir DC à CE par la conſtruction, & CF commun, & la baſe DF egale à la baſe EF, à cauſe que le triangle DFE eſt equilateral; par la 8. p. 1. les angles au point C, contenus de coſtez egaux, ſeront egaux: & partant par la 10. ils ſont diſts droits, & la ligne CF perpendiculaire à AB.

SCHOLIE.

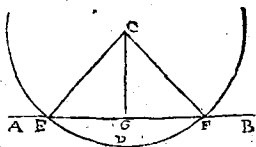
La pratique, tant de ceſte propo. que de la ſuiuante eſt enſeignée en noſtre Geometrie pratique, Prob. 2. & 3. ou l'apprenty trouuera ſoulagement à quelque doute qui luy peuuent arriner en la pratique de ceſte propo.

PROBL. 7. PROP. XII.

Abaiſſer vne ligne droite perpendiculaire ſur vne ligne droite infinie, & d'un point hors icelle.

Soit la ligne droite donnee & interminee AB, & le point hors icelle C, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire ſur AB.

Soit pris au delà de la ligne AB quelconque point D; puis du centre C, & interualle CD, ſoit deſcrit le cercle EDF, ſou-



pant la ligne AB es poinçts E & F ; puis par la 10. p. 1. soit coupee EF en deux également au poinçt G , & soit menee la ligne CG, laquelle ie dis estre perpendiculaire à AB.

Car estans tirees les lignes droictes CE , CF ; les deux costez EG & GC du triangle EGC seront egaux aux deux costez FG, & GC du triangle FGC, vn chacun au sien , & la base CE est egale à la base CF, estans icelles tirees du centre C vers la circonference , & par la 8. p. 1. les angles du poinçt G seront egaux ; & partant par la 10. d. ils seront droicts, & la ligne CG perpendiculaire à AB : ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

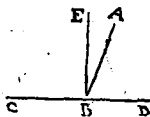
Au lieu de prendre le poinçt D, de l'autre costé de la ligne AB, Dounot dit qu'on le prenne à l'aduenture dans icelle AB, & que descriuant un cercle du centre C & interuale CD, il coupera la ligne AB: ce qui n'est pas vniuersellement vray, car il est manifeste que si le poinçt D estoit pris d'auanture en G, le cercle ne couperoit AB en deux endroits, comme il est necessaire, ains la toucheroit seulement: le poinçt D ne doit donc estre pris à l'auanture dans la ligne AB, comme veut Dounot.

THEOR. 6. PROPOS. XIII.

Quand vne ligne droite tombant sur vne autre ligne droite fait deux angles, ou iceux seront droits, ou egaux à deux droits.

Soit la ligne droite AB, laquelle tombant sur vne autre ligne droite CD, faict les deux angles CBA, & DBA. Ie dis que iceux angles sont droicts, ou egaux à deux droicts.

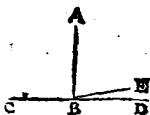
Car ou icelle ligne AB. est perpendiculaire à CD; ou elle ne l'est pas. Si elle est perpendiculaire, les angles sont droicts: Si elle ne l'est pas, soit leuee la perpendiculaire BE par le 11. p. 1. & les deux angles CBE & DBE seront droicts: mais les deux angles CBA & DBA ensemble occupent autant d'espace qu'iceux CBE, DBE, & conuiennent avec eux: Donc par la 8. com. sent. CBA & DBA seront egaux à deux droicts.



THEOR. 7. PROPOS. XIII.

Si à l'extrémité d'une ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites de part & d'autre d'icelle faisant deux angles égaux à deux droits, icelles lignes se rencontreront directement.

Soit la ligne AB, à l'extrémité de laquelle B se rencontrent deux autres lignes droites CB, & DB, faisant les deux angles ABC & ABD égaux à deux droits. Je dis que CB, & DB se rencontrent directement, c'est à dire que CBD est une ligne droite.



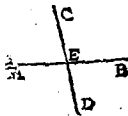
Autrement si CBD n'est ligne droite, soit continuée CB directement, tant qu'il sera de besoin : ce qui sera adiousté à CB directement, ou bien tombera au dessous de BD, ou au dessus : soit au dessus, & soit CBE, ligne droite ; les deux angles ABC, & ABE, seront donc égaux à deux droits par la 13. p. 1. & les deux angles ABC & ABD sont aussi égaux à deux droits, & par la 1. com. sent. ils seront égaux aux deux angles ABC, & ABE, c'est à sçavoir que ABD & ABE seront égaux, le tout à la partie, ce qui est impossible : donc CB, & DB se rencontrent directement.

THEOR. 8. PROPOS. XV.

Si deux lignes droites se coupent l'une l'autre, elles feront les angles oppozés au sommet égaux.

Soient les deux lignes AB, & CD, se coupant l'une l'autre au point E. Je dis que les angles oppozés au sommet AEC, & DEB sont égaux.

Car d'autant que sur AB tombe la ligne CE, les angles AEC, & BEC, sont égaux à



deux droicts par la 13. p. 1. Item pour la mesme raison CEB & DEB seront egaux à deux droicts : partant les deux AEC & CEB, sont egaux aux deux CEB & DEB. Que si on oste le commun CEB, le demeurant AEC sera egal au demeurant DEB. Le mesme se peut dire des deux AED & CEB.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ceste demonstration, que deux lignes droictes s'en-tre-couppant, font au point de leur section quatre angles egaux à quatre angles droicts. Est aussi manifeste qu'estans constituez tant d'angles qu'on voudra alentour d'un seul & mesme point, qu'ils seront seulement egaux à quatre angles droicts : car si de E on mène tant d'autres lignes qu'on voudra, elles diuiseront seulement les quatre angles constitués au point E, en plusieurs parties : toutes lesquelles prises ensemble seront egales aux quatre angles d'iceluy point, c'est à dire à quatre droicts.

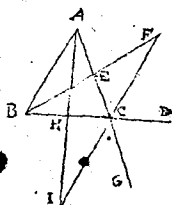
THEOR. 9. PROP. XVI.

Vn costé d'un triangle estant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que l'un ou l'autre des opposez interieurement.

Soit le triangle ABC, duquel le costé BC soit continué iusques en D. Je dis que l'angle extérieur ACD est plus grand que l'opposé interieur BAC ; ou que ABC autre opposé interieur.

Qu'ainsi ne soit. Apres auoir couppé AC en deux egalement en E, soit menée la ligne BE continuee iusques en F, & soient faictes BE & EF egales, & soit menée FC. Les deux triangles AEB &

CEF auront les deux costez AE & EB egaux aux deux costez CE & EF, par la construction, & par la precedente prop. l'angle AEB. est egal à l'angle CEF : donc par la 4. p. 1. les bases AB, & FC seront egales, & les autres angles egaux, chascun au sien : & partant l'angle BAE, sera egal à l'angle ECF, qui n'est que partie de l'angle ACD, lequel pour ceste raison



fera plus grand que l'opposé BAC. Que si le costé AC est prolongé en G, & BC coupé en deux également en H, & on tire la ligne AHI, tellement que HI soit égalé à AH, & soit menée CI. On démontrera par mesme raison que dessus, que l'angle externe BCG est plus grand que l'interne & opposé ABC. Mais par la prop. precedente a iceluy ACG est egal l'externe ACD: donc iceluy ACD est aussi grand que l'interne & ^{plus} opposé ABC.

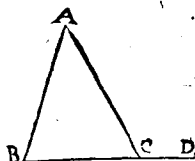
THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droits, de quelle façon qu'ils soient pris.

Soit le triangle ABC. Je dis que les deux angles B, & ACB sont plus petits que deux droicts.

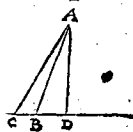
Car apres auoir continué le costé BC iusques en D; Il est euident par la 16. p. 1. que l'angle extérieur ACD, est plus grand que l'opposé intérieur B.

Mais les deux ACD & BCA sont egaux à deux droicts, par la 16. p. 1. Partant ABC & BCA sont plus petits que deux droicts. On démontrera pareillement que les angles A & ACB: Item les angles A & B, en prolongeant vn autre costé, sont moindres que deux droicts.



C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste que d'un mesme poinct on ne peut mener plus d'une ligne perpendiculaire sur vne ligne droite. Car si faire se peut, soient menees de A sur la ligne droite BD, deux perpendicul. AD, AB. Donc au triangle ABD, les deux angles internes ABD, ADB seroient egaux à deux droicts, puis qu'ils sont droicts. Ce qui est impossible: Car il a esté démontré cy dessus que deux angles d'un triangle sont moindres que deux angles droicts,



Il s'ensuit aussi de ceste prop. qu'en tout triangle, duquel un angle est droit, ou obtus, que les autres sont aigus. Car puis qu'il a esté démontré que deux angles quels qu'ils soient sont moindres que deux droicts, il est nécessaire que s'il y en a un droict, ou obtus, celuy qu'on voudra des deux autres soit aigu : car autrement en un triangle seroient deux angles droicts, ou plus grands que deux droicts.

S'ensuit encore de ceste prop. que si une ligne droicte AB, fait avec une autre ligne droicte CD, angles inegaux, sçavoir est ABD aigu, & ABC obtus, & de quelconque point d'icelle AB, on tire une perpendiculaire sur CD, comme AD : icelle perpendiculaire AD tombera du costé de l'angle aigu ABD. Car qu'elle tombe, s'il est possible du costé de l'angle obtus ABC. Donc au triangle ABC, les deux angles ABC, ACB obtus & droict, sont plus grands que deux droicts ; mais aussi moindres que deux droicts par ceste prop. ce qui est absurde. La perpendiculaire tirée de A ne tombera donc pas du costé de l'angle obtus : & partant tombera du costé de l'angle aigu.

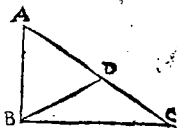
Est encore manifeste par ceste prop. que tous les angles d'un triangle equilateral, & les deux angles de dessus la base d'un triangle Isoscele, sont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils soient d'un triangle equilateral, & les deux de dessus la base d'un Isoscele sont egaux entr'eux par la 5. p. 1. & tant ces deux cy ensemble, que ces deux là, sont moindres que deux droicts par ceste prop. chacun d'eux sera moindre qu'un droict, c'est à dire aigu : car s'il estoit droit ou obtus, tous les deux ensemble seroient, ou egaux à deux droicts, ou plus grands.

THEOR. II. PROP. XVIII.

De tout triangle le plus grand costé soustient le plus grand angle.

Soit le triangle donné ABC, duquel le costé AC est plus grand que le costé AB. Je dis que l'angle ABC est plus grand que l'angle ACB.

Qu'il ne soit ainsi. Puis que AC est plus grand que AB, soit d'iceluy retranché AD egal à AB : & soit mené BD. Le triangle ABD est Isoscele, & par la 5. p. 1. les deux angles ABD & ADB sur la base BD seront egaux. Or l'angle extérieur ADB est plus grand que l'opposé intérieur C, par la 16. p. 1. Mais ABC étant plus grand



que ABD, il sera aussi plus grand que son égal ADB: & à plus forte raison ABC sera plus grand que C. Par même raison si on pose le côté AC plus grand que le côté BC; on démontrera l'angle ABC être plus grand que l'angle BAC; sçavoir est si de CA on coupe une ligne égale à CB, &c. Parquoy le plus grand côté de tout triangle, soutient le plus grand angle: ce qu'il falloit démontrer.

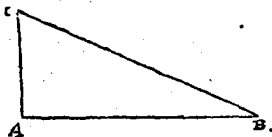
C O R O L L A I R E .

Il est donc manifeste par cette démonstration que tous les trois angles d'un triangle scalene sont inégaux.

THEOR. 12. PROPOS. XIX.

En tout triangle le plus grand angle est soutenu du plus grand côté.

Soit le triangle ABC duquel l'angle A est plus grand que l'angle C. Je dis que le côté BC qui soutient le plus grand angle A, est plus grand que le côté AB; qui soutient un moindre angle C.



Autrement il sera égal, ou plus petit. Il ne peut être égal; d'autant que le triangle seroit isocèle, & par la 5. p. 1. les deux angles A & C seroient égaux contre l'hypothèse. Il ne peut aussi être plus petit: d'aurât que par la 18. p. 1. l'angle A seroit plus petit que l'angle C, qui est aussi contre l'hypothèse. Il sera donc plus grand. Par même raison on prouvera le côté BC être plus grand que le côté AC, si on pose l'angle A être plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grand angle est soutenu du plus grand côté: ce qu'il falloit démontrer.

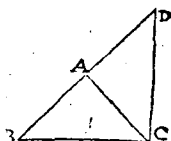
THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle deux costez, de quelle façon

qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisieme.

Soit le triangle ABC . Je dis que deux costez d'iceluy, lesquels on voudra, sçavoir est AB , & AC sont plus grâds ensemble que le troisieme BC .

Qu'il ne soit ainsi; apres auoir prolongé BA , iusques en D , & fait AD egal à AC , soit menee la ligne DC . Le triangle $DA C$ sera Isoscelle, & par la 5. p. 1. les deux angles ADC & ACD sur la base DC , serōt egaux. Mais DCB est plus grand que DCA : aussi sera il plus grand que son egal ADC ; & partāt par la 19. p. 1. BD sera plus grād costé que BC . Mais BD est egal aux deux costez AC & BA , dōc Iceux AC & BA seront plus grands que BC . On demonstrea en la mesme maniere que deux autres costez sont plus grâds que l'autre. Parquoy deux costez d'un triangle pris en quelque sorte que ce soit, sont plus grands que l'autre: ce qu'il falloit demoustrer.

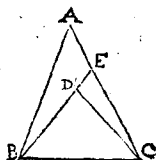


THEOR. 14. PROP. XXI.

Si des extremittez d'un costé dequelque triangle, on mene deux lignes droites se rencontrans au dedans d'iceluy; icelles seront plus petites que les deux autres costez du triangle, mais elles feront vn plus grand angle.

Soit le triangle ABC , & des extremittez du costé BC , soient menees interieuremēt deux lignes BD , CD se rencontrans au point D . Je dis qu'icelles lignes sont plus petites que BA , & CA : Mais que l'angle D est plus grand que l'angle A .

Qu'ainsi ne soit: soit continuée BD iusques au point E . Donc par la 20. p. 1. les



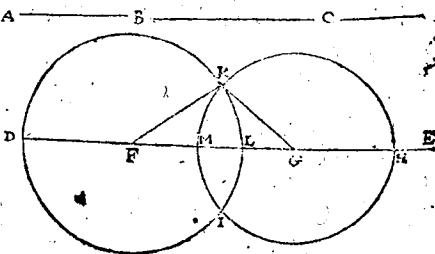
deux costez BA, & AE du triangle BAE, seront plus grands que le troisieme BE. Que si à BA, & AE, plus grands que BE, on adiouste chose commune EC, les tous CE, EB seront tousiours plus petits que les tous CE, EA, AB; c'est à dire CA AB. Pareillement les deux costez CE & ED du triangle CED sont plus grands que le troisieme CD: ausquels si on adiouste chose egale, sçauoir DB, les tous CE, ED, DB, ou CE, EB seront tousiours plus grands que les tous CD & DB. Mais il a esté demonstté que CA, AB sont plus grands que CE, EB: donc CA, AB seront beaucoup plus grands que CD, BD. Ce qui estoit proposé en la premiere partie.

Pour la seconde partie, sçauoir que l'angle D est plus grand que l'angle A. D'autant qu'il est exterior au triangle CED, il sera plus grand que son opposé interieurement CED par la 16. p. 1. Mais pour la mesme raison, iceluy angle CED est aussi plus grand que son opposé interieurement A: donc à plus forte raison D sera plus grand que A.

PROBL. 8. PROP. XXII.

Faire vn triangle de trois lignes droites, egales à trois autres donnees: mais il faut que deux d'icelles de qu'elle façon qu'elles soient prises, soient plus grandes que l'autre: D'autant que de tout triangle, les deux costez de quelque façon qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre.

Soient les trois lignes donnees A, B & C, desquelles deux de quelle façon qu'elles soient prises sont plus grandes que



la troisieme. Il faut faire vn triangle d'icelles ou de trois autres egales à icelles.

Soit prise vne ligne droite, tant grande qu'il sera de besoin comme DE, de laquelle soit retranchee DF, egale à A, & du reste, FG egale à B, & GH egale à C: & soit descript vn cercle du centre F, & interval FD. Item vn autre cercle du centre G, & interval GH, coupant le premier cercle au point K duquel soient menees les deux lignes KF, KG. Je dis que les costez du triangle FKG, sont egaux aux trois lignes donnees A, B, C.

Car FD, FK estans egales par la diff. du cercle: item GK & GH. Il est evident que les trois costez du triangle FKG, sont egaux aux trois lignes FD, FG, GH, lesquelles estans egales aux donnees, aussi les costez du triangle, seront egaux aux lignes donnees.

S C H O L I E.

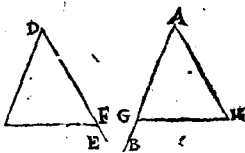
La pratique tant de ce prob. que du suivant est enseignee en nostre Geometrie pratique Prob. 11. & 4.

PROBL. 9. PROPOS. XXII.

Sur vne ligne droite donnee, & sur vn point donne en icelle, faire vn angle rectiligne egal à vn angle rectiligne donne.

Soit la ligne donnee AB: & le point en icelle A, sur lequel il faut faire vn angle rectiligne egal à l'angle rectiligne donne CDE.

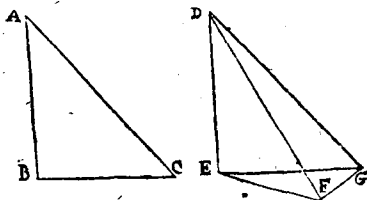
Ayant pris les lignes CD, DF & quelques points C & F, soit menee la ligne CF, & sur AB, soit basti par la 22. p. 1. le triangle AGH, ayant les trois costez egaux aux trois costez du triangle CDF, sçavoir est les deux costez GA, HA, aux deux costez CD, FD, & la base GH à la base CF. Il est evident par la 8. p. 1. que l'angle A sera egal à l'angle D. donne.



THEOR. 15. PROPOS. XXIII.

Si deux triâgles ont deux costez egaux à deux costez, chascun au sien, & l'angle contenu d'iceux costez plus grand que l'angle, ils auront la base plus grande que la base.

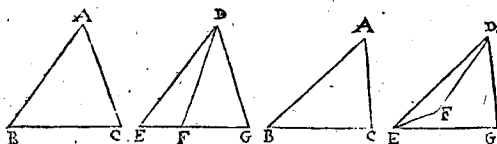
Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les deux co-



stez AB, AC, sont egaux aux deux costez DE, DF, chacun au sien; mais l'angle A est plus grand que l'angle EDF. Je dis que la base BC est plus grande que la base EF.

Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne DE, & au point D, soit fait par la precedente prop. l'angle EDG egal à l'angle A; (& la ligne droite DG tombera hors le triangle DEF, puis que l'angle EDF a esté posé moindre que l'angle A) & soit posée DG, egale à DF, c'est à dire à AC: Soit tirée puis apres la ligne EG, laquelle tombera, ou au dessus de la ligne EF; où sur icelle; ou au dessous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au dessus de EF, & soit tirée la ligne FG. D'autant que les costez AB, AC, sont egaux aux costez DE, DG, vn chacun au sien, & l'angle A egal à l'angle EDG, par la construction: la base BC sera egale à la base EG, par la 4. p. 1. Et puis que les deux costez DF, DG, sont egaux entr'eux: les angles DFG, DGF seront aussi egaux entr'eux par la 5. p. 1. Mais l'angle DGF est plus grand que l'angle EGF: d'oc aussi l'angle DFG sera plus grand que le mesme angle EGF: parquoy tout l'angle EFG sera beaucoup plus grand que le mesme angle EGF. Donc au triangle EFG, le costé EG sera plus grand que le costé EF, par la 19. p. 1. Mais il a esté démontré que EG est egale à BC: donc BC sera aussi plus grande que EF. ce qui estoit proposé.

Maintenant que EG tombe sur icelle EF: d'autant que cō-



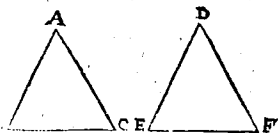
me dessus la base EG, sera egale à la base BC par la 4. p. 1. EG est plus grande que EF par la 9. com. sent. aussi BC f plus grande que EF: ce qui estoit proposé.

En troisieme lieu, que EG tombe au dessous de EF. Il est evident que les deux lignes interieures DF, EF sont plus petites que DG, EG, par la 21. p. 1. Mais par la construction DG est egale à DF: donc EG est plus grande que EF par la 5. com. sent. Mais comme dessus par la 4. p. 1. EG est egale à BC: donc aussi icelle BC sera plus grande que EF: ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triāgles ont deux costez egaux à deux costez, chascun au sien, & la base plus grande que la base; ils auront aussi l'angle contenu d'iceux costez egaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les deux costez AB & AC sont egaux aux deux DE & DF chacun au sien, Mais la base BC est plus grande que la base EF. Je dis que l'angle A est plus grand que l'angle D



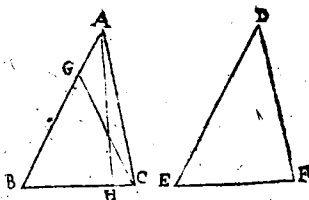
Autrement il sera egal ou plus petit. Mais il ne peut estre egal: d'autant que par la 4. p. 1. les bases BC & EF seroient egales contre l'hypotese. Pareillement il ne peut estre plus petit; d'autant que par la 24. p. 1. la base BC seroit plus petite que la base EF: donc il sera plus grand.

THEO.

THEO. 17. PROP. XXVI.

Si deux triāgles ont deux angles egaux à deux angles, chascun au sien, & vn costé egal à vn costé, sçauoir est, ou celuy aux extremitez duquel sont les angles egaux ; ou bien celuy qui soustiēt l'vn d'iceux angles egaux ; ils auront aussi les autres costez egaux aux autres costez, chacun au sien ; & l'autre angle egal à l'autre angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les angles B, & ACB sōt egaux aux deux E, & F chascun au sien, & soit premierement le costé BC, aux extremitez duquel sont les angles B, & ACB, egal au costé



EF, aux extremitez duquel sont les angles E & F. Je dis que les deux autres costez AB, AC, sont egaux aux deux autres costez DE, DF, chascun au sien, sçauoir est AB à DE & AC à DF. Et l'autre angle BAC egal à l'autre angle D.

Car si AB n'est egal à DE, soit AB plus grand, duquel soit retrāché BG egal à DE: puis soit tirée la ligne droicte CG. Donc puis que les costez BC, BG sont egaux aux costez EF, DE, chascun au sien, & l'angle B egal à l'angle E, par la 4. p. 1. la base CG sera egal à la base FD, & les autres angles egaux aux autres angles chacun au sien: c'est à sçauoir que l'angle BCG sera egal à l'angle F, auquel est aussi egal l'angle ACB par l'hypothese. Partant les deux angles ACB & GCB seroient egaux, la partie au tout: ce qui est absurde. Dōc le costé, AB n'estoit pas inegal au costé DE, mais egal. Parquoy ven que les costez AB, BC sont egaux aux costez DE, EF, chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle E ; la base AC sera egal à la base DF, & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D par la 4.

p. 1. ce qui estoit proposé.

Soient maintenant égaux deux autres costez, sçavoir est AB à DE soustendans angles égaux ACB, & F. Je dis derechef que les deux autres costez AC, BC sont égaux aux deux autres costez DF, EF, chacun au sien, c'est à dire AC à DF, & BC à EF; & l'autre angle BAC égal à l'autre angle D. Car si le costé BC n'est égal au costé EF, soit le plus grand BC, duquel soit couppe BH égal à EF, puis tiré la ligne AH. Donc puis que les costez AB, BH sont égaux aux costez DE, EF vn chacun au sien, & l'angle B est égal à l'angle E par l'hypothese, par la 4. p. 1. la base sera égale à la base, & les autres angles égaux aux autres angles, c'est à sçavoir, que l'angle AHB sera égal à l'angle F. Mais par l'hypothese l'angle ACB est aussi égal à l'angle F. Donc l'angle AHB sera aussi égal à l'angle ACB, l'exterieur à son opposé interieur: ce qui est absurde; car il est plus grand par la 16. p. 1. Le costé BC n'estoit donc pas plus grand que le costé EF, ains égal. Parquoy les deux costez AB BC sont égaux aux deux costez DE, EF chacun au sien, & par la 4. p. 1. l'angle B est égal à l'angle E, les bases AC, DF, seront égales, & les autres angles BAC & D aussi égaux.

C O R O L L A I R E.

Il est manifeste par la demonstration de ceste proposition, que le triangle est aussi égal au triangle.

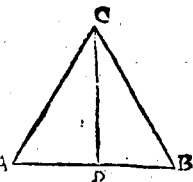
S C H O L I E.

Nous demonstrerons icy deux theoremes assez utiles & necessaires en Geometrie: le premier est tel.

En vn triangle equilateral, ou Isoscele, estant menee vne ligne droicte del'angle contenu des deux costez égaux, laquelle diuise en deux également, ou l'angle, ou la base; elle sera perpendiculaire à la base: & si elle coupe l'angle en deux également, elle coupera aussi la base en deux également: Mais si elle coupe en deux également la base, elle coupera pareillement l'angle en deux également. Et au contraire estant tiree vne ligne droicte perpendiculaire à la base, elle diuise en deux également, tant la base que l'angle.

Au triangle ABC soient deux costez égaux AC, BC, & la ligne droicte CD diuise premierement l'angle C, en deux également. Je dis

qu'icelle ligne CD est perpendiculaire à la base AB , & la diuise également. Car puis que les deux costez AC, CD , sont egaux aux deux costez BC, CD , & les angles qu'ils contiennent aussi egaux, par la 4. p. 1. les bases AD, BD seront aussi egales, & les angles au point D egaux, & partant droicts.



Que si la ligne droite CD diuise en deux également la ligne AB : ie dis que la ligne droite CD est perpendiculaire à la ligne AB , & que l'angle C est couppe en deux également. Car puis que les deux costez AD, DC , sont egaux aux deux costez BD, DC , & la base AC egale à la base BC , par la 8. p. 1. les angles du point D seront egaux, & partant droicts, & la ligne CD perpendic. & par le corol. de la 8. p. 1. les angles qui sont en C seront aussi egaux.

Maintenant soit la ligne droite CD perpendic. à AB : ie dis qu'elle coupe aussi la base BC , & l'angle C , en deux également. Car par la 5. p. 1. les angles A & B seront egaux: parquoy puis que les deux angles A & D du triangle ACD , sont egaux aux deux angles B & D , du triangle BCD , vn chacun au sien, & le costé CD opposé aux angles egaux A & B commun, par la 26. p. 1. les autres costez AD, BD , seront aussi egaux, & les autres angles à C pareillement egaux. Ce qu'il falloit demonstrier.

Le second Theoreme est tel.

Le triangle auquel vne ligne droite tiree de l'un des angles perpendiculaire à la base, diuise ou la base, ou l'angle en deux également, a les deux costez comprenant iceluy angle egaux: Et si la base est diuisee en deux également, l'angle sera aussi diuise en deux également: Mais si l'angle est diuise en deux également: aussi sera la base diuisee en deux également.

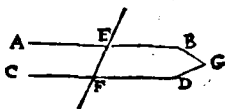
Au mesme triangle ABC , soit CD perpendiculaire à la base AB , & la diuise en deux également. Ie dis que les costez AC & BC sont egaux, & les angles à C aussi egaux. Car puis que les deux costez AD, DC , sont egaux aux deux costez BD, DC , & les angles qu'ils comprennent aussi egaux, sçavoir droicts, par la 4. p. 1. les bases AC, BC , & les angles à C seront pareillement egaux.

Maintenant que la perpendiculaire CD coupe en deux également l'angle C : ie dis que les costez AC, BC ; & les lignes AD, BD sont egales: Car puis que les deux angles D, C du triangle ACD , sont egaux aux deux angles D, C du triangle BCD , & le costé CD est commun, par la 26. p. 1. les deux costez AC, BC , & les costez AD, BD , seront egaux, ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 18. PROP. XXVII.

Si vne ligne droiçte tombant sur deux lignes droiçtes faict les angles opposez alternativement egaux, icelles lignes seront parallèles.

Soient deux lignes droiçtes AB & CD, sur lesquelles tombant la ligne droiçte EF faict les angles BEF, & EFC alternativement egaux. Je dis que AB & CD sont parallèles.

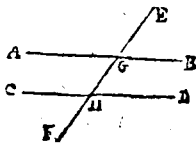


Car si elles ne sont parallèles, estans continues, elles se rencontrent. Que si elles se rencontroient comme au point G, elles feroient vn triagle avec le costé EF, & l'angle extérieur CFE seroit plus grand que l'opposé intérieur FEB par la 16. p.1. ce qui est contre l'hypothese. Donc les deux lignes AB, & CD ne se rencontreront iamais; & par la dernière def. icelles seront parallèles.

THEO. 19. PROP. XXVIII.

Si vne ligne droiçte tombant sur deux lignes droiçtes, faict l'angle extérieur egal à son opposé intérieur du mesme costé; ou bien les deux intérieurs de mesme costé egaux à deux droiçts; icelles lignes seront parallèles.

Soient deux lignes AB & CD, sur lesquelles tombant vne autre ligne EF, elle faict l'angle extérieur EGA egal à GHC son opposé intérieur de mesme costé. Je dis que AB & CD sont parallèles.



Car puis que l'angle GHC est posé

egal à l'angle EGA, auquel est aussi egal l'angle BGH par la 15. p. 1. les angles alternes BGH, GHC seront egaux par la 1. com. sent. partant les lignes AB, CD seront paralleles par la prop. precedente.

Pour la seconde partie. Je dis que si les deux angles interieurs de mesme costé AGH, & CHG sont egaux à deux droicts, que aussi AB & CD seront paralleles. Car par la 13. p. 1. les deux angles GHC & GHD sont egaux à deux droicts; partant aussi egaux aux deux AGH & GHC. Que si d'iceux angles egaux on oste le commun GHC, les demeurans AGH & GHD se trouueront alternatiuement egaux, & par la 27. p. 1. AB & CD seront paralleles.

THEO. 20. PROP. XXIX.

Si vne ligne droicte tombe sur deux lignes droictes paralleles, elle fera les angles opposez alternatiuement egaux; & l'exterieur egal à son oppose interieur du mesme costé: & les deux interieurs de mesme costé egaux à deux droicts.

Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, (en la figure de la precedente proposition) sur lesquelles tombe la ligne droicte EF. Je dis en premier lieu que les angles AGH & GHD opposez alternatiuement sont egaux. Autremēt s'ils ne sont egaux, l'un sera plus grand ou plus petit. Soit donc AGH plus petit s'il est possible, que GHD: & si à iceux angles inegaux on a adiousté chose commune, sçauoir l'angle GHC, les deux AGH & GHC serōt plus petits que les deux GHC & GHD, lesquels par la 13. p. 1. estans egaux à deux droicts, AGH & GHC seront plus petits que deux droicts, & par la penult. comm. sent. les deux lignes AB & CD ne sōnt point paralleles: ce qui est contre nostre hypothese. Donc il falloit que l'angle AGH fust egal à l'angle GHD son alterne oppose.

Pour la seconde partie. Je dis que l'angle exterieur EGB est egal à son oppose interieur de mesme costé GHD: ce qui est manifeste par ce qui a esté demonsté cy dessus, sçauoir que

les angles AGH & GHD estoient egaux, estant aussi EGB egal à AGH par la 15. p. 1. & par la 1. com. sentence. EGB & GHD seront egaux : estans tous deux egaux au mesme AGB.

Pour la troisieme partie : ie dis que les deux interieurs de mesme costé AGH & GHC sont egaux à deux droicts : car s'il estoit autrement les lignes AB & CD ne seroient paralleles par la penult. com. sent. contre l'hypothese.

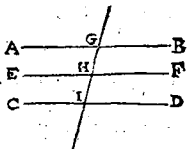
THEOR. 21. PROP. XXX.

Les lignes droictes paralleles à vne mesme ligne droicte , sont paralleles entr'elles.

Soient les lignes droictes AB, CD, paralleles à vne mesme ligne droicte EF.

Soit AB parallele à CD, & CD paral-

lelle à EF. Ie dis que AB & CD sont paralleles entr'elles. Car d'autant que toutes ces lignes sont posees en vn mesme plan, estant tiree la ligne droicte GHI, elle les couppera toutes, sçauoir est AB en G; EF en H; & CD en I. Et puis que

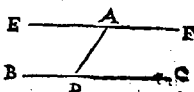


AB est posee parallele à EF, les angles alternes AGH, GHE seront egaux entr'eux par la precedente prop. Nerechef puis que CD est aussi posee parallele à la mesme EF; l'angle DIH sera aussi egal au mesme angle GHE, c'est à sçauoir l'interne à l'externe. Parquoy les angles AGH & DIH seront egaux entr'eux, lesquels estans alternes, les lignes AB & CD sont paralleles entr'elles par la 27. p. 1.

PROB. 10. PROP. XXXI.

Sur vn point donné, mener vne ligne droicte parallele à vne ligne droicte donnée.

Soit le point donné A, duquel faut mener vne ligne parallèle à la donnée BC.



Soit menée la ligne AD faisant avec BC l'angle ADC, & sur icelle AD, & au point A soit fait l'angle DAE égal à l'angle ADC. Je dis que la ligne EA tirée tant qu'on voudra vers F, est parallèle à BC. Car puis que par la construction les angles alternes ADC, DAE sont égaux, les lignes BC, FE seront parallèles par la 27. p. 1.

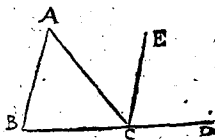
S C H O L I E.

Il est manifeste par ceste construction, que le point donné doit estre tellement scitué hors la ligne donnée, qu'icelle estant continuée ne conuienne avec iceluy. Quant à la pratique de ceste prop nous l'auons enseignée en nos memoires Mathemat. prob 6. de la Geometrie pratique.

THEOR 22. PROP. XXXII.

En tout triangle l'un des costez estant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux oppo-
sez intérieurs : & de chacun triangle les
trois angles intérieurs sont égaux à deux
droits.

Soit le triangle ABC, duquel le costé BC, soit prolongé iusques en D. Je dis en premier lieu que l'angle extérieur ACD, est égal aux deux oppo-
sez intérieurs A & B.



Qu'il ne soit ainsi, qu'on mène CE parallèle à BA par la 31. p. 1. & d'autant que la ligne AC tombe sur les parallèles AB, EC, par la 29. p. les angles BAC, & ACE seront alternativement égaux : item l'extérieur ECD sera égal à son opposé intérieur ABC,

Partant il est manifeste que le total ACD, est egal aux deux A & B. opposez interieurement.

Pour la seconde partie, que les trois angles A, B & C interieurs du triangle ABC sont egaux à deux droicts, il est evident, estant ACD egal aux deux A, & B; Mais ACD avec ACB sont egaux à deux droicts par la 13. p. 1. Partant les deux A & B avec ACB, seront egaux à deux droicts.

S C H O L I E.

De ceste proposition nous pouuons colliger, à cōbien d'angles droicts sont egaux tous les angles internes de quelcōque figure rectiligne: sçauoir par deux manieres, dont la premiere est telle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle est entre les figures rectilignes.

C'est à dire, que tous les angles de la premiere figure rectiligne sont egaux à deux fois un droict, c'est à dire à deux droicts. Mais les angles de la seconde figure rectiligne, sont egaux à deux fois 2. droicts, sçauoir est à quatre droicts: Mais ceux de la troisieme figure sont egaux à 2. fois trois droicts, c'est à dire à six droicts; & ainsi des autres. Or le lieu qu'obtient chaque figure rectiligne entre les figures rectilignes, est montré par le nōbre des costez ou des angles, deux d'iceux ostez, d'autant que les lignes droites, n'enfermēt une superficie, & par consequēt ne constituent une figure, mais sont requises au moins trois lignes droites pour construire une figure rectiligne; d'oū vient que le triangle est la premiere figure rectiligne; Car de ses costez, en estans ostez deux, reste un: ainsi la figure ayant douze costez, ou douze angles, sera la 10. figure, puis que deux estans ostez de 12. restent 10. & ainsi faut-il iuger des autres. Parquoy puis que la figure contenue de 12 costez est la 10. elle aura 12. angles equiuallens à 20. angles droicts: c'est à sçauoir à deux fois 10. angles droicts. Ainsi aussi tous les 10. angles de la figure contenue de 10. costez, equiuallent à 16. angles droicts, puis qu'icelle figure est la 8. en ordre entre les figures rectilignes. Or la raison de cecy est, que toute figure rectiligne se diuise en autant de triangles, qu'elle est quantiesme en ordre entre les figures, ou bien qu'elle a d'angles ou costez, deux estans ostez. Car de quelconque angle d'une figure on peut tirer des lignes droictes à tous les angles opposez: mais aux deux plus prochains on n'en peut tirer. Parquoy la figure sera diuisee en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux estans ostez. Ainsi il est evident que le triangle ne se peut diuiser en autres triangles: mais le quadrangle se coupe en deux

le Pentagone en trois, &c. Veu donc que les angles d'iceux triangles constituent tous les angles de la figure proposée, & tous les angles de quelconque triangle sont égaux à deux droicts; il est manifeste que tous les angles de quelconque figure rectiligne sont égaux à deux fois autant d'angles droicts, que est le nombre des triangles esquels elle se diuise, c'est à dire à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle figure est quantiesme en ordre entre les figures rectilignes. Ce qui est veu manifestement es figures proposées.

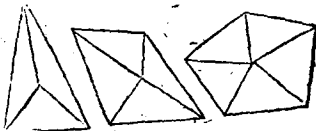


Le second moyen par lequel on sçaura la valeur des angles de quelconque figure rectiligne, est cestuy-cy.

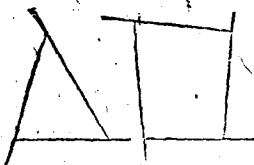
Tous les angles de quelque figure rectiligne, sont égaux à deux fois autant d'angles droicts, quatre estans ostez, qu'il y a en icelle d'angles, ou de costés.

C'est à dire que les angles de chaque triangle sont égaux à deux fois trois droicts, quatre ostez, c'est à sçauoir à deux droicts: Ainsi aussi les angles de la figure de 12. costez, vaudroient deux fois 12. angles droicts, moins quatre, sçauoir est 20. angles droicts, &c. Or la demonstration de cela est telle. Si de quelconque point pris dedans la figure on tire des lignes droites à tous les angles, il y aura autant de triangles en ladite figure, qu'elle a d'angles ou costez. Veu donc que les angles de chaque triangle par la 32. p. 1. sont égaux à deux droicts, tous les angles d'iceux triangles sont égaux à deux fois autant de droicts, qu'il y a de costez en la figure. Mais il est euident que les angles des mesmes triangles, qui sont à l'entour du point pris dedans la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure proposée: & partant si on oste ces angles là, les autres angles des triangles qui constituent ceux de la figure proposée, seront aussi égaux à deux fois autant de droicts, ceux d'alentour le point pris, estans ostez, qu'il y a de costez, ou angles à la figure.

Mais tous ces angles là d'alentour le point pris, sont seulement égaux à quatre droicts, ainsi que nous l'auons colligé de la 15. p. 1. Parquoy les angles de quelconque figure rectiligne sont égaux à deux fois autant de droicts, quatre estans ostez, que ladite figure contient d'angles, ou de costez.



Or il appert de ce que dessus, que si chasque costé de quelconque figure rectiligne, est prolongé par ordre vers une mesme part: tous les angles externes pris ensemble, seront egaux à quatre droicts. Car par la 13. p. 1. les angles interieurs pris avec les extérieurs sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'il y a d'angles, ou de costez en la figure. Mais les angles interieurs sont egaux à deux fois autant de droicts, quatre ostez, que ladite figure a d'angles, comme nous auons



monstré cy dessus; partant les extérieurs sont tousiours egaux à quatre droicts. Par exemple: En quelconque triangle, les angles interieurs & extérieurs ensemble, sont egaux à six droicts: comme en la figure cy dessus. Mais par la 32. p. 1. les internes seuls sont egaux à deux droicts. Donc les seuls extérieurs seront egaux à 4. droicts. En un quadrangle, les angles extérieurs & les interieurs ensemble, sont egaux à huit droicts. Mais les interieurs seuls sont egaux à 4. droicts, comme nous auons démontré: les extérieurs seuls seront donc aussi egaux à quatre droicts. Toutes lesquelles choses peuuent estre venues es figures apposees. Il y a la mesme raison en toutes autres figures.

COROLLAIRE.

Il resulte de ceste 32. prop. que les trois angles de quelconque triangle, pris ensemble, sont egaux aux trois angles de quelconque autre triangle pris ensemble: Pource que tant ces trois là, que ces trois cy, sont egaux à deux droicts. D'où vient que si deux angles d'un triangle sont egaux à deux angles d'un autre triangle: le 3. de l'un sera aussi egal au 3. de l'autre, & les triangles seront equiangles.

Il appert aussi que tout triangle Isocele, duquel l'angle comprins par les costez egaux, est droit, à chacundes autres angles demy droicts. Car les deux restans ensemble font un droit, puis que par la 32. p. 1. les trois sont egaux à deux droicts: & le 3. est posé droit. Parquoy puis que par la 5. p. 1. les deux restans sont egaux entr'eux: chacun

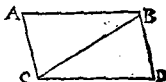
L'iceux sera demy droit. Mais si l'angle contenu des costez egaux estoit obtus, chacun des autres seroit moindre qu'un demy droit. Car les deux restans ensemble seront moindres qu'un droit &c. Finalement si ledit angle estoit aigu, chacun des autres sera plus grand qu'un demy droit. Pource que les deux restans ensemble seront plus grands qu'un droit, &c.

Il est pareillement manifeste que chaque angle d'un triangle equilateral, est les deux tierces parties d'un droit, ou la tierce partie de deux droits. Car deux angles droits, auxquels sont egaux les trois angles d'un triangle equilateral, diuisez en trois angles egaux, font les deux tierces parties d'un droit.

THEO. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droites qui conioignent deux lignes droites egales & paralleles, & de mesme part, sont aussi egalles & paralleles.

Soient deux lignes droites AB, & CD, qui conioignent de mesme part les deux autres lignes AC & BD egales & paralleles. Je dis que AB, & CD, sont aussi egalles & paralleles.



Qu'il ne soit ainsi: soit menee la diagonale BC. Icelle tombant sur les deux paralleles AC, & BD, fera les angles ACB & CBD alternativement egaux par la 29. p. 1. Item AC, & BD estant egales, les deux triangles CAB & CBD auront deux costez egaux à deux costez, & un angle egal à un angle, & par la 4. prop. 1. la base AB sera egale à la base CD, & l'angle ABC sera egal alternativement à l'angle DCB, & par la 27. p. 1. les egalles AB, & CD seront aussi paralleles.

THEOR. 24. PROP. XXXIII.

En tout parallelograme, les costez & les angles opposez, sont egaux entr'eux, & la diagonale le coupe en deux egallement.

Soit le parallelograme ABCD, en la figure precedente. Je dis que le costé AB est egal à son opposé CD; AC à BD: Item l'angle A egal à son opposé D, & l'angle ABD egal à l'angle ACD: finalement que iceluy parallelograme ABCD est coupé en deux également par la diagonalle BC.

Car puis que ABCD est parallelograme, AB sera parallele à CD, & AC à BD, & par la 29. p. 1. l'angle ABC sera alternativement egal à l'angle BCD. Item l'angle ACB alternativement esgal à l'angle BCD. Ainsi les deux triangles BAC, & DCB auront les angles ABC, & BCA egaux aux angles BCD & CBD chascun au sien, & le costé commun entré iceux angles BC. Et par la 26. p. 1. les autres costez AB & AC seront egaux aux autres costez CD, & DB chacun au sien, & l'autre angle A egal à l'angle D. Et si il est euidét que les deux angles au point B ensemble serót egaux aux deux ensemble au point C. Encores par la 4. p. 1. les triangles ABC, & CDB seront egaux; & partát le parallelograme ABCD est coupé en deux également par la diagonalle BC: ce qui estoit à prouver.

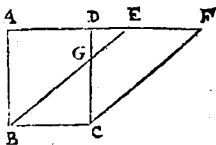
THEOR. 25. PROP. XXXV.

Les parallelogrames constituez sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient deux parallelogrames AB CD, & BCEF tous deux sur mesme base BC, & entre mesmes paralleles AF, & BC. Je dis qu'ils sont egaux.

Car par la 34. p. 1. les costez opo-
sez des parallelogrames estans e-
gaux, AD & BC seront egaux. Item

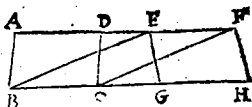
BC, & EF, & partant AD, & EF egaux, auxquels si on adiouste la ligne commune DE; AE sera egale à DF. Item AB est egale à DC, lesquelles estans paralleles, l'angle extérieur CDE sera egal à l'opposé intérieur EAB; & par la 4. p. 1. les triangles BAE, & CDF seront egaux: desquels si on oste le triangle commun GDE, les demeurans trapezes BADG, & CGEF seront egaux: auxquels si on adiouste le triangle commun BGC le parallelog. ABCD sera egal au parallelograme BCEF: ce qui estoit à demonstrier.



THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallelogrames constituez sur bases egales , & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient les deux parallelogrames ABCD, & EFGH, ayans les bases BC, & GH egales , & entre les mesmes paralleles AF, & BH. Je dis qu'ils sont egaux.

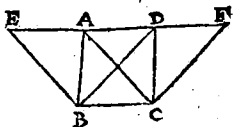


Qu'il ne soit ainsi: soient menees les deux lignes BE, CF, d'autant que BC est posee egale à GH, & par la 34. p. i. la mesme GH est egale à son opposee EF; BC, EF seront egales entr'elles par la 1. com. sentence. Mais elles sont aussi paralleles par l'hypothese: Donc les lignes BE, CF qui les conioignent, seront aussi egales & paralleles par la 33. p. i. & par consequent BEFC sera parallelograme, sur mesme base, & entre mesmes paralleles que le parallelog. ABCD, & par la 35. p. i. ils seront egaux; & par la mesme prop. il sera aussi egal au parallelog. EFGH estant sur mesme base EF, avec iceluy, & entre mesmes paralleles AF, BH: Et par la 1. com. sent. les parallelog. ABCD, & EFGH seront egaux entr'eux; ce qu'il falloit demonst. r.

THEOR. 27. PROP. XXXVII.

Les triangles qui sont sur mesme base , & entre mesmes paralleles , sont egaux.

Soient deux triangles ABC, & BDC tous deux sur la mesme base BC, & entre mesmes paralleles EF, & BC. Je dis qu'ils sont egaux. Car si on mene BE parallele à CA, & CF parallele à BD, seront acco- plis les parallelogrames A E B C, & B C F D, lesquels seront egaux par la 35. p. i. Mais les trian-

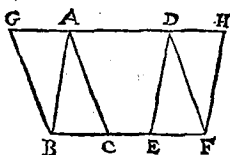


gles dōnez ABC & DBC sont moitiés d'iceux parallélogrames par la 34. p. 1. pource qu'ils sont coupeez en deux également par les diagonales AB, DC: donc aussi les triangles ABC & DBC seront égaux, par la 7. com. sent. ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur bases égales & entre mesmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, DEF, constitués sur bases égales BC, & EF, & entre mesmes parallèles GH, & BF. Je dis que ils sont égaux.

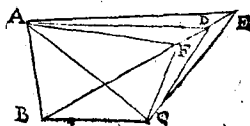


Car apres avoir mené BG parallèle à CA, & FH parallèle à DE par la 31. p. 1. les deux parallélogrames ACBG, DEFH, estans sur bases égales, & entre mesmes parallèles, seront égaux par la 36. p. 1. aussi égales seront leurs moitiés, sçavoir les triangles proposez ABC, & DEF par la 34. p. 1. estant les parallélogrames coupeez en deux également par les diagonales BA, & DF.

THEOR. 29. PROP. XXXIX.

Les triangles égaux constitués sur mesme base, & de mesme part, sont aussi entre mesmes parallèles.

Soient deux triangles égaux ABC, & BCD constituez sur mesme base BC, & de mesme part. Je dis qu'ils sont entre mesmes parallèles, c'est à dire que si on mene la ligne AD, elle sera parallèle BC.

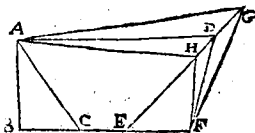


Autrement du point A on en pourra mener vne autre qui sera parallele à BC (si AD ne l'est) par la 31. p. 1. Laquelle tombera, ou bien au dessus de AD, ou au dessous; qu'elle tombe premierement au dessus, & soit icelle AE, s'il est possible: & apres auoir continué BD iusques en E, & mené EC. Les deux triâgles BAC, & BEC par la 37. p. 1. estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles seront egaux. Mais par l'hypothese BAC, & BDC sont aussi egaux; partant BEC, & BDC seroient aussi egaux, la partie au tout; donc AE, parallele ne pouuoit tomber par dessus AD. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on pose la parallele AF au dessous de AD: car ayant mené CF; il s'ensuiura que les triangles BFC, & BDC sont egaux, ce qui ne peut estre: Donc du point A on ne menera point d'autre ligne que AD parallele à BC.

THEOR. 30. PROP. XL.

Les triâgles egaux constituez sur bases egales, & de mesme part, sont aussi entre mesmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC, & DEF, constituez sur bases egales BC, & EF, & de mesme part. Je dis qu'ils sont aussi entre mesmes paralleles; c'est à dire que si on mene vne ligne droite de A, en D, qu'elle sera parallele à BF.



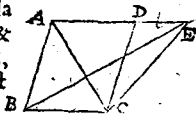
Autrement du point A on en pourra mener vne autre qui sera parallele à BF (si AD ne l'est) par la 31. p. 1. Laquelle tombera, ou au dessus de AD, ou au dessous. Soit donc premierement au dessus, & soit icelle AG, s'il est possible. Les deux triangles BAC, & EGF seront egaux par la 38. p. 1. Mais par l'hypothese BAC, & EDF sont aussi egaux: partant EGF & EDF seront egaux par la 1. com. sent. la partie au tout; ce qui est impossible: Partât la parallele menee du point A ne tombera point au dessus de AD. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on la fait tomber au dessous, comme AH, car les trian-

gles EHF, & EDF se trouueroient egaux ; donc du point A ne pourra estre menee autre ligne que AD. parallele à BF.

THEOR. 31. PROP. XLI.

Si vn parallelograme, & vn triangle ont vne mesme base, & sont entre mesmes paralleles, le parallelograme sera double du triangle.

Soit le parallelogramé ABCD sur la mesme base BC, que le triangle BCE, & tous deux entre mesmes paralleles AE, & BC. Je dis que le parallelograme est double du triangle.

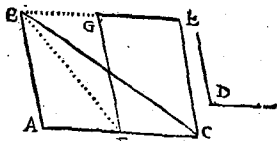


Car si on mene la diagonale AC, le triangle AEC fera la moitié du parallelogr. par la 34. p. 1. lequel sera egal au triangle BEC par la 37. p. 1. partant le parallelograme qui est double de l'un, sera aussi double de l'autre.

PROBL. II. PROP. XLII.

Faire vn parallelograme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné ABC auquel il faut faire vn parallelograme egal, ayant vn angle egal à l'angle donné D.



Soit la base du triangle BC coupée en deux egalemment en E, fait l'angle CEG egal à l'angle D par la 23. p. 1. puis par la 31. p. 1. soit menée de B, la ligne BF parallele à AC, laquelle coupe EG en G. Derechef de C soit menée CF parallele à EG, rencontrant BF en F. & sera constitué vn parallelograme EGFC, lequel je dis estre egal au triangle donné ABC. Car estant tirée la ligne BE, iceluy parallelograme EGFC sera double du triangle EBC par la prop

la prop. preced. duquel est aussi double le triangle ABC par la 38. p. 1. pource qu'ils sont sur bases egales, & entre mesmes paralleles: le parallelograme EGFC, & le triangle ABC feront donc egaux entr'eux par la 6. com. sent. & puis qu'iceluy parallelograme à l'angle CEG egal au donné D par la construction, est manifeste ce qui estoit proposé.

S C H O L I E.

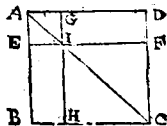
Pelletier adiouste icy la conuerse de ceste proposition, qui est telle. Faire un triangle egal à un parallelograme donné, & qui ait un angle egal à un angle rectiligne donné.

Et d'autant que nous auons enseigné ce probleme en nos memoires Mathematiques, prob. 14. nous n'en ferons icy repetition.

THEOR. 32. PROP. XLIII.

En tout parallelograme, les suppléments des parallelogrames qui sont sur le diametre, sont egaux entr'eux.

Soit le parallelograme ABCD, son diametre AC, à l'entour duquel sont les parallelog. AEIG & IHCF. Je dis que les parallelogrames GIFD & EBHI qu'on appelle suppléments, sont egaux entre eux.



Car d'autant que par la 34. p. 1. les triangles ABC, ADC sont egaux entr'eux: Item les triangles CIH, CFI aussi egaux; si on oste ceux-cy de ceux-là, resteront egaux les trapezes ABHI, ADFI. Mais par la 34. p. 1. sont aussi egaux les triangles AEI, AGI; partant si on les oste des trapezes, demeureront egaux les suppléments EBHI, GIFD. Ce qui estoit à prouuer.

PROB. 12. PROP. XLIIII.

Sur vne ligne droite donnée, descrire vn pa-

D

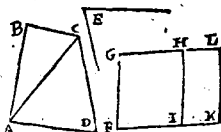
S C H O L I E .

Nous avons enseigné la pratique de ce Prob. en nos memoires Mathemat. Prob. 15. & le converse d'iceluy au Prob. 16. C'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROBL. 13. PROP. XLV.

Faire vn parallelograme egal à vne figure re-
ctiligne donnee , ayant vn angle egal à vn
angle rectiligne donné.

Soit la figure rectiligne donnee
ABCD, & l'angle donné E. Et il
faut faire vn parallelograme egal
à icelle figure rectiligne ABCD,
qui ait vn angle egal au donné E.



Soit resoluë la figure rectiligne
donnee en triangles , scauoir est
menant la ligne AC: puis par la 42. p. 1. soit fait le parallelo-
gramme FGHI egal au triangle ADC, ayant l'angle F, egal à
l'angle donné E. Ité sur HI soit fait le parallelog. HIKL
egal au triangle ABC, ayant vn angle HIK egal au donné E:
& sera fait ce qui est requis. Car les deux parallelogrammes
FH & IL sont construits egaux à la figure rectiligne ABCD,
& ont chacun vn angle egal à l'angle donné E; & ces deux
parallelog. ensemble en font vn seul. Car d'autant que cha-
cun des angles GFI, HIK, est egal à l'angle donné E, ils le
seront aussi entr'eux: auxquels si on adiouste l'angle cõmun
FIH, les deux angles GFI, HIF, qui sont egaux à deux droits
par la 29. p. 1. estant FH, parallelograme; seront egaux aux
deux angles HIK, HIF, lesquels partant seront egaux à deux
droits, & par la 14. p. 1. les deux lignes FI, KI se rencontrent
directement. Pareillement les deux angles GHI, HLK
estans egaux par la 34. p. 1. car ils sont oposéz à angles egaux
GFI, HIK: Si à iceux on adiouste l'angle commun IHL, par
le mesme discours que cy dessus, les deux lignes GH & LH
se rencontreront directement: ainsi FK & GL estans lignes
droictes, & conjoignant de mesme part les egales & paral-

52 PREMIER
 Ielles FG & KL ; elles seront aussi egalles & paralleles par la
 33. p. 1. & partant FGLK sera parallelograme.

SCHOLIE.

S'il y eust eu d'auantage de triägles en la figure dōnee, il eust fallu
 construire sur KL vn troisieme parallelogramme egal au troisieme
 triangle ; puis sur le costé opposé à KL, vn autre parallelogramme
 egal au 4. triangle, & ainsi proceder de triägles en triangle iusques
 à la fin. Et quant à la demonstration, ce sera tousiours la mesme
 que dessus, repetee autant de fois qu'il sera de besoin. Or Pellerier ad-
 iouste icy vn Probleme tres-util., qui est, Qu'estans donnees
 deux figures rectilignes inegales, trouuer l'excez de la plus
 grande par dessus la moindre. Mais d'autant que nous l'auons
 enseigné en suite de celuy cy dessus, en nostre Geometrie pratique,
 Prob. 18. nous n'en ferons icy repetition.

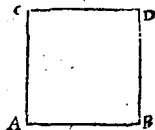
COROLLAIRE.

Il est manifeste par les choses dictes cy dessus, comment on descri-
 ra sur vne ligne droicte donnee vn parallelogramme egal à vne fi-
 gure rectiligne donnee, & qui ait vn angle egal à vn angle rectili-
 gne donné. Car pour exemple, si la ligne droicte FG eust esté donnee,
 nous eussions par la precedente prop. desorit sur icelle le parallelo-
 gramme FGHI ; puis sur la mesme ligne FG, ou plustost sur vne ega-
 le à icelle HI, le parallelog. HIKL ; & ainsi consecutiuelement s'il y
 auoit d'auantage de triangles en la figure rectiligne donnee.

PROBL. 14. PROP. XLVI.

Sur vne ligne droicte dōnee, descrire vn quar-
 ré.

Soit la ligne droicte dōnee AB, sur laquel-
 le il faut descrire vn quarré. Du point A,
 soit menee AC ligne perpendiculaire à AB
 par la 11. p. 1. laquelle soit faite egale à AB ;
 & apres auoir mené CD parallele à AB,
 & BD parallele à AC par la 31. p. 1. ie dis
 que le quadrilatere AD est quarré.



Car d'autant que par la construction il est parallelograme; les costez, & les angles opposez sont egaux par la 34. p. 1. partant AB est egal à CD, & AC à BD: mais AC est egal à AB par la construction, il est evident que les quatre costez sont egaux. Item l'angle A estant droit par la construction, aussi son oppose D sera droit. Et la ligne AC tombant sur les deux lignes paralleles AB, CD, les deux angles interieurs A & C sont egaux à deux droicts par la 29. p. 1. Mais l'angle A est droit: donc l'angle C sera aussi droit: partant aussi droit son oppose B: ainsi les quatre angles A, B, C, D, seront droits; & par la def. du quarré, la figure AD sera quarrée.

S C H O L I E.

Nous auons enseigné la pratique de ceste prop. en nostre Geometrie pratique Prob. 12.

Proclus demonstre icy: Que les quarréz de lignes egales sont egaux: & que de quarréz egaux, les lignes sont egales. Ce qu'est aisé à prouuer par la superposition d'un quarré sur l'autre: Car les lignes estant egales, si l'une est posée dessus l'autre, elles conuendront entr'elles; & les angles estant aussi egaux, c'est à sauoir droicts, ils conuendront pareillement entr'eux: & partant tout le quarré conuendra à tout le quarré. Que si les quarréz sont egaux, ils conuiennent entr'eux, à cause de l'egalité des angles: Donc aussi les lignes, autrement un quarré seroit plus grand que l'autre. Nous auons laissé la demonstration de Proclus qui est tres-longue, pour suivre celle-cy qui est bresue & facile.

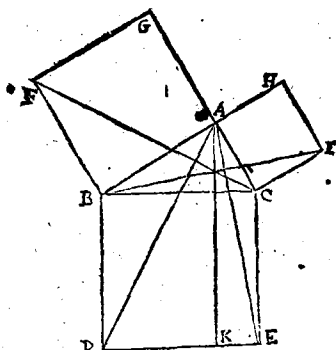
THEO. 33. PROP. XLVII.

Au triangle rectangle, le quarré du costé qui soustient l'angle droit, est egal aux deux quarréz des deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC, sur les costez duquel soient descrits les trois quarréz BCDE, ABFG, AHIC. Je dis que le quarré BE descrit sur le costé BC, qui soustient l'angle droit BAC, est egal aux deux quarréz AF & AI descrits sur les deux autres costez AB & AC.

Car soit mence la ligne AK parallele à BD, ou à CE, & ti

54 PREMIER
rees les lignes AD, AE, CF, BI. Et d'autant que par la défini-



tion du quarré, les 4. angles au point A sont droicts, les lignes droictes AB, AH se rencontreront directement, & ne feront qu'une ligne droicte: Item CA, AG par la 14. p. 1. Derechef, puis que les angles ABF, CBD sont egaux, car ils sont droicts, si on leur adiouste le commun ABC, le total FBC sera egal au total ABD. Le triangle ABD a donc les deux costez AB, BD egaux aux deux costez FB, BC du triangle CBF, chacun au sien, & les angles ABD, CBF contenus d'iceux costez, egaux, & par la 4. p. 1. les triangles ABD, CBF seront egaux. Mais le quarré AF est double du triangle FBC par la 41. p. 1. car ils sont sur mesme base BF, & entre mesmes paralleles BF, GC; il sera donc aussi double de son egal ABD: duquel le rectángle BK est aussi double par la mesme 41. p. 1. & par consequent le quarré AF sera egal au rectángle BK: car les choses doubles d'une mesme sont egales entr'elles. Par mesme discours on prouuera que le rectángle CK est egal au quarré AI: partant les deux ensemble BK, & CK seront egaux aux deux quarréz ensemble AF, & AI. Donc le quarré BE qui est composé d'iceux rectángles BK, CK sera aussi egal aux mesmes quarréz AF, AI: ce qu'il falloit prouuer.

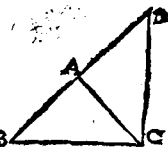
THEOR. 34. PROP. XLVIII.

Si le quarré de l'un des costez d'un triangle, est

egal aux quarrez des deux autres costez, le triangle sera rectangle.

Soit le triangle donné ABC, & soit le carré du costé BC egal aux deux quarrez des deux autres costez BA, & AC. Je dis que l'angle BAC est droit.

Car apres avoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. p. 1. & fait AD égale à AB, soit menée CD. Le triangle



CAD sera rectangle, & par la 47. p. 1. le carré de CD sera egal aux deux quarrez de CA, & AD, lesquels sont égaux aux quarrez de BA, & AC, estans leurs lignes égales; & par la 1. com. sent. le carré de BC sera egal au carré de CD: partant la ligne CB égale à CD. Donc les triangles BAC, & CAD auront deux costez égaux à deux costez chacun au sien, & la base égale à la base, & par la 8. p. 1. l'angle BAC sera egal à l'angle droit CAD: partant il sera aussi droit.

Fin du premier Element.

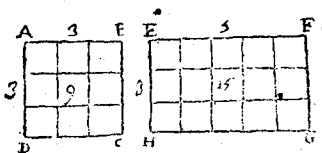


ELEMENT SECOND.

DEFINITIONS.

1. Tout parallélograme rectangle est dict estre compris des deux lignes droictes qui font l'angle droict.

IL a esté dit en la 36. def. 1. que c'est que parallélograme, & qu'il y en a de quatre sortes : mais maintenant il faut entendre qu'un parallélograme est dit rectangle, lors qu'il a tous les angles droicts, & par consequent il y a seulement le quarré, comme $ABCD$, & le quarré long comme $EFGH$, qui soient rectangles : car il n'y a que ces



deux parallélog. qui ayent les angles droicts. Est icy à noter, qu'en tout parallélog. si un seul angle est donné droit, il est nécessaire que les trois autres soient aussi droicts : comme si l'angle E du parallélograme EFGH est droict : ie dis que les trois autres F, G, H, sont aussi droicts. Car d'autant que les lignes EF, GH sont parallèles, les angles internes E & H sont égaux à deux droicts par la 29. p. 1. Mais si l'angle E est droict par l'hypothese : l'angle H sera donc aussi droict : & par la 34. p. 1. leurs opposés G & F seront aussi droicts. Parquoy Euclide dit tout parallélog. estre contenu sous deux lignes droictes.

qui comprennent un seul angle droit : tellement que le parallélog. rectangle EFGH, sera dict estre contenu sous les deux lignes droictes EF, EH : ou sous les deux EF, FG : ou sous FG, GH : ou finalement sous GH, HE : ainsi deux lignes expriment toute la magnitude d'un parallélograme rectangle : sçavoir l'une comme EF, ou HG, sa longueur, & l'autre comme EH, ou FG, sa largeur : & par le mouvement imaginaire de l'une de ces deux lignes en l'autre, se fait iceluy parallélograme. Car si l'esprit conçoit que la ligne EF, en allant en bas au long de la ligne EH, se meue en trauers, tellement qu'elle face tousiours angle droit avec icelle EH, iusques à ce que le point E paruienne au point H, & le point F, au point G : sera descrit tout le parallélog. rectangle EFGH. Le mesme sera fait, si on pose EH se mouoir en trauers, selon la ligne EF. D'où aduient que si EF est de 5 pieds, & l'autre costé EH de trois : si on multiplie un nombre par l'autre, sera produit 15. pieds quarrez, pour l'aire ou contenu de tout le parallélograme. Pareillement au rectangle ABCD, le costé AB estant de 3. pieds, & le costé AD aussi de trois pieds : multipliant l'un par l'autre, seront produits neuf pieds quarrez pour l'aire d'iceluy rectangle, comme monstre la figure cy dessus.

Et est icy à noter, qu'en ce second liure, & és autres suiuaus, Euclide appelle les parallélog. rectangles, simplement rectangles : ce que obseruent aussi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut tousiours entendre parallélograme rectangle.

2. En tout parallélograme, l'un des parallélogrames descrits à l'entour du diametre avec les deux suppléments, est appelé Gnomon.

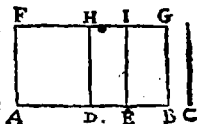
Au parallélograme ABCD (en la figure de la 4. proposition de ce liure) soit menée la diagonale BC, & EF parallèle à AC coupant la diagonale en I, & par iceluy point I soit menée GH parallèle à AB : & le parallélograme sera diuisé en 4. parallélog. deux desquels EG, & HF sont dictés estre descrits à l'entour du diametre ou diagonale, mais les autres deux sont appellez suppléments. Or la figure composée d'iceux suppléments & de l'un ou l'autre des parallélogrames d'alentour la diagonale, sera dicté Gnomon, comme la figure FACDHI, ou EDBAGI.

THEO. I. PROP. I.

Si de deux lignes droites l'une est coupée en

tant de parties quel'on voudra, le rectangle compris des deux routes, est egal au rectangle de la non coupee, & d'une chascune partie de celle qui est coupee.

Soient les deux lignes AB & C, dont la premiere AB est coupee à l'aduanture en plusieurs parties, sçauoir est en AD, DE, EB. Je dis que le rectangle compris des deux lignes AB, & C, sera egal aux trois rectangles compris de la ligne C & d'une chascune partie de AB.



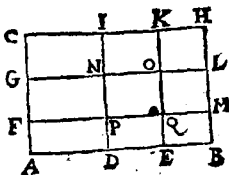
Qu'il ne soit ainsi: Qu'on meine AF perpendiculaire à AB par la 11. p. 1. laquelle soit faite egale à C, & du point F soit menee FG parallele à AB, & BG parallele à AF par la 31. p. 1. Il est euident que le rectangle AG sera compris des deux lignes donnees AB & C, puis que AF est egale à C. Item soient menees les deux lignes DH, & EI paralleles à AF par la 31. p. 1. Donc les trois parallelogrammes AH, DI, EG seront rectangles compris des lignes AF, DH, EI, & des trois segmens AD, DE, EB, c'est à dire de la ligne C, & d'iceux trois segmens. Mais iceux trois parallelogrammes rectangles ensemble, conuiennent au rectangle AG, compris des lignes donnees: & par la 8. com. sent. ils luy sont egaux.

SCHOLIE.

Commandin demonstre icy deux autres theoremes qui ensuiuent.

S'il y a deux lignes droictes, l'une & l'autre desquelles soit coupee en tant de parties qu'on voudra; le rectangle compris d'icelles deux lignes, est egal aux rectangles contenus de chascun segment de l'une, & d'un chacun des segmens de l'autre.

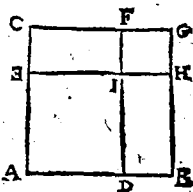
Soient deux lignes droictes AB, AC contenant un angle droit A: & AB soit coupee es points D & E, mais AC es points F & G. Je dis que le rectangle contenu sous AB, AC, est egal aux rectangles compris de chascun parties AD, DE, EB & d'un chascun segment AF, FG, GC: c'est à dire egal aux rectangles contenus



de $AD, AF:AD, FG:AD, GC:DE, AF:DE, FG:DE, GC:EB, AF:EB, FG:EB, GC$. Car estant accomply le rectangle AH , soient tirees DI, EK paralleles à AC : Item FM, GL paralleles à AB , qui couperont les premieres es points P, Q, N, O . Veu donc que le rectangle AP est contenu sous AD, AF : & FN sous AD, FG : & GI sous AD, GC , (pource que par la 34. p. 1. les lignes FP, GN sont egales à icelle AD .) Item que les rectangles DQ, PO, NK , sont contenus sous $DE, AF:DE, FG:DE, GC$: (car DP, PN, NI sont egales à icelles AF, FG, GC , & PQ, NO , à icelle DE , par la 34. p. 1.) Et par mesme raison les rectangles EM, QL, OH , sont compris sous $EB, AF:EB, FG:EB, GC$. Il est evident que le rectangle contenu sous AB, AC , est egal aux rectangles compris sous chascunes parties AD, DE, EB , & un chacun des segmens AF, FG, GC : ce qui estoit proposé.

S'il y a deux lignes droictes coupees comme on voudra; le rectangle compris sous icelles, avec ce luy compris sous vne partie de l'une d'icelles lignes, & vne partie de l'autre, est egal aux rectangles contenus sous les lignes totales & les susdites parties reciproquement, avec le rectangle contenu des deux autres parties.

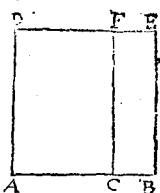
Soient deux lignes droictes AB, AC , faisant l'angle droit A , lesquelles soient coupees comme on voudra en D & E . Je dis que le rectangle compris sous AB, AC , avec celui compris sous les parties AD, EC , est egal aux rectangles contenus sous $AB, EC:AC, AD:DB, AE$. Car ayant accomply le rectangle AG , soit menee DF parallele à AC , & EH à AB , s'entrecouppans en I . Veu donc que le rectangle AG est egal aux rectangles EG, AI, DH : si on leur adiouste le commun rectangle EF : les rectangles AG, EF , qui sont compris sous les toutes AB, AC , & les parties AD, EC , seront egaux aux rectangles EG, AF, DH , compris sous $AB, EC:AC, AD:DB, AE$: ce qui estoit proposé.



THEOR. 2. PROP. II.

Si vne ligne droite est coupee comme on voudra; les rectangles compris de la toute & d'une chascune partie, sont egaux au quarre de la toute.

Soit la ligne droite AB , couppee en deux parties telles qu'on voudra au point C . Je dis que le rectangle de la toute AB & de la partie AC , avec le rectangle de la toute AB & de l'autre partie CB , sont egaux au carré de la toute AB .



Qu'il ne soit ainsi. Sur AB soit décrit le carré AE , puis de C soit menée CF parallèle à AD , laquelle CF sera égale à icelle AD , c'est à dire à AB ; car icelles AD , AB sont égales par la def. du carré. Il est donc évident que les deux rectangles AF & CE , sont compris de la toute AB , ou son égale CF , & des deux parties AC & CB ; & si ils conviennent avec le carré AE , & par conséquent egaux.

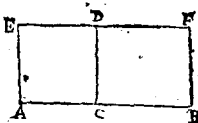
S C H O L I E.

Encore qu'en ce theoreme Euclide propose d'une ligne diuisee en deux parties seulement, si est-ce toutesfois qu'en la mesme maniere sera démontré le mesme, si la ligne est diuisee en tant de parties qu'on voudra. Sera aussi démontré comme dessus que si une ligne droite est couppee en tant de parties qu'on voudra; le carré de la toute est egal aux rectangles contenus sous chascun segment & un chascun segment.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droite est coupee comme on voudra; le rectangle compris de la toute, & de l'une des parties, est egal au rectangle compris des parties, & au carré d'icelle partie premierement prise.

Soit la ligne droite AB couppee à l'aventure au point C . Je dis que le rectangle compris de la totale AB , & de l'une ou l'autre partie, comme AC , est egal aux deux rectangles compris des deux parties AC , & CB , & au carré de la partie AC , laquelle avoit esté premierement prise.



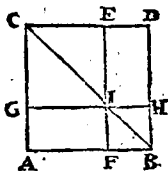
Qu'il ne soit ainsi. Sur la partie AC soit fait le carré AD .

par la 46. p. 1. Item soit menee BF parallele à CD par la 31. p. 1. rencontrant ED, prolongee en F. Il est donc euident que AD est le quarré de AC, & CF le rectangle de AC & CB (car CD est egal à AC, par la definition du quarré) & AF le rectangle de AB & AC, partie sur laquelle a esté fait le quarré. Or le quarré AD & le rectangle CF ensemble cōuiennent avec le rectangle AF; & par consequent egaux à iceluy.

THÉOR. 4. PRO. III.

Si vne ligne droite est coupee comme on voudra; le quarré de la toute est egal aux deux quarrez des deux parties, & a deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne donnee AB, coupee comme on voudra au point F. Je dis que les deux quarrez descrits sur les parties AF & FB, avec deux fois le rectangle d'icelles AF & FB sont egaux au quarré de la totale AB.



Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne totale AB soit descrit le quarré AD, & apres auoir mené la diagonale BC, & du point F, FE parallele à AC, coupant la diagonale BC en I, & derechef par iceluy point I soit menee GH parallele à AB, le tout par la 31. p. 1. ie dis premierement que HF, & EG sont quarrez.

Car des-jà il appert qu'ils sont parallelogrames, estés descrits entre lignes paralleles. Item puis que AD est quarré, les deux costez AB & AC seront egaux, & le triangle ABC est Isoscele, & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base BC, sçauoir est ABC & ACB seront egaux. Pareillement la ligne BC tombant sur les deux paralleles AC & FE fera l'angle extérieur FIB egal à l'opposé-interieur ACB par la 29. p. 1. lequel estant egal à ABC par la 1. comm. sent. ABC & FIB seront egaux, & par la 6. prop. 1. les deux costez BF & FI seront egaux; & par la 34. p. 1. le parallelograme HF aura les quatre costez egaux; & partant il sera quarré; car l'angle FBH estant droit, les trois autres seront aussi droicts, comme nous auons demonstté à la 1. def. de ce liure. Par mesme discours on monstrera

GE estre aussi quarré. Maintenant d'autant que AI & ID sont décrits entre lignes parallèles, & les angles A & D sont droicts, il appert qu'ils sont parallelog. rectangles, & egaux entr'eux par la 43. p. 1. & sont compris des deux parties AF FB, estant EI egale à AF, & HI, IF à FB par la 34. p. 1. & def. du quarré. Partant AI & ID sont deux fois le rectangle de AF & FB, lesquels avec les deux quarez FH & GE conuiennent avec le quarré total AD, & par la 8. comm. sent. ils luy seront egaux.

C O R O L L A I R E.

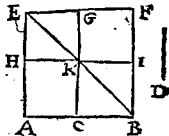
Il est manifeste par ce que dessus, que les parallelogrames décrits à l'entour de la diagonale d'un quarré, sont quarez. Et aussi que la diagonale coupe en deux également les angles du quarré.

S C H O L I E.

Clavius demonstre en ce lieu le theoreme suivant.

Si une ligne droicte est double d'une autre, le quarré de celle là est quadruple du quarré de ceste-cy : & si un quarré est quadruple d'un autre quarré : le costé de celuy-là est double du costé de cestuy cy.

Soient deux lignes droictes AB & D, desquelles AB est double de D. Je dis que le quarré de AB est quadruple du quarré de D. Car ayant diuisé AB en deux également en C, si on fait telle construction qu'en ceste 4. p. il est euident que les 4. parallelogrames AK, CI, HG, KF, seront quarez & egaux entr'eux. Mais le quarré AF est egal à iceux quatre quarez : donc le quarré de AB sera quadruple du quarré de AC, c'est à dire de D, qui luy est egal : car AB est double de l'une & de l'autre.

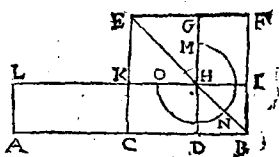


Pour la seconde partie: Soit le quarré de AB quadruple du quarré de D. Je dy que AB est double de D. Car AB estant couppee en deux également en C, le quarré de AB sera quadruple du quarré de AC, comme il a esté démontré cy dessus. Mais le quarré de AB a esté posé aussi quadruple du quarré de D: donc les quarez des lignes AC & D sont egaux, & partant icelles lignes AC & D aussi egales. Mais AB est double de AC; donc aussi double de D.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droite est coupee en deux parties egales, & en deux inegales; le rectangle des deux parties inegales, avec le quarré de la section du milieu, sont egaux au quarré de la moitié de la toute.

Soit la ligne dōnée AB coupee en deux parties egales au point C, & en deux inegales au point D. Je dis que le rectangle compris des deux parties inegales AD, & DB, avec le quarré de la section du milieu CD, sont egaux au quarré de la moitié CB.



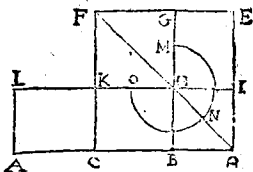
Car sur la ligne CB, soit descrit le quarré CF par la 46. p. r. & apres auoir mené DG parallele à BF, soit menée la diagonale BE coupant DG au point H, par lequel soit mené IKL parallele à AB, puis AL parallele à DH couppant KL en L. Donc par le corol. de lapreced. prop. DI, KG seront quarez; & partant la ligne DH egale à la ligne DB, & par la 34. p. r. KH est aussi egale à HG: parquoy le rectangle AH est compris des deux segmens AD, DB; & KG sera quarré de la section du milieu CD. Il faut donc prouuer que le rectangle AH, avec le quarré KG est egal au quarré CF, fait sur la ligne CB moitié de la toute AB.

Or le rectangle AK est egal au rectangle CI par la 36. p. r. d'autant qu'ils sont sur bases egales AC, & CB, & entre mesmes paralleles AB & LI. Pareillement les supplementes CH, & HF sont egaux par la 43. p. r. auxquels si on adiouste le quarré cōmun DI, les tous CI, & DF seront egaux: & par 1. com. sent. DF sera egal à AK, auxquels pareillement si on adiouste le supplement commun CH, le gnomon ONM sera egal au rectangle AH. Mais iceluy gnomon, & le quarré KG, conuiennent avec le quarré CF, & sont egaux, par la 8. com. sent. Dōc aussi le recta. gle AH, & quarré KG, seront egaux au quarré CF par la 1. com. sent. ce qu'il falloit demonstret.

THEOR 6. PROP. VI.

Si vne ligne droite est coupee en deux parties egalles, & on luy adiouste directement quelque autre ligne droite: le rectänge de la toute & de l'adioustee comme d'une, & de l'adioustee avec le quarré de la moitié, est egal au quarré qui est fait de la moitié & de l'adioustee comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupee en deux egalemēt au point C, & à icelle soit adioustee directement BD. Je dis que le rectänge compris de la totale AD, & de l'adioustee BD, avec le quarré de la moitié CB, est egal au quarré de la ligne CD.



Qu'ainsi ne soit: sur la ligne CD soit descript le quarré CE avec sa diagonale DE, & apres auoir mené BG $\parallel$ à DE, laquelle coupera la diagonale au point H: par iceluy point H soit menee IKL $\parallel$ à AD par la 31. p. 1. Item AL $\parallel$ à DI, rencontrant IL en L.

Premierement le rectänge AI est compris de la toute & adioustee comme d'une AD, & de l'adioustee DI (car elle est egale à l'adioustee BD, estant BI quarré par le corol. de la 4. p. 1. 2. Item KG, qui est quarré par le mesme corol. est fait sur HK egal à la moitié CB par la 34. p. 1. Je dis donc que le rectänge AI, & le quarré KG sont egaux au quarré CE.

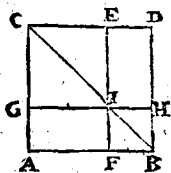
Car les deux suppléments CH, & HE estans egaux par la 43. p. 1. Item les deux rectänges AK, & CH aussi egaux par la 36. p. 1. d'autant qu'ils sont sur bases egalles, & entre mesmes paralleles, & par la 1. com. sent. AK sera egal à HE, & en adioustant à chascun d'iceux le rectänge commun CI, le Gnomon MNO sera egal au rectänge AI. Mais iceluy Gnomon avec le quarré KG sont egaux au quarré CE: donc le rectänge AI avec le quarré KG sera egal au mesme quarré CE.

THEOR.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si vne ligne droite est coupee comme on voudra le quarré de la toute & le quarré de l'une des parties, sont egaux au quarré de l'autre partie, & deux fois le rectangle compris de la totale, & de la partie premierement prise.

Soit la ligne AB coupee comme on voudra au point F. Je dis que les deux quarrés de la totale AB, & de la partie AF, sont egaux au quarré de l'autre partie FB, & au rectangle deux fois, de AB, AF.



Qu'il ne soit ainsi : sur AB soit décrit le quarré AD avec sa diagonale BC, & après auoir mené du point F, FE parallèle à AC, laquelle coupera la diagonale BC au point I; d'iceluy point soit menée GH parallèle à AB par la 31. p. 1. Donc FH & GE seront quarrés par le corol. de la 4. p. 2. & puis que par la 34. p. 1. GI est égale à AF; GE sera quarré du segmēt AF. Derechef pour ce que AC est égale à AB, le rectangle AE sera compris sous la toute AB, & le segment AF. Par mesme raison le rectangle GD sera compris sous les mesmes lignes AB, AF: (car CD, CG sont égales à AB, AF, à cause des quarrés AD, GE.) Veu donc que les rectangles AE, ID, avec le quarré FH sont égaux au quarré AD; si on leur appose le commun quarré EG, les quarrés AD, EG seront égaux aux rectangles AE, GD; (chacun desquels est cōpris de la toute AB & de la partie AF) avec le quarré FH: ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

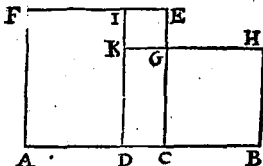
Commandin demonstre en ce lieu le theoreme suivant.

Si vne ligne droite est coupee en deux parties inegales; les quarrés d'icelles parties sont égaux au rectangle contenu deux

fois sous icelles parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excède la moindre.

Soit la ligne droite AB couppee en deux parties inegales, AC , CB , desquelles AC est la plus grande; & d'icelle AC soit prise AD egale à BC , afin que DC soit l'excez de la partie AC par dessus BC . Je dis que les quarréz des parties AC , CB , sont egaux au rectangle contenu deux fois sous AC , CB , & au quarré de DC .

Car soient construits les quarréz AE , CH , & mené DI parallele à CE : puis prolongé HG iusques à ce qu'elle rencontre DI en K . Or d'autant que les lignes BC , AD sont egales, leur



adioustant la commune DC , la toute AC , c'est à dire CE , sera egale à la toute DB . Mais CG est aussi egale à CB : donc aussi le reste GE sera egal au reste DC : & partant puis qu'aussi IE est egale à DC par la 34. p. 1. GE , IE seront egales: & partant IG sera le quarré de l'excez DC . Et d'autant que les rectangles AI , DH , sont contenus sous les parties AC , CB (car AC est egale à l'une & à l'autre ligne AE , DB : & CB à l'une & à l'autre AD , BH .) Il est manifeste que les quarréz AE , CH , des parties AC , CB , sont egaux aux rectangles AI , DH , qui sont contenus sous les parties AC , CB , & à IG quarré de l'excez DC : ce qui estoit proposé.

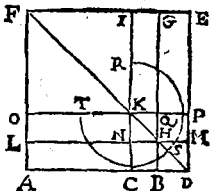
THEOR. 8. PROP. VIII.

Si vne ligne droite est couppee comme on voudra; quatre fois le rectangle compris de la toute & de l'une des parties, avec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré de la toute, & d'icelle partie premierement prise comme d'une seule ligne.

Soit la ligne donnée AB couppee comme on voudra au point C . Je dis que quatre fois le rectangle compris de AB & de l'un ou l'autre segment, sçavoir BC , c'est à dire de AB , & BD (si apres auoir prolongé la ligne AB , on fait BD egale à BC) avec le quarré de AC sont egaux au quarré de AD

compofee de la totale AB, & de la partie BC.

Qu'il ne foit ainfi : fur AD foit fait le quarré AE avec fa diagonale FD, & des deux poinçts B & C foiet menees BG & CI parallèles à DE. Item des poinçts H & K, aufquels elles coupent la diagonale FD, foiet menees LM & OP parallèles à AD, par la 31 p. 1. lesquelles coupēt les premieres parallèles en N, & Q.



Premierement par ce qui refulte de la 4. p. 2. les rectangles OI, NQ, BM, au long de la diagonale feront quarez. Item d'autant que CB est egale à BD ; CH & BM feront egaux, & quarez : (eftant l'un d'iceux quarré) pareillement NQ & HP auffi egaux quarez ; ainfi les quatre CH, BM, NQ, HP, ferōt quarez & egaux : & par la 43. p. 1. les deux fupplemens LK & KG feront auffi egaux entr'eux, & par la 36. p. 1. LK est egal à AN ; & KG à QE : & par confequent iceux quatre rectangles font auffi egaux entr'eux. Mais comme aux precedentes, il est evident que AH est vne fois le rectangle de AB & BH (egale à BD) qui est vn des quatre rectangles avec vn des quatre petits quarez egaux : donc iceux quatre rectangles avec iceux quatre quarez faifant le Gnomon RST, feront egaux à quatre fois le rectangle de AB & BD, lequel Gnomon avec le quarré de OK (egale à AC par la 34. p. 1.) ſçavoir est OI, conuiennent avec le quarré AE, & par la 8. com. ſent. ils luy ferōt egaux : ce qu'eſtoit à demonſtrer.

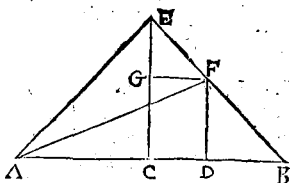
THEO. 9. PROP. IX.

Si vne ligne droite est coupee en deux parties egales, & en deux inegales ; les quarez des parties inegales feront doubles des quarez de la moitié, & de la ſection du milieu.

Soit la ligne donnée AB coupee en deux egalemeſt au poinçt C, & en deux inegalemeſt en D. Je dis que les quarez

rez de AD & DB parties inégales, sont doubles des quarrés de AC moitié, & de CD partie du milieu.

Qu'il ne soit ainsi: au point C soit leuée la perpendiculaire CE, qu'on fera égale à CA; & apres auoir mené



AE, & BE, soit leuée la perpendiculaire DF, couppant BE en F, duquel point soit menée FG parallèle à AB, couppant CE en G: & finalement soit menée AF.

Premièrement, les triangles ACE, & ECB seront Isofcèles, & feront les angles sur les bases AE, & EB égaux par la 5. p. 1. ſçauoir GEF, à FBD, & demy droicts par la 32. p. 1. eftant l'angle ECB droit pour eftre CE perpendiculaire. Item FDB eftant droit, & DBF demy droit, auffi par la 32. p. 1. DFB fera demy droit, & par la 6. p. 1. les coftez DB, & DF, du triangle BDF, feront égaux entr'eux. Par le meſme diſcours ſera démontré que les coftez GF, GE du triangle FGE, ſont égaux entr'eux. Item il eſt euident que l'angle AEB ſera droit, eſtât compoſé des deux demy droicts AEC, BEC.

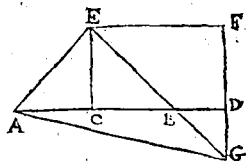
Maintenant par la 47. p. 1. au triangle rectangle ACE, le quarré de AE, coſté qui ſouſtient l'angle droit; eſt double du quarré de AC, eftant égal à tous les deux de AC, & CE. Par le meſme diſcours EF eſt double du quarré de GF, ou CD ſon égale par la 34. p. 1. partant les deux quarrés de AE & EF, ſeront doubles des deux de AC, & CD. Pareillement le quarré de AF eſtant égal aux deux de AE, & EF par la 47. p. 1. iceluy ſera, double des deux de AC, & CD. Mais par la meſme 47. p. 1. le quarré de AF eſt égal aux deux de AD, & DF, ou DB ſon égal: donc les deux quarrés de AD & DB ſeront doubles des deux de AC, & CD; ce qui eſtoit à démonſtrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si vne ligne droite eſt coupee en deux parties égales, & on luy adiouiſte directement quelque autre ligne droite; le quarré de la toute avec l'adiouiſtee comme d'une, & le quarré de l'adiouiſtee, ſont doubles aux

quarrez de la moitié, & de celle qui est faicte de la moitié, & de l'adjouſtee comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupee en deux également au point C, à laquelle ſoit adjouſtee directement BD. Je dis que les quarrez de AD & BD, ſont doubles des quarrez de AC, & CD.



Qu'ainſi ne ſoit, au point C ſoit leue la perpendiculaire CE par la 11. p. 1. egale à AC: & apres auoir mené les deux lignes AE & EB, ſoient menees par la 31. p. 1. EF parallele à CD, & DF à CE ſe rencontrant en F, & ſoient continuees EB, & FD iuſques à ce qu'elles ſe coupent au point G. Finablement ſoit tiree la ligne AG.

Premierement puis que AC & CE ſont egaux, auſſi par la 5. p. 1. les angles EAC, & CEA ſont egaux & demy droicts par la 32. p. 1. eſtant l'angle ACE droit. Par meſme diſcours, les angles CBE & BEC ſeront auſſi demy droicts, & l'angle AEB droit, eſtant compoſé de deux demy droicts. Item par la 15. p. 1. l'angle DBG ſera egal à CBE, & demy droit, & les deux lignes CD & EF eſtans paralleles, par la 29. p. 1. l'angle interieur de meſme coſté BEF ſera auſſi demy droit, & l'angle F, eſtant droit par la 34. p. 1. car il eſt oppoſé à vn droit, BGD ſera demy droit par la 32. p. 1. & par la 6. p. 1. les triangles EGF, & BDG ſeront Iſoſceles rectangles, & CF parallelograme rectangle.

Maintenant par la 47. p. 1. le quarré de AE, coſté qui ſouſtient l'angle droit C, eſt egal aux deux quarrez des deux autres coſtez AC, CE; partant double du quarré de AC. Par meſme diſcours EG ſe trouuera double du quarré de EF; ou de CD qui luy eſt egale par la 34. p. 1. ainſi les deux quarrez de AE, & EG, ou le ſeuil de AG qui leur eſt egal par la 47. p. 1. ſera double des deux de AC & CD. Mais par la meſme 47. p. 1. il eſt egal au deux quarrez de AD & DG, ou BD ſon egal; & par conſequent les deux quarrez de AD & BD ſeront doubles des deux de AC & CD: ce qu'il falloit prouuer.

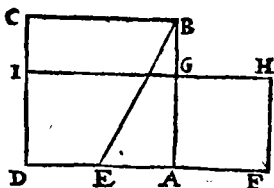
PROBL. I. PROP. XI.

Couper vne ligne droite donnee, ſtellement

que le rectangle de la toute, & de l'une des parties, soit egal au quarré de l'autre.

Soit la ligne droicte donnee AB, laquelle il faut diuifer selon le requis de la prop.

Après auoir construit sur icelle le quarré AC, soit diuisee AD en deux egalelement au point E, & apres auoir mené EB, & prolongé EA vers F, tellement que EF soit égale à EB, sur AF soit fait le quarré AH & soit continuee HG iusques en I. Je dis que la ligne



AB est coupee au point G, en sorte que le rectangle CG compris de BC égale à BA, & de BG partie de BA, est egal au quarré de l'autre partie AG, sçauoir à GF.

Car la ligne AD estant coupee en deux egalelement en E, & on luy adiouste directement AF, le quarré de la moitié & de l'adioustee comme d'une, sçauoir EF ou de son égale EB, est egal au rect. de DF, AF, & au quarré de AE par la 6. p. 2. Mais le quarré de EB est egal aux deux de BA, & AE par la 47. p. 1. ainsi les deux quarrés de BA, & AE seront egaux au rectangle de DF, AF, & au quarré de AE: ostans donc le quarré de AE commun, les demeurans quarré de AB, sçauoir AC, & le rectangle de DF, AF, sçauoir FI, seront egaux, desquels AC & FI, si on oste le rectangle commun AI, le demeurant quarré FG, sera egal au demeurant rectangle GC.

S C H O L I E.

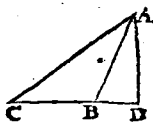
Nous auons enseigné en nos memoires Mathematiques Prob. 72 à couper une ligne droicte, non seulement comme enseigne icy Euclide, mais aussi en sorte que le rectangle de la toute, & de l'une des parties soit double, ou triple, ou quadruple &c. ou moitié, ou tiers, ou quart &c. du quarré de l'autre partie: bref qu'iceluy rectangle soit au quarré, selon quelconque raison donnee.

THEOR. II. PROP. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du co-

ste qui soustient l'angle obtus, est plus grand que les quarrez des deux autres costez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris du costé contenât l'angle obtus, sçauoir celuy sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

Soit le triangle amblygone ABC, duquel soit prolongé le costé CB iusques en D, & du point A soit mence la perpendiculaire AD par la 12. p. 1. Je dis que le carré du costé AC qui soustient l'angle obtus ABC, est plus grand que les quarrez de AB & CB, de deux fois le rectangle de CB & BD, sçauoir CB, qui est l'un des costez faisant l'angle obtus, celuy sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire AD, & BD prise dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire; c'est à dire que le carré du costé AC est egal aux deux quarrez des costez AB, BC, avec deux fois le rectangle de CB, BD.

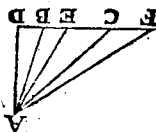


Qu'il ne soit ainsi: Puis que la ligne CD est couppee en B, le carré d'icelle CD sera egal aux deux quarrez de CB, BD, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD, par la 4. p. 2. Adioustant donc le commun carré de AD, les deux quarrez de CD, DA, seront egaux aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD. Mais par la 47. p. 1. le carré de AC est egal aux quarrez de CD, DA: donc aussi le carré de AC sera egal aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD. Et puis que par la 47. p. 1. le carré de AB est egal aux quarrez de BD, DA; le carré de AC sera egal aux quarrez de CB, AB, & a deux fois le rectangle de CB, BD: ce qui estoit à prouuer.

S C H O L I E.

Or que la perpendiculaire tirée de A, doine tomber sur le costé CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a pris icy Euclide, nous

le demonstrevons ainsi: Soit le triangle ABC ayant l'angle B obtus, & le costé CB prolongé de la part de B . Je dis que la perpendicul.

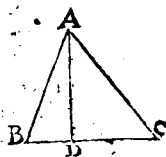


ree de A , tombe hors le triangle sur le costé CB prolongé, comme est la ligne droite AD . Car si elle tomboit dans le triangle, comme est la ligne AE , les deux angles ABE , AEB seroient plus grands que deux droicts, contre la 17. p. 1. Mais si elle tomboit hors le triangle sur le costé BC prolongé de la part de C , comme est AF , derechef au triangle ABF , les deux angles ABF , AFB seroient plus grands que deux droicts: ce qui est absurde.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, est plus petit que les quarez des deux autres costez, de deux fois le rectangle de l'un des costez qui font l'angle aigu, sçavoir celuy sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise au dedás entre la perpendiculaire, & l'angle aigu.

Soit le triangle ABC , ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au costé BC . Je dis que le quarré du costé AB , qui soustient l'angle aigu C , est plus petit que les deux quarez des deux autres costez AC , & CB de 2. fois le rectangle de BC & CD : sçavoir BC , l'un des costez qui font l'angle aigu C , sur lequel tombe la perpendiculaire, & CD prise entre la perpendiculaire & l'angle aigu C .



Car d'autant que la ligne BC est couppee en D , les quarez de BC , CD sont egaux au quarré de BD , & deux fois le rectangle de BC , CD par la 7. p. 1. ausquels si on adiouste le

quarré commun de AD, les trois quarréz de BC, CD, AD, seront egaux aux deux quarréz de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC, CD. Mais les deux triangles ADB, ADC estans rectangles, le quarré de AB est egal aux deux quarréz de AD, DB : & le quarré de AC aux deux quarréz de AD, DC par la 47. p.1. Donc les deux quarréz de AC, BC seront egaux au quarré de AB, & deux fois le rectangle de BC, CD: en outre donc iceux deux rectangles, le quarré de AB sera d'autant plus petit que les quarréz de AC, BC: ce qu'il falloit prouver. On démontrera en la mesme maniere que le quarré du costé AC, qui soutient l'angle aigu B, est plus petit que les deux quarréz des deux autres costez AB, BC, de deux fois le rectangle de CB, BD.

• S C H O L I E.

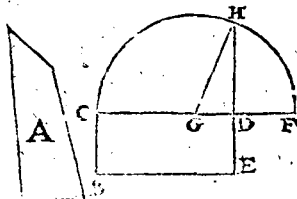
Or combien qu'Euclide propose ce theoreme des triangles oxigones seulement: toutesfois le mesme est aussi veritable es triangles rectangles & ambliques, la perpendiculaire tombant de l'angle droit ou obtus: Car il est manifeste par la 17. ou 32. p.1. que les deux autres angles sont aigus: & partant la perpendiculaire tombera toujours dans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demonstration: ce qui est aussi facile à prouver. Car si elle tomboit hors le triangle, il s'ensuiuroit qu'un angle aigu seroit plus grand que le droit: ce qui est absurde.

PROB. 2. PROP. XIII.

Faire vn quarré egal à vne figure rectiligne donnee.

Soit donnee la figure rectiligne A, à laquelle il faut faire vn quarré egal.

Soit premierement fait le parallelograme BD egal à la figure A & ayant vn angle droit par la 45. p. 1. puis soit prolongé le costé CD iusques en F, & fait DF egal à DE: & apres auoit coupé CF, en deux egallement au point G, &



d'iceluy point G & interuallé GC ou GF, décrit le demy

cercle CHF soit continuée ED iusques en Hen la circonférence du demy cercle. Je dis que le quarré de DH est egal à la figure rectiligne A.

Car puisque CDeſt couppee en deux egalelement au point G & en deux inegalelement au point D, le rectangle de CD & DF, ſçauoir BD, avec le quarré de la ſection du milieu GD, eſt egal au quarré de la moitié GF par la 5. p. 2. ou de ſon egalle GH, lequel eſt egal aux deux quarréz de GD & DH par la 47. p. 1. Que ſi on oſte le quarré commun de GD, le demeurant quarré de DH, ſe trouuera egal au demeurant rectangle BD: & par conſequent à la figure rectiligne donnée A.

Fin du ſecond Element.



E L E M E N T

TROISIÈSME.

DEFINITIONS.



Cercles egaux, sont ceux desquels les diamètres sont egaux, ou desquels les lignes menées du centre à la circonférence sont égales.

2. Vne ligne droite est dite toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, si elle est continuée ne le coupe point.

3. Les cercles sont dits se toucher l'un l'autre, quand en se touchant ils ne se coupent point.

4. Les lignes droictes sont dictes estre équidistantes du centre, lors que les perpendiculaires tirées du centre sur icelles sont égales. Mais celle est plus esloignée du centre, sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

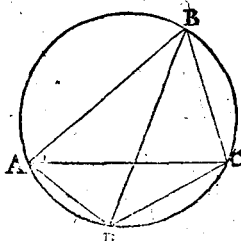
5. Section de cercle, est vne figure comprise d'une ligne droite, & de la circonférence du cercle.

6. L'angle de la section, est celuy cõpris d'une ligne droite, & de la circonférence du cercle.

7. Vn angle se dit estre en la section, lors que sur vn point pris en la circonference, sont menees deux lignes droictes des deux extremittez de la ligne qui sert de base à la section, & c'est l'angle compris d'icelles deux lignes.

8. Mais quand les lignes droictes qui comprennent l'angle embrassent quelque circonference, l'angle est dit estre en icelle.

Euclide definit ex trois precedentes definitions trois sortes d'angles qu'on considere au cercle. En la 6. il dit que l'angle mixte BAC ou BCA , contenu sous la ligne droicte AC , & la circonference AB C , s'appelle angle de la section. En la 7. def. il dit que si à quelque point B , prins en la circonference d'une section ABC , sont menees deux lignes droictes AB , CB , des extremittez de la ligne droicte AC qui sert de base à la section; l'angle rectiligne ABC , sera dit estre en la section ABC : Ainsi aussi l'angle rectiligne ADC sera dit estre en la section ADC : mais



l'angle BAC , en la section BAC . Et en la 8. def. Euclide dit qu'estant pris quelque point B , en la circonference du cercle $ABCD$, si on tire d'iceluy les lignes droictes BA , BC , aux deux extremes A & C , de la circonference ADC , laquelle prennent icelles lignes BA , BC ; l'angle rectiligne ABC sera dit estre, ou s'appuyer sur la circonference ADC : Ainsi aussi l'angle ABD sera dit s'appuyer sur la circonference AD ; & l'angle BAD , sur la circonference BCD ; mais l'angle BAC , sur la circonference BC .

9. Secteur de cercle, est vne figure de deux lignes droictes embrassant quelque circonference, & faisant angle au centre du cercle.

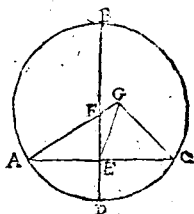
10. Semblables sections de cercle, sont celles qui reçoivent angles egaux; ou bien lesquelles les angles sont egaux entr'eux.

PROBL. I. PROP. I.

Trouuer le centre d'un cercle donné.

Soit le cercle donné ABC, duquel il faut trouuer le centre.

Soit tirée la ligne AC à l'aduenture, laquelle par la 10. & 11. p. 1. soit couppee en deux également, & à droicts angles par la ligne BD, se terminant à la peripherie es poinçts B & D; & icelle BD estant couppee en 2. également en F. Je dis que F est le centre du cercle proposé.



Car en icelle ligne droite BD, vn autre poinçt que F ne se-
ra pas le centre, veu que tout autre poinçt la diuise inégale-
ment. Si donc le poinçt F n'est le centre; le poinçt G hors la
ligne BD soit le centre (s'il est possible) duquel soient mencees
les trois lignes droictes GA, GE, & GC: d'autant que si G est
toit le centre, par la def. du cercle AG & GC seront egalles;
mais AE & EC sont aussi egalles, & GE commune: donc les
deux triangles GEA & GEC ont deux costez egaux à deux
costez chacun au sien, & la base AG egale à la base CG, & par
la 8. p. 1. les angles AEG & CEG seront egaux, & partant
droicts, & la ligne EG perpendiculaire par la 10. def. 1. Mais
l'angle BEA par la construction est droit, & tous les angles
droicts sont egaux par la 10. commune sentence: donc les 2.
angles AEG & BEA seroient egaux, sçauoir le tout à la par-
tie; ce qui est absurde. Donc le poinçt G n'est pas le centre.
Le mesme inconuenient s'ensuiura prenant tout autre poinçt
hors la ligne BD. Partant le poinçt F sera le centre du cercle
ABC requis à trouuer.

COROLLAIRE.

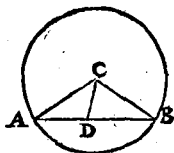
*De cecy est manifeste que si au cercle vne ligne droite coupe vne
autre ligne droite en deux également, & à angles droicts; le cen-
tre du cercle sera en icelle coupante. Car il a esté demonstrez qu'il est
impossible que le centre du cercle ABC soit ailleurs qu'au poinçt F.*

milieu de la ligne BD, laquelle coupe la ligne AC en deux également, & à angles droicts en E.

THEOR. I. PROP. II.

Si en la circonference d'un cercle, on prend deux poinçts à l'adventure; la ligne droicte mennee de poinçt à autre, tombera dans le cercle.

En la circonference de cercle AB, dont le centre est C, soient pris deux poinçts tels qu'on voudra A & B. Je dis que la ligne droicte AB mennee d'un poinçt à l'autre tombe dans iceluy cercle.



Car soit prins en icelle ligne droicte AB quelconque poinçt comme D, entre ses extremes A & B; puis du centre C, soient menees les lignes droictes CA, CD, CB. D'autant que les deux costez AC, BC du triangle ACB sont egaux, les angles BAC, ABC, seront egaux par la 5. p. 1. Mais l'angle externe ADC est plus grand que l'angle interne ABC par la 16. p. 1. donc le mesme angle ADC sera plus grand que l'angle BAC: & partant par la 19. p. 1. le costé AC sera plus grand que le costé CD: parquoy puis que CA est tiree du centre iusques à la circonference, la ligne droicte CD ne parviendra iusques à icelle circonference; & par consequent le poinçt D tombe dans le cercle. Le mesme sera demonstté de tout autre poinçt pris. Donc toute la ligne droicte AB tombe dans le cercle: ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

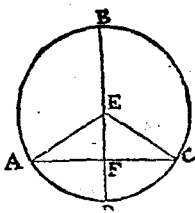
De cecy est manifeste, qu'une ligne droicte touchant un cercle, le touche seulement à un poinçt: car si elle le touchoit à deux poinçts, la partie de la ligne d'entre iceux poinçts tomberoit dans le cercle par ceste prop. parquoy elle coupperait le cercle, contre l'hypothese.

THEO. 2. PROP. III.

Si dans le cercle quelque ligne droicte passe

par le centre, & coupe en deux également
vne autre ligne droicte ne passant point par
le centre; elle la coupera à droicts angles:
& si elle la coupe à droicts angles, elle la
coupera aussi en deux également.

Au cercle ABCD soit la ligne droi-
cte BD, laquelle passant par le centre
E, coupe en deux également la ligne
droicte AC, laquelle ne passe point
par le centre; ie dis que BD coupe
aussy AC en angles droicts au
point F.



Car estans menees les deux lignes
CE & AE, les deux triangles AEF, CEF
auront les deux costez AF, FE, egaux
aux deux costez CF, EF, chacun au sien, & la base AE egale à
la base EC, & par la 8. p. 1. les deux angles au point F seront
egaux, & partant droicts par la 10. def. 1.

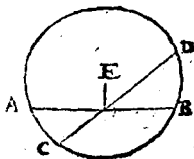
Ie dis pareillement que si BD coupe AC en angles droicts
au point F; qu'elle la coupera aussi en deux également. Car
les deux angles au point F estans droicts, ils seront egaux, &
l'angle A est egal à l'angle C par la 5. p. 1. estant A E C Iso-
cele, & le costé EF commun aux deux triangles AEF, CEF, &
par la 26. p. 1. AF sera egale à CF.

THEOR. 3. PROP. III.

Si dans le cercle deux lignes droictes ne pas-
sans point par le centre, s'entrecoupent, el-
les ne se couperont point l'une l'autre en
deux également.

Au cercle ACBD, duquel le centre
est E, soient deux lignes AB & CD
s'entrecoupans au point F, & des-
quelles ny l'une ny l'autre ne passe
par le centre E. Ie dis que l'une ou
l'autre est coupee inegalement.

Car du centre E estant menee la li-



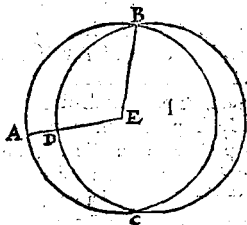
gne EF; si icelles lignes AB, CD se coupent en deux également au point F, EF les coupera au mesme point aussi en deux également, & à droicts angles par la 3. p. 3. & les angles AFE, EFB seront droits & egaux à CFE, EFD aussi droits & egaux: ce qui est impossible, n'estant AFE que partie de CFE: ainsi les lignes AB, CD ne se coupoient pas en deux également.

THEOR. 4. PROP. V.

Si deux cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles ABC, BCD se coupans l'un l'autre en B & C. Je dis qu'ils ne scauroient auoir vn mesme centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun E, duquel soient tirées deux lignes droictes: scauoir EB à la section B, mais EA coupant l'une & l'autre circonférence en A & D. Dóc puis que E est posé centre du cercle BCD



la ligne droicte ED sera egale à la ligne droicte EB par la 15. d. 1. Derechef puis que E est aussi posé centre du cercle ABC, la ligne droicte EA sera aussi egale à la mesme ligne EB, & par la 1. com. sent. ED, EA seront egales entr'elles, la partie au tout, ce qui est impossible: partât les deux cercles ne pouuoient auoir vn mesme centre.

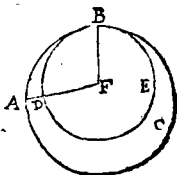
THEOR. 5. PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles ABC, & DBE se touchans l'un l'autre au dedans en B. Je dis qu'ils n'auront pas mesme centre.

Car s'il

Car s'il est possible, soit leur centre commun F, & d'iceluy soient menees les 2. lignes FA & FB; sçauoir est FB à l'atouchement B; & FA, couppant l'un & l'autre cercle en D, A, il est euidnt que la mesme absurdité aduiendra qu'en la precedente; sçauoir que FA, FD seroiēt egales: donc F ne pouuoit estre centre commun des cercles proposez.



S C H O L I E .

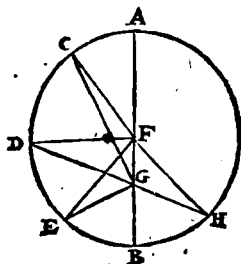
Euclide a proposé ce theoreme des cercles s'entre-touchant seulement au dedans, d'autant que des cercles qui se touchent par dehors il appert assez que leurs centres sont diuers: veu qu'un des cercles est dehors l'autre, & le centre est tousiours au milieu de son cercle. Ce que Dounot pouuoit icy remarquer, & non pas faire la prop. generale comme il a fait contre l'intention d'Euclide, laquelle il a changée en plusieurs endroits de ce liure, soit on en changeant les mots dont il a usé pour s'exprimer, ou en les retranchant, ou y adioustant: Comme pour exemple en la prop. suivante, au lieu qu'il y a selon Euclide, qui est menec par le centre, Dounot luy fait dire, qui coupe le centre: chose absurde, puis que par les def. le centre du cercle est un point lequel est indiuisible: Il fait encore la mesme faute à la 19. p. 3. & en la 8. de ce mesme liure il a retranché ces mots, De laquelle l'une passe par le centre, & les autres où l'on voudra. Et au lieu que ceste prop. ne contient que 5. parties, il en a adiousté une à la demonstration: sçauoir est celle qu'il fait la tierce. Item il a retranché les deux dernieres parties de la 31. p. de ce mesme liure.

THEOR. 6. PROP. VII.

Si au diametre du cercle se prend quelque point qui ne soit pas le centre, & d'iceluy point tombent quelques lignes droites en la circonference; la plus grande sera celle en laquelle est le centre, & la plus petite celle qui reste: Mais des autres tousiours la plus proche

de celle qui est menée par le centre, est plus grande que la plus esloignée : Et deux lignes droictes tant seulement venans d'iceluy point de part & d'autre du diametre, sont egales.

Au diametre AB du cercle ACD EB, duquel le centre est F, soit pris quelque point G outre le centre, & d'iceluy point G tombent tant qu'on voudra de lignes droictes GC, GD, GE, en la circonference.



Ie dis en premier lieu, que de toutes les lignes menees de G à la circonference, GA en laquelle est le centre, est la plus grande. Car du centre F estans menees à C, D, & E, les lignes FC, FD, & FE : le triangle GFC aura les deux costez GF, FC, plus grands que le costé GC par la 20. p. 1. Mais les lignes GF, FC sont egales aux lignes GF, FA, c'est à dire à toute la ligne GA : donc GA sera aussi plus grande que GC. Par mesme raison GA sera aussi plus grande que GD, & que GE : parquoy la ligne GA est la plus grande de toutes celles menees de G à la circonference.

Secondement, ie dis que GB est plus petite que GD, ou autre quelconque : car au triangle DFG, les deux costez DG & GF, seront plus grands que le troisieme DF par la 20. p. 1. ou que son egale BF. Que si on oste la ligne commune GF, le demeurant GD sera plus grand que le demeurant GB. Par mesme raison GB sera aussi plus petite que GE, & que GC, ou autre quelconque tombant de G à la circonference.

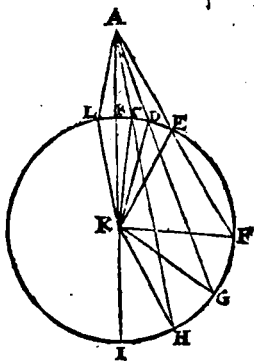
Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG, que GD, est plus grande qu'icelle GD : & pour la mesme raison GD plus grande que GE, & ainsi des autres s'il y en auoit davantage de tirees de F à la circonference. Car les deux costez GF, FC du triangle GFC, sont egaux aux deux costez GF, FD du triangle GFD, chacun au sien : mais l'angle CFG plus grand que l'angle DFG : & partant par la 24. p. 1. la base GC sera plus grande que la base GD. Pour mesme raison GC sera plus grande que GE : Item GD plus grande que GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui est menée par le centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignée.

Finale^{ment}, ayant fait l'angle BFH égal à l'angle BFE, & tiré GH: ie dis que les lignes GE, GH, sont égales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonference aucune autre égale à icelles. Car d'autant que les costez EF, FG du triangle EFG, sont égaux aux costez HF, FG du triangle HFG, & les angles EFG, HFG aussi égaux: les lignes GH, GE; qui sont de part & d'autre du diametre, sont égales entr'elles: Et il est euident qu'on ne pourra tirer du poinct G vne autre ligne dans le cercle, qui ne s'approche ou recule de la ligne BA tombant de costé ou d'autre de GE, ou GH; & par ce qui a esté mōstré cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles GE, GH. Dōc du poinct G à la circonference ne se peuuent tirer plus de deux lignes droictes qui soient égales entr'elles,

THEOR. 7. PROP. VIII.

Si on prend quelque poinct hors le cercle, & d'iceluy soient menees quelques lignes droictes dans la circonference, desquelles l'une passe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui passe par le cētre sera la plus grāde de toutes celles qui seront menees dans la circonference concaue. Quant aux autres, toujours la plus proche de celle qui passe par le centre est plus grande que la plus esloignee. Mais de celles qui tombent en la circonference conuexe, la plus petite est celle qui est comprise entre le poinct & le diametre. Quant aux autres, la plus esloignee de la plus petite est plus grande que celle qui en est plus proche; & n'y a que deux lignes droictes qui puissent tomber égales de part & d'autre de la plus petite.

Du point A hors le cercle BCD E, le centre duquel est K, soient menées les lignes droictes AF, AG, AH, AI couppans le cercle, desquelles AI passe par le centre K, & les autres comment que ce soit. Je dis que AI qui passe par le centre, est la plus grande de toutes : puis apres que AH qui est la plus proche d'icelle AI, est plus grãde que AG qui en est plus esloignee : Et pour mesme raison AG, plus grande que AF. Et au contraire. Je dis que AB cõprise entre le point A & la circonference conuexe, est la plus petite ligne, de toutes celles qui sont hors le cercle : puis apres que la ligne AC plus prochaine de la plus petite AB, est moindre que AD qui en est plus esloignee : Et par mesme raison icelle AD moindre que AE. Finablement ie dis que de A, on peut seulement mener deux lignes droictes, egales des deux parts de la plus petite AB.



Car du centre K estât menées aux points C, D, E, F, G, H, les lignes droictes KC, KD, KE, KF, KG, KH; les deux costez AK, KH, du triangle AKH, sont plus grands que la ligne AH: Mais les lignes AK, KH sont egales aux lignes AK, KI, c'est à dire à toute la ligne droicté AI: icelle AI sera donc aussi plus grande que AH. Pour la mesme raison AI sera plus grande que AG, & que AF. Parquoy la ligne AI est la plus grande, de toutes celles qui tombent de A dans le cercle.

Puis apres, d'autant que les costez AK, KH du triangle AKH sont egaux au costez AK, KG du triangle AKG, chacun au sien, & l'angle AKH, plus grand que l'angle AKG; la base AH sera plus grande que la base AG, par la 24. p. 1. Par mesme raison AH sera plus grande que AF; item AG plus grãde que AE. Parquoy la ligne plus proche de celle qui passe par le centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignee.

Derechef, puis qu'au triangle AKC, la ligne AK est moindre que les deux AC, CK; si on oste les egales BK, CK, demeurera encore AB moindre que AC. Par semblable raison AB sera plus grande que AD, & que AE. Parquoy la ligne AB est la plus petite de toutes celles qui son menées de A à la circonference conuexe.

Derechef, d'autant que dans le triangle ADK tombent deux lignes droictes AC, CK, des extremitéz du costé AK; icelles AC, CK seront moindres que AD, DK par la 21. p.1. desquelles si on oste les egales CK, DK, restera encore AC moindre que AD. Par mesme raison on prouuera que AC est moindre que AE: Item AD moindre que AE. Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB, est moindre que la plus esloignée.

Finablement, soit faict l'angle AKL egal à l'angle AKC, & soit menee la ligne AL. D'autant que les costez AK, KC du triangle AKC, sont egaux aux costez AK, KL du triangle AKL; & les angles AKC, AKL aussi egaux, les lignes droictes AC, AL de part & d'autre de la moindre AB, seront egales entr'elles par la 4. p.1. Or que nulle autre puisse estre egale à icelles, il est euident; car si on en mene vne autre du point A, il faudra qu'elle soit plus proche ou plus esloignée de AB; & par ce qui a esté demonstré cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AL. Donc du point A tomberont seulement deux lignes droictes egales de part & d'autre de la moindre AB.

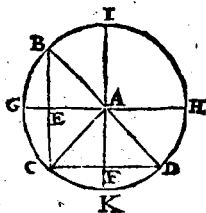
THEOR. 8. PROP. IX.

Si on prend quelque point au cercle, & d'iceluy point vers la circonference tombent plus de deux lignes droictes egales, le point pris est le centre du cercle.

Soit pris le point A au cercle BCD, & d'iceluy point tombent les trois lignes egales AB, AC, AD. Je dis que le point pris, A est le centre du cercle.

Qu'il ne soit ainsi: soient menees les lignes BC & CD, & apres les auoir couppé en deux egalement aux points E & F, d'iceux points au

point A soient menees les deux lignes EA & FA. D'autant que les deux triangles BEA & CEA ont deux costez egaux à

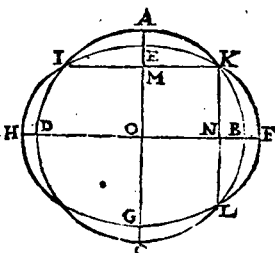


deux costez, chacun au sien; & les bases AB, AC aussi egales, les deux angles au point E seront egaux; & partant droicts, & par le corol. de la 1. p. 3. le centre du cercle sera en la ligne GAH, puis qu'elle diuise BC en deux egaleement, & à angles droicts en E. Par mesme discours le centre du cercle se trouuera aussi en KI. Il faut donc que ce soit à leur commune section A, n'y ayant point d'autre point commun.

THEOR 9. PROP. X.

Vn cercle ne coupe pas vn autre cercle en plus de deux points.

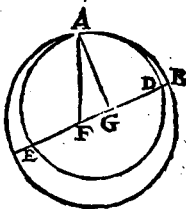
Soient les deux cercles ABCD & EFGH, se couppans aux trois points I, K, & L, s'il est possible. Item soient menees les deux lignes IK, & KL, lesquelles soient coupees en deux egaleement aux points M & N par la 10. p. 1. & soient menees les lignes MC, & NH à droicts angles sur IK, & KL. Il faudra par le corol. de la 1. p. 3. que les deux centres des deux cercles soient en la ligne AC; ils seront aussi en la ligne FH: Ce sera donc au point de la commune section O, & en ce faisant les deux cercles auroient mesme centre, contre la 5. p. 3. Donc les cercles ne se pouuoient couper en trois points.



THEOR. 10. PROP. XI.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, & l'on prend les centres diceux: ayant ioint iceux centres par vne ligne droicte & produite, elle tombera en l'attouchement des cercles.

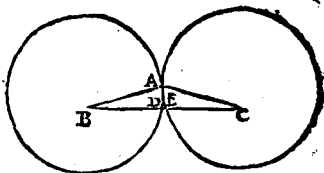
Soient deux cercles ABC & ADE se touchans intérieurement au point A; & F, soit le centre du cercle ABC, & G le centre du cercle ADE, lesquels centres sont nécessairement diuers, puis que par la 6. p. 3. deux cercles s'entre-touchant au dedans, ne peuvent auoir vn mesme centre. Je dis que la ligne droite menée d'un centre à l'autre, & produite, tombera sur le point de l'atouchement A. Car si elle n'y toûbe, qu'elle coupe l'un & l'autre cercle es points B, D, E, C, & de l'atouchement A, aux centres F & G, soient menées les lignes AF, AG. D'autant que par la 20. p. 1. les deux costez AG FG du triangle AFG, sont plus grands que le costé FA; & FA est égale à la ligne FB (pource que F a esté posé le centre du cercle ABC) aussi AG, GF seront plus grandes que FB: ostant donc FG commune, restera GA, plus grande que GB. Et partant puis que GA est égale à GD; (car G a esté posé centre du cercle ADE) GD sera aussi plus grande que GB, la partie que le tout: ce qui est absurde. Donc la ligne droite conioignant les deux centres des cercles ABC, ADE, & produite, ne tombera pas ailleurs qu'à l'atouchement A.



THEOR. II. PROP. XII.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors, la ligne droite menée d'un centre à l'autre, passera par l'atouchement.

Soient deux cercles se touchans au point A, desquels les centres soient B, & C. Je dis que si d'un centre à l'autre on mène une ligne droite, qu'elle passera par le point d'atouchement A.



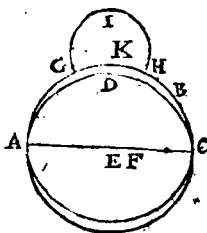
Autrement il s'ensuiura absurdité: car si icelle ligne ne passe par le point d'atouchement, qu'elle passe ailleurs s'il est possible, sçauoir aux points

D & E, & du point d'attouchemēt A soient menées les deux lignes AB, & AC, lesquelles par la 20. p. 1. seront plus grandes que BC, & par la def. du cercle, il s'en suit que BD, étant égale à BA, & CE à CA, que les deux lignes BD & CE, seroient plus grandes que BC, la partie que le tout. La ligne droicte menée d'un centre à l'autre, passera donc par l'attouchemēt A.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Vn cercle ne touche point vn autre cercle à plus d'un point, tant dehors que dedans.

Soient les deux cercles ABC, & AD C se touchans interieurement aux deux points A, & C, s'il est possible; & d'autant qu'ils ne peuēt auoir vn mesme centre par la 6. p. 3. soient les deux centres diuers E, & F, par lesquels étant tirée la ligne droicte EF, & produite de part & d'autre, il faut qu'elle tombe es points d'attouchemēt A & C, & par la def. du cercle, il faut que EA & EC soient égales. Itē FA, & FC. Mais FA est plus grande que EA. Partant FC sera aussi plus grande que EC, la partie que le tout: ce qui est impossible: Donc les deux cercles ne se toucheront point en deux points au dedans.



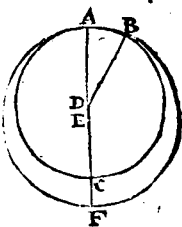
Parcillement il est impossible qu'ils se touchent exterieurement à plus d'un point: car si le cercle HIG, le centre duquel est K, pouoit toucher le cercle ABC en deux points, sçauoir H, & G, il faudroit que la ligne droicte menée par les deux centres E & K coupast les deux points d'attouchemēt H, & G. par la 12. p. 3. ce qui estoit impossible: ainsi les cercles ne se touchent point à plus d'un point, tant dehors que dedans.

SCHOLIE.

Clarius demonstre en ce lieu le theoreme suivant.
Si au demy diametre d'un cercle produit, on prend un point outre

le centre; le cercle descript d'iceluy point comme centre, par le point extreme du demy diametre, touchera le premier cercle en iceluy point extreme du semi-diametre, & tombera tout dehors le mesme cercle.

Soit le cercle ABC , duquel le centre est D , & au demy diametre AD prolongé, soit prins quelconque point E , duquel & de l'intervalle EA soit descript le cercle AF ; lequel ie dis toucher le cercle ABC au seul point A . Car ou le point E est dans le cercle ABC , ou dehors. S'il est dedans: d'autant que AE est plus grande que AD , c'est à dire que DC , & à plus forte raison que EC ; EF qui est egale à EA sera aussi plus grande que EC ; & partant le point F est hors le cercle ABC , & le cercle AF hors le mesme cercle pres du point F . Iceluy point F tombe



ra beaucoup d'avantage hors le cercle ABC , si E est hors le mesme cercle ABC . Si donc le cercle AF ne tombe tout dehors le cercle ABC , tellement qu'il le touche au seul point A ; que le cercle AF coupe ou touche le cercle ABC , en un autre point B , si faire se peut, & soit tirée la ligne DB . Ven donc qu'au diametre du cercle AF est pris le point D , outre le centre E ; DA sera la plus petite de toutes les lignes tombantes de D , par la 7. p. 3. Donc DA est moindre que DB , ce qui est absurde; car DA, DB tombant du centre D en la circonference d'un mesme cercle ABC , sont egales. Donc le cercle AF ne coupe ou touche le cercle ABC en un autre point que A , mais tombe tout dehors iceluy, ce qui estoit proposé.

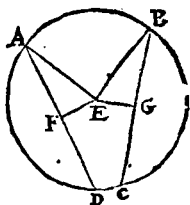
Que si au semi-diametre non produit, on prend un point outre le centre, le cercle descript d'iceluy point comme centre, par le point extreme du semi-diametre touchera pareillement le premier cercle, au susdit point extreme du demy diametre, & tombera tout dedans le mesme cercle. Comme si au semi-diametre AE , du cercle AF , on prend le point D , duquel & intervalle DA on descript le cercle ABC , iceluy tombera tout dedans AF , & le touchera au seul point A . Car puis qu'il a esté démontré cy dessus que le cercle AF tombe tout dehors le cercle ABC , pareillement tout cestuy-cy tombera dedans celuy là, tellement qu'ils s'entre-touchent au seul point A .

THEO. 13. PROP. XIII.

Dans vn cercle les lignes droictes egales sont

equidistantes du centre : & les equidistantes du centre sont egales entr'elles.

Au cercle ABCD, duquel le centre est E, soient deux lignes droictes, egales AD, & BC. Je dis qu'elles serot equidistantes du centre E.



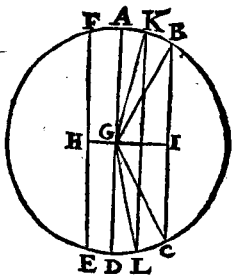
Qu'ainsi ne soit; par la 12. p. 1. du centre E soient menees les deux lignes EF, EG, perpendiculaires aux deux lignes AD, BC: puis soient tirees les deux AE, & BE. Or les deux lignes AD, & BC estans coupees en angles droicts par les perpendiculaires EF, & EG, elles seront aussi coupees en deux egale-ment par la 3. p. 3. & partant AF sera egale à BG. Pareillement AE estant egale à BE par la def. du cercle, & le quarré de AE estant egal aux deux quarrés de AF, FE, par la 47. p. 1. & son egal quarré de BE estant aussi egal aux deux quarrés de BG, GE; les deux quarrés de AF, FE seront egaux aux deux quarrés de BG, GE. Mais le quarré de AF est egal au quarré de BG; & par consequent le quarré de FE est egal au quarré de GE. Parquoy, la ligne FE sera egale à la ligne GE, & par la 4. def. du 3. AD, & BC seront equidistantes du centre du cercle propose.

* Quant à la seconde partie. Je dis que si AD, BC sont equidistantes du centre E, qu'elles seront egales; car ayant construit comme dessus, les perpendiculaires EF & EG seront egales par la 4. def. de ce liure, & couperont AD, BC en deux egale-ment par la 3. p. 3. & par deduction de la 47. p. 1. comme cy dessus, AF se trouuera egale à BG; & par consequent aussi leurs doubles AD; & BC seront egales; ce qui estoit à démon-
strer.

THEO. 14. PROP. XV.

Dans le cercle la plus grande ligne est le diametre: quant aux autres, tousiours la plus proche du centre, est plus grande que la plus esloignee.

Au cercle ABCDEF, duquel le centre est G, soit le diametre AD, & la ligne FE la plus proche d'iceluy, mais BC la plus esloignee. Je dis que de toutes ces lignes AD est la plus grande, & que FE est plus grande que BC.



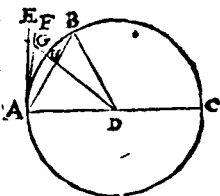
Car soient tirees du centre G les lignes GH, GI perpendicul. aux lignes FE, BC: & pource que BC est plus esloignee du cẽtre que FE, GI sera plus grande que GH, par la 4. def. de ce liure. Soit donc couppé d'icelle GI, la ligne GM egale à GH, & par M soit menee KML perpendiculaire à GI, & soient tirees les lignes GK, GB, GC, GL. Donc puis que les perpendiculaires GM, GH sont egales, les lignes KL, FE seront egalelement distantes du centre par la 4. def. 3. & partant egales entr'elles par la prop. precedente. Derechef, puis que GK, GL sont plus grãdes que KL par la 20. p. 1. & icelles GK, GL sont egales au diametre AD; iceluy diametre AD sera aussi plus grand que KL ou FE. Par mesme raison AD sera demonstré plus grand que toutes autres lignes.

Item des triangles GKL, & GBC, les costez GK, GL, GB, GC, sont egaux par la definition du cercle, & l'angle KGL est plus grand que BGC, & par la 24. p. 1. la base KL, ou son egale FE, sera plus grande que la base BC; & ainsi des autres.

THEOR. 15. PROP. XVI.

Si à l'extremité du diametre d'un cercle on leue vne ligne perpendiculaire, icelle tombera dehors le cercle; & entre icelle perpendiculaire & la circonference ne tóbera pas vne autre ligne droiẽte; & l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.

Du cercle ABC , soit le centre D , le diamètre AC , sur l'extrémité duquel A soit élevée la ligne perpendiculaire AE , par la 11. p. 1. Je dis premierement qu'icelle ligne AE tombe hors le cercle.



Car si elle tomboit dans iceluy, ainsi que AB , étant tirée DB , les deux angles DAB , DBA , seront égaux par la 5. p. 1. Mais DAB est droit par la construction, DBA sera donc aussi droit : ce qui est absurde, puis que par la 17. p. 1. deux angles d'un triangle sont moindres que deux droits. Donc la perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la mesme raison, elle ne tombera pas aussi en la circonférence, mais dehors, comme est AE .

Maintenant je dis que de A ne peut tomber entre la perpendiculaire AE , & la circonférence AB , vne autre ligne droite. Car s'il est possible que quelque ligne droite y tombe comme AF , de D soit menée sur icelle la perpendiculaire DG , couppant la circonférence en H , laquelle tombera nécessairement de la part de l'angle aigu DAF par le corol. de la 17. p. 1. Veu donc qu'au triangle DAG , les deux angles DAG , DGA , sont moindres que deux droits par la 17. p. 1. & par la constructiō DGA est droit, l'angle DAG sera moindre qu'un droit : & partant la ligne DA , ou son égale DH , sera plus grande que DG , par la 19. p. 1. la partie que le tout : ce qui est absurde. Entre la perpendiculaire AE , & la circonférence AB ne tombera donc pas vne autre ligne droite.

Je dis finalement, que tout l'angle du demy cercle BAC contenu du diam. AC , & circonférence AB , est plus grand que tout angle rectiligne aigu ; & que celui qui reste BAE contenu de la ligne droite AE , & circonférence AB , est plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puisque CAE est angle droit diuisé par la seule circonférence AB ; & qu'entre icelle circonférence AB & la ligne droite AE ne peut tomber vne autre ligne droite, l'angle BAE ne peut estre diuisé par aucune ligne droite, ainsi ne sera diminué par aucune ligne droite ; ny par consequent l'angle BAC ne sera augmenté par aucune ligne droite.

C O R O L L A I R E.

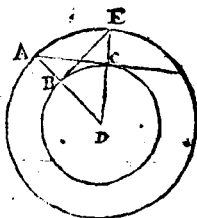
Par ces choses est manifeste qu'une ligne droite tirée perpendicu-

lairement de l'extrémité du diamètre, touche le cercle en un seul point. Car il a esté démontré qu'elle tombe hors le cercle : parquoy elle le touche seulement au point extrême du diamètre. Parquoy s'il estoit requis tirer une ligne droite par le point *A* donné en la circonférence du cercle, laquelle touche le cercle en *A*, nous tirerions de *A* au centre *D* la ligne droite *AD*, & sur icelle seroit élevée la perpendiculaire *AE*, laquelle touchera le cercle en *A*, comme il a esté démontré.

PROBL. 2. PROP. XVII.

D'un point donné, mener une ligne droite qui touche un cercle donné.

Soit le point donné *A*, duquel il faut mener une ligne droite qui touche le cercle donné *BC*, dont le centre est *D*.



Soit menée la ligne *AD* coupant le cercle *BC* en *B* : puis du centre *D*, & interval *DA*, soit décrit le cercle *AE*. Et apres avoir levé la perpendiculaire *BE* au bout du demy diamètre *BD* par la 11. p. 1. Soit menée la ligne *ED* coupant le cercle *BC* au point *C*, & du point donné *A*, à iceluy point *C*, soit menée la ligne *AC*, ie dis qu'elle touche le cercle au point *C*.

Car les deux triangles *ACD* & *EBD* ayans deux costez égaux, & l'angle *D* commun, la base *AC* sera égale à la base *EB*, & l'angle droit *ACD* égal à l'angle *EBD*, qui sera aussi droit. Et par le corol. de la preced. prop. la ligne *AC* touchera le cercle *BC* au seul point *C*.

SCHOLIE.

Nous avons enseigné en nostre Geometrie pratique Prob. 20. une autre maniere beaucoup plus facile que celle cy dessus.

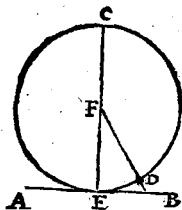
THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si une ligne droite touche un cercle, & du

centre à l'attouchement on mene vne ligne droicte, elle sera perpendiculaire à la touchante.

Soit la ligne droicte AB touchant le cercle CDE au point E, & d'iceluy point soit menee la ligne EC passant par le centre F. Je dis qu'elle sera perpendiculaire à AB.

Car si elle ne l'est, soit menee FG perpendiculaire à AB coupant la circonference en D. Veu donc qu'au triangle EFG les deux angles FEG, FGE sont moindres que deux droicts par la 17. p. 1. & FGE est droict par la construction, FEG sera moindre qu'un droict; & par la 19. p. 1. la ligne FE, ou FD son egale sera plus grande que FG, la partie que le tout; ce qui est absurde. Donc FE est perpendic. à AB.

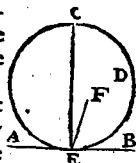


THEO. 17. PROP. XIX.

Si vne ligne droicte touche vn cercle, & au point de l'attouchement est leuee vne perpendiculaire; en icelle sera le centre du cercle.

Soit la ligne droicte AB touchant le cercle CDE, au point E, & sur iceluy soit leuee la perpendiculaire EC. Je dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne.

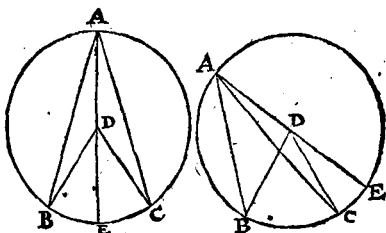
Autrement il sera dehors icelle ligne; soit donc au point F, s'il est possible, & d'iceluy point soit menee la ligne EF au point de l'attouchement E, elle sera aussi perpendiculaire à AB, par la 18. p. 3. ce qui est impossible: car les deux angles AEC, & AEF, seroient droicts, & egaux, la partie au tout: partant le centre du cercle n'estoit pas hors de la ligne EC, ains dedans.



THEOR. 18. PROP. XX.

Dans le cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonference quand iceux angles ont vne mesme circonference pour base.

Dans le cercle ABC , soient les 2. angles, sçavoir BAC en la circonference, & BDC au centre, ayant mesme circonfere-



nce BC , pour base. Je dis que BDC sera double de BAC .

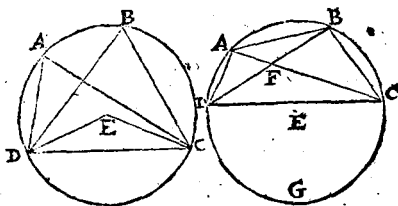
Car premierement si les lignes AB , AC enclosent les lignes DB , DC , comme en la premiere figure par le centre D estant menee la ligne droicte ADE , & les lignes DA , DB , & DC estans egales, les deux triangles ADB , & ADC seront Isosceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles egaux sur les bases AB , & AC . Mais l'angle exterieur BDE par la 32. p. 1. est egal aux deux angles interieurs DAB , & DBA , qui sont egaux: partant il sera aussi double du seul DAB , par mesme discours EDC se trouuera double de DAC ; & par cōsequent les deux ensemble BDC seront doubles des deux ensemble BAC .

Que si l'angle de la circonference A est comme en la seconde figure, il s'ensuiura tousiours le mesme, sçavoir que BDC sera double de BAC .

Car apres auoir mené la ligne ADE , tout ainsi comme cy dessus par la 32. p. 1. l'angle exterieur BDE sera egal aux deux opposez interieurs ABD , & DAB , & double du seul DAB estant le triagle Isoscele, par mesme discours CDE sera double de CAD , & par les com. sent. Si de BDE double de BAE on oste CDE , double de CAE , le demeurant BDC sera double du demeurant BAC .

THEOR. 19. PROP. XXI.

Dans le cercle, les angles qui sont en vne mesme section sont egaux entr'eux.



Toute section est ou plus grande ou plus petite que le demy cercle. Soit donc premierement au cercle ABCD, le centre duquel est E, vne plus grande section DABC, en laquelle soient les angles DAC & DBC. Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Car si du centre E on meine les deux lignes ED, & EC; l'angle du centre DEC sera double de l'angle en la circonferen-
ce DAC par la 20. p. 3. & par la mesme prop. il sera aussi double de l'autre angle DBC. Mais les choses qui sont moitié d'une mesme, sont egales entr'elles; ainsi les angles A, & B seront egaux entr'eux.

Soit maintenant la section, plus petite que le demy cercle cōme en la 2. figure. Je dis que les deux angles DAC, DBC estans en la mesme section DABC sont egaux.

Car si on meine la ligne AB, il se fera vne section BGA plus grande que le demy cercle; & comme nous auons demon-
stré cy dessus les deux angles ADB & BCA, qui sont en vne mesme section AGB seront egaux; pareillement aux deux triangles DAF, & CBF, les angles opposez au point F sont egaux par la 15. p. 1. & parce que a esté demonstré à la 32. p. 1. le troisieme angle DAF sera egal au troisieme angle CBF, ce qui estoit à prouuer.

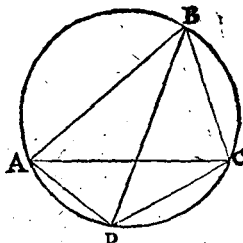
PROBL. 20. PROP. XXII.

Les figures de quatre costez inscrites au
cercle

cercle, ont les angles opposez egaux à deux angles droits.

Soit la figure de quatre costez inscrite au cercle ABCD. Je dis que les angles opposez ABC, ADC, item BAD, BCD, sont aussi egaux à deux droicts.

Car si on meine les deux lignes AC, & BD, les deux angles ACD, & ABD estans en vne mesme section ABCD, seront egaux par la 21. p. 3. Pareillemēt DBC, & CAD, estans en vne mesme section DABC, seront egaux : donc les deux angles

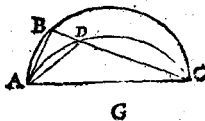


sous le point B seront egaux aux deux DAC, & DCA, lesquels avec les deux du point D, sont egaux à deux droicts par la 32. p. 1. partant aussi les deux sous le point B avec les deux sous le point D, c'est à dire le total ABC, avec le total ADC seront egaux à deux droicts. Nous demonsturerons en la mesme maniere, que les deux angles BAD, BCD, sont egaux à deux droicts. Car derechef les deux angles ABD, ACD, sont egaux. Item les deux BCA, BDA ; & partant tout l'angle BCD sera egal aux deux ABD, ADB, lesquels avec BAD sont egaux à deux droicts par la 32. p. 1. Donc aussi les deux BCD, BAD seront egaux à deux droicts.

THEO. 21. PROP. XXIII.

Deux sections de cercles semblables & inegales, ne se mettront pas dessus vne mesme ligne droicte, & de mesme part.

Car si faire se peut soient deux sections de cercles semblables, & inegales ABC, & ADC sur la ligne droicte AC, & de mesme costé. Il est evident qu'elles sentre-couperont seulement es



pointes A & C, puis que par la 10. p. 3. vn cercle ne coupe pas vn cercle en plus de deux pointes; & partant la circonférence d'une section sera toute dehors la circonférence de l'autre. Soit donc menée la ligne droite CB coupant les circonférences en D & B, & tirées les deux lignes BA, & DA: par la définition des semblables sections, les deux angles ABC, & ADC seront égaux, ce qui est absurde: car par la 16. p. 1. l'angle extérieur ADC doit estre plus grand que l'opposé intérieur B: donc les deux sections ABC, & ADC estans semblables, & inégales, ne se pouuoient mettre sur la mesme ligne AC, & de mesme part.

THEOR. 22. PROP. XXIII.

Semblables sections de cercle estans constituées sur lignes droictes égales, sont égales entr'elles.

Soient deux sections de cercles semblables ABC, & DEF constituées sur lignes égales AC, & DF. Je dis qu'elles sont égales.



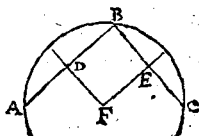
Autrement, si elles estoient inégales, il s'ensuiuroit que 2. sections semblables & inégales pourroient estre posées sur lignes droictes égales contre la 23. p. 3. donc les deux sections seront égales.

PROB. 3. PROP. XXV.

La section d'un cercle estant donnée, décrire le cercle duquel elle est section.

Soit la section de cercle ABC, de laquelle il faut trouuer le centre pour acheuer le cercle d'icelle section.

Soient pris trois points à l'aduanture en icelle section A, B, C: & après auoir mené les deux lignes AB & BC & icelles couppees en deux également en D & E, d'iceux points soient le-



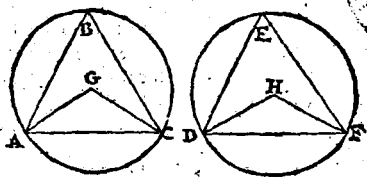
uées les perpendiculaires DF , & EF se rencontrans au point F . Je dis que F est le centre cherché pour acheuer le cercle.

Car par le corol. de la 1. p. 3. le centre sera à la ligne DF . Il sera aussi en EF : ce sera donc au point F , qui leur est commun.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient les cercles egaux ABC & DEF , desquels les centres sont G & H , & les angles dans iceux egaux, sçavoir aux circonferences, B egal à



E , & aux centres, G egal à H . Je dis que les circonferences AC , & DF , sur lesquelles iceux angles s'appuyent, sont egales.

Car d'autant que les cercles sont egaux, les lignes tirees du centre à la circonferance seront egales par la 1. d. 3. Ainsi les 2. triangles AGC , & DHF ont deux costez egaux à 2. costez, chacun au sien, & l'angle G egal à l'angle H , & par la 4. p. 1. la base AC sera egale à la base DF . Pareillement l'angle B estant egal à l'angle E , la section ABC sera semblable à la section DEF , par la 10. def. 3. & par la 24. p. 3. elles seront egales; & qui de cercles egaux oste sections egales, sçavoir ABC & DEF , le demeurant AC sera egal au demeurant DF : ainsi les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales.

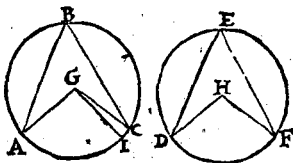
THEOR. 24. PROP. XXVII.

Aux cercles egaux, les angles qui s'appuyent

G ij

dessus circonferences egales, sont egaux entr'eux, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient deux cercles egaux A B C & D E F, les centres desquels s'ont G & H, & sur les circonferences egales A C & D F soient les angles A B C & D E F tous deux en la circonference. Item A G C & D H F au centre; ie dis que les angles G & H seront egaux.



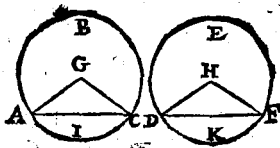
Autrement l'un d'iceux sera plus grand ou plus petit. Soit donc A G C plus grand que D H F, s'il est possible, il faudra par la 23. p. 1. sur A G faire l'angle A G I. egal à D H F, & par la 26. p. 3. les circonferences A I & D F seront egales: ce qui est contre nostre hypothese; car nous auions pose AC egale à D F. Il faudroit donc que A G & A I fussent egales contre la 8. commune sentence. Donc l'angle A G C n'estoit point plus grand que l'angle D H F.

L'egalité des angles du centre estant prouuee, les angles de la circonference sont entendus egaux, puis qu'ils sont moitiez d'iceux par la 20. p. 3.

THEOR. 25. PROP. XXVIII.

Aux cercles egaux les lignes droictes egales prennent circonferences egales, sçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.

Soient les deux cercles egaux A B C, & D E F, desquels les centres soient G & H, & dans iceux deux lignes droictes egales A C, & D F. Ie dis que les circonferences qu'elles coupent sont egales,



ſçauoir la petite AIC à la petite DKF, & la grande ABC, à la grande DEF.

Qu'il ne ſoit ainſi, des centres G, & H, ſoient menees les lignes GA, GC, HD, HF, qui ſeront egales par la premiere def. 3. eſtant les cercles egaux, & la ligne droite AC eſtant egale à la ligne droite DE, les deux triangles AGC, & DHF auront les 3. coſtez egaux aux 3. coſtez, chacun au ſien, & par la 8. p. 1. l'angle G ſera egal à l'angle H, & par la 26. p. 3. ils ſ'appuyeroſt deſſus circonferences egales AIC, DKF, & qui de cercles egaux oſte icelles circonferences egales, reſteront les circonferences ABC, DEF auſſi egales.

THEOR. 26. PROP. XXIX.

Aux cercles egaux, les circonferences egales ſouſtiennent lignes droictes egales.

Es cercles egaux ABC, & DEF (en la precedente figure) deſquels les centres ſont G & H, ſoient les circonferences ABC, DEF egales ſouſtendues des lignes droictes AC & DE. Je diſ qu'icelles ſouſtendantes ſont egales.

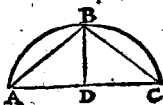
Qu'ainſi ne ſoit, des centres G, & H ſoient menees les lignes droictes GA, GC, HD, HF. Or d'autāt que l'on poſe les circonferences ABC, DEF egales, les angles G & H (qui ſ'appuyent deſſus circonferences egales, ſeront egaux par la 27. p. 3. pareillement les coſtez GA, & GC, eſtans egaux aux coſtez HD & HF, par la 1. def. 3. la baſe AC ſera egale à la baſe DE, par la 4. p. 1. ce qui eſtoit à prouuer.

PROB. 4. PROP. XXX.

Coupper vne circonſerence en deux egale-
ment.

Soit la circonſerence donnee ABC, laquelle il faut coupper en deux egale-
ment.

Soit menee la ligne droite AC, laquelle ſoit coupee en deux egale-
ment au point D, duquel point il faut mener la



perpendiculaire DB. Je dis que la circonference ABC est coupee en deux également en B.

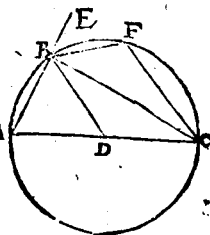
Qu'il ne soit ainsi il faut mener les lignes AB, & BC, & pour autant que les deux costez AD, & DB du triangle ADB sont egaux aux deux costez CD, & DB du triangle CDB, & les deux angles au point D egaux par la 4. p. 1. la base AB sera egale à la base BC, & par la 28. p. 3. les circonférences AB, & BC seront egales.

THEOR. 27. PROP. XXXI.

Au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit : & celuy qui est en la plus grande section est plus petit qu'un droit : Mais celuy qui est en la plus petite est plus grand qu'un droit. Et d'avantage l'angle de la plus grande section est bien plus grand qu'un droit : mais l'angle de la plus petite section est plus petit qu'un droit.

Au cercle ABC duquel D est centre & AC diametre, soit constitué l'angle ABC, dans le demy cercle ABC; & en la plus grande section BAC, l'angle BAC; mais en la moindre section BFC, l'angle CFB. Je dis en premier lieu que l'angle ABC au demy cercle est droit.

Car apres avoir mené la ligne BD & continué AB iusques en E, il est evident que les triangles ABD, & CBD sont Isoceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles sur la base egaux, sçavoir BAD à ABD, & CBD à BCD; & partant les deux ensemble ABD & CBD seront egaux aux deux ensemble BAD & BCD. Mais par la 32. p. 1. l'exterieur CBE est egal à iceux deux angles BAD, BCD; & partant les deux au point B, faisans le seul ABC, seront aussi egaux à l'exterieur CBE, & par la 10. def. 1. ABC & CBE seront tous deux angles droits.



Je dis en second lieu que l'angle BAC qui est en la plus grande section CAB est plus petit qu'un droit: ce qui est aisé à prouver par la 32. p. 1. d'autant que l'angle ABC, estant droit, les deux autres ensemble ne vaudront qu'un droit; ainsi l'angle BAC est plus petit qu'un angle droit, & ainsi des autres.

Je dis tiercemét que l'angle BFC qui est en la petite section CFB est plus grãd qu'un droit: car par la 22. p. 3. la figure de 4. costés ABFC inscrite au cercle, a les deux angles opoiez egaux à deux droits; sçavoir A & F. Mais nous auons prouvé A estre plus petit qu'un droit; par consequent F sera plus grand.

Je dis en quatriesme lieu que l'angle de la plus grande section, compris de la ligne droite BC, & de la periphèrè BAC est plus grand qu'un angle droit: ce qui est euident, car l'angle droit ABC n'est que partie d'iceluy angle mixte CBA.

Finablement ie dis que l'angle de la petite section, compris de la ligne droite BC & circonference BFC, c'est à dire l'angle mixte CBF, est moindre qu'un droit, car iceluy n'est que partie de l'angle droit CBE.

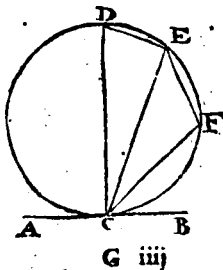
C O R O L L A I R E.

De ce que dessus est manifeste qu'un angle d'un triangle estant egal aux deux autres, est droit.

T H E O R. 28. P R O P. XXXII.

Si quelque ligne droite touche le cercle, & de l'attouchement on meine quelque ligne droite couppant le cercle: les angles qu'elle faict à la touchante sont egaux à ceux qui sont aux sections alternes du cercle.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE, au point C, & d'iceluy point soit menée CE, couppant le cercle en deux sections inegales. Je dis que l'angle ECB est egal à tout angle qui peut estre fait en la plus grande section CDE, & que ECA est egal à tout angle qui peut estre fait en la plus petite section CFE.



Qu'il ne soit ainsi, apres auoir mené par le centre le diamètre CD, soient menees les lignes DE, EF, FC. Maintenant par la 31. p. 3. l'angle DEC dans le demy cercle est droit, & par la 32. p. 1. les deux autres D, & ECD sont egaux à vn droit, c'est à dire à DCB, lequel est droit par la 18. p. 3. desquels si on oste l'angle commun ECD, le demeurant ECB sera egal au demeurant D. Pareillement par la 22. p. 3. la figure de 4. costez inscrite au cercle CFED aura les angles opposez F, & D egaux à deux droicts: c'est à dire aux deux ECA, ECB, desquels si on oste choses egales, c'est à sçauoir les angles D, & ECB egaux, les demeurans F, & ECA seront egaux.

Que si la ligne couppant le cercle estoit le diamètre d'iceluy, tous les angles tant en l'un qu'en l'autre demy cercle, seroient droicts par la 31. p. 3.

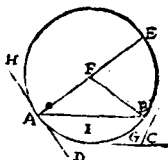
PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Deffus vne ligne droite donnee, descrire la section d'un cercle capable d'un angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnee AB, & l'angle rectiligne C, il faut sur icelle ligne descrire vne section de cercle comprenant vn angle egal à l'angle donné C.

Soit construit l'angle BAD egal à l'angle donné C par la 23. p. 1. & du point A leuë la perpendiculaire AE, sur la ligne AB, & au point B, soit fait l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23. p. 1. rencontrant la perpendiculaire AE au point F: donc par la 6. p. 1. FA, FB seront egaux: Partant le cercle descript du centre F & interual FA passera aussi par le point B; & apres auoir mené la ligne BE, l'angle BAD qui est egal à l'angle C, sera egal à l'angle E, descript dans la section AEB; par consequent l'angle E sera egal à l'angle C, ainsi nous auons descript vne section de cercle sur la ligne donnee AB, capable d'un angle egal à vn angle donné C.

Que si l'angle donné eust esté obtus comme G, il eust fallu construire l'angle BAH egal à iceluy, & chercher le centre F comme dessus, pour descrire le cercle AEBI, & par la 32. p.



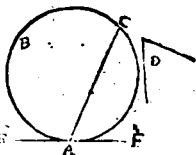
3. la plus petite section AI Beust compris vn angle egal à l'angle G.

Que si l'angle donné eust esté droit, ne falloit que descrire vn demy cercle sur la ligne donnée.

PROBL. 6. PROP. XXXIV.

D'un cercle donné, oster vne section capable d'un angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC, duquel il faut oster vne section capable d'un angle rectiligne egal à l'angle donné D.



Soit menee la ligne droite EF touchant le cercle en A : puis par la 23. p. 1. soit fait sur icelle ligne, & au point A l'angle rectiligne FAC egal au donné D : faisant que la ligne droite AC coupe le cercle en deux sections. Je dis que tout angle qui sera fait en la section ABC, sera egal au donné D. Car il sera egal à l'angle FAC par la 32. p. 3. lequel est egal à D par la construction.

THEO. 29. PROP. XXXV.

Si dans vn cercle deux lignes droictes se coupent l'une l'autre, le rectangle contenu des deux pieces de l'une, est egal au rectangle compris des deux pieces de l'autre.

Soient deux lignes droictes AB, CD dans le cercle ACBD, s'entre-coupant en E. Je dis que le rectangle compris des deux pieces AE, & EB, est egal au rectangle contenu des deux pieces CE & ED.

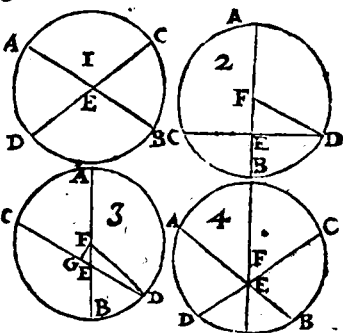
Or les lignes qui se coupent dans le cercle, ou elles pas-

sent toutes deux par le centre, ou bien l'une d'icelles seulement, ou ny l'une ny l'autre. Que si elles passeroient toutes deux par le centre, comme en la première figure, les quatre parties seront égales, & par ainsi la proposition est évidente.

Que si la seule AB, passe par le centre F, & divise DC en deux également comme en la 2. figure; elle la divisera aussi à droicts angles, par la 3. p. 3. Et apres avoir mené FD, il est évident par la 5. p. 2. que le rectangle de AE & EB avec le carré de EF, seront égaux au carré de FB ou FD, (car la ligne AB est coupée en deux également au point F, & en deux inégalement en E) & par la 47. p. 1. le carré de FD étant égal aux deux carrés de FE & ED, en ôtant le carré commun de FE, le demeurant rectangle de AE & EB se trouvera égal au carré de ED, comme il a été démontré à la 14. p. 2. ou au rectangle de CE, ED.

Que si ligne AB passant par le centre F (comme en la troisième figure) divise inégalement CD, ne passant point par le centre, il s'ensuivra la même chose. Car apres avoir mené la perpendiculaire FG, & la ligne droite FD: pour autant que AB est coupée en deux également en F, & en deux inégalement en E, le rectangle de AE & EB avec le carré de EF, sera égal au carré de FB, ou de son égale FD par la 5. pro. 2. Mais le carré de FE est égal aux deux de FG, & GE par la 47 p. 1. Pareillement le carré de FD est égal aux deux de FG & GD par la 47. p. 1. Donc aussi le rectangle de AE & EB, avec les deux carrés de FG & GE sera égal aux deux carrés de FG, & GD: & partant en ôtant le carré commun de FG, le demeurant carré de GD sera égal au rectangle de AE & EB, & carré de GE. Par même discours & par la même 5. p. 2. le carré de GD est égal au rectangle de CE & ED, & carré de GE, en ôtant donc le carré commun de GE, le rectangle de AE & EB se trouvera égal au rectangle de CE, & ED.

Que si ny l'une ne l'autre des deux lignes ne passe par le centre F, il s'ensuivra la même: car si on mène le diamètre HI, passant par le point commun E de la 4. figure, le re-



l'angle de IE & EH, sera egal au rectangle de CE, & ED, comme cy dessus a esté dit ; & par mesme raison aussi au rectangle de AE & EB ; & par la 1. com. sent. les deux rectangles de AE & EB , item de CE & ED seront egaux.

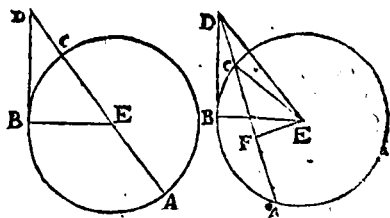
THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droictes, l'une desquelles coupe le cercle & l'autre le touche ; le rectangle contenu de toute la coupante, & de sa partie prise dehors entre le point & la circonference conuexe, est egal au quarré de la touchante.

Hors le cercle A BC soit pris le point D, duquel soit menée la ligne DA, coupant le cercle en C & la ligne DB touchant iceluy cercle en B. Je dis que le rectangle de la toute AD, & de la partie CD prise entre le point donné, & le cercle, est egal au quarré de la touchante BD.

Qu'il ne soit ainsi : du centre E au point d'attouchement B, soit menée la ligne EB, laquelle par la 18. p. 3. sera perpendiculaire à icelle touchante BD : & pour autant que la ligne AC est coupée en deux également au point E, & à icelle est adioustée directement CD, le rectangle de la totale AD, & de sa partie CD avec le quarré de CE, ou BE son egale, est egal au quarré de DE par la 6. p. 2. ou aux deux de DB & BE par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de BE, le demeurant quarré de BD sera egal au demeurant rectangle de AD, & CD par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passoit pas le centre du cercle proposé comme en la seconde figure, faudra démonstrer en ceste for-



te: Du centre E soient menées les lignes EB, EC, ED, & la perpendiculaire EF, laquelle coupera AC en deux également par la 3. p. 3. Et par la 6. p. 2. comme cy dessus, le rectangle de AD & CD avec le quarré de CF, sera égal au quarré de DF, auxquelles choses égales si on adiouste le quarré commun de EF le rectangle de AD & DC avec les deux quarrés de CF, & FE, ou le seul de CE, par la 47. p. 1. sera égal aux deux quarrés de DF, & FE, ou au seul de DE par la 47. p. 1. ou aux deux de DB & BE par la même 47. p. 1. Que si on oste les quarrés égaux de CE, & BE, les demeurans quarré de DB, & le rectangle de AD & CD seront égaux.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste que si d'un point pris hors le cercle s'ont tirées plusieurs lignes coupant le cercle; les rectangles compris sous chacune d'icelles & sa partie extérieure, seront égaux entr'eux: pource que chacun de ces rectangles sera égal au quarré de la ligne touchante.

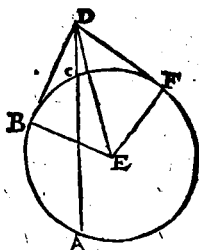
Appert aussi que deux lignes droïtes tirées d'un même point, & touchant le cercle, sont égales entr'elles: puis que le quarré de chacune d'icelles sera égal au rectangle de la ligne tirée du même point & coupant le cercle, & de la partie extérieure d'icelle.

Est aussi évident que d'un même point pris hors le cercle peuvent estre seulement tirées deux lignes droïtes qui touchent le cercle: Car il faudroit qu'elles fussent toutes égales entr'elles; & partant du point D pourroient estre menées plus de deux lignes égales de part & d'autre de DE, contre la 8. p. 3.

THEOR. 31. PROP. XXXVII.

Si de hors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy point tombent deux lignes droïtes au cercle, l'une desquelles coupe le cercle, & l'autre l'atteint: Si le rectangle compris de toute la coupante, & de la partie prise entre le point & la circonference conuexe, est égal au quarré de celle qui atteint; celle qui atteint touchera le cercle.

Hors le cercle ABC soit pris le point D, & d'iceluy soit menee la ligne droite DA qui coupe le cercle au point C, & la ligne DB qui atteint le cercle au point B; & soit le rectangle de la toute AD, & de la partie CD, egal au quarré de DB. Je dis que DB, touche le cercle en B.



Car du point D estant menee la ligne DF touchant le cercle au point F, & du centre E les lignes EB, ED, EF. par la 36. p. 3. le quarré de DF sera egal au rectangle de AD & CD. Mais par hypothese le quarré de DB, est aussi egal à iceluy rectangle: & partant les quarrés & les lignes DF & DB seront egales. Item EF, & EB sont aussi egales par la def. du cercle, & ED à soy-mesme: ainsi les deux triangles DBE, & DFE, ayans les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, les angles B, & F seront egaux par la 8. p. 1. & F estant droit par la 18. p. 3. aussi B sera droit; & par le coroll. de la 16. p. 3. la ligne DB touchera le cercle.

Fin du troisieme Element.



ELEMENT

QVATRIESME.

DEFINITIONS.



Ne figure rectiligne se dict estre inscrite en vne figure rectiligne, lors qu'un chacun des angles de la figure inscrite, touche vn chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

2 Semblablement aussi la figure se dict estre circonscrite à vne figure, quand vn chacun costé de la circonscrite touche vn chacun angle de l'inscrite.

3 Mais la figure rectiligne se dit estre inscrite au cercle, quand vn chacun angle de la figure inscrite, touche la circonference du cercle.

4 Et la figure rectiligne se dit estre circonscrite au cercle, quand vn chacun des costez de la figure circonscrite, touche la circonference du cercle.

5 Semblablement aussi le cercle se dit estre

inscrit en vne figure reſtiligne, quand la circonference du cercle touche vn chacun coſté de la figure en laquelle il eſt inscrit.

6 Mais le cercle ſe dit eſtre circonſcrit à vne figure, quand la circonference du cercle touche vn chacun des angles d'icelle figure à l'entour de laquelle il eſt deſcrit.

7 Vne ligne droicte ſe dit eſtre accommodée dans le cercle, quand les extremitéz d'icelle ſont en la circonference du cercle.

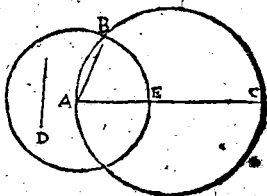
PROBL. I. PROP. I.

Au cercle donné, accommoder vne ligne droicte egale à vne ligne droicte donnée, laquelle ne ſoit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut accommoder vne ligne droicte egale à la ligne droicte donnée D, qui n'eſt pas plus grãde que AC diametre d'iceluy cercle.

Soit du diametre AC coupee AE portion egale à la ligne D. En apres du centre A, & interual AE ſoit deſcrit le cercle BE couppant le cercle donné au poinct B, & ſoit menee la ligne droicte AB. Je diſ que AB eſt egale à D.

Car par la deſ. du cercle AB & AE ſont egales, & par la cõſtruction icelle AE eſt egale à D, & par la 1. com. ſent. AB & D ſeront egales.



PROB. 2. PROP. II.

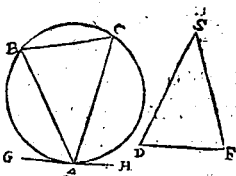
Dans vn cercle donné inscrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire vn triangle equiangle au donné DSF.

Soit menee la ligne GH, qui touche le cercle au point A, auquel point soient faits les deux angles GAB égal à l'angle D, & HAC égal à l'angle F par la 23.p.

1. Puis soit mené BC. Je dis que le triangle inscrit ABC est equiangle au donné DSF.

Car puis que la ligne AB coupe le cercle en deux sections, l'angle C en la grande section sera égal à l'angle de l'attouchement GAB; & par conséquent à l'angle D par la 32.p.3. & par la mesme raison, la ligne AC coupant le cercle, l'angle B se trouuera aussi égal à l'angle F, & par la 32.p.1. le troisieme A sera aussi égal à l'angle S; & par conséquent les triangles seront equiangles.

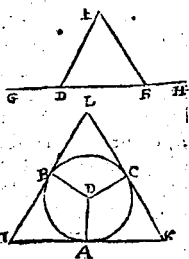


PROB. 3. PROP. III.

A l'entour d'un cercle donné, descrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire vn triangle equiangle au triangle donné DEF.

Soit prolongé le costé DE de part & d'autre iusques en G, & H, & du centre D soit menee à l'aduanture la ligne DA, sur laquelle au point D soient construits les deux angles ADB égal à EDG, & ADC égal à l'angle HFE par la 23.p.1. & aux trois lignes DA, DB, DC, soient menees les trois lignes perpendiculaires IK, IL, KL, lesquelles toucheront le cercle es points A, B, C, par le coroll. de la 16.p.3.



& icelles

icelles se rencontrant aux trois poinçts I, K, L, feront le triangle IKL, lequel ie dis estre le triangle demandé.

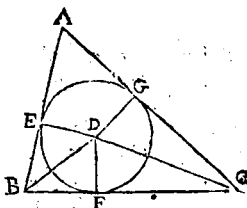
Car il appert desia qu'il est circonscrit au cercle, puis que tous les costez d'iceluy le touchent es poinçts A, B, C. Et d'autant que toute figure de quatre costez a les quatre angles egaux à 4. angles droicts (comme nous auons demonstté à la 32. p. 1.) le trapeze A D B I aura les 4. angles egaux à quatre droicts. Mais les deux A & B estans droicts par la construction, les deux autres D & I seront egaux à 2. droicts c'est à dire egaux aux deux GDE & FDE, qui sont egaux à deux angles droicts par la 13. p. 1. & par construction ADB est egal à GDE: donc l'angle I sera egal à l'angle EDF. Par mesme discours l'angle K se trouuera egal à l'angle DFE. Et par la 32. p. 1. le troisieme L sera egal au troisieme E: ainsi les triangles circonscrits & donnez seront equiangles.

PROBL. 4. PROP. IIII.

Dans vn triangle donné descrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, dans lequel il faut descrire vn cercle.

Soient les deux angles B & C coupez en deux également par la 9. p. 1. par les deux lignes BD & CD, se rencontrans au poinçt D: Item d'iceluy poinçt de rencontre D, soient menees les trois



perpendiculaires DE, DF, DG, par la 12. p. 1. & du centre D, & interual DE soit descript le cercle EFG. Ie dis qu'iceluy cercle est inscrit au triangle donné ABC.

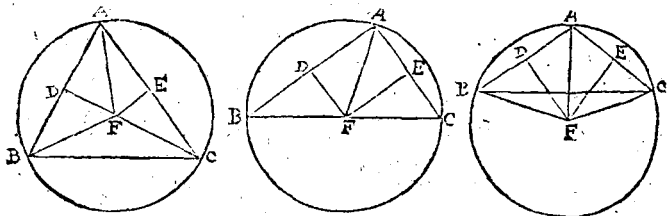
Car l'angle DEB estant droit, il sera egal à l'angle DFB, qui est pareillemét droit, & le total B estant couppé en deux également, les deux DEB & DBE, seront egaux aux deux DFB, & FBD, & le costé DB estant commun, le costé FD sera egal au costé DE par la 26. p. 1. Par mesme discours DG se prouuera egale à DF, & par la 1. com. sent les trois lignes DE, DF, DG, seront égales: ainsi le cercle EFG descript de l'interualle DE, sera aussi de l'interualle des deux autres: & partant il passera par les poinçts E, F, G, & en iceux touchera les trois

costez du triangle par le corol. de la 16. p. 3. pource qu'à iceux costez sont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5. d. 4. le cercle EFG sera inscrit au triangle donné : ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. V.

A l'entour d'un triangle donné, descrire un cercle.

Soit le triangle donné A B C, à l'entour duquel il faut descrire un cercle.



Soient coupez également les deux costez AB au point D, & AC au point E par la 10. p. 1. & par la 11. p. 1. d'iceux points D, & E soient leuees les perpendiculaires DF, EF, se rencontrans au point F, lequel sera ou dans le triangle, ou au costé BC, ou hors le triangle : & apres auoir mené les trois lignes FA, FB, FC, les deux triangles A D F, B D F auront les costez AD & BD égaux, & DF commun, & les deux angles au point D égaux, pour estre droicts : donc les bases AF, BF seront égales, pour estre droicts : donc les bases AF, BF seront égales par la 4. p. 1. par mesme discours AF, CF seront aussi égales, & par la 1. com. sent. les trois lignes FA, FB, FC, seront égales : & partant le cercle décrit de F & interuale FA, passera aussi par les points B & C. Nous auons donc descript un cercle à l'entour du triangle donné : ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste que si le centre tombe dans le triangle, les trois angles sont aigus : car ils sont tous en une grande section de cercle : mais s'il tombe en l'un des costez, l'angle opposé à iceluy sera

droict : si finalement il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus, car il sera en une moindre section de cercle.

Et au contraire est evident que si le triangle est oxigone, le centre tombera dedans iceluy : mais s'il est rectangle, il tombera au costé opposé à l'angle droict : & finalement s'il est ambligone, le centre tombera dehors.

S C H O L I E.

On peut aussi colliger de ce probl. la maniere de descrire un cercle par trois poincts donnez, lesquels ne soient en une ligne droicte : car ayant ioinct iceux poincts par lignes droictes, on aura un triangle, à l'entour duquel faudra descrire un cercle comme est enseigné en ce Prob. Cely se pratique aussi plus facilement, comme nous auons enseigné en nostre Geometrie pratique Prob. 21.

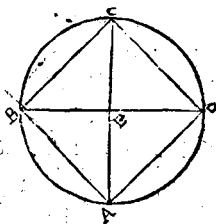
PROB. 6. PROP. VI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut descrire vn quarré.

Soient menez les deux diametres A C, & B D se couppans au centre E en angles droicts, & soient menees les quatre lignes A B, B C, C D, & D A. Je dis que A B C D est quarré inscrit au cercle donné.

Car d'autant que les 4. angles au poinct E sont droicts & egaux par la construction, les quatre arcs auxquels ils insistent seront egaux par la 26. p. 3. & partant les lignes droictes soustédas iceux seront aussi egales par la 29. p. 3. donc tous les costez du quadrilatere A B C D seront egaux entr'eux. Mais les angles d'iceluy sont aussi droicts par la 31. p. 3. puis qu'ils sont tous au demy cercle : donc le quadrilatere A B C D est quarré inscrit au cercle proposé.

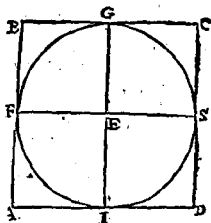


PROB. 7. PROP. VII.

À l'entour d'un cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné $FGSI$, à l'entour duquel il faut descri-
re vn quarré.

Soient menés les deux diametres
 FS & GI se couppans au centre E à
droicts angles, & sur les poincts G &
 I , soient menees les deux lignes BC ,
 AD paralleles à FS : Ité par les deux
poincts F & S soient menees les deux
lignes AB , DC paralleles à GI par la
31. p. 1. icelles quatre lignes paralle-
les se rencontraus aux poincts A , B ,
 C , D . Je dis que le quadrilatre $ABCD$
est le quarré demandé.



Car en premier lieu il est evident par la construction qu'il
est parallelograme, & par la 34. p. 1. les quatre costez seront
egaux, estans egaux à l'un ou l'autre des deux diametres FS ,
 GI , qui sont egaux entr'eux. Pareillement par la mesme 34.
p. 1. les 4. angles A , B , C , D , sont egaux aux quatre qui sont au
poinct E chacun à son op. posé, d'autant que ce sont paralle-
logrâmes. Mais iceux estans droicts, aussi les quatre A , B , C , D ,
seront chascun droicts; & par consequent le parallelograme
 $ABCD$, aura les 4. costez egaux, & les quatre angles droicts;
& sera quarré, les costez duquel touchent le cercle es poincts
 F , G , S , I , par le corol. de la 16. p. 3.

PROBL. 8. PROP. VIII.

Dans vn quarré donné, descrire vn cercle.

Soit le quarré donné $ABCD$, dans lequel il faut descrire
vn cercle.

Soient les quatre costez coupez en deux egalement aux
poincts F , G , S , I : & apres auoir mené les deux lignes FS & GI
se rencontraus au poinct E , d'iceluy poinct E , & interval EF ,
si on décrit vn cercle, ce sera le demandé.

Car par la 33. p. 1. IG sera egale & parallele à AB : & FS à BC ;
ainsi le quarré donné sera diuisé en quatre parallelogrâmes,
lesquels par la 34. p. 1. auront les costez opposez egaux, ainsi
 AF , & IE seront egaux; Item FE , & AI ; FB & EG ; ID & ES ;
mais toutes icelles moitez des costez du quarré sont egaux,

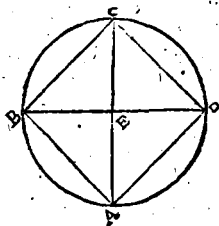
partant EF, EG, ES, EI, seront aussi égales, & comme elles touchent le quarré aux poinçts F, G, S, I, aussi le cercle décrit de l'interval de l'une d'icelles, touchera le quarré aux mesmes poinçts.

PROBL. 9. PROP. IX.

A l'entour d'un quarré donné, décrire un cercle.

Soit le quarré donné ABCD, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.

• Soient menées les deux diagonales AC & BD, s'entrecouppans au poinçt E, & du centre E, & interval EA soit décrit le cercle ADCB. Je dis qu'il sera le demandé: c'est à dire qu'il touchera les quatre angles du quarré.

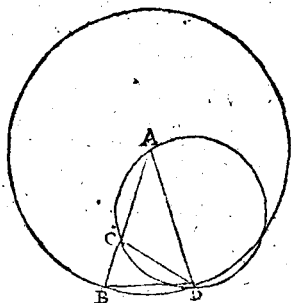


Car le costé AB estant égal à AD, le triangle BAD sera Ifosele, & par là 5. p. 1. les angles sur la base BD seront égaux & seront chacun demy droiçts par la 32. p. 1. estant l'angle BAD droiçt. Par mesme discours nous démonstrerons que tous les autres angles des poinçts A, B, C, D, seront aussi demy droiçts: & partant égaux entr'eux; ainsi les deux angles EAD & EDA seront égaux, & par conséquent les lignes EA, ED aussi égales par la 6. p. 1. & par mesme discours ED sera égal à EC, & EC à EB: & les 4. lignes EA, ED, EC, EB; estans égales, il est aisé de conclurre comme aux précédentes, que le cercle décrit de l'interval de l'une d'icelles, passera par l'extrémité des autres, qui sont les angles du quarré donné.

THEOR. 10. PROP. X.

. Décrire un triangle Ifosele, ayant un chacun des angles de la base double de l'autre.

Soit la ligne AB, coup-
pée en C, comme ensei-
gné la 11. p. 2. & du centre
A & interuallé AB soit des-
crit vn cercle dans lequel
soit accommodée la li-
gne DB égale à AC, & a-
pres soit menée la ligne
AD. Je dis que ABD. est
le triangle Ifofcele de-
mandé.



Car apres auoir mené
CD, si à l'entour du tri-
gle ACD, on décrit le
cercle ACD comme il a esté enseigné cy-dessus; puis que la li-
gne AB a esté couppee en C, comme enseigne la 11. p. 2. le re-
ctangle de AB & BC, sera egal au quarré de CA, ou de son égale
DB; & par la 37. p. 3. la ligne DB touchera le cercle en D, &
l'angle CAD, sera egal à l'angle CDB, par la 32. p. 3. & si à
iceux on adioute l'angle commun ADC, les tous seront e-
gaux, sçauoir le total ADB, aux deux CAD & ADC: mais l'an-
gle extérieur DCB, est aussi egal aux deux CAD & ADC, par
la 32. p. 1. partant il sera aussi egal à l'angle ADB, ou à son egal
ABD par la 5. p. 1. (car le triangle, est Ifofcele) & par la 6. p. 1.
le triangle de DCB sera aussi Ifofcele, & le costé DC egal à D
B, partant aussi egal à CA; & le triangle DCA estant Ifofcele,
il aura les deux angles sur la base AD egaux par la 5. p. 1. &
l'angle extérieur DCB (qui est egal à tous les deux) sera doub-
ble du seul A: aussi sera son egal B; & partant aussi son autre
egal ADB: voila donc ABD triangle Ifofcele ayant les angles
de la base doubles du troisieme.

C O R O L L A I R E.

Pour ce que les trois angles du triangle ABD, sôt egaux à deux droicts,
c'est à dire à 5. cinquiemes de deux droicts: Il est euident que l'angle
A est la 5. partie de deux droicts; & chacun des autres B & D, les
deux cinquiemes parties: item A estre les deux quintes d'un droict:
chacun B & D les 4. quintes puis que tous les trois sont egaux à
deux droicts, c'est à dire à 10. quintes, d'un droict.

SCHOLIE.

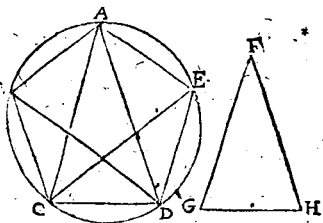
Or par quelle maniere on doit construire un triangle Iſoſcele, ayant vn chacun des angles de la baſe, nori ſeulement double de l'autre, comme fait icy Euclide, mais auſſi ſelon quelconque raiſon donnee, nous l'auons enſeigné (apres Pappus & Clauius) en noſtre Geometrie practique Prob. 37. & Scholie du 126.

PROBL. II. PROP. XI.

Dans vn cercle donne, deſcrire vn pentagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donne ABCDE, dans lequel il faut inſcrire le pentagone demande.

Dans iceluy cercle il faut inſcrire le triangle ACDequiangle au triangle FGH, lequel ait eſté conſtruit ſelon le requis de la precedente propoſition; & apres auoir mené les deux lignes CE & DB coupnant les deux angles ACD & ADC, en deux egalemt par la 9. p. 1. ſoient menees les lignes CB, BA, AE, ED. Je dis que ABCDE, eſt le pentagone inſcrit equiangle & equilateral.



Car puis que le triangle FGH a eſté conſtruit ſelon le precepte de la precedente propoſition, les deux angles ſur la baſe GH ſeront doubles au troiſieſme F, & par conſequent le triangle ACD qui eſt equiangle à iceluy FGH aura auſſi chacun des angles de deſſus la baſe CD double du troiſieſme A, leſquels eſtans coupez en deux egalemt par les lignes CE & DB, les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ACE ſont egaux, & par la 26. p. 3. ils auront circonferences egales pour baſes, mais les egales circonferences comprennent lignes droictes egales par la 29. p. 3. donc tous les cinq coſtez eſtans egaux, le pentagone ſera equilateral.

Aussi sera-il bien aisé de prouver qu'il est equiangle par la 27.p.3. d'autant que chacun angle est soustenu de circonferences egales, sçavoir de trois arcs comprenans trois costez du pentagone, veu que nous auons prouué que tous iceux arcs sont egaux.

COROLLAIRE.

De cecy il s'ensuit que l'angle du pentagone equilateral & equiangle comprend les trois cinquiemes parties de deux droicts, ou 6. quintes d'un droict. Car puis que les trois angles BAC, CAD, DAE sont egaux par la 27.p.3. & CAD est le quint de deux droicts ou les deux quintes d'un droict; Car puisque les trois angles sont egaux par la 27.p.3. le total BAE sera les trois quintes de deux droicts, ou les 6. quintes d'un droict.

S C H O L I E.

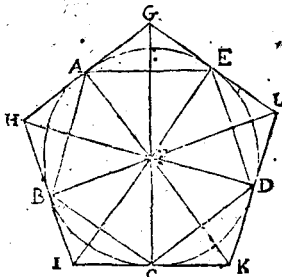
Clavius enseigne en ce lieu cy deux manieres pour descrire un pentagone equilateral & equiangle sur une ligne droite donnee & terminee; la plus facile desquelles nous auons enseeinee en nostre Geometrie pratique Prob. 38. c'est pourquoy nous n'en ferons icy r. petition.

PROB. 12. PROP. XII.

Al'entour d'un cercle donné, descrire un pentagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné A B C D E, à l'entour duquel il faut descrire le pentagone demandé.

Dans iceluy soit descrit le pentagone ABCDE par la precedete; & apres auoir mené du centre F les cinq lignes FA, FB, FC, FD, FE, soient menees sur icelles les cinq lignes perpendiculaires GH, HI, IK, KL, LG par la 11.p.1. se rencontrans aux cinq points G, H, I, K, L. Le



dis que GHIRL est le pentagone demandé equiangle, & equilateral.

Car il est euidentement circonscrit, puis que par le coroll. de la 16. p. 3. les lignes GH, HI, IK, KL, LG touchent le cercle es poinçts A, B, C, D, E: en apres si on meine les cinq lignes FG, FH, FI, FK, FL; d'autant que les angles FAG, FEG sont droicts par la 47. p. 1. le quarré de FG sera egal aux deux quarréz de FA, AG; il sera aussi egal aux deux de FE, EG, & par consequent les deux quarréz de FA, AG, seront egaulx aux deux de FE, EG. Mais les quarréz de FA, FE sont egaulx: (estans descrits sur lignes egales:) Donc ceux de AG & EG serót aussi egaulx, & les lignes AG & EG seront egales: donc les deux costez AF, FG du triangle AGF sont egaulx aux deux costez EF, FG du triangle EGF, chacun au sien, & la base AG egale à la base GE: & par la 8. p. 1. les angles AFG, EFG serót egaulx; & AFE double de AFG. Par mesme discours aussi AFG egal à AFB, (car ils ont egales circonferénces pour bases) sera double de AFH, & par consequent AFG & AFH seront egaulx: Donc les triangles AGF, AHF ont deux angles egaulx chacun au sien, & le costé AF commun: & par la 26. p. 1. AG sera egale à AH. Par mesme discours GE & EL se trouuerót egales: mais AG & EG estans egales, aussi leurs doubles GE & GL seront egales. Par mesme discours on prouuera tous les autres costez estre egaulx, & le pentagone sera equilateral.

Qu'il soit aussi equiangle, il est euident: car nous auons monitré que les angles des triangles AGF, EGF sont egaulx: sçauoir est les angles AGF, EGF: Item AGF, AHF: & qu'on en pouuoit dire autant des autres: donc les deux angles sous le poinçt G, seront egaulx aux deux angles sous le poinçt H: ainsi des autres, par ainsi le pentagone sera equiangle & equilateral.

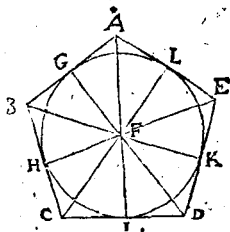
PROB. 13. PROP. XIII.

Dans yn pentagone equiangle & equilateral, descrire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle & equilateral ABCDE, dans lequel il faut inscrire vn cercle.

Soient coupez en deux également chacun des angles A,

& B, par les lignes AF, & BF par la 9. p. 1. se rencontrans au point F, & par la 12. p. 1. du point F soient menées les perpendiculaires FG, FH, FI, FK, FL, & du centre F, & interval FG soit décrit le cercle GHIKL. Je dis que c'est le cercle demandé.



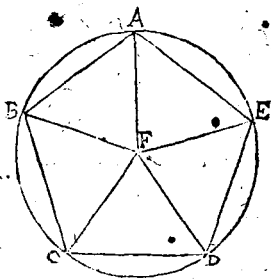
Car puisque par construction les deux angles sous le point A sont égaux, ayant esté le total coupé en deux également, & l'angle droit G égal à l'angle droit L, & le côté FA commun aux deux triangles AGE, ALF, par la 26. p. 1. les deux autres costez seront égaux, sçavoir AG à AL, & FG à FL : par mesme discours FH, FI, FK, se trouveront égales : & partant le cercle décrit de F & intervalle FG passe par les points G, H, I, K, L, lesquels il touche les costez du pentagone proposé par le coroll. de la 16. p. 3. le cercle GHIKL est donc inscrit au pentagone donné.

PROB. 14. PROP. XIII.

Autour d'un pentagone equiangle & equilateral, descrire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle & equilateral ABCDE, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

Solent coupez les cinq angles A, B, C, D, E, en deux également par la 9. p. 1. avec les lignes AF, BF, CF, DE, EF se rencontrans au point F, & d'iceluy point F & interval de l'une d'icelles cinq lignes, soit décrit le cercle ABCE. Je dis qu'il sera circonscrit au pentagone.



Car puis que le pentagone est equiangle, & chacun angle d'iceluy coupé en deux également, les deux angles sur la base

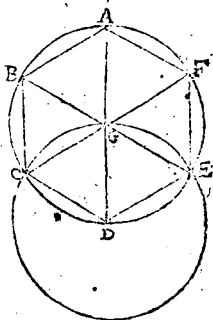
BA serōt egaux, & par la 6. p. 1. les deux costez AF & BF, serōt aussi egaux, & par le mesme discours BF, & FC seront aussi egales, ainsi des autres, & par la 1. commune sentence il est euident qu'icelles cinq lignes serōt egales entr'elles, & que partant le cercle descript de l'interval de l'une d'icelles passera par les extremittez des autres, qui sont aussi les cinq angles du pentagone donné.

PROB. 15. PROP. XV.

Dans vn cercle donné, inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDEF, dans lequel il faut inscrire l'hexagone demandé equiangle & equilateral.

Soit mené le diametre AD, & du centre D & interval DG, soit descript vn autre cercle GCE coupant le donné aux poincts C & E, desquels poincts soient menees les deux lignes CGF, EGB: Finablement soient menees les lignes AB, BC, CD, DE, EF, FA. Je dis que ABCDEF est l'hexagone demandé.



Car il est euident en demonstret comme en la 1. p. 1. que les deux triangles CDG, DEG sont equilateraux, & par le corol. de la 5. p. 1. ils seront aussi chacun equiangles, & par la 3. p. 1. vn chacun de leurs angles voudra le tiers de deux angles droicts, & l'angle AGB par la 15. p. 1. vaudra le tiers de 2. angles droicts: ainsi par la 13. & 15. p. 1. tous les angles au poinct G, seront egaux, valant chacun vn tiers de deux angles droicts, partant les six bases AB, BC, CD, DE, EF, FA, seront egales, & les angles sur icelles aussi egaux par la 4. p. 1. Donc l'hexagone sera equilateral, & aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont egaux, les deux du poinct A seront egaux aux deux du poinct B; & ainsi des autres.

COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste que le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle : car le costé de l'hexagone DC, est egal au semidiametre DG par la def. du cercle.

PROB. 16. PROP. XVI.

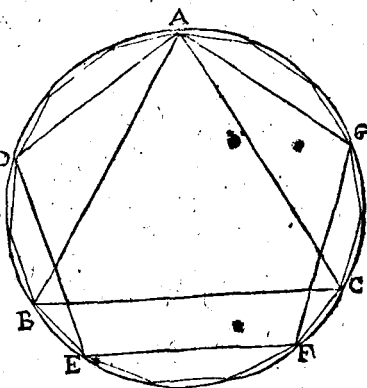
Dans vn cercle donné, descrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit premierement décrit dans iceluy le triangle equilateral ABC par la 2. p. 4. les 3. costez estés egaux, la circonference sera diuisee en trois egale-ment par les 26. & 28. p. 3. pareillement, soit en ice-

luy cercle inscrit le pentagone ADEFG par la 11. p. 4. ayant l'un des angles sur le point A. Je dis que ayant mené la ligne droite BE, ce sera le costé du quindecagone demandé.

Car comme il a esté dit, l'arc ADB est le tiers de la circonference, partant doit contenir cinq costez du quindecagone. Item AD costé du pentagone soustient l'arc AD cinquième partie de la circonference; partant doit contenir trois costez du quindecagone, & les deux arcs AD, & DE contiendront six costez du quindecagone. Mais l'arc ADB en contient cinq : donc l'arc BE sera la quinzième partie de toute la



circonference; partant la ligne droicte BE fera le costé du quindec. & si par la 1.p. 4. on accommode au cercle encores quatorze lignes egales à icelle BE, sera inserit au cercle vn quindecagone equilateral; & aussi equiangle, puis que tous ces angles s'oustendent arcs egaux; c'est à sçauoir composez de 13. arcs egaux.

Pareillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze poincts des diuisions egales du cercle, nous tirons des lignes droictes qui se touchent, se descrira vn quindecagone equilateral & equiangle à l'entour dudit cercle: & d'auantage nous descrirons & circonscrirons vn cercle à vn quindecagone equilateral & equiangle donné, suyuant la mesme methode pratiquee au pentagone.

Fin du quatriesme Element.





E L E M E N T

CINQVIESME.

DEFINITIONS.



Artie est vne grandeur tiree d'une plus grande, lors que la plus petite mesure la plus grande.

C'est à dire que lors qu'une grandeur en mesure une autre plus grande, elle est dite partie d'icelle, comme *A* qui est contenu 3. fois en *B*, est dit partie d'iceluy. Or entre les Mathématiques *A. B. C.* ciens il y a de deux sortes de parties: car il y en a une qui 3. 9. 7. mesure son tout; comme *A*, lequel repeté 3 fois constitue son tout *B*: & l'autre sorte ne mesure pas son tout; mais prise ie ne sçay combien de fois excède iceluy, ou deffaut au mesme, comme *A*, lequel estât pris 3. fois excède *C*, mais estât pris seulement 2. fois il est excédé par le mesme *C*: Or la premiere est dite partie aliquote, & l'autre partie aliquôte; de ceste-là seulement par le icy Euclide, puis que ceste-cy ne mesure son tout; & aussi ne l'appelle-il pas partié au 7. liure, mais parties.

2. Multiplie est vne grandeur plus grande qu'une plus petite, quand la plus grâde est mesurée de la plus petite.

C'est à dire que si *A* est mesurée par *B* moindre grã- *A* 12. B 4.
 deur qu'icelle *A*, est dite multipliee de *B*. Ainsi aussi *C*, *C* 20. D 5.
 qui est mesuré 4. fois par *D*, est dictée multipliee d'icelle *D*.

Or quand deux moindres grandeurs en mesurent également deux autres plus grandes, c'est à dire qu'une moindre est contenue autãt de fois en une plus grande, qu'une autre moindre en une autre plus grande, ces deux plus grandes. là sont dictes equemultipliees d'icelles moindres. Et le mesme se doit entendre, si plusieurs moindres mesurent également plusieurs grandes.

3. Raison, est vne habitude de deux grandeurs de mesme genre, comparees l'une à l'autre selon la quantité.

C'est à dire que quand deux quantitez de mesme genre, comme deux nombres, deux lignes, deux superficies, deux solides, &c. sont comparez entr'eux selon la quantité, c'est à dire selon que l'une est plus grande que l'autre, ou moindre, ou egal, telle comparaison est appelée raison, & par quelque vns proportion: Parquoy on ne peut pas dire qu'il y ait quelque raison d'une ligne à une superficie; ou d'un nombre à une ligne, puis que ny la ligne, & superficie, ny le nombre & la ligne ne sont pas quantitez de mesme genre. Semblablement si on confere vne ligne avec vne ligne selon la qualité, c'est à dire selon que l'une est blanche, & l'autre noire, ou bien que l'une est chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'une & l'autre soient de mesme genre, ceste comparaison n'est pas dictée raison, pource qu'elle n'est pas faite selon la quantité.

Or jaoit que la raison se troiue proprement ex seules quantitez, si est-ce toutesfois que toutes autres choses, qui en quelque maniere prennent la nature de la quantité, cõme sont les tẽps, les sons, les voix, les lieux, les mouuemẽs, les pois, & les puissãces, sont aussi dictes auoir raison, si l'habituded'iceux est consideree, selon la quãtitẽ, cõme quãt nous disons un temps estre plus grand qu'un autre temps, ou moindre, ou deux temps estre egaux, &c. telle habitude sera dite raison: pource qu'alors les temps sont considerez ainsi que certaines quantitez.

En toute raison ceste quantité-là, qui est referee à une autre, est dite par Euclide & autres Geometres, antecedant de la raison, & celle-là à laquelle elle est referee, est dictée consequent d'icelle raison: Comme en la raison de *A* à *B*; *A* est dict antecedant de la raison, &

B consequent: Que si au contraire, B est comparé à A. B. sera appelle antecedant, & A consequent. 8. 10.

Or ceste raison definie par Euclide est diuisee en raison rationnelle, & irrationnelle.

La rationnelle est celle qui se peut exprimer en nombres: comme la raison d'une ligne de 10. pieds à une autre de 5. pieds, laquelle est exhibee par ces nombres 10. & 5. Mais l'irrationnelle est ceste raison là qui ne se peut exprimer en nombres: comme la raison du diametre d'un quarré au costé d'iceluy, laquelle ne se peut trouuer ny exprimer en nombre, comme est demonstré par Euclide, en la derniere proposition du 10. liure.

Autres disent que la raison ou proportion rationnelle, est celle qui a les deux quantitez commensurables, c'est à dire qui ont une commune partie aliquote, ou bié qui sont mesurees par une mesme commune mesure: comme la raison d'une ligne de 20. pieds à une autre de 8. pieds: car une ligne de 4. pieds ou de 2. est partie aliquote de l'une & l'autre, & par consequent mesure icelles. Mais la raison ou proportion irrationnelle, est celle (disent-ils) qui a les deux quantitez incommensurables, c'est à dire qui n'ont nulle partie aliquote, ou desquelles on ne peut trouuer aucune commune mesure. Comme la raison du costé d'un quarré à sa diagonale, & de plusieurs autres lignes dont est traitté au 10. liure.

Ceste raison se diuise aussi en raison d'egalité, & d'inegalité: La raison d'egalité est quand deux quantitez egales se comparent entr'elles, comme 10. à 10; une ligne de 12. pieds à une ligne de 12. pieds, &c. Mais la raison d'inegalité, est quand deux quantitez inegales se comparent entr'elles, comme 10. à 4. est raison d'inegalité; telle est aussi celle de 5. à 9; celle d'une ligne de 7. pieds à une autre de 15. pieds, &c.

Ceste raison d'inegalité est subdivisee en raison d'inegalité maieure, & d'inegalité mineure. La raison d'inegalité maieure, est quand la plus grande quantité est comparee à la moindre: comme la raison de 8. à 5. est dicte raison d'inegalité maieure: item la raison d'une ligne de 10. pieds à une de 4. &c. Mais la raison d'inegalité moindre, est quand on compare la moindre quantité à la plus grande: comme la raison de 7. pieds à 9. s'appelle raison de moindre inegalité: item celle d'une ligne de 9. pieds à une de 12. pieds, &c.

La raison rationnelle d'inegalité maieure est diuisee en 5. genres. sçavoir raison multiple, superparticuliere, superpartiente, multiple superparticuliere, & multiple superpartiente, les trois premieres desquelles sont simples, & les deux dernieres composees d'icelles premieres.

La raison multiple, est quand la plus grande quantité contient la moindre

moindre plusieurs fois precisémēt: & ceste raison contient sous soy diuers gères. Car si la plus grāde quantité cōtient la moindre deux fois precisément, elle est dite double: si trois fois, triple: si 4. quadruple: si dix, decuple: &c. Comme la raison de 20. à 4. est dite quintuple, pource que 20 contient 4. cinq fois; & la raison d'une ligne de 18. pieds à une de 3. pieds est dite sextuple, d'autant que 18. contient 3. six fois, & ainsi des autres.

La raison superparticuliere, est quand la plus grande quantité cōtient la moindre une fois, & en outre une partie aliquote d'icelle moindre: & ceste raison a diuers genres. Car si ceste partie aliquote est moitié d'icelle moindre quantité, est constituée une raison sesquialtere, comme la raison de 3. à 2. en laquelle 3. maieure quantité cōtient la moindre 2. une fois & encore $\frac{1}{2}$ d'icelle; si elle est tierce partie, sesquiterce: si une quarte partie, sesquiquarte, &c. commençant tousiours le nom de ladite raison par selqui, & se terminant par le denominateur de la partie aliquote.

La raison superpartiente, est quand la plus grande quantité cōtient la moindre une fois, & en outre plus d'une partie aliquote d'icelle: & a aussi ceste raison plusieurs especes. Car si la plus grande quantité contient la moindre une fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'icelle, est constituée une raison superbipartiente tierces, comme la raison de 20. à 12. en laquelle le nombre 20. contient 12. une fois & $\frac{2}{3}$ d'iceluy si $\frac{1}{3}$ sera constitué une raison supertripartiente quarte, comme la raison d'une ligne de 63 pieds à une de 36. & ainsi des autres, le nom d'icelles commençant tousiours par super, & prenant à son milieu le numerateur de la partie aliquote, & le denominateur à la fin d'iceluy.

La raison multiple superparticuliere, est quand la plus grāde quantité contient la moindre plusieurs fois, & encore une partie aliquote d'icelle: ceste cy est composee de la premiere & de la deuxiesme; & tout ainsi que chacune d'icelles cōtient plusieurs genres, aussi fait ceceluy. Car si la plus grande quantité contient la moindre 2. fois, & encore $\frac{1}{2}$ d'icelle, ceste raison sera appelée double sesquialtere, comme la raison de 5. à 2. en laquelle 5. contient 2. deux fois & $\frac{1}{2}$ d'iceluy: si $\frac{2}{3}$ d'icelle, comme celle d'une ligne de 7. pieds à une de 3. pieds, ceste raison s'appellera double sesquiterce: & la raison de 29. à 7. s'appellera quadruple sesquiseptuple, d'autant qu'en 29. 7. est contenu 4. fois & $\frac{1}{7}$ d'iceluy, & ainsi des autres.

La raison multiple superpartiente, est quand la plus grāde quantité contient la moindre plusieurs fois, & plusieurs parties aliquotes d'icelle: ceste raison est composée de la 1. & 3. & tout ainsi que chacune d'icelles contient sous soy plusieurs genres, aussi fait ceste cy; comme si la plus grande quantité contient la moindre 2. fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'icel-

la, ceste raison sera appelée double superbipartiente tierce, comme est la raison de 8. à 3. mais si elle la contient 3. fois, & encore $\frac{1}{2}$ d'icelle, elle s'appellera triple supertripartiente quarte, comme est la raison de 15. à 4. si elle la contient 4. fois & encore $\frac{1}{4}$ d'icelle, elle sera dite quadruple supersextupartiente septuple, comme est la raison de 34. à 7. & ainsi des autres.

Or tout ce qui a esté dit cy dessus des 4. especes de raison rationnelle d'inegalité maieure, se doit aussi entendre aux 5. especes de l'inegalité mineure, excepté qu'il faut tousiours apposer ceste syllabe sub, disant submultiple au lieu de multiple, subsuperparticulière, au lieu de superparticulière, & ainsi des autres.

Pour ce que les denominateurs des raisons rationnelles cy dessus exposées sont utiles, nous enseignerons icy par quels nombres elles se denominent. Nous appellons denominateur le nombre qui exprime distinctement & apertement l'habitude ou raison d'une quantité à l'autre: comme le denominateur de la raison quintuple est 5. pource que ce nombre là monstre que la quantité maieure contient 5. fois la mineure. Semblablement le denominateur de la raison sesquiquarte est $1\frac{1}{4}$, pource qu'iceluy nombre signifie que la plus grande quantité contient la moindre une seule fois & $\frac{1}{4}$ d'icelle: & ainsi des autres. C'est pourquoy, comme l'estime Euclide au 6. livre, & autres Mathematiciens, appellent le denominateur de quelconque raison la quantité d'icelle; car il denomme, comme nous auons dit, combien une quantité est en une autre avec laquelle elle est conferee, ainsi qu'il apert par les exemples proposez.

Or de ces choses on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raison. Car le denominateur de la raison multiple, est le nombre entier contenant autant d'unitéz, que la plus grande quantité de la raison contient la moindre. Comme le denominateur de la raison double est 2. de la sextuple, 6. de la centuple, 100. &c. Mais le denominateur de quelconque raison submultiple, est un nombre rompu, duquel le numerateur est tousiours l'unité: mais le denominateur est le nombre denominant la raison multiple correspondante. Comme le denominateur de la raison subdouble est $\frac{1}{2}$: de la subsextuple, $\frac{1}{6}$: de la subcentuple $\frac{1}{100}$, &c. Il est donc facile de trouuer le denominateur de quelconque raison multiple ou submultiple, puis que la prolotion monstre le denominateur de la raison, comme il est euident par les exemples proposez.

Le denominateur de quelconque raison superparticulière est l'unité avec la partie aliquote que la maieure quantité doit comprendre outre la moindre. Comme le denominateur de la raison sesquialtere est $1\frac{1}{2}$: de sesquiterce $1\frac{1}{3}$, &c. Il n'est donc pas difficile de trouuer le denominateur d'une raison superparticulière, puis que la pro-

lation d'icelle raison exprime le denominateur, par sa partie aliquote, comme il appert par les exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere est un nombre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur seulement d'une unité. Comme le denominateur de la raison subsequaltere, est $\frac{2}{3}$; subsequitierce, $\frac{3}{4}$, &c. Donc le denominateur de telle raison sera aisement trouué: car il n'y a qu'à prendre pour numerateur de la fraction, le denominateur de la partie aliquote; & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'unité. Comme le denominateur de la raison sesquiquinte est $\frac{5}{6}$.

Le denominateur de quel que raison superpartiente, est une unité avec les parties aliquotes que la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison supertripartiente quartes est $1\frac{3}{4}$: de superquadripartiente quintes, est $1\frac{4}{5}$. Les denominateurs de telles raisons sont faciles à trouuer, pource que la prolation de la raison exhibe le propre denominateur, comme il apert és exemples cy dessus. Mais le denominateur de quelconque raison subsuperpartiente, est un nombre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur, d'autant d'unités que la plus grande quantité contient de parties aliquotes par dessus la moindre. Comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quarte est $\frac{7}{8}$; de subsuperquadripartiente quinta, est $\frac{9}{10}$, &c. On trouuera donc le denominateur de telles raisons, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes exprimees en la raison, auquel si on adiouste le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction: comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quinta, est $\frac{7}{8}$, pource que le numerateur de ceste fraction est le nombre denommant les quintes, sçauoir 5. auquel est adiouste le nombre 3. des trois parties, afin de faire 8. denominateur de la fraction.

Le denominateur de quelconque raison multiple superparticuliere est le nombre entier, denommant la multiple raison, avec la partie que la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison triple sesquisepiesme est $3\frac{1}{2}$: de quadruple sesquiquinte, $4\frac{1}{5}$ &c. Le denominateur de telle raison est aisé à exhiber, pourceque la prolation de la raison exprime distinctement tant le denominateur de la multiple raison, que la partie aliquote, comme se voit és exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison submultiple superparticuliere est une fraction dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes obtenues en la raison. Côme le denomin. de la raison subtriple sesquiquarte est $\frac{4}{3}$; de subquintuple sesquisneufesme, $\frac{9}{5}$ &c. On trouuera le denominateur de telle raison, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur

de la partie aliquote, Et iceluy estant multiplié par le denomi-
nateur de la raison multiple, si on adiouste 1. au produit, on aura le denomi-
nateur de la fraction, comme il est manifeste par les exemples cy-dessus.

Le denominateur de quelconque raison multiple superpartiente, est le
nombre entier, denommant la raison multiple obtenue en icelle, avec les
parties aliquotes que doit comprendre la plus grande quantité de la
moindre. Côme le denominateur de la raison triple superpartiente tier-
ces, est $3\frac{2}{3}$ de quadruple superpartiente quintes, $4\frac{3}{4}$, &c. Il est facile de
trouver le denominateur de telles raisons, pour ce que la pnotation expri-
me distinctement, àt le denominateur de la raison multiple, que les parties
aliquotes, côme apert ex exemples cy dessus, &c. Le d. denominateur d'une ra-
son submultiple superpartiente, est une fraction, dont le numérateur est
le nôbre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le deno-
minateur de la raison subtriple superpartiente tierces, est $\frac{3}{11}$ de subqua-
druple subpartiente quintes, est $\frac{4}{13}$, &c. Le denominateur de telles raisons
sera trouvé, si pour le numérateur de la fraction on prend le denomina-
teur des parties aliquotes: lequel est àt multiplié par le denominateur de
la raison multiple, & au nombre produit adiouste le nombre des parties
aliquotes, viendra le denominateur de la fraction, ainsi qu'il appert ex
exemples posés cy dessus.

Finalemēt le denominateur de la raison d'égalité est toujours l'unité,
pour ce que les quantitez d'icelle raison son: égales entr'elles; & par-
tant l'une contient l'autre une fois precisement.

4. Proportion, est vne similitude de raisons.

Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles est dictée
raison, ainsi la comparaison de deux ou plusieurs raisons entr'elles, est
dictée proportion: comme si la raison de A à B, est semblable à la raison
de C à D, l'habitude d'entre ces raisons sera dictée A. B. C. D.
proportion. Or ceste proportion est continue ou dis- 8. 12. 18. 27.
crete: la continue est celle de laquelle les grandeurs entre-moyennes
sont prises deux fois, tellement qu'il ne se fait nulle interruption de
raisons, ains chaque quantité entre-moyenne est antecedant & conse-
quent, sçavoir antecedant de la quantité subsequente, mais consequent à
la quantité antecedante: comme si on dict, que telle qu'est la raison de
A à B, telle est celle de B à C, où la quantité B est antecedant de la
quantité C, mais consequent de la quantité A. Mais proportion dis-
crete ou non continue, est celle en laquelle chaque quantité entre-moyenne
est prise seulement une fois, tellement qu'il se fait interruption de rai-
sons, & aucune quantité n'est antecedant & consequent, mais seulement
antecedant ou consequent: comme si on dict que la raison de A à B, est
comme celle de C à D.

5. Les grandeurs sont dictes auoir raison l'une à l'autre, lesquelles estans multipliées se peuuent excéder l'une l'autre.

Euclide ayant en la 3. def. appelé raison l'habitude de deux grandeurs de mesme genre, il explique en ceste cy quelle chose requierent deux quantitez de mesme genre, afin qu'elles soient dites auoir raison, sçavoir est que l'une ou l'autre d'icelles estant multipliée, elle s'augmente en sorte, que finalement elle surpasse l'autre: ainsi il y a raison entre le costé d'un quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le costé multiplié par 2. c'est à dire pris deux fois, excède le diametre. Car d'autant que deux costez du quarré & le diametre constituent un triangle isoscele, par la 20. p. 1 les deux costez du quarré seront plus grands que le diametre. Ainsi pareillement entre la circonférence d'un cercle & le diametre d'iceluy, il y a raison (laquelle toutesfois n'est encore cogneue) puis que le diametre multiplié par 4. c'est à dire pris 4. fois, excède la circonférence: car toute la circonférence, comme il est démontré par Archimede, ne contient que trois fois le diametre, & encore une particule peu moindre qu'une septiesme partie d'iceluy diametre. Mais il s'ensuit de ceste def. qu'une ligne finie n'aura raison à une infinie, encores qu'icelles deux lignes soient de mesme genre de quantité: car en quelque sorte que soit multipliée la ligne finie, elle ne pourra surpasser l'infinie. S'ensuit aussi qu'il n'y a point de raison entre un angle rectiligne, & un angle contingent. Car il apert de la 16. p. 3. qu'iceluy angle contingent, ne peut jamais excéder un angle rectiligne.

6. Les grandeurs sont dictes estre en mesme raison, la première à la seconde, comme la troisieme à la quatrieme, quand les equemultiplices de la première & troisieme, aux equemultiplices de la seconde & quatrieme, en quelque multiplication que ce soit, defaillent ensemble, sont egales, ou excèdent, vn chacun à vn chacun, prenant celles-là qui s'entre-respondent.

Ayant esté dit par Euclide que c'est que raison, & quelles grandeurs sont dites auoir raison l'une à l'autre, maintenant il declare quelle con-

diction requierent les grandeurs pour estre en mesme raison, sçauoir est que les equemultiplices de la premiere & troisieme grandeur excèdent, soient egales, ou defaillent aux equemultiplices de la 2. & 4. en quelque multiplication que soient prises, icelles equemultiplices, comme appert en ces 4. quantitez A, B, C, D , où les equemultiplices de A, B, C, D .
 $A, & C$, premiere & 3. sont $E, & F$, & les equemultiplices de $B, & D$. 2. & 4. quantitez sont $G, & H$;
 tellement qu'il se voit qu'ayant multiplié A , & C , par un mesme nombre, & B, D par quelconque mesme nombre; si la multiplie E excède la multiplie G qui luy correspond, aussi la multiplie F excède la multiplie H ; si elle est egale, l'autre sera aussi egale; si elle defaut, aussi sera l'autre, & ce en quelque multiplication qu'on prenne les equemultiplices: & par tant il y a mesme raison de A premiere quantité à B seconde; que de C 3. à D 4.

Par la conuerse de ceste def. s'il y a telle raison de la premiere à la seconde, que de la 3. à la 4. il s'ensuit que les equemultiplices de la 1. & 3. excèdent, sont egales, ou defaillent aux equemultiplices de la 2. & 4. engendrees de quelque multiplication que ce soit.

Et aussi s'il n'y a mesme raison de la premiere à la 2. que de la 3. à la 4. il s'ensuura que les equemultiplices de la 1. & 3. n'excéderont, ne seront egales, ou ne defaillront aux equemultiplices de la 2. & 4. produites de quelque multiplication que ce soit.

Or ce qui est dit icy de 4. grandeurs se doit aussi entendre de trois, prenant celle du milieu 2. son, afin qu'il y en ait 4.

7. Les grandeurs qui sont en mesme raison, sont appellees proportionnelles.

Comme si des grandeurs A, B, C, D , il y a mesme raison de A à B , que de C à D , icelles grandeurs sont dites proportionnelles.

Et les grandeurs E, F, G , lesquelles sont en proportion continue, sont aussi dites continuellement proportionnelles.

8. Quand des equemultiplices, celuy de la premiere grandeur excède celuy de la seconde, & le multiplie de la troisieme n'excède celuy de la quatriesme, lors il y aura plus grande raison de la premiere grandeur à la seconde, que de la troisieme à la quatriesme.

Euclide declare icy quelle condition doiuent auoir 4. grandeurs, afin que la premiere soit dite auoir plus grande raison à la seconde que la tierce à la 4. disant qu'ayant pris les equemultiplices de la premiere & de la 3. & les equemultiplices de la 2. & 4. si la multipliee A. B. C. D. de la premiere excède la multipliee de la 2. mais la multipliee de la 3. n'excede la multipliee de la 4. il y aura plus grande raison de la premiere à la seconde, que de la 3. à la 4. comme il appert en l'exemple icy posé, auquel sont prinsees E. & F. doubles de A & C, 1. & 3. grandeur, mais G & H triples de B & D 2. & 4. grandeur : & pource que E multiplie de A 1. est plus grande que G multiplie de B 2. & F multiplie de C 3. n'est pas plus grande que H multiplie de D 4. la raison de A premiere grandeur à B 2. est dite plus grande que la raison de C 3. à D 4.

Or afin que quatre grandeurs soient dites estre en mesme raison, il est necessaire que les equemultiplices d'icelles, prises selon quelconques multiplications, excèdent, soient egales, ou defaillent, comme il a esté exposé en la 6. def. Mais afin que la premiere grandeur soit dictée auoir plus grande raison à la 2. que la 3. à la 4. c'est assez, que des equemultiplices prises selon quelque multiplication, celle de la 1. grandeur excède celle de la 2. & la multipliee de la 3. n'excede celle de la 4. encore que selon plusieurs autres multiplications ces equemultiplices ne soient telles. Parquoy pour conclure en quelque demonstration, qu'il y a plus grande raison d'une grandeur à une autre, que d'une 3. à une 4. il suffira de demonstrier que selon quelque multiplication, la multipliee de la 1. grandeur excédât celle de la seconde, la multipliee de la 3. n'excede celle de la 4.

Et couuertissant ceste 8. def. si il y a plus grande raison de la premiere grandeur à la 2. que de la 3. à la 4. la multipliee de la 1. excédant celle de la 2. il se peut faire quelque multiplication par laquelle la multipliee de la 3. n'excede celle de la 4.

Que si au contraire d'icelle def. la multipliee de la premiere grandeur ne surmonte celle de la 2. & la multipliee de la 3. excède celle de la 4. la premiere grandeur sera dite auoir moindre raison à la 2. que la 3. à la 4. La conuerse a aussi lieu.

9. Proportion ne peut estre constituee sur moins de trois termes.

Puis qu'il a esté dit en la 3. def. que raison est l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4. def. est une similitude de deux ou plusieurs raisons: il s'ensuit qu'il n'y peut auoir moins de trois quantitez ou termes en une proportion, si elle est proportion continuee,

mais en faut quatre au moins, si elle est proportion discrete.

10. Quand trois grandeurs sont proportionnelles, la premiere est dite auoir à la troisieme la raison doublee de la premiere à la seconde: s'il y en a quatre; la premiere est dite estre à la quatrieme, en raison triplee de la premiere à la seconde: & tousiours d'un mesme ordre vne plus, iusques à ce que la proportion soit acheuée.

Comme si les grandeurs A, B, C, D, E , sont continuellement proportionnelles, la premiere quantité A est dite auoir à la 3. quantité C , la raison doublee de celle de A à la seconde B , pource qu'entre A & C sont deux raisons, qui sont egales à la raison de A à B , sçauoir est la raison de A à B , & celle de B à C , tellement $A. B. C. D. E.$ que la raison de A à C prend par ce moyen la raison doublee de A à B , c'est à dire posee deux fois d'ordre. Mais la raison de la premiere grandeur A à la 4. D , est dite triplee de celle de A à B , pource qu'entre A & D se trouvent trois raisons, lesquelles sont egales à celle de A à B : c'est à sçauoir la raison de A à B , celle de B à C , & celle de C à D : & partant la raison de A à D encloist par ce moyen la raison triplee de A à B , c'est à dire posee trois fois d'ordre. Et ainsi pareillement la raison de A à E , est dite quadruplee de la raison de A à B , pource qu'entre A & E sont encloses 4. raisons qui sont egales à celle de A à B , &c. 16. 24. 36. 54. 81.

Dounot a retranché de ceste def. ces mots: Et tousiours d'un mesme ordre vne plus, iusques à ce que la proportion soit finie.

11. Les grandeurs sont dites homologues, ou de semblables raisons, les antecédans aux antecédans, & les conséquens aux conséquens.

C'est à dire que si plusieurs quantitez sont proportionnelles, comme A, B, C, D , sçauoir que comme A est à B , ainsi C est à D , les quantitez A , & C , antecédantes de chascune raison, seront dites Homologues, ou de semblable raison, com- $A. B. C. D.$
4. 2. 6. 3.

meauffi les quantitez consequentes B & D. Ainsi pareillement si les quantitez E, F, G, sont proportionnelles aux quantitez E. F. G. H, I, K les termes E, & H, seront dictz Homologues 2. 4. 8. ou de semblable raison : comme aussi le terme F sera dict Homologue au terme I : & aussi G à K : ainsi les costez 3. 6. 12. des figures estans comparez entr'eux, on entend quels costez doivent estre antecedans des raisons, & quels consequens.

12. Raison alterne, est prendre l'antecedant comparé à l'antecedant, & le consequent au consequent.

Euclide explique en ceste def. *Et* es suivantes, aucuns moyens d'argumenter es proportions, desquels l'usage est fort frequent en la Geometrie. Il dict donc icy que la raison alterne ou permutée, est quand de 4. grandeurs proportionnelles proposees, comme A, B, C, D, sçavoir que comme A est à B, ainsi C est à D; on vient à conclure A. B. C. D. qu'il a mesme raison de l'antecedant A à l'antecedant 4. 6. 2. 3. dant C, que du consequent B au consequent D: *Et* ceste maniere d'argumenter se couche ordinairement ainsi: comme A est à B, ainsi C est à D: donc en permutant, comme A sera à C, ainsi B à D. Or il est necessaire qu'en ceste maniere d'argumenter, les 4. grandeurs soient de mesme genre. Car le nombre A estant au nombre B, comme une superficie E est à une superficie F; de vouloir inferer comme a fait Dounot en plusieurs endroits, *Et* notamment es 17. p. 5. 29. 48 *Et* 85. p. 10. qu'en permutant le nombre A est à la superficie E, comme le nombre B à la superficie F, c'est se mocquer; puis qu'il n'y a nulle raison du nombre à la superficie, comme il apert par les 3. *Et* 5. def. Ceste maniere d'argumenter est demonstree en la 16. p. de ce liure.

13. Raison inuerse ou transposée, est lors qu'on prend le consequent comme antecedar pour le comparer à l'antecedant, comme si c'estoit le consequent.

Comme si A est à B, ainsi que C à D, nous infererons que par raison inuerse, comme B est à A, ainsi D est à C, c'est à A. B. C. D. dire les consequens aux antecedans. En ceste sorte d'argumenter les auteurs parlent presque ainsi: comme A est à B, ainsi C est à D: donc en changeant, ou au contraire, B sera à A, comme D à C.

Ceste maniere d'argumenter sera demonstrée au coroll. de la 4. p. de ce liure.

Ceste def. a esté tellement traduite par Dounot, que le sens d'Euclide n'y peut estre reconnu.

14 Composition de raison, est lors qu'on prend l'antecedent avec le consequent, comme vne seule chose, pour le comparer au mesme consequent.

Comme si AC est à CB , comme DF

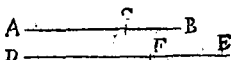
à FE : ~~Et~~ on vient à conclure que la

toute AB est à CB , comme la toute

DE à FE ; c'est à dire que la

composée de l'antecedant AC & du

consequent CB , est au mesme consequent CB , comme la composée de l'antecedant DF & du consequent FE est a iceluy consequent FE : ceste maniere d'argumenter sera dictée composition de raison: & se prononce ainsi: comme AC est à CB , ainsi DF à FE : donc en composant AB sera a CB , comme DE à FE : laquelle sorte d'argumentation sera demonstré en la 18. p. de ce liure.



A ce moyen d'argumenter, par la composition de raison, en peuvent estre adioustez deux autres: le premier peut estre dict composition conuerse de raison: sçauoir quand on prend l'antecedent & consequent comme vn seul, pour le comparer à l'antecedant. Comme si AC est à CB , comme DF à FE ; & nous inferons, donc comme AB composée de l'antecedant, & du consequent, est à l'antecedant AC , ainsi DE composée de l'antecedant & du consequent est a l'antecedant DF : laquelle argumentation nous demonstrerons estre valide sur la 18. p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dict composition contraire de raison; c'est à sçauoir quand l'antecedant est comparé à l'antecedant & consequent comme vn seul. Comme si AC est a CB , ainsi q. DF à FE , & nous inferons par composition contraire de raison: donc comme AC l'antecedant sera à la toute AB composée de l'antecedant & du consequent, ainsi DF antecedant sera. à la toute DE composée de l'antecedant & du consequent. Nous demonstrerons sur la 18. p. de ce liure que ceste forme d'argumentation est valable.

15. Diuision de raison, est lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent, pour le comparer à iceluy mesme consequent.

Comme si on dit qu'il y a telle raison de AB à CB , soit venue la pre-

cedente figure) que de DE à FE : donc aussi AC excex par lequel l'antecedant surpasse le consequent. sera à CB consequent, comme DF excex par lequel l'antecedant excède le consequent, sera à FE consequent. Or les auteurs concluent ordinairement avec ceste raison ainsi: comme AB est à CB , ainsi DE est à FE : donc en diuisant AC sera aussi à CB , comme DF à FE . Ce qui sera demonsté en la 17. p. de ce liure.

A ce moyen d'argumenter en peuuent aussi estre adioustez deux autres: le premier peut estre appellé diuision conuerse de raison, c'est à sçauoir quand le consequent est comparé à l'excex par lequel l'antecedant surpasse le consequent. Comme si AB est à CB , comme DE à FE , nous inferons: donc aussi par diuision conuerse de raison, comme CB consequent sera à AC excex, par lequel l'antecedant surmonte le consequent, ainsi FE consequent sera à DF excex par lequel l'antecedant surpasse le consequent: laquelle maniere d'argumentation nous demonsturons pouuoir estre sur la 17. p. 5. Il est manifeste qu'en l'une & l'autre d'icelles argumentations, par diuision de raison, l'antecedant doit estre plus grand que le consequent.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit diuision contraire de raison, c'est à sçauoir quand l'antecedant est conseré à l'excex, par lequel le consequent excède l'antecedant. Comme quand on dit, AC estre à AB , comme DE à DE : Donc aussi par diuision contraire de raison AC antecedant sera à CB , excex par lequel le consequent surmonte l'antecedant, comme DF antecedant sera à FE , excex par lequel le consequent surpasse l'antecedant: lequel moyen d'argumenter nous demonsturons sur la 17. p. de ce liure.

Il est euident qu'en ceste diuision contraire de raison, le consequent doit estre plus grand que l'antecedant.

16. Conuerſion de raison est comparer l'antecedant à l'excex, par lequel l'antecedant surpasse le consequent.

Comme si on dit, que comme AB est à CB , (soit venue la figure de la 14. def.) ainsi DE à FE : On vient à conclure que AB antecedant sera aussi à AC , excex, par lequel il surmonte le consequent, comme DE antecedant sera à DF , excex par lequel l'antecedant excède le consequent, cela sera dit conuerſion de raison. En ceste sorte d'argumenter les auteurs parlent ordinairement ainsi: comme AB est à CB ainsi DE est à FE : Donc par conuerſion de raison AB sera à AC , comme DE à DF : laquelle sorte d'argumenter sera demonstree au coroll. de la 19. p. de ce liure. Ceste 16. def. a esté retranchée par Donnos.

17. Raison egalle est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'un costé, & autant de l'autre en

multitude, prise de deux en deux en mesme raison, & que la premiere des premieres grandeurs, est à la derniere des mesmes, comme la premiere des seconds est à la derniere des mesmes.

Autrement c'est lors qu'on prend les extremes par la soustraction des moyennes.

Comme s'il y a d'un costé quatre quantitez, A, B, C, D ; Et autant d'un autre E, F, G, H , lesquelles soient prises deux à deux en mesme raison, c'est à dire que A soit à B comme E à F ; & B à C , comme F à G ; & C à D , comme G à H : si on infere que cōme A est à D , premiere & derniere des premieres grandeurs, ainsi E à H premiere & derniere des secondes. Ceste maniere d'argumentation est dite raison egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que ceste maniere d'argumenter se prend ordinairement en deux sortes. sçavoir est, qu'à l les grandeurs qui sont en mesme raison sont prises d'ordre; & qu'à l'ordre est perverty. Euclide explique que es deux des. suivantes que c'est que proportion ordonnee & perturbée.

18. Proportion ordonnee est quand l'antecedent est au consequent comme l'antecedat est au consequent de l'autre: & ainsi que l'un des consequens est à quelque autre, l'autre consequent soit aussi à quelque autre.

Cecy est aisé à entendre par l'exemple de la des. precedente, où nous auos posé A estre à B cōme E à F ; & B à C , cōme F à G ; & C à D , cōme G à H : Car ainsi les termes des 4. premieres quantitez sont pris d'un mesme ordre, que ceux des quatre dernieres; & partant ceste proportion est dicte ordonnee. Or que le moyen d'argumenter par raison d'egalite, la proportion d'ordre estant obseruee, soit bon, il sera demonstree en la 22. p. de ce liure.

19. Proportion troublee est quand trois

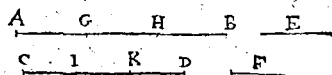
grandeurs estans d'un costé, & autant d'un autre, la premiere est à la seconde, comme la cinquiésme à la sixiésme, & comme la seconde à la troisieme; ainsi la quatriésme à la cinquiésme.

Comme si A est à B , ainsi que E est à F ; & comme A . B . C .
 Est à C , ainsi D à E : ceste proportion sera dictetrou- 12. 8. 4.
 blee ou perturbée, d'autant qu'un mesme ordre n'est pas D E . F .
 gardé en la comparaisón des premieres grandeurs 12. 6. 4.
 entr'elles; qu'és secondes aussi entr'elles. Car és premieres quantitez, la
 premiere est comparee à la seconde, & ceste cy à la 3. mais és secondes
 quantitez la 2. est comparee à la 3. & la premiere à la 2. Or que le
 moyen d'argumenter par raison egale, la proportion troublee estant gar-
 dée, soit bon, il sera demonstré en la 23. p. de ce liure.

THEOR. I. PROP. I.

S'il y a tât de grandeurs qu'on voudra eque-
 multiplées d'autant d'autres grandeurs, cha-
 cune à la sienne, comme l'une fera multi-
 plice de l'une, ainsi les toutes seront multipli-
 ces des toutes.

Soient tant de gran-
 deurs qu'on voudra
 AB & CD , eque mul-
 tiplices d'autant d'au-
 tres grandeurs E & F .



Ie dis que les grandeurs AB & CD en-
 semble, seront autant multiplées de E & F ensemble, comme
 AB est de E ou CD de F .

Car puis que AB est multiplée de E , E mesurera AB cer-
 tain nombre de fois par la 2. def. 5. qu'elle la mesure donc
 trois fois, & soit icelle AB couppee en trois parties egales AG
 GH , HB , qui seront chacune egale à E . Le mesme se peut di-
 re de la grandeur CD , laquelle on couppera aussi en trois
 parties egales CI , IH , HD , étant chacune d'icelles egale à
 F ; mais qui à choses egales, sçavoir à AG , & E adiouste cho-

multitude, prise de deux en deux en mesme raison, & que la premiere des premieres grandeurs, est à la derniere des mesmes, comme la premiere des secondes est à la derniere des mesmes.

Autrement c'est lors qu'on prend les extremes par la soustraction des moyennes.

Comme s'il y a d'un costé quatre quantitez, A, B, C, D ; Et autant d'un autre E, F, G, H , lesquelles soient prises deux à deux en mesme raison, c'est à dire que A soit à B comme E à F ; B à C , comme F à G ; & C à D , comme G à H : si on infere que cōme A est à D , premiere & derniere des premieres grandeurs, ainsi E à H premiere & derniere des secondes. Ceste maniere d'argumentation est dite raison egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que ceste maniere d'argumenter se prend ordinairement en deux sortes. sçavoir est, quā les grandeurs qui sont en mesme raison sont prises d'ordre; & quā l'ordre est peruerſy. Euclide expose que es deux des. suivantes que c'est que proportion ordonnee & peruerſee.

$A. B. C. D.$
$2. 4. 8. 16.$
$E. F. G. H.$
$3. 6. 12. 24.$

18. Proportion ordonnee est quand l'antecedent est au consequent comme l'antecedāt est au consequent de l'autre: & ainsi que l'un des consequens est à quelque autre, l'autre consequent soit aussi à quelque autre.

Cecy est aisē à entendre par l'exemple de la des. precedente, où nous auōs posē A estre à B cōme E à F , et B à C , cōme F à G ; & C à D , cōme G à H : Car ainsi les termes des 4. premieres quantitez sont pris d'un mesme ordre, que ceux des quatre dernieres; & pariant ceste proportion est dite ordonnee. Or que le moyen d'argumenter par raison d'egalite, la proportion d'ordre estant obseruee, soit bon, il sera demonſtré en la 22. p. de ce liure.

19. Proportion troublee est quand trois

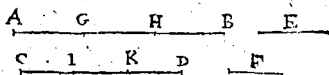
grandeurs estans d'un costé, & autant d'un autre, la premiere est à la seconde, comme la cinquiésme à la sixiésme, & comme la seconde à la troisieme; ainsi la quatriésme à la cinquiésme.

Comme si *A* est à *B*, ainsi que *E* est à *F*; & comme *A*. *B*. *C*.
 B est à *C*, ainsi *D* à *E*: ceste proportion sera dictée trou- 12. 8. 4.
 blee ou perturbée, d'autant qu'un mesme ordre n'est pas *D* *E*. *F*.
 gardé en la comparaison des premieres grandeurs 12. 6. 4.
 entr'elles; qu'es secondes aussi entr'elles. Car es premieres quantitez, la
 premiere est comparee à la seconde, & ceste cy à la 3. mais es secondes
 quantitez la 2. est comparee à la 3. & la premiere à la 2. Or que le
 moyen d'argumenter par raison egale, la proportion troublee estant gar-
 dée, soit bon, il sera demonsté en la 23. p. de ce liure.

THEOR. I. PROP. I.

S'il y a tât de grandeurs qu'on voudra eque-
 multiplies d'autant d'autres grandeurs, cha-
 cune à la sienne, comme l'une fera multi-
 plice de l'une, ainsi les toutes seront multipli-
 ces des toutes.

Soient tant de gran-
 deurs qu'on voudra
AB & *CD*, eque mul-
 tiplices d'autant d'au-
 tres grandeurs *E* & *F*.



Ie dis que les grandeurs *AB* & *CD* en-
 semble, seront autant multiplies de *E* & *F* ensemble, comme
AB est de *E* ou *CD* de *F*.

Car puis que *AB* est multiplie de *E*, *E* mesurera *AB* cer-
 tain nombre de fois par la 2. def. 5. qu'elle la mesure donc
 trois fois, & soit icelle *AB* coupee en trois parties egales *AG*
GH, *HB*, qui seront chacune egale à *E*. Le mesme se peut di-
 re de la grandeur *CD*, laquelle on coupera aussi en trois
 parties egales *CI*, *IH*, *HD*, étant chacune d'icelles egale à
F: mais qui à choses egales, sçavoir à *AG*, & *E* adiouste cho-

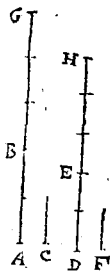
ses egales, sçavoir CI, & F, les toutes AG, CI ensemble, seront egales aux toutes E & F ensemble. Par mesme raison G H & IK ensemble, seront egales à icelles E & F ensemble; pareillement HB & KD, aux mesmes E & F. Autant donc qu'il y a de grandeurs en AB, egales à E; & en CD egales à F; autant y en a-il en AB & CD prises ensemble, qui sont egales à E & F prises ensemble: Parquoy les deux AB & CD ensemble, seront triples des deux ensemble E & F, comme la seule AB est triple de la seule E, ou la seule CD de la seule F, ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere est autant multipliee de la seconde, que la troisieme de la quarte; & la cinquiesme autant multipliee de la seconde, que la sixiesme, de la quarte; la composee de la premiere & cinquiesme fera autant multipliee de la seconde, comme la composee de la troisieme & sixiesme, de la quarte.

Soit la premiere grandeur AB, autant multipliee de la seconde C, comme la 3. DE l'est de la 4. F. & soit la 5. BG autant multipliee de la 2. C, comme la 6. EH, de la 4. F: Je dis que la 1. & 5. ensemble AB, & BG, seront autant multipliees de la 2. C. comme la 3. & 6. DE & EH ensemble, seront de la 4. F. •

Car puis que AB est autant multipliee de C, cōme DE de F, il y a en AB autāt de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DE d'egales à F. Par mesme raison, il y aura aussi en BG autāt de grandeurs egales à C, comme il y en a en EH d'egales à F. Il y aura donc en AG autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DH d'egales à F: parquoy AG composee de la premiere & 5. est autant multipliee de la seconde C, comme DH composee de la 3. & 6. l'est de la 4. F. ce qu'il falloit demonstrier.

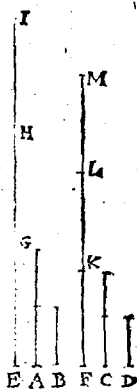


THEOR. 3. PROP. III.

Si la premiere est autant multipliee de la seconde, comme la tierce de la quarte ; & on prend des equemultiplices de la premiere, & troisieme : la multipliee de la premiere sera aussi autant multipliee de la seconde, que la multipliee de la 3. le sera de la quarte.

Soit A autant multipliee de B, comme C est de D, & de la 1. & 3. A & C, soient prises les equemultiplices E & F. Je dis que E sera autant multipliee de B, que F de D.

Car puis que E est autant multipliee de A, que F est de C, E contiendra autant de parties egales à A, comme F de parties egales à C. Soit donc E diuisee en EG, GH, & HI, chacune egale à A : Item F diuisee en FK, KL & LM chacune egale à C ; & d'autant que EG & FK sont egales à A & C, lesquelles sont equemultiplices de B & D par l'hypothese ; aussi EG & FK seront equemultiplices des memes B & D. Par mesme raison GH & KL, item HI & LM seront equemultiplices d'icelles B & D. Veu donc que EG premiere grandeur est autant multipliee de la seconde B, que FK 3. l'est de D. 4. item GH 5. autant multipliee de la mesme seconde B, que KL 6. de la 4. D ; aussi EH composee de la 1. & 5. sera autant multipliee de la 2. B, que FL composee de la 3. & 6. l'est de la 4. D par la precedente prop. De rechercher puis que EH premiere grandeur est autant multipliee de la seconde B, que FL 3. l'est de D 4. & HI 5. est aussi autant multipliee de la seconde B, que LM 6. l'est de la 4. D ; EI composee de la 1. & 5. sera aussi autant multipliee de la 2. B, que FM composee de la 3. & 6. l'est de D 4. par la 2. p. 5. ce qu'il falloit demonstrier.



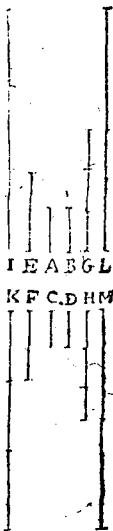
THEOR. 4. PROP. III.

Si la premiere est à la seconde, en mesme

raison que la tierce à la quarte : aussi les equemultiples de la première & tierce auront mesme raison aux equemultiples de la seconde & quarte, en quelque multiplication que ce soit, si elles sont prises ainsi qu'elles s'entre-respondent.

Soit A à B en mesme raison que C à D, & soient prises E & F equemultiples de A première & C 3. Item G & H equemultiples de B 2. & D 4. selon quelque multiplication que ce soit. Je dis qu'il y a mesme raison de E à G, que de F à H.

Car si on prend I & K equemultiples de E & F; pareillement L & M equemultiples de G & H; d'autant que E première est autant multiple de A 2. que F 3. l'est de C 4. & I, K sont prises equemultiples d'icelles E, F première & tierce, aussi par la 3. p. 5. I, & K seront equemultiples de A, & C seconde & quarte. Par mesme raison L & M seront aussi equemultiples de B & D : & puis que A est à B comme C à D; & d'icelles A & C 1. & 3. ont esté démontrées I & K equemultiples, mais de B & D 2. & 3. autres equemultiples L & M, par la converse de la 6. def. 5. si I deffaut est egal, ou plus grâde que L, aussi K deffaudra, sera egal, ou plus grande que M; selon quelconques multiplications qu'icelles equemultiples soient prises, Et pour autant que I & K, sont equemultiples de E & F; pareillement L & M de G & H, par la mesme 6. def. 5. il y aura mesme raison de E à G, comme de F, à H, ce qu'il falloit demonstrier.



COROLLAIRE.

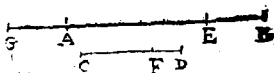
Par cecy est manifeste la preuve de la raison inverse, qu'Euclide a expliquée en la 13. def. de ce livre, sçavoir est, que si 4. grandeurs sont proportionnelles, elles le seront aussi estans prises à rebours, c'est à dire

à dire que E estant à G comme F à H, aussi en changeant G sera à E comme H à F. Car puis qu'il a esté démontré que si I defaut, est égale, ou plus grande que L, aussi K defaudra, sera égale, ou plus grande que M; selon quelconque multipli. Il apert aussi que si L defaut, est égale, ou plus grande que I, aussi M defaudra, sera égale ou plus grande que K, selon quelconque multiplication: Et partant par la 6. def. il y aura mesme raison de G à E que de H à F.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne grandeur est autant multipliee d'une grandeur, que la retranchée de la retranchée, aussi le reste sera autant multipliee du reste, que la toute de la toute.

Soit la toute AB, autant multipliee de la toute CD, comme la retranchée AE, de la retranchée CF: Je dis que



le reste EB, sera autant multipliee du reste FD, que la toute AB est de la toute CD.

Car A G estant faicte autant multipliee de F D, comme AE est de CF, ou comme la toute AB l'est de la toute CD: d'autant que AE, AG sont equemultipliees de CF, FD: par la 1. p. 5. la toute GE, sera autant multipliee de la toute C D, comme AE, de CF: Mais aussi AB, estoit autat multipliee de CD cōme AE de CF: donc GE: AB, sont equemultipliees de CD; & partant égales entr'elles par la 6. com. sent. Parquoy en ostant ce qui est de cōmun AE, demeureront égales GA, EB; & partant equemultipliees de FD, puis que GA a esté posée multipliee d'icelle FD, & autant comme AB de C D: donc aussi le reste EB sera autant multipliee du reste FD, que la toute AB l'est de la toute CD, ce qu'il falloit démonstrier.

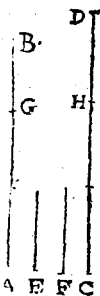
THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont equemultipliees de deux autres grādeurs, & d'icelles on retrans-

che des equemultiplices : ou les restes seront
egaux aux mesmes, ou equemultiplices di-
celles.

Soient les grandeurs AB, CD, equemultiplices
des grandeurs E, F ; & les retranchées AG, CH,
aussi equemultiplices des mesmes E, F: Je dis que
les restes GB, HD seront ou égales aux mesmes
E, F, ou equemultiplices d'icelles.

Car d'autant que AB & CD, sont equemulti-
plices de E & F, en AB il y aura autant de grandeurs
égales à E, comme en CD de grandeurs égales à
F. Pareillement d'autant que la retranchée AG est
autant multiplie de E, que la retranchée CH
l'est de F; AG contiendra autant de grandeurs éga-
les à E, que CH de grandeurs égales à F, par la
1. & 2. def. 5. Si donc d'égales multitudes de
grandeurs AB, & CD, on oste égales multitudes
de grandeurs AG, CH, les multitudes demeurantes
GB, HD seront égales: c'est à dire que GB contiendra autant
de fois E, comme HD contiendra F, ou bien si GB est éga-
le à E, aussi HD sera égale à F, & si BG est multiplie de E, aussi
HD sera autant multiplie de F.



THEOR. 7. PROP. VII.

Les grandeurs égales ont même raison à
vne même; & celle-cy aura même raison aux
grandeurs égales.

Soient deux grandeurs

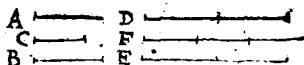
égales A & B, & vne autre

quelle qu'elle soit C. Je

dis que A & B ont même

raison l'une que l'autre à C; & que C aura même raison à A

que à B.



Qu'il ne soit ainsi; soient pris D & E equemultiplices de A
& B, soit aussi pris F quelconque multiplie de C; donc
pour autant que D est autant multiplie de A, que E est mul-
tiplie de B, & que A & B sont égales; aussi D, & E seront éga-

les par la 6. com. sent. Si donc D est plus grande, egale, ou plus petite que F, aussi E sera plus grande, egale, ou plus petite que la mesme F, & par la 6. def. 5. il y aura telle raison de A à C, comme de B à la mesme C.

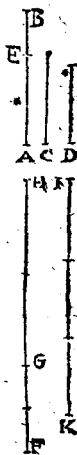
Quant à l'autre partie, elle se prouue tout de mesme par la 6. def. 5. en prenant les mesmes equemultiplices, & montrant l'excez, &c. ou bien plus facilement par la raison inuerse. Car puis qu'il a esté demonsté que A est à C, comme B à C, en changeant C sera à A, comme C à B par le corol. de la 4. p. 5.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Des grandeurs inegales, la plus grande a plus grande raison à vne mesme, que la plus petite; & vne mesme a plus grande raison à la plus petite, qu'à la plus grande.

Soient deux grandeurs inegales AB, & C, desquelles AB est la plus grande, & vne troisieme quelle qu'elle soit D. Ie dis que AB a plus grande raison à la troisieme D, que non pas C, item, que D a plus grande raison à C, qu'à AB.

Qu'il ne soit ainsi; soit entendue AB premiere grandeur, D 2. C 3. D. 4. & d'autant que AB est plus grande que C, soit retranchée AE egale à icelle C, & soient trouuées les equemultiplices, à sçauoir FG de BE, & GH de EA, en sorte que FG, & GH soient plus grandes chacune que D: & puis que les deux FG, GH, sont equemultiplices des deux BE, EA, par la 1. p. 5. HF sera autant multiplie de AB, comme HG de AE, ou de C son egale: Maintenant soit prise IK aussi multiplie de D, en sorte qu'elle soit plus petite que HF, mais plus grande que HG (ce qui est facile, d'autant que D est plus petit que ny FG, ny GH; si bien qu'il faut seulement adiouster tant de fois la grandeur D, iusques à ce que l'on ait ce que l'on cherche) d'autant que FH, GH sont equemultiplices de AB premiere, & C troisieme, si IK est prise pour l'equemultiplice, tant de D seconde, que



D quatriesme, il est euident que HF multiplie de AB premiere, estant plus grande que IK multiplie de D2. HG multiplie de C3. n'est pas plus grande que IK multiplie de D4. & partant par la huitiesme def. 5. il y aura plus grande raison de AB à D, que de C à la mesme D.

Quant à la seconde partie, dautant que IK multiplie de la premiere D (car il faut maintenant poser D premiere & troisieme, & C seconde, & AB quatrieme) est plus grande que HG multiplie de la seconde C, & IK multiplie de la troisieme D, est moindre que FH multiplie de AB quatrieme; Il y aura plus grande raison de D à C, que de D à AB par la 8. def. 5.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les grandeurs qui ont mesme raison à vne mesme, sont egales entr'elles: & celles là aussi sont egales, auxquelles vne mesme grandeur a mesme raison.

Soient premierement deux grandeurs A & B, lesquelles ont mesme raison l'une que l'autre à la troisieme C. Je dis qu'elles sont egales entr'elles.

Car si elles n'estoient egales, il faudroit que l'une ou l'autre fust plus grande: & par la 8. p. 5. icelle plus grande auroit plus grande raison à C, que la plus petite: ce qui est contre l'hypothese: donc A & B ne sont pas inegales, mais egales.

Soient maintenant A & B, à chacune desquelles C a vne mesme raison. Je dis qu'icelles A & B sont aussi egales entr'elles. Car autrement il faudroit que l'une fust plus petite que l'autre: & par la 8. p. 5. à icelle plus petite, C auroit plus grande raison qu'à la plus grande: ce qui est contre l'hypothese: A & B ne sont donc pas inegales, mais egales.



THEOR. 10. PROP. X.

Des grandeurs qui ont raison à vne mesme grandeur, celle qui a plus grande raison est la plus grande: & celle à laquelle la mesme a plus

grande raison, est la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C, & la raison de A à C soit plus grande que de B à la mesme C. Je dis que A sera plus grâde que B: ité si C à plus grande raison à B que non pas à A. Je dis que B sera plus petite que A.

Autrement pour la premiere partie: si A n'estoit plus grâde que B, elle seroit egale, ou plus petite; ce qui est impossible: car si elles estoient egales, elles auroient mesme raison l'une que l'autre à C, par la 7. p. 5. ce qui seroit contre la supposition; si aussi elle estoit plus petite, elle auroit plus petite raison à C que non pas B, par la 8. p. 5. ce qui est pareillement contre l'hypothese. Donc A sera plus grande que B.

Quant à la seconde partie, si B n'estoit moindre que A, elle seroit egale ou plus petite, ce qui est impossible: car si elles estoient egales, C auroit mesme raison à l'une qu'à l'autre par la 7. p. 5. ce qui est contre nostre hypothese: si aussi elle estoit plus grande, C auroit plus grande raison à A qu'à B par la 8. p. 5. ce qui est aussi contre l'hypothese. Donc B sera moindre que A.

THEOR. II. PROP. XI.

Les raisons qui sont de mesme à vne, sont aussi de mesme entr'elles.

Soit A à B, comme C à D; & comme C à D, ainsi E à F: Je dis que comme A à B, ainsi E sera à F.

Qu'il ne soit ainsi, de toutes les antecedantes A, C, E, soient prises quelcôques equemultiples, G, H, I: Pareillement des

G	H	I
A	C	E
B	D	F
K	L	M

consequentes B, D, F, quelconques equemultiples, K, L, M. Pour autant donc que A est à B comme C à D, par la conuerse de la 6. def. 5. si G multiplie de A est egale, plus grande, ou plus petite que K multiplie de B; aussi H multiplie de C,

sera egale, plus grande, ou plus petite que L multiplie de D.
Item puis que comme C à D, ainsi E à F, si H multiplie de C
est egale, plus grande, ou plus petite que L, multiplie de D,
aussi I multiplie de E sera egale, plus grande, ou plus petite
que M multiplie de F: Parquoy si G multiplie de A premiere
est plus grande, egale, ou plus petite que K multiplie de B 2.
aussi I multiplie de E 3. sera plus grande, egale, ou plus peti-
te que M multiplie de F 4. & par la 6. def. 5. comme A sera à
B, ainsi E sera à F.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont
proportionnelles; comme l'une des antecedan-
tes sera à l'une des cōsequentes, ainsi toutes les
antecedantes seront à toutes les consequentes.

Soient six grandeurs proportionnelles A, B, C, D, E, F, sçavoir
que A soit à B comme C est à D, & E à F: Je dis que comme
l'une des antecedantes est à une des consequentes, sçavoir
est A à B, ainsi toutes les antecedantes ensemble A, C, E, seront
à toutes les consequentes ensemble B, D, F.

G	H	I
A	G	E
B	D	F
K	L	M

Car étant prises de A, C, E, les equemultiplices G, H, I: item
de B, D, F, les equemultiplices K, L, M; toutes les trois mul-
tiplices ensemble G, H, I, seront autant multiples des trois
ensemble A, C, E, comme la seule G est multiplie de la seule
A par la 1. p. 5. Pareillemēt par la mesme raison toutes les trois
K, L, M ensemble, seront autant multiples des trois B, D, F
ensemble, comme K sera multiplie de B: Partant puis que
A, B, C, D, E, F sont proportionnelles, si G equemultiplie de A
premiere, est plus grande, egale, ou plus petite que H, equem-
multiplie de C 3. aussi K equemultiplie de B deuxiesme, se-
ra plus grande, egale, ou plus petite que L, equemultiplie de
D quatriesme, par la conuerse de la 6. def. 5. & ainsi des deux
autres: Partant si G est plus grande, egale, ou plus petite que

K, le composé des trois G, H, I, sera aussi plus grand, égal, ou plus petit que le composé des trois K, L, M. Donc par la mesme 6. def. 5. comme A sera à B, ainsi les trois A, C, E, ensemble seront aux trois B, D, F ensemble: ce qui estoit à prouver.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si la premiere est à la seconde comme la tierce à la quarte; mais la tierce a plus grande raison à la quarte que la cinquieme à la sixiesme; aussi la premiere aura plus grande raison à la seconde, que la cinquieme à la sixiesme.

Soit A premier à B 2. (en la precedente figure) comme C 3. à D 4. & qu'il y ait plus grande raison de C 3. à D 4. que de E 5. à F 6. Je dis qu'il y aura aussi plus grande raison de A 1. à B 2. que de E 5. à F 6.

Car estant prises de A, C, E, les equemultiplices G, H, I. & de B, D, F, aussi les equemultiplices K, L, M, pour autant que A est à B comme C à D, si G multiplie de A est égale, plus grande, ou plus petite que K multiplie de B, aussi par la conuerse de la 6. def. 5. H multiplie de C, sera égale, plus grande ou plus petite que L multiplie de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raison de C à D, que de E à F si H multiplie de C, est plus grande que L multiplie de D, il n'est pas necessaire que I multiplie de E, excède M multiplie de F, par la 8. def. 5. conuertie: donc aussi si G excède K, il n'est pas necessaire que I excède M, & partant par la 8. def. 5. il y a plus grande raison de A à B, que de E à F.

S C H O L I E.

Que si la tierce C a moindre raison à la quarte D, que la cinquieme E, à la 6. F, aussi la 1. A aura moindre raison a la seconde B, que la 3. E, a la sixieme F. Car si la raison de C à D est moindre que celle de E à F, c'est à dire, que la raison de E 1. à F, seconde estant plus grande que celle de C 3. à D 4. si I excède M, il n'est pas necessaire que H excède L, car quelquesfois elle defaut, ou est égale à icelle par la 8. def.

5. conuertie. Mais si H defaut ou est egale a L, aussi G defaudra, ou sera egale a K par la 6. def. 5. conuertie, parce qu'on a posé C 1. estre a D 2. comme A 3. a B 2. Parquoy si L excède M, il n'est pas necessaire que G excède K; & partant par la 8. def. 5. il y aura plus grande raison de E a F que de A a B, c'est a dire que la raison de A a B sera moindre que de E a F, ce qui estoit proposé.

En la mesme mainere sera demonsté, que s'il y a plus grande raison de la 1. a la seconde, que de la tierce a la quarte; mais la tierce a plus grande raison a la quarte, que la 5. a la 6. pareillement la 1. aura beaucoup plus grande raison a la seconde que la 5. a la 6.

Que si la 1. a moindre raison a la 2. que la 3. a la quarte, & la tierce a moindre raison a la 4. que la 5. a la 6. Aussi la 1. aura beaucoup moindre raison a la seconde, que la 5. cinquieme a la sixiesme.

THEOR. 14. PRO P. XIV.

Si la premiere est a la seconde, comme la tierce a la quarte; & que la premiere soit plus grande que la tierce, aussi la seconde sera plus grande que la quarte: & si egale, egale: si plus petite, plus petite.

Soit A a B, comme C est a D, & que A premiere soit plus grande, egale, ou plus petite que C. Je dis que B 2. sera aussi plus grande, egale, ou plus petite que D 4.

Soit premierement A plus grande que C: il y aura donc plus grande raison de A a B, que de C a la mesme B, par la 8. p. 5. & par consequent plus grande raison de C a D que de C a B, estant icelle la mesme raison que de A a B, & par la 10. p. 5. B sera plus grande que D.

Soit puis apres A egale a C; & par la 7. p. 5. A sera a B, comme C a B, & puis que les raisons de C a D, & C a B, sont les mesmes que de A a B; les raisons de C a D, & de C a B, seront de mesme entrelles par la 11. p. 5. & partant par la 9. p. 5. B & D seront egales. Finablement soit A moindre que C; & par la 8. p. 5. il y aura plus grande raison de C a D, que de A a D; & par consequent plus grande raison de A a

B, que de A à D, puis qu'il y a même raison de A à B, que de C à D, & par la 10. p. 5. B sera moindre que D,

S C H O L I E.

Que si la seconde est plus grande, ou égale, ou moindre que la quatrième; aussi la première sera plus grande, ou égale, ou moindre que la tierce. Car puis que A est à B comme C à D, en changeant B sera à A comme D à C par le coroll. de 4. p. 5. Donc si B est plus grande, ou égale, ou moindre que D, aussi A sera plus grande, ou égale, ou moindre que C par la 14. p. 5.

Or Euclide n'a pas démontré que si la première est plus grande, égale, ou plus petite que la seconde; aussi la tierce sera plus grande, égale, ou moindre que la quatrième; pour ce que cela est évident à cause de la similitude des raisons. Ce que nous pourrions néanmoins démontrer après Commandin; mais d'autant que sa démonstration ne compete qu'aux grandeurs de même genre, nous nous tiendrons à ce que la nature des proportions nous monstre, encore que les grandeurs soient de divers genres.

THEOR. 15. PROP. XV.

Les grandeurs sont entr'elles, comme sont leurs equemultiplices entr'elles.

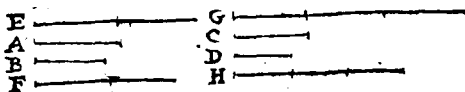
Soit AB autant multiplie de C comme DE est multiplie de F. Je dis que AB sera à DE, comme C à F. Car puisque AB & DE sont equemultiplices, il y aura en AB autant de parties égales à C, comme DE contient de parties égales à F, soit donc divisée AB en parties AG, GB, égales à C, & DE en parties DH, HE égales à F; & par la 7. p. 5. vne chacune partie de AB, sera à vne chacune partie de DE, comme C est à F, & par la 12. p. 5. toutes les antecédentes AB, seront à toutes les conséquentes DE, comme AG l'une des antecédentes, est à DH, l'une des conséquentes, c'est à dire comme C à F, puis que c'est la même raison.



THEOR. 16. PROP. XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles le seront aussi estans permutees.

Soit A à B, comme C à D. Je dis qu'en permutant A sera



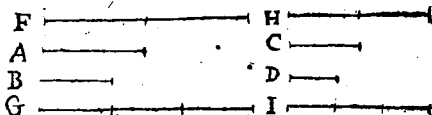
à C, comme B à D. Car si on prend E & F equemultiples de A & B, item G & H equemultiples de C & D; E sera à F, comme A à B par la propo. precedente, & G à H comme C à D; & par consequent E estant à F, & C à D, en mesme raison que A à B, elles sont de mesme entr'elles par la 11. p. 5. Derechef puis que les raisons de E à F, & G à H sont les mesmes que de C à D, elles seront aussi de mesme entr'elles par la susdite 11. p. 5. c'est à dire, que comme E premiere est à F seconde, ainsi sera G tierce à H quarte: parquoy par la 14. p. 5. si E premiere est plus grande, egale, ou moindre que G tierce, aussi F seconde sera plus grande, egale, ou moindre que H quatriesme, en quelconque multiplication que soient prises les equemultiples; & par la 6. def. 5. A sera à C, comme B à D (puisque E & F sont equemultiples de A premiere & B troisieme; & G & H equemultiples de C seconde & D 4. & celles la defaillent, sont egales, ou excèdent celles-cy, &c.): ce qui estoit à prouver.

SCHOLIE.

Or la demonstration de ceste proposition a seulement lieu quand les quatre grandeurs sont de mesme genre. Car si les deux A & B estoient d'un genre, & les deux C & D d'un autre; aussi les equemultiples E & F seroient d'un genre, sçavoir est duquel sont A & B; & les equemultiples G & H d'un autre genre, c'est à sçavoir de celui auquel sont C & D: Parquoy on ne pourroit pas dire E estre

plus grande, egale ou moindre que G; & partant rien n'est se concluroit par la 6. def. de ce liure. La raison permutee a donc seulement lieu quand les 4. grandeurs sont d'un mesme genre: Ce que Dounot n'a pas recogneu, puis qu'il usurpe icelle, les grandeurs estans de diuers genres, en plusieurs propositions, tant de ce liure que du 10.

Ledit Dounot a aussi reietté ceste demonstration des anciens, & au lieu d'icelle s'est imaginé la suivante. Soit A a B comme C est a D. Je dis aussi, que A sera alternativement a C comme



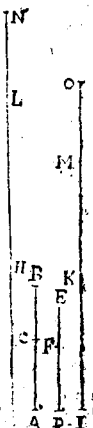
B est a D. Car si on prend F & H equemultiples de A & C, item G, & I equemultiples de B & D, par la 4. p. 5. F, G, H, I, seront proportionnelles, & par la 14. p. 5. comme F, sera plus grande, egale, ou plus petite que G; aussi H sera plus grande, egale, ou plus petite que I: (ce qui ne se peut prendre de ladite 14. p. 5. car par icelle la premiere F estant plus grande &c. que H 3. la seconde G seroit plus grande &c. que I 4. mais bien pouuoit il tirer cela de la nature des proportions, comme nous auons dit au scholie de ladite 14. p. 5.) Et par la 6. def. 5. A sera a C comme B a D: ce qui est euidentement faux: car pour estre A a C comme B a D, il faudroit, selon ladite 6. def. 5. que F & G multiples de A premiere & B troisieme, item H & I multiples de C 2. & D 4. fussent equemultiples, & elles ne le sont pas. Dounot n'a donc peu rien conclure de la 6. def. 5. & partant sa pretendue demonstration de ceste 16. prop. doit estre reiettee, & celle des anciens suiue.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs composees sont proportionnelles, icelles diuisees seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs composees AB, CB & DE, FE proportionnelles, c'est à dire que AB soit à CB, comme DE à FE. Je dis que les mesmes diuisees sont aussi proportionnelles, c'est à dire que comme AC est à CB, ainsi DF est à FE.

Car d'icelles AC, CB, DF, FE soient prises les equemultiples GH, HL, IK, KM, chacune à chacune, & par la 1. p. 5. GL sera autant multipliee de AB, que GH de AC, c'est à dire comme IK de DF. Mais icelle IK est autant multipliee de DF, que IM de DE par la mesme 1. p. 5. donc GL IM sont equemultiples de AB, DE. Derechef soient prises LN, MO equemultiples de CB, FE. Pour autant que HL premiere est autant multipliee de CB 2. que KM tierce de la quarte FE, & LN 5. autant multipliee de CB 2. que MO 6. de la quarte FE, par la 2. p. 5. HN sera autant multipliee de CB 2. que KO de FE 4. Et puisque AB est à CB comme DE à FE: & ont esté prises GL, IM equemultiples de AB, DE: mais HN, KO de CB, FE, par la 6. d. 5. conuertie si GL multipliee de AB premiere excède, est egale ou moindre que HN multipliee de CB 2. aussi IM, multipliee de DE 3. excèdera, sera egale ou moindre que KO multipliee de FE 4. ostant donc les choses communes HL, KM, si GH excède LN, aussi IK excèdera MO; & si egale, egale; & si moindre, moindre. Et d'autant que GH, IK sont equemultiples de AC premiere & DF tierce: Item LN, MO equemultiples de CB 2. & FE 4. & il a esté demonstré (en quelcôque multiplicatiô qu'ayét esté prises icelles equemultiples) que les equemultiples de la premiere & 3. excèdent, sont egales, ou moindres que les equemultiples de la 2. & 4. par la 6. d. 5. AC sera à CB, comme DF à FE: ce qui estoit à prouuer.



S C H O L I E.

Nous demonstrerons icy ce moyen-là d'argumenter, lequel en la 15. d. nous auons dict conuerse de la raison diuisee: c'est à dire que si AB, est à CB, comme DE à FE: aussi CB sera à AC, cômme FE à DF. Car d'autant que cômme AB à CB, ainsi DE à FE, en diuisant par la 17. p. 5. cômme AC sera à CB, ainsi DF à FE: & en changeant, cômme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF: ce qui estoit proposé.

Par mesme maniere sera demonst^ré ce moyen-là d'argumenter, lequel en la mesme 15. def. nous auons appellé contraire diuision de raison : c'est à dire que si AC est à AB, comme DF à DE : aussi AC sera à CB, ainsi que DF à FE. Car puis que AC est à AB cōme DF DE : en changeant comme AB sera à AC, ainsi DE à DF : donc en diuisant par la 17. p. 5. comme CB à AC, ainsi FE à DF : & en changeant derechef, comme AC à CB, ainsi DF à FE : ce qui estoit à demonst^rer.

THEO. 18. PROP. XVIII.

* Si les grandeurs diuisees sont proportionnelles, icelles composees seront aussi proportionnelles.

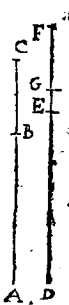
Soient les grandeurs diuisees AB, BC, & DE, EF proportionnelles. Je dis qu'en composant AC est à CB comme DF à EF.

Car si comme AC est à BC, ainsi DF n'est à EF; DF aura à quelque grandeur moindre ou plus grande que EF, mesme raison que AC à BC. Soit donc premierement DF à GF moindre que EF, en mesme raison que AC à BC, s'il est possible: & en diuisant par la 17. p. 5. DG sera à GF comme AB à BC. Mais comme AB à BC, ainsi DE est à EF: donc aussi comme DG sera à GF, ainsi DE sera à EF par la 11. p. 5. Mais DG premiere est plus grande que DE 3. donc par la 14. p. 5. GF seconde sera aussi plus grande que EF quatriesme, la partie que tout, ce qui est absurde. Il n'y aura donc pas de DF à GF moindre que EF, mesme raison que de AC à BC.

Par mesme discours on demōst^rera que DF n'aura pas à vne grandeur plus grande que EF, mesme raison que AC à BC. Donc comme AC est à BC, ainsi DF est à EF, puisque DF ne peut estre à vne grandeur moindre ou plus grande que EF, en mesme raison que AC à BC.

S C H O L I E .

Donnot s'estant licentié de changer la 17. p. a la 18. a aussi rejetté.



cette demonstration des anciens, laquelle a lieu en toutes sortes de grandeurs, soit qu'elles soient de mesme genre ou non : & celle qu'il a mise au li. u. d'icelle, a seulement lieu quand les grandeurs sont de mesme genre, d'autant qu'en icelle il usurpe la raison permutee, laquelle nous auons monstré au scholie de la 16. p. 5. ne pouuoir conuenir que aux grandeurs de mesme genre : & partant doit estre preferee la demonstration uniuerselle des anciens a la particuliere de Dounot.

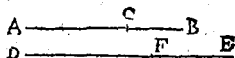
Nous demonstrerons icy ces deux moyens la d'argumenter es proportions, lesquels nous auons descrits en la 14. def 5. Quāt au premier que nous auons nommé conuerse composition de raison : soit comme AB a BC ainsi DE a EF. Je dis, que comme AC est a AB, ainsi DF a DE. Car puis que comme AB est a BC, ainsi DE a EF, en changeant comme BC sera a AB, ainsi EF a DE : donc en composant par la 18. p. 5. comme AC sera a AB, ainsi DF a DE. ce qu'il falloit prouuer.

Quant a l'autre moyen, que nous auons appelé contraire composition de raison : soit derechef comme AB a BC, ainsi DE a EF : Je dis que par le contraire de composition de raison, comme AB a AC, ainsi DE a DF. Car puis que comme AB est a BC, ainsi DE a EF, en changeant comme BC sera a AB, ainsi EF a DE : donc aussi en composant par la 18. p. 5. comme AC sera a AB, ainsi DF a DE : & partant en changeant derechef comme AB sera a AC, ainsi DE sera a DF : ce qui estoit proposé a prouuer.

THEO. 19. PROP. XIX.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché, le reste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

Soit la toute AB, a la toute DE, comme le retranché AC, au retranché DF. Je dis que le reste CB est au reste FE, comme la toute AB a la toute DE.



Car puisque AB est a DE, comme AC a DF, aussi en permutant par la 16 p. 5. AB sera a AC, comme DE a DF; & par la 17. p. 5. en diuisant comme CB a AC, ainsi FE a DF : parquoy en permutant derechef par la 16. p. 5. CB sera a FE, comme AB a DE, c'est a dire comme la toute AB a la toute DE, puis que A, B DE, & AC, DF ont esté posees en mesme raison.

S C H O L I E.

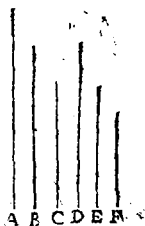
Nous démonstrerons icy ce moyen-la d'argumenter es proportions, qui est pris par la conuersion de raison. Car soit comme AB à CB , ainsi DE à FE . Je dis par conuersion de raison AB estre aussi à AC comme DE à DF . Car puisque comme AB à CB , ainsi DE à FE , en diuisant par la 17. p. 5. comme AC à CB , ainsi DF à FE : donc aussi en changeant comme CB à AC , ainsi EF à DF : & partant en composant par la 18. p. 5. comme AB à AC , ainsi DE à DF , ce qui estoit proposé.

THEO. 20. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'un costé, & trois d'un autre, estans prises de deux en deux, sont en mesme raison, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisieme, aussi la quatrieme sera plus grande que la sixiesme; & si egale, egale; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C , & trois d'un autre D, E, F , & comme A à B , ainsi D à E , & comme B à C , ainsi E à F : & que A soit plus grande que C ; Je dis que D sera plus grande que F .

Car puisque A est plus grande que C , il y aura plus grande raison de A à B que de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A à B ainsi D à E , & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de D à E , que de C à B . Item comme C est à B , ainsi F à E (car puisque B est à C , comme E à F , en changeant comme C sera à B , ainsi F à E) Il y aura donc aussi plus grande raison de D à E , que de F à E , & par la 10. p. 5. D sera plus grande que F .



Que si A est egale à C , je dis aussi que D sera egale à F . Car puisque A est egale à C , par la 7. p. 5. A sera à B comme C à B . Mais comme A est à B , ainsi D à E : & par la 11. p. 5. D sera à

E, comme C a B : & comme C est a B, ainsi F a E. Donc D sera aussi a E comme F a E ; & partant D & F feront egales par la 9. p. 5.

En troisieme lieu, si A est moindre que C, ie dis aussi que D est moindre que F. Car puisque A est moindre que C, il y aura moindre raison de A a B, que de C a B par la 8. p. 5. Mais comme A est a B, ainsi D est a E ; il y aura donc aussi moindre raison de D a E, que de C a B, par la 13. p. 3. Mais en changeant comme dessus, C est a B, comme F a E. Il y a donc pareillement moindre raison de D a E, que de F a E : & partant par la 10. p. 5. D sera moindre que F.

THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'un costé, & trois d'un autre, prises de deux en deux sont en mesme raison, estant leur proportion sans ordre, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisieme, aussi la quatrieme sera plus grande que la sixieme ; & si egale, egale ; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, (en la precedente figure) & trois d'un autre D, E, F, lesquelles prises de deux en deux soient en mesme raison, estant leur proportion troublee, sçavoir que comme A a B, ainsi E a F, & comme B a C, ainsi D a E. Je dis que comme A sera egale, plus grande, ou plus petite que C, aussi D sera egale, plus grande, ou plus petite que F.

Car si A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A a B, que de C a B par la 8. p. 5. Mais comme A a B, ainsi E a F, il y aura donc plus grande raison de E a F, que de C a B par la 13. p. 5. Et d'autant que comme B est a C, ainsi D est a E, en changeant comme C sera a B, ainsi E a D. Il y aura donc aussi plus grande raison de E a F, que de E a D : & partant par la 10. p. 5. D sera plus grande que F.

On peut prouver comme en la precedente, si A est egale, ou plus petite que C, D estre aussi egale, ou moindre que F.

THEOR.

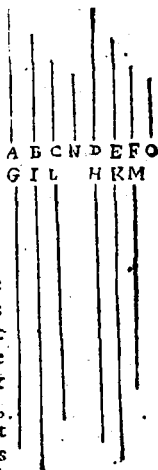
THEOR. 22. PROP. XXII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, lesquelles estant prises de deux en deux soient en mesme raison; icelles en raison egale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & soit A à B comme D à E, & B à C, comme E à F. Je dis qu'en raison egale, comme A à C, ainsi D à F.

Car estans prises G, H equemultiples de A, D: item I, K, equemultiples de B, E: Item L, M equemultiples de C, F: puis que A est à B, comme D à E, aussi G multiplie de A premiere sera à I multiplie de B 2. comme H multiplie de D 3. à K multiplie de E 4. par la 4. p. 5. Par mesme raison I sera à L, comme K à M. Veü d'oc que les trois grâdeurs G, I, L, & les trois autres H, K, M, estans prises de deux en deux sont en mesme raison, par la 20. p. 5. si G excède L, aussi H excèdera M; & si egale, egale, & si plus petite, plus petite: & partât puis que G, H, equemultiples de A & D deffaillet, s'ot egales ou excèdent L, M, equemultiples quelconques de C & F, par la 6. d. 5. A sera à C, côme D à F: ce qu'il falloit prouver.

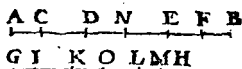
Maintenant soient plus de trois grandeurs, tellement que C soit aussi à N, comme F à O. Je dis que A est encore à N, comme D à O. Car puis que nous venons de demonstrier que A est à C, comme D à F; & on a posé C à N, comme F à O, il y aura trois grâdeurs A, C, N, & trois autres D, F, O, lesquels sont pris de deux en deux en mesme raison. Donc comme il a esté demonsté es trois grandeurs cy dessus, A sera derechef à N, comme D à O. En la mesme maniere sera demonsté en tant de grandeurs qu'on voudra.



S C H O L I E.

Le tres-docte Stevin en la 19. def. de ses prob. geomet. explique une sorte d'argumenter es proportions, qu'il appelle proportion transformee, qui peut estre reduite en un tel theoreme que le suivant.

S'il y a deux grandeurs, desquelles chacune soit coupee en tant de parties qu'on voudra, egales en multitude, & proportionnelles: la composee de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur sera à la composee des parties restantes, en mesme raison que la composee d'autant de parties de la posterieure grandeur sera à la composee des parties restantes d'icelle. Et si quelconque partie de l'une est coupee en deux autres parties, & la partie de l'autre correspondante à ceste partie là, est aussi coupee en deux autres parties proportionnelles à ces deux là: les totales grandeurs seront aussi coupees proportionnellement.



Soit une grandeur AB coupee en tant de parties qu'on voudra AC, CD, DE, EF, FB; & une autre grandeur GH, coupee en autāt de parties que AB, sçavoir est es cinq GI, IK, KL, LM, MH, proportionnelles à celles-là de AB. Je dis que AD composee des deux parties AC, CD, est à DB composee des trois parties restantes, comme GK composee des deux parties GI, IK, est à KH composee des trois autres parties restantes. Car puis que comme AC est à CD, ainsi GI est à IK en composant par la 18. p. 5. AD sera à CD, comme GK à IK. Mais comme CD à DE, ainsi IK à KL: donc par la 22. p. 5. en raison egale, comme AD sera à DE, ainsi GK sera à KL. Derechef, pource qu'en changeant, BE est à FE, comme HM à ML, aussi en composant BE sera à FE, comme HL à ML. Mais FE est à ED, comme ML à LK: donc en raison egale, BE sera à ED, comme HL à LK; & en composant, BD sera à ED, comme HK à LK, & en changeant, DE à DB, comme KL à KH. Parquoy puis qu'il a esté demonsté que AD est à DE, cōme GK à KL, & DE est à DB, comme KL à KH, par la 22. p. 5. en raison egale comme AD sera à DB, ainsi GK sera à KH.

Nous demonstrerons en la mesme maniere que comme AC est à CB ainsi GI est à IH. Car derechef en changeant, composant, & par egalité de raison, comme BC sera à DC, ainsi HI, à RI: & en changeant, comme CD sera à CB, ainsi IK sera à IH. Veu donc que comme AC est à CD, ainsi GI est à IK, & comme CD à CB, ainsi IK à IH: en raison egale, comme AC sera à CB, ainsi GI sera à IH.

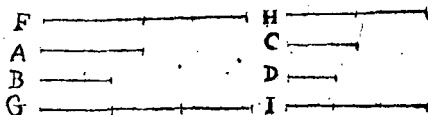
Par mesme raison, comme AF sera à FB, ainsi GM sera à MH. Car derechef en composant, & par égalité de raison, comme AF sera à FB, ainsi GM sera à MH. Car derechef en composant, & par égalité de raison, comme AF sera à E, ainsi GM sera à LM. Mais aussi comme EF est à FB, ainsi LM à MH : Donc en raison egale, comme AF est à FB, ainsi GM est à MH; & ainsi des autres : appert donc ce qui estoit premierement proposé.

Maintenant soit coupee, (comme pour exemple) la troisieme partie DE en deux quelconques parties DN, NE; & aussi la 3. KL en deux parties KO, OL proportionnelles a celles-là. Je dis que comme AN à NB, ainsi GO à OH. Car en changeant, comme EN sera à ND, ainsi LO à OK; & en composant par la 18. p. 5. comme ED sera à DN, ainsi LK à KO. Parquoy puisque comme CD est à DL, ainsi IK à KL; & comme DE à DN, ainsi KL à KO: par la 22. p. 5. en raison egale, comme CD sera à DN, ainsi IK à KO: ainsi les parties AC, CD, DN sont proportionnelles aux parties GI, IK, KO. Derechef pource qu'en changeant, comme FE est à ED, ainsi ML à LK: & en composant comme DE à NE, ainsi KL à OL: en raison egale, comme FE sera à EN ainsi ML à LO, & en changeant, comme NE à EF, ainsi OL à LM: & partant toutes les parties AC, CD, DN, NE, EF, FB sont proportionnelles a toutes les parties GI, IK, KO, OL, LM, MH. Donc comme il a esté démontré en la premiere partie, AN sera à NB, comme GO à OH: appert donc ce qui estoit proposé en second lieu.

Clavius demonstre encore en ce lieu. cy le theoreme suyvaut.

Si la premiere est à la seconde en mesme raison que la tierce à la quarte: les equemultiplices de la premiere & troisieme auront aussi vne mesme raison à la seconde & 4. Item les equemultiplices de la seconde & quatrieme auront vne mesme raison à la premiere & 3. Et au contraire la seconde & 4. auront vne mesme raison aux equemultiplices de la premiere & 3. Item la premiere & 3. auront vne mesme raison aux equemultiplices de la 2. & 4.

Soit A à B comme C à D, & soient F, H equemultiplices de A,



C: item G, I, equemultiplices de B, D. Je dis que F est à B, comme H à D: item que G est à A, comme I à C. Et au contraire que B est à F comme D à H: item A à G, comme C à I. Car puisque F est autant

multiplie de A , que H l'est de C , comme F est a A , ainsi H a C , & par l'hypothese A est a B , comme C a D ; donc en raison egale par la 22. p. 5. comme F sera a B , ainsi H sera a D . Derechef, pource que G est a B , comme I a D , & comme B a A , ainsi D a C : (car puis que A est a B cōme C a D par l'hypothese, en changeant comme B a A , ainsi D a C) en raison egale, comme G sera a A , ainsi I a C par la 22. p. 5.

Maintenant pource que B est a A , comme D a C par raison inuerse & comme A a F , ainsi C a H : en raison egale, comme B sera a F , ainsi D a H . Derechef puis que A est a B , comme C a D : & comme B est a G , ainsi D a I ; en raison egale, comme A sera a G , ainsi C a I , par la 22. p. 5. ce qui estoit proposé.

Par cecy est manifeste un moyen d'argumenter, dont les Geometres s'aident souuent, principalement Archimedes, Apollonius Pergeus, & autres: sçauoir est comme A a B , ainsi C est a D : donc comme F double, ou triple, ou quadruple &c. de A , est a B , ainsi aussi H double, ou triple, ou quadruple &c. de C , est a D : Item comme A est a B , ainsi C a D : donc comme A est au double, triple, ou quadruple &c. de B , sçauoir est a G ; ainsi aussi C sera au double, triple, ou au quadruple &c. de D , sçauoir est a I .

THEOR. 23. PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en mesme raison, & en proportion troublee: icelles en raison egale feront proportionnelles.

Soient trois grandeurs A, B, C , & trois autres D, E, F , & soient prises de deux en deux en mesme raison, estant la proportion troublee, sçauoir que comme A à B , ainsi E à F , & comme B à C , ainsi D à E . Je dis que A sera à C , comme D a F .

Car estans prises G, H, I , equemultiplices de A, B, D : itē K, L, M , quelconques autres equemultiplices de C, E, F . Par la 15. p. 5. comme A sera à B , ainsi G à H , puis que G, H , sont equemultiplices d'icelles A, B . Mais comme A a B , ainsi est E a F : donc par la 11. p. 5. comme G est a H , ainsi E est a F . Mais comme E est a F , ainsi aussi L est a M par la 15. p. 5. pource que L, M , sont equemultiplices d'icelles E, F : donc aussi comme G est a H , ainsi L est a M , par la 11. p. 5. & puis que comme B

est a C, ainsi D a E, par la 4. p. 5. comme H multi-
 plice de la premiere B, sera a K multiplie de
 la seconde C, ainsi I multiplie de la 3. D, sera a
 L multiplie de la 4. E : donc les trois grâdeurs
 G, H, K, & les trois autres I, L, M, estans prises
 de deux en deux sont en mesme raison, & la
 proportion d'icelles sans ordre, puis qu'il a esté
 démonstré que comme G est a H, ainsi L est a
 M, & comme H est a K, ainsi I a L ; & partant
 par la 21. p. 5. si G est plus grande, egale, ou
 moindre que K, aussi I sera plus grande, egale,
 ou moindre que M, & par la 6. def. 5. comme
 A sera a C, ainsi sera D a F : ce qu'il falloit de-
 monstrer.

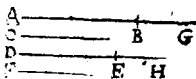
ABCDEF
GHIKLM

THEOREME 24.

PROP. XXIII.

Si la premiere est à la seconde, comme la
 troisieme à la quatrieme, & la cinquieme à la
 seconde, comme la sixieme à la quatrieme ;
 la composee de la premiere & cinquieme, sera
 à la seconde, comme la composee de la troi-
 sieme & sixieme, sera à la quatrieme.

Soit la premiere AB a la 2. C, comme
 la 3. DE est a la 4. F ; & la 5. BG a la 2.
 C, comme la 6. EH a la 4. F. Je dis
 que la toute AG, sera a C, comme la
 toute DH a F.



Car puisque comme BG a C, ainsi EH a F, aussi en chan-
 geant, comme C sera a BG, ainsi F a EH. Veu donc que AB
 est a C, comme DE a F, & Ca BG, comme F a EH, en raison
 egale, AB sera a BG, comme DE a EH, par la 22. p. 5. & en cõ-
 posant, comme la toute AG sera a BG, ainsi la toute DH sera
 a EH, par la 18. p. 5. & derechef puis que AG est a BG, com-
 me DH a EH, & BG a C, comme EH a F, en raison egale, AG
 sera a C, comme DH a F : ce qui estoit a prouver.

THEOR. PROP. XXV.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles ; la plus grande & la plus petite, sont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles AB, CD, E, F. Je dis que la plus grande & la plus petite AB & F ensemble, sont plus grandes que les 2. autres CD & E ensemble.

Car si de AB on retranche AG égale a E, & de CD on retranche CH égale a F: AG sera a CH, comme E a F, c'est a dire comme AB a CD, & par la 19. p. 5. le reste GB sera plus grand que le reste HD, comme le tout AB est plus grand que le tout CD. Et pour autant que AG & F, sont égales a E & CH; si on adiouste à icelles les grandeurs inégales GB & HD, il est evident que AB & F ensemble, seront plus grandes que E & CD ensemble, puis que GB est plus grande que HD. Ce qu'il falloit demonstrier.



Fin du cinquieme Element.



E L E M E N T

SIXIESME.

DEFINITIONS.



Emblables figures rectilignes, sont celles qui ont les angles egaux, vn chacun au sien, & les costez qui sont au long des angles egaux proportionnaux.

2. Les figures sont reciproques, quand les termes antecedans & consequens des raisons, sont en l'une, & en l'autre figure.

C'est à dire que s'il y a deux figures semblables ou non, dont le premier & dernier des termes proportionnaux soient en l'une des figures, & le second & 3. en l'autre; icelles figures seront dictes reciproques.

3 Vne ligne droicte est dite estre diuisee en la moyenne & extreme raison, quand la toute est au plus grand segment, comme le plus grand segment est au moindre.

4 La hauteur d'une chacune figure, est la perpendiculaire tirée du sommet à la base.

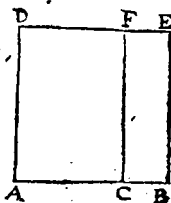
5 Vne raison est dite estre compoſee de raiſons, quand les quantitez des raiſons multipliees entr'elles font quelque raiſon.

C'eſt à dire que quand les quantitez de deux ou pluſieurs raiſons multipliees entr'elles, produiſent quelque quantitez de raiſon : icelle raiſon eſt dite eſtre compoſee de celles là. Or la quantitez d'une raiſon eſt le deno- minateur d'icelle : tellement que la quantitez de la raiſon triple eſt 3; mais de la ſubtriple, c'eſt 1, &c. Ainſi la raiſon trigecuple ſe dit eſtre compoſee des double, triple, & quintuple. Car les denominateurs d'icelles, ſçavoir eſt 2 3. & 5. multipliés entr'eux produiſent 30. deno- minateur d'icelle raiſon trigecuple. Pareillement la raiſon double ſe dit eſtre compoſee de la ſeſquialtere, & de la ſiſquartee, pource que les denomina- teurs d'icelle, ſçavoir eſt $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{4}$ eſtant multipliees entr'eux produiſent 2. deno- minateur de la raiſon double. Parquoy eſtant poſees tant de grã- deurs qu'on voudra par ordre, la raiſon des extremes ſera compoſee des raiſons des moyēnes: comme pour exemple, ſoit A à B en raiſon ſeſquialtere; B à C en raiſon double, & C à D en raiſon ſuperbipartiente tierce: Il eſt evident que multipliant le denomi- nateur de la raiſon de A à B. par celui de B à C. ſçavoir $1\frac{1}{2}$ par 2. vien- dront 3. & partant A eſt à C en raiſon triple, & multipliant 3. par le deno- minateur de la raiſon de C à D prouiennent 5, Et partant A eſt à D en raiſon quintuple.

Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles, tant les 27. 28. & 29. propo. de ce liure, que pluſieurs de 10. adiouiſſent icy ceſte def.

6. Vn parallelogramme appliqué ſelon quel- que ligne droicte, eſt dicte deſaillir d'un paral- lelogramme, lors qu'il ne peut occuper entie- rement la ligne; mais excéder, quād il occupe vne plus grāde ligne que celle ſelon laquelle il eſt appliqué; en telle ſorte toutesfois que le parallelogramme deſaillant, ou excédant ait vne meſme hauteur que le parallelogrāme ap- pliqué, & conſtituē avec iceluy vn ſeul paral- lelogramme.

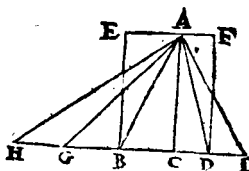
Comme le parallelogramme AF appliqué selon la ligne AB , est dit defaillir du parallelogramme CE , lequel est appelé défaut : Mais le parallelogramme AE appliqué selon la ligne AC , est dit excéder du parallelogramme CE , lequel est dit l'excès.



THEOR. I. PROP. I.

Les triangles, & les parallelogrâmes de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux triangles ABC & ACD , de mesme hauteur, sur les bases BC & CD : soient aussi deux parallelogrammes CE , CF de mesme hauteur, les bases desquels soient les mesmes BC , CD .



Je dis premiere^{ment} que le triangle ABC , est au triangle ACD , comme la base BC , est à la base CD : c'est à sçavoir que si on pose pour premiere grandeur la base BC , pour seconde la base, pour troisieme le triangle ABC , pour quatrieme le triangle ACD ; les equemultiplies de la premiere & troisieme seront plus petites, egales, ou plus grandes que les equemultiplies de la seconde & quatrieme, ainsi que le requiert la 6. definition 5.

Qu'il ne soit ainsi; qu'on prolonge BD de part & d'autre, & apres avoir couppe BG & GH , egales à BC d'un costé: item DI , egale à CD de l'autre, soient menees les lignes AG , AH , AI . Donc par la 38. p. 1. les trois triangles ABC , ABG , AGH , estans sur bases egales & entre mesmes paralleles, seront egaux; aussi par les mesmes raisons les deux triangles ACD & ADI seront egaux; ainsi il est euident qu'autant de fois que la base HC contiendra BC , autant de fois le triangle ACH contiendra le triangle ABC . Pareillement autant de fois que CI contiendra CD , autant de fois le triangle ACI

contiendra le triangle ACD. Que si la base CH est égale à CI, le triangle ACH sera égal au triangle ACI, par la 38. p. 1. Que si la base est plus grande, il sera plus grand; si plus petite, plus petit; & par la 6. def. 5. comme la base BC, à la base CD, ainsi le triangle ABC, sera au triangle ACD: ce qui estoit à démontrer pour la première partie.

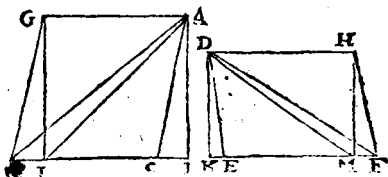
Quant à la seconde partie touchant les parallelogrammes CE, CF; le même se peut dire que des triangles, parce que iceux parallelogrammes sont doubles des triangles ABC, ACD par la 41. p. 1. & par la 15. p. 5. ce qui est prouvé d'iceux triangles s'entendra des parallelogrammes.

SCHOLIE.

Commandin adiouste en ce lieu cest autre theoreme.

Les triangles & parallelogrammes, desquels les bases sont égales, ou vne même, sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient deux triangles ABC, DEF, & les parallelogrammes AGBC, DEFH, ayant les bases BC, EF égales. Je dis que le triangle ABC est



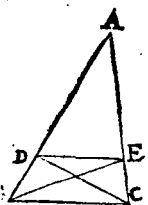
au triangle DEF, & le parallelogramme AGBC au parallelogramme DEFH, cōme la hauteur AI est à la hauteur DK. Car si on prend les lignes LI, KM égales aux bases EC, EF, & on tire les lignes LA, MD: le triangle ALI sera égal au triangle ABC par la 38. p. 1. puis qu'ils sont sur bases égales LI, BC, & entre mêmes parallèles AG, IB: Par même raison le triangle de DKM sera égal au triangle DEF. Parquoy par la 7. p. 5. comme ABC sera à DEF, ainsi ALI sera à DKM. Mais par la 1. p. 6. comme ALI est à DKM, ainsi AI à DK. (car si AI, DK sont posées les bases, les lignes droictes égales LI, KM seront les hauteurs.) Donc aussi ABC sera à DEF, comme AI à DK.

Et d'autant que par la 15. p. 5. comme ABC est à DEF, ainsi le parallelogramme AGBC au parallelogramme DEFH; (car iceux parallelogrammes sont doubles des triangles par la 41. p. 1.) aussi AGBC sera à DEFH, comme AI à DK. Le même s'ensuivra si les triangles, & les parallelogrammes ont une même base.

THEOR. 2. PROP. II.

Si l'on meine vne ligne parallele à l'un des costez d'un triangle; icelle coupera les autres costez d'iceluy triangle proportionnelement: & si les costez sont coupez proportionnelement, la ligne couppante sera parallele à l'autre costé.

Soit le triangle ABC, dans lequel soit menée DE parallele à BC, couppant les deux autres costez AB & AC aux poinçts D, & E.



Ie dis que AD sera à DB, comme AE, à EC.

Car estant menees les deux lignes BE & C D, par la 39. p. 1. les deux triangles DEB, & EDC, estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux; & par la 7. p. 9. ils auront mesme raison l'un comme l'autre au troisieme ADE. Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB, & DEA estans de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme la base BD, à la base DA; & par la mesme proposition, le triangle CDE, estant de mesme hauteur que le triangle EDA, ils seront l'un à l'autre comme CE est à EA; & partant par la 11. p. 5. BD sera à DA, comme CE à EA (puisque ces deux raisons sont les mesmes que du triangle BED au triangle DEA, & du triangle CDE au mesme triangle DEA.) Ce qui estoit propose.

Pour la seconde partie: ie dis que si DB est à DA, comme CE à EA, qu'aussi DE sera parallele à BC.

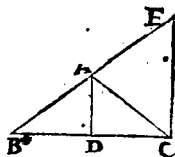
Car les triangles DEB, & DEA, seront par la 1. p. 6. l'un à l'autre, comme DB à DA. Item les deux autres CDE, EDA, seront aussi l'un à l'autre, comme CE, à EA; & par la 11. p. 5. le triangle DEB sera au triangle DEA, comme le triangle CDE est au mesme triangle DEA; & par la 9. p. 5. les deux triangles BED, & EDC seront egaux lesquels estans sur mesme base DE, par la 39. p. 1. ils seront entre mesmes paralleles; & partant DE sera parallele à BC.

THEOR. 3. PROP. III.

Sil'angle d'un triangle est coupé en deux également par vne ligne droicte, laquelle coupe aussi la base; les segmens de la base seront l'un à l'autre comme les autres costez du triangle: Et si les segmens de la base sont l'un à l'autre comme les autres costez; la ligne-droicte tirée du sommet à la section de la base, coupe l'angle en deux également.

Au triangle ABC, soit l'angle BAC coupé en deux également par la ligne AD. Je dis qu'il y a mesme raison de BD à DC, comme de AB à AC.

Qu'il ne soit ainsi: apres avoir du point C mené CE parallele à DA, soit continue BA directement iusqu'à ce qu'elle rencontre CE (Or BA, CE se rencontreront, d'autant que les deux angles B & BCE sont moindres que deux droicts, estans egaux aux deux B & BDA, qui sont moindres que deux droicts par la 17. p. 1.) & parce que DA & CE sont paralleles, l'angle CAD sera egal à son alterne ACE par la 29. p. 1. Et si l'exterieur DAB sera egal à l'opposé interieur AEC. Mais BAD, CAD estans egaux par l'hypothese, aussi par les com. sent. AEC, ACE seront egaux; & partant par la 6. p. 1. les costez AE & AC seront egaux. Mais par la 2. p. 6. BA est à AE, comme BD à DC; (estant AD parallele à CE) & par consequent BA sera aussi à AC (egale à AE) comme BD à DC.



Pour la seconde partie: Je dis que si BA est à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB sera coupé en deux également par la ligne droicte AD.

Car apres avoir construit comme dessus, BA sera à AE, comme BD à DC, par la precedente prop. Et partant par la 11. p. 5. BA sera à AE, comme le mesme BA à AC, & par la 9. p. 5. AE & AC seront egaux; & partant par la 5. p. 1. les deux angles AEC, ACE, seront aussi egaux; & par la 29. p. 1. ils sont egaux.

l'un a DAB, & l'autre a DAC, lesquels par ce moyen seront aussi egaux; ce qui estoit à prouver.

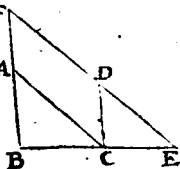
THEOR. 4. PROP. IIII.

Des triangles equiangles, les costez qui sont au long des angles egaux, sont proportionaux; & les costez qui soustiennent les angles egaux, sont de mesme raison.

Soient deux triangles ABC, DCE, equiangles: c'est à dire que l'angle ABC soit egal a l'angle DCE, & l'angle ACB à l'angle E, & le troisieme au troisieme. Je dis que comme A B a BC, ainsi DC a CE, & comme BC a CA, ainsi CE a ED, & finalement comme AB a AC, ainsi DC a DE. Car ainsi les costez d'alentour les angles egaux, sont les proportionaux, & les costez homologues, sont ceux là qui soustiennent les angles egaux, c'est à dire que tous les antecedans, & semblablement les consequens regardent les angles egaux.

Soient constituez les costez BC, CE selon vne ligne droite, tellement que l'angle externe DCE soit egal a l'interne ABC, & pareillement l'externe ACB a l'interne DEC: & d'autant que par la 17. p. 1. les deux angles ABC, ACB sont moindres que deux droicts, & l'angle DEC

est egal a l'angle ACB, aussi les angles BF & E seront moindres que deux droicts; & partant les lignes BA & ED estans produictes de la part de A & D, se rencontreront: Qu'elles soient donc prolongees & conuiennent en F. Il est evident que l'angle extérieur ECD, estant,



par l'hypothese egal a son oppose interieur CBA; DC sera parallele à FB par la 28. p. 1. Pareillement l'angle extérieur ACB estant egal a son oppose interieur DEC, aussi par la mesme 28. p. 1. CA, & EF, seront paralleles. Partant ACDF sera parallelogramme, & par la 34. p. 1. il aura les angles, & les costez opposez egaux. Mais AC estant parallele à EF par la 2. p. 6. AB sera à AF, ou CD sont egale, comme BC a CE, & en changeant par la 16. p. 5. AB sera à BC, cōme DC a CE. Pareillemēt CD estant parallele à BF, cōme BC sera à CE, ainsi FD, ou

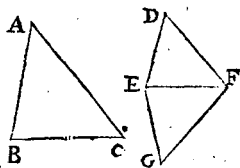
CA son egale, sera a ED par la 2. p. 6. & en changeant BC sera a AC, comme CE a ED.

Veu donc que AB est a BC, comme DC a CE, & BC a CA comme CE a ED, aussi en raison egale AB sera a AC, comme DC a ED. ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 5. PROP. V.

Si deux triangles ont les costez proportionnaux, ils seront equiangles, & auront les angles egaux, sous lesquels les costez de mesme raison seront subtendus.

Soient deux triangles ABC, & DEF, ayans les costez proportionnaux, & soit AB a BC comme DE a EF, & BC a CA comme EF a FD, & encore AB a AC comme DE a DF. Je dis que les triangles sont equiangles, sçavoir l'angle A estre egal a l'angle D, & l'angle B a l'angle E, & l'angle C a l'angle F; car ainsi les angles egaux regardent les costez de mesme raison.



Qu'il ne soit ainsi: sur la ligne EF, & aux deux points E, & F soient construits les deux angles FEG egal à B, & EFG egal à C, & conuiennent les lignes EG, FG en G: par la 2. p. 1. le troisieme angle G sera egal au tiers A: & partant les triangles ABC, GEF sont equiangles; parquoy comme AB à BC, ainsi GE à EF par la 4. p. 6. Mais comme AB à BC, ainsi a esté posé DE à EF: donc par la 11. p. 5. comme GE à EF, ainsi DE à la mesme EF: & partant par la 9. p. 5. GE, DE seront egales. Et d'autant que par la 4. p. 6. comme BC à CA, ainsi EF à FG: & par l'hypothese comme BC à CA, ainsi EF à FD; par la 11. p. 5. comme EF sera à FG, ainsi la mesme EF sera à FD; & par la 9. p. 5. FG, FD seront egales. Veu donc que les costez EG, FG du triangle GEF sont egaux aux costez DE, DF du triangle DEF, chacun au sien, & la base EF commune, les angles G & D seront egaux par la 8. p. 1. & partant par la 4. p. 1. les autres angles GEF, GFE seront aussi egaux aux autres DEF, DFE, chacun au sien. Parquoy l'angle G estant egal à l'angle A, aussi

l'angle D sera egal au mesme angle A : & ainsi l'angle DEF sera egal à l'angle B, & l'angle DFE à l'angle C. Ce qu'il falloit prouver.

THEO. 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'iceux angles egaux proportionaux; ils seront equiangles, & auront les angles egaux soubz lesquels les costez de mesme raison sont subtendus.

Soient les deux triangles ABC & DEF (en la figure de la precedente proposition) ayās l'angle B egal à l'angle E. & cōme AB à BC, ainsi DE à EF. Je dis que les triangles sont equiangles, sçavoir que l'angle A est egal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F.

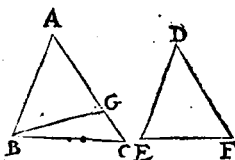
Qu'il ne soit ainsi; sur la ligne EF soit construit, comme en la precedente, le triangle GEF, equiangle au triangle ABC: & par la 4. p. 6. GE sera à EF, cōme AB à BC, ou DE à EF, (car ils sont en la mesme raison) & par la 9. p. 5. GE & DE (qui ont vne mesme raison à EF) seront egales; & les deux triangles GEF & DEF, auront deux costez egaux à deux costez, sçavoir GE, EF, à DE, EF, & les deux angles au point E, egaux (car ils sont chacun egal à l'angle B) & par la 4. p. 1. ils auront la base egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien, & seront equiangles. Mais l'un d'iceux triangles GEF est equiangle à ABC par construction; aussi sera donc l'autre DEF, par les communes sentences.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'un autre angle, proportionaux, estans les troisiemes angles de mesme espee: Iceux triangles seront equian-

gles, & auront les angles egaux, au long desquels les costez seront proportionaux.

Soient deux triangles ABC, & DEF, desquels les deux angles A & D soient egaux, & les costez AB, BC d'alentour l'angle ABC, proportionaux aux costez DE, EF d'alentour l'angle E, c'est à



dire que cōme AB est à BC, ainsi DE soit à EF; mais les autres angles C & F soient de mesme espee, c'est à dire aigus, droicts ou obtus, & soient premierement aigus. Je dis que les triangles sont equiangles, sçavoir les angles ABC & E à l'entour desquels sont les costez proportionaux, & les angles C & F, estre egaux.

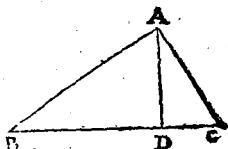
Car l'angle B sera egal, ou non à l'angle E; si egal, aussi par la precedente les triangles seront equiangles. Si inegal, comme si B estoit plus grand que E, soit fait ABG egal à E par la 23. p. 1. le troisieme angle AGB, sera egal au troisieme F, & partat aigu comme iceluy; & les deux triangles ABG, & DEF seront equiangles; & par la 4. p. 6. comme AB, à BG, ainsi DE, à EF. Mais par l'hypothese, comme AB à BC, ainsi DE à EF: donc par la 11. p. 5. comme AB sera à BG, ainsi la mesme AB sera à BC; & partat par la 9. p. 5. BG, BC seront egales: & par la 5. p. 1. les deux angles C & BGC sur la bate C G seront egaux, & tous deux aigus, & par consequent. l'angle AGB sera plus grand qu'un droit, puis que par la 13. p. 1. les deux BGC, AGB sont egaux à deux droicts: Mais l'angle AGB a esté démontré egal à l'angle F: donc F seroit aussi plus grand qu'un droit, & on l'a posé aussi moindre: ce qui est absurde. Maintenant tant l'angle C, que F ne soit aigu; & comme dessus l'ang. C sera egal à l'angle BGC; & partat iceluy BGC ne sera aussi aigu, & les deux C & BGC ne seroient moindres que deux droicts, mais egaux ou plus grands que deux droicts: ce qui est absurde: car par la 17. p. 1. ils sont moindres que 2. droicts. Les angles ABC & E ne sont donc pas inegaux, ains egaux; & partant par la 32. p. 1. le troisieme C sera aussi egal au tiers F. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on tire une perpendiculaire sur la base, les triangles au long de la perpendiculaire sont semblables au tout, & entr'eux.

Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droit A, duquel soit menée à la base BC la perpendiculaire AD. Je dis que les triangles ABD, & ADC sont equiangles au total BAC, & entr'eux, & par consequent semblables.



Qu'ainsi ne soit: d'autant que AD est perpendiculaire, l'angle BDA est droit, & egal à l'angle droit BAC, du triangle total, & l'angle B est commun à tous les deux triangles BAD & BCA, & par la 32. p. 1. le troisieme angle BAD, est egal au troisieme ACB: & partant les deux triangles BAD, & BCA, seront equiangles; & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux, c'est à dire, que comme CB sera à AB, ainsi AB à BD; & comme BA à AC, ainsi BD à DA; & comme BC à CA, ainsi BA à AD; & partant par la 1. d. 6. les triangles ABC, ABD seront semblables.

Par mesme discours on prouvera que les deux triangles BAC & ADC, sont aussi equiangles, & semblables: car l'angle C est commun à tous les deux, & l'angle droit egal à l'angle droit, le troisieme CAD sera egal au troisieme B, par la 32. p. 1. & par la 4. p. 6. comme BC sera à CA, ainsi CA est à CD; & comme CA à AB, ainsi CD à DA; & comme CB à BA, ainsi CA à AD.

On démontrera en la mesme maniere les triangles ADB, ADC estre semblables entr'eux, puisque les angles au point D sont droits, & les angles ABD, CAD, & BAD, ACD ont esté, demonstrez egaux; & partant par la 4. p. 6. comme BD ainsi DA à DC; & comme DA à AB, ainsi DC à CA; & comme AB à BD, ainsi CA à AD.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste que la perpendiculaire tirée de l'angle droit d'un triangle rectangle à la base, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de la base: & cha:un des costez comprenant l'angle droit, est aussi moyen proportionel entre toute la base & le segment qui le touche.

Car il a esté démontré que comme BD est à DA , ainsi DA à DC , & partant DA est moyenne prop. entre BD & DC ; item que comme CB est à BA , ainsi BA à BD ; & par ainsi BA est moyenne prop. entre CB , & BD : finalement que comme BC à CA ainsi CA à CD , & partant CA est moyenne proportionnelle entre BC & CD .

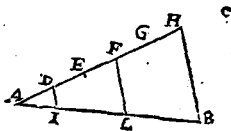
PROB. I. PROP. IX.

D'une ligne droite donnée, oster la partie demandee.

Soit la ligne donnée AB , de laquelle il faut oster la cinquième partie, ou telle autre qu'on voudra.

Du point A soit menée la ligne AC , faisant angle avec AB , & en icelle AC , soient prises à l'aduanture cinq parties égales (car il faut qu'icelle ligne soit tant grande qu'il sera de besoin) & soient icelles AD, DE, EF, FG, GH , & après auoir mené la ligne BH , du point D soit menée DI , parallele à HB : Je dis que AI est la cinquième partie de AB .

Car puis qu'au triangle ABH , la ligne DI est parallele au costé HB , par la 2. p. 6. comme HD sera à DA , ainsi BI à IA : & en composant par la 18. p. 5. comme HA sera à DA , ainsi BA à IA : mais par la construction HA est quintuple de AD : donc aussi BA sera quintuple de AI : & partant AI sera la cinquième partie de AB , laquelle auoit esté demandee.



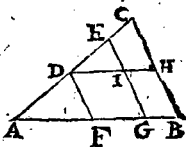
S C H O L I E.

Que si de AB il falloit oster plusieurs parties, comme pour exemple les trois cinquiemes, il est evident par ce qui a esté d-mostré qu'ostant t-ree la ligne FL parallele a HB , le segment AL sera les trois cinquiemes de AB , tout ainsi que AF est les trois cinquiemes de AH .

PROBL. 2. PROP. X.

Couper semblablement vne ligne droiçte donnee non couppee, à vne autre ligne droiçte donnee & couppee.

Soient donnees les lignes droiçtes AB , AC , desquelles AC est couppee en D & E : & il faut couper AB en parties semblables & proportionnelles à celles de AC .



Soient accommodees icelles lignes donnees en sorte qu'elles facent l'angle BAC ; & apres avoir mené BC , de D & E , soient menees DF , EG paralleles a icelle BC par la 31. p. 1. Je dis que la ligne AB est semblablement couppee en F & G , comme est coupee AC en D & E . Car par la 2. p. 6. comme AD est a DE , ainsi AF a FG . Que si on tire DH parallele a AB coupant EG en I . Derechef par la 2. p. 6. comme DE sera a EC , ainsi DI a IH , c'est a dire ainsi, FG a GB , pource que par la 34. p. 1. FG est egale a DI & GB a IH . Parquoy les parties FG , GB seront aussi proportionnelles aux parties DE , EC . Les trois parties AF , FG , GB , sont donc proportionnelles aux trois parties AD , DE , EC : & partant AB est couppee semblablement a AC , ainsi qu'il falloit faire.

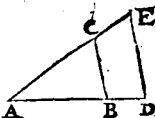
PROB. 3. PROP. XI.

A deux lignes droiçtes donnees, trouver la

troisieme proportionnele.

Soient deux lignes donnees AB, & AC, auxquelles il faut trouver la troisieme proportionnele.

Soient disposees icelles lignes en vn angle CAB; & apres auoir prolongé AB iniques en D, soit faicte BD egale a AC & apres auoir mené CB du point D, soit tirée DE parallele a BC rencontrant AC prolongee en E. Je dis que CE est la troisieme proportionnele, c'est a dire que comme AB est a AC, ainsi AC a CE. Car puis qu'au triangle ADE, la ligne droite BC est parallele au costé DE, par la 2. p. 6. comme AB sera a BD, ainsi AC a CE : mais par la 7. p. 5. comme AB est a BD, ainsi la mesme AB est a AC egale a icelle BD. Donc comme AB est a AC, ainsi AC a CE.



PROB. 4. PROP. XII.

A trois lignes droictes donnees , trouver la quatrieme proportionnele. .

Soient les trois lignes donnees (en la precedente figure) AB, BD, AC, auxquelles il faut trouver la quatrieme proportionnele.

Soient disposees les deux premieres AB, BD, selon vne ligne droite AD ; & la 3. AC face avec la premiere AB vn angle A: puis apres soit mené BC, & de D, la ligne DE parallele à icelle BC, rencontrant AC prolongee en E. Je dis que CE est la 4. proportionnele requise. Car par la 2. p. 6. comme AB est à BD, ainsi AC est à CE.

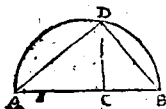
PROB. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droictes donnees , trouver la moyenne proportionnele.

Soient les deux lignes donnees AC & CB, auxquelles il faut

trouuer la moyenne proportionnelle.

Soient icelles disposees en vne ligne droicte AB, sur laquelle soit descript vn demy cercle ADB; & apres auoir du poinct C leue la perpendiculaire CD; Je dis que icelle est la moyenne proportionnelle demandee.



Car estans menees les deux lignes AD & BD, l'angle ADB dans le demy cercle sera droict par la 31. p. 1. Veu donc que de l'angle droict ADB du triangle rectangle ADB, est tiree DC perpendiculaire à la base AB, par le corol. de la 8. p. 6. CD sera moyenne proportionnelle entre AC, CB.

S C H O L I E.

De cecy est euident qu'une ligne droicte tiree perpendiculairement de quelconque poinct du diametre d'un cercle, iusques à la circonference, est moyenne proportion, entre les segmens du diametre faicts par icelle perpendiculaire. Car de quelque poinct pris au diametre AB, estant leuee vne perpendiculaire iusques à la circonference, par les mesmes raisons que dessus, icelle perpend. sera moyenne propo. entre les deux segmens du diametre AB.

THEOR. 9. PROP. XIV.

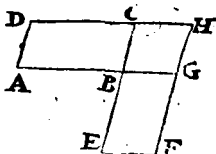
Des parallelogrāmes egaux qui ont vn angle egal a vn angle; les costez au long des angles egaux sont reciproques: & les parallelogrammes qui ont vn angle egal a vn angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.

Soient deux parallelogrammes egaux ABCD, & BEFG, desquels les deux angles ABC & EBG soient egaux: Je dis que les costez qui sont au long d'iceux angles egaux sont reciproques: c'est à dire que AB est à BG, comme EB à BC.

Car les parallelogrāmes AC, BF, estans disposez de telle façon que AB & BG, fassent vne ligne droicte, soient prolongez

gez DC, FG, iusques à ce qu'ils se rencontrent en H. Puis donc que les deux parallelogrammes AC, EG sont egaux, ils auront vne mesme raison au parallelogrâme BH, par la 7.p.5. Mais la raison des parallelogrâmes AC, BH, est par la 1.p.6. comme celle de la base AB à la base BG. Item celle des parallelogrammes EG, BH est comme celle de EB à BC; & partant par la 11.p.5. comme AB à BG, ainsi EB à BC.

Pour la seconde partie, si AB est à BG, comme EB à BC, & que les angles ABC & EBG soient egaux: Je dis que les parallelogrammes AC & EG seront aussi egaux.

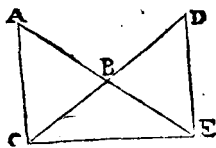


Car demeurant la mesme construction, on prouuera par la 1.p.6. & 11. p. 5. qu'il y a mesme raison du parallelogramme AC, au parallelogrâme BH, que de la base AB à BG: pareillement qu'il y a mesme raison du parallelogrâme EG, au parallelogramme BH, que de EB à BC: mais les raisons des bases sont posees semblables: donc aussi les raisons des parallelogrâmes AC & EG, au troisieme BH seront semblables par la 11.p.5. & partant par la 9.p.5. ils seront egaux.

THEO. 10. PROP. XV.

Les triangles egaux ayans vn angle egal à vn angle; ont les costez au long des angles egaux reciproques: & les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, & les costés au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.

Soient deux triangles egaux ABC & DBE, ayans les angles au point B egaux. Je dis que les costez qui sont au long des angles egaux sont reciproques: c'est à dire que comme AB à BE, ainsi DB à BC.



Car les triangles estans disposez en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, soit mence la li-

gne CE. Pour autant que les deux triangles ABC & DBF s'ot
egaux, ils auront vne mesme raison au triangle BEC par la 7.
p. 5. mais par la 1. p. 6. la raison du triangle ABC, au triangle
EBC, (estant de mesme hauteur) est comme de la base AB a
la base BE; pareillement par la mesme 1. p. 6. le triangle DBE
sera au triangle ECB, comme DB a BC; & partant par la 11. p.
5. AB sera a BE, comme DB a BC.

Pour la seconde partie, elle se prouuera comme en la prece-
dente, en retrogradant par la 1. p. 6. 11. p. 5. & 9. p. 5.

THEOR. II. PROP. XVI.

Si quatre lignes sont proportionnelles; le re-
ctangle compris des extremes, est egal à celuy
des moyennes; & si le rectangle compris des
extremes, est egal au rectangle compris des
moyennes; les quatre lignes sont proportion-
nelles.

Soient quatre li-
gnes proportio-
nelles AB, FG, EF
BC, sçauoir e st
que AB soit a FG
comme EF a BC
& soit le rectan-
gle ABCD compris des extremes AB, BC; & le rectangle EF
GH compris sous les moyennes EF, FG. Je dis que les rectan-
gles AC, EG sont egaux.

Car puis que les angles droicts B & F sont egaux; & com-
me AB est a FG, ainsi EF a BC; les costez au long des angles
egaux B & F, seront reciproques par la 2. def. 6. & partant par
la 14. p. 6. les parallelogrammes AC & EG seront egaux.

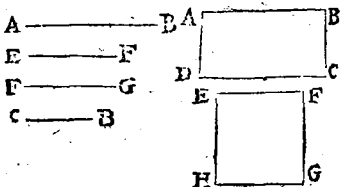
Quant a la seconde partie, soient les rectangles AC, EG
egaux. Je dis que les quatre lignes AB, FG, EF, BC, sont pro-
portionnelles; c'est a dire que comme AB est a FG, ainsi EF est
BC. Car puis que les rectangles sont egaux, & ont les an-
gles B & F aussi egaux, sçauoir droicts, ils auront les costez
au long d'eux angles egaux reciproques par la 14. p. 6. sça-

uoir est que comme AB est a FG ainsi EF a BC : ce qu'il fa-
loit prouver.

THEOR. 12. PROP. XVII.

Si trois lignes droictes sont proportionnelles; le rectangle compris des extremes, sera egal au quarré fait de la moyenne: & si le rectangle compris des extremes est egal au quarré décrit de la moyenne; les trois lignes seront proportionnelles.

Soient trois lignes proportionnelles AB, EF, BC; & soit le rectangle ABCD compris sous les extremes AB, BC, & le quarré de la moyenne EF soit EFGH. Je dis que le rectangle AC est egal au quarré EG.



Car étant prise FG egale a EF, les quatre lignes AB, EF, FG, BC, seront proportionnelles, & le quarré EG sera cõpris sous les moyennes EF, FG, a cause de l'egalité d'icelles. Parquoy par la precedẽte pro. le rectangle AC cõpris des deux extremes AB BC est egal au quarré EG, c'est a dire au rectangle des moyennes EF, FG.

Pour la seconde partie, le rectangle AC soit egal au quarré EG. Je dis que comme AB est a EF, ainsi EF a BC. Car puisque les rectangles AC, EG sont egaux, par la 16. p. 6. cõme AB sera a EF, ainsi FG a BC: mais par la 7. p. 5. comme FG est a BC, ainsi EF egale a icelle FG, est a la mesme BC: & partant comme AB est a EF, ainsi EF est a BC: ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

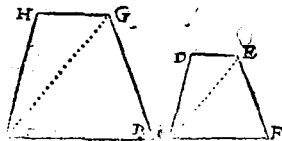
Il est manifeste par la derniere partie de ce theoreme; qu'une ligne

droicte est moyenne proportio. nels. entre deux autres lignes droictes, qui compr. nent un rectangle egal au quarré d'icelle lign. Car pour ce que le rectangle de AB, BC est egal au quarré de EF, il a esté démontré, que comme AB a EF, ainsi EF a BC; & partant EF est moyen. prop. entre AB & BC.

PROBL. 6. PROP. XVIII.

Sur vne ligne droicte donnee, descrire vne figure rectiligne semblable, & semblablement posée à vne figure rectiligne donnee.

Soit la ligne droicte donnée AB, sur laquelle il faut cōstruire vne figure semblable, & semblablement posée à la figure rectiligne donnée CDEF.



Soit diuisee la figure donnee en deux triangles, par la ligne CE: & apres auoir par la 23. p. 1. décrit sur la ligne AB, & aux poinçts A & B, les deux angles BAG, ABG, egaux, l'un à l'angle FCE, & l'autre à l'angle CFE. Il est euident par la 32. p. 1. que le troisieme sera egal au troisieme, & les triangles CEF, AGB seront equiangles, & auront les costez au long des angles egaux proportionnaux par la 4. p. 6. Pareillement sur la ligne AG, & aux deux poinçts A & G, soient décrits les deux angles HAG, & AGH, egaux aux deux DCE & CED, chacun au sien; aussi par la 32. p. 1. le troisieme H sera egal au troisieme D, & les triangles CDE & AHG seront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux: ainsi l'angle D estant egal à l'angle H, & l'angle F à l'angle B, les deux de C aux deux de A, & les deux de E aux deux de G; les deux figures CDEF, ABGH, seront equiangles: & pour autant qu'elles sont composees de triangles equiangles, lesquels ont les costez au long des angles egaux proportionnaux, comme CF sera à FE, ainsi AB à BG: item comme CF est à CE, ainsi AB à AG, & comme CE à CD, ainsi AG à AH, & en raison egalé comme CF sera à CD, ainsi AB sera à AH; ainsi les costez au long des angles egaux FCD, BAH, seront aussi proportionnaux, & ainsi des autres. Par-

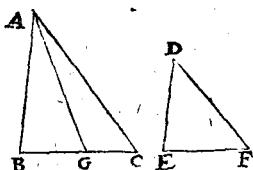
quoy les figures CDEF, AHGB seront semblables, & semblablement descrites.

Que si la figure donnee auoit plus de 4. costez, il la faudra diuiser en plusieurs triangles, & operer sur chacun triangle, comme il a esté dict cy dessus.

THEOR. 13. PROP. XIX.

Les triangles semblables, sont l'un à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison.

Soient deux triangles semblables ABC & DEF. Je dis qu'ils seront l'un à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison BC & EF: c'est à dire que si à BC & EF on trouue la troisieme proportionnelle BG; le triangle ABC sera au triangle DEF, comme la ligne BC est à la troisieme proportionnelle BG: car telle est la raison doublee par la 10. def. 5.



Car estant tirée la ligne AG; d'autant que les triangles ABC, DEF sont semblables, & que comme AB est à BC, ainsi DE est à EF; en changeant par la 16. p. 5. comme AB sera à DE, ainsi BC sera à EF: mais comme BC est à EF, ainsi EF est à BG par la construction. Donc comme AB sera à DE, ainsi EF sera à BG par la 11. p. 5. & par ainsi les deux triangles ABG, DEF auront, les costez au long des angles égaux B & E, reciproques; & par la 15. p. 6. iceux triangles ABG, DEF, seront égaux entr'eux; & partant come le triangle ABC sera au triangle DEF, ainsi sera le mesme triangle ABC au triangle ABG par la 7. p. 5. Mais comme le triangle ABC est au triangle ABG de mesme hauteur, ainsi est la base BC à la base BG par la 1. p. 6. Donc come le triangle ABC est au triangle DEF, ainsi est BG à EF. Mais BC, EF, BG estans continuellement proportionnelles, BC est à BG en raison doublee de BC à EF par la 10. def. 5. d'oc aussi le triangle ABC est au triangle DEF en raison doublee du costé BC au costé EF. ce qu'il falloit demonstrez.

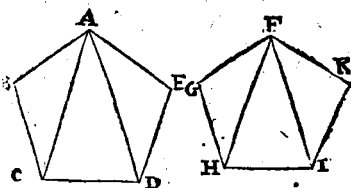
C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste, qu'estant trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere sera à la troisieme, ainsi le triangle descript sur la premiere sera au triangle semblable, & semblablement posé sur la seconde. Car il a esté démontré que comme BC est à BG , ainsi le triangle ABC au triangle DEF .

THEOR. 14. PROP. XX.

Les polygones semblables peuvent estre diuisez en nombre egal de triangles semblables entr'eux, & proportionaux à leur tout: & les polygones sont l'un à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison.

Soient deux polygones semblables $ABCDE$ & $FGHIK$. Je dis premierement qu'ils peuvent estre diuisez en nombre egal de triângles semblables.



Car apres auoir mené les lignes AC, AD, FH, FI , il est euident que l'une des figures est diuisée en autant de triangles que l'autre. Et pour autant que les figures sont semblables, l'angle B sera egal à l'angle G , & comme BA sera à BC , ainsi GF sera à GH , & par la 6. p. 6. les triangles ABC & FGH seront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionaux, & seront semblables: par mesme discours, les triangles AED & FKI , seront aussi semblables. Pareillement par ce qui a esté dit cy dessus AC est à CB , comme FH à HG : mais BC est à CD comme GH à HI : car ce sont costez de figures semblables; donc en raison egale par la 22. p. 5. AC sera à CD , comme FH à HI : & d'aurât que les angles BCD, GHI sont egaux, & les angles BCA, GHF aussi egaux; iceux estâs ostez, les restans ACD, FHI , seront pareillement egaux: &

partant, par la 6. p. 6. les triangles ACD & FHI , seront equiangles, & par consequent semblables.

Je dis secondement, qu'iceux triangles sont proportionaux a leur tout. Car les trois triangles de l'une des figures estans semblables aux trois triangles de l'autre, chacun au sien, & par la 19. p. 6. ils sont l'un a l'autre, en raison doublée de leurs costez de mesme raison; les triangles ABC , & FGH , seront l'un a l'autre en raison doublée de AC a FH : aussi en la mesme raison doublée seront les triangles ACD , FHI : & le troisieme AED estant au troisieme FKI , en raison doublée de AD a FI , qui est la mesme que de AC a FH , estans costez de triangles semblables; aussi les triangles AED , FKI , seront l'un a l'autre en raison doublée de AC a FH : & par la 12. p. 5. tous les triangles du premier polygone, seront a tous les triangles de l'autre polygone, comme l'un des triangles de l'un d'iceux, a son respondant de l'autre.

Je dis tiercement, que le polygone est au polygone, en raison doublée des costez CD & HI : car puisque toute la figure $ABCDE$, est a toute la figure $FGHIK$, comme l'un des triangles de l'une ACD , est a l'un des triangles de l'autre FHI , lesquels par la 19. p. 6. sont en raison doublée de CD a HI , par la 11. p. 5. le polygone sera au polygone, en raison doublée des costez de mesme raison CD & HI .

C O R O L L A I R E.

Par cecy est manifeste qu'estans trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere sera à la tierce, ainsi sera le polygone décrit sur la premiere au polygone semblable & semblablement décrit sur la seconde; puis qu'il a esté démontré que les polygones sont entr'eux en raison doublée de leurs costez de mesme raison, c'est à dire comme le costé du premier a une troisieme proportionnelle ausdits costez de mesme raison.

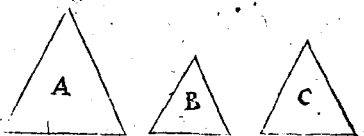
T H E O R. 15. P R O P. XXI.

Les figures rectilignes semblables à une, sont aussi semblables entr'elles.

Soit la figure A semblable à la figure B , & la figure C sem-

blable aussi à la même B : Je dis que A, & C seront semblables entr'elles.

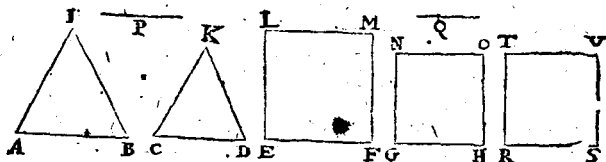
Car d'autant que chacune d'icelles A & C est semblable à



B, elle a les angles égaux aux angles de B par la r. d. 6. & partée par la 1. com. font les angles de A, seront aussi égaux aux angles de C; & par la 4. p. 6. A & C auront les costez au long des angles égaux proportionnaux; & par la 1. def. 6. elles seront semblables: ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 16. PROP. XXII.

Si quatre lignes sont proportionnelles; les figures rectilignes semblables, & semblablement descrites sur icelles, seront proportionnelles: & si icelles figures ainsi descrites sont proportionnelles; icelles lignes seront aussi proportionnelles.



Soient 4. lignes proportionnelles AB, CD, EF, GH. & sur AB, & CD soient constituées deux quelconques rectilignes ABI, CDK semblables, & semblablement descrites: item sur EF & GH deux autres quelconques rectilignes semblables & semblablement descrites EFML, GHON. Je dis premièrement que ces 4. rectilignes sont proportionnaux, c'est à dire que comme ABI est à CDK, ainsi EFML à GHON.

Qu'il ne soit ainsi: aux deux lignes AB, & CD, soit trouvez P troisieme proportionnelle par la 11. p. 6. & aux deux EF, & GH, soit trouvez Q aussi troisieme proportionnelle: & d'autant que AB est à CD, comme EF est à GH. Item CD à P,

comme GH à Q : en raison egale AB sera à P, comme EF à Q par la 22. p. 5. Mais comme AB est à P, ainsi le rectiligne ABI est au rectiligne CDK par le corol. de la 19. ou 20. p. 6. Item comme EF est à Q, ainsi le rectiligne EM est au rectiligne GO. Donc comme ABI est à CDK, ainsi EM est à GO par la 11. p. 5.

Je dis pour la seconde partie, que si icelles figures semblables, & semblablement descrites sont proportionnelles, que les lignes sur lesquelles elles sont descrites, seront aussi proportionnelles.

Car soit trouuée RS. proportionnelle aux trois AB, CD, EF; puis sur icelle RS décrit le rectiligne RV semblable au rectiligne EM & semblablement posé par la 18. p. 6. & partant aussi semblable au rectiligne GO par la 21. p. 6. & d'autant que comme AB est à CD, ainsi EF est à RS, comme il a esté démontré cy dessus le rectiligne ABI sera aussi rectiligne CDK, cōme le rectiligne EM au rectiligne RV. Mais comme ABI est à CDK, ainsi aussi a esté posé EM à GO : donc par la 11. p. 5. cōme EM sera à RV, ainsi EM sera à GO; & partant par la 9. p. 5. RV, GO seront egaux; lesquels estans semblables & semblablement descrits, consistent necessairement (comme nous demonstrerons incontinent) sur lignes droictes egales RS, GH. Parquoy par la 7. p. 5. comme EF sera à RS, ainsi EF sera à GH. Mais par l'hypothese EF est à RS, comme AB à CD: dōc par la 11. p. 5. cōme AB sera à CD, ainsi aussi EF sera à GH: ce qu'il falloit demonstrier.

L E M M E.

Or que les rectilignes egaux semblables & semblablement descrits, tels que sont GO, RV, consistent sur lignes droictes egales, on le prouuera ainsi. Si les lignes GH, RS peuuent estre inegales, soit GH la plus grande: & puis que les rectilignes sont semblables, cōme GH est à HO, ainsi RS à SV, & GH ayant esté posée plus grande que RS, par la 14. p. 5. HO sera aussi plus grande que SV; & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV; puis que cestuy cy peut estre constitué dans celuy-là: ce qui est absurde, ayans esté posez egaux. Les lignes GH, RS ne sont donc pas inegales, mais egales: ce qui estoit proposé.

S C H O L I E.

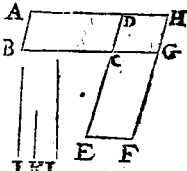
Il est euident, que s'il y a aussi trois lignes droictes proportionne-

les, les rectilignes semblables, & semblablement descrites sur icelles, seront pareillement proportion. &c. Car la ligne moyenne & son rectiligne estant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles. donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a esté cy dessus démontré. Veu donc que le rectiligne qui sera décrit sur la section de ligne, sera égal à celui décrit sur la 3. est manifeste: ce qui estoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes equiangles sont l'un à l'autre en raison composée de leurs costez.

Soient deux parallelogrâmes equiangles ABCD, & CEFG, ayant les deux angles BCD, ECG égaux: Je dis que la raison de l'un à l'autre est composée de leurs costez, sçavoir est composée de la raison que BC a à CG & de celle que DC a à CE.



Car ayant disposé les deux parallelogrammes, en sorte que BC, & CG, se puissent rencontrer directement, & ne fassent qu'une ligne droite, comme aussi DC, CE une autre ligne droite, soit parachevé le parallelogrâme DCGH; & soit prise quelcôque ligne droite IJ; puis aux 3. BC, CG & I, soit trouvé la 4. proport. K. Ité aux 3. DC, CE, & K, la 4. prop. L. Veu d'oc que par la 1. p. 6. cômme BC est à CG, ainsi AC à DG; & comme BC à CG, ainsi aussi I est à K par l'hypothèse; pareillement comme AC sera à DG, ainsi sera I à K par la 11. p. 5. Le mesme se peut dire de DG à CF, qu'ils sont l'un à l'autre comme K à L, par la 1. p. 6. & 11. p. 5. Donc en raison égale cômme AC sera à CF, ainsi I sera à L par la 2. p. 5. Mais la raison de I à L est composée de la raison de BC à CG, & de celle de DC à CE par la 5. def. 6. Donc aussi est composée d'icelles raisons, la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF: ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

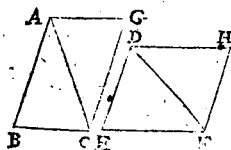
Il est facile à colliger de ceste demonstration comment on compose

une raison de deux ou de d'auantage. Car des raisons de BC à CG; & DC à CE a esté compoſee la raison de I à L. Que s'il faut compoſer une raison de trois, ayant trouué celle compoſe de deux, d'icelle & de la 3. nous en compoſerons une autre en la meſme maniere, laquelle ſera compoſee de trois: & ainſi c. nſequemment des autres.

Clavius demonſtre en celieu cy (apres Commandin) quelques autres propoſitions aſſez utiles: c'eſt pourquoy nous les ioin drons auſſi icy.

Les triangles ayans vn angle egal à vn angle, ſont en raiſon compoſee des coſtez comprenant l'angle egal.

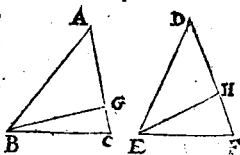
Soient les triangles ABC, DE. F ayans l'angle B egal à l'angle E. Je dis que le triang. e ABC eſt au triang. DEF en raiſon cōpoſee des coſtez cōprenāt les angles B & E. Car ayāt acheué les parallelog. BG, EH, ils ſerōt equiāgle; & partant par la 23. p. 6.



la raiſon d'iceux ſera compoſee de celle de leurs coſtez. Veu donc que les triangles ABC, DEF, deſquels ils ſont moitie; par la 34. p. 1. ſont en la meſme raiſon qu'iceux par la 15. p. 5. auſſi iceux triangles ſeront l'un à l'autre en icelle raiſon compoſee des coſtez.

Les triangles qui ont vn angle à vn angle, ſont l'un à l'autre, en la meſme raiſon que les rectangles compris ſous les coſtez qui contiennent l'angle egal.

Soient les triangles ABC, DEF ayans l'angle A egal à l'angle D. Je dis que le triangle ABC eſt au triangle DEF, comme le rectangle de AB, AC eſt au rectangle de DE, EF. Car eſtans tirees ſur AC, DF, les perpendiculaires BG, EH; les triangles ABG, DEH ſeront equiangles, comme appartient par le corol. de la 32. p. 1. donc par la 4. p. 6. comme GB eſt à BA, ainſi HE à ED. Mais par la 1. p. 6. comme GB à BA, ainſi le rectangle de BG, AC, au rectangle de BA, AC, pource que poſant GB, BA, paſes, la hauteur d'iceux rectangles ſera une meſme, ſçavoir AC. Semblablement comme HE à ED, ainſi eſt le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF. Donc par la 11. p. 5. le rectangle de BG, AC eſt au rectangle de AB, AC, comme, le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF; & en permutant le rectangle de BG, AC, ſera au rectangle de EH, DF, comme le rectangle de AB, AC au rectangle de DE, DF. Mais le rectangle de BG, AC eſt au rectangle de EH, DF, ainſi



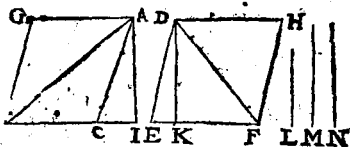
ainsi que le triangle ABC , au triangle DEF par la 15 p. 5. pource que ces triangles sont moitiez d'iceux rectangles par la 41. p. 1. (Car ils ont mesmes bases qu'iceux AC, DF ; & mesmes hauteurs BG, EH ; & partant entre mesmes paralleles) donc aussi le triangle ABC sera au triangle DEF , comme le rectangle de AB, AC ; est au rectangle de DE, DF : ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que les parallelogrammes equiangles sont aussi entr'eux, en la mesme raison que les rectangles compris sous les costez des angles égaux, puis qu'ils sont doubles d'iceux triangles.

Les triangles & les parallelogrammes sont entr'eux en la raison composee de la raison des bases, & de celle des hauteurs.

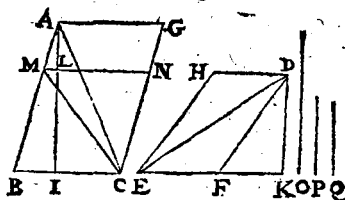
Soient les triangles ABC, DEF ; & les parallelogrammes CG, EH ; les hauteurs d'iceux soient AI, DK . Je dis que la raison d'iceux triangles; & parallelo-



grammes est composee de la raison de la base BC à la base EF , & de celle de la hauteur AI à la hauteur DK . Car premierement soient les hauteurs égales, mais les bases ou aussi égales, ou inégales: & soit fait comme BC à EF , ainsi L à M ; & comme AI à DK , ainsi M à N ; lesquelles seront égales, puis que AI, DK sont posees égales: & partant par la 7. p. 5. L sera à N comme L à M , c'est à dire comme BC à EF . Mais par la 1. p. 6. comme BC est à EF , ainsi est le triangle ABC , au triangle DEF ; & le parallelograme CG au parallelograme EH ; Donc par la 11. p. 5. come L sera à N , ainsi le triangle au triangle & le parallelograme au parallelograme: Mais la raison de L à N est composee de la raison de L à M , c'est à dire de la raison de BC à EF , & de la raison de M à N , c'est à dire de AI à DK : donc la raison du triangle ABC au triangle DEF , & du parallelog. CG au parallelog. EH , est composee des mesmes raisons.

Soient maintenant les hauteurs AI, DK inégales, & AI la plus grande; mais les bases BC, EF ou égales, ou aussi inégales. Soit fait comme AI à DK , ainsi O à P ; & comme BC à EF , ainsi P à Q : & ayant coupee IL égale à DK , par L soit tiree MN parallele à BC , & joinct CM . D'autant que le triangle ABC est au triangle MBC ; &

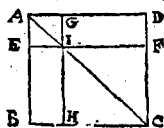
le Parallelogramme BG au parallelog. BN, comme la hauteur AI à la hauteur IL ou DK qui l'y est egale, c'est à dire comme O à P par le Scholie de la 1. p. 6. & comme le triangle ABC au triangle DEF, & le parallelogramme BN au parallelog. FH, ainsi est la base BC à la base EF, (pource qu'ils sont de mesme hauteur) c'est à dire ainsi P à Q: en raison egale ABC sera à DEF, & BG à FH, comme O à Q. Parquoy puis que la raison de O à Q est composee de la raison de O à P, c'est à dire de AI à DK, & de la raison de P à Q, c'est à dire de la base BC à la base EF: la raison du triangle ABC au triangle DEF, & du parallelog. BG au parallelog. FH, sera composee des mesmes raisons. Ce qui estoit propose.



THEOR. 18. PROP. XXIII.

En tout parallelogramme; les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, ayans vn angle commun au total, sont semblables entr'eux, & au total.

Soit le parallelogramme ABCD, duquel le diametre est AC: Je dis que les deux parallelogrammes GE & FH decrits sur iceluy diametre, ayans les angles A & C communs avec le total, sont semblables entr'eux, & au total ABCD.



Car d'autant que les lignes AD, EF, BC sont paralleles, sur lesquelles tombent AC & GH, elles feront les angles alternativement egaux, par la 29. p. 1. ainsi les triangles AIG, & ICF, seront equiangles entr'eux, & au total ACD, & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionaux. Le mesme se peut dire des trois autres triangles AIE, ICH & ACB, lesquels sont egaux aux trois premiers, chacun au sien par la 34. p. 1. ainsi le parallelogramme EG, ayant les costez AE & EI proportionaux à AB & BC

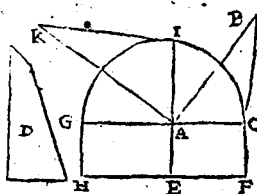
costez du parallelogramme BD, & aux costez IH & HC du parallelogramme FH &c. Il est euident par la 1. d. 6. qu'iceux parallelogrammes EG, HF, seront semblables entr'eux, & au tout BD.

PROB. 7. PROP. XXV.

Descire vne figure rectiligne, semblable à vne autre donnée, & egale à vne autre proposée.

Soient deux figures rectilignes ABC, & D: il faut faire vne autre figure rectiligne egale à D, & semblable à ABC.

Sur la ligne AC, soit fait le rectangle ACFE egal à la figure ABC: Item sur la ligne AE, soit construit GE rectangle e-



gal à la figure donnée D, le tout par la 44. & 45. p. 1. & apres auoir trouué AI, moyenne proportionnelle entre GA & AC, Sur icelle AI, soit descrite la figure AIK semblable & semblablement posée à la figure ACB, par la 18. p. 6. Je dis qu'elle sera aussi egale à la figure donnée D.

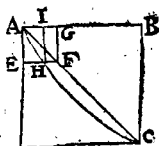
Car puisque par la construction le rectangle GE est egal à D, & AF à ABC, & que par la 1. p. 6. AF est à GE, comme CA à AG: Pareillement que les deux figures semblables ABC & A KI, sont l'une à l'autre en raison doublée de AC à AI, par le corol. de la 19. ou 20. p. 6. sçauoir comme CA à la 3. proport. AG, aussi par la 11. p. 5. ACB sera à IKA, comme AF à GE: & en changeant ACB, sera à AF, comme IKA à GE, par la 16. p. 5. & partant ACB étant egal à AF, aussi IKA sera egal à GE, & par consequent egal à D; & par la construction, iceluy rectiligne IKA est aussi semblable & semblablement posé au rectiligne ABC. Il est donc le requis.

THEOR. 19. PROP. XXVI.

Si d'un parallelograme on oste vn paral-

lelogrāme semblable & semblablement posé au tout, ayant vn angle commun avec le tout; l'osté sera avec le tout sur vn mesme diametre.

Soit le parallelogramme $A B C D$, duquel on retranche $A E F G$ parallelogramme qui luy est semblable & semblablement posé, ayans l'angle A commun avec le total : Je dis qu'ils sont sur mesme diametre $A F C$.

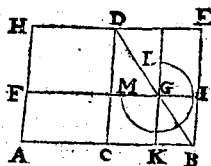


Autrement s'ils ne sont sur mesme diametre, soit vn autre diametre $A H C$, qui ne soit commun à tous les deux parallelogrammes, ainsi coupe le costé $E F$ en H , & d'iceluy point soit menée $H I$ parallele à $A E$, par la 31. p. 1. donc le parallelog. $I E$ estant sur vn mesme diametre avec le total, sera semblable à iceluy, par la 24. p. 6. auquel total $G E$ est aussi semblable par hypothese; & partant par la 21. p. 6. $G E$ & $I E$ seront semblables, & par la 1. p. 6. $A E$ sera à $E F$, comme $A E$ à $E H$: mais $A E$ estant egale à soy-mesme, il faudroit aussi par la 14. p. 5. que $E F$ 2. fust egale à $E H$ 4. &c. ce qui est absurde; donc les parallelogrāmes $B D$ & $G E$, total & retranché, estoient sur mesme diametre; car il aduientra tousiours mesme absurdité, si on dict que le diametre de $B D$ passe par quelconque autre point, soit du costé $E F$ ou $F G$, du parallelogramme retranché $G E$.

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrāmes appliquez selon vne mesme ligne droicte, & defaillans à icelle, de parallelogrāmes semblables & semblablement posés à vn autre décrit sur la moitié de la mesme ligne; le plus grand est celuy qui est décrit sur l'autre moitié de la ligne, & semblable au defaillant.

Soit la ligne AB couppee en deux egalement en C, & sur CB, moitié d'icelle soit constitué le parallelogramme BCDE, duquel le diametre est BD. Si donc on accomplit tout le parallelogramme ABEH, le parallelog. AD estant sur la moitié AC appliqué selon la ligne AB, sera defaillant du parallelogramme CE & semblable à iceluy CE, Je dis que de tous les parallelogrâmes appliquez sur icelle ligne AB, & defaillans d'une figure semblable à CE, le plus grand est AD, qui est descript sur la moitié AC, & defaillant du parallelog. CE.



Car estant pris au diametre BD quelconque point G, & tirées par iceluy point les lignes EGI, KG, paralleles aux lignes AB, BE, le parallelogramme AKGF appliqué selon la ligne AB, sera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 24. p. 6. est semblable & semblablement posé à CE. Et d'autant que par la 43. p. 1. les complemens CG, GE, sont egaux, si on leur adiouste KI commun, aussi CI, KE seront egaux. Mais CI, CF estans sur bases egales, sont pareillement egaux par la 36. p. 1. donc aussi CF, KE seront egaux, & leur adioustant CG commun, le parallelogramme AG sera egal au gnomon LM. Parquoy puisque CE est plus grand qu'iceluy gnomon, LM (car CE outre le gnomon contient encore le parallelog. DG) aussi AD qui est egal à CE par la 36. p. 1. sera plus grand que le parallelogramme AG, du mesme parallelog. DG. Et en la mesme maniere sera demonsté que AD est plus grand que tous autres parallelog. qui seront appliquez selon la mesme ligne droicte AB, & defaillans de figures parallelogrammes semblables à CE.

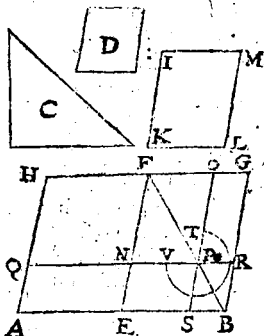
PROB. 8. PROP. XXVIII.

Sur vne ligne droicte donnee, appliquer vn parallelogrâme egal à vne figure rectiligne donnee, & defaillant d'un parallelogrâme semblable à vn autre donné; mais il faut

que la figure rectiligne donnee ne soit plus grande que le parallelogramme, qui estant appliqué sur la moitié de la ligne donnee, est semblable au parallelogramme donné.

Soit la ligne donnee AB, sur laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal à la figure rectiligne donnee C, defaillant d'un parallelogramme semblable au parallelog. donné D.

Ayant couppe AB en deux également en E, sur la moitié EB soit décrit le parallelogramme EFGB semblable & semblablement posé à iceluy D, par la 18. p. 6. Puis apres auoir acóplý le parallelog. AH GB, soit tirée la diagonale BF.



Maintenant si AF est egal à C, on a ce que l'on demande: car il est appliqué sur AB & defaut du parallelog. EG. Mais si C est plus petit que AF (car par l'hypothese il ne peut estre plus grand) il sera aussi plus petit que EG egal à iceluy AF: soit donc trouué l'excez de EG par dessus C (cette egalité ou inegalité & excex sera cogneuë par ce que nous auons dit à la 45. p. 1.) lequel excex par la 25. p. 6. soit reduit en parallelog. IK LM, semblable & semblablement posé à EG: & veu que EG est plus grand que KM, il est euident que les costez EF, FG seront aussi plus grands que les costez KI, IM; parquoy d'iceux EF, FG soient coupees FN, FO, egaux à iceux KI, IM, afin qu'estant accomply le parallelog. NEOP, il soit egal à KM, & semblable & semblablement posé au mesme KM; & partant aussi à EG; & par consequent qu'estant tiré le diametre BF, iceux parallelog. EG, NO, soient au long d'iceluy diametre par la 26. p. 6. & apres auoir continué les costez NP OP, tant qu'il sera debefoin: le dis que AP est le parallelog. demandé.

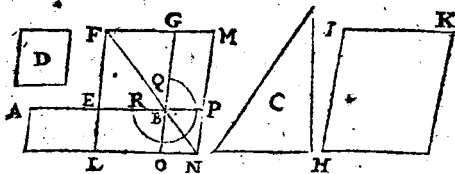
Car il est defaillant du parallelog. SR, lequel par la 24. p. 6 est semblable à EG, partant aussi à D. Ité puis que IL est l'excez par lequel EG excède C, & qu'à iceluy, excex est egal NO. Il est euident que le gnomon TV sera egal à la figure C. Mais

il est aussi égal à AP, comme il a été prouvé à la précédente:
donc aussi AP sera égal à C, & de même à la ligne donnée AB
du parallélog. SR semblable à donné D.

PROB. 9. PROP.* XXIX.

Sur vne ligne droicte donnée, appliquer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnée, excédant d'un parallelogramme semblable à vn autre donné.

Soit la ligne droite donnée AB, sur laquelle faut descrire un parallelogramme egal au rectiligne donné C, mais excédant d'un parallelogramme semblable au parallelogramme donné D.



Soit coupee en deux également AB au point E; & sur la moitié EB soit décrit le parallelogramme EFGB semblable & semblablement posé à D par la 18. p. 6. En apres soit décrit le parallelogramme HK egal aux deux figures C & EG, & semblable & semblablement posé à EG par la 25. p. 6. & partant à cause de la similitude d'iceux parallelogrammes HK, EG, comme HI à IK, ainsi EF à FG; & par consequent HK estant plus grand que EG, aussi les costez HI, IK seront plus grands que les costez EF, FG: estans donc prolongez les costez FE, FG, tellement que FL, FM, soient egales aux lignes IH, IK, & acheué le parallelogramme LFMN, il sera semblable & semblablement posé à EG. Parquoy par la 26. p. 6. LM, EG seront au long d'un mesme diametre, qui soit FN. Maintenant estans prolongez AB, GB, iusques en P & O; & acheué le parallelogramme LA; le parallelogramme AN sera appliqué à la ligne AB, l'excédant du parallelogramme OP, qui est semblable à EG par la 24. p. 6. & partant à D. Je dis donc que le parallelogramme AN est egal au rectiligne C: Car puisque par la 36. p. 1. AL, EO sont egaux, & par la 43. p. 1. EO est egal au complement BM, aussi AL sera egal à iceluy BM: leur ad-

ioustant donc LP commun, AN sera egal au gnomon QR, lequel est egal au rectiligne C. (car puisque HK, c'est à dire LM est egal au rectiligne C & EG ensemble: si on oste EG commun, resteront le gnomon QR & le rectiligne C egaux) donc aussi AN sera egal au rectiligne C. A la ligne droite AB a donc esté appliqué le parallelogramme AN egal au rectiligne C, excédant du parallelogramme OP, qui est semblable à vn autre donné D: ce qu'il falloit faire.

PROB. 10. PROP. XXX.

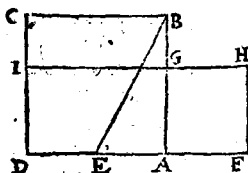
Couper vne ligne droite donnee en la moyenne & extreme raison.

Soit la ligne droite donnée AB laquelle il faut couper en la moyene & extreme raison.

Soit donc icelle couppee au point G, de telle façon que le quarré de la partie AG soit egal au rectangle de la toute AB, & de la partie GB, comme il a esté enseigné en la 11.

p. 2. Je dis que en G, AB sera couppee en la moyenne & extreme raison.

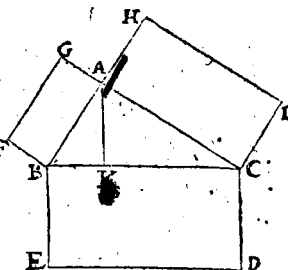
Car puis que le quarré de AG est egal au rectangle de AB & GB, les trois lignes AB, AG, & GB, seront continuellement proportionnelles, par la 17. p. 6. c'est à dire que la toute AB sera au plus grand segment AG, comme AG au plus petit segment GB; & par la 3. d. 6. AB est couppee en G, en la moyenne & extreme raison.



THEOR. 21. PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure descrite sur le coité qui soustient l'angle droit, est egale aux deux autres figures qui luy sont semblables, & semblablement posees sur les deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC, ayant l'angle BAC droit. Je dis que la figure décrite sur le costé BC qui soustient l'angle droit, est égale aux deux autres figures semblables, & semblablement posées sur les deux autres costez AB, & AC.

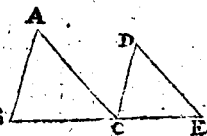


Car si du point A, qui fait l'angle droit, on mène la perpendiculaire AK, par la 8. p. 6. elle fera deux triangles équiangles entr'eux, & au total; ainsi les trois triangles BAK, CAK, & ABC seront semblables par la 4. p. 6. & 1. d. 6. & par la 19. p. 6. ils seront l'un à l'autre en raison doublée des costez de même raison AB, BC, CA. Pareillement par la 20. p. 6. les trois figures AF, BD & AI estant semblables & semblablement posées, elles seront aussi l'une à l'autre en raison doublée de leurs costez de même raison AB, BC, CA, qui sont les mêmes costez des triangles, & par la 11. 3. les rectilignes AF, BD, AI, seront entr'eux, comme les triangles BAK, BAC, CAK entr'eux: mais le triangle BAC, est égal aux deux autres: donc la figure BD décrite sur BC, sera aussi égale aux deux autres: ce qu'il falloit démonstrer.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ont deux costez proportionaux à deux costez, & sont disposez faisant vn angle, tellement que les costez de même raison soient parallèles; les deux autres costez se rencontreront directement.

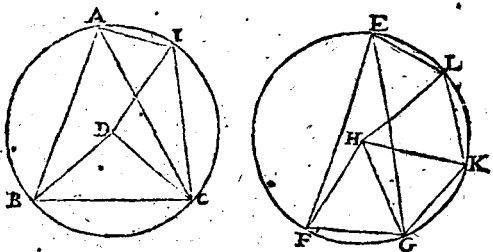
Soient deux triangles ABC, & CDE, ayans les costez BA & AC proportionaux aux costez CD & DE, disposez de telle façon qu'ils fassent l'angle AC D, & que BA soit parallèle à CD, & AC à DE: je dis que BC & CE se rencontreront directement.



Car BA & CD estans paralleles, l'angle ACD sera egal à son alterne A, par la 29. p. 1. aussi AC estant parallele à DE, l'angle D sera egal à son alterne ACD : ainsi l'angle D sera egal à l'angle A, & par la 6. p. 6. les deux triangles seront equiangles, donc l'angle ACD estant egal à l'angle A, l'angle DCE à l'angle B, il est evident que les trois angles au point C, seront egaux aux trois angles du triangle BAC, c'est à dire à deux droits par la 32. p. 1. & par la 14. p. 1. les deux lignes BC, CE se rencontreront directement : ce qu'il falloit prouver.

THEO. 23. PROP. XXXIII.

Aux cercles egaux, les angles tant au centre qu'en la circonference, sont entr'eux, comme les circonférences qui les soustienent. Les secteurs sont aussi de mesme entr'eux.



Soient deux cercles egaux ABC, & EFG, desquels les centres sont D, & H, & soient les deux angles au centre BDC, & FHG, ou en la circonference BAC, & FEG; ie dis que comme la circonference BC est à la circonference FG, ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG, & l'angle BAC à l'angle FEG.

Qu'il ne soit ainsi, soient pris les deux arcs GK & KL egaux à FG: item CI egal à BC, & soient menées les lignes IA, ID, KH, HL, KE, LE, les trois angles FHG, GHK & KHL sont egaux entr'eux, par la 17. p. 3. ainsi l'arc FGK est

autât multiplie de l'arc FG, cōme l'angle FHL l'est de FHG: & par le mesme discours, l'arc BCI est autāt multiplie de l'arc BC, cōme l'angle BDI, l'est de BDC: partant si l'arc BCI est egal à l'arc FG L K, l'angle BDI sera egal à l'angle FHL par la 27. p. 3. si plus grand, plus grand, si plus petit plus petit; & par ainsi BCI, BDI estans equemultipliees de BC premiere grandeur, & BDC 3. & FGKL, FHL equemultipliees de FG, FHG 2. & 4. par la 6. d. 5. cōme l'arc BC à l'arc FG, ainsi l'angle BDC à l'angle FHG: le mesme discours est des angles en la circonference.

Pour la seconde partie. Je dis aussi, que le secteur BDC est au secteur FHG, cōme l'arc BC est à l'arc FG.

Car on prouuera aisement (demeurant la mesme construction) que les deux arcs BC, CI estans esgaulx que leurs cordes seront egalles, & les deux sections egalles: mais les deux triangles BDC, CDI sont aussi egaulx par la 4. p. 1. l'un adioustant donc les deux segmens egaulx; par les communes sentences, les deux secteurs BDC, CDI seront egaulx, & l'arc BCI sera autāt multiplie de l'arc BC, que le secteur BDI le sera du secteur BDC: & par mesme discours, l'arc FGKL sera autāt multiplie de l'arc FG que le secteur FHL le sera du secteur FHG; la cōclusion est aisée par la 6. d. 5. cōme en la premiere partie.

COROLLAIRE.

De cecy s'ensuit que cōme le secteur est au secteur, ainsi l'angle est à l'angle. Car l'une & l'autre à la mesme raison que l'arc à l'arc; & partant par la 11. p. 5. ils seront aussi entr'eux en la mesme raison.

Il est aussi euident que cōme un angle au centre, est à quatre angles droits, ainsi est l'arc soustendant iceluy angle, à toute la circonference, & au contraire que cōme quatre angles droits sont à un angle au centre, ainsi toute la circonference est à l'arc soustendant iceluy angle.

Car cōme un angle au centre est à un angle droit au centre, ainsi l'arc qui soustient iceluy angle, est au quadrant qui soustient l'angle droit par la 31. p. 6. Parquoy cōme l'angle au centre sera au quadruple de l'angle droit, c'est à sçauoir à 4. angles droits, ainsi l'arc soustendant iceluy angle, sera au quadruple du quadrant, sçauoir est à toute la circonference, par les choses que nous auons demon-

finées a la fin du scholie de la 12. p. 5. Puis apres d'autāt qu'un angle au centre est a quatre angles droits, comme l'arc qui soustient iceluy angle, est a toute la circonference; aussi en permutant comme quatre angles droits seront a un angle au centre, ainsi toute la circonference sera a l'arc soustendant l'angle du centre: ce qui a esté prop. se.

Fin du sixiesme Element.





E L E M E N T

S E P T I E S M E.

D E F I N I T I O N S.



VUnité, est selon laquelle toutes choses qui sont, est appelée vne.

Euclide ayant traité és 6. liures precedents de la premiere partie de Geometrie, sçauoir est de celle là qui considere les plans, auparauant que venir a l'autre partie, laquelle traite des solides; il explique en ce 7 liure & és deux suivans les proprietéz & affections des nombres, pour puis apres traiter au 10. liure des lignes commensurables & incommensurables, nécessaires pour auoir entiere & parfaite cognoissance des proprietéz des solides. Euclide definit donc icy que c'est qu'unité, & dict que c'est cela selon quoy toute chose qui est se nomme vne: & est à noter que tout ainsi que en la Geometrie le point n'a aucune partie, aussi és nombres l'unité ne veçoit aucune diuision.

2. Nombre, est vne multitude d'unitéz assemblees.

C'est à dire qu'estans assemblees plusieurs unitéz ensemble, leur aggregé s'appelle nombre.

3. Partie est vn petit nombre tiré d'vn plus

grand, lors que le petit mesure le plus grand.

C'est à dire que lors qu'un nombre mesure un plus grand, il est dict partie d'iceluy; Et ceste partie est appelée aliquotte; tellement que 2. est dit partie aliquote de 4. Et se nomme $\frac{1}{2}$; Et 5. est dict $\frac{1}{5}$ de 15. pource que 5. mesure 15. par 3. ainsi 4. qui mesure 28. par 7. est dit $\frac{1}{7}$, &c.

4. Et parties, est lors que le plus petit ne mesure pas le plus grand.

C'est à dire que lors qu'un petit nombre n'en mesure pas un plus grand, il n'est pas dict partie d'iceluy, mais parties Comme 6. est dict parties de 9; Car il ne le mesure pas précisément, mais est 2. parties d'iceluy, sçavoir est $\frac{2}{3}$, ainsi 12. est parties de 16. sçavoir $\frac{3}{4}$ pource que 4. qui mesure l'un & l'autre nombre est 3. fois en 12. Et 4. fois en 16. aussi 15. est parties de 24. sçavoir est $\frac{5}{8}$, puis que 3. qui est commune mesure, est 5. fois en 15. Et 8. fois en 24. &c.

5. Multiplie, est vn grand nombre composé d'un petit, lors que le plus petit mesure le plus grand.

6. Nombre pair, est celuy qui peut estre diuisé en deux également.

7. Mais l'impair, est celuy qui ne peut estre diuisé en deux également: ou bien celuy qui est différent du nombre pair de l'vnité.

8. Nombre parement pair, est celuy qu'un nombre pair mesure par vn nombre pair.

Comme 32. lequel 8. mesure par 4. est dit nombre parement pair,

9. Et parement impair, est celuy qu'un nombre impair mesure par vn nombre pair.

Comme 42. lequel 7. mesure par 6. est dit nombre parement impair,

10. Mais nombre impairement impair, est celui qui est mesuré d'un nombre impair par un nombre impair.

Comme 15. lequel est mesuré de 5. par 3. est dit nombre impairement impair.

11. Nombre premier, est celui qui est mesuré par la seule unité.

C'est à dire, que si un nombre n'est mesuré par aucun autre nombre, mais seulement par l'unité, il est nombre premier, & tels sont tous ceux-cy 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Car la seule unité mesure iceux.

12. Nombres premiers entr'eux, sont ceux-là qui n'ont autre commune mesure, que l'unité.

13. Nombre composé, est celui qui est mesuré par quelque nombre.

14. Mais les nombres composez entr'eux, sont ceux-là qui ont autre commune mesure que l'unité.

15. Un nombre est dit multiplier un autre, lors que le multiplie est autant de fois composé, qu'il y a d'unités au multipliant.

16. Lors que deux nombres se multiplient l'un l'autre, le produit est appelé plan, & les multipliers sont les costez d'iceluy plan.

17. Lors que trois nombres se multiplient l'un l'autre, le produit est appelé solide, & les multipliers sont les costez d'iceluy.

18. Nombre quarré, est celui qui est également egal: ou bien c'est le produit de deux nombres egaux.

19. Nombre cube, est celuy qui est egale-
ment egal: ou bien c'est le produit de trois nō-
bres egaux.

20. Les nombres sont proportionnaux, lors
que le premier est autant multiplie, ou mes-
me partie, ou mesmes parties du second, com-
me le troisieme du quatrieme.

Selon ceste vulgaire def. d'Euclide ne sont point compris es nom-
bres prop. ceux qui sont en raison superparticuliere, superpartiente,
multiple superparticuliere, & multiple superpartiente. Car en toutes
ces proportions, le premier nombre n'est pas autant multiplie du se-
cond, que le 3. du 4. ny aussi mesme partie, ou parties: Mais le pre-
mier contient autant le 2. que le 3. la 4. & en outre une mesme partie,
ou parties d'iceluy: comme il est evident par les choses que nous auōs
enseignees à la 1. d. 5. C'est pourquoy Clavius (& à bon droit) a esti-
mé que ceste vulgaire def. d'Euclide, a esté corrompue, puis qu'elle est
man. ue & imparfaicte: laquelle imperfection Dounot a encore aug-
mentee en sa traduction, en ostant eue multiplie, tellement que
selon sadite traduction, on ne peut pas conclurre que les nombres qui
sont en raison multiple soient proportionnaux, comme veut la vul-
gaire def. Pour donc rendre ceste 20. def. gener. le a tous genres de
proportions, comme a fait Clavius, nous la poserons telle que s'en-
suit Les nōbres sont proportiōs, lors que le premier est autāt
multiple, ou bien mesme partie, ou mesmes parties du 2. que le
3. du 4. Ou bien quand le premier cōtient egalemēt le 2. & le
3. le 4. & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'ice-
luy. Ainsi ces nombres 6. 2. 9. 3. sont proportionnaux, puis que le pre-
mier est autant multiple du second que le 3. l'est du 4. c'est à sçauoir
triple: Item ceux cy 4. 12. 3. 9; car le premier est la mesme partie du
second que le 1. du 4. sçauoir est le tiers: item ceux cy 6. 8. 9. 12. pour
ce que le premier est mesmes parties du second que le 3. du 4. Sont aussi
proportionnaux ces nombres cy 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22.
10. & 12. 5. 14. 10. Car au premier exemple le premier & 3. nombre
contient vne seule fois le 1. & 4. & en outre vne mesme partie, sçauoir est
1/2: mais au second: vne seule fois & en outre mesmes parties,
sçauoir est les 1/3: & au 3. deux fois, & encores vne mesme partie, c'est
à sçauoir 1/2: & au dernier, deux fois, & encores mesmes parties sçauoir
est les 1/3. Que si le premier nōbre n'est autant multiplie ou mes-
me partie,

me partie, ou parties du second que le 3. du 4. Ou bien que le premier ne contienne autant de fois le second que le troisieme contient le 4. & en outre une mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy; les nombres proposez ne pourront estre appellez proportionnaux. Parquoy si 4. nombres sont posez proportionnaux, il est necessaire d'accorder que le premier est autant multiple, &c.

Or Euclide desinit seulement les nombres proportionnaux, qui ont une mesme raison d'inegalité: Car de la raison d'egalité, il est euident que le premier estant egal au second, aussi le 3. doit estre egal au 4. afin que les nombres soient dictz proportionnaux.

Or de ceste def. resulte apertement, que les nombres egaux ont mesme raison à un mesme, & au contraire qu'un nombre a aussi mesme raison à deux egaux: item que les nombres ayant mesme raison à un mesme, ou ausquels un mesme nombre à mesme raison, sont egaux. Car puis que les nombres egaux sont, ou equemultiplices, ou mesme partie, ou mesmes parties d'un mesme nombre; ou contiennent également un mesme nombre, & en outre une mesme partie, ou parties d'iceluy. Item qu'un mesme nombre est ou equemultiplices, ou mesme partie, ou mesmes parties de nombres egaux; ou bien qu'il les contient également, & en outre une mesme partie, ou parties d'iceux il est euident par ceste def. que les nombres egaux ont mesme raison à un mesme nombre, ou un mesme à des egaux. Ce qui a esté demonstrez es grandeurs à la 7. p. 5.

Derechef pource que les nombres ayans mesme raison à un mesme nombre, sont ou equemultiplices d'iceluy, ou mesme partie, ou parties; ou bien ils le contiennent également, & en outre une mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy: Item puis que un mesme nombre ayant mesme raison à quelqu'un, est ou equemultiplice d'iceux, ou la mesme partie, ou parties; ou bien il les contient également, & en outre une mesme partie, ou mesmes parties d'iceux; selon ceste def. il est manifeste que les nombres qui ont mesme raison à un mesme nombre, ou ausquels un mesme nombre à mesme raison, sont egaux entr'eux. Ce qui a aussi esté demonstrez en toutes sortes de grandeurs en la 9. p. 5.

Par mesme raison on collige, que de deux nombres inegaux, le plus grand a plus grande raison à un mesme nombre, que le plus petit: & au contraire qu'un mesme nombre à plus grande raison à un petit nombre, qu'à un plus grand. Item que des nombres inegaux, celui qui a plus grande raison à un mesme, est le plus grand: & celui auquel un mesme nombre a plus grande raison, est le plus petit. Toutes lesquelles choses sont claires, & euidentes, si ceste def. est bien entendue. Cecy a aussi esté demonstrez es grandeurs au 5. liure prop. 8.

21. Les nombres semblables plans ou solides, sont ceux qui ont les costez proportionnaux.

Comme 24. & 6 sont nombres plans semblables, pource que 6. & 4. costez de cestuy-là sont proportionnaux à 3. & 2. costez de celuy-cy : ainsi aussi 192. & 24. sont nombres solides semblables, pource que 8. 6. 4. costez de cestuy-là sont prop. à 4. 3. 2. costez de celuy cy.

22. Nombre parfait, est celuy qui est egal à toutes ses parties aliquotes.

Comme 6. est dict nombre parfait, pource que les parties aliquotes d'iceluy 1. sçavoir 1. 2. 3. prises ensemble, luy sont egales. Ainsi aussi 28. auquel les parties aliquotes, sçavoir est 1. 2. 4. 7. 14. estans prises ensemble, luy sont egales; sera dict nombre parfait.

COMMUNES SENTENCES.

1. **L**es nombres equemultiplices de nombres egaux, ou d'un mesme nombre, sont egaux entr'eux.
2. Et ceux desquels un mesme nombre est equemultiplice, ou desquels les equemultiplices sont egaux, sont aussi egaux entr'eux.
3. Mais les nombres qui sont une mesme partie, ou mesmes parties de nombres egaux, ou d'un mesme, sont egaux entr'eux.
4. Et ceux desquels un mesme nombre, ou nombres egaux, sont mesme partie, ou mesmes parties; sont aussi egaux entr'eux.
5. L'unité mesure tout nombre par les unités qui sont en iceluy, c'est à dire par le mesme nombre.

6. Tout nombre mesure soy-mesme par l'vnité.
7. Si vn nombre multipliant vn nombre, en produit quelqu'un, le multipliant mesurera le produit par le multiplié : mais le multiplié par le mesme multipliant.
8. Si vn nombre mesure vn nombre ; aussi celuy par lequel il le mesure, mesurera le mesme par les vnitez, qui sont au mesurant, c'est à dire par iceluy nombre mesurant.
9. Si vn nombre mesurant vn nombre, multiplie celuy par lequel il le mesure, ou est multiplié par iceluy, fera produit celuy lequel est mesuré.
10. Le nombre qui en mesure deux ou d'auantage, mesure aussi le composé d'iceux.
11. Mais celuy qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré.
12. Et celuy qui mesure le tout, & le retranché, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux nombres inegaux proposez, on soustraiet tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, & que le petit residu ne mesure iamais le plus grand iusques à ce qu'on ait pris l'vnité; les nombres proposez au commencement, seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inegaux AB, & CD, si on soustraiët continuellement le plus petit du plus grand, & que le plus petit residu ne mesure iamais le plus grand, iusques à ce qu'on ait pris l'vnité : Je dis qu'iceux nombres AB, & CD seront premiers entr'eux.

A....5 F..2 G..1 B
C...3 H..2 D
E..2

Autrement s'ils ne sont premiers, ils seront composez, & par la 14. d. 7. ils seront mesurez par quelque nombre : soit iceluy E commune mesure à tous les deux : ainsi CD plus petit nombre estant soustraiët de AB, soit le reste FB plus petit que CD. Item FB estant soustrait de CD, soit le reste HD plus petit que FB. Pareillement HD estant soustrait de FB, soit le reste GB, vnité. Puis donc que E mesure CD, il mesurera aussi AF; & d'autant qu'il mesure le tout AB, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le residu FB, lequel mesure CH; & partant par la 11. com. sent. E mesurera aussi CH; & puis qu'il mesure le tout CD, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste HD, & par consequent FG : mais il mesure aussi FB; E mesurera donc pareillement l'vnité restante GB, sçauoir le tout partie : ce qui est impossible. Donc AB & CD ne peuvent estre mesurez par aucun nombre, ains par l'vnité seulement : & partant ils sont nombres premiers entr'eux par la 12. d. 5.

SCHOLIE.

Commandin ayant démontré la conuerse de ceste prop. vient à la suivante.

Estans proposez deux nombres composez entr'eux, si on soustrait tousiours alternatiuement le moindre du plus grand, la soustraction ne paruiendra iusques à l'vnité.

Ce qui est evident, car si on paruenoit à l'vnité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux, comme il a esté démontré en la prop. cy dessus : ils ne sont composez.

Ce qui se prouue par ces choses, qu'estans proposez deux nombres, on ne peut facilement s'ils sont premiers entr'eux, ou non. Car si on fait la soustraction, comme dit est, si on parvient iusques à l'vnité, lesdits nombres proposez seront premiers entr'eux : mais si on n'y parvient, ils seront composez.

PROB. 1. PROP. II.

Trouuer la plus grande commune mesure

de deux nombres proposez non premiers entr'eux,

Soient deux nombres non premiers AB, & CD, desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure.

Soit soustrait le plus petit CD, tant A..... 9 E..... 6 B de fois que faire se pourra du plus grād C..... 6 F... 3 D AB: s'il reste quelque chose comme EB, G.... 4 soit soustrait continuellement le plus petit du plus grand, iusques à ce qu'on paruienne à vn nombre qui mesure le precedent; ce qui aduiendra necessairemēt; car si on paruenoit iusques à l'vnité, les nombres AB, CD, par la 1. p. 7. seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Donc FD mesurant EB, il ne reste rien. Je dis que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD.

Qu'ainsi ne soit. Je dis en premier lieu que FD mesure AB, & CD: Car mesurant EB, il mesure aussi CF; & d'autant qu'il se mesure soy-mesme par la 10. com. sent. il mesure le tout CD: Pareillement il mesurera AE; & puis qu'il mesure aussi EB, il mesurera le tout AB; ainsi il mesure tous les deux AB, & CD.

Je dis secondement que FD est la plus grande commune mesure de AB, & CD. Autrement soit vn plus grand nombre, sçauoir G, qui mesure tous les deux nombres AB, & CD: & puis qu'il mesure CD, il mesurera aussi AE, & mesurant le tout AB par la 12. com. sent. il mesurera aussi le residu EB; & par consequent il mesurera CF. Item mesurant le tout CD, il mesurera aussi le reste FD, sçauoir vn plus grand nombre mesurera vn plus petit: ce qui est impossible. Donc FD est la plus grande commune mesure, entre AB, & CD.

C O R O L L A I R E.

De cecy est euident que qui mesure deux nombres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure, puis qu'il a esté demonsté que si G mesure AB & CD, il mesurera aussi FD leur plus grande commune mesure.

S C H O L I E.

Par les choses cy-dessus dictes, nous connoistrans facilement si trois

ou d'auantage de nombres sont premiers entr'eux, au non. Car soit les trois nombres A, B, C . Premièrement donc soit veu par ce qui est dit à la 1. p. 7. si les deux nombres A & B sont premiers entr'eux, ou non : Que s'ils sont premiers, il est evident que les trois nombres A, B, C , ne s'vront composez entr'eux. Mais si A & B estoient composez entr'eux, soit trouuee par la 2. p. 7. leur plus grande commune mesure D ; que si elle mesure aussi le nombre C , il est manifeste que les trois nombres A, B, C sont composez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune mesure.

Que si D plus grande commune mesure de A & B , ne mesure C ; C & D seront premiers entr'eux, ou non: S'ils sont premiers, les trois nombres A, B, C , ne seront composez entr'eux, mais premiers : Car s'ils estoient composez, ils auroient une commune mesure, laquelle mesureroit aussi le nombre D plus grande commune mesure de A & B , par le corol. de ceste prop. & partant C & D ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Mais si C & D ne sont premiers entr'eux, les trois nombres A, B, C seront composez entr'eux. Car estant trouuee par la 2. p. 7. E plus grande commune mesure de C & D ; iceluy nombre E mesurera aussi A & B par la 11. com. sent. puis que D les mesure. Parquoy veu que le mesme E mesure aussi C ; il mesurera les trois A, B, C ; & partant iceux seront composez entr'eux. Ce qui estoit propose.

En la mesme maniere sera cogneu si d'auantage de nombres que trois sont premiers entr'eux, ou non. Car s'il y a 4. nombres donnez, il en faudra esprouuer premierement trois; si cinq, quatre. &c. & à cheuer comme nous auons dict, de trois nombres proposez.

PROB. 2. PROP. III.

Trouuer la plus grande commune mesure de trois nombres proposez, non premiers entr'eux.

Soient trois nombres non premiers entr'eux A, B, C , desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure.

A	12	D	4
B	8	E ...	2
C	6	F ...	3

Soit rirez la plus grande commune mesure des deux A, & B, par la 2. p. 7. sçavoir D. Si D mesure aussi C, nous auons ce que nous demandons: Car si vn plus grand nombre que D mesure A, B, C; par le corol. de la prop. preced. il mesureroit aussi D, plus grande mesure de A, & B, sçavoir est vn grand nōbre, vn moindre: ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'hypothese que par le corol. de la 2. p. 7. donc par icelle mesme proposition soit trouuee E plus grande commune mesure entre C & D. Il est euident par la. 11. ccm. sent. que E mesurera tous les trois nombres, A, B, C, d'autant qu'elle mesure C, & D, lequel mesure B, & A. Je dis d'auantage que E est aussi la plus grande mesure cōmune. Autremēt si elle n'est la plus grande, en soit vne autre plus grande, sçavoir F s'il est possible: Or mesurant A, & B, elle mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure par le corol. de la 2. p. 7. & par la mesme raison mesurant C, & D, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure E, sçavoir le plus grand, le plus petit, ce qui est impossible. Donc E sera la plus grande commune mesure des trois nombres A, B, C.

C O R O L L A I R E.

Par cecy est manifeste qu'un nombre qui en mesure trois, mesurera aussi la plus grande commune mesure d'iceux.

En la mesme maniere, estans donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux, sera trouuee leur plus grande commune mesure, & aura aussi lieu le mesme corol.)

T H E O R. 2. P R O P. I I I I.

Tout nombre moindre, est partie ou parties de tout nombre plus grand.

C'est à dire que de deux nombres inegaux le plus petit est partie aliquote, ou aliquante du plus grand.

Soient deux nombres A, & B inegaux. A.....6 B....4
Je dis que B plus petit, est ou partie ali- B...3 B.....5
quote, ou aliquante de A.

Car ou B mesure A, ou non. S'il le mesure, il est partie ali-
O iij

quote par la 3. d. 7. s'il ne le mesure pas, ou bien A & B, seront entr'eux composez, ou premiers: si composez, ils auront vne commune mesure par la 14. d. 7. si premiers, ils auront l'vnité pour commune mesure par la 12. d. 7. ainsi B contiendra certain nombre d'vnitez semblables aux vnitez qui sont en A.

THEOR. 3. PROP. V.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart; le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

Soient quatre nombres A, B C, D & EF, desquels A est telle partie de B C, que D est de EF. Je dis que A & D ensemble sont telle partie de B C & EF ensembles, comme A l'est de B C.

A...3
B...3 G...3 C
D...4
E...4 H...4 F

Car puis que A est telle partie de B C, que D de EF, B C contiendra A autant de fois, comme EF contiendra D par la 3. d. 7. Soit donc B C diuisé en autant de parties qu'il contient de fois A, sçauoir en B G, & G C; EF se diuiseira aussi en autant de parties egales à D, sçauoir en E H & H F: & d'autant que B G est egal à A, & E H à D; si à choses egales on adioust choses egales, sçauoir A & B G, à D & E H; A & D ensemble, seront egaux à G & E H ensemble: le mesme se dira de A, G C, D, & H F; & tant autant de fois que B C contient A, autant de fois B C ensemble, contiendront A & D ensemble: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second que le tiers du quart: le premier & tiers ensemble, seront telles parties du second & quart ensemble, que le

premier du second.

Soient quatre nombres AB, C, DE, & F A...3 G...3 B
desquels le premier AB contient autant de C.....9
parties du second C, que le 3. DE est du 4. F. D...4 H...4 E
Je dis que AB, & DE ensemble, contiennent F.....12
autant de parties de C & F ensemble, que AB de C.

Car pour autant que AB contient telles parties de C, que DE en contient de F; estans AB & DE diuisez aux parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la 5. p. 7. AG, & DH ensẽble, seront telle partie de C & F ensemble, comme AG est de C. Item GB & HE ensemble, seront telle partie de C & F ensemble, comme GB seul est de C seul; ainsi AB & DE seront ensemble deux fois telle partie de C, & F ensemble, comme AB estoit de C: ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 5. PROP. VII.

Si vn nombre est telle partie d'un autre nombre, que le retranché du retranché; le reste sera aussi telle partie du reste, comme le tout est du tout.

Soit AB telle partie de CD, que le A....4 E...2 B
retranché AE est du retranché CF. G....4 C.....8 F....4 D
Je dis que le reste EB, sera telle partie du reste FD, que le tout AB est du tout CD.

Car estant pris le nombre GC, de telle façon que telle partie le retranché AE est du retranché CF, telle partie le reste EB soit d'iceluy GC, par la 5. p. 7. les deux AE & EB ensemble seront telle partie de GC & CF ensemble, qu'est AE de CF, c'est à dire qu'est le tout AB du tout CD: & partant puisque AB est telle partie du nombre GF que de CD: iceux nombres GF, CD seront egaux entr'eux par la 4. com. sent. en ostant donc le nombre commun CF, les demeurans GC & FD seront egaux; & partant le reste EB sera telle partie du reste FD, que de GC: c'est à dire que le tout AB du tout CD, puisque EB a esté posé telle partie de GC, que AE de CF, qui par l'hypothese est la mesme que AB de CD.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si vn nombre contient telles parties d'un autre nombre, que le retranché du retranché, aussi le reste contiendra telles parties du reste, que le tout du tout.

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD, que le retranché AE du retranché CF: Je dis que le reste EB contiendra telles parties du reste FD, que le total AB, du total CD.

Car si on pose GA contenir telles parties de FD, que AE de CF, ou AB de CD, par la 6. p. 7. les deux nombres GA, AE ensemble seront telles parties des deux CF, FD ensemble (c'est à dire le tout GE du tout CD) que GA de FD, ou AB de CD: & partant puis que GE & AB contiennent telles parties de CD, l'un que l'autre, ils seront egaux; parquoy en ostant le nombre commun AE, resteront GA & EB egaux. Mais GA contient telles parties de FD, que AB de CD: Donc aussi EB contiendra telles parties d'iceluy FD, que AB de CD, ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second que le tiers du quart, aussi en changeant le premier sera telle partie, ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soit A telle partie de BC que D est de EF. Je dis qu'en changeant, A sera telle partie, ou contiendra telles parties de D, que BC de EF, pourueu que A & BC soient plus petits que D & EF chacun au sien.

Car d'autant que par l'hypothese A est telle partie de BC comme D de EF; BC contiendra autant de parties egales à A

A... 3
B... 3 G... 3 E
D... 4
E... 4 H... 4 F

que EF d'egales à D: soit donc diuisé le nombre BC en parties BG, GC egales à A; & le nombre EF en parties EH, HF egales à D. Et puis que A est posé moindre que D, par la 4. p. 7. A est partie de D, ou contient parties d'iceluy, & conséquemment tous les autres BG de EH, & GC de HF: mais par ce que BG est egale à GC, & EH à HF; BG sera telle ou telles parties de EH, que GC de HF; & partant par la 5. ou 6. p. 7 BG, GC ensemble, c'est à dire BC, sera telle ou telles parties de EH, HE ensembles, sçauoir EF, que BG de EH, c'est à dire que A de D. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart, aussi en changeant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient 4. nombres A B, C, D E, & F, desquels AB contienne telles parties de C, que DE de F. Je dis qu'en changeant, AB sera telle ou telles parties de D E, que C est de F, moyennant que AB & C soient plus petits que DE & F, comme en la precedente.

A..2 G..2 B
C.....6
D.....,H.....,E
F A 15

Car AB estant diuisé en AG, GB parties de C; & DE en D H, HE parties de F; AB sera diuisé en autât de parties que DE, & tant AG que GB sera telle partie de C, que DH & HE de F: Donc en changeant par la 9. p. 7. AG sera telle partie ou parties de DH, & GB de HE, que C de F; & partant AG sera telle partie, ou parties de DH, que GB de HE. Donc par la 5. ou 6. p. 7. AG, GB ensemble, sçauoir est AB, sera aussi telle partie, ou parties de DH, HE ensemble, c'est à dire DE, que C de F: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9. PROP. XI.

Si le tout est au tout, comme le retranché au

retranché; aussi le reste fera au reste, comme le tout au tout.

Si le tout AB est au tout CD, comme le A...4 E...2 B retranché AE est au retranché CF: ie dis que C.....6F...3 D le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB au tout CD.

Car puis que AB est à CD, comme AE, à CF: AB la plus petite, sera telle ou telles parties de CD, que AE de CF, & par la 7. ou 8. p. 7. le reste EB sera telle ou telle parties du reste FD, que le tout du tout: & partant par la 20. d. 7. le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB au tout CD. ce qu'il falloit prouver.

PROB. 10. PROP. XII.

Si autant de nombres qu'on voudra sont proportionaux; comme l'un des antecedans sera à l'un des consequens, ainsi tous les antecedans seront à tous les consequens.

Soient tant de nombres qu'on voudra A.....6C.....4 E...2 proportionaux A, B; C, D; E, F; B.....9D.....6F...3 c'est à sçavoir qu'il y ait telle raison de A à B, que de C à D & que de E à F. Ie dis que tous les antecedans A, C, E, ensemble, seront à tous les consequens B, D, F ensemble, comme A l'un des antecedans à B l'un des consequens.

Car puis que les susdits nombres sont proportionaux, & A, C, E, sont moindres que B, D, F; par la 20. d. 7. A sera telle, ou telles parties de B, que C de D, & E de F; & par la 5. ou 6. p. 7. A & C ensemble seront telle, ou telles parties de B & D ensemble, que A de B, ou E de F. Derechef puis que A, C ensemble comme vn seul, est telle partie, ou parties de B, D, ensemble comme vn seul, que E de F, aussi par les mesmes prop. A, C ensemble avec E, seront telle ou telles parties de B, D ensemble avec F, que A de B: parquoy par la 20. d. 7. tous les antecedans A, C, E ensemble, auront même raison à tous les consequens B, D, F ensemble, que A à B. ce qu'il falloit prouver.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si quatre nombres sont proportionaux :
aussi en changeant ils seront proportionaux.

Soient 4. nombres proportionaux A, B, C, D, sçavoir qu'il y ait telle raison de A à B, que de C à D : Je dis qu'en changeant, il y aura telle raison de A à C, que de B à D.

A.....	12
B.....	8
C.....	9
D.....	6

Car puis que comme A est à B ainsi C à D par la 20. d. 7. D plus petit sera telle ou telles parties de C, que B est de A, & partant en changeant par la 9. ou 10. p. 7. D. sera telle ou telles parties de B, que C est de A, & par la 20. d. 7. conuertie, il y aura mesme raison de A à C que de B à D. Ce qu'il falloit demonstret.

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un costé, & autant d'un autre, qui se prennent deux à deux, & en mesme raison; iceux en raison egale, seront aussi en mesme raison.

Soient d'une part tant de nombres qu'on voudra A, B, C, & autant d'autre part D, E, F, & que de deux en deux il y ait telle raison de A à B, que de D à E, & de B à C que de E à F. Je dis qu'en raison egale, il y aura telle raison de A à C, que de D à F.

A.....	9	D.....	6
B.....	6	E.....	4
C.....	3	F.....	2

Car puis que comme A est à B, ainsi D à E, en changeant par la 13. p. 7. comme A sera à D, ainsi B à E : semblablement aussi puis que comme B est à C, ainsi E à F, en changeant comme B sera à E, ainsi C à F. Donc comme A sera à D, ainsi C sera à F (car puis que A est à D, & C à F, en mesme raison que B à E, aussi A sera à D en la mesme raison que C à F, comme sera incontinent demonstret) & partant en changeant, comme A sera à C, ainsi D sera à F : ce qu'il falloit prouver.

L E M M E.

Or que A estant à D , & C à F , en mesme raison que B à E , ils soient de mesme raison entr'eux, nous le demonsturons ainsi. D'autant que comme A est à D , ainsi B à E ; E plus petit sera telle ou telles parties de B , que D de A : Derechef puis que comme B à E , ainsi C à F , F moindre sera telle, ou telles parties de C , que E de B : parquoy F sera aussi telle ou telles parties de C , que D de A & partant par la 20. d. 7. conuertie, comme A sera à D , ainsi C sera à F . Donc les raisons des nombres qui sont de mesme a vné, sont aussi de mesme entr'elles.

S C H O L I E.

Ce Lemme respond à la 11. p. 5. Dounot se sert d'icelle 11. p. 5. & d'autres prop. du mesme liure pour appuyer les demonstrations des 7. 8. & 9. liures: mais il est euident qu'Euclide a voulu distinguer le nombre d'avec la grandeur, puis que plusieurs propositions demonstrees és grandeurs au 5. liure, sont derechef demonstrees en nombres és 7. 8. & 9. liures: & partant ne se doiuent appuyer les demonstrations des prop. de ceux cy sur celles de celuy-là: Ce qu'a bien aussi reconnu Dounot sur la premiere prop. du 7.

THEOR. 13. PROP. XV.

Sil'vnité mesure quelque nombre autant de fois qu'un tiers mesure un quart; aussi en changeant le second mesurera le quart autant de fois que l'vnité mesure le tiers.

Soit l'vnité A mesurant autant de fois BC , que D mesure EF : Je dis qu'en changeant BC mesurera EF , comme A mesure D .

$A. 1$
 $B. 1 G. 1 H. 1 C$
 $D. 2$
 $E. 1 I. 2 K. 2 F$

Car par l'hypothese BC estant diuise par vnité, & EF par la partie de D , icelle partie D sera autant de fois en EF , com-

me A en BC, & chacune partie de EF sera egale a D, comme chacune de BC a l'vnité, donc l'vnité BG est à la partie EI, comme GH à IK, & HC à KF : & partant par la 12. p. 7. tous les antecedents BC seront à tous les consequents EF, cōme BG à EI, ou leur egaux A à D: ce qui estoit à prouuer.

THEO. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre; leurs produicts seront egaux entr'eux.

Soient deux nombres A, & B, & que A multipliant B produise C, & B multipliant A produise D : Je dis qu'iceux deux produicts C & D sont egaux entr'eux.

Car puis que A multipliant B produit C : B sera autant dans C, que l'vnité est en A, par la 15. d. 7. & par la 15. p. 7. en changeant A sera autant de fois dans C, que l'vnité est en B. Item B multipliant A, & produisant D; A sera autant de fois dedans D, qu'il y a d'vnitez en B par la mesme 15. d. 7. & nous auons prouué que A estoit autant en C, que l'vnité en B; donc A est autant en C qu'en D; & partant par la 4. com. sent. C & D seront egaux entr'eux: ce qu'il falloit demonst rer.

Vnité.

A... 3 B... 4

C..... 12

D..... 12

THEOR 15. PROP. XVII.

Vn nombre multipliant deux autres, les produicts seront entr'eux en mesme raison que les multipliez.

Vnité.

Soit le nombre A lequel multipliant les nombres B & C fasse D & E: Je dis que les deux produicts D, & E, sont entr'eux, comme B à C.

A.. 2

B... 3 C... 4

D..... 6

E..... 8

Car par la 15. def. 7. B multiplié par A est autant de fois dans son produit D, que l'unité est en A; & C dans son produit E, comme la même unité en A : par conséquent il y aura telle raison tant de B à D, que de C à E, comme de l'unité à A. Parquoy par le Lemme de la 14. p. 7. B sera à D, comme C à E; & en changeant par la 13. p. 7. comme B sera à C, ainsi D sera à E. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Deux nombres multiplians vn autre, les produits seront entr'eux, en même raison que les multiplians.

Soient deux nombres A & B, multiplians C, & soient les deux produits D & E: Je dis qu'iceux D & E seront l'un à l'autre comme A est à B.

A...3	B....4
C..2	
D.....6	E.....8

Car puisque A multipliant C produit D, aussi C multipliant A produira le même D par la 16. p. 7. & par la même raison, puisque B multipliant C produit E, aussi C multipliant B produira le même E: ainsi A & B multipliant C, c'est comme si C multiplioit A & B. Or C multipliant A & B, les deux produits D & E, seront l'un à l'autre comme A est à B, par la 17. p. 7. ce qui estoit à prouver.

SCHOLIE.

Clavius a accommodé (après Campanus) tant ceste propo. que la precedente à tant de nombres qu'on voudra; en ceste force.

Si vn nombre multiplie tant de nombres qu'on voudra, ou quelconques nombres en multipliant quelque autre; les produits seront entr'eux en mêmes raisons que les multipliez ou multiplians.

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou estant multiplié par iceux, soient produits les nombres E, F, G. Je dis que E, F, G, sont entr'eux

A...3		
B..2	C...3	D...4
E.....6	F.....9	G.....12

comme

comme les nombres multipliez ou multipliers B, C, D; c'est à dire: que
 comme B est à C, ainsi E à F; & comme C à D, ainsi F à G. Car puis
 que E, F sont produits de A multipliant B, C, ou de B, C, multipliez
 par A, comme B sera à C, ainsi E sera à F par la 17. ou 18. p. 7. Sem-
 blablement pource que F, G, sont produits de A en C, D, ou de C, D
 par A, aussi comme C sera à D, ainsi F à G, & ainsi des autres.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres sont proportionnaux; le
 produit du premier & quart, sera egal au pro-
 duit du second & tiers. Et si le produit du
 premier & quart, est egal au produit du second
 & tiers; iceux quatre nombres sont propor-
 tionnaux.

Soient 4 nombres proportionnaux
 A, B, C, D, & que le premier A multi-
 plié par le dernier D produise E, & le
 second B par le tiers C produise F. Je
 dis que E & F sont égaux.

A 6 B 4
 C ... 3 D .. 2
 E 12
 F 12
 G 18

Qu'ainsi ne soit. Soit multiplié A par C, & le produit soit
 G: d'autant que A multiplié par C & D, produit G & E, il y
 aura telle raison de G à E, que de C à D, par la 18. p. 7. Pareil-
 lément d'autant que C multipliant A & B, produit G & F, il
 y aura telle raison de G à F, que de A à B, par la 17. p. 7. ou de
 C à D, qui sont en mesme raison que A & B. Parquoy G est à
 E, & G à F en mesme raison que C à D, par le lemme de la
 14. p. 7. cōme G sera à E, ainsi G sera à F; parquoy G aura mesme
 raison à E qu'à F; & partant E & F seront nombres égaux,
 ainsi que nous auons dit en la 20. def.

Pour la seconde partie, soit E produit de A multiplié par
 D, egal à F, produit de B multiplié par C: Je dis que A est à B
 comme C est à D.

Car si G, est produit de A multiplié par C; E & F nōbres
 égaux auront mesme raison à G, comme nous auons dit en la
 20. def. Mais il y a telle raison de G à E, comme de C à D, par
 la 18. p. 7. & telle raison de G à F, comme de A à B, par la 17.
 p. 7. & partant par le lemme de la 14. p. 7. A sera à B, comme

C à D : ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si trois nombres sont proportionnaux, le produit des extremes est egal au produit du milieu : & si le produit des extremes est egal à celuy du milieu ; iceux trois nombres seront proportionnaux.

Ceste proposition est aisée à demonstter : car en posant le nombre du milieu deux fois, afin qu'il y ait 4. nombres proportionnaux, desquels le second & tiers soient egaux ; par la précédente le produit du premier & quart, sera egal au produit du second & tiers, c'est à dire au produit du second par soy mesme &c.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison avec iceux, mesurent egale-
ment les nombres qui ont la mesme raison,
sçavoir le plus grãd, le plus grand, & le plus
petit, le plus petit.

Soient deux nombres les plus pe-
tits en leur raison A & B, & deux au-
tres nombres plus grands C & D en mesme raison qu'iceux
A & B : Je dis que de mesme façon que A mesure C, aussi B
mesure D.

A...3 B....4
C.....6 D 8

Car puisque iceux A, B, C, D, sont proportionnaux, ils le
seront aussi en changeant par la 13. p. 7. A sera donc à C, com-
me B à D, & A & B plus petits que C & D, & par la 20. d. 7. serot
mesme partie ou parties d'iceux C. & D. Or ils ne peuvent
estre parties : car ils ne seroiēt les plus petits nombres de leur
raison, comme il est aisé de prouver par la 20. def. & 13. p. 7.

Donc A est mesure partié de C, que B de D: & partant A mesure C, autant de fois que B mesure D: ce qu'il falloit démonstrer.

THEO. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'un costé, & autant d'un autre, lesquels pris de deux en deux soient en mesme raison, la proportion estant troublée; en raison egale, ils seront proportionnaux.

$$\begin{array}{ll} A \dots 4 & D \dots\dots\dots 12 \\ B \dots 3 & E \dots\dots\dots 9 \\ C \dots 2 & F \dots\dots\dots 6 \end{array}$$

Soient trois nombres d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & qu'en proportion troublée A soit à B, comme E à F, & B à C, comme D à E: Je dis qu'en raison egale A sera à C, comme D à F.

Car A estant à B, comme E à F, le produit de A multiplié par F, sera egal au produit de B multiplié par E, par la 19. p. 7. Item B estant à C, comme D à E, le mesme produit de B multiplié par E, sera egal au produit de C multiplié par D, par la mesme prop. & partant le produit de A par F, sera egal au produit de C par D, & par la 19. p. 7. il y aura telle raison de A à C, comme de D à F: ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

D'autant que de six moyens d'argumenter es proportions, lesquels Euclide a expliqué en grandeur, & démontré au 5. livre, il en démontre en celuy cy seulement deux en nombres. Il ne sera hors de propos de démonstrer aussi en nombres les 4. autres moyens, comme on fait plusieurs Interpretes.

I.

Si quatre nombres sont proportionnaux; par raison inuerse, ou en changeant, ils seront aussi proportionnaux.

Soit A à B comme C. à D. Je dis qu'en changeans comme B à A, ainsi D à C. Car

$$\begin{array}{ll} A \dots\dots 6. & C \dots\dots 3 \\ B \dots\dots 4 & D \dots\dots 2 \\ & P \quad ij \end{array}$$

puis que comme A à B , ainsi C à D , en permutant par la 13. p. 7. comme A sera à C , ainsi B à D . Derechef puis que B est à D comme A à C , par la mesme prop. B sera à A comme D à C . Ce qui estoit proposé.

II.

Si les nombres composez sont proportionnaux; iceux diuisez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à CB comme DE à FE . Je dis $A.....6C...;B$
qu'aussi en diuisant comme AC à CB , ainsi $D...4F..2E$
 DF à FE . Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE : en permutant par la 13. p. 7. comme le tout AB au tout DE , ainsi le retranché CB au retranché FE : & partant par la 11. p. 7. comme le tout AB est au tout DE , ainsi le reste AC sera au reste DF : c'est à dire AC à DF , comme CB à FE : donc en permutant comme AC sera à CB , ainsi DF sera à FE . Ce qui estoit proposé.

Par la mesme maniere nous demonstrerons comme au liure 5. la diuision conuerse & contraire de raison. Car soit premierement comme AB à CB , ainsi DE à FE . Je dis que par diuision conuerse de raison, comme CB à AC , ainsi FE à DF . Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE : en diuisant comme AC sera à CB , ainsi DF à FE : & en changeant comme CB sera à AC , ainsi FE sera à DF .

Soit maintenant comme AC à AB , ainsi DF à DE . Je dis par diuision contraire de raison, que comme AC est à CB , ainsi DF à FE . Car puis que comme AC à AB , ainsi DF à DE : en changeant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF . Donc en diuisant comme CB à AC , ainsi FE à DF : & en changeant comme AC sera à CB , ainsi DF à FE . Ce qui estoit proposé.

III.

Si les nombres diuisez sont proportionnaux: iceux composez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à BC , comme DE à EF . Je dis qu'en $A.....6B...;C$
composant comme AC est à BC , ainsi DF à EF . $D...4E..2F$
Car puis que comme AB à BC , ainsi DE à EF : en permutant par la 13. p. 7. comme AB à DE , ainsi BC à EF : & partant par la 12. p. 7. comme AB, BC ensemble à DE, EF ensemble, c'est à dire la toute AC à la toute DF , comme BC à EF : & en permutant par la 13. p. 7. comme AC à BC , ainsi DF à EF . Ce qui estoit proposé.

Semblablement nous demonstrerons i. y comme au 5. liure la composition conuerse & contraire de raison. Car soit premierement comme AB à BC , ainsi DE à EF . Je dis par composition conuerse de raison, que comme AC est à AB , ainsi DF à DE . Car veu que AB est à BC , comme DE à EF : en changeant comme BC sera à AB , ainsi EF à DE : & en composant come AC sera à AB , ainsi DF sera à DE .

Maintenant soit derech. f AB a BC, comme DE a EF. Je dis que par composition contraire de raison comme AB est a AC, ainsi DE a DF : car puisque comme AB a BC, ainsi DE a EF : en changeant comme BC sera a AB, ainsi EF a DE. Donc en composant comme AC a AB, ainsi DF a DE, & en changeant comme AB sera a AC, ainsi DE a DF.

IIII.

Si les nombres composez sont proportionnaux ; ils le seront aussi par conuersion de raison.

Soit comme AB a CB, ainsi DE a FE. Je dis que par conuersion de raison, comme AB est a AC, ainsi DE a DF. Car puis que comme AB a CB, ainsi DE a FE : en permutant par la 13. p. 7. comme le tout AB sera au tout DE, ainsi le retranché CB sera au retranché FE : & partant par la 11. p. 7. comme le tout AB au tout DE, ainsi le reste AC, au reste DF. Donc en permutant comme AB sera a AC, ainsi DE a DF. ce qui estoit proposé.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec iceux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B. Je dis qu'ils sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison qu'eux.

Car s'il n'est ainsi, soient C & D plus petits en la même raison, s'il est possible, par la 21. p. 7. ils mesureront A & B, l'un comme l'autre : qu'ils les mesurent donc par le nombre E. Donc E sera commune mesure entré A & B : ainsi ils ne seroient point premiers entr'eux, mais composez contre l'hypothese. A & B sont donc les plus petits de tous ceux qui sont en même raison qu'eux.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont vne même raison, sont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la même raison : Je dis qu'ils sont premiers entr'eux.

A 6 D ...

C ..

B 5 E ...

Autremēt s'ils ne sont premiers, que C les mesure tous deux s'il est possible, sçavoir A autant de fois qu'il y a d'vnitez en D ; & B autant de fois qu'il y a d'vnitez en E. Veu donc que C mesure A par les vnitez qui sont en D ; & B par les vnitez qui sont en E ; C multipliant D & E, produira A & B par la 9. com. sent. Parquoy par la 17. p. 7. il y aura même raison de A & B que de D à E : & partant puis que D & E sont parties d'iceux A & B, ils sont moindres : ainsi A & B ne seront pas les plus petits nombres de tous ceux qui ont la même raison : ce qui est contre nostre hypothese. A & B sont donc nombres premiers entr'eux.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux ; celui qui en mesurera l'un sera premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, l'un ou l'autre desquels, sçavoir A, soit mesuré par le nombre C. Je dis que C est premier à l'autre B.

A 6 B 5

C ... 3 D ... 2

Autrement si B & C ne sont premiers entr'eux, que D les mesure tous deux, s'il est possible. Veu donc que D mesure C, & C mesure A, par la 11. com. sent. D mesurera aussi A : mais il mesure pareillement B. Donc A & B ne sont premiers entr'eux, contre l'hypothese. C est donc premier à B. Si quelque nōbre mesure B, on prouvera en la même manière qu'il sera premier à l'autre A.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre, le produit des deux sera premier à cest autre.

Soient deux nombres A & B, tous deux premiers à C; & que A multiplié par B produise D. Je dis que D est premier à C.

A...2 B...3 C...5

D...6 E...2 F...3

Autrement si D & C ne sont premiers entr'eux, qu'ils soient composés, & que E les mesure tous deux, sçavoir D par le nombre F: Donc E multipliant F, produit D par la 9. com. sent. cōme aussi A par B: ainsi A, E, F, B, seront proportionaux par la 19. p. 7. Item A & C sont premiers: donc E mesurant C sera premier à A par la 25. p. 7. & par la 13. p. 7. A & E estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison: ainsi ils mesureront F & B qui sont en la même raison, sçavoir A mesurera F, & E mesurera B par la 21. p. 7. Mais il mesure aussi C: B & C ne seroient donc pas premiers, contred' hypothese. D sera donc premier à C.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le produit de l'un d'iceux multiplié par soy, est premier au restant.

Soient deux nombres premiers A, & B, & que l'un ou l'autre d'iceux sçavoir est A, multiplié par soy produise C. Je dis que B, & C sont premiers entr'eux.

Car si on prend D, egal à A; B sera aussi premier à D. Ainsi A & D estans premiers à B, par la 16. p. 7. A multiplié par D, c'est à dire par soy-mesme, produira C premier au même B. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres sont premiers à deux autres; (l'un & l'autre à l'un & à l'autre) leurs produits seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres A, & B premiers à deux autres C, & D, & que E soit le produit de A mul-

A...2 B...4

C...3 D...5

E...8 F...15

P. iij

multiplié par B, & F produit de C multiplié par D: Je dis que E, & F sont premiers entr'eux.

Car A, & B estans premiers à C, leur produit E sera aussi premier au mesme C: par la 26. p. 7. par le mesme discours E sera aussi premier à D; ainsi C & D estans premiers à E, leur produit F sera aussi premier à E par la 26. p. 7.

THEOR. 2.7 PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux sont multipliez chascun par soy; leurs produits seront premiers entr'eux: Et si iceux deux produits sont encore multipliez par les nombres premiers proposez au commencement; les produits sont encores premiers entr'eux, & toujours enuiron les extremes aduiendra la mesme chose,

A...2	B...3
C....4	D.....9
E.....8	F.....27
G 16	H 81.

Soient deux nombres premiers entr'eux A, & B, & que A multiplié par soy mesme produise C, mais B multiplié par soy produise D. Je dis que C, & D, seront premiers entr'eux. Item si A multipliant C produit E; & B multipliant D produit F. Je dis que E & F seront premiers entr'eux.

Car par la 27. p. 7. A & B estans premiers, C produit de A multiplié par soy, sera premier à B restant: par la mesme raison B & C estans premiers entr'eux, D sera aussi premier à C. De rechef puis que A & B sont premiers, par la 27. p. 7. C sera aussi premier à B; & D à A: Mais il a esté demonstté que C est aussi premier à D: parquoy l'un & l'autre nōbre A, C, sera premier à l'un & à l'autre nombre B, D; & partant par la 28. p. 7. E produit de A en C sera premier à F produit de B, par D.

Que si encore A multipliant E produit G; & B multipliant F produit H: G & H seront aussi premiers entr'eux. Car puis

que A & C sont premiers à B, leur produit E sera aussi premier à B par la 16. p. 7. Par la mesme raison F sera aussi premier à A: Ainsi les deux A, E, seront premiers aux deux B, F, sçavoir l'un & l'autre, à l'un & à l'autre; & partant par la 18. p. 7. G produit de A en E, sera aussi premier à H produit de B en F, & ainsi à l'infiny.

THEOR. 28. PROPO. XXX.

Si deux nombres premiers entr'eux sont adioustez ensemble; le produit sera premier à tous deux; & si le produit est premier à iceux deux nombres; ils seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux AB, & BC. Je dis que le composé des deux AC, sera premier à tous deux.

Car s'ils ne sont premiers, soit D leur commune mesure, si est possible: si dōc

$$A...3 \quad B...4 \quad C...2$$

D mesure le tout AC, & la partie AB; il mesurera aussi le reste BC, par la 12. com. sent. ainsi AB, & BC ne seroient premiers entr'eux contre l'hypothese.

Secondement, si le tout AC est premier à AB, & à BC. Je dis que AB, & BC seront premiers entr'eux. Autrement que D les mesure s'ils ne sont premiers; il mesurera aussi le composé des deux AC, par la 10. com. sent. ainsi AC ne seroit premier à AB, & BC, ce qui est contre l'hypothese. AB & BC sōt donc premiers entr'eux.

C O R O L L A I R E.

Il s'ensuit de cecy que si un nombre composé de deux, est premier à l'un d'iceux, il sera aussi premier à l'autre. Car si AC est premier à AB; A & BC seront premiers entr'eux par la seconde partie de ceste propo. Donc aussi AC sera premier à BC par la premiere partie de la mesme propo. qui a esté proposée.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Tout nombre premier est premier à tout autre qu'il ne mesure pas.

Cette proposition est aisée à démonstrer : car s'ils n'estoient premiers, ils auroient vne commune mesure autre que l'vnité ; ainsi pas vn des deux ne seroient premiers contre l'hypothese.

THEO. 30. PROP. XXXII.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, & que quelque nombre premier mesure leur produict ; il mesurera aussi l'un d'iceux deux nombres.

Soient deux nombres A, & B, de la multiplication desquels soit produict C, & que D nombre premier mesure iceluy C.

A 4 B 6.

C 24 D... 3 E 8. 3

Je dis qu'il mesurera aussi l'un ou l'autre de A ou B.

Autrement s'il ne mesure l'un ny l'autre, qu'il mesure C par le nombre E: Si donc D ne mesure A, par la 31. p. 7. il sera premier à iceluy, & par la 23. p. 7. ils seront les plus petits de leur raison. Mais pour autant que D par E fait C, aussi bien que A multiplié par B, par la 19. p. 7. A sera à D, comme E, à B, par la 21. p. 7. D mesurera B; ce qui estoit à prouver.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par

quelque nombre premier.

Soit le nombre composé A. Je dis qu'il sera mesuré par quelque nombre premier.

A.....8

B....4

C...2

Car puis qu'il est composé, il sera mesuré de quelque nombre par la 13. p. 7. & soit de B, lequel sera composé ou non : s'il est premier, la prop. est manifeste : mais s'il est composé, il sera mesuré par vn autre nombre, & soit C, lequel sera premier ou non : s'il est premier, puis qu'il mesure B; & B mesure A, aussi C mesurera A par la 11. com. sent. Mais si C est composé, il sera mesuré par quelque autre nombre : Et pource qu'un nombre ne se diminue infiniemēt, nous viendrons finablement à quelque nombre que nul autre ne mesurera ; & partant à vn nombre premier, lequel mesurāt tous les precedents, mesurera aussi le composé A. Ce qu'il fa-
loit prouver.

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre est premier, ou bien mesuré par quelque nombre premier.

Ceste demōstration est euidente: car si vn nombre n'est premier, il est composé, & par la precedente tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier.

PROB. 3. PROP. XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra estans donnez, trouuer les plus petits de tous ceux qui auront mesme raison.

Soient donnez tant de nombres qu'on voudra A, B, C : & faut trouuer les plus petits en la mesme raison.

A.....6 B....4 C.....8

D...2

E...3 F...2 G....4

H...2 I... K... L...

Si A, B, C sont premiers entr'eux, on a ce que l'on cherche par la 23. p. 7. s'ils sont composez, soit trouué D plus grande

commune mesure d'iceux A, B, C, par la 3. p. 7. laquelle mesure A selon E; B selon F, & C selon G. Je dis que E, F & G sont les plus petits nombres qui soient en la raison de A, B, & C.

Car il est evident qu'iceux E, F, G sont és mesmes raisons que A, B, C, d'autant que D mesurant iceux A, B, C par les nombres E, F, G; D multipliant iceux E, F, G, seront produits A, B, C, par la 9. com. sent. & par ce que nous auons demonstré a la 18. p. 7. E, F, G, auront la mesme raison que les multipliez A, B, C. Et qu'ils soient les plus petits, on le démontrera ainsi. S'ils ne sont tels, soient H, I, K les plus petits nombres ayans mesme raison qu'iceux A, B, C: ils les mesureront donc également par la 21. p. 7. & soit par le nombre L, ce qu'estant, par la 9. com. sent. L multipliant H, I, K, seront produits les nombres A, B, C. Veu d'oc que D multipliât E, fait A; & L multipliât H, fait le mesme A; par la 19. p. 7. il y aura telle raison de D à L, que de H à E: mais H est moindre que E: donc D sera aussi moindre que L. Et puis que H, I, K mesurât A, B, C, par L; L mesurera aussi iceux A, B, C, par la 8. cō. sent. & ainsi D ne sera la plus grande commune mesure d'iceux A, B, C: ce qui est contre l'hypothese. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G, qui soient en mesme raison, que les proposez A, B, C.

COROLLAIRE.

Il appert icy que la plus grande commune mesure de quelconques nombres, mesure iceux par les nombres qui sont les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison qu'iceux proposez.

SCHOLIE.

Par ces choses appert le moyen de trouuer les deux plus petits nombres qui ont la mesme raison, que tant de nombres qu'on voudra donner continuellement proportionaux. Comme si on propose les nombres A, B, C, continuellement proport. nous trouuerons les deux moindres en la mesme raison, si par ce prob. nous prenons E & F en la mesme raison des deux A & B, c'est à sçauoir ces nombres là, par lesquels D plus grande commune mesure d'iceux A & B, mesure iceux. Car par le corol. cy dessus, E & F seront les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison qu: A à B: c'est à dire en la raison des continuellement proportionaux A, B, C.

PROBL. 4. PROP. XXXVI.

Trouuer le plus petit nombre que peuuet mesurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & B : il faut trouuer le plus petit n^{bre} mesuré par iceux.

Si le plus petit mesure le plus grand, iceluy plus grand sera le nombre que nous cherch^{os} ;

que si l'un ne mesure l'autre, ou A & B seront premiers entre eux, ou non ; si premiers, soit C produit de A, multiplié par B. Je dis que C est le plus petit nombre mesuré par A, & par B. Car par la 7. com. sent. il est euident que C sera mesuré par l'un & par l'autre ; & s'il n'est le moindre nombre mesuré par iceux A, B ; en soit un autre plus petit D, s'il est possible, lequel A mesure selon le nombre E ; & B selon le nombre F. Ce qu'estant, D sera produit tant de A multiplié par E, que de B par F par la neuuesme commune sentence, & partant par la 19. p. 7. A sera à B cōme F à E. Item A, & B, estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison par la 23. p. 7. & A mesurera F par la 21. p. 7. & d'autant que B multipliant A produict C, & multipliant F produict D, il y aura telle raison de C à D, que de A à F, par la 17. p. 7. Mais nous auons monstré que A mesureroit F. donc C mesurera aussi D, sçauoir le plus grand mesurera le plus petit, ce qui est impossible. C estoit donc le moindre nombre que peuuent mesurer A & B.

Soient maintenant les deux nombres A, & B composez, & par la 35. p. 7. soient trouuez C, & D les plus petits nombres de la mesme raison ; par la 19. p. 7. E produit de A multiplié par D, sera egal au produict de B multiplié par C : ainsi E sera mesuré par B, & par A ; & par le mesme discours de la precedente demonstration, on monstrera qu'il est le plus petit nombre mesuré par A, & par B.

THEOR. 33. PROP. XXXVII.

Si deux nombres mesurent vn autre nombre : le plus petit qu'ils mesurent, mesurera aussi iceluy autre,

Soient deux nombrés A, & B qui mesurent vn autre CD, & que le plus petit nombre qu'ils mesurent soit E. Je dis que E mesurera aussi CD.

A...2 B...3
C.....7 F.....5 D
E.....6

Autrement, si E ne mesure CD; Après auoir mesuré CF, qu'il laisse FD plus petit que soy: A & B mesurans E, ils mesureront aussi CF par la 11. com. sen. Mais ils mesureront le tout CD par la 12. com. sen. ils mesureront donc aussi le reste FD plus petit que C; ce qui est impossible, estant le plus petit qu'ils mesurent. Parquoy E mesurera CD: ce qu'il falloit prouuer.

PROB. 5. PROP. xxxviii

Trouuer le plus petit nombre que peuuent mesurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez A, B, C, il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils mesurent.

B...2 B...3 C.....6
D.....8
E....

Soit trouué D plus petit nombre que peuuent mesurer A & B, par la 16. p. 7. Or C mesure aussi D, ou il ne le mesurera pas: s'il le mesure: ie dis qu'il est aussi le plus petit qu'iceux A, B, C peuuent mesurer: car s'il ne l'est, en soit quelque autre plus petite E, s'il est possible, lequel tous les trois A, B, C mesurent. D'autant que A & B mesurent E moindre que D, iceluy D, ne sera le moindre que A & B mesurent, ce qui est contre l'hypothese. D est donc le moindre nombre que peuuent mesurer les nombres proposez A, B C.

Que si D n'est aussi mesuré par C: par la mesme 36. p. 7. soit trouué E plus petit nombre mesuré par C & D: Je dis que E sera le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

A...2 B...3 C...4
D.....6
E.....12
F.....8

Car premierement E est mesuré par A, B, C: d'autant que C, & D, le mesurent; & A & B mesurant D, par la 11. com. sen. ils mesureront aussi E mesuré par D. Que si E n'est le plus petit mesuré par A, B, C, soit F plus petit, s'il est possible: A & B donc mesurant F; D le plus petit mesuré par eux, mesurera aussi F par la 37. p. 7. Mais C mesure aussi F; (car A, B, & C le mesurent) donc C, & D mesureront F. Et par la 37. p. 7. E plus petit mesuré par C & D, mesurera aussi F; le plus grand vn

plus petit ce qui est impossible. Donc E estoit le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

C O R O L L A I R E.

De ocy est manifeste, que si trois nombres en mesurent quelque autre; le plus petit qu'ils mesureront, mesurera aussi cest autre. Car il a esté demonstrez que A, B, C, mesurant F; aussi E le plus petit mesuré par A, B, C, mesure le mesme nombre F.

S C H O L I E.

Par mesme raison estans donnez plus de trois nombres, nous trouverons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si 4. nombres sont donnez, il faudra trouver le moindre que trois mesurent: si 5. il faudra trouver le plus petit que 4. mesurent &c. procedant au reste tout ainsi qu'il a esté dict de trois nombres.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si vn nombre mesure vn autre nombre; le mesuré aura vne partie denomnee par le mesurant:

Vnité.

Soit le nombre A, lequel mesure le A...3 B.....6 C...2 nombre B. Je dis que iceluy B contiendra vne partie denomnee par A.

Qu'ainsi ne soit; que A mesure B selon C, c'est à dire autant de fois qu'il y a d'vnitez en C; par la 15. p. 7. C mesurera B autant de fois, que l'vnité mesure A; & C sera telle partie de B que l'vnité de A. Mais l'vnité est vne partie de A, denomnee par iceluy A, comme nous auons dict en la 2. d. 7. donc aussi C sera vne partie de B denomnee par A.

THEOR. 35. PROP. XL.

Si vn nombre a vne partie quelle elle soit; le nombre nommant ceste partie le mesurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B denommée par le nombre C. Je dis que C mesure A. A.....12
B...3 C....4

Car puis que B est partie dénommée par C; & l'unité est partie de C, dénommée par le mesme C; comme l'unité mesure C, ainsi B mesure A: & par la 5. p. 7. en changeant comme l'unité mesurera B, ainsi C mesurera A.

PROB. 6. PROP. XLI.

Trouver le plus petit nombre qui ayt les parties donnees.

Soient les parties données A, B, C; A deuxiesme D : 2
il faut trouver le plus petit nombre qui B tiers E : 3
ait icelles parties. C quart. F : 4

Soient pris les trois nombres, D, E, F, G.....12
denommés par icelles parties A, B, C; H.....
& par la 38. p. 7. soit trouvé G. le plus petit nombre que peuvent mesurer D, E, F. Je dis que D contient les parties A, B, C.

Car puis que D, E, F mesurent G; par la 39. p. 7. G aura les parties dénommées par D, E, F, c'est à dire les parties A, B, C. Je dis aussi que G est le plus petit nombre qui ait icelles parties. Car s'il ne l'est, soit H plus petit, s'il est possible, ayant icelles parties. Et H sera mesuré par les nombres D, E, F dénommés par les parties A, B, C par la 40. p. 7. & partant puis que H est moindre que G; iceluy nombre G mesurera le plus petit que peuvent mesurer les nombres D, E, F, contre l'hypothese. G est donc le moindre nombre ayant les parties données A, B, C.

Fin du septiesme Element.

HVICTIESME



E L E M E N T H V I C T I E S M E .

T H E O . I . P R O P . I .

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux , & les extremes sont premiers entr'eux ; ils seront les plus petits de leur raison.



SOIENT A . 4 . B . 6 . C . 9 .
trois nō- D . 3 . E . 5 . F . 8 .
bres continuellement proportionnaux
A, B, C, & que les extremes A, & C, soient
premiers entr'eux: Je dis que A, B, C, sont
les plus petits qui soient en la mesme raison.

Autrement soient D, E, F, plus petits en la mesme raison, s'il est possible. En raison egale, D sera à F, comme A est à C par la 14. p. 7. & par ce que A, & C sont premiers entr'eux, ils seront les plus petits de leur raison, par la 21. p. 7. & par la 21. p. 7. ils mesureront D, & F: ce qui est impossible, pour estre plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, estoient les plus petits en la mesme raison.

P R O B . I . P R O P . II .

Trouuer tant de nombres qu'on voudra

continuellement proportionnaux, les plus petits en la raison donnée.

Soient les deux nombres A, & B les plus petits de tous ceux qui ont même raison: il faut trouver le requis.

F. 8.

C. 4.

A. 2.

G. 12.

D. 6.

B. 3.

H. 18.

E. 9.

I. 27.

Que A multiplié par soy produise C; A par B produise D; B par soy produise E. Je dis premièrement que C, D, E, sont continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Car puis que A multipliat A & B a produit C & D; comme A sera à B, ainsi C à D par la 17. p. 7. De rechef, puis que B multipliant A & B produit D & E, comme A sera à B, ainsi D sera à E: Parquoy C, D, E, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits d'icelle raison donnée. Car parce que par la 24. p. 7. A & B sont premiers, aussi par la 29. p. 7. C, & E seront premiers: & par la 1. p. 8. C, D, E, seront les plus petits en la raison donnée de A à B.

Que si on en vouloit quatre. Que A multiplié par C produise F; A par D produise G; B par D produise H; B par E produise I: Je dis que F, G, H, I sont les nombres requis. Car par le même discours de la 17. & 18. p. 7. les nombres seront continuellement proportionnaux, & par la 24. & 29. p. 7. F & I seront premiers entr'eux: & par la 1. p. 8. F, G, H, I, seront les plus petits qui ayent la même raison qu'iceux extremes F & I. Et en ceste façon on en trouvera tant que l'on voudra.

COROLLAIRE.

Il résulte de cecy que trois nombres continuellement proportionnaux, estans les plus petits de leur raison; les extremes seront quarrés: s'il y en a quatre, qu'iceux extremes seront Cubes. Car des trois C, D, E, les extremes C, & E, ont esté produits de A & B multipliés par eux mêmes, & des 4. F, G, H, I, les extremes F & I ont esté produits de la multiplication de A & B par leurs quarrés C & E.

Il résulte encore que les extremes des nombres continuellement proportionnaux trouvez selon ceste prop. sont premiers entr'eux. Car il a esté démontré par les 24 & 29. p. 7. que les extremes C, E, & F, I, sont premiers entr'eux.

THEOR. 2. PROP. III.

Si tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, sont les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison: les extremes seront premiers entr'eux.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison, A, B, C, D: Je dis que les extremes A, & D sont premiers entr'eux.

A. 8.		L. 8.
		H. 4.
B. 12.	F. 2.	M. 12.
	I. 6.	
C. 18.	G. 3.	N. 18.
	K. 9.	

Car soient trouvez par la 35. D. 27. O. 27. p. 7. les plus petits qui soient en la raison de A à B, sçavoir F, & G: ils serōt premiers entr'eux, par la 23. p. 7. & cōme il a esté enseigné en la preced. soient trouvez 4. nōbres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de F à G, sçavoir premierement les trois H, I, K. Puis apres les quatre L, M, N, O Iceux estās les plus petits en la raison de F à G, ils seront egaux aux quatre A, B, C, D, qui sont aussi les plus petits en la mesme raison. Et comme les extremes L, & O sont premiers entr'eux par le corol. de la preced. seront aussi premiers entr'eux A, & D. Ce qu'il falloit prouver.

PROB. 2. PROP. III.

Estans données tant de raisons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raisons, trouver tant de nombres qu'on voudra les plus petits continuellement proportionnaux selon les raisons donnees.

Soient donnees les deux raisons de A à B, & de C à D, aux

plus petits termes d'icelles : il faut trou- A. 2.
uer trois nombres en continuelle pro- G. 8. L. 7.
portion, les plus petits de ceux qui sont B. 3.
selon les raisons donnees. F. 12. M. 11.

Soit trouué F le plus petit nombre qui C. 4.
soit mesuré par B, & par C, par la 36. p. 7. H. 15. N. 13.
en apres soit trouué G, autant de fois D. 5.
mesuré par A que F, par B. Pareillement H autant de fois me-
suré par D que F par C. Je dis que les trois nombres G, F, H,
sont les nombres requis.

Car il est euident qu'ils sont continuellement proportiō-
naux en la raison donnee; d'autant que A mesure autant de
fois G, que B mesure F; & par consequent A & B multiplians
vn mesme nombre (sçauoir celuy par lequel ils mesurent G
& F) ont produict G & F : par la 18. p. 7. G est à F, en mesme
raison que A à B. Et par mesme discours F sera à H, comme
C à D.

On prouuera aussi qu'ils sont les plus petits, selon les rai-
sons donnees : d'autant que s'il n'est ainsi, en soient trouuez
de plus petits L, M, N, s'il est possible, & qui respondent aux
raisons donnees comme les trois G, F, H: il est euident que B
& C doiuent mesurer M, à cause des semblables raisons, par
la 21. p. 7. Mais F est le plus petit nombre mesuré par B & par
C, & par la 37. p. 7. F mesurera M, sçauoir est, le plus grand, le
plus petit : ce qui est impossible. Partant G, F, H, estoient les
plus petits selon les raisons donnees.

Que si trois raisons estoient A. 2.
donnees aux plus petits termes A I. 8. M. 16.
à B; C à D, & F à G, selon lesquel- B. 3.
les il fallut trouuer quatre nom- H 12. N. 24.
bres tels que requiert la proposi- C. 4.
tion : on procedera en ceste sorte. K. 15. O. 30.

Soient trouuez les trois nom- D. 5.
bres I, H, K, cōmedessus: ce faict ou F. 6.
F mesurera K, ou non. S'il le mesu- L. P. 35.
roit, faudroit prendre L autant de G. 7.
fois mesuré par G, que I par F; & par la precedente demon-
stration, il est euident qu'on auroit satisfait. Que si F ne me-
sure K, soit trouué O le plus petit nombre mesuré par F, & par
K, par la 36. p. 7. Et que G mesure autant de fois P, que F me-
sure O. Item que comme K mesure O, ainsi H mesure N; &
I mesure M. Je dis que M, N, O, P sont les quatre nombres
requis.

La demonstration se fera de mesme que la precedente.
En la mesme maniere sera procedé si 4. ou d'avantage de
raisons sont donnees aux plus petits termes.

THEOR. 3. PROP. V.

Les nombres plans sont l'un à l'autre en raison composee de leurs costez.

Soient les deux nombres plans A, & B,
les costez de A, soient C, & D, & les costez
de B, soient E, & F. Je dis que le plan
A est au plan B, en raison composee de
C à E, & de D à F.

C. 3.
A. 12.
D. 4.
G. 8.
E. 2.
B. 18.
F. 9.

Qu'il ne soit ainsi. Que D multiplié
par E produise G. Donc D multipliant
C & E, produira A & G en mesme raison que C & E, par la 17.
p. 7. Et par mesme raison E multipliant D & F, produira G &
B en mesme raison que D & F : ainsi la raison de A à G, & de
G à B, sera comme de C à E, & de D à F. Et par la 5. d. 6. la raison
de A à B estant composee de A à G, & de G à B, la raison
du nombre plan A au nombre plan B, sera composee de la raison
des costez C à E, & D à F : ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 4. PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier ne mesure le second, ny pas un autre ne mesurera pas un autre.

Soient tant de nombres que
l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D; Et que le premier A, ne mesure point le second B. Je dis que pas un autre n'en mesurera pas un autre.

A. 8. B. 12. C. 18. D 27.
E. 4. F. 6. G. 9.

Car premierement, comme A ne mesure point B, ainsi B

ne mesurera C; ny C ne mesurera D, d'autant qu'ils sont en mesme raison: que si on vouloit dire qu'en passant quelqu'un, les extremes se pourroient mesurer, comme si A pouuoit mesurer C, soient trouuez trois nombres E, F, G, les plus petits en la raison de A, B, C par la 37 p. 7. ainsi A estant à B comme E à F, & comme B à C, ainsi F à G: en raison egale A sera à C comme E à G, par la 14. p. 7. & comme E ne mesure point G, estans iceux premiers par la 3. p. 8. aussi A ne mesurera point C. Par le mesme discours on prouuera de tous les autres.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

* Soient tant de nombres qu'on A. 3. B. 9. C. 12. D. 24. voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, & que le premier A mesure le dernier D. Je dis qu'il mesurera aussi le second B.

Car par la precedente, si A ne mesuroit B, aussi pas un autre ne mesurerait pas un autre, & par consequent A ne mesurerait pas D, contre l'hypothese. A mesurera donc B: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux; il en tombera autant entre deux autres estans en la mesme raison.

Soient les nombres A & B, entre lesquels tombent C & D continuellement proportionnaux: & qu'il y ait telle raison de E à F, que de A à B. Je dis qu'entre E & F se trouveront autant de nombres moyens continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

A 3. C 9. D 27. B 81.
G 1. H 3. I 9. K 27.
E 2. L 6. M 18. F 54.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouvez par la 2. p. 8. les quatre nombres, G, H, I, K, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A, B, C: en raison égale comme A sera à D, ou E à F (car c'est la mesme raison) ainsi G à K par la 14. p. 7. Mais G & K sôt premiers entr'eux par la 3. p. 8. & par la 21. p. 7. ils mesureront également E & F. Que si autât de fois que G & K mesureront E & F; H & I mesurent autres nombres L & M, tellement que les nombres G, H, I, K, mesurent également les nombres E, L, M, F, par la 9. com. sent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, produisent iceux E, L, M, F, lesquels seront entr'eux comme G, H, I, K, ainsi que nous auons démontré à la 18. p. 7. Mais G, H, I, K sont continuellement proportionnaux: donc aussi E, L, M, F, seront continuellement prop. & partant puis que la multitude E, L, M, F, est égale à la multitude A, C, D, B. il tombera autant de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B: ce qu'il falloit prouuer.

S C H O L I E.

De ceste demonstration appert non seulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E & F, qu'entre A & B, mais aussi, que la proportion des nombres E, L, M, F, est la mesme que des nombres A, C, D, B. Car il a esté démontré que la proportion de E, L, M, F, est la mesme que celle des nombres G, H, I, K: Mais iceux sont par la construction en la mesme prop. que A, C, D, B. donc aussi E, L, M, F, sont en mesme proportion que A, C, D, B.

Il appert aussi de ce theoreme, qu'entre nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne peut tomber un nombre moyen proportionnel. Car puis que la raison double, es moindres nombres, est trouuée entre le binaire & l'unité; mais la superparticuliere, entre nombres differens seulement de l'unité; & la superbipartiente, entre les nombres, desquels la difference est le binaire: si entre deux nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, tombe un moyen prop. il en tombera pareillement un (par ce theor.) entre le binaire & l'unité, qu'entre les nombres differens de la seule unité, ou du binaire; c'est à sçauoir entre les plus petits nombres qui ont la mesme raison que ceux-là; ce qui est impossible. Car il est tout euident qu'entre le binaire & l'unité, ny entre 2. nombres differens seulement de l'unité, ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens seulement du binaire, tombe seulement un nombre, qui differe à l'un & à l'autre de l'unité.

ré : lequel nous démonstrerons ne pouuoir estre milieu prop. entre iceux. Soient les nombres AB , & CD , $A.....6G.B$ $A.G.B.$ differens du binaire, entre lesquels tombe $E.....5H.F$ $E.H.F.$ le nombre EF moindre que AB de l'unité, $C.....5D$ $C.D$ mais plus grand que CD , aussi de l'unité. Je dis que EF n'est moyen prop. entre AB , CD . Car si on dit que comme AB à EF , ainsi EF à CD : estant osté de AB , le nombre AG égal à EF , afin qu'il reste l'unité GB ; & de EF , la nombre EH égal à CD , afin qu'il reste aussi l'unité HF ; pareillement comme AB sera à EF , ainsi le retranché AG sera au retranché EH . Donc aussi le reste GB sera au reste HF ; c'est à dire l'unité à l'unité, comme le tout AB au tout EF , le plus grand au moindre : Ce qui est absurde; donc EF n'est pas moyen prop. entre AB & CD .

Parquoy entre les nombres de raison triple ne peut tomber un nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit aussi un entre 3 & 1. les plus petits nombres de la raison triple qui different entr'eux du binaire : Ce qui est impossible, comme nous venons de démonstrer.

Par mesme raison, ne peut aussi tomber un moyen prop. entre deux nombres de quintuple raison. Car s'il y en tomboit un, il en tomberoit aussi un (par ce theor.) entre 5 & 1. les petits nombres de la raison quintuple: ce qui ne se peut faire. Car s'il est possible qu'entre le quinaire AB & l'unité C , tombe un moyen prop. binaire, ou ternaire D ; tellement que AB soit à D , comme D à C : en $A.....B.E$ changeant C sera à D comme D à AB . Et pource que $D..D...$ l'unité C mesure D , aussi D mesurera AB . Mais le C . binaire, ou ternaire D mesure pareillement le senaire AE : donc D mesurera le tout AE , & le retranché AB ; & partant par la 11. cqm. sent. aussi D mesurera le reste unité BE . Ce qui est absurde. La mesme absurdité aduendra tousiours, si on dit qu'un nombre quaternaire soit moyen prop. entre iceluy quinaire AB , & l'unité C . Il ne tombera donc point de milieu prop. entre 5 & 1. & par consequent entre quelconques nombres de raison quintuple.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, autant de nombres continuellement proportionaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chascun d'iceux, & l'unité.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, entre lesquels tombent quelques nombres continuellement proportionnaux C &

A.8.	C.12.	D.18	B.7.
	Vnité.		
	E 2.	F 3.	
	G 4.	H 6.	I 9.
K 8.	L 12.	M 18.	N 27

D. Je dis qu'entre chacun d'iceux A, B, & l'vnité, il tombera autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

Car ayant posé l'vnité, soient pris E & F, les plus petits nombres qui soient en la raison de A à C, par la 35. p. 7. puis par la 2. p. 8. soient trouvez les trois plus petits en la mesme raison G, H, I : puis les quatre K, L, M, N ; & ainsi consequemment iusques à ce que la multitude des pris soit egale à la multitude A, C, D, B. D'autant que les extremes A, B, sont premiers entr'eux, par la 1. p. 8. A, C, D, B, seront les plus petits en la raison de E à F : Mais leurs egaux en multitude K, L, M, N, sont aussi les plus petits en la mesme raison par la constructiō. Dōc K, L, M, N, sont egaux à iceux A, C, D, B, chacun au sien, comme K à A & N à B. Et pource que (comme il appert par la demonstratiō de la 1. p. 8.) E multipliāt soy-mesme a produict G ; & multipliant G a faict K, par la 7. com. sent. E mesurera G par E ; & G iceluy K par le mesme E : mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure iceluy E par E. Donc l'vnité mesurera également E ; & E iceluy G ; & G iceluy K : & partant l'vnité sera mesme partie de E, que E de G, & G de K. Donc par la 20. d. 7. l'vnité & les nombres E, G, K, sont continuellement proport. Par mesme discours l'vnité & les trois nombres F, I, N, seront aussi prouuez continuellement proportionnaux. Et puis que tant la multitude E, G, K, que F, I, N, avec l'vnité, est egale à la multitude K, L, M, N, ou A, C, D, B ; il s'ensuyura qu'entre l'vnité & le nombre K ou A, qui luy est egal ; & aussi entre l'vnité & le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité &

chacun de deux nombres proposez; autant en tombera-il entre iceux deux nombres.

Soient deux nombres proposez
 A & B, & qu'entre l'vnité C, & cha-
 cun d'iceux, tombent quelques nō-
 bres continuellement proportion-
 naux, commē D & E, entre C & A:
 Item F, & G, entre C & B. Je dis qu'aussi il en tombera deux
 continuellement proportionnaux entre A & B.

A 8. I 12. K 18. B 27.

E 4. H 6. G 9.

D 2. F 3.

C 1.

Car si on acheue à multiplier comme en la 2. p. 8. pour trou-
 uer les trois nombres, H, I, K, c'est à sçauoir que H soit le
 produict de D multiplié par F; I le produict de D, par H: &
 K, le produict de F par H. Puisque comme C à D, ainsi D à E,
 & E à A; & que par la 5. cō. sen. C vnité mesure D, par les vnitez
 qui sont en D; aussi D mesurera E, par les vnitez qui sont en
 D, & E mesurera A, par les mesmes vnitez de D; ainsi il est
 euidēt que B multiplié par soy mesme produict E; & E multiplié
 par B, a produict A. Par mesme discours se prouuera que F
 par soy mesme, a produict G, & que G par F a produict B.

Maintenant puis que D multiplié par soy mesme, & par F, a
 produict E & H, par la 17. p. 7. comme D à F, ainsi E à H. Pa-
 reillement F multiplié par D, & par soy mesme, produict H
 & G; aussi H sera à G comme D à F: Parquoy les trois nom-
 bres E, H, G, seront en continuelle proportion. D'auantage
 D multipliant E, & H, produict A & I; comme E sera à H,
 ainsi A sera à I: & puis que D, & F multiplient H, & produi-
 sent I & K; I sera à K, comme D à F. Par mesme discours K
 sera à B à la mesme raison, estans les produicts de H, & G
 multipliez par F, le tout par la 17. & 18. p. 7. Il est donc euidēt
 que A, I, K, B, sont continuellement proportionnaux, & que
 partant les deux nombres I & K sont tombez en continuelle
 proportion entre A & B: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9. PROP. XI.

Entre deux nombres quarrez tombe vn
 moyen proportionnel; & le quarré est au
 quarré en raison doublee du costé au co-
 sté.

Soient deux nombres quarréz A4. E6. B9.
 A & B, desquels les costez soiēt C2. D3.
 C & D. Je dis qu'entre iceux tombera vn moyen proportion-
 nel.

Car puis que C'est le costé de A ; C multiplié par soy-
 mesme produira A : pareillement D par soy-mesme produira
 B. Maintenant soit trouué E, produit de C multiplié par D:
 Et par la 17. p. 7. comme C à D, ainsi A à E, & E à B. Partant
 E est moyen proportionnel entre A & B.

Pour la seconde partie: il est euident que le quarré A, est au
 quarré B en raison doublee du costé C au costé D. Car A, E,
 B estans continuellement proportionnaux, A est à B en raison
 doublee de A à E par la 10. d. 5. qui est la mesme raison de C
 à D.

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent deux
 moyēs proportionnaux: & le cube est au cube
 en raison triplee du costé au costé.

Soient deux nombres A27. H36. I48. B64.
 cubes A, & B, desquels les E9. G12. F16
 costez soient C & D. Je dis C3. D4.
 que entre iceux tomberont deux moyens proportionnaux.

Qu'il ne soit ainsi. Que C se multipliant soy-mesme pro-
 duise E; D par soy produise F; mais C & D l'un par l'autre pro-
 duise G; & iceluy G multiplié par l'un & l'autre C & D, produi-
 set H & I. Puis que A, & B sont cubes, ils seront les produits
 de C multiplié par E, & de D multiplié par F: il est donc eu-
 idēt que la construction est semblable à celle de la 2. p. 8. & par
 lademōstration de la mesme, A, H, I, B seront cōtinuellement
 proportionnaux selon la raison de C à D. Partant H & I, se-
 ront deux moyens proportionnaux entre les nombres cubes
 A & B.

Quant à la seconde partie, que le cube A, est au cube B en
 raison triplee du costé C au costé D, ou de A à H: (car c'est
 la mesme raison) cela est clair par la 10. d. 5.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux ; iceux estans multipliez chascun par soy, leurs produicts seront aussi continuellement proportionnaux ; & si chascun multiplie encores son produit ; les derniers produicts seront aussi continuellement proportionnaux : & cela aduiendra tousiours enuiron les extremes.

Soiēt trois nombres A_1 . B_4 . C_8 .
 D_4 . N_8 . E_{16} . O_{32} F_{64}
 continual- G_8 . P_{16} . Q_{32} . H_{64} . R_{128} S_{256} . I_{512} .
 lement proportionnaux A, B, C : Et qu'iceux se multiplians chascun par soy produisent D, E, F. Item que les mesmes multiplians chascun son produit facent G, H, I. Je dis que D, E, F, & G, H, I, sont entr'eux continuellement proportionnaux.

Qu'il ne soit ainsi : Que N soit le produit de A multiplié par B ; & O, de B par C : Pareillement que P soit le produit de A par N ; Q, de A par E ; R, de B par O ; S, de B par F par la 17. p. 7. A se multipliant, & multipliant B, les produicts D & N seront en la mesme raison de A à B : & par mesme discours B multipliant A & soy-mesme, les produicts N, & E seront aussi en la mesme raison, & ainsi des autres : Partant D, N, E, O, F, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B : ainsi D, N, E ; & E, O, F, sont continuellement prop. en vne mesme raison ; & en raison egalle comme D sera à E, ainsi E à F : parquoy D, E, F, seront continuellement proportionnaux.

Pareillement d'autant que A multipliant D, N, E a fait G, P, Q : par ce que nous auons demonsté à la 18. p. 7. G, P, Q, seront entr'eux, comme les proportionnaux D, N, E c'est à dire comme A à B. Item pource que A & B multipliant E ont produit Q & H, par la 18. p. 7. comme aussi A sera à B, ainsi Q à H. Donc G, P, Q, H, sont proportionnaux en la raison de A à B. Par mesme discours H, R, S, I, seront prouées propor-

tionaux en la mesme raison de A à B : & partant en raison egale comme G sera à H, ainsi H à I : parquoy G, H, I seront continuellement proportionnaux : ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré, aussi le costé mesurera le costé : que si le costé mesure le costé, aussi le quarré mesurera le quarré.

A 4. E 12. B 36.

C 2. D 6.

Soit le nombre quarré A qui mesure le nombre quarré B, & d'iceux quarez les costez soient C, & D. Je dis que le costé C mesurera aussi le costé D. Car ayant multiplié C par D, il est euidét par la 11. p. 8. que le produict E est moyen proport. entre A & B, en la raison de C à D : mais l'extreme A mesure B : donc par la 7. p. 8. il mesurera aussi E. Parquoy puis que come A à E, ainsi C à D : aussi le costé C mesurera le costé D.

Pour la seconde partie : Si le costé C mesure le costé D, aussi le quarré A mesurera le quarré B. Car comme dessus A, E, & B seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D : Et puisque C mesure D, aussi A mesurera E ; & E mesurera B ; & par cōsequēt A mesurera aussi B ; parce que qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré, par la 11. com. sent.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si vn nombre cube mesure vn nombre cube : aussi le costé mesurera le costé : & si le costé mesure le costé, aussi le cube mesurera le cube.

Ceste demonstration est aisée : d'autant que par la 12. p. 8. entre deux cubes y a deux moyens proportionnaux ; & le cube est au cube en raison triplee du costé au costé, c'est à dire que le costé est au costé comme l'un des cubes est à son prochain moyen proportionnel, lequel il mesurera par la 7. p. 8. & par consequent le costé mesurera aussi le costé. Pour la seconde partie, si le costé mesure le costé, aussi le cube mesurera son prochain moyen prop. lequel mesurera l'autre moyen prop. & iceluy l'autre cube ; & par consequent le cube mesurera l'autre cube, par la 11. com. sent. repete.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si vn nombre quarré ne mesure pas vn nombre quarré ; aussi le costé ne mesurera le costé : que si le costé ne mesure le costé, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Ceste demonstration se fait par l'impossible de la 14. p. 8. Car par icelle, si le costé mesuroit le costé, aussi le quarré mesureroit le quarré. Pour la seconde partie. Si le quarré mesuroit le quarré, aussi le costé mesureroit le costé par la susdite 14. p. 8.

THEO. 15. PROP. XVII.

Si vn nombre cube ne mesure point vn nombre cube ; aussi le costé ne mesurera le costé : que si le costé ne mesure le costé, aussi le cube ne mesurera le cube.

Ceste demonstration se fait aussi par l'impossible de la 15. p. 8. Car par icelle, si le costé mesuroit le costé, aussi le cube mesureroit le cube. Et pour le second. Si le cube mesuroit le cube, aussi le costé mesureroit le costé.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a vn moyen proportionnel : & le plan est au plan en raison doublee des costez de semblable raison.

Soient les deux nombres plans semblables A & B, & leurs costez soient C, D, & E, F. Je dis qu'entre iceux plans A & B se trouuera vn

A 12. G 18. B 27

C 6. D 2. E 3. F 4

moyen proportionnel; & que A est a B en raison doublee de C a E, costez de mesme raison.

Car puis que les plans A & B sont semblables, C sera a D comme E par F; & si A sera le produit de C par D. Item B le produit de E par F, par la 17. d. 7. Maintenant que D multipliant E produise G, par la 17. p. 7. puis que D multipliant C & E produise A, & G; A sera a G, comme C a E, ou D a F (car puis que comme C a D, ainsi E a F; en changeant comme C a E, ainsi D a F.) Item E multipliant D, & F; produit G & B; iceux seront l'un a l'autre comme D a F: ainsi A, G, B seront continuellement proportionnaux, & G sera vn moyen proportionnel entre A & B.

THEO. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, tombent deux moyens proportionnaux: & le solide est au solide, en raison triplee des costez de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A & B, de lesquels les costez soient C, D, E, & F, G, H. Je dis qu'entre A, & B, on trouuera deux moyens proportionnaux; & que A est a B en raison triplee de C a F costez de mesme raison.

Car I soit le produit de C multiplié par D; K le produit de F par G; L le produit de F par D; & M & N produits de L par E & H.

Maintenât puis que C, D, E, sont l'un a l'autre come F, G, H; aussi en changeant, comme C sera a F, ainsi D sera a G, & E a H. Et par la 17. p. 7. puis que D multipliant C & F, produit I & L, iceux I & L seront l'un a l'autre comme C a F, c'est a dire comme D a G, ou E a H. Par mesme discours F multipliant D & G, produit I & K, iceux seront aussi l'un a l'autre comme D a G; & partant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D a G, ou C a F, ou E a H. Pareillement puis que le solide A est le produit des trois nombres C, D, E; & I, le produit de C par D, aussi A sera le produit de I par

E: & par mesme discours B sera le produict de K par H; & par la 17.p.7. E multipliant I, & L, produict A & M, en la raison de I à L: & par mesme discours L multipliant E, & H, produict M & N en la raison de E à H, qui est la mesme que de I à L; aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront aussi en la raison de L à K, qui est la mesme que de I à L. Et partant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est a dire de C a F; & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

Pour la seconde partie elle est evidente, puis que les quatre nombres ont esté prouuez continuellement proportionnaux en la raison de C a F (estant A a B en raison triplee de A a M par la 10.d.5) A estre a M, comme C a F.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si entre deux nombres, tombe vn moyen proportionnel: iceux seront nōbres plans semblables.

Soient deux nombres A, & B, entre lesquels tombe C, moyen proportionnel. Je dis que A & B sont nombres plans semblables.

Car ayant pris D, & E les plus petits termes en la raison de A, C, B; iceux D, & E mesureront A & C l'un comme l'autre, par la 21.p.7. Ils mesureront aussi également C & B, qui sont en la mesme raison. Donc que D & B mesurent A, & C selon le nombre F; & qu'ilz mesurēt aussi C, & B selon le nōbre G. Parquoy F multipliant D & E sera produict A & C, par la 9. com. sent. Item G multipliant les mesmes D & E, sont produits C & B. Veu donc que E multipliant F & G faict C & B; comme C sera a B, ainsi F a G par la 17.p.7. Mais comme C est a B, ainsi estoit D a E. Donc comme D sera a E, ainsi F sera a G; & en changeant comme D sera a F, ainsi E a G. Et puis que F multipliant D, a faict A; iceluy A sera vn plan duquel les costez sont D, F. Item pource que G multipliant E a faict B; B sera le plan duquel E, G sont costez. Mais ces costez ont esté demon-

demonstrez proportionnaux, c'est à dire D estre à F, comme E à G. Donc par la 11. d. 7. A & B seront plans semblables : ce qui estoit à prouver.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux; iceux seront nombres solides semblables.

Soient les deux nombres A & B, entre lesquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux C & D. Je dis qu'ils sont nombres solides semblables.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouvez par la 2. p. 8. les trois nombres E, F, G, les plus petits en la raison de A, C, D, B. Veu donc qu'entre E & G tombe vn moyen proportionnel F, par la 10. p. 8. E & G seront plans semblables : Soient leurs costez H, I, & K, L, lesquels seront proportionnaux par la 11. d. 7. & puisque E, F, G sont les plus petits en la raison de A, C, D, ils les mesureront également par la 11. p. 7. soit selon le nombre M: c'est à dire que E, F, G, estés multipliez par M produisent A, C, D: item par le mesme discours E, F, G, mesureront également les trois nombres C, D, B, chacun le sien: soit selon le nombre N, c'est à dire que N multipliant E, F, G, produise C, D, B. Il est donc evident, que A & B sont nombres solides, desquels les costez sont H, I, M; & K, L, N. Mais pour autant que M. & N multiplians F, produisent C & D, par la 18. p. 7. M sera à N en la raison de C à D: & C est à D en mesme raison que E à F par la 11. p. 7. pour ce que N multipliant E & F a produit iceux C & D; mais aussi E est à F en la mesme raison que H à K, ou I à L. Donc aussi H sera à K, ou I à L comme M à N; & en changeant H à I, comme K à L; & I à M comme L à N: & partant les costez H, I, M sont proportionnaux aux costez K, L, N, & par la 11. d. 7. A & B seront nombres solides semblables: ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellement pro-

portionnaux, & que le premier soit quarré, le troisieme sera aussi quarré.

Ceste demonstration est aisee : car par la 20. p. 8. les extremes seront plans semblables, & l'un d'iceux quarré, partant aussi l'autre.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit cube; aussi le quart sera cube.

Ceste demonstration est aussi aisee: car par la 21. p. 8. les extremes seront solides semblables; mais l'un est cube, & partant aussi sera l'autre.

THEOR. 22. PROP. XXIIII.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, & que l'un d'iceux soit quarré, aussi sera l'autre.

Soient deux nombres A & B, lesquels soient entr'eux, comme le quarré C au quarré D, & soit A quarré. Je dis que B est aussi quarré.

Car puisque A est à B comme C à D; & par la 11. p. 8. il tombe entre C & D, un moyen proportionnel, sçavoir est E; il en tombera aussi un entre A & B, par la 8. p. 8. & soit F. Veu donc que les trois nombres A, F, B, sont continuellement proportionnaux; & le premier A est quarré; aussi le troisieme B sera quarré: ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

Il appert des choses cy dessus dictes, que la raison de quelque nombre quarré que ce soit à quelconque nombre non quarré, ne peut estre

exhibée en deux nombres quarrez; Car si elle y estoit exhibée, par la 24.8. p. les deux premiers nōbres ayant la mesme raison que les quarrez de la raison exhibée seroient aussi quarrez, puis que l'un est posé carré. Ce qui est absurde: car l'un est posé non carré. D'où vient que les nombres ayant la raison double, ne sont comme nombre carré à nombre carré. Car tous ces nombres cy 4.8.16.32. &c. seroient quarrez; d'autant que 4. étant carré, par la 14. p.8. aussi 8. seroit carré: donc aussi 16. & 32. &c. ce qui est absurde. Car entre 4. & 8. & entre 8. & 16.; & entre 16. & 32. &c. tomberoit un moyen prop. s'ils estoient quarrez par la 11. p.8. & nous auons démontré au Scholie de la 8. p. 8. qu'il ne peut tomber de moyen prop. entre quelconques nombres de la raison double.

Semblablement les nombres en raison quintuple, ne sont aussi comme nombre carré à nombre carré. Car s'ils y estoient, par la 11. p. 8. il tomberoit entre iceux un milieu propo. donc aussi entre 5. & 1. les plus petits nombres de la raison quintuple par la 8. p. 8. Ce qui est impossible, comme nous auons démontré au Scholie de la 8. p.8.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, & que l'un d'iceux soit cube, aussi sera l'autre.

Cette demonstration est aisée: d'autant que par la 8. p. 8. il tombera deux moyens proportionnaux entre iceux deux nōbres, ainsi qu'entre les cubes de semblable raison, par la 12. p. 8. & par la 23. p.8. l'un d'iceux nombres étant cube, aussi sera l'autre.

C O R O L L A I R E.

Il appert aussi des choses cy dessus, que la raison de quelque nombre cube que ce soit à quelconque nombre non cube, ne se peut exhiber par deux nombres cubes.

THEO. 24. PROP. XXVI.

Nombres plans semblables, sont l'un à l'autre

tre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient les deux nombres plans semblables A & B. Je dis que A sera à B comme nombre quarré à nombre quarré.

A 20. C 30. B 45.

D 4. E 6. F 9.

Car par la 18. p. 8. il tombera entre A & B vn moyen prop. & soit C : si donc on prend les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raison continuë de A, C, B, les extremes D & F seront quarréz par le corol. de la 2. p. 8. Parquoy puis qu'en raison egale A est à B, comme D à F, il est manifeste que A est à B comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à sçauoir comme le nombre quarré D au nombre quarré F.

SCHOLIE.

Clavius a démontré la conuerse de ceste proposition est à sçauoir: Que les nombres qui sont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, sont plans semblables.

Car les nombres A & B estans entr'eux, comme les quarréz D & F: par la 11. p. 8. Il tombera un moyen prop. entre iceux quarréz; & aussi un entre A & B, par la 8. p. 8. & partant A & B sont plans semblables. Et par icy est manifeste que les nombres plans qui ne sôt semblables, ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Nombres solides semblables, sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient les nombres solides semblables A, & B. Je dis que A sera à B, comme nombre cube à nombre cube.

A 16. C 24. D 16. B 54.

E 8. F 12. G 18. H 27.

Car par la 16. p. 8. tomberont entre A & B deux moyens proportionnaux, & soient iceux C & D. Que si on prend les plus petits termes de la raison de A à C; & qu'en la raison d'iceux on trouue, par la 7. p. 8. les quatre nombres en continuëlle proportion E, F, G, H; les extremes E & H seront cubes par le corol. de la 2. p. 8. & en raison egale comme E à H, ainsi A à B : ce qui estoit à démonstrer,

SCHOLIE.

Clavius demonstre aussi la conuerse de ceste prop. sçauoir est.

Queles nōbres qui sont l'un à l'autre comme nombre-cube à nōbre cube, sont solides semblables. Car les nombres A & B, estans entr'eux, comme les cubes E & H; par la 11. p. 8. Il tombera deux moyens prop. entre les nombres cubes E & H. Il en tombera aussi deux entre A & B par la 8. p. 8. & partant par la 21. p. 8. A & B sont solides semblables.

Il est euidēt par toutes les choses cy dessus dictes, qu'aucuns nombres ayans raison double, ou superparticuliēre, ou superbipartiente, ne sont plans, ou solides semblables. Car s'ils estoient plans semblables, par la 18. p. 8. un moyen prop. tomberoit entr'eux, ce qui ne se peut faire, comme il a esté démontré au Scholie de la 8. p. 8. Ils ne seront aussi solides semblables, puis qu'entre iceux ne peuuent tomber deux moyens prop. car autrement il en tomberoit aussi deux entre les plus petits nombres d. i. mesmes raisons par la 8. p. 8. Ce qui ne se peut faire, pource qu'iceux sont seulement distans entr'eux de l'unité ou du binaire, comme il a esté dict au susdit Scholie, entre lesquels il est certain, que deux nombres moyens prop. ne peuuent tomber.

Semblablement deux nombres premiers, quels qu'ils soient, ne peuuent estre plans, ou solides semblables, pource qu'ils ne peuuent auoir des costez proportionnaux. Car quelque nombre plan que ce soit estant nombre premier, a seulement soy-mesme & l'unité pour costez, encore improprement. Comme ces nombres plans 7. & 13. desquels les costez sont 7. 1. & 13. 1. puis qu'ils sont produits de la multiplication d'iceux costez, lesquels appert n'estre proportionnaux. Et le nombre solide, qui aussi est nombre premier, a seulement pour costez soy-mesme, & deux unitēz; & par consequent il est manifeste qu'ils ne peuuent estre prop.

Pareillement deux nombres premiers entr'eux, n'estans quarrēz, ou cubes, ne peuuent estre plans ou solides semblables: Car s'ils estoient tels, par la 18. ou 19. p. 8. tomberoit entre iceux, un ou deux moyens prop. & puis que les extremes sont posez premiers entr'eux; tous les trois, ou les quatre seront premiers entr'eux, pource que aucun nombre ne sera commune mesure d'iceux, les extremes. n'en ayans point: Parquoy il est euidēt par la 23. p. 7. qu'ils seront les plus petits en leur prop. Et partant par le corol. de la 2. p. 8. les deux extremes seront quarrēz, ou cubes. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez n'estre quarrēz ny cubes.

De ces choses s'ensuit que s'il y a deux nombres plans, ou solides semblables, desquels le moindre soit premier, il mesurera le plus grand. Car autrement par la 31. p. 7. iceux deux nombres proposez seroient premiers entr'eux: & partant (comme nous venons de prouuer) ils ne seroient plans ou solides semblables. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez tels.

De cecy est euident que deux nombres premiers entr'eux, desquels le moindre est premier; ne peuuent estre plans, ou solides semblables. Car s'ils l'estoient, le moindre mesureroit le plus grand, comme apert cy-dessus. Veu donc qu'il se mesure aussi soy mesme, il ne seroient premiers entr'eux, mais composez: Ce qui est contre l'hypothese.

Parquoy il est facile de trouuer deux nombres plans, ou solides non semblables. Car si on prend deux nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente; ou certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, desquels l'un ny l'autre soit quarré, ou cube; il est euident parce que dessus, qu'ils seront plans, ou solides dissemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, desquels l'un soit quarré, & l'autre non quarré, comme 16. & 20. ils ne sont plans semblables. Car autrement par la 26. p. 8. ils seroient comme quarré a quarré: & 16. estant quarré, par la 24. p. 8. 20. seroit aussi quarré, contre l'hypothese. Par mesme raison, si de deux nombres, l'un est cube, & l'autre ne l'est pas; comme 27 & 40. ils ne sont pas solides semblables. Car s'ils l'estoient, par la 27. p. 8. ils seroient comme cube à cube & 27. estant cube par la 25. p. 8. 40. seroit aussi cube, contre l'hypothese.

Fin du huiëtiesme Element.



ELEMENT

NEVFIESME.

THEOR. I. PROP. I.

Si deux nombres plans semblables se multiplient l'un l'autre, le produit sera quarré.

SOient deux nombres plans semblables A & B, lesquels se multiplient mutuellement, produisent C. Je dis que C est quarré. Car A se multipliant soy-mesme produit D quarré. Et puisque A multipliant A & B a produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à C, par la 17. p. 7. Mais A & B estans plans semblables, il tombera entr'eux vn moyen proportionnel par la 18. p. 8. Il en tombera donc aussi vn entre D & C, par la 8. p. 8. & soit E. Et puisque des trois nombres continuellement proportionnaux D, E, C, le premier D est quarré par la construction; le tiers C sera aussi quarré par la 22. p. 8. ce qui estoit à prouuer.

A 4. B 9.
D 16. E 24. C 36.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre produisent vn nombre quarré; iceux seront plans semblables.

Soient deux nombres A & B qui se multiplians l'un l'autre, produisent C quarré. Je dis que A & B sont plans semblables. A 4. B 9.
D 16. C 36.

Car que A se multipliant soy-mesme produise D quarré. Veu donc que A multipliant A & B a produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à C par la 17. p. 7. Et par la 11. p. 8. entre les quarez D & C tombe vn moyen proportionnel; Il en tombera donc aussi vn entre A & B, par la 8. p. 8. & partant par la 20. p. 8. A & B seront plans semblables: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vn nombre cube se multiplie soy-mesme,
le produit sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel se multipliant soy-mesme produise B. Je dis que B est nombre cube. A 8.
E 6. D 4.
F 12. C 2.
B 64. Vnité.

Car soit C costé du cube A: & de C multiplié en soy, soit produit D; il est manifeste que C multipliant D, produit le cube A. Veu donc que C multipliant soy-mesme a fait D, par la 7. com. sent. C mesurera D par C. Mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure aussi C par . L'vnité sera donc mesme partie de C, que C de D; & partant comme l'vnité est à C, ainsi C à D par la 20. d. 7. derechef puisque C multipliant D a fait A, par la 7. com. sent. D mesurera A par C. Mais aussi C mesure D par C. Donc C est mesme partie de D, que D de A; & partat comme C à D, ainsi D à A: mais comme C à D, ainsi estoit l'vnité à C. Donc comme l'vnité à C, ainsi C à D, & D à A: ainsi entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Derechef pource que A mesure B par A (car B a esté fait de A multiplié en soy) & que l'vnité mesure aussi A par A; l'vnité sera mesme partie de A, que A de B: & partant comme l'vnité sera à A, ainsi A sera à B. Parquoy puis qu'entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D; par la 8. p. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux E & F. Et veu que les 4 nombres A, E, F, B sont continuellement proportionnaux, & que A premier est cube; aussi B quatriesme sera cube: ce qu'il estoit a prouuer.

THEOR. 4. PROP. III.

Si vn nombre cube multiplie vn nombre cube; le produict iera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produise C. Je dis que C est aussi nombre cube

A. 8. B. 27.

D. 64. C. 216.

Car si on prend D, produict de A multiplié par soy mesme par la 3. p. 9. il sera cube; & pource que A multipliant B, & soy mesme, a produict C & D; il y aura telle raison de D a C, que de A a B par la 17 p. 7. Et par la 1. p. 8. il tombera deux moyes proportionnaux entre A & B: il en tombera donc aussi deux entre D & C, par la 8. p. 8. Et partant D estant cube, par la 23. p. 8. C sera aussi cube: ce qui estoit a prouuer.

THEO. 5. PROP. V.

Si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, produict vn nombre cube; le multiplié sera aussi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produise le nombre cube C. Je dis que B multiplié est aussi nombre cube.

A. 8. B. 27.

D. 64. C. 216.

Car si on prend D, produict de A multiplié par soy mesme, comme en la precedente: A sera a B comme D a C, & par la 8. p. 8. entre A & B le trouueront deux moyens proportionnaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 23. p. 8. B multiplié iera nombre cube: ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vn nombre se multipliant soy mesme

produict vn nombre cube ; iceluy nombre sera aussi cube.

Soit le nombre A , lequel multiplié par soy mesme produise le nombre cube B. Je dis que A est aussi nombre cube. A. 8. B. 64. C. 512.

Car si on prend C, produict de A multiplié par B, il sera cube par la definition de nombre cube; & par la 5. p. 9. A sera aussi cube.

THEOR. 7. PROP. VII.

Vn nombre composé estant multiplié par quelque autre; le produict sera solide.

Soit le nombre composé A, lequel estant multiplié par quelque nombre B, produise C. Je dis que C est nombre solide. A 6. B 5. C 30. D 2. E 3.

Car puisque A est composé, quelque nombre outre l'vnité le mesurera par la 13. d. 7. Que D mesure donc A par E. Ce qu'estant posé, D multipliant iceluy E produira A par la 9. comment. Et puisque B multipliant A a produict C ; iceluy C sera Procréé de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B ; & partant par la 17. d. 7. il sera nombre solide, duquel les costez sont D, E, B : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROPO. VIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux ; le troisieme depuis l'vnité sera quarré, & tous les autres qui en laisseront vn: Mais le quatrieme sera cube, & tous les suyans qui en laisseront deux: & le septiesme sera cube & quarré ensemble, & tous les suiuan qui en laisseront cinq.

Solent tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité, A, B, C, D, E, F. Je dis que le troisieme B sera quarré, ensemble tous les autres qui en laisseront vn de l'ordre, comme D & F: en apres que le quatriesme C est cube, & tous les autres en laissant deux nombres, comme E, Pareillement que le septiesme F est cube & quarré ensēble, & d'autres qui pourroient suiure en laissant cinq nombres.

Pour la premiere partie: puis que les nombres sont continuellement proportionnaux, comme l'vnité mesure A selon les vnitez qui sont en A, par la 5. cōsent. ainsi chacun mesurera son suiuant selon les vnitez de A: partant B troisieme qui sera en ce faisant le produit de A multiplié par soy, sera quarré: & par la 22. p. 8. puis que B, C, D, sont continuellement proportionnaux, & B est quarré, aussi D sera quarré. Par mesme discours F sera quarré; & ainsi de tous les autres.

Pour la seconde partie; puis que A multiplié par soy produit B, & B par A produit C; Il est euident par les definitions du 7. que C sera cube, & par la 23 p. 8. C, D, E, F, estans continuellement proportionnaux, F sera aussi cube. Ainsi de tous les autres en laissant deux.

Pour la troisieme partie. Il est euident par les deux precedentes parties que F a esté prouué & quarré & cube; il en sera ainsi de tous les autres.

THEOR. 9. PRO. IX.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité soit quarré; aussi tous les autres seront quarteux: que s'il estoit cube: aussi les autres seront cubes.

Vnité	A.	B.	C.	D.	Vnité.	A.	B.	C.	D.
1.	4.	16.	64.	256.	1.	8.	64.	512.	4096.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement

proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D. Je dis que si le premier A est quarré, que tous les autres seront aussi quarréz: Que si le premier A est cube, que tous les autres seront aussi cubes.

Pour la premiere partie: il est euident comme en la precedente, que puis que les nombres sont continuellement proportionnaux, comme l'vnité mesurera A par les vnitez qui sont en A, ainsi A mesurera B par les vnitez qui sont en A; & par consequent B sera nombre quarré: mais A est aussi quarré par l'hypothese: & par la 12. p. 8. C sera aussi quarré: & par la mesme raison B estant quarré, aussi sera D. Et ainsi de tous les autres.

Pour la seconde partie: Si A est cube, aussi tous les autres seront cubes: Car il est euident que A mesurera B par soy-mesme comme en la premiere partie: C'est à dire que A multiplié par soy produira B, lequel estant cube, B sera aussi cube par la 3. p. 9. Mais tous les suiuaus sont en la raison de A à B, & par la 25. p. 8. Ils seront tous cubes.

THEOR. 10. PROP. X.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré: aussi pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisiésme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent vn. Que si celuy qui suit l'vnité n'est nombre cube: aussi pas vn autre ne sera cube, sinon le quatriésme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent deux.

Soient tant de Vnité. A. B. C. D. E. F.
nombres qu'on 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.
voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D, E, F, & que A qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré. Je dis pour la premiere partie, que pas vn autre ne sera quarré,

sinon le troisieme B, ou D, ou F en laissant C & E.

Car par la 8. p. 9. B, D, F sont quarez: Que si quelqu'un veut dire qu'il y en ayt d'autres comme C, il faudroit par la 22. p. 8. que A fust aussi nombre quarré (estans C, B, A, continuellement proportionnaux & C quarré) ce qui est contre l'hypothese. Par mesme discours on monstrera que pas vn autre ne peut estre quarré sinon ceux qui ont esté exceptez.

Pour la seconde partie: si A n'est cube; aussi pas vn autre sera cube, sinon C & F, & tous les autres qui en laisseront deux.

Car par la 8. p. 9. C & F sont cubes: que si quelqu'un veut dire que D soit aussi cube; il faudroit par la 23. p. 8. que A le soit, contre l'hypothese. Par mesme deduction on monstrera tous ceux qui ne peuvent estre cubes.

THEOR. II. PROP. XI.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux: le plus petit mesure le plus grand selon quelqu'un de ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A soient tant de nombres A. B. C. D. E. F. qu'on voudra continuellement proportionnaux, B, C, D, E, F. Je dis que B mesurera F par le nombre E.

Ceste demonstration est aisée. Car en raison egale l'vnité A sera à E, comme B est à F. Et par les def. du 7. comme l'vnité A mesure E par E: ainsi B mesurera F par E.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux: Autant de nombres premiers mesureront le no-

bre d'apres l'vnité, qu'il y en aura qui mesureront le dernier.

Soient depuis l'vnité A, tant de nombres A. B. C. D. E. F.
qu'on voudra continuellement proportionnaux, B, C, D, E. Je dis qu'autant de nombres premiers se trouueront mesurer le dernier E, qu'il y en a qui mesurent B, lequel suit l'vnité

Car si F nombre premier mesurant E dernier, ne mesure pas aussi B; B & F seront premiers par la 31. p. 7. Et d'autant que B multiplié par soy produict C; C & F seront premiers par la 27. p. 7. Item B multipliant C produict D; D & F seront premiers par la 16. p. 7. Pareillement B multipliant D produict E; partant E & F seroient aussi premiers contre l'hypothese; Donc F mesureroit aussi B.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celui qui suit l'vnité soit premier: Le plus grand ne sera mesuré par aucun autre nombre, sinon par ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A. 1. B. 3. C. 9. D. 27. E. 81.
A soient tant de K. 00. I. 00. H. 00. G. 80.
nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, & que B qui suit l'vnité soit premier. Je dis que le plus grand E ne sera mesuré par aucun autre que l'un d'iceux B, C, D.

Autrement, s'il est possible, que G mesure E; G ne peut estre autre nombre premier que B, autrement il faudroit par la 12. p. 9. qu'il mesurast B, qui a esté posé nombre premier; G sera donc composé, & mesuré par quelque nombre premier par la 33. p. 7. qui ne peut estre autre que B; d'autant qu'il mesurera E, par la 11. com. sent. & par la 12. p. 9. Il faudroit qu'il me-

furast aussi B nombre premier : ce qui est absurde. Il n'y a donc point d'autre nombre premier que B, qui mesure G. Que maintenant B mesure G par H : & puis que B multiplie D & H produise E & G, par la 17. p. 7 comme E à G, ainsi D à H : mais G mesure E ; donc aussi H mesurera D. On prouvera comme dessus, qu'il ne peut être premier ny mesuré par un autre nombre premier que B : Car si H étoit premier, mesurant D, il mesurerait aussi B : ce qui ne se peut faire, ayant été posé premier. Que si H est composé, celui nombre premier qui le mesurera sera B, ou si c'est un autre, c'est autre mesurera aussi D, & celui qui mesure D, c'est à sçavoir B, par la 11. com. sent. ce qui est absurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui mesure H ; & posant que ce soit par le nombre I. On prouvera aussi comme dessus, que comme H mesure D, ainsi I mesure C, & que I ne peut être nombre premier, ny mesuré par aucun autre nombre premier sinon B. Donc que I mesure C par le nombre K : par mêmes raisons, comme I mesure C, ainsi K mesurera B nombre premier ; il faut donc qu'à tout le moins il lui soit égal ; ce qui est impossible ; d'autant que B est moyen proportionnel entre K & I, par la 20. p. 7. puis que C est produit de K multiplié par I, & qu'il est aussi le produit de B multiplié par soy-même. Partant aucun nombre ne mesurera E, sinon B, C, D, qui le mesurent, par la 11. p. 9. ce qu'il falloit prouver.

THEO. 14. PROP. XIII.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être mesurés par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, que ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être mesurés par les 3. nombres premiers B, C, D. Je dis qu'au-

cun nombre premier autre que B, ou C, ou D ne mesurera A.

Autrement, s'il est possible que E autre nombre premier mesure A par F : donc E multiplié par F produira A, lequel est

mesuré par B, C, & D ; & par la 32. p. 7. B, C, D, mesureront l'un ou l'autre de E, ou F : Ils ne mesureront pas E autre nombre premier que pas vn d'iceux ; ils mesureront donc F, lequel estant plus petit que A, iceluy A ne seroit le plus petit de ceux qui peuvent estre mesurez par B, C, D. Donc E ne pouuoit mesurer A.

SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy (apres Commandinus & Clavius) ces nombres, les 10. premiers theoremes, lesquels sont demonstrez en l'ingnas au second liure.

I.

S'il y a deux nombres, l'un ou l'autre desquels soit couppé en tant de parties qu'on voudra ; le nombre plan cōpris sous iceux deux nombres, est egal aux nombres plans contenus du nombre indiuisé & de chaque partie de celuy qui est couppé.

Soient deux nombre. AB & C desquels AB est diuisé en AD, DE, EB ; & soit fait F, de C en AB : Item GH, de C en AD ; & HI, de C en DE ; & IK, de C en EB. Je dis que F est egal aux nombres GH, HI, IK, c'est à dire à tout le nombre GK composé d'iceux. Car puis ue C multipliant AB, a produit F : AB mesurera F par C, c'est à dire que AB sera la partie d'iceluy F, denommée par C. Par la mesme raison AD sera la partie de GH : & DE de HI : & EB de IK, denommée par C, sçauoir est la mesme que AB de F. Mais il est euident par la 5. p. 7. que AB est la mesme partie de GK, que AD de GH. parquoy aussi AB sera mesme partie de GK, que AB de F : & partant par la 4. cor. sent. F & GK seront egal entr'eux. Ce qui estoit proposé.

II.

Si vn nombre est couppé en deux patties ; les nombres plâs compris sous le tout, & vne chacune partie, sont eg. ux au nombre quarré du tout.

Car le nombre AB soit diuisé en AC, CB. Je dis que les nōbres qui seront produits du total AB, es parties AC, CB, seront ensemble eg. aux au quarré de AB. Car estât pris le nombre D egal à AB, par le 1. theo. le nombre fait de D, c'est à dire de AB en AB, sçauoir est le quarré d'iceluy AB, sera egal aux nombres qui seront produits de D, c'est à dire de AB en AC, & en CB : ce qui estoit proposé.

Le mesme sera demonstté, si AB est couppé en plus de deux parties, comme

comme on peut veoir par la seconde figure apposee. $A...C..D.B$
 Car par la mesme raison, le nombre fait de E , c'est $E.....$
 à dire de AB en AB , c'est à sçavoir le quarré de AB sera egal aux nombres, qui seront produicts de E , c'est à dire de AB , en chasque partie AC, CD, DB .

III.

Si vn nombre est couppé en deux parties; le nombre plan compris du total, & de l'une des parties, est egal à celuy-là contenu des parties, & au quarré fait d'icelle partie premierement prise.

Soit le nombre AB diuisé en AC, CB . Je dis $A....C.....B$
 que le nombre plan produit de AB en la partie AC , $D....$
 est egal à celuy fait des parties AC, CB , & au quarré d'icelle partie A
 C . Car estant pris le nombre D egal à AC, CB , & au quarré d'icelle
 partie AC . Car estant pris le nombre D egal à AC ; par le 1. theo. le
 nombre fait de D , c'est à dire de AC en AB ; ou (qui est le mesme) de
 AB en AC , sera egal aux nombres faits de D , c'est à dire de AC en C
 B , & de D , c'est à dire de AC en AC , sçavoir est le quarré de AC . Ce
 qui estoit proposé.

IIII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties; le quarré fait du tout est egal aux deux quarréz faits des deux parties, & a deux fois le nombre plan contenu d'icelles parties.

Soit le nombre AB diuisé en AC, CB . Je dis que le $A..... C.... B$
 nombre quarré fait de AB , est egal aux quarréz des parties AC, CB ,
 avec deux fois le nombre plan fait de AC en CB . Car par le 2. theo.
 le nombre quarré de AB , est egal aux nombres faits de AB en AC ,
 & en CB . Mais par le 3. theo. le nombre fait de AB en AC , est egal
 au nombre produit de AC en CB , & au quarré d'iceluy AC : Item
 le nombre produit de AB en CB est par mesme raison egal au nombre
 produit de AC en CB , & au quarré de CB . Donc le nombre quarré
 fait de AB , est pareillement egal aux nombres quarréz des parties A
 C, CB , & a deux fois le nombre fait de AC en CB . Ce qui estoit pro-
 posé.

V.

Si vne ligne droite est diuisée en deux parties egales, & en deux inegales; le nombre plan contenu des parties inegales, avec le quarré du nombre qui est entre les deux sections, est egal au quarré fait de la moitié du nombre total.

Soit le nombre AB , couppé en deux parties egales AC, CB , & en
 deux inegales AD, DB . Je dis que le nombre plan compris des parties
 inegales AD, DB , avec le quarré du nombre CD , est egal au quarré
 du nombre BC . Car puisque par le theo. pre- $A..... C.... D.... B$

ced. le nombre quarré de CB, est egal aux quarez des parties CD, D B, avec deux fois le nombre fait de CD, DB; & par le 3. theo. le nombre plan compris de CD, DB, ensemble avec le quarré de DB, est egal au nombre produit de CB en DB; sera fait que si ce nombre fait de CB, en DB, est pris pour le quarré de DB, avec le nombre fait de CD en DB; aussi le nombre quarré de CB, est egal à l'autre quarré de CD, ensemble a l'autre nombre fait de CD, en DB, & au nombre produit de CB, c'est à dire de AC en DB: & partant par le 1. theor. le nombre fait du total AD en DB, est egal aux nombres produits de CD en DB, & de AC en DB. Donc le quarré de CB, sera egal au quarré de CD, & au nombre fait de AD en DB. Ce qui estoit proposé.

V I.

Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & à iceluy est adiouste quelque autre nombre; le nombre qui est fait du tout avec l'adiouste en l'adiouste, avec le quarré de la moitié du nombre, est egal au quarré du nombre composé de la moitié de l'adiouste.

Soit le nombre AB couppe en deux parties egales A...C...B..D AC, CB; & à iceluy soit adiouste le nombre BD. Je dis que le nombre fait du tout AB & de l'adiouste BD, comme un seul, sçavoir est de AD, en l'adiouste BD, avec le quarré de la moitié CB, est egal au quarré fait de la moitié C B & adiouste BD, comme un seul, c'est à dire au quarré de CD. Car puis que par le 4. theo. le quarré de CD est egal. ux quarez des parties CB, BD, avec deux fois le nombre plan compris de CB, BD, c'est à dire aux quarez des parties CB, BD, & aux nombres contenus de CB, BD, & de AC, BD: Mais par le premier theo. le nombre fait de AD en BD est egal aux nombres contenus sous CB, BD, & sous AC, BD, & sous AD, BD, c'est à dire au quarré de BD. Donc prenant le nombre fait de AD, en DB, pour le quarré de la partie BD, avec les nombres faits de CB en BD, & de AC en BD; le quarré de CD sera egal à l'autre quarré de CB, ensemble avec le nombre fait de AD en BD: c'est à dire que le nombre fait de AD en BD, avec le quarré de CB, est egal au quarré de CD: ce qui estoit proposé.

VII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties; le quarté du tout avec le quarré de l'une des parties, est egal à deux fois le nombre fait du tout en icelle partie, ensemble avec le quarré de l'autre partie.

Soit le nombre AB couppe es parties AC, CB. Je dis que le quarré de AB, avec celuy de la partie CB, est egal à deux A...C...B fois le nombre fait de AB en CB, ensemble avec le quarré de l'autre

partie AC. Car puisque par le 4. theor. le carré de AB est égal aux carrés des parties AC, CB, & à deux fois le nombre fait d'icelles AC, CB; si on adiouste le commun carré de CB, les carrés de AB, CB, seront ensemble égaux aux carrés de AC, CB, DB, avec deux fois le nombre produit de AC en CB: mais par le 3. theor. le nombre fait de AC en CB avec le carré de CB, est égal au nombre produit de AB en CB; & partant le double de l'un est égal au double de l'autre. Donc si pour le double du nombre fait de AC en CB, & carré de CB, on prend le double du nombre produit de AB en CB, les carrés des nombres AB, CB seront ensemble égaux à deux fois le nombre de AB en CB, avec le carré de l'autre partie AC. Ce qui estoit proposé.

VIII.

Si un nombre est diuisé en deux parties; quatre fois le nombre fait du tout en vne partie, avec le carré de l'autre partie, est égal au carré du nombre composé du tout & de la partie premierement prise.

Soit le nombre AB coupé en parties AC, CB. $A....C...B...D$
Je dis que le nombre fait de AB en la partie CB, ensemble avec le carré de l'autre partie AC, est égal au carré du nombre composé de AB & de la partie CB. Car étant adiouste le nombre BD égal à CB, par le 4. theor. le carré du tout AD est égal aux carrés des nombres AB, BD, ensemble avec le nombre double de AB en BD; c'est à dire aux carrés des nombres AB, CB, ensemble avec deux fois le nombre de AB, en CB: Mais par le 7. theor. les carrés de AB, CB, sont égaux à deux fois le nombre contenu de AB, CB, avec le carré de AC: donc si pour les carrés de AB, CB, on prend le nombre double de AB, en CB, & le carré de AC; le carré fait de AD est égal à 4. fois le nombre fait de AB en CB, ensemble avec le carré de l'autre partie AC: ce qui estoit proposé.

IX.

Si un nombre est coupé en deux parties égales, & en deux inégales; les carrés faits des parties inégales, sont doubles des carrés faits de la moitié, & de la section du milieu.

Soit le nombre AB diuisé en parties égales AC $A.....C...D..B$
CB; & en inégales AD, DB. Je dis que les carrés des parties inégales AD, DB, sont doubles des carrés de la moitié AC, & du nombre entre-moyen CD. Car puisque par le 4. theo. le carré du nombre AD est égal aux carrés des nombres AC, CD ensemble avec deux fois le nombre fait de AC en CD; si on adiouste le commun carré de DB, les carrés des parties AD, DB, seront égaux aux carrés des parties AC, CD, DB, ensemble avec deux fois le nombre produit

de AC en C, Dc'est à dire de, CB en CD. Mais par le 7. theor. les quarrez de CB, c'est à dire de AC, & CD sont egaux au quarré de DB & a deux fois le nombre de CB en CD. Donc si pour le quarré de DB, & deux fois le nombre fait de CB en CD; on prend les quarrez de AC, CD, les quarrez de AD, DB seront egaux au double des quarrez des parties AC, CD; & partant ces quarrez-là sont doubles de ceux cy. Ce qui estoit proposé.

X.

Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & a iceluy on adiouste quelque autre nombre; le quarré du nombre composé d'iceux, & le quarré de l'adiouste, sont ensemble doubles des quarrez de la moitié, & de celuy fait du nombre composé d'icelle moitié & de l'adiouste.

Soit le nombre AB diuisé en deux parties egales AC, CB, & à iceluy soit adiouste le nombre BD. Je dis que le quarré du nombre AD composé du tout AB, & de l'adiouste BD, & le quarré d'iceluy nombre adiouste BD, sont ensemble doubles des quarrez faits de la moitié AC, & de CD composé de la moitié CB & de l'adiouste BD. Car puisque par le 4. theo. le quarré de AD est egal aux quarrez de AC, CD, & a deux fois le nombre produit de AC, c'est à dire de CB en CD; si on adiouste le commun quarré du nombre BD, les quarrez des nombres AD, BD seront egaux aux quarrez des parties AC, CD, BD, ensemble avec deux fois le nombre produit de CB en CD. Mais par le 7. theor. les quarrez de CB, ou AC, & CD sont egaux au quarré de BD, & a deux fois le nombre fait de CB en CD. Donc si pour le quarré de BD, & deux fois iceluy nombre produit de CB en CD, on prend les quarrez des nombres CB, CD, c'est à dire des nombres AC, CD: les quarrez des nombres AD, BD seront egaux à deux fois les quarrez des nombres AC, CD: & partant ceux-là sont doubles de ceux cy: ce qui estoit proposé.

THEOR. 15. PROP. XV.

Si trois nombres sont continuellement proportionaux, & les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison avec iceux: le composé de deux tels que l'on voudra, sera premier à l'autre.

Soient les trois nombres continuellement A. 9. B. 12. C. 16. proportionaux A, B, C, les plus petits qui D. 3. E. 4. soient en la mesme raison : Je dis que les deux ensemble A & B sont premiers à C; ou bien A & C sont premiers à B.

Car si on prend D & E les plus petits qui soient en la mesme raison par le scholie de la 35. p. 7. il est evident par ce qui a esté demonsté à la 2. p. 8. que A & C sont les quarez de D & E, & que B est le produit de D multiplié par E: & par le 3. theo. du scholie precedent D & E comme vn seul nombre multiplié par D, produira A & B cōme vn seul nombre. Mais D & E estans premiers entr'eux par la 24. p. 7. aussi tous deux ensemble, seront premiers au seul E, par la 30. p. 7. ou à son quarré C, par la 17. p. 7. Et par la mesme proposition D sera premier à C, & par la 26. p. 7. le produit de D & E comme vn seul nombre multiplié par D (sçauoir A & B ensemble) sera premier à D. Par mesme discours on prouuera que B & C ensemble sont premiers à A.

Pour la seconde partie, ie dis que A & C ensemble sont premiers à B produit de D multiplié par E. Car D & E estans premiers entr'eux par la 24. p. 7. & premiers au composé des deux par la 30. p. 7. leur produit B sera premier au composé des deux par la 26. p. 7. & par la 27. p. 7. le produit de D & E cōme vn seul nōbre, multiplié par soy, sera premier à B. Mais par le 4. theo. du scholie precedent, iceluy produit de DE comme vn seul nombre multiplié en soy, est egal à A & C & deux fois B ensemble: donc A & C avec deux fois B, sont premiers à B. Or en ostant les deux fois B, il est manifeste que le reste A & C sera premier à B. Car autrement ils seroient composez & leur commune mesure mesureroit aussi deux fois B; & par consequent aussi le composé de A & C & deux fois B, qui ne seroit en ce faisant premier à B, contre ce qui a esté demonsté cy dessus. Donc le composé de A & C est premier à B, ce qui estoit à prouuer.

THEO. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, il ne sera pas cōme le premier au second, ainsi le second à quelque autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux. A.3. B. C. 003
A & B. Je dis que cōme A est à B, ainsi B n'est pas à quelque autre, c'est à dire qu'à A, & B on ne peut trouuer vn troisieme proportionnel.

Autrement, s'il est possible, soit comme A à B ainsi B à vn autre, c'est à sçauoir a C. Par la 23. p. 7. A & B estans premiers, ils seront les plus petits qui soient en la mesme raison, & par la 21. p. 7. A mesurera B, & B mesurera C. Mais aussi A mesure soy mesme; donc A mesure iceux A & B: Ainsi A & B ne feroient premiers, contre l'hypothese. Donc il n'est pas cōme A à B, ainsi B à C. Par mesme raison, il ne sera pas cōme B à A, ainsi A, à quelque autre.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, desquels les extremes soient premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C continuellement proportionnaux, desquels les extremes A & C soient premiers entr'eux. Je dis qu'il ne se peut faire que comme A est B. ainsi C soit à quelque autre. A.3. B.4. C.5. D.00.

Car s'il est possible, comme A est à B, ainsi soit C à D. En changeant comme A sera à C, ainsi B à D: & par la 23. p. 7. A & C estans premiers, ils seront les plus petits en leur raison: & par la 21. p. 7. ils mesureront également B & D; sçauoir est A iceluy B, & C iceluy D. Et pource que comme A à B, ainsi B à C; & A mesure B, aussi B mesurera C: & par la 11. com. sent. A mesurera aussi C; & iceluy A mesurant soy-mesme; il mesurera iceux A & C premiers entr'eux: ce qui est absurde. A n'est donc pas a B, comme C à D. Par mesmes raisons, il ne sera pas comme C à B, ainsi A à quelque autre.

PROB. 1. PROP. XVIII.

Deux nombres estans donnez, considerer

si on pourra trouuer vn troisieme proportiō-
nel à iceux.

La demonstration de ceste proposition est aisée. Car il n'y à qu'à considerer si le produict du second nombre multiplié par soy mesme, peut estre mesuré, c'est à dire diuisé par le premier: car s'il peut estre mesuré ou diuisé, il est euidēt par la 20. p. 7. que le quotient sera troisieme nombre proportionnel; sinō, on n'en trouuera point, puis que par la susdite 20. p. 7. trois nombres estans prop. le produit des extremes doit estre egal au produict du milieu.

PROB. 2. PROP. XIX.

Estans donnés trois nombres, considerer si on pourra trouuer vn quatrieme proportiō-
nel à iceux.

La demonstration de ceste pro. est aussi aisée. Car il faut seulement considerer si le produit des second & troisieme peut estre mesuré par le premier; s'il peut estre mesuré ou diuisé, il est euidēt par la 19. p. 7. que le quotient sera 4. prop. si non, on n'en trouuera point, puis que par la susdite 19. p. 7. 4. nombres estans prop. le produict du second & troisieme doit estre egal au produict du premier & quatrieme.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, il s'en trouuera encores d'autres.

Soit multitude quelcōque de nombres premiers A, B, C. Je dis qu'il s'en trouuera encores d'autres.

A..2. B...3 C.....5
D.....E..F.
G.....

Car si on trouue le nombre DE le plus petit de tous ceux
S iij

qui peuent estre mesurez par les trois nombres A, B, C, par la 38. p. 7. & a iceluy on adioustel'vnité EF, le tout DF sera premier ou non : S'il est premier, on a vn autre nombre premier que pas vn des proposez : s'il n'est premier, il sera mesuré par quelque nombre premier, par la 34. p. 7. Soit donc mesuré par G : il est euident que G ne peut estre pas vn des trois A, B, C ; car s'il estoit quelq'un d'iceux, il mesureroit DE, & le tout DF : Partant par la 12. com. sent. il mesureroit aussi l'vnité EF, luy qui est vn nombre. Donc G est autre nombre premier que pas vn des proposez. Et en ceste façon on en trouuer ainsuiement d'autres.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra sont adioustez, le tout sera pair.

Ceste demonstration est aisée : d'autant que, par la 6. d. 7. le nombre pair peut estre diuisé en deux parties egales; partant les moictiez de chacun des proposez feront ensemble la moitié du tout : Et par consequent le tout sera pair, puis qu'il peut estre diuisé en deux egallement, par la susdicte 6. d. 7.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si plusieurs nombres impairs sont adioustez, & que le nombre d'iceux soit pair ; le tout sera pair.

Ceste demonstration est aussi aisée : d'autant que si de chacun d'iceux nombres impairs on oste l'vnité, on les rendra pairs, & par la 21. p. 9. leur tout sera pair : Et pourautant que leur multitude est en nombre pair, les vnitez retranchees feront vn nombre pair, lequel avec tout le reste, qui est desia nombre pair, le tout sera pair par la 21. p. 9.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si plusieurs nombres impairs sont adioustez,

& que le nombre d'iceux soit impair ; le tout sera impair.

Ceste demonstration est aussi aisée. Car si on retranche vn nombre impair, tout le reste sera vn nombre pair par la precedente : Et si du restant impair on oste l'vnité ; ce qui restera sera pair, lequel adiousté à tout le reste sera vn nombre pair par la 21. p. 9. Partant il est euident, que si on adiouste l'vnité restant, que le tout sera impair.

THEO. 22. PROP. XXIII.

Si d'un nombre pair, on oste un nombre pair, le reste sera pair.

Ce qui est euident : Car si le reste n'estoit pair, en ostant l'vnité on le rendroit pair : Et le retranché avec iceluy feroit aussi un nombre pair par la 21. p. 9. & partant adioustant l'vnité ostée, le tout seroit impair, ce qui est absurde ; puis qu'il a esté posé pair.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si d'un nombre pair, on oste un nombre impair, le reste sera impair.

Cela est euident : Car si le reste estoit pair, & le tout aussi pair, le retranché ne pourroit estre impair par la 24. p. 9.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si d'un nombre impair, on oste un nombre impair, le reste sera pair.

La demonstration de ceste prop. est aussi euidente : Car si le reste estoit impair ; le reste & le retranché feroient un nombre pair par la 22. p. 9. contre l'hypothese.

THEOR. 25. PRO. XXVII.

Si d'un nombre impair on oste vn nombre impair, le reste fera impair.

Cecy est aussi aysé à demonstrier : Car si le reste estoit pair, le reste & le retranché feroient vn nombre pair, par la 21. p. 9. contre l'hypothese.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre pair, le produit fera pair.

La demonstration de ceste prop. est aussi euidente: Car par les def. de 7. le produit contiendra autant de fois le multipliant, qu'il y a d'vnitez au multiplié nombre pair : Et par ain- si le produit fera la somme de plusieurs nombres impairs, des- quels la multitude est en nombre pair; & partant par la, 12. p. 9. le produit sera pair.

S C H O L I E.

On demonstrea en la mesme maniere, que si vn nombre pair multi- plie vn nombre pair; le produit sera aussi pair.

THEOR. 27 PROP. XXIX.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre impair; le produit fera impair.

Cela est aussi euident: Car comme en la precedente, le pro- duit sera vne addition de plusieurs nombres impairs, desquels la multitude sera en nombre impair; & partant par la 23. p. 9. le tout, ou le produit sera impair.

S C H O L I E.

Clavius demonstre en cest endroit apres Campanus les deux theoremes suivants.

Vn nombre impair mesurant, vn nombre $A \dots 3. C \dots 2.$ pair, il se mesure par vn nombre pair. $B \dots 6.$

Soit le nombre impair A , lequel mesure le nombre pair B par C . Je dis que C est pair. Car s'il est impair; B produit de A impair multiplié par C impair, sera impair, par la 29. p. 9. ce qui est absurde: car il a esté posé pair. Donc C est pair.

Vn nombre impair mesurant vn nombre $A \dots 3. C \dots 5.$ impair, il le mesure par vn nombre impair. $B \dots 15.$

Soit le nombre impair A , qui mesure le nombre impair B par C . Je dis que C est impair. Car s'il est pair; B fait de A impair par C pair, sera pair par la 28. p. 9. ce qui est contre l'hypothese, donc C est impair.

Tout nombre qui mesure vn nombre impair $A \dots 15.$ pair, est aussi impair. $B \dots 5. C \dots 3.$

Soit le nombre impair A , lequel B mesure par C . Je dis que B est impair. Car C estant multiplié par B produira A par la 9. com. scnt. & si B n'est impair, mais pair, le produit A sera pair par la 28. p. 9. ce qui est absurde, puis qu'il a esté posé impair. Donc B qui mesure A impair, n'est pas nombre pair, mais impair.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si vn nombre impair mesure vn nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit le nombre impair A , qui mesure le nombre pair B . Je dis qu'il mesurera aussi sa moitié C . $A \dots 3. D \dots 4. E \dots 2.$
 $B \dots 12.$
 $C \dots 6.$

Car puis que A mesure B , soit par le nombre D ; iceluy sera pair: d'autant que s'il estoit impair, estant multiplié par A impair, leur produit seroit aussi impair par la 19. p. 9. contre l'hypothese; D sera donc pair; & partant se pourra diuiser en deux également par la 9. def. du 7. E soit donc la moitié de D . Parquoy comme D sera à sa moitié E , ainsi B sera à sa moitié C : & en changeant, comme D sera à B , ainsi E sera à C . Mais A mesurant B par D : aussi D mesurera B par A par la 8. com.

sent. & partant D sera la partie de B denommee par A: dōc
aussi E sera la partie de C denommee par le mesme A: & par-
tant A mesurera C, par la 47.p.7. ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si vn nombre impair est premier à quelque
nombre, il sera aussi premier à son double.

Soit le nombre impair A, premier à quel-
que nombre B, duquel le double soit C. Je
dis que A est aussi premier à C. Car si A & C ne sont premiers
entr'eux, quelque nombre mesurera iceux, & soit D, lequel
sera impair, comme nous auons démontré au scholie de la
29.p.9. Et puis qu'il mesure le nombre pair C (car C est pair,
puis qu'il a moitié B) il mesurera aussi sa moitié B par la prop.
precedente. Mais il mesure aussi A. Donc D mesure iceux A
& B premiers entr'eux: ce qui est absurde. Il n'y aura donc
point de nombre qui mesure A & C; & partant ils seront pre-
miers entr'eux.

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui suivent le binaire
en progression double, sont seulement paire-
ment pairs.

Soient depuis le binaire *Vnité.* A 2. B 4. C 8. D 16. E 32
A tant de nombres qu'on
voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en rai-
son double. Je dis qu'ils sont tous pairement pairs, & qu'il n'y
en a point d'autres.

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'vnité, & puisque depuis l'vnité
A, B, C, D, E, sont cōtinuellement prop. le plus petit mesurera
le plus grand selon quelqu'un de ceux qui sont entre les prop.
port. par la 11.p.9. lesquels estans tous pairs, il est euident par
les def. du 7. que B, C, D, E, seront pairement pairs, & tous les

autres qui pourroient suiure en la mesme progresſion. Mais pour autant que A prochain de l'vnité, est nombre premier, par la 13.p.9. aucun autre nombre ne mesurera aucun de tous ceux qui sont en la progresſion, sinon ceux de la mesme progresſion, lesquels estans tous pairs, iceux nombres seront pairement pairs seulement.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impair, iceluy nombre sera seulement pairement impair.

Soit le nombre A duquel la moitié B est impair, ie dis que A sera pairement impair seulement.

Car puis que B est moitié de A, il le mesurera par C nombre binaire, & par les def. 7. A sera pairement impair: Mais qu'il soit seulement pairement impair on le prouuera ainsi. S'il estoit pairement pair, vn nombre pair comme D le mesurerait par quelque nombre pair, comme E. Et par la 9. com. sent. A est fait de D en E: mais le mesme A est aussi fait de la moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19.p.7. le produit de C par B, estant egal au produit de E en D, comme C sera à E, ainsi D à B. Mais C nombre binaire mesure E: il faudroit donc aussi que D pair mesurast B, qui est vn nombre impair: ce qui est impossible. D'où A estoit nombre pairement impair seulement.

A. 30.	
B. 15.	C. 2.
D. 60.	E. 60.

Si vn nombre pair n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire, & que sa moitié ne soit nombre impair, il sera pairement pair, & pairement impair.

Ceste demonstration est aisée. Car la moitié étant pair, il sera mesuré par vn nombre pair selon le binaire qui est aussi pair. Et pour autant qu'il n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire; si on le diuise tousiours en deux également, on viendra à une moitié impaire auparavant que paruenir ius-

ques au binaire, & par consequent il sera mesuré par vn nombre impair : & par les def. 7. il sera parement pair, & parement impair.

THEOR. 33. PROP. XXXV.

Si l'y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que du second & dernier on soustraiet le premier; cōme le reste du second sera au premier, ainsi le reste du dernier sera à tous les precedens.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux A, B, C, D, & du second B on retranche FG egal au premier A : Et du dernier D l'on retrá-

A 8
B 4 F 8 G
C 18
D 9. H 6. I 4. K 8. L

che KL aussi egal à A : Je dis que comme le reste BF sera à A, ainsi l'autre reste DK sera à tous les trois A, B, C ensemble.

Car si de DL on retranche LI egal à BG, il est euident que KI sera egal à BF, (estant KL egal à FG) & si on retráche LH egal à C; comme les quatre nombres D, C, B, A, sont continuellement proportionnaux, aussi seront leurs egaux DL, HL, IL, KL & en diuisant DH sera à HL, cōme HI à IL, ou IK à KL; & partant par la 12. p. 7. tous les antecedans DH, HI, IK, (c'est à dire DK) seront à tous les consequents HL, IL, KL, (c'est à dire A, B, C,) comme l'un des antecedans IK, est à l'un des consequens KL, ou leurs egaux BE à A, ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Si depuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raison double, iusques à ce que le tout soit nombre premier: iceluy tout multiplié par le dernier produira vn nombre parfaict.

Soient depuis l'vnité A, B, C, D, continuellement doubles, la somme desquels & de l'vnité soit E nombre premier. Je dis que si E est multiplié par le dernier D, que le produit F G sera nombre parfait.

Car si on prend HI double de E; K double de HI; & L double de K, ainsi des autres; E, HI, K, L, seront continuellement proportionnaux en la raison de A, B, C, D; & en raison egale A sera à D comme E à L, & par la 19. p. 7. A multiplié par L, sera le produit de D par E, sçavoir F G : mais A étant binaire, F G sera double de L; ainsi E, HI, K, L, F G, seront continuellement proportionnaux. Maintenant de HI soit retranché HM egal à E; & de F G soit retranché FN, aussi egal à E : par la 35. p. 9. comme HM est egal à E (d'autant que HI estoit double de E) ainsi NG sera egal à E, HI, K, L ensemble. Mais FN egal à E, est aussi egal à l'vnité & à A, B, C, D ensemble: Et par conséquent F G sera egal à l'vnité, & à A, B, C, D, E, HI, K, L, ensemble: & puis que F G a esté fait de E multiplié par D, par la 7. com. sent. D mesurera F G; & partant par la 11. com. sent. l'vnité, & les nombres A, B, C, qui par la 11. p. 9. mesurent D, mesureront le mesme F G. Derechef puis que L mesure F G; aussi par la 11. com. sent. les nombres E, HI, K, lesquels par la 11. p. 9. mesurent L à cause de la raison double; mesureront le mesme F G: ainsi l'vnité & tous les nombres A, B, C, D, E, HI, K, L mesurent iceluy F G. Parquoy si F G ne peut estre mesuré par aucun autre nombre que ceux-cy, par la 22. def. du 7. Il sera nombre parfait étant egal à toutes ses parties aliquotes.

Que si on pense qu'il puisse estre mesuré par quelque autre nombre autre que les deuant dits; que D se mesure s'il est possible, selon P: donc D multipliant P produira F G par la 9. com. sent. Mais le mesme F G est aussi produit de E en D. Donc vn mesme nombre est fait de E premier par D 4. & de P second en O 3; & partant comme E à P, ainsi O à D par la 19. p. 7. & puis que A, B, C, D depuis l'vnité sont continuellement proportionnaux, & A proche de l'vnité est premier, par la 13. p. 9. nul autre nombre que A, B, C, mesurera le dernier D: & O est posé p'estre le mesme qu'aucuns d'iceux A, B, C; O ne mesurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D, ainsi estoit E à P: Donc aussi E ne mesurera P: & puis que E est premier, par la 11. p. 7. E & P seront premiers entr'eux; & partant les moindres en leur raison par la 13. p. 7. & par la 11. p. 7. E mesu-

Vnité.

A...2

B....4

C.....8

D.....16

E. 31.

H. 31. M 31 I

K. 124.

L 248.

F. 31. N. 465. G

O. 00. P. 00.

sera O, comme P mesurera D. Mais nul autre que A, B, C mesure iceluy D. Donc P sera le mesme que l'un d'iceux A, B, C. Soit donc le mesme que B: & d'autant que B, C, D, & E, H, I, K, sont continuellement proportionnaux en raison double, par raison egale comme B sera à D, ainsi E à K, & partant par la 19. p. 7. le produit de B par K, sera egal au produit de D en E. Mais le produit de D en E est egal a iceluy de P en O. Donc un mesme nombre sera fait de P en O, que de B en K; & partant par la 19. p. 7. comme P sera à B, ainsi K à O. Mais P estoit le mesme que B: Donc aussi K sera le mesme que O. Ce qui est absurde, car O a esté posé autre que tous ceux cy | A, B, C, D, E, H, I, K, L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A, B, C, D, E, H, I, K, L qui mesurent FG. Iceluy est donc nombre parfait, ainsi qu'il a esté démontré.

Fin du neufiesme Element.





SOMMAIRE

DE L'ALGEBRE.

*Que c'est qu'Algebre ; qui en est l'inventeur ; de
qu'elles figures & caracteres on se sert
en icelle , & leur signification.*

CHAPITRE. I.



L'ALGEBRE est vne Arithmetique de nombres figurez : ou bien parlant plus intelligiblement, c'est vne science par laquelle on peut rendre manifeste & cogneue vne quantité incogneue.

Quant a l'inventeur de ceste science, il est incertain : car les vns l'attribuent à Geber Arabe ; les autres à vn Mahomet fils de Moyse Arabe ; & les autres à Diophante d'Alexandrie.

Et quant aux figures d'icelle science ; outre les figures numerales de l'Arithmetique vulgaire, il y a plusieurs autres figures & caracteres, dont on se sert en ceste science, lesquels sont figurez, & nommez diuersemēt par les auteurs qui ont escript d'icelle science : mais entre ceste diuersité de caracteres, nous auons choisi les suiuanz, les iugeant plus propres & aises à representer ce qu'ils signifient qu'aucuns autres.

N. $\mathcal{N}$. q . c . qq . β . qc . $b\beta$. qqq . cc . $q\beta$. $c\beta$.
 qqc . $d\beta$. $qdb\beta$. &c.

Le premier caractère N, à l'appellation du nombre absolu & simple, tellement que le nombre auquel ledict caractère sera apposé, est absolu & simple: comme $4N$, ne signifie autre chose que 4 vntez simples; toutesfois ce caractère N de-faut le plus souuent aux nombres simples, c'est pourquoy les nombres auxquels est apposé ledict caractère N, ou bien auſquels il n'y a aucun ſigne doiuet eſtre pris pour ſimples & abſolus.

Le ſecond caractère $\mathcal{N}$. s'appelle racine; tellement que le nombre auquel est apposé ledict caractère, ſera denommé par racine, comme $7\mathcal{N}$. ſignifient 7 racines.

Le 3. caractère q . repreſente quarré; tellement que q ſignifient 5 quarez.

Le 4. caractère c . ſignifie cube; comme $7c$. ſignifient 7 cubes.

Le 5. caractère qq . ſignifient quarré de quarré, comme $8qq$. s'appellent 8 quarez de quarré.

Le 6. β . denotte ſurſolide; tellement que 4β . ſignifient 4 ſurſolides.

Le 7. caractère qc . denotte quarré de cube, comme $7qc$. ſignifient 7 quarez de cube.

Le 8. $b\beta$. s'appelle ſecond ſurſolide, tellement que $4b\beta$. ſignifient 4 ſecond ſurſolide.

Le 9. caractère qqq . denotte quarré quarré de quarré: comme $3qqq$. ſignifient trois quarrés de quarré de quarré.

Le 10. cc . ſignifie cube de cube; tellement que $8cc$ ſignifiet 8 cubes de cube. Et ainſi faut-il entendre des autres caractères en l'ordre cy-deſſus, leſquels ſont appelez ſignes ou caractères coſſiques.

Il y a encore ce caractère $\mathcal{V}$, par lequel ſont notez certains nombres qu'on appelle radicaux, irradicaux, ou ſourds, dont ſera parlé cy-après; comme auſſi de quelques autres ſignes ou caractères.

Des nombres coſſiques ou denommez.

CHAP. II.

LEs nōbres vſitez en l'Algebrē ſont de trois genres: Ceux du premier genre ſont nommez nombres coſſiques ou.

denommez: ceux du second sont appelez nombres radicaux, ou irrationaux: & les troisiemes sont nommez nombres radicaux cossiques. Quant aux nombres cossiques ou denommez; ce sont tous nombres de quelconque progression geometrique, commençant à l'vnité: pour l'intelligéce desquels doiuent estre diligemment considerées les deux progressions suyuantés, au milieu desquelles sont posez les caracteres cossiques cy-dessus declarez.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	&c.
N.	β .	q .	c .	qq .	β .	qc .	$\beta\beta$.	qqq .	cc .	$q\beta$.	$c\beta$.	qqc .	&c.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.	&c

Le premier ordre est la progression naturelle des nombres commençant à 0, lesquels s'appellent exposans tant des signes cossiques descrits au dessous, que des termes de la progression geometrique commençant à l'vnité; tellement que le premier terme de ladite progression naturelle, qui est 0, au dessous duquel est N & 1. est exposant du nombre simple, & absolu: Le second terme 1, au dessous duquel est β & 2, montre le second terme de la progression geometrique, estre la premiere denomination es nombres cossiques; & s'appelle racine: Le tiers terme 2, expose que le tiers nombre de la progression geo. est la seconde denomination, & s'appelle quarré: ainsi pareillement 6 demontre la sixiesme denomination estre le nombre quarré de cube; & ainsi des autres.

Puis apres les mesmes nombres exposans de la progression naturelle des nombres enseignent combien il y a de raisons entre chacun nombre de la prog. geo. & l'vnité, comme 1 qui est au dessus de β & 2, signifie qu'entre 1, ou bien la racine de la prog. geo. & l'vnité il y a la seule raison de 2 à 1. & 2 qui est au dessus de q & 4, montre qu'entre 4, ou bien le quarré, & l'vnité doiuent estre 2 raisons, comme 4 à 2, & 2 à 1: de mesme 3 qui est au dessus de c & 8, montre qu'entre le cube, ou 8 & l'vnité, sont les trois raisons 8 à 4; 4 à 2; & 2 à 1; & ainsi des autres.

D'auantage chasque deux nombres exposans multipliez entr'eux, produisent l'exposant du caractere cossique qui sera composé des caracteres desdits deux exposans multipliez entr'eux, comme 2 estant multiplié par 3 fait 6. exposant du caractere qc . qui est composé de q . & de c . De mesme, 4 estans multiplié par 3 fait 12. exposant du caractere qqc , qui est composé de qq . & de c . & ainsi des autres.

Pareillement estant diuisé quelque nombre exposant par vn autre moindre, le quotient monstrera, s'il est nombre entier, l'exposant du caractère cossique qui restera, si du caractère du nombre exposant diuisé, est osté le caractère du nombre exposant par lequel est fait la diuision: comme si 6. exposant du caractère *qc.* est diuisé par 2. exposant du caractère *q.* le quotient sera 3. exposant du caractère *c.* qui restera si du caractère *qc.* exposant de 6, est osté le caractère *q.* de l'exposant 2. De mesme si le 12. nombre exposant du caractère *qqc.* est diuisé par 4. exposant du caractère *qq.* le quotient sera 3. exposant du caractère *c.* lequel restera si de *qqc.* est osté *qq.* & ainsi des autres

Derechef ceste figure 2 qui est posée sur 4 & *q.* enseigne que le quarré, ou bien la 2. denomination est produicte de la multiplication de la racine deux fois posée: car si la racine 2 est posée deux fois, en ceste maniere 2. 2. & soit faite la multiplication de 2 par 2, sera procréé le quarré 4. En la mesme maniere ceste figure 3, qui est posée sur 8 & *c.* signifie le cube, ou bien la 3. denomination estre produicte de la racine, 3 fois posée & multipliée: Car si la racine 2, est posée 3 fois comme icy 2. 2. 2. & soit fait la multiplication de 2 par 2, & du nombre produict par 2, viendra le cube 8. & y a mesme raison de tous les autres.

Or par ces choses seront facilement definis les nombres cossiques. Car si pour exemple est demandé que cest que vn nombre second surfolide, nous dirons estre vn nombre, lequel est engendré par quelque nombre sept fois posé & multiplié, comme 128, est engendré de la multiplication de ceste racine 2, posée 7 fois en ceste maniere 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. Semblablement le quarré de quarré sera vn nombre, lequel est engendré par quelque nombre, quatre fois posé & multiplié, comme 16 est procréé de la multiplication de la racine 2, 4 fois posée, ainsi 2. 2. 2. 2. & ainsi des autres. Mais tousiours le nombre tant de fois posé, lequel engendre quelque nombre par sa multiplication, est dict racine du nombre produict, comme 2 estant posé 6 fois en ceste maniere 2. 2. 2. 2. 2. 2. & multiplié, fait ce nombre 64, qui est *qc.* partant 2 est dict racine quarrée cubique de ce nombre 64. & ainsi faut-il entendre des autres.

Or non seulement sont quelquesfois produicts les nombres de la progression geo. posez par la multiplication de la racine, comme est cy-dessus dict, mais aussi par la multiplication des autres nombres entr'eux, ainsi que les signes coss,

ques d'iceux demonstrent: comme ce nombre quarré de sur-
solide 1024. est procréé de la racine 10 fois posée en ceste ma-
niere 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2. ainsi que monstre son exposant 10:
toutesfois pource que son signe cosmique $q\beta$ est composé de
ces deux signes cosmiques q & β , les exposans desquels sont 2
& 5. partant si la mesme racine 2 est deux fois posée en ceste
maniere 2,2, à cause de 2 exposant du signe q , & soit multiplié,
afin que 4 soit produit, & ce produit 5 fois posé en ceste
maniere 4,4,4,4,4, à cause de 5, exposant du signe β , soit mul-
tiplié; sera procréé le mesme nombre 1024. Par la mesme
maniere si la racine 2, est posée 5 fois, à cause du signe β , & pa-
reillement multiplié, & le nombre 32 produit, soit posé deux
fois, à cause du signe q , sera procréé le mesme nombre: Car la
racine ainsi multipliée 2,2,2,2,2, fait 32: mais ce nombre cy
ainsi multiplié 32, 32 procréa 1024. Le mesme doit estre dict
des autres, si les signes cosmiques d'iceux sont composez de
plusieurs signes cosmiques.

Pareillement es superieures progressions, est bien confi-
derable que l'addition des nombres de la progression Arith.
respond a la multiplication des nombres de la progression
geo. & la subtraction à la diuision. Car pour exemple, ainsi
que 2 & 5 font 7, si on les adiouste ensemble, ainsi pareillemēt
 q & β , desquels 2 & 5 sont exposans, c'est à sçauoir 4 & 32, estās
multipliez entr'eux produisent 128, c'est à dire $b\beta$, l'exposant
duquel est 7. Item ainsi que 3 & 9 adioustez ensemble font
12, ainsi aussi c & cc : c'est à sçauoir 8. & 512. les exposans des-
quels sont 3 & 9, multipliez entr'eux produisent 4096, c'est à
dire qqc , duquel l'exposant est 12: & ainsi des autres.

Derechef tout ainsi qu'en substrayant 5 de 7 reste 2, ainsi
en diuisant $b\beta$, c'est à sçauoir 128, duquel 7 est exposant, par
 β , c'est à dire par 32, duquel l'exposant est 5, prouient 4: c'est
à sçauoir q , duquel l'exposant est 2. semblablement, ainsi qu'en
foustrayant 3 de 12 restent 9, ainsi aussi en diuisant qqc , c'est à
dire 4096, duquel l'exposant est 12. par c . c'est à dire par 8, du-
quel l'exposant est 3, prouiet c : c'est à sçauoir 512, duquel l'ex-
posant est 9. & ainsi des autres.

Or ce qui a esté dict iusques à present de la progression
geometrique de double proportion qui commence à l'vnité,
le mesme doit estre entēdu en quelque autre progression geo-
metrique que ce soit, le commencement de laquelle est l'v-
nité.

Reste à monstre par quelle raison tous les nombres pro-
posez de quelconque progression geo. commençant à l'vni-

ré, doivent estre denommez, ou (ce qui est le mesme) quels signes cossiques doiuent estre attribuez & inscrits ausdits nōbres : ce que nous monstrerons facilement, si premierement nous denominons les nombres, desquels les exposans sont nōbres premiers; de laquelle sorte sont les suyans avec leurs caracteres cossiques.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 21. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. &c.
q. c. β. bβ. cβ. dβ. eβ. fβ. gβ. hβ. iβ. kβ. lβ. mβ. nβ. oβ. pβ. &c.

Or les lettres de l'alphabet apposees aux caracteres de β sont au lieu de chiffres, comme *bβ* signifie 2β; *cβ*, 3β; *dβ*, 4β &c. & ce d'autant qu'iceux chiffres apporteroient de la confusion.

Sçachant donc ainsi que dessus les nombres premiers, & leurs caracteres, nous trouuerons les caracteres des autres nombres cossiques, desquels les exposans ne sont nombres premiers, ains composez, en resoluant l'exposant du nombre composé, dont la denomination & caractere est desirée en ses parties aliquottes incomposees, lesquelles estans multipliees par ordre entr'elles, constituent & produisent iceluy: ce que vous ferez en ceste maniere.

Diuisez premierement le nombre composé donné par le moindre nombre premier, par lequel il se peut diuiser, semblablement le quotient, s'il est nombre composé; & derechef soit diuisé ce quotient par le moindre nombre, & ainsi consequemment soit faite continuellement la diuision, iusques à ce que le quotient soit nombre premier, c'est à sçauoir n'ayāt aucune partie aliquotte; & tous les diuiseurs, ensemble le dernier quotient, seront parties aliquottes incomposees, lesquelles estans multipliees par ordre entr'elles produiront le nombre composé donné, & les caracteres de chacunes d'icelles parties aliquottes ioincts ensemble, seront le caractere dudit nombre composé donné. Comme pour exemple, si vous voulez trouuer le caractere de ce nombre composé 24. vous diuiserez iceluy par 2, qui est le moindre nombre premier, & viendra 12 au quotient, lequel quotient vous diuiserez derechef par 2, & viendra 6 au quotient, que vous diuiserez encore derechef par 2, & viendra 3 au quotient, qui est nombre premier: tellement que vous aurez pour les parties incomposees de 24, ces quatre nombres 2, 2, 2, 3. dont les caracteres sont *q. q. q. c.* & partant le caractere appartenant à ce nombre composé 24 sera *qqqc.* Et cest exposant 30. (duquel les parties incomposees sont 2, 3, 5) fera ce signe *qesβ*, & ainsi des autres.

On fera encore la mesme chose, prenant deux quelconques nombres qui multipliez entr'eux, produisent le nombre exposant proposé: Car les signes cossiques d'iceux, composent le signe cossique dudit nombre exposant proposé. Comme 3 & 4, desquels les signes cossiques sont *c.* & *q.* multipliez entr'eux produisent 12, dont le signe cossique sera *qqc.*

Or le contraire de ce que dessus, se fera rendant à chasque caractère incomposé son exposant; puis multipliant iceux exposans ensemble. Comme pour exemple, si nous voulons auoir l'exposant de *qqc.* nous rendrons à chasque caractère son exposant particulier, c'est à sçauoir 1, 2, 3, lesquels multipliez ensemble font 12, qui sera l'exposant dudit signe cossique *qqc.* & ainsi faut-il entendre des autres.

De la numeration des nombres cossiques.

CHAP. III.

LA numeration des nombres cossiques est facile, les choses cy-deuant dictes estans bien entendues: Car quand ils sont posez seuls, comme 5 *R.*, ou 8 *q.* ou 20 *c.* & c. ils s'expriment ainsi, 5 racines ou 8 quarréz, ou 20 cubes & c; mais quat ils sont proposez cōioincts entr'eux par ce signe + au milieu, ou par celuy cy—, cōme 5 *R.* + 8 *q.*; ou 8 *q.* — 5 *R.*; ou 20 *c.* + 8 *q.* — 5 *R.*; lesquels deux signes + & — ont leur signification cōtraire: car cestuy cy +, est dict signe d'adiouster, & signifie plus; mais celuy cy —, est appelé signe de soustraire, & denote moins; & les nombres ausquels est interposé le signe +, sont dicts cōposez; mais ceux ausquels interuient le signe —, sont nommez diminuez; & finablement ceux ausquels l'un & l'autre signe est interposé, sont appelez mixtes, jaçoit que tous pourroient estre dits composez: Partant donc ce composé 5 *R.* + 8 *q.* s'exprime 5 racines plus 8 quarréz; mais ce diminué 8 *q.* — 5 *R.*; 8 quarréz moins 5 racines: & ce myxte cy 20 *c.* + 8 *q.* — 5 *R.*; 20 cubes plus 8 quarréz moins 5 vnitez: car comme il a esté dict, le nombre qui n'a point de caractère cossique apres soy, signifie vn nombre absolu composé d'vnitez.

Or ces signes + & — sont tousiours referez aux nombres qui les suivent, & le nombre qui precede n'est a l'un ny a l'autre.

tre desdits signes. Or le sens des nombres composez, diminuez, ou mixtes est facile : car quād nous disōs $5 \text{ R} + 89$. nous entendons 5 racines ensemble avec 8 quarrez, c'est à dire 41 vnitez, si la racine est 2 , & le quarré 4 . ainsi aussi quand nous disons $89 - 5 \text{ R}$ nous entēdons que de 8 quarrez, sont ostez 5 racines ; c'est à dire que le nombre proposé est 12 vnitez, si la racine est 2 , & le quarré 4 . & le mesme faut-il dire des autres.

De l'addition & soustraction des nombres coſſiques.

CHAP. IIII.

Quand il faut adiouſter vn nombre coſſique à vn nombre coſſique d'autre denomination ou caractère, l'addition ſe fait mettant ce ſigne $+$ au milieu, & vient vn nombre composé ; comme ces deux nombres 6 R , & 8 adiouſtez ensemble ſont $6 \text{ R} + 8$. de meſme 6 R & 8 c . ſont $6 \text{ R} + 8 \text{ c}$. &c.

Mais quand il faut adiouſter vn nombre coſſique à vn autre nombre coſſique de meſme appellation ou caractère, les nombres ſe doiuent adiouſter, & à la ſomme appoſer le meſme caractère : comme ces nombres 49 & 99 adiouſtez ensemble, ſont 139 ; de meſme 5 R & 4 R , ſont 9 R &c.

Par meſme raiſon quād il faut ſouſtraire vn nombre co. d'un nombre co. d'autre denomination, la ſouſtraction ſe fait mettant ce ſigne $-$ au milieu, & fait vn nombre diminué : comme pour exemple ce nombre 6 R oſté de 89 , reſte $89 - 6 \text{ R}$; de meſme 12 de 6 R , reſtent $6 \text{ R} - 12$. &c.

Mais quand il faut ſouſtraire vn nomb. co. d'un autre nomb. co. de meſme caractère, on doit ſouſtraire le nomb. du nombre, & au reſte appoſer le meſme caractère : comme 4 R de 9 R , reſtent 5 R ; & 9 c . de 20 c . reſtent 11 c . &c.

Mais quand il faut adiouſter des nombres coſ. composez, diminuez, & mixtes, ou oſter l'un de l'autre, il les faut poſer l'un au deſſous de l'autre, tellement que les nomb. de meſme appellation ſe reſpondent entr'eux. Que ſi en l'un ou l'autre d'iceux n'eſt trouué vn nomb. reſpondant à quelqu'un, ſera

posé au lieu de la figure 0, avec le signe +, & estans ainsi constitués, seront adioustez les nombres de mesme appellation, ou ostez l'un de l'autre, & les sommes, ou nombres restez, souscrits en leurs propres lieux, avec les mesmes signes + ou —, qui seront trouvez és nombres adioustez, ou soustraits.

Exemples d'Additions.

R.	N.	q.	R.	N.	c.	N.	q.	
6 + 8.		7. + 8 — 5.			7. + 8 — 3.			
7 + 10.		3. + 9 — 8.			4 + 11 — 5			
13 + 18		10 + 17. — 13.			11 + 19 — 8			
c.	q.	R.	N.	β.	qq.	R.	N.	q.
4 + 11 + 0 — 6.				7 + 0 + 8 — 5 + 4.				
3 + 0 + 8. — 4.				4 + 9 + 6 — 9 + 0.				
7 + 11 + 8 — 10.				11 + 9 + 14 — 14 + 4.				

Exemples de soustraction.

c.	q.	R.	N.	c.	N.	q.
7 +	11 +	8 —	10.	11 +	19 —	8.
3 +	0 +	8 —	4.	4 +	11 —	5.
4 +	11 +	0 —	6.	7 +	8 —	3.
β.	qq.	R.	N.	q.	R.	N.
11 +	9 +	14 —	14 +	10 +	17.	— 13.
7 +	0 +	8 —	5 +	7 +	8 —	5.
4 +	9 +	6 —	9 +	3 +	9 —	8.

Quand il reste + 0, ou — 0, il n'en faut tenir compte, comme au premier exemple où il reste 4 c + 11 + 0 — 6 N, sera seulement 4 c + 11 q — 6.

Que si en l'addition ou soustraction, l'un des nombres avoit le signe +, & l'autre —, il faut changer d'espece, c'est

à dire qu'en l'addition, il faut soustraire le moindre du plus grand, & au nombre restant donner le signe du plus grand nombre duquel a esté faite la soustraction.

Exemples.

q.	R.	qc.	β.	qq.	c.	R.	N.
6	+	8.	7	+	0	+	8
2	—	10	7	+	5	—	11
8	—	2.	14	+	5	—	3
							— 11 — 4 + 8.

Mais s'il falloit adioufter ces deux nombres 6q — 8 R., & 12 R. — 3q, il les faudroit poser comme ensuit.

$$\begin{array}{r}
 \text{q.} \quad \text{R.} \\
 + \quad 6. \quad - \quad 8. \\
 - \quad 3 \quad + \quad 12
 \end{array}$$

$$3 + 4.$$

Mais en la soustraction, il faut adioufter les nombres ensemble, & donner à la somme le signe du nombre supérieur, duquel doit estre faite la soustraction.

Exemples.

q.	R.	qc.	β.	qq.	c.	R.	N.
8	—	2.	14	+	5	—	3
6	+	8.	7	+	0	+	8
2	—	10.	7	+	5	—	11
							— 11 — 0 + 0.

Que s'il aduenoit qu'és deux nombres de la soustraction fussent mesme signe, & que le nombre à soustraire fust plus grand que celui duquel il faut soustraire, il faudroit faire la soustraction du petit du plus grand, & au reste donner le signe contraire, comme il appert és exemples suyuaus.

c.	R.	q.	R.	N.	c.	q.	N.
6 +	8.	9.	+ 4 —	5.	6 +	5 +	3.
2 +	10.	4 +	7 —	8.	7 —	9 +	10.

4 — 2. 5 — 3 + 3. — 1 + 4 — 7. qui se doive écrire 4q — 1 c — 7; d'autant que le signe — n'est pas bien disposé au premier nombre.

Or tous les preceptes de l'addition & soustraction enseignez cy dessus, au regard des signes + & —, peuvent estre retenus en memoire par les deux regles suivantes.

1. A mesmes signes on doit poser le mesme signe; sinon en la soustraction, quand les nombres sont posez à rebours: car alors le superieur est soustraiçt de l'inferieur, & de + est faict —: mais de — est faict +.

2. Les signes diuers changent l'espece de l'operation: & en l'addition est posé le signe du plus grand nombre: mais en la soustraction est posé le signe du nombre superieur.

Quant à la preuve de l'addition & soustraction, elle se fait en deux manieres: la premiere, l'addition preuue la soustraction, & la soustraction l'addition, tout ainsi qu'on faict les nombres absolus.

Exemples de la preuve des trois dernieres additions & soustractions.

q.	R.	qc.	f.	qq.	c.	R.	N.	q.	R.
8 —	2.	14 +	5 —	3 —	11 —	4 +	8.	+ 3 +	4.
2 —	10.	7 +	5 —	11 —	11 +	0 +	0.	— 3 +	12.
6 +	8.	7 +	0 +	8 +	0 —	4 +	8.	6 —	8.

Preuve de la soustraction.

c.	R.	q.	R.	N.	c.	q.	N.
4 —	2.	5 —	3 +	3.	— 1 +	4 —	7
2 +	10	4 +	7 —	8.	+ 7 —	9 +	10
6 +	8.	9 +	4 —	5.	6 —	5 +	3.

Pour faire autrement ladicte preuve, il faut construire vne table avec quelques progressions geo. commençant à l'vnité, comme il appert cy dessous.

N	R.	q.	c.	qq.	β	qc.	b β	qqq.
1	2	4	8	16	32	64	128	256
1	3	9	27	81	243	719	2187	6561
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$

Par apres il faut resoudre les nombres cossiques à adiouster selon aucunes d'icelles progressions en nombres absolus, puis les adiouster ensemble, ou soustraire l'un de l'autre, selon les signes + ou -, & puis apres soient semblablement resouls, les nombres cossiques de la somme recueillie; & si l'addition a esté bien faicte, lesdits nombres resouls de la somme recueillie, seront egaux aux nombres resouls à adiouster ensemble; comme pour exemple, nous auons trouué cy deuant que $6q + 8R$ adioustez avec $2q - 10R$ font $8q - 2R$ pour en faire donc la preuve, nous resoudrons en nombres absolus les deux nombres à adiouster, sçauoir est $6q + 8R$, & $2q - 10R$, & prenant la resolution en la progression dont la racine est 2, $6q$ font 24, & $8R$ font 16, lesquels 24 & 16 joints ensemble, à cause du signe + font 40; de mesme $2q$ font 8, qui adioustez à 40 (car le signe + est tousiours entendu estre au nombre qui n'a nul signe appose) font 48; & $10R$ font 10, qui soustrais de 48, à cause du signe -, reste pour la somme de l'addition 28. & resoluant $8q - 2R$, qui est la somme recueillie de l'addition, viendront aussi 28; & partant l'addition a esté bien faicte.

Quant à la preuve de la soustraction, elle se faict en la mesme maniere: car les nombres cossiques d'icelles estans reduis en nombres absolus, & les nombres à soustraire, estans adioustez aux restans, doiuent estre egaux aux nombres dont la soustraction a esté faicte: comme pour exemple, nous auons cy deuant trouué que $7c - 9q + 10N$. soustrais de $66 - 5q$

$+3$ N. laissent $4q - 1c - 7N$. donc $7c - 9q + 10N$, resouls en nombres absolus selon la progression dont la racine est 3, font 118; & $4q - 1c - 7$, font 2, qui adioustez à 118, font 120; & $6c - 5q + 3N$ font aussi 120: & partant la soustraction a esté bien faicte.

*De la multiplication & diuision des nombres
cossiques.*

CHAP. V.

Quand vn nombre cossique est multiplié, ou diuisé par vn nombre absolu, le produict à mesme denomination cossique; comme pour exemple $4R$ ou $8q$ estans multip. par 3. prouiennent 12 R . ou 24 q . &c. Item 12 q . ou 24 R . estans diuisez par 4. viennent 3 q . ou 6 R .

Mais quant le nombre cossique est multiplié, ou diuisé par vn nombre cossique, le proquict est d'autre denomination, sçauoir est de celle qui se faict des exposans joincts ensemble, quant à la multiplication: comme pour exemple $4R$ multipliez par $7R$ font 28 q . car l'exposant de R est l'vnité. Donc les 2 sont exposans de q , & $4R$ multipliez par $5q$ font 20 c . car 1 est exposant de R , & 2 de q , lesquels adioustez ensemble, font 3 exposans de c . Et quant à la diuision, le quotient à la denomination du nombre restant, l'exposant du diuiseur estant osté de l'exposant du diuisé: Comme pour exemple 36 qc , diuisé par 4 qq . le quotient est 9 q . Car 4 exposant de qq estant osté de 6 exposant de qc . reste 2 exposant de q . & 18 qq . par 3 c , vient 6 R : & 8 q par 8 q , vient 1 N , &c.

Quand le nombre cossique composé ou diminué, est multiplié ou diuisé par vn nombre absolu ou cossique, tant simple que composé ou diminué, outre ce qui est dict cy dessus, il faut sur tout auoir regard aux signes $+$ & $-$: Car quand les nombres se multiplias ou diuisans ont vn mesme signe, il faut apposer au produict le signe $+$; mais quand l'un d'iceux est $+$, & l'autre $-$, il faut donner au produit le signe $-$. Ce qui est aisé à retenir en memoire par la regle suiuite.

Aux signes semblables faut poser + ; mais aux dissemblables faut poser — .

Exemples de la multiplication.

$$\begin{array}{r}
 7q - 4R. \\
 \underline{19.} \\
 63q - 36R.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 7q + 4R. \\
 \underline{9N.} \\
 63q + 36R.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 7q - 4R. \\
 \underline{9R.} \\
 63q - 36q.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8q + 9. \\
 \underline{8q + 9.} \\
 72q + 81. \\
 64qq + 72q \\
 \hline
 64qq + 144q + 81.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8q - 9. \\
 \underline{8q - 9.} \\
 -72q - 81. \\
 64qq - 72q \\
 \hline
 64qq - 144q - 81.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6q + 8R - 6N. \\
 \underline{2q - 4N.} \\
 -24q - 32R + 24N. \\
 12qq + 16c - 12q. \\
 \hline
 12qq + 16c - 36q - 32R + 24N.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 9q + 8N - 3R. \\
 \underline{7c - 4qq. - 8q.} \\
 -72qq - 64q + 24c \\
 -36qc - 32qq + 11\beta. \\
 63\beta + 56c - 11qq. \\
 \hline
 -36qc + 75\beta - 125qq + 80c - 64q.
 \end{array}$$

Et d'autant que comme il a defa esté dict, le signe — n'est bien au commencement, on doit colloquer le produit ainsi.

$$75\beta - 36qc - 125qq + 80c - 64q.$$

Exemples de la division.

Diviser $36R + 24$ [$9R + 6$
 par 4 4

Plus $45c + 36q + 27R$ [$5q + 4R + 3N$
 par $9R$ $9R$ $9R$

Plus $45c + 36q - 27R$ [$5\frac{1}{2}q + 4\frac{1}{2}R - 3N$
 par $8R$ $8R$ $8R$

$$\begin{array}{r} \text{Plus } 38q - 58R + 24. [6R - 8N. \\ \text{par } 5R - 3N \\ 5R - 3N. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Plus } 12qq + 25c - 35q - 32 + 24N [6q + 8R - 6N. \\ \text{par } 2q + 5R - 4N \\ 2q + 5R - 4N. \\ 2q + 5R - 4N. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Plus } 4c + 0q + 5R + 3 [1q - 1R + 1. \\ \text{par } 1R + 1 \\ 1R + 1 \\ 1R + 1 \end{array}$$

Et conuient noter qu'en toutes diuisions des nombres cof-
fiques, les denominations doiuent estre cōtinuees d'ordre, &
partant quand il y a quelque denomination de m̃aque, il faut
poser o au lieu d'icelle, comme il appert es deux precedentes
exemples, la derniere desquelles i'ay faict en ceste maniere:
I'ay posé $1R + 1$ au dessoubs de $1c + 0q$, & trouue que $1R$ est
en $1c$; $1q$ que ie pose au quotient, & multiplie ledit $1q$ par mon
diuiseur, & vient $1c + 1q$ que l'oste de $1c + 0q$, & reste de tout
le nombre à diuiser $-1q + 0R + 1$: puis apres l'aduāce mon
diuiseur soubs $-1q + 0R$. & trouue qu'il y est $-1R$, que
ie pose au quotient, & multiplie ladite $1R$ par ledit diuiseur,
& vient $-1q - 1R$, que ie soustrais de $-1q + 0R$, & reste
de tout le nombre à diuiser $1R + 1$, soubs lequel ie pose le
diuiseur, & trouue qu'il y est $1N$ precisēment.

Or quand le diuiseur est nombre composé ou diminué, &
qu'il ne peut diuiser precisēment, alors il faut seulement in-
terposer vne ligne entre-deux, ainsi qu'es fractions, comme
es deux exemples suyans.

$$8\beta \text{ par } 1q + 4N. \quad 8q - 9R. \text{ par } 4R + 3N$$

Les quotiens sont

$$\begin{array}{r} 8\beta \\ \hline 1q + 4N \end{array} \quad \begin{array}{r} 8q - 9R \\ \hline 4R + 3N \end{array}$$

Il faut faire en la mesme maniere, quand vn nombre cossique simple ou composé doit estre diuisé par vn nombre cossique simple de plus grande denomination : comme 89 diuisez

par 29c constituent ceste fraction $\frac{89}{29c}$ De mesme 99 + 4 estās

diuisez par 3c. font $\frac{99+4}{3c}$ &c.

Reste à enseigner à faire la preuue de la multiplication & diuision : laquelle se faiçt en deux manieres. Premièrement la diuision preuue la multiplication ; & la diuision se preuue par la multiplication, tout ainsi qu'en l'arithmetique vulgaire.

L'autre sorte de preuue se faiçt par la resolution des nombres cossiques, selon quelque racine des progressions géométriques contenuës au chapitre precedent. Car les nōbres cossiques resouts, estans multipliéz entr'eux, doiuent produire vn mesme nombre que le produit des nombres cossiques aussi resolt selon la mesme racine : & le nombre cossique qu'il faut diuiser resolt, doit produire autant diuisé par le diuiseur resolt, que le quotient aussi resolt. Cōme pour exemple nous auons trouué cy-deuant que $6q + 8R - 6N$ multipliez par $2q - 4N$, produisent $12qq + 16c - 36q - 32R + 24N$. pour en donc faire la preuue, nous resoudrons les deux nombres cossiques en nombres absolus, & viendront (selon la progression dont 2 est racine) 34, & 4, qui multipliés entr'eux produisent 136 : mais la resolution du produit $12qq + 16c - 36q - 32R + 24N$, est aussi 136 : & partant la multiplication a esté bien faiçte. Nous auons aussi trouué que $1c + 1$, diuisez par $1R + 1$. Le quotient est $1q - 1R + 1$, lequel quotient donne 3 par la resolution de la progression dont la racine est 2 : mais les deux nombres cossiques resolus par la mesme progression, sont 9 & 3 ; & 3 diuisant 9, le quotient est aussi 3 : & partant la diuision a esté bien faiçte.

Des fractions des nombres cossiques.

CHAP. VI.

EN l'Algorithme des fractions cossiques, les operations sont presque sēblables qu'es fractions vulgaires : il n'y a qu'à

qu'à adjoûster ce qui concerne les caractères coſſiques, & les ſignes + & —. Et premierement quand à la numeration, ce-

ſte fraction — ſignifie ; vnitez eſtre diuiſees par 8 $\cancel{R}$; & — de-
 $\frac{3}{8\cancel{R}}$ $\frac{7q}{9}$

notre 7 quarez eſtre diuiſez par 9 vnitez: Item $\frac{99q + 8q}{6c}$.

ſignifie que ce nombre $99q + 8q$ eſt diuiſé par 6c. &c.

L'abbreuiation ſe faiét en deux manieres: Car ou les nom-
 bres ſeront abbreuiez, comme és fractions vulgaires, ſans
 toucher aux caractères coſſiques; ou bien ſeront auſſi abbre-

uiez les caractères coſſiques: comme ceſte fraction —, quâd
 $\frac{15}{5\cancel{R}}$

aux nombres, elle ſera reduicte à ceſte-cy —: Item $\frac{3}{1\cancel{R}}$ $\frac{9q + 36}{81}$.

ſera reduicte à $\frac{1q + 4}{9}$: Item $\frac{35\cancel{R} + 28}{7q + 14}$ ſera reduicte à $\frac{5\cancel{R} + 4}{1q + 2}$:

Item $\frac{18q - 9\cancel{R}}{6\cancel{R} + 3q}$ ſera reduicte à $\frac{6q - 3\cancel{R}}{2\cancel{R} + 1q}$ &c.

Et quand à l'abbreuiation des caractères coſſiques, elle eſt
 faiète ſouſtraiant l'expoſant du moindre caractere, des expo-
 ſans des autres caractères; car ſi aux nombres reſtans, ſont
 poſez les propres caractères, l'abbreuiation ſera acheuée

quand aux caractères. Comme ceſte fraction $\frac{8q}{2qc}$ quand aux

caractères, ſera reduitte en celle-cy $\frac{8}{2qc}$; puis apres quâd aux

nombres, a ceſte-cy $\frac{4}{1qq}$: Item $\frac{18q - 9\cancel{R}}{6\cancel{R} + 3q}$ quand aux nom-

bres & caractères, ſera reduicte à $\frac{6\cancel{R} - 3}{2 + 1\cancel{R}}$, &c.

Quand à la reduction des fractions coſſiques à vn meſme
 denominateur, elle s'obtient multipliant en croix les nume-
 rateurs par les denominateurs; & les denominateurs entr'eux,

tout ainsi qu'es fractions vulgaires : comme ces fractions

$$\frac{3\cancel{B}L}{49} \text{ \& } \frac{4^c}{15\cancel{b}\beta} \text{ estans reduites enmesme denomination, se-}$$

$$\text{ront } \frac{16\beta}{20999} \text{ \& } \frac{16\beta}{20999} \text{ \& c.}$$

Que s'il faut reduire quelque nombre entier, & vne fractio.
a mesme denomination ; il faudra supposer l'vnité estre de-
nominateur du nombre entier, & poursuiure ainsi que dessus.

Comme $6 \text{ \& } \frac{4\cancel{B}L}{79}$ seront posez ainsi $\frac{4\cancel{B}L}{79}$; puis estans reduites
comme dessus, elles feront $\frac{429}{79} \text{ \& } \frac{4\cancel{B}L}{79}$: Item $\frac{59}{1} \text{ \& } \frac{4^c}{39}$
ront reduictes a $\frac{1599}{79} \text{ \& } \frac{4^c}{39} \text{ \& c.}$

Mais si aux entiers est ioincte quelque fraction, il faudra
premierement reduire les entiers en icelle fraction ; ce qui se
fait multipliant les entiers par le denominateur de la fraction,
& adioustant au produit le numerateur. Comme si nous vou-

lons reduire $49 + \frac{2\cancel{B}L}{10} \text{ \& } \frac{39}{1\beta}$ a vne mesme denomination, nous
multiplierons premierement 49 par 10 , afin que nous ayos ces
deux fractions $\frac{49\beta + 2\cancel{B}L}{10} \text{ \& } \frac{39}{1\beta}$ lesquelles nous reduirons a ces
deux cy $\frac{49\beta + 290}{1999} \text{ \& } \frac{39}{1999}$; & ainsi des autres.

Quant aux autres 4 operations des fractions coisiques,
sçauoir est, addision, soustraction, multiplication & diuision,
elles ne different a celles que nous auons enseignees es, fra-
ctions de nostre Arithmetique, sinon a raison des caracteres
coisiques, & des signes $+$ & $-$. Parquoy nous mettrons seu-
lement icy des exemples de chaque operation.

Exemples de l'addition.

Adioustant $\frac{3\cancel{B}L}{2}$ avec $\frac{49}{30}$ viendront $\frac{999 + 89}{60}$, c'est à

$$\begin{array}{rcl}
 99+8 & 48 & 48 \\
 \text{dire} \text{ --- : Item --- avec --- font --- Itẽ ---} & & 1929+576R \\
 6R & 79 & 12R-39 \\
 9R+29 & 2199-89 & 2199-69+9R \\
 \text{adioustez avec --- font --- quire-} & & \\
 36c & 36c & 36c \\
 7c-29+3 & 59-1R & 3c+1 \\
 \text{duis font --- : Item --- adioustez avec ---} & & \\
 129 & 7c-2 & 299+4R \\
 39c-6\beta+21c-129-2 & & \\
 \text{font ---} & & \\
 146\beta+2499-8R & &
 \end{array}$$

Exemples de la soustraction.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Si on oste } 3R & 999+89 & 169 \\
 \text{de --- resteront ---, c'est à dire} & & \\
 2N & 6c & 12c \\
 4 & 1 & 3R \\
 \text{Item --- de ---, resteront --- : Item ---} & & 6c-4 \\
 3R & 29 & 4N \\
 4 & 25-49 & 89 \\
 \text{de ---, resteront --- : Item --- de ---} & & 4N \\
 2R+3 & 8R+2 & 2c-6N \\
 11c+79 & & 2c-6N \\
 \text{resteront ---} & &
 \end{array}$$

Exemples de la multiplication.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Multipliant } 3 & 1 & 3 \\
 \text{par --- viennent --- : Item --- par ---} & & \\
 4R & 2R & 89 \\
 1R & 1R & 3R \\
 \text{---, viennent --- : Item --- par ---, viendront --- : Item ---} & & 29 \\
 4 & 89 & 47 \\
 2R & 29-10R & 8\beta \\
 \text{par 1R ---, viendront --- : Item --- par ---} & & 3R+2 \\
 3 & 3 & 49-1R \\
 2R-4 & 69-8R+8 & 79+8R \\
 \text{---, viendront --- : Item ---} & & \\
 19+3 & 499-1c-129-1R & 5c-11 \\
 & & V ij
 \end{array}$$

$$\text{par } \frac{4R}{59} \text{ --- } 8N, \text{viendront } \frac{329 \text{ --- } 18099 \text{ --- } 1920}{25\beta \text{ --- } 559}$$

Exemples de la division.

$$\begin{array}{l} \text{Divisant } \frac{3}{89} \text{ par } \frac{1}{2R}, \text{viendront } \frac{6R}{89} \text{ ou } \frac{3}{4R} : \text{Item} \\ \frac{1R}{89} \text{ par } \frac{1}{4R}, \text{viendront } \frac{49}{89} \text{ ou } \frac{30}{8\beta} : \text{Item } \frac{3R}{49} \text{ par } \frac{1}{12\beta} \\ \text{viendront } \frac{2496}{2R} \text{ ou } \frac{1}{29 \text{ --- } 10R} : \text{Item } \frac{1R}{3} \text{ par } \frac{1}{2R \text{ --- } 4} \\ \text{dront } 1R \text{ --- } 5 : \text{Item } \frac{69 \text{ --- } 8R \text{ --- } 8}{499 \text{ --- } 16 \text{ --- } 129 \text{ --- } 3R} \text{ par } \frac{19 \text{ --- } 3}{3R \text{ --- } 2} \\ \text{dront } \frac{49 \text{ --- } 1R}{1R} \end{array}$$

Quant à la preuve de ces 4 operations, elle se fait en la me sme maniere que celle des entiers.

De la regle d'Algebre.

CHAP. VII.

Estant proposee quelque question, soit posé pour la nombre incognu $1R$, (on peut aussi quelquesfois poser plusieurs racines, comme deux, ou trois, ou d'auantage pour la commodité de la question proposee) laquelle soit examinee selon la teneur de la question, iusques à ce qu'on ait trouué quelque equation: Soit icelle reduicte, s'il en est besoing: puis apres par le nombre du plus grand caractere cossique soit diuise l'autre nombre de lequation. Car ou le quotient sera le nombre qui estoit cherché: scavoir est la valeur de la racine posée au commencement,

ou quelque racine du quotient rendra cogneu le nombre eherché. Or le diuiseur demonstrea par son caractere cossique, quand & quelle racine il faudra extraire du quotient.

Ceste regle à 4 parties, dont il y en a seulement deux du tout necessaires: sçauoir est la premiere & troisieme: & quant aux deux autres, il n'en est pas tousiours besoing. Et auant que de traicter particulièrement de chacune d'icelles, nous les exposerons icy, proposant ce probleme.

Trouuer un nombre, duquel la tierce & quarte partie estans ostez, le nombre restant soit 10.

Ie pose le nombre incogneu estre 12 ; c'est à dire que ie pose 12 estre egale au nombre incogneu que nous cherchûs. L'examine donc 12 selon la teneur de la question, c'est à dire que ie prends d'icelle $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, sçauoir est $\frac{1}{3}$ 12 & $\frac{1}{4}$ 12 , qui font ensemble $\frac{7}{12}$ 12 , que i'oste de 12 , & restent $\frac{5}{12}$ 12 . Maintenant ie ratiocine ainsi: puisque 12 est posee egale à tout le nombre incogneu, $\frac{1}{3}$ 12 sera egal au tiers d'iceluy, & $\frac{1}{4}$ 12 egal au quarré du mesme; & puisque la tierce & quarte partie du nombre total est soustrait, le nombre restant est 10, il s'ensuit que $\frac{1}{3}$ 12 & $\frac{1}{4}$ 12 , c'est à dire $\frac{7}{12}$ 12 , estans ostez de 12 , le nombre restant $\frac{5}{12}$ 12 estre egal au nombre restant 10, pource que si de choses egales sont ostees choses egales, les restes sont egaux. Est donc trouuee equation, ou bien egalité entre $\frac{1}{12}$ 12 , & ce nombre 10: car equation n'est autre chose qu'une egalité de valeur entre deux quantitez, ou choses diuersement denommées: & voila quant à la premiere partie de la regle cy dessus. Et pour le regard de la seconde partie, qui est la reduction, il n'en est besoin en l'equation de nostre exemple: mais nous monstrerons cy apres, quand & comment l'equation se doit reduire. Et pour le regard de la diuision, qui est la 3. partie de la regle: en nostre equation trouuee entre $\frac{1}{12}$ 12 & 10 N, le plus grand caractere cossique est 12 : c'est à dire que 12 à plus grand exposant que N: parquoy ie diuise ce nombre 10 par $\frac{1}{12}$, reste du caractere 12 , & vient au quotient 24, qui est le nombre eherché. Parquoy la 4. partie de la regle d'Algebre n'a lieu en nostre exemple: mais quand, & quelle racine du quotient manifestera le nombre incogneu, il sera enseigné cy-apres. Maintenant si du nombre trouué 24 on prend $\frac{1}{3}$, sçauoir est 8: puis $\frac{1}{4}$, sçauoir est 6: icelles deux parties font ensemble 14, qui ostez des 24, reste le nombre 10, ainsi qu'il estoit requis en la proposition.

De la reduction d'equation.

CHAP. VIII.

POur l'intelligence de la reduction des equations, est à noter, que si on adiouste ou soustraiçt choses egales de chascque terme de l'equation, ou bien qu'on les multiplie ou diuise par vn mesme nombre, qu'il y aura pareillement equation entre les produicts. Comme pour exemple, s'il y a equation entre $12R$, & 72 ; ostant $4R$ de chascque terme, restera encore equation entre $8R$, & $72 - 4R$: car puisque $12R$ sont egales à 72 ; $1R$ sera egale à 6 , & partant $8R$ seront egales à 48 , & $4R$ à 24 , qui ostez de 72 , restera aussi 48 . Item si à chascque terme de l'equation d'entre $8R$, & $72 - 4R$, on adiouste 10 , viendra equation entre $8R + 10$, & $82 - 4R$. Car il est manifeste que chascque terme vaut 58 . Item s'il y a equation entre $3R + 12$, & $72 - 7R$; multipliant chascque terme par 2 , viendra aussi equation entre $6R + 24$, & $144 - 14R$: car l'un & l'autre terme faict 60 . Ainsi aussi si nous diuisions par 6 chascque terme de ceste derniere equation, sera produict equation entre $R + 4$, & $24 - 2R$: car l'un & l'autre terme faict 10 .

Maintenant quand en la solution de quelque question on est paruenue à l'equation; si le plus grand caractère cosifique, par le nombre duquel (selon la regle d'Algebre) on doit diuiser l'autre terme de l'equation n'est posé seul en l'un & l'autre terme d'icelle equation, ou qu'estant seul en l'un il ne le soit en l'autre, alors la diuision ne se peut faire. Comme pour exemple, si l'equation est trouuee entre $9R + 12$, & $78 - 12R$; la diuision ne se peut faire, pource qu'en chascque terme est trouué ce caractère R , & cestuy-cy N : Semblablement si l'equation est trouuee entre $9R - 12$, & 42 : tu vois que la diuision ne se peut faire par 9 nombre du plus grand caractère cosifique R , pource que $9R$ ne sont pas posées seules, ains $9R - 12$.

Ainsi aussi si l'equation est trouuee entre $9R$, & $72 - 12R$: Item entre $19 - 3R$, & 108 : Item entre $19 - 48$, & $8R$: Item entre $108 + 8R$, & $29 - 12R + 60$, &c. en toutes lesquelles il est manifeste que la diuision ne se peut faire comme requiert la regle d'Algebre. Parquoy aduenant semblables equations,

elles doiuent estre reduictes en autres, esquelles le plus grand caractere cossique soit seul en vn terme de l'equation, & ne soit repeté en l'autre, & esquelles aucun caractere cossique ne soit posé deux fois. Or ceste reduction se fera ainsi qu'il ensuit :

Si vne particule de l'equation a le signe —, il la faut transporter, c'est à dire adiouster à l'autre terme : comme si vne equation est trouuee entre $9R - 12$, & 42 : nous adiousterons 12 à 42 , & nous aurons l'equation entre $9R$, & 54 : Item l'equation estant trouuee entre $9R$, & $72 - 3R$, adioustant $3R$ à chasque terme, nous aurons l'equation entre $12R$, & 72 : item l'equation estant entre $29 - 3R$, & 104 , adioustant $3R$ à chasque terme, l'equation sera entre 29 , & $3R + 104$: Item l'equation estant entre $59 - 40$, & $10R$, adioustant -40 , nous aurons vne equation entre 59 , & $10R + 40$. Mais quand vne particule a le signe +, il la faut soustraire : comme si l'equation est trouuee entre $11R + 12$, & 78 , nous soustrairons $+ 12$, & restera l'equation entre $11R$, & 66 : Item l'equation estant trouuee entre $3R + 6$, & 24 , ostant $+ 6$, restera l'equation entre $3R$, & 18 : Item si vne equation est trouuee entre $59 + 20$, & 100 , nous osterons $+ 20$, & restera l'equation entre 59 , & 80 : Item vne equation estant entre $39 + 2R$, & 56 , ostant $+ 2R$, l'equation restera entre 39 , & $56 - 2R$. Que si l'un & l'autre signe + & — sont en vne equation, il faut adiouster la particule du signe —, mais soustraire celle du signe +. Comme si vne equation est trouuee entre $9R + 12$, & $78 - 2R$: nous adiousterons premierement $- 2R$, & l'equation sera entre $11R + 12$, & 78 ; puis soustrayant d'icelle $+ 12$, restera l'equation entre $11R$, & 66 : Item si vne equation est entre $59 - 3R$, & $39 + 20$, nous adiousterons $3R$, & l'equation sera entre 59 , & $39 + 3R + 20$; & ostant de ceste-cy 39 restera l'equation entre 29 , & $3R + 20$: Item si vne equation est trouuee entre $108 + 8R$, & $29 - 12R + 60$, nous adiousterons premierement $12R$, & l'equation viendra entre $108 + 20R$, & $29 - 60$; & d'icelle estans ostenz 60 , restera l'equation entre 29 , & $20R + 48$. Que s'il adient quelque equation, comme entre $6R - 10$, & $10R - 14$, en laquelle les nombres 10 , & 34 ont mesme signe —, il faut oster 10 de chasque terme, & restera l'equation entre $6R$, & $10R - 24$; & d'autant qu'en icelle les nombres $6R$ & $10R$ ont aussi vn mesme +, il faut oster le moindre $6R$ du plus grand $10R$, & restera l'equation entre $0R$, & $4R - 24$; & adioustant 24 à chasque terme d'icelle, viendra l'equation entre 24 , & $4R$. Soit derechef equation entre $54 + 4R$, & $19 - 6R + 30$;

Premierement pource que $+4R$, & $-6R$ ont signes diuers, il faut adiouter $4R$ à $6R$, & viendront $-10R$, & sera equation entre 54 , & $19-10R+30$; puis apres d'autant que 54 , & 30 , ont vn mesme signe $+$, il faut soustraire 30 de 54 , & restera equation entre 24 , & $19-10R$: tiercement ie transpofe $-10R$, afin que l'equation soit entre 19 , & $10R+24$: & ainsi des autres.

Quant à la reduction des equations qui sont trouuees en fractions, elle se faiet la reduisant en equation d'entier par la multiplication en croix. Comme si vne equation est trouuee

entre $\frac{3R+12}{5}$ & $\frac{369-198R}{3R}$; multipliant ces fra-

ctions en croix, ſçauoir est le numerateur de la premiere par le denominateur de la 2. mais le numerateur de la 2. par le denominateur de la premiere, sera faiet equation entre $99+36R$, & $1809-990R$; c'est à dire entre $18R+2$, & $20R-110$, qui estant reduite, comme dit est cy de ſus, l'equation sera entre $19R$, & 114 : Item vne equation estant trouuee entre

$\frac{4R+18}{1R}$, & $\frac{12R-58}{2}$;

estant reduite par la multiplication en croix, viendra equation entre $8R+36$, & $129-58R$, qui reduite par transposition sera entre $66R+36$, & 129 .

Que si vne equation est trouuee entre vne fraction, & quelque autre chose: comme entre $\frac{5}{4+1R}$, & vn eſcu, ou vn degre,

ouyne heure, ou vne minutte &c. Il faut poſer vne vnitè pour ceste chose, ainſi $\frac{1}{2}$, afin que l'equation soit entre $\frac{5}{4+1R}$, &

$\frac{1}{2}$, laquelle par la multiplication en croix, sera reduite à l'equation d'entre 5 , & $4+1R$.

Quant à la reduction d'equation d'entre nombres coſſiques irrationaux, & nombre absolu, nous l'enſeignerons à la fin du chapitre 23.

S'il ſe rencontre auſſi quelque equation en laquelle il n'y ait aucun nombre absolu, il faudra abbrevier les caracteres coſſiques: Comme pour exemple, l'equation d'entre 29 , & $12R$ sera reduite à l'equation d'entre $2R$ & 12 : Item l'equation d'entre 196 , & $13+299$ sera reduite à l'equation d'entre 19 , & $13+2$, &c. Mais ceste reduction n'est du tout necceſ-

faire deuant l'extraction des racines des nombres coſſiques ſimples, comme nous dirons au chap. 10.

De la diuiſion que requiert la regle d'Algebre.

CHAP. IX.

LA reduction eſtant faiſte, la regle d'Algebre diſt que par le nombre du plus grand caractere coſſique (laiſſant iceluy caractere) on diuiſe l'autre nombre de l'equation : comme ſi l'equation eſt trouuee entre $7R$ & 42 , diuiſant 42 par 7 , nombre du caractere coſſique R , viendra au quotient 6 , qui ſera la valeur d'une racine : Item une equation eſtant trouuee entre $12q$, & $66R+36$, diuiſant $66R+36$ par 12 , le quotient donnera $5\frac{1}{2}R+3$, pour la valeur d'un quarré : Item ſi une equation eſt entre $\frac{1}{3}q$, & $6R+13\frac{1}{3}$, nous diuiſerons $6R+13\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{3}$, & le quotient donnera $18R+40$, pour la valeur d'un quarré : Item une equation eſtant entre $3q$, & $9c+120$, nous diuiſerons $9c+120$ par 3 , & le quotient donnera $3c+40$ pour la valeur d'un quarré de cube &c.

De l'extraction des racines dont faiſt mention la regle d'Algebre.

CHAP. X.

AYant faiſt la reduction des caracteres coſſiques, ſi le plus grand caractere coſſique eſt R , le quotient de la diuiſion mentionnee cy deſſus manifeſtera le nombre que vaut une ſeule racine, comme il a eſté diſt au chap. precedent : ou bien toutes & quantefois que le nombre coſſique de la plus grande denomination ſera egal au nombre coſſique de la plus prochaine moindre denomination, eſtât diuiſé le nombre de la moindre denomination par le nombre de la plus grande, le quotient donnera la valeur d'une ſeule racine, encore que l'abbreuiation des caracteres ne ſoit faiſte. Comme ſi ſſſ ſont egaux à $30q$; 30 eſtans diuiſez par 5 , le quotient 6 ſera la va-

leur d'une seule racine. Mais si le plus grand caractère cossique, estant seul d'une part de l'equation, est plus grand que racine, & de l'autre part soit vn nombre absolu, il faudra extraire du quotient la racine qu'iceluy caractère signifie: eõme si le caractère est q , il faudra extraire la racine quarree; si c , la cubique; si qq , la quarree de quarree, &c. laquelle sera la valeur d'une seule racine. Comme pour exemple, si vne equation est entre $5q$, & 510 ; ayant faict la diuision, il faudra chercher la racine quarree du quotient 144 : Item si $10c$ sont egaux à 270 , il faudra ayant faict la diuision extraire la racine cubique du quotient 27 : Semblablement si $8c$ sont egaux à $2432 + 144$, il faudra trouuer la racine cubique du quotient. Et afin qu'on sçache generally quelle racine il faut tirer du quotient, quand deux nombres cossiques non collateraux sont egaux entr'eux, desquels l'un ny l'autre est nombre absolu, il faut abbreuier les caracteres, afin que l'equation se face entre N , & nombre cossique comme si vne equation est entre $10qc$, & $80q$, soit reduicte icelle à l'equation d'entre $10c$, & 80 : estant donc faict la diuision, il faudra tirer la racine cubique du quotient 8 , & ainsi des autres.

Or la maniere d'extraire les racines des nombres absolus est enseignée en plusieurs Arithmetiques vulgaires: c'est pourquoy nous enseignerons seulement icy la maniere d'extraire les racines des nombres cossiques. Si donc il faut extraire quelque racine d'un nombre cossique simple, soit prise la racine d'iceluy nombre, delaisant le caractère, l'exposant duquel soit diuise par l'exposant du caractère qui denomme la racine qu'il faut extraire, & viendra l'exposant du caractère par lequel sera denommé la racine cherchée. Comme s'il faut trouuer la racine quarree de ce nombre $144q$; ayāt pris la racine quarree d'iceluy nombre 144 , qui est 12 , soit diuise l'exposant de ce caractère q , par l'exposant du caractère q , sçauoir est 2 par 2 , & viendra 1 , qui est exposant du caractère q : $12q$ est donc racine quarree du nombre $144q$. Car si ce nombre $12q$ est multiplié en soy sera produit le nombre proposé $144q$.

Derechef qu'il faille trouuer la racine quarree de $144qc$: ayant pris la racine quarree d'iceluy, qui est 12 , soit diuise l'exposant de ce caractère qc , sçauoir est 6 , par l'exposant de racine quarree, qui est 2 , & viendra 3 , exposant du caractère c : donc $12c$ est racine quarree du nombre $144qc$. Ainsi aussi la racine cubique de ce nombre $64c$, sera $4c$. Car la racine cubique du nombre 64 est 4 , & l'exposant du caractère cube,

ſçavoir eſt 3, eſtant diuiſé par 3, produict l'vnité, expoſant de 84.

Item la racine quarree de ce nombre 2599, ſera 59.

Et la racine quarree de quarree de ce nombre 16999, ſera 29.

Et la racine ſurſolide de ce nombre 3299, ſera 29.

Mais la racine quarree de quarree de ce nombre 8199, ſera 39, &c.

Que ſi vn nombre n'a la racine cherchee, ou par la diuiſion des expoſans, n'eſt produict vn nombre expoſant entier, le nombre coſſique propoſé n'a pas la racine deſiree.

Quand à l'extraction des racines de nombres coſſiques compoſez & diminuez, il eſt à noter qu'on n'a point encore trouué (au moins que ie ſçache) de maniere certaine pour ce faire, ſinon que les expoſans des trois nombres coſſiques de l'equation ayent vn meſme excez entr'eux, c'eſt à dire qu'ils ſoient en proportion Arithmetique; telles ſont les equations ſuiuantes.

19. 6R+72.	les expoſans ſont	2.	1.	0.
19. 71-6R.	les expoſans ſont	2.	0.	1.
19. 14R-48.	les expoſans ſont	2.	1.	0.
199. 189+648	les expoſans ſont	4.	2.	0.
199. 725-49.	les expoſans ſont	4.	0.	2.
199. 4339-41616.	les expoſans ſont	4.	2.	0.
19c. 200c+3455.	les expoſans ſont	6.	3.	0.
19c. 5120-16c.	les expoſans ſont	6.	0.	3.
19c. 800c-156751.	les expoſans ſont	6.	3.	0.
1999. 200099+185076881.	les expoſans ſont	8.	4.	0.
1999. 214651701-2099.	les expoſans ſont	8.	0.	4.
1999. 2000099-78461119.	les expoſans ſont	8.	4.	0.
199. 809+39609.	les expoſans ſont	10.	5.	0.
199. 7424-2009.	les expoſans ſont	10.	0.	5.
199. 20009-999424.	les expoſans ſont	10.	5.	0.

Quand les expoſans gardant la progreſſion Arithmetique ſont tous plus grands que 0, il les faut abbreuiier par la ſouſtraction du moindre nombre expoſant. Comme les ſuiuantes equations.

1.c9. 725b9-4cc.	les expoſans ſont	11.	7.	9.
1.c9. 2000999+34569	les expoſans ſont	11.	8.	5.
1.99. 2009c+143369.	les expoſans ſont	10.	6.	2.

Seront reduites à celles-cy.

199. 725-49.	les expoſans ſont	4.	0.	2.
19c. 200c+3455.	les expoſans ſont	6.	3.	0.

1.999. 20099+14336. les exposans sont 8. 4. 0.

Et ainsi faut-il faire de toutes autres, afin de cognoistre qu'elle racine il faut extraire.

Or pour extraire la racine quarree de tels nombres cossiques; prenez premierement la moitié du nombre des racines; puis au quarré d'icelle moitié, adioustez-y le nombre absolu s'il à le signe +, ou l'ostez s'il à le signe —: & finablement à la racine quarree de ce produit, adionstez la moitié du nombre des racines, si elles ont le signe +, ou l'ostez si elles ont le signe —: & ce qui viendra donnera l'estimation & valeur d'une seule racine quarree. Comme pour exemple, vne equation estant trouuee entre $19.$ & $72-6x$; la diuision estant faicte de $72-6x$, par 1, comme veut la règle d'Algebre, vient le mesme nombre pour la valeur d'un quarré, duquel il faut trouuer la racine. Premierement donc ie prend la moitié du nombre des racines, sçauoir 3; puis au quarré d'icelle moitié, sçauoir est 9, i'adiouste le nombre absolu 72, à cause du signe + & viennent 81; dont ie prend la racine quarree, qui est 9; & d'icelle i'oste 3, moitié du nombre des racines, & reste le nombre 6, pour la valeur de la racine cherchee.

Soit derechef vne equation trouuee entre $19.$ & $6x+72$: & il faut trouuer la racine quarree de ce nombre $6x+72$.

Ie prends premierement la moitié du nombre des racines, sçauoir est 3; puis au quarré d'icelle moitié, qui est 9, i'adiouste 72 à cause du signe +, & sont 81: dont la racine quarree est 9, à laquelle i'adiouste 3 moitiés du nombre des racines, & sont 12, qui est la valeur d'une racine.

Soit encore vne equation entre $19.$ & $18x-72$: & il faut trouuer la racine d'iceluy nombre $18x-72$.

Ie prends donc la moitié des racines, sçauoir est 9; puis du quarré d'icelle moitié qui est 81, ie soustraits 72, à cause du signe —, & restent 9, dont la racine quarree est 3, à laquelle i'adiouste la moitié des racines, sçauoir est 9, à cause du signe +, & sont 12 pour la valeur d'une racine.

Mais il est à noter que tels nombres cossiques diminuez, esquels le nombre absolu à le signe —, ont double racine, sçauoir est, l'une grande & l'autre petite; la grande est trouuee comme dit est cy-dessus: mais on aura la moindre, si la racine quarree du reste de la soustraction est ostee de la moitié du nombre des racines: comme au dernier exemple proposé, si 3, racine quarree du reste 9, est osté de 9 moitié du nombre des racines, resteront 6, pour l'autre & moindre racine d'iceluy nombre cossique $18x-72$. Et faut noter que l'une &

l'autre racine n'est pas toujours propre à la solution d'un problème, ains seulement l'une ou l'autre : c'est pourquoy aduenant tels nombres, si l'examen fait par l'une d'icelles racines ne respond à la question, il faudra prendre l'autre racine.

Or il y a encore vne autre maniere d'extraire la racine des nombres cossiques composez, laquelle est fort commode, quand le nombre des racines est impair ou rompu : laquelle extraction se fait ainsi : Au carré du nombre des racines, adioustez le quadruple du nombre absolu, s'il a le signe +, ou l'ostez s'il a le signe — : puis à la racine quarree de ce produit adioustez ou soustraiez le nombre des racines, selon qu'il sera noté, & viendra l'estimation ou valeur du double de la racine quarree, parquoy la moitié sera la valeur d'une seule racine. Comme pour exemple, qu'il faille extraire la racine de ce nombre cossique $72-64x$: Au carré du nombre des racines, qui est 36, l'adiouste 288, quadruple du nombre absolu 72, & viennent 324, dont la racine quarree est 18 ; de laquelle l'oste le nombre des racines, sçauoir est 6, & restent 12, pour la valeur de deux racines ; & partant vne racine vaudra 6.

Pour le regard de l'extraction des racines des nombres cossiques, qui constituent equation, ayans les exposans constituez en telle progression Arith. que ceux-cy, 4, 2, 0 ; ou 4, 0, 2 ; ou 6, 3, 0 ; ou 6, 0, 3 ; ou 8, 4, 0 ; ou 8, 0, 4 ; ou 10, 5, 0 ; ou 10, 0, 5, &c. esquels le plus grand caractère est toujours composé de q , & d'un autre caractère cossique : il faut premierement extraire la racine quarree, à cause du caractère q , selon qu'il est enseigné cy dessus, accommodant au nombre qui est affecté au caractère cossique, en ceste partie-là de l'equation, de laquelle il faut tirer la racine, tout ce que nous auons dict du nombre des racines, comme si l'equation estoit entre trois nombres cossiques affectez aux caractères q , x , & N . puis apres de ceste racine quarree trouuee, soit qu'elle soit rationnelle ou irrationnelle, il en faut tirer vne autre racine selõ l'autre partie du plus grand caractère cossique, ce caractère q estant osté. Comme si vne equation est trouuee entre $19q$, & $18q-64x$. Il faudra extraire la racine quarree de ce nombre $18q-64x$, à cause de la premiere partie du signe cossique q , tout ainsi que si l'equation estoit trouuee entre $1q$, & $18x-64x$, laquelle racine quarree sera 36 ; & d'icelle il faut derechef tirer la racine quarree qui sera 6 : parquoy 6 sera la racine du nombre cossique proposé.

En la mesme maniere, si vne equation est entre $19q$, & 5120

— 16c : il faudra prendre la racine quarrée du nombre 5120—
16c ; & de ceste-cy prendre la racine cubique. Ainsi aussi, si
l'equation est entre 1999, & 200099—78461119. il faudra
premierement prendre la racine quarrée : & puis apres de ce-
ste-cy la racine quarrée de quarrée. Et ainsi des autres.

Des secondes racines.

CHAP. II.

D'Autant qu'en plusieurs operations sont cherchez deux,
ou trois, ou d'avantage de nombres sous vne propor-
tion incertaine, il est necessaire pour euitier confusion,
qu'ayant posé 1x pour le premier nombre, on ne pose der-
chef 1x pour le second, & encore 1x pour le 3. C'est pour-
quoy on a excogité les secondes racines, lesquelles sont nom-
mees, & figurees diuersement par les autheurs; mais suiuant
Stifel, Pelletier & Clavius, nous retiendrons le nom de secon-
des racines, & les noterons ainsi: 1 A, signifie 1x seconde; 1 B,
denotte 1x tierce; 1 C, signifie 1x quarte; &c. Et quand vn
nombre a deux signes, il faut entendre que le nombre avec le
premier signe a esté multiplié par l'vnité du signe posterieur;
Comme 1x A, signifie 1x multipliee par 1A; & 3x A, signifie
3x multipliees par 1A: ainsi 19Aq, monstre que 19 a esté mul-
tiplié en 1Aq; &c.

Or ces racines ont leur Algorithme particulier, aussi bien
que les premieres racines. Et premierement quand à l'addi-
tion elle est aisee: car si elles sont de mesme genre, faut seu-
lement adiouter les nombres entr'eux, & au produit apposer
le mesme caractere d'icelles racines. Comme 3A, & 4A, font
ensemble 7A: Item 5B, & 3B, font 8B. Mais quand icelles ra-
cines ne sont de mesme genre l'addition se fait par le signe +
Comme 3A, & 4B, font 3A + 4B: Item 3x, & 4A, font 3x +
4A.

La soustraction est aussi aisee: Car quand les racines sont
de mesme genre, il n'y a qu'à soustraire vn nombre de l'autre,
& apposer au reste le mesme caractere. Comme 3A ostez
de 5A, restent 2A: Item 2B ostez de 5B, restent 3B. Mais
quand icelles sont de genres differens, la soustraction se fait

par le signe — : comme 3 A ostez de 4 B, restent 4 B — 3 A.

Pour le regard de la multiplication elle se fait ainsi: Si vn nombre de racine premiere, doit estre multiplié avec vn nombre de racine seconde, ayant seulement la lettre A ou B &c. Il faut multiplier les nombres entr'eux, & apposer au produit les mesmes signes. Comme 2 B multipliees par 2 A, font 4 AB; c'est à dire 4 B multipliees par 1 A: Item 2 A par 2 B, font 4 AB; c'est à dire 4 A multipliez par 1 B: Item 3 q multipliez par 4 B, font 12 q B; c'est à dire 12 q multipliez par 1 B.

Mais quand vn nombre absolu est multiplié avec vn nombre de seconde racine, il faut apposer au produit le signe de la seconde racine. Comme 6 multipliant 4 B, le produit est 24 B: Item 5 C multipliant 7, le produit est 35 C.

Que si vn nombre de seconde racine doit estre multiplié par vn nombre de seconde racine de mesme lettre, il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produit apposer la mesme lettre avec le caractere q. Comme 3 A multipliez par 4 A, feront 12 A q.

Quand vn nombre de seconde racine est multiplié en soy quarrément, ou cubiquement, &c. Il faut apposer au produit la mesme lettre avec le caractere q, ou c, &c. Comme 2 A multipliez en soy quarrément, le produit est 4 A q; mais cubiquement est produit 8 A c: Item 2 B A par 2 B A, font 4 q A q; c'est à dire 4 q de premiere racine multipliez par 1 q de seconde racine.

Mais quand vn nombre de seconde racine est multiplié en vn autre de la mesme racine seconde, qui a aussi vn caractere cossique; il faut imaginer que le premier nombre ait pareillement le signe cossique B. Comme 1 A multiplié par 1 A q, le produit est 1 A c: Item 3 B, par 4 B c, font 12 B q q.

Que si vn nombre cossique simple sans lettre de seconde racine, doit estre multiplié avec vn nombre marqué de lettre, & signe cossique; il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produit apposer les mesmes signes. Comme 2 c multipliez par 4 A q, feront 8 c A q; c'est dire 8 c multipliez en 1 A q: Item 1 c multiplié par 1 B A q, fait 1 q q A q; c'est à dire 1 q q multiplié par 1 A q: Autant fait aussi 1 q A multiplié en soy: Car 1 q multiplié en soy fait 1 q q; & 1 A en soy fait 1 A q.

Quand vn nombre ayant apres la lettre de seconde racine vn signe cossique, est multiplié par vn nombre qui a pareillement apres la lettre de seconde racine vn signe cossique, le produit doit auoir outre la lettre, ou les lettres de seconde racine, le caractere cossique que donnent les exposans des ca-

raçteres. Comme $2Aq$, en $5Ac$, produisent $10A\beta$: Item $3A$ multipliez par $4Bc$, feront $12AB\beta$.

Mais vn nôbre ayant vn caractère cossique apres la lettre de seconde racine, est multiplié par vn nombre, qui apres le caractère cossique à aussi la lettre de seconde racine, il faut apposer au produict le dernier caractère cossique, suiuy par la lettre de secôde racine puis aussidu caractère cossique produit du premier caractère cossique multiplié par la lettre de secôde racine, comme si elle auoit ce signe β . Comme $1Ac$ multiplié par $1qA$, fera $1qAqq$: qui sera aussi produict de $1\beta Aq$ multipliee en soy: Item $3Aq$ multipliez par $4cA$, feront $12cAc$. c'est à dire $12c$. multipliez par $1Ac$.

Quant à la diuision des secondes racines: soit fait premieurement reduction des signes cossiques par la soustraction des signes semblables. Comme pour diuiser $8cAq$ par Aq : Te soustrais les signes semblables Aq , & restent $8c$, & 4 : puis ie diuise $8c$ par 4 , & viennent $2c$, pour le quotient de $8cAq$ diuisez par $4Aq$: ainsi $8cAq$ diuisez par $4c$, le quotient est $2Aq$.

Mais diuisant vn nombre β par vn nombre des secondes racines, le quotient sera nombre rompu. Comme 2β diuisees

par $4A$, le quotient est $\frac{2\beta}{4A}$.

Quant à l'extraction des racines, il faut tirer la racine du nombre s'il en a, & apposer à icelle la lettre de seconde racine, reiettant le caractère cossique. Comme la racine quarree du nombre $25Aq$, est $5A$: Item la racine cubique du nombre $27Ac$. est $3A$; & la racine quatrece du nombre $16Dqq$, est $2D$.

Mais si le nombre n'a telle racine, ou le caractère n'est de mesme appellation que la racine qu'il faut extraire. Il faut seulement apposer à iceluy nombre, lettre & caractère, le signe radical. Comme la racine cubique du nombre $3Aq$, est $\sqrt[3]{3Aq}$. Item la racine quarree du nombre $4Ac$, est $\sqrt{4Ac}$.

Quant à la preuue des operations de cest Algorithme des secondes racines, elle se fera tout ainsi qu'ès premieres racines; sçauoir est que l'addition & soustraction, se prouueront l'une l'autre: comme aussi la multiplication & diuision: ou bien plus intelligiblement par les progressions geometriques commençant à l'vnité, mises à la page 300. prenant celle de la raison double pour les premieres racines: mais celles de la raison triple pour les secondes racines: tellement que β vale 2 : mais $1A$, 3 ; $1q$, 4 ; $1Aq$, 9 ; $1Ac$, 27 ; $1\beta A$, 6 ; $1\beta Aq$, 18 ; &c.

Des nombres

Des nombres irrationaux, ou sourds.

CHAP. XII.

Nombres irrationaux ou sourds sont les racines des nombres, lesquelles ne se peuvent exprimer par nombres ; tellement que pour expliquer telles racines on se sert de ces signes $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[6]{}$, &c. Comme la racine quarree de 5, est dictée sourde ou irrationnelle, pource qu'on ne peut trouver aucun nombre qui multiplié en soy produise 5 : tellement que ceste racine quarree de 5, sera marquée ainsi, $\sqrt{5}$: ou ainsi $\sqrt[4]{5}$. Item la racine cubique de 7 sera marquée ainsi $\sqrt[3]{7}$. Item la racine quarree de quarree de 12, ainsi $\sqrt{\sqrt{12}}$. ou ainsi $\sqrt[4]{12}$. & ainsi des autres.

Est toutesfois à noter que tout nombre qui a le signe $\sqrt{}$, n'est pas pourtant irrationnel : car quelquesfois pour la commodité de l'opération, au lieu de tirer la racine de quelque nombre, on luy appose seulement le signe de la racine requise.

Or il y a deux genres de racines sourdes : car les vnes sont simples : comme $\sqrt{q}$. de quelque nombre non carré : $\sqrt[3]{c}$ de quelque nombre non cube &c. & ces racines simples sont aussi appelées par quelqu'vns nombres mediaux. Les autres racines sourdes, sont composées par l'interpositiō des signes $+$ & $-$: & icelles sont appelées par aucuns multinomies radicales ; & par d'autres nombres irrationaux composez, ou diminuez : composez quand les nombres sont liez par le signe $+$, comme $\sqrt{7+10}$: mais diminuez quand les nombres sont liez par le signe $-$: comme $\sqrt{5-13}$, ou $\sqrt{10-17}$.

De la reduction des racines simples à vne mesme denomination.

CHAP. XIII.

A Fin que les simples racines sourdes se puissent multiplier & diuiser entr'elles, il est nécessaire qu'elles soient redui-

tes en vne mesme denomination, si elles sont de diuerses : la-
quelle reduction se fait presque en la mesme maniere, que
la reduction des fractions de diuerses denominations à vne
mesme : Car ayant posé les signes radicaux, chacun sous leur
nombre, il faut multiplier vn chacun nombre en soy, selon
le signe radical de l'autre : puis apres multiplier les exposans
des signes entr'eux, afin d'auoir l'exposant du signe commun.
Comme pour exemple, soiet les deux racines $\sqrt{7}$, & $\sqrt[3]{5}$, qu'il
faut reduire en racines de mesme espee. Ayant posé ces deux
racines ainsi qu'il appert icy ; ie multiplie 7 cubiquement à
cause du signe $\sqrt[3]{}$, & viennent 343, au lieu de 7 ;
puis ie multiplie 5 quarrément à cause du si-
gne $\sqrt{}$ du nombre 7, & viennent 25, pour & au
lien de 5 ; & finalement ie multiplie les exposans
des signes $\sqrt{}$ & $\sqrt[3]{}$ entr'eux : sçauoir est 2, par
3, & viennent 6, qui est exposant du caractère
 $\sqrt[6]{}$: tellement que $\sqrt{7}$, & $\sqrt[3]{5}$ seront reduites à
 $\sqrt[6]{343}$, & $\sqrt[6]{25}$. Ainsi aussi $\sqrt[3]{2}$, & $\sqrt[4]{3}$, estés
reduictés à mesme espee ou denomination, se-
ront $\sqrt[12]{32}$, & $\sqrt[12]{27}$, cōme il appert en ceste fig.

$$\begin{array}{r} 343 \cdot 25 \\ \hline 7 \times 5 \\ \sqrt{} \times \sqrt[3]{} \\ 2 \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \quad 27 \\ \hline 2 \times 3 \\ \sqrt[3]{} \times \sqrt[4]{} \\ 3 \hline 12 \end{array}$$

Il y a quelques abbreviations en ceste o-
peration, comme quand il faut reduire vn
nombre absolu, & vn radical en mesme espee :
car alors il n'y a qu'à multiplier en soy
quarrément ou cubiquement &c. le nombre
absolu, & au produit apposer le signe radi-
cal de la racine. Comme 6, & $\sqrt{5}$, estans
reduictés à mesme espee feront $\sqrt{36}$, & $\sqrt{5}$. Item 2 & $\sqrt[3]{4}$, ferōt
 $\sqrt[3]{8}$, & $\sqrt[3]{4}$.

Item voulant reduire ces deux racines $\sqrt[3]{8}$, & $\sqrt[4]{25}$. Je prēds
de 8 la racine cubique 2 : puis apres la racine quarrée de 25,
qui est 5, à laquelle i'appose le signe radical restant $\sqrt{}$, ainsi $\sqrt{5}$.
I'ay donc maintenant pour les deux racines proposees vn
nombre absolu 2, & vn nombre radical $\sqrt{5}$, qui reduis comme
dict est cy dessus, font $\sqrt{4}$ & $\sqrt{5}$.

Item voulant reduire ces deux racines $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[4]{6}$, en mes-
me espee ie multiplie 2 en soy quarrément à cause du signe
 $\sqrt[4]{}$, qui est en l'autre racine outre le signe $\sqrt[3]{}$, & fait 4. auquel
i'appose le signe $\sqrt[3]{}$, & sera faite la reduction à $\sqrt[12]{4}$, & $\sqrt[12]{6}$.

Itē voulant reduire $\sqrt[4]{19}$, & $\sqrt{3}$ en mesme denomination. Je
multiplie le nōbre de la moindre denomination, sçauoir est 3,
en soy quarrémēt, à cause du signe $\sqrt{}$, qui est en la plus grāde
denomination outre $\sqrt[4]{}$, & viennent $\sqrt[12]{19}$, & $\sqrt[12]{9}$ pour la re-

duction en mesme espece des deux racines proposees. Ainsi $\sqrt{qc8}$, & $\sqrt{9}$, seront reduites à $\sqrt{qc8}$, & $\sqrt{qc729}$. multipliant le nombre 9 de la moindre denomination en soy cubiquement, à cause du caractere c , qui outre q , est en la plus grande denomination.

Or auparavant que venir à l'Algorithme d'icelles racines sourdes, il est nécessaire que nous enseignions le probleme suyuant.

Cognoistre si deux racines sourdes sont commensurables, ou incommensf. & quelle raison elles ont entr'elles.

Soit diuise le nombre de la plus grande racine, par celuy de la moindre, (icelles estans reduictes en mesme espece si elles n'y sont) & si au quotient vient vn nombre qui ait la racine denotee par le signe radical d'icelles racines proposees, elles serot commensf. entr'elles, autrement non : & aurot telle raison l'une à l'autre, que le quotient à l'vnité, ou si le quotient est vne fraction, elles seront entr'elles comme le numerateur au denominateur. Comme $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$, sont commensf. entr'elles. Car 12 estans diuisez par 3, le quotient est 4, dont la racine quarrée est 2, & seront l'une à l'autre comme 2 à 1. Item $\sqrt{320}$ & $\sqrt{c135}$ sont commensf. car 320 estans diuisez par 135, le quotient est $2\frac{10}{27}$ ou $\sqrt{c\frac{64}{27}}$, c'est à dire $\frac{4}{3}$: & leur raison est comme 4 à 3. Item $\sqrt{qc64}$ & $\sqrt{c27}$ sont commensf. & leur raison est comme 3 à 2 : car icelles estans reduictes en mesme espece, feront $\sqrt{qc64}$ & $\sqrt{qc729}$, & la diuision faicte le quotient sera $\sqrt{qc11\frac{41}{64}}$ ou $\sqrt{qc\frac{729}{64}}$, c'est à dire $\frac{3}{2}$.

De la multiplication & diuision des racines simples.

CHAP. XIV.

Quand deux racines de mesme genre doivent estre multipliees ou diuisees entr'elles, il faut multiplier ou diuiser entr'elles, il faut multiplier ou diuiser les nombres entr'eux, & apposer au nombre produit le mesme signe radical. Comme pour exemple voulant multiplier $\sqrt{7}$. par $\sqrt{10}$. Je multiplie 7 par 10, & viennent 70, ausquels i'appose le signe radical, & sont $\sqrt{70}$. Ainsi $\sqrt{3}$ par $\sqrt{12}$, produit $\sqrt{36}$, c'est

X ij

à dire 6. Ainsi $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ par $\sqrt{8}$, le produit est $\sqrt{18}$. Ainsi $\sqrt{63}$ par $\sqrt{67}$, viennent $\sqrt{621}$. Ainsi $\sqrt{4}$, par $\sqrt{8}$, viennent $\sqrt{32}$. Mais pour diuifer $\sqrt{70}$, par $\sqrt{10}$. Je diuise 70 par 10, & viennent 7, auxquels j'appose le signe radical, & sont $\sqrt{7}$. Ainsi $\sqrt{18}$ par $\sqrt{8}$ le quotient sera $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, c'est à dire $\frac{1}{2}$ ou $1\frac{1}{2}$. Ainsi $\sqrt{21}$ par $\sqrt{63}$, le quotient sera $\sqrt{67}$.

Mais quand les deux racines proposees sont de differente espece, il les faut reduire à vne mesme : puis apres faire la multiplication ou diuision comme dessus. Comme pour exemple, voulant multiplier $\sqrt{3}$ par 4. Je reduis le nombre absolu 4, & sont $\sqrt{16}$: puis je les multiplie comme dessus, & viennent $\sqrt{48}$. Ainsi $\sqrt{5}$ multipliee par $\sqrt{610}$. le produit sera $\sqrt{612500}$. Ainsi aussi $\sqrt{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt{\frac{2}{3}}$, produit $\sqrt{\frac{2}{12}}$. Mais diuisant $\sqrt{48}$ par 4, le quotient sera $\sqrt{3}$. Ainsi $\sqrt{612500}$ diuisee par $\sqrt{610}$, le quotient sera $\sqrt{5}$.

Mais si quelque racine doit estre multipliee en soy quarrément, ou cubiquement &c. selon le signe radical qui luy sera appose, il faut seulement prendre le mesme nombre pour le produit, delaisant le signe radical. Comme $\sqrt{3}$ estant multipliee quarrément produira 3. Et $\sqrt{65}$ multipliee en soy cubiquement fera 5.

De l'addition des racines simples.

CHAP. XV.

SI les racines sont commensurables ; ayant diuise la plus grande par la moindre, soit adiousté vne vunité au quotient rationel, & la somme estant multipliee par la moindre racine, sera donnée la somme de l'addition des deux racines proposees. Comme pour exemple, soient proposees à adiouter $\sqrt{18}$ & $\sqrt{8}$. Diuisant la plus grande par la moindre, le quotient est $\sqrt{2\frac{1}{2}}$, c'est à dire $\frac{3}{2}$, & adioustant 1, c'est $\frac{5}{2}$, qui multipliez par $\sqrt{8}$, le produit est $\sqrt{50}$, pour la somme des deux racines proposees. Ainsi $\sqrt{12}$ adiustez à $\sqrt{3}$, la somme est $\sqrt{27}$. Item $\sqrt{6320}$ adiustée à $\sqrt{6135}$, fait la somme $\sqrt{61715}$. Item $\sqrt{4}$ adiustée à $\sqrt{68}$, fait 4. Item $\sqrt{\frac{1}{2}}$ adiustée à $\sqrt{\frac{2}{3}}$, fait $\sqrt{\frac{12}{12}}$.

Que si les racines proposees sont Incommens. faut seulement interposer entre deux le signe +, comme $\sqrt{6}$ adiustée à $\sqrt{11}$, fait $\sqrt{6+11}$.

Or il y a encore plusieurs autres manieres d'adiouster les racines cōmens. desquelles la suiuate me sēble aisée. Ayant trouué raison des racines proposees, soit posé au premier terme d'une regle de trois, l'un des nombres d'icelle raison; au second terme, la somme d'iceux nombres de la raison; & au . . la racine correspondante au terme de la raison posé au premier terme; & faisant la regle comme il appartient, le quatriesme nombre qui viendra sera la somme des racines proposees. Comme au premier exemple cy dessus, la raison des racines, a esté trouuee comme 3 à 2: posant donc 3, ou 2 au premier terme de la regle de trois, mais 5 au second, & $\sqrt{18}$, ou $\sqrt{8}$. au . le 4. sera $\sqrt{50}$; & se fait la regle de trois ainsi qu'il appert cy dessous.

Si 3 donnent 5 que donneront $\sqrt{18}$. ou si 2 donn. 5 combien $\sqrt{8}$.

$\sqrt{9}$.	$\sqrt{25}$.	25	$\sqrt{4}$	$\sqrt{25}$
		90		8
		36		200
		450		200
				200 $\sqrt{50}$.
				**

$\sqrt{50}$. somme des racines $\sqrt{18}$ & $\sqrt{8}$. propo. à adiouster.

De la soustraction des racines simples.

CHAP. XVI.

SI les racines sont incommens. il n'y a qu'à interposer le signe —. Comme $\sqrt{3}$ ostée de $\sqrt{10}$, restera $\sqrt{10} - \sqrt{3}$. Item $\sqrt{20}$, ostée de $\sqrt{50}$, reste $\sqrt{50} - \sqrt{20}$.

Mais quand les racines sont commens. Ayant diuisé la plus grande par la moindre, soit osté du quotient rationnel une unité; puis le reste soit multiplié par la moindre racine, & le produit sera le reste désiré. Comme pour exemple. qu'il faille soustraire $\sqrt{8}$ de $\sqrt{50}$. Je diuise donc 50 par 8, le quotient est 6, dont la racine quarrée est 2, de laquelle j'oste un entier, & reste 1, que je multiplie par $\sqrt{8}$, & vient $\sqrt{8}$, pour le reste

desiré. Item qui de $\sqrt{27}$ oste $\sqrt{3}$, reste $\sqrt{12}$. Ainsi qui de $\sqrt{1715}$ oste $\sqrt{310}$, reste $\sqrt{1135}$. Ainsi aussi qui de $\sqrt{\frac{49}{12}}$ oste $\sqrt{\frac{1}{12}}$, reste $\sqrt{\frac{48}{12}}$.

Ceste operation se fait aussi par la regle de trois, mettant au premier & 3. terme les nombres spécifiez au chap. preced. mais au 2. la difference des termes de la raison, comme il appartient cy dessous.

Si 5 donnent 3, combien $\sqrt{50}$: ou si 2 donnent 3, combien $\sqrt{8}$.

$\sqrt{25}$.	$\sqrt{9}$.	9	$\sqrt{4}$.	$\sqrt{9}$.	9
		<u> </u>			<u> </u>
		450			72
		4			
		20		3	
		450 $\sqrt{18}$		72 $\sqrt{18}$ reste; $\sqrt{8}$ estant	
		255		44 oste de $\sqrt{50}$.	
		2			

*De l'addition des nombres irrationaux
composez, & diminuez.*

CHAP. XVII.

Pour adiouster nombres irrationaux composez & diminuez, il les faut disposer l'un au dessous de l'autre; puis adiouster chascunes racines simples, comme il a esté dict en l'Algorithme precedant, obseruant les regles de + & —, que nous auons enseigné au chap. 4; c'est à sçauoir qu'aux signes semblables il faut adiouster sans chager le signe; mais qu'aux dissemblables, il faut soustraire, & poser le signe du plus grand nombre.

Or d'autant qu'il ne se fait rien en ceste operation, qui n'ait desia esté enseigné cy-deuant, la chose sera assez manifeste par exemples sans d'auantage de discours.

$64 + \sqrt{18}$.	$\sqrt{27} + \sqrt{8}$.	$\sqrt{162} - 2$.	$\sqrt{50} + 3$.
$4 + \sqrt{8}$.	$\sqrt{12} + \sqrt{2}$.	$\sqrt{100} - 3$.	$\sqrt{32} - 5$.
<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>
$10 + \sqrt{50}$.	$\sqrt{73} + \sqrt{18}$.	$\sqrt{722} - 5$.	$\sqrt{164} - 2$.

$$\begin{array}{cccc}
 \sqrt{50}-3. & 8-\sqrt{50}. & \sqrt{50}+6. & \sqrt{216}-\sqrt{\sqrt{405}}. \\
 \sqrt{32}+5. & \sqrt{242}-12. & 24-\sqrt{242}. & \sqrt{664}-\sqrt{\sqrt{80}}. \\
 \hline
 \sqrt{162}+2. & \sqrt{72}-4. & 30-\sqrt{72}. & 10-\sqrt{\sqrt{3125}}.
 \end{array}$$

$\sqrt{\sqrt{256}}-\sqrt{27}$. Et est à noter pour briefueté, que les deux
 $\sqrt{\sqrt{81}}+\sqrt{8}$. particules d'un nombre composé, se rencō-
 7—1. trant totalement egales aux deux particules
 d'un nombre diminué, il n'y a qu'à doubler
 la première particule de l'un d'iceux nombres. Comme pour
 adioufter 15+ $\sqrt{8}$ à 15— $\sqrt{8}$: Je double seulement 15 & font 30.
 pour la somme de l'addition. Item $\sqrt{20}+6$ adioustez à $\sqrt{20}$
 —6 font $\sqrt{80}$. & ce d'autant que les dernières particules se
 destruisent l'une l'autre à cause des signes + & —.

De la soustraction des nombres irrationnaux
 composez & diminuez.

CHAP. XVIII.

Pour soustraire tels nombres, il les faut disposer l'un au-
 dessus de l'autre, puis soustraire chascunes racines comme
 il a esté dict au chap. 16. obseruant les regles des signes + &
 — enseignées au chap. 4. sçauoir est quaux signes sembla-
 bles, il faut soustraire, (si faire se peut) sans changer le signe:
 mais si on ne peut soustraire, il faudra oster le supérieur de
 l'inférieur, & changer le signe. Mais aux signes dissemblables
 il faut adioufter, & aposer le signe supérieur.

Ceste operation peut estre facilement entendue par les e-
 xemples suiuaus, sans autres preceptes.

$$\begin{array}{cccc}
 \sqrt{50}-5 & \sqrt{\sqrt{1875}}+\sqrt{\sqrt{1250}}. & \sqrt{50}+2. & \sqrt{50}-2. \\
 \sqrt{8}-2 & \sqrt{\sqrt{243}}+\sqrt{\sqrt{162}}. & \sqrt{18}+4. & \sqrt{18}-4. \\
 \hline
 \sqrt{18}-3 & \sqrt{\sqrt{48}}+\sqrt{\sqrt{32}}. & \sqrt{8}-2. & \sqrt{8}+2.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \sqrt{162} + 2. & \sqrt{162} - 2. & \sqrt{72} - 4. \quad 30 - \sqrt{72}. \quad \sqrt{0} + 16. \\
 \sqrt{50} - 3. & \sqrt{50} + 3. & 8 - \sqrt{50}. \quad \sqrt{50} + 6. \quad \sqrt{320} - 8. \\
 \hline
 \sqrt{32} + 5. & \sqrt{52} - 5. & \sqrt{242} - 32. \quad 24 - \sqrt{242} \quad 24 - \sqrt{320}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \sqrt{2401} - \sqrt{61}. & \sqrt{1000} + \sqrt{3125}. & \sqrt{180} + 0. \\
 \sqrt{256} - \sqrt{27}. & \sqrt{216} - \sqrt{405}. & \sqrt{320} - 8. \\
 \hline
 \sqrt{81} + \sqrt{8}. & 4 + \sqrt{20480}. & 8 - \sqrt{20}
 \end{array}$$

Et est à noter pour brièveté, que les deux particules d'un nombre composé se rencontrent du tout égales à deux particules d'un nombre diminué, il faut seulement doubler la dernière particule de l'un des nombres. Comme pour soustraire $\sqrt{12} - 5$, de $\sqrt{12} + 5$. Je double la dernière particule 5, & vient le nombre 10, pour reste de la soustraction. Ainsi $10 - \sqrt{4}$, ostez de $10 + \sqrt{4}$ resteront $\sqrt{16}$, c'est à dire 4 : Item $\sqrt{11} - \sqrt{5}$ ostez de $\sqrt{12} + \sqrt{5}$, restent $\sqrt{20}$. Et ce d'autant que + détruit + ; mais + & - se doivent adjoindre.

*De la multiplication des nombres irrationaux
composés & diminuez.*

CHAP. XIX.

POUR faire ceste operation, & aussi la suivante, il faut retenir la regle de + & - enseignée au chap. 5. sçavoir est qu'aux signes semblables faut poser +, mais aux dissemblables -. Ayant donc posé l'un des deux nombres au dessous de l'autre, soit faite la multiplication comme es nombres absolus, observant toutesfois ce que nous avons dict au chap. 14. de la multiplication des racines simples, & au chap. 15. de l'addition & soustraction des mesmes racines. Ce qui sera enseigné es exemples descrits cy dessous. Comme en l'exemple suivant $\sqrt{45} \text{ en } - \sqrt{20}$, fait $+$ $\sqrt{900}$, c'est à dire $+$ 30. & -

$\sqrt{49}$ par $+$ 6, c'est à dire en
 $+\sqrt{36}$, fait $-\sqrt{1620}$. & $-\sqrt{20}$ par $+$ 8, c'est à dire par
 $+\sqrt{64}$, fait $-\sqrt{1280}$. Et
 finalement $+$ 8 en $+$ 6, fait
 $+$ 48 : Et partant tout
 le nombre produit sera 48
 $-\sqrt{1280} - \sqrt{1620} + 30$, qui réduit par additiō de $+$ 48 à 30
 & de $-\sqrt{1280}$ à 1620; sera $78 - \sqrt{5780}$.

Multiplicande $6 - \sqrt{20}$.
 Multiplicateur $8 - \sqrt{45}$.

Pr. 48 $-\sqrt{1280} - \sqrt{1620} + 30$

qui par reduction sera $78 - \sqrt{5780}$.

En cest autre exem-
 ple, ie multiplie $-\sqrt{7}$
 648 par $-\sqrt{162}$, &
 vient $+\sqrt{104976}$, c'est
 à dire $+$ 18 : & $+\sqrt{7288}$
 par $-\sqrt{162}$, fait $-\sqrt{7}$
 46656, c'est à dire $-\sqrt{216}$: & $-\sqrt{7648}$ par $+\sqrt{128}$, fait $-\sqrt{782944}$, c'est à dire $-\sqrt{288}$: & finalement $+\sqrt{7288}$ par $+\sqrt{128}$ fait $+\sqrt{736864}$, c'est à dire $+\sqrt{192}$; & partant tout le nombre produit sera $\sqrt{192} - \sqrt{288} - \sqrt{216} + 18$. ou bien $18 + \sqrt{192} - \sqrt{288} - \sqrt{216}$.

Multiplicande $\sqrt{7288} - \sqrt{7648}$.
 Multiplicateur $\sqrt{128} - \sqrt{162}$.

Produit $\sqrt{192} - \sqrt{288} - \sqrt{216} + 18$.

ou $18 + \sqrt{192} - \sqrt{288} - \sqrt{216}$.

En cest exemple nous
 reduisons premieremēt
 $\sqrt{36}$, & $\sqrt{3}$ en vne mes-
 me denomination, c'est
 à sçavoir à $\sqrt{q\beta 36}$, &
 $\sqrt{q\beta 243}$, & ces deux nombres multipliez entr'eux, le produit
 est $+\sqrt{q\beta 8748}$: puis apres nous reduisons $\sqrt{c7}$, & $\sqrt{3}$ à $\sqrt{qc49}$
 & $\sqrt{qc27}$ de mesme espece, & ces deux cy estans multipliez
 entr'eux, le produit est $\sqrt{qc1323}$.

Multiplicande $\sqrt{c7} + \sqrt{\beta 6}$.
 Multiplicateur $\sqrt{3}$.

Produit $\sqrt{qc1323} + \sqrt{q\beta 8748}$.

Au premier de ees
 deux exemples est
 multiplié vn nō-
 bre composé en 49 $+\sqrt{245} + 245 + 5$. 49 $-\sqrt{245} - 245 + 5$.
 foy, dont le pro-
 duit est 49 $+\sqrt{245} + \sqrt{245} + 5$, c'est à dire 54 $+\sqrt{980}$, pource
 que 49 & $+$ 5, font 54, & $\sqrt{245}$ avec $\sqrt{245}$, c'est à dire le dou-
 ble de $\sqrt{245}$, fait $\sqrt{980}$. Mais au 2. exemple est multiplié vn
 nombre diminué en foy, dont le produit est 49 $-\sqrt{245} - 245$
 $+ 5$, c'est à dire 54 $-\sqrt{980}$. Or pour briefuement faire telle
 multiplication, c'est à dire multiplier vn nombre composé

$7 + \sqrt{5}$

$7 - \sqrt{5}$.

$7 + \sqrt{5}$

$7 - \sqrt{5}$.

en soy, ou par vn autre egal, il ne faut qu'adiouster ensemble les quarrez des particules, puis à ceste somme adiouster le double du produit d'une particule en l'autre. Comme és deux exemples cy dessus, les quarrez des particules font 54, & le produit d'une particule en l'autre est $\sqrt{245}$, ou $\sqrt{145}$, dont le double est $\sqrt{980}$, ou $\sqrt{980}$. Tout le produit est donc $54 + \sqrt{980}$, ou $54 + \sqrt{980}$.

Mais multipliant vn nombre composé, comme $6 + \sqrt{8}$ par son respondant contraire, c'est à dire par $6 - \sqrt{8}$, viendra au produit vn simple nombre 28, comme il

$$6 + \sqrt{8}.$$

$$6 - \sqrt{8}.$$

$$36 + \sqrt{288} - \sqrt{288} - 8$$

appert en l'operation. Car $+ \sqrt{288}$ ruine $- \sqrt{288}$; & partant reste $36 - 8$, qui font 28. Ce produit sera encore trouué plus facilement & promptement. Car 8, quarré de la derniere particule $\sqrt{8}$, estant osté de 36, quarré de la premiere particule 6, restera le mesme produit 28.

Ainsi aussi $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ estant multiplié par son respondant contraire $\sqrt{10} - \sqrt{2}$, le produit sera $10 + \sqrt{20} - \sqrt{20} - 2$, c'est à dire 8: lequel nombre 8 est aussi produit par la soustraction de 2, quarré de la derniere particule, de 10 quarré de la premiere particule.

Pareillement si on multiplie $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$, par son respondant $\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1$, où tu vois que le signe $+$ de la derniere particule est changé en $-$, le produit sera $4 + \sqrt{24}$: lequel produit estant derechef multiplié par son respondant contraire $-4 + \sqrt{24}$, donne produit simple nombre 8. Ce dernier produit sera encore trouué plus facilement & promptement comme ensuit. Soient

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1.$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1.$$

$$3 - \sqrt{6} + 2 - \sqrt{2}$$

$$+ \sqrt{6} + 2 - \sqrt{2}$$

$$3 + \sqrt{6} + \sqrt{3}$$

$$\text{produit } 4 + \sqrt{24}$$

$$-4 + \sqrt{24}$$

$$-16 - \sqrt{384} + \sqrt{384} + 24$$

multipliees les deux premieres particules entr'elles, & seront $\sqrt{6}$, qui doublée sera $\sqrt{24}$; puis de la somme des deux nombres d'icelles particules, sçavoir est 5, soit osté le nombre de la derniere particule, & restera 4, dont le quarré 16 soit osté du nombre 24, & resteront 8 comme dessus.

Ainsi aussi si on multiplie $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$ par son respondant

$\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{6}$, sera produit $\sqrt{60} + 2$ qui multipliez par $\sqrt{60} - 2$, le produit sera simple nombre 56: lequel produit on aura aussi avec la mesme briefuete que dessus.

Et par ceste maniere peuuent estre reduits tous tels nombres composez en simple nom: sçauoir est multipliant toujours par le respondant contraire, ainsi que dict est cy dessus, iusques à ce que l'on soit paruenue à vn simple nombre.

*De la diuision des nombres irrationaux
composez & diminuez.*

CHAP. XX.

Pour diuiser vn nombre irrationnel composé par vn simple nombre radical, il faut diuiser chaque particule par le dit simple nombre radical, obseruant la regle de $+$ & de $-$. Comme pour diuiser $\sqrt{24} + \sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, ie diuise chaque particule du diuidande par le diuiseur 6, & le quotient est $\sqrt{4} + \sqrt{\frac{9}{6}}$, ou $2 + \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

$$\sqrt{24} + \sqrt{9} \quad \begin{matrix} 3 \\ 6 \end{matrix} \quad \left[\sqrt{4} + \sqrt{1\frac{1}{2}} \right]$$

Ainsi diuisant $\sqrt{128} + \sqrt{20}$ par $\sqrt{4}$, vient au quotient $\sqrt{32} + \sqrt{5}$.

Mais pour diuiser vn simple nombre par vn composé; comme pour exemple, 42 par $\sqrt{25} + \sqrt{4}$, il faut multiplier l'un & l'autre nombre par $\sqrt{25} - \sqrt{4}$, le respondant contraire du diuiseur, & viendront $\sqrt{44100} - \sqrt{7056}$, & 21 ou $\sqrt{441}$; puis apres soit diuisé $\sqrt{44100} - \sqrt{7056}$ par $\sqrt{441}$, & viendront $\sqrt{100} - \sqrt{16}$, c'est à dire 6, qui fera le quotient de 42 diuisé par $\sqrt{25} + \sqrt{4}$.

Que si tant le diuidande que diuiseur, sont nombres composez, il faut reduire le diuiseur en simple nombre, comme il a esté dict au chap. precedent: puis multiplier le diuidande par les mesmes nombres par lesquels on aura multiplié le diuiseur pour le conuertir à simple nombre, & ce qui viendra soit diuisé par le simple nombre trouué comme dict est cy dessus, & ainsi qu'il appert en l'exemple cy dessous.

Soit proposé à diuifer $\sqrt{41} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$ par $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Multipliant le diuiseur $\sqrt{5} + \sqrt{2}$
par $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

Le produit sera 3.

Multipliant le diuidande $\sqrt{41} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$
par $\sqrt{5} - \sqrt{2}$.

Le produit sera $\sqrt{205} + \sqrt{15} - \sqrt{10} - \sqrt{6} + \sqrt{4}$. Lequel il faut diuifer par 3. c'est à dire par $\sqrt{9}$. & le quotient sera $\sqrt{22\frac{7}{9}} + \sqrt{1\frac{5}{9}} - \sqrt{1\frac{1}{9}} - \sqrt{9\frac{2}{9}} - \sqrt{\frac{6}{9}} + \sqrt{\frac{4}{9}}$, ou bien $\sqrt{\frac{205}{9}} + \sqrt{\frac{15}{9}} - \sqrt{\frac{10}{9}} - \sqrt{\frac{6}{9}} + \sqrt{\frac{4}{9}}$.

Or il est à noter que les particules estans denommees de diuerses racines, il les faut reduire à vne mesme denomination auparavant que proceder à l'operation.

Est pareillement à noter que l'on peut donner le quotient de la diuision en fraction, faisant numerateur le nombre diuidande; & denominateur le nombre diuiseur. Comme le quotient de la derniere operation cy dessus, se peut donner

ainsi $\frac{\sqrt{41} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$. Seblablement s'il faut diuifer $\sqrt{48} + \sqrt{c3}$

par $\sqrt{15} + \sqrt{c6} - \sqrt{3}$, le quotient sera ceste fraction $\frac{\sqrt{48} + \sqrt{c3}}{\sqrt{15} + \sqrt{c6} - \sqrt{3}}$.

Or d'autant qu'il est quelquefois necessaire de cognoistre quel de deux nombres irrationnaux composé est le plus grand, nous enseignerons icy la maniere de ce faire, lors que la chose sera douteuse. Soit pour exemple les deux nombres composés $3 + \sqrt{8}$, & $8 - \sqrt{5}$, le plus grand desquels ie desire scauoir. Ie soustrais 3 de chaque nombre, & restent $\sqrt{8}$; & $5 - \sqrt{5}$, desquels ie prend les quarez, & sont 8; & $30 - \sqrt{500}$, de chacun desquels i'oste 8, & restent 0; & $22 - \sqrt{500}$; & à chacun d'iceux i'adiouste $\sqrt{500}$, & viennent $\sqrt{500}$; & 22, c'est à dire $\sqrt{484}$, qui sont moindre que $\sqrt{500}$; & partant ie dis que $3 + \sqrt{8}$ est plus grand que $8 - \sqrt{5}$.

Des racines vniuerselles, & de leur Algorithmes.

CHAP. XXI.

La racine d'un nombre composé ou diminué est appelée racine vniuerselle : Comme la racine quarree de ce nombre composé $\sqrt{9+22}$, est dictée racine vniuerselle, d'autant que de tout le nombre il faut extraire la racine, laquelle sera 5; car $\sqrt{9}$, qui est 3, estant adioustee à 22 fait 25, dont la racine quarree est 5. Ainsi aussi par la racine vniuerselle de cest autre nombre composé $10+\sqrt{7}$, il faut entendre que la racine quarree du nombre 7, si elle se peut auoir, estant adioustee à 10, on doit prendre la racine de tout nombre.

Or ces racines sont notees diuersement par les auteurs; mais nous les figurerons apposans le signe radical $\sqrt{}$, ou $\sqrt{c}$ au deuant du nombre dont la racine deura estre extraicte, & en fermant tout ledict nombre entre deux parentheses, en ceste maniere, $\sqrt{(\sqrt{9+22})}$ ou ainsi qui est le mesme, $\sqrt{(12+\sqrt{9})}$. Itē $\sqrt{c(10+\sqrt{7})}$. Item $\sqrt{(49+18)}$. Item $\sqrt{10+\sqrt{16+3+\sqrt{64}}}$. Item $\sqrt{c(\sqrt{25}-\sqrt{4+24})}$. Itē $\sqrt{(10+\sqrt{36})+\sqrt{(70+\sqrt{121})}}$, laquelle vaut 13.

Or le quarré de la racine quarree de quelque nombre composé, est le mesme nombre, estant delaisié le signe radical $\sqrt{}$. Comme le quarré de $\sqrt{(11+\sqrt{9+\sqrt{4}})}$ est $11+\sqrt{9+\sqrt{4}}$, c'est à dire 16; tellement qu'icelle racine valoit 4. Le quarré de $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{27})}$ est $\sqrt{216}+\sqrt{27}$, c'est à dire 9, dont la racine est 3. Le quarré de $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{27})}$ est $\sqrt{216}-\sqrt{27}$, c'est à dire 3, & la valeur de la racine est $\sqrt{3}$. Et semblablement le cube de la racine cubique d'un nombre composé est le mesme nombre, estant osté le signe radical $\sqrt{c}$. Comme le cube de $\sqrt{c}(\sqrt{25}+\sqrt{9})$ est $\sqrt{25}+\sqrt{9}$, c'est à dire 8, tellement que ceste racine là valoit 2. Le cube de $\sqrt{c}(\sqrt{25}-\sqrt{9})$ est $\sqrt{25}-\sqrt{9}$, c'est à dire 2, & la racine d'iceluy est $\sqrt{2}$. Le cube de $\sqrt{c}(\sqrt{64}+\sqrt{27})$ est $\sqrt{64}+\sqrt{27}$, c'est à dire 7, dont la racine est $\sqrt{7}$. Et faut entendre le mesme de quarré de quarez, & surfolides &c. En ceste maniere on multiplie la racine de quelconque nombre composé en soy, c'est à dire qu'on a le produit de son quarré ou cube &c.

Mais pour multiplier la racine d'un nombre composé, par une racine simple, ou par un nombre simple, ou composé, ou finalement par une autre racine de nombre composé, il faut reduire l'un & l'autre nombre a quarré ou cube; puis faire la multiplication comme dit est cy dessus. Comme pour exemple soit $\sqrt{7+ \sqrt{3}}$ qu'il faut multiplier par 2. Les quarez sôt

$$\begin{array}{r} 7+ \sqrt{3}. \\ 4. \\ \hline 28+ \sqrt{48}. \end{array}$$

Item $\sqrt{c}(\sqrt{c64+ \sqrt{c27}}$ multipliée par 2, le produit est $\sqrt{c}(\sqrt{c32768+ \sqrt{c13824}})$ ou $\sqrt{c}(32+ 24.)$ c'est à dire $\sqrt{c56}$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{c64+ \sqrt{c27}. \\ 8. \\ \hline \end{array}$$

Item soit $\sqrt{7+ \sqrt{4}}$ qu'il faut multiplier par $\sqrt{9}$. Les quarez des nombres sont $7+ \sqrt{4}$; & 9. Je multiplie donc $\sqrt{4}$ par 9, c'est à dire par $\sqrt{81}$, & vient $\sqrt{324}$; puis 7 par 9, & font 63. Donc le nombre produit sera $\sqrt{63+ \sqrt{324}}$ c'est à dire $\sqrt{81}$, ou 9.

$$\begin{array}{r} \sqrt{c32768+ \sqrt{c13824}} \\ 7+ \sqrt{4} \\ 9 \\ \hline \end{array}$$

$$63+ \sqrt{324}$$

Soit aussi $\sqrt{6+ \sqrt{9}}$ qu'il faut multiplier par le nombre composé $\sqrt{4+ \sqrt{16}}$. Le quarré du premier nombre est $6+ \sqrt{9}$; & du posterieur $4+ \sqrt{16}$. Estant donc faite la multiplicatiō, comme il se voit icy, le produit sera $\sqrt{9120+ \sqrt{3600216+ \sqrt{3600+ \sqrt{2304+ 120}}$, c'est à dire $\sqrt{324}$, ou 18.

$$\begin{array}{r} 6+ \sqrt{9} \\ 4+ \sqrt{16} \\ \hline \end{array}$$

$$\sqrt{9216+ \sqrt{2304}}$$

$$120+ \sqrt{3600}$$

$$\begin{array}{r} 216+ \sqrt{3600+ \sqrt{2304+ 120}} \\ \hline \sqrt{9216+ \sqrt{3600+ \sqrt{2304+ 120}}. \end{array}$$

Item qu'il faille multiplier $\sqrt{13+ \sqrt{9}}$ par $\sqrt{16}$ c'est à dire 4 par 3. Les quarez des nombres sont $13+ \sqrt{9}$, & $3+ \sqrt{16}$; & multipliant $\sqrt{9}$ par $\sqrt{16}$, est fait $\sqrt{144}$; & 13, c'est à dire $\sqrt{169}$ par $\sqrt{16}$, vient $\sqrt{2704}$; puis apres $\sqrt{9}$ par 3, c'est à dire par $\sqrt{25}$, est fait $\sqrt{225}$; & 13 par 3, dōnent 65. Dōc tout le nombre produit est $\sqrt{(\sqrt{2704+ \sqrt{225+ 77}})$ c'est à dire 12. Car la racine de $\sqrt{2704}$ est 52, & celle de $\sqrt{225}$ est 15; & ces trois nombres 77, 52 & 15 adiustez ensemble font 144, dont la racine quarrée est 12.

$$\begin{array}{r} 13+ \sqrt{9}. \\ 3+ \sqrt{16}. \\ \hline \end{array}$$

$$\sqrt{2704+ \sqrt{144}}.$$

$$61+ \sqrt{225}.$$

$$\sqrt{2704+ \sqrt{225+ 77}}$$

Or quand il faut multiplier la racine quarrée d'un nombre composé ensemble avec la racine quarrée d'un nombre diminué semblable en soy-mesme, cōme $\sqrt{12+\sqrt{6}} + (12-\sqrt{6})$; soit posé le nōbre 2 fois, ainsi qu'il appert icy, & soient pris les quarez des parties, lesquels seront $12+\sqrt{6}$, & $12-\sqrt{6}$, qui font ensemble 24 (car $+\sqrt{6}$ ruine $-\sqrt{6}$.) Et soit multipliee vne partie par l'autre, & sera faict $\sqrt{138}$, (pource que 6, quarré de $\sqrt{6}$, osté de 144, quarré du nombre 12, reste 138, auquel faut apposer le signe $\sqrt{}$) dont le double est $\sqrt{552}$: & $24+\sqrt{552}$ sera le nombre produict cherché.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{12+\sqrt{6}} + \sqrt{12-\sqrt{6}} \\
 \sqrt{12+\sqrt{6}} + \sqrt{12-\sqrt{6}} \\
 \hline
 12+\sqrt{6} + 12-\sqrt{6} \\
 \sqrt{138} \\
 \sqrt{138} \\
 \hline
 \sqrt{552} \\
 24+\sqrt{552}
 \end{array}$$

Or la racine de ce produict est aussi la somme des deux racines $\sqrt{12+\sqrt{6}}$ & $\sqrt{12-\sqrt{6}}$ recueillie en vne seule somme. Car quand la somme de deux nombres est multipliee en soy, la racine quarrée du nombre produict est la somme des mesmes deux nombres: & partant puisque les deux racines proposees ensemble, multipliees en soy, font $24+\sqrt{552}$, la racine de ce produict, sçavoir est $\sqrt{24+\sqrt{552}}$ sera la somme de ces deux racines-là. Ce que nous rendrons manifeste par vn autre exemple en nombres rationaux. Soit $\sqrt{10+\sqrt{36}} + \sqrt{10-\sqrt{36}}$ c'est à dire 6, qu'il faut multiplier en soy. Il est euident que le nombre qui sera produict doit estre 36.

Soient donc trouuez les quarez des parties, lesquels seront $10+\sqrt{36}$, & $10-\sqrt{36}$, qui adioustez ensemble font 20. & soit multipliee vne partie en l'autre, & viendra $\sqrt{64}$, dont le double sera $\sqrt{256}$, c'est à dire 16: & partant le nombre produict est $20+16$, c'est à dire 36. & la racine de ce nombre, sçavoir est 6, est pareillement la somme de l'additiō de ces deux racines là proposees, comme il est manifeste.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{10+\sqrt{36}} + \sqrt{10-\sqrt{36}} \\
 \sqrt{10+\sqrt{36}} + \sqrt{10-\sqrt{36}} \\
 \hline
 10+\sqrt{36} + 10-\sqrt{36} \\
 \sqrt{64} \\
 \sqrt{64} \\
 \hline
 \sqrt{256} \\
 20+\sqrt{256}
 \end{array}$$

Or quand il faut multiplier vn nombre composé de racine simple, & de racine vniuerselle, par vn nombre diminué semblable; à aussi lieu le compendium que nous auons enseigné au chap. 19. Comme pour exemple, s'il faut

multiplier le nombre $\sqrt{20} + \sqrt{(20 - 5)}$ par le nombre $\sqrt{20} - \sqrt{(20 - 5)}$: Il n'y a qu'à soustraire 20 — 5. quar-
ré de la dernière particule du nombre composé ou diminué,
de 20 carré de la première particule, & le reste 5, sera le
produit de la multiplication.

Semblablement s'il faut multiplier $\frac{1}{2}9 + \sqrt{[\frac{1}{2}99 + 19]}$ par $\frac{1}{2}9$
— $\sqrt{[\frac{1}{2}99 + 19]}$: Il n'y a qu'à soustraire le carré de la dernie-
re particule, du carré de la première particule, sçavoir est
 $\frac{1}{2}99 + 19$, de $\frac{1}{2}99$, & le reste — 19, sera le produit de la multipl.

Pour faire la division des racines vniuerselles, soit réduit à
carré, tant le nombre diuidande que diuiseur: puis apres
soit faite la diuision comme il a esté enseigné cy-deuant, &
la racine du nombre produit sera le quotient. Comme pour
exemple, soit $\sqrt{[13 + \sqrt{7}]}$ qu'il faut di-
uiser par 5. Les quarez des nombres $13 + \sqrt{7}$ $[2^2 + \sqrt{7^2}]$
sont 13 + 7, & 5. Je diuise donc 13 par 5, & vient $2\frac{1}{5}$: & $\sqrt{7}$ par 5, c'est à dire
par 25, & vient $\frac{\sqrt{7}}{5}$: tellement que tout le quotient est
 $\sqrt{(2\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{7}}{5})}$.

Itē soit $\sqrt{(432 + \sqrt{7776})}$ qu'il faut diuiser par 6. Les quar-
rez des nombres sont 432 + 7776, & 36. estans diuisez 432
par 36, viennent 12: & 7776
estant diuisee par 36, c'est à di-
re par 1296, vient 6: & par-
tant tout le quotient sera $\sqrt{(12 + \sqrt{6})}$.

Item soit $\sqrt{15}$, qu'il faut diuiser
par $\sqrt{(3 + \sqrt{5})}$. Afin de trouuer vn
nouveau diuiseur nous multiplierōs $\sqrt{(3 + \sqrt{5})}$ par $\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$
& viendra vn nouveau diuiseur 4. Que si le diuidende $\sqrt{15}$,
est aussi multiplié par $\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$ nous aurons vn nouveau di-
uidande $\sqrt{(45 - \sqrt{1125})}$: le carré d'iceluy sera 45 — $\sqrt{1125}$, &
le carré du nouveau diuiseur sera 4. Si donc on diuise 45 par 4,
le quotient sera $11\frac{1}{4}$: & si nous diuisons — $\sqrt{1125}$, par 4, c'est
à dire par 16, le quotient sera — $\sqrt{70\frac{1}{16}}$. Donc tout le quo-
tient est $\sqrt{(11\frac{1}{4} - \sqrt{70\frac{1}{16}})}$.

Item soit diuisé 20 par $(10 - \sqrt{5})$. Nous multiplierons l'un
& l'autre nombre par $\sqrt{(10 + \sqrt{5})}$ afin d'auoir vn nouveau di-
uidende $\sqrt{(4000 + \sqrt{800000})}$ & vn nouveau diuiseur 95. les
quarez d'iceux nombres sont 4000 + 800000, & 95. Si
donc on partit 4000 par 95, seront donnez $42\frac{2}{9}$: & de la di-
uision de 800000 par 95, c'est à dire par 9025, sera pro-
duit $\sqrt{88\frac{21}{101}}$. Donc tout le quotient de la diuision est $\sqrt{(42\frac{2}{9} + \sqrt{88\frac{21}{101}})}$. Item

Item soit diuisee $\sqrt{c}$ ($\sqrt{c} 3268 + \sqrt{c} 13824$) par 2. Les cubes de ces nombres sont $\sqrt{c} 32768 + \sqrt{c} 13824$, & 8. Le diuise dōc $\sqrt{c} 32768$ par 8, c'est à dire par $\sqrt{c} 512$, & vient au quotient $\sqrt{c} 64$: & de la diuision de $\sqrt{c} 13824$ par 8, c'est à dire par $\sqrt{c} 512$, vient $\sqrt{c} 27$. Tout le quotient est donc $\sqrt{c}$ ($\sqrt{c} 64 + \sqrt{c} 27$) c'est à dire $\sqrt{c} 7$.

Item soit $\sqrt{588 + \sqrt{34848}}$ qu'il faut diuiser par $\sqrt{12 + \sqrt{8}}$. Les quarrés des nōbres sont $588 + \sqrt{34848}$, & $12 + \sqrt{8}$. Nous multiplierons l'un & l'autre nombre par $12 - \sqrt{8}$, afin d'auoir nouveau nombre diuidende, & diuiseur : le diuidende sera $\sqrt{7056 + \sqrt{5018112} - \sqrt{2765952} - \sqrt{278784}}$, ou plustost par reduction $\sqrt{6528 + \sqrt{332928}}$, & le diuiseur sera 136. Si donc on diuise 6528, par 136, viendront 48 : & $\sqrt{332928}$ par 136, c'est à dire par $\sqrt{18496}$, viendront $\sqrt{18}$: & partant tout le quotient sera $\sqrt{48 + \sqrt{18}}$.

Nous auons dit cy dessus comment il faut adiouster vne racine vniuerselle à vne semblable ayant le signe contraire : comme $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ avec $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ dont la somme est $\sqrt{6}$. Mais telles racines se peuvent encore adiouster ensemble comme ensuit.

Le quarré de la dernière particule de l'une ou l'autre d'icelles racines soit osté du quarré de la première particule, & à la racine quarrée du reste soit adiouste la première particule; puis soit doublé ce qui viendra, & la racine de ce double-là, sera la somme de l'addition. Comme en l'exemple cy dessus, le quarré de la dernière particule est 3, lequel i'oste de 4 quarré de la première particule, & reste 1, que i'adiouste à icelle première particule, & font 3, dont le double est 6, & la racine de 6, est $\sqrt{6}$, & autant est la somme de l'addition des deux racines proposées.

Mais quand les deux racines qu'il faut adiouster sont dissimilaires, il faut diuiser la plus grande par la moindre, & au quotient adiouster par règle vne vnitè : (sinon que lesdites racines fussent incommens. car alors l'addition d'icelles se fera plus commodément par l'interposition du signe +) puis par le produit soit multipliée la plus petite racine; & le produit de la multiplication sera la somme de l'addition. Comme pour exemple : soit $\sqrt{8 + \sqrt{48}}$ à laquelle il faut adiouster $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Le diuise celle là par ceste cy, & vient au quotient $\sqrt{4}$, c'est à dire 2, auquel i'adiouste 1, & font 3, par lesquels ie multiplie $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ & vient $\sqrt{18 + \sqrt{243}}$ pour la somme des deux racines proposées à adiouster.

Item soit $\sqrt{10 + \sqrt{36}}$ qu'il faut adiouster à $\sqrt{11 + \sqrt{25}}$

Je diuise ceste-cy par celle-la, & vient 1 au quotient, auquel j'adiouste vne vnité, & font 2, par lesquels ie multiplie $\sqrt{10} + \sqrt{6}$ & vient $\sqrt{64}$, c'est à dire 8, pour la somme de l'addition des deux racines proposees.

Maintenant si d'une racine vniuerselle de nombre composé, il en faut soustraire vne autre semblable de nombre diminué : Le quarré de la derniere particule soit osté du quarré de la premiere, & la racine du reste soit ost e d'icelle premiere particule ; puis soit doublé ce dernier residu, & la racine de ce double sera le reste requis. Comme pour exemple, soit $\sqrt{12 + \sqrt{6}}$ de laquelle il faut soustraire $\sqrt{12 - \sqrt{6}}$. Le quarré de la premiere particule est 144, duquel j'oste 6, quarré de la derniere particule, & reste 138, dont la racine est $\sqrt{138}$, que j'oustraie de la premiere particule 12, & reste 12 — $\sqrt{138}$, que ie double, & viennent 24 — $\sqrt{552}$, dont la racine est $\sqrt{24 - iess}$ qui est le reste requis.

Mais si les racines sont dissemblables ; pour faire la soustraction, il faut diuiser la plus grande par la moindre, & du quotient oster 1 par regle ; (sinon que les racines proposees fussent incommens. Car alors la soustraction se fera plus commodement par l'interposition du signe—.) Puis par le reste soit multipli e la moindre racine, & le produit sera le reste requis. Comme pour exemple, soit $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ qu'il faut soustraire de $\sqrt{8 + \sqrt{48}}$. Je diuise ceste cy par celle-la, & vi t au quotient $\sqrt{4}$, c'est à dire 2, dont j'oste vne vnité, & reste 1, par lequel ie multiplie la moindre racine $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ & vient la même $\sqrt{3 + \sqrt{3}}$ pour le reste de la soustraction.

Item soit $\sqrt{486 - \sqrt{162}}$ de laquelle faut soustraire $\sqrt{16 - \sqrt{2}}$ ie diuise celle-là par celle-cy, & vi t au quotient $\sqrt{9}$, c'est à dire 3, dont j'oste 1, & reste 2, par lesquels ie multiplie la moindre racine $\sqrt{16 - \sqrt{2}}$ & vient au produit $\sqrt{96 - \sqrt{32}}$ pour le reste de la soustraction requis.

*Des fractions des nombres irrationaux, & de
leur Algorithme.*

CHAP. XXII.

LA numeration d'icelles fractions est facile: Car quand le signe radical est posé deuant le milieu de la fraction, ice-

signe est referé à l'un, & à l'autre terme, c'est à sçavoir, tant au numérateur, qu'au dénominateur. Comme ceste fraction $\sqrt[2]{\frac{9}{16}}$, signifie $\sqrt[2]{9}$ estre diuisee par $\sqrt[2]{16}$; & vaut $\frac{3}{4}$. Ainsi $\sqrt[2]{c\frac{8}{17}}$, signifie $\sqrt[2]{c8}$ estre diuisee par $\sqrt[2]{17}$; & icelle equiualle à $\frac{\sqrt[2]{c8}}{\sqrt[2]{17}}$. Ainsi aussi $\sqrt[2]{\frac{6}{25}}$, denote $\sqrt[2]{6}$ estre diuisee par $\sqrt[2]{25}$.

Mais quand le signe radical est posé deuant vn nombre entier avec la fraction, il faut reduire tout le nombre à vne seule fraction, afin de pouuoir exprimer sa valeur. Comme $\sqrt[2]{c\frac{67}{11}}$ sera reduit à $\sqrt[2]{c\frac{134}{22}}$, & signifie $\sqrt[2]{c134}$ estre diuisee par $\sqrt[2]{22}$.

125, c'est à dire par 5, & peut estre representee ainsi $\sqrt[5]{c192}$, tel-

lement qu'il signifie $\sqrt[5]{c192}$ estre diuisee par 5. Que si les termes de ceste fraction $\sqrt[5]{c\frac{192}{11}}$ sont multipliez par vn mesme nombre, c'est à sçavoir par $\sqrt[5]{c192}$, sera produit la fraction $\sqrt[5]{c\frac{36864}{14000}}$ equiualant à la fraction $\frac{192}{11}$. Et si de rechef les termes produits de là fraction sont multipliez par la mesme $\sqrt[5]{c192}$, sera produit la fraction $\sqrt[5]{c\frac{7077888}{4682000}}$.

192
c'est à dire $\sqrt[5]{c4608000}$, & signifie le cube 192 (qui est produit

de $\sqrt[5]{c192}$ multipliee en soy cubiquement) estre diuisee par $\sqrt[5]{c4608000}$; pource que la racine cubique du numérateur 7077888 est 192. Derechef la fraction $\sqrt[5]{\frac{16}{64}}$, signifie $\sqrt[5]{16}$, c'est à sçavoir 4, estre diuisee par $\sqrt[5]{64}$, c'est à dire par 8; & est equi-

uivalente à $\frac{1}{2}$. Et la fraction $\sqrt[5]{\frac{16}{64}}$ signifie $\sqrt[5]{16}$, c'est à dire 4 estre

diuisee par 64; & est equivalente à $\frac{4}{64}$, ou $\frac{1}{16}$. Ainsi $\frac{16}{64}$, signifie que le nombre 16 est diuisee par $\sqrt[5]{64}$, c'est à dire par 8; & est equivalente au nombre 2.

Quand la raison des numérateurs aux dénominateurs est vne mesme, les fractions sont egales, tout ainsi qu'es fractions

vulgaires: Parquoy toutes ces fractions $\sqrt[5]{\frac{64}{2}}$, $\frac{64}{2}$, $\frac{64}{\sqrt[5]{2}}$, sont

de mesme valeur; pource qu'en toutes le numérateur est quadruple du dénominateur.

Les fractions irrationnelles se reduisent à minimas termes (quand elles peuvent estre reduites,) tout ainsi qu'es fractions

vulgaires. Comme ceste fraction $\sqrt[3]{q c \frac{1}{2}}$ se reduira à ceste-cy $\sqrt[3]{q c \frac{1}{2}} : \& \sqrt[3]{\frac{144}{16}}$ à $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Elles peuuent aussi estre quelquesfois reduites à moindres signes radicaux; Comme $\sqrt[3]{q c \frac{1}{2}}$ se reduit $\sqrt[3]{c 2}$

à —. Pource que le numérateur 4 à racine quarrée 2, mais $\sqrt[3]{2}$

elle n'a pas racine cubique: Et le dénominateur 8 à racine cubique 2, mais elle n'a pas la quarrée. Or que ces fractions $\sqrt[3]{c 2}$

$\sqrt[3]{q c \frac{1}{2}} \& —$ soient égales, on le peut prouuer par la multiplication en croix. $\sqrt[3]{2}$

Or l'addition & subtraction se fait en ceste maniere. Si le dénominateur est vn mesme, soient adioustez les numérateurs, comme il a esté dict cy deuant, ou soit soustrait l'un de l'autre, & à la somme, ou au reste, soit apposté le dénominateur commun, ainsi qu'il appert és exemples suiuaus.

Addition		Subtraction	
$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{9}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{9}$
— adioustez à —		— ostee de —	
7	7	7	7
$\sqrt[3]{25}$		$\sqrt[3]{1}$	
font — ou $\frac{1}{7}$		reste — ou $\frac{1}{7}$	
7		7	

Mais quand les dénominateurs sont diuers, soit faite la reduction à vn mesme dénominateur par la multiplication en croix, ainsi qu'és fractions vulgaires: puis soit fait comme dessus, comme apert és formules cy dessus.

Reduction	Addition	Subtraction
$\sqrt[3]{144} \cdot \sqrt[3]{196}$	$\sqrt[3]{\frac{144}{441}} \& \sqrt[3]{\frac{196}{441}}$	$\sqrt[3]{\frac{144}{441}} \text{ de } \sqrt[3]{\frac{196}{441}}$
$\sqrt[3]{\frac{16}{49}} \& \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$	font $\sqrt[3]{\frac{676}{441}}$ ou $1 \frac{1}{41}$	reste $\sqrt[3]{\frac{4}{441}}$ ou $\frac{2}{31}$
$\sqrt[3]{441}$		

En la mesme maniere s'il faut adiouster $\sqrt[3]{50} + \sqrt[3]{c 24} \sqrt[3]{c 24} + \sqrt[3]{8}$

on reduira premierement icelles fractions à mesme denomi-
nation, c'est à sçauoir à $\frac{\sqrt{200} + \sqrt{19}}{10}$ & $\frac{\sqrt{23000} + \sqrt{200}}{10}$: puis

apres adioustât les numerateurs on aura $\frac{\sqrt{800} + \sqrt{68232}}{10}$: Mais

si on soustraiât la moindre d'icelles fractions de la plus gran-
de restera $\frac{\sqrt{6648}}{10}$.

Quand les numerateurs sont incommensurables, l'addition d'iceux se fait par l'interposition du signe +, mais la subtraction par l'interiection du signe — Comme la somme de $\sqrt{\frac{7}{2}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}}$ est $\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$. Et $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ostée de $\sqrt{\frac{7}{2}}$ reste $\sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$.

En la multiplication & diuision des fractions irrationnelles il faut seulement les reduire à mesme signe radical, & acheuer

comme es fractions vulgaires. Parquoy multipliant $\frac{\sqrt{3}}{4}$ par

$\frac{\sqrt{6}}{7}$ viendra $\frac{\sqrt{18}}{28}$. Et $\frac{\sqrt{36}}{3}$ diuisee par $\frac{\sqrt{12}}{2}$ fera $\frac{3}{2}$: & aussi $\frac{\sqrt{3}}{4}$ di-

uisee par $\frac{\sqrt{6}}{7}$ viendra $\sqrt{\frac{147}{196}}$ c'est à dire $\sqrt{1\frac{3}{4}}$.

Quant à la preuue de chacune de ces operations, elle se fait par la contraire, c'est à dire que l'addition se preuue par la subtraction; & la subtraction par l'addition, &c.

Des nombres cossiques irrationaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXIII.

Tout ainsi que les nombres absolus se font irrationaux, estans precedez de signes radicaux : comme de 5, se fait $\sqrt{5}$ y iij

Vc : Ainsi aussi les nombres cossiques se font irrationaux, quand on leur prepose quelqu'un d'iceux signes radicaux : Comme de $20R$, se fait $\sqrt{20R}$, nombre cossique irrationnel, qui se prononce, la racine quarree de 20 racines : Item de $6c$, se fait $\sqrt{6c}$, qui signifie, la racine quarree de 6 c. Item de $9R$, se fait $\sqrt{9R}$. &c. Or tels nombres peuuent estre quelques-fois rationaux, & quelquesfois irrationaux selon la valeur d'une racine. Car si $1R$ vaut 5, $10R$ vaudront 100, duquel la racine quarree est 10 : partant $\sqrt{20R}$ est vn nombre rationnel equiualant 10 : Et $\sqrt{6c}$ sera irrationnel, puis que 100 n'a pas racine cubique. Il est donc euident qu'on ne peut iuger si tels nombres sont rationaux ou irrationaux, iusques à ce que l'estimation & valeur d'une seule racine apparaisse.

Or l'addition & soustraction d'iceux nombres se fait par l'interpositio des signes + & — Comme $\sqrt{36R}$ adioustee à $\sqrt{129}$, fait $\sqrt{36R} + \sqrt{129}$, ou $\sqrt{129} + \sqrt{36R}$. Et 36 estant ostez de $\sqrt{36R}$, restera $\sqrt{36R} - 36$: & ainsi des autres.

Que si les signes cossiques sont semblables, & les nombres irrationaux (considerez sans leurs signes cossiques) sont commensurables ; l'addition & subtraction se feront en la mesme maniere des racines simples, enseignees chap. 15 & 16. appo-sant apres l'operation le mesme signe cossique. Ainsi $\sqrt{8R}$ adioustee à $\sqrt{18R}$, fera $\sqrt{50R}$. Mais ostant $\sqrt{8R}$ de $\sqrt{18R}$, restera $\sqrt{2R}$.

La preuue sera facile & euidente, si on pose la vailleu d'une seule racine estre quelque nombre, comme 2. Car $8R$ seront 16, dont la racine quarree est 4 : & $18R$ seront 36, dont la racine quarree est 6 : Or 4 & 6 font 10 : comme aussi $\sqrt{50R}$, puis que 50 R font 100, dont la racine est 10. Mais 4 ostez de 6, reste 2, vailleu de $\sqrt{2R}$, puisque 2R font 4, dont la racine est 2.

Mais afin que les nombres cossiques irrationaux soient multipliez entr'eux, ou diuisez, ils doiuent estre premierement reduits à mesme signe radical, comme nous auons enseigné au chap. 13. Comme s'il faut multiplier $\sqrt{c} 4R$ par $\sqrt{c} 8R$: icelles estans reduites à mesme signe radical, seront $\sqrt{qc} 16q$, & $\sqrt{qc} 512c$: lesquels deux nombres multipliez entr'eux produisent $\sqrt{qc} 8192\beta$; mais $\sqrt{qc} 512c$ diuisee par $\sqrt{qc} 16q$, le quotient sera $\sqrt{qc} 32R$.

La preuue se fera, posant la vailleu d'une racine, comme dict est cy-dessus : ou bien chascue operation par la contraire.

Quant aux autres nombres rompus, il n'est besoin d'en trai-

Et particulièrement, pource qu'ils suivent l'Algorithme de leurs entiers, joint à celui des nombres communs.

Or vne equation se rencontrant entre vn nombre cossique irrationnel & vn nombre absolu, il la faudra reduire en ceste maniere. Soit pour exemple vne equation entre $\sqrt{248}$ & 12. Il y aura pareillement equation entre 248 & 144 leurs quarrés: soit donc diuisé 144 par 24, & sera produit 6 au quotient pour la valeur d'une racine: ce qui est manifeste, puis que 248 font 144, dont la racine quarrée est 12.

Item s'il y a equation entre $\sqrt{109}$ & 20: il y aura aussi equation entre 109. & 400: diuisant donc 400 par 10, viendront 40 pour la valeur d'une racine. Finalement si vne equation est trouuée entre $\sqrt{129}$ & 30: il y aura aussi equation entre 129 & 27000, les cubes d'eux: parquoy diuisât 27000 par 12, viendront 2250 pour la valeur d'une seule racine.

Que si quelqu'un proposoit vne equation estre $\sqrt{c 8}$ & 3, il y auroit aussi equation entre leurs cubes 8 & 27. Ce qui est impossible. Parquoy en ces equations il est necessaire que le nombre absolu soit la racine du nombre avec lequel est le signe radical: telle qu'est l'equation d'entre $\sqrt{c 8}$ & 2. Item entre $\sqrt{c 64}$ & 4: Item entre $\sqrt{81}$ & 9: &c. Autrement l'equation sera impossible.

De l'extraction des racines des binomes & residus.

Quand deux quelconques nombres sont conioincts par le signe +, ils sont ordinairement nommez Binome: comme $\sqrt{12} + \sqrt{3}$: & $\sqrt{18} + \sqrt{8}$. Mais estans accouplez par le signe —, ils sont appelez Apoteme ou Residu: Comme $\sqrt{12} - \sqrt{3}$: & $\sqrt{18} - \sqrt{8}$. Et plus de deux nombres ainsi accouplez, sont nommez Trinome, Quatrinome, &c. Comme $\sqrt{17} + \sqrt{10} + \sqrt{3}$: ou $\sqrt{17} - \sqrt{10} + \sqrt{3}$, sont dictz Trinome: & $\sqrt{17} + \sqrt{10} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$: ou $\sqrt{17} - \sqrt{10} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$, sont appelez Quatrinome, &c. Mais Euclide au 10. liure prop. 37 & 74 appelle seulement Binome, ou residu, quand les deux nombres conioincts par le signe + ou —, sont rationels commensurables en puissance seulement: il constitue de six sortes de binome, & autant de residu: chacun desquels il definit, & enseigne à trouuer au mesme liure. Or pour extraire la racine quarrée

d'iceux binomes & residus, il y a diuerses manieres, deux desquelles nous enseignerons icy, & au prealable le probleme suiuant.

Coupper un nombre donné en deux parties, telles que le nombre produict d'icelles soit egal à un nombre donné, qui ne soit plus grand que le quarré de la moitié d'iceluy nombre proposé à diuifer, ou (qui est le mesme) que la quatriesme partie du quarré dudit nombre.

Qu'il faille coupper le nombre 20 en deux parties, telles que multipliees entr'elles, leur produit soit 75, qui est moindre que 100, quart du quarré d'iceluy nombre proposé 20. Soit osté 75 de 100, quarré de la moitié de 20, & resteront 25, dont soit pris la racine quarrée, laquelle sera 5, & soit icelle adioustee à 10, moitié du nombre proposé à diuifer, & viendra 15, qui sera le plus grand nombre cherché, mais icelle racine 5 estant ostée d'icelle moitié 10, resteront 5, qui sera le moindre nombre requis: tellement donc que les deux nombres 15 & 5, sont parties du nombre 20, telles que multipliees entr'elles, elles produisent 75, ainsi qu'il estoit requis.

Maintenant soit le binome $38 + \sqrt{288}$, duquel il faut extraire la racine quarrée. Soit coupé le plus grand nom 38 en deux parties, telles que leur produit soit le nombre 72 quatriesme partie du quarré du moindre nom, sçauoir de 288, lesquelles parties seront trouuees par le prob. cy dessus, estre 36 & 2: d'iceux deux nombres soient prises les racines quarrées, & icelles seront 6 & $\sqrt{2}$, qui conioinctes par le signe + feront $6 + \sqrt{2}$, qui sera la racine quarrée du binome proposé. Mais icelles racines 6 & $\sqrt{2}$ estans accouplees par le signe — feront $6 - \sqrt{2}$, qui sera la racine quarrée du residu $38 - \sqrt{288}$. Item la racine quarrée du binome $\sqrt{32} + \sqrt{24}$, sera trouuee en la mesme maniere estre $\sqrt{18} + \sqrt{2}$. Car $\sqrt{32}$ plus grād nom d'iceluy binome estant coupé en deux parties, telles que leur produit soit 6, quatriesme partie de 24, quarré du moindre nom: icelles parties seront trouuees estre $\sqrt{18}$, & $\sqrt{2}$, dont les racines conioinctes par le signe +, sont $\sqrt{18} + \sqrt{2}$.

Pour autrement extraire la racine quarrée du binome $38 + \sqrt{288}$, il faut du quarré du plus grand nom, oster le quarré du moindre nom, & resteront 1156, desquels soit pris le quart, qui sera 289, duquel soit pris la racine quarrée, laquelle sera 17, qu'il faut adioster, & soustraire de la moitié du plus grād nom, sçauoir de 19, & viendront 36, & 2, desquels deux nombres soient prises les racines quarrées, & seront 6, & $\sqrt{2}$, qui accouplees par le signe +, feront $6 + \sqrt{2}$ pour la racine quarrée du binome $38 + \sqrt{288}$, comme deuant. Par la mesme ma-

niere la racine quarree du residu $\sqrt{60} - \sqrt{12}$ sera trouuee estre $\sqrt{(\sqrt{15} + \sqrt{12}) - (\sqrt{15} - \sqrt{12})}$.

Quant à la preuue, elle se fait comme en l'extraction des nombres absolus, sçauoir est multipliant la racine trouuee par soy-mesme.

Or voila sommairement les operations vsitees en l'Algebre : Et afin de donner à l'apprenty tant plus de cognoissance en la pratique d'icelles operations, nous finirons ce traité par quelques questions, & solutions d'icelles.

1. *Trouuer deux nombres, desquels l'excez soit donné, & en raison donnée.*

Soit donné l'excez 20, & la raison quintuple donnée. Soit posé le moindre nombre estre 12. Donc le plus grand sera 52, sçauoir est le quintuple d'iceluy : l'excez d'iceux est 40. Il y a donc equation entre 40. & 20. & diuisant 20 par 4, viendra 5 pour 12. Parquoy le moindre sera 5, & le plus grand 25, qui est quintuple d'iceluy 5, & l'excede de 20.

2. *Estans donnez deux nombres, en trouuer vn autre, auquel estant adiouste l'un des donnez, & soustrait l'autre, la somme soit au reste en raison donnée.*

Les nombres donnez soient 100 & 20 : & il faut premiere-ment trouuer vn nombre auquel si on adiouste 100, & du mesme on oste 20, la somme soit triple du reste. Soit posé ce nombre là estre 12. & la somme sera 12 + 100 : mais le reste 12 - 20. Afin donc que ceste somme là soit triple de ce residu, l'equation sera entre 12 + 100. & 32 - 60. Et adioustant à chacun 60, elle sera entre 12 + 160, & 32. & ostant 12, icelle equation sera entre 160 & 22. Diuisant donc 160 par 2, sera trouue 80 pour 12, qui est le nombre cherché. Car si à iceluy on adiouste 100, on aura 180 ; mais si on en oste 20, resteront 60 ; & 180 est à 60 en raison triple.

Qu'il faille maintenant trouuer vn nombre, auquel si on adiouste 20, & du mesme on soustrait 100, ceste somme-là soit triple de ce reste cy. Soit posé ce nombre là estre 12, & sera fait la somme 12 + 20, & reste 12 - 100. Afin donc que ceste somme soit triple de ce reste, l'equation sera entre 12 + 20. & 32 - 300. Et adioustant 300 à chacun, elle sera entre 12 + 320. & 32. & ostant 12 de chacun, l'equation sera entre 320 & 22. Diuisant donc 320 par 2, viendra pour 12. 160, nombre cherché. Car si à iceluy on adiouste 20, on aura 180, & si on oste 100, resteront 60, & entre 180 & 60 est la raison triple.

3. *Trouuer deux nombres en raison donnée, & qui multipliez en-*

reux font un nombre ayant raison donnée à la somme d'iceux.

Qu'il faille donc trouver deux nombres en raison sesquialtere, tels que leur produit soit duodecuple de la somme d'iceux. Soient posez les deux nombres estre 4R, & 6R, qui est raison sesquialtere. Estans multipliez entr'eux ils font 24q. & leur somme est 10R. Afin donc que 24q. ayant raison duodecuple à 10R; l'equation sera entre 24q. & 120R. Divisant donc 120 par 4, viendra 3 pour la valeur de R, pour ce que les denominations cossiques q. & R. sont collaterales. Veut donc que le premier nombre a esté posé 4R, & le second 6R, celui-là sera 20, & cestuy cy 30, & iceux multipliez entr'eux font 600, qui est duodecuple de 50 somme d'iceux.

4. *Trouver deux nombres tels que le nombre produit de la multiplication d'iceux, estant diuisé par leur difference, le quotient soit egal à un nombre donné.*

Qu'il faille trouver deux nombres, tels que leur produit estant diuisé par leur difference, le quotient soit 30. Soit posé pour le moindre nombre, quelconque nombre moindre que le quotient donné 30, sçavoir est 20, & soit posé le plus grand estre 20+1R. afin que la difference d'iceux soit 1R. de 20, en 20+1R. sera fait le nombre 400+20R, lequel diuisé

par 1R difference d'iceux, le quotient est $\frac{400+20R}{1R}$, egal

au nombre proposé 30. Ceste equation sera reduicte par la multiplicatio en croix, à l'egalité d'entre 10R & 400+20R. ostant donc 10R de chacun, l'equatio sera entre 10R & 400. & 400 estans diuisez par 10, viendront 40 pour la valeur de 1R difference des nombres cherchez. veut donc que le moindre est 20, le plus grand sera 60, c'est à sçavoir 20+1R. Maintenant 60 multipliez par 20, font 1200, qui diuisez par 40 difference d'iceux nombres, le quotient est 30.

5. *Estans donnez deux nombres inegaux, en trouver deux autres en raison donnée, tels que le plus grand osté du plus grand donné, & le moindre du moindre, les restes soient egaux.*

Soient deux nombres donnez 100. & 60. & il en faut trouver deux autres en raison septuple, & que le plus grand osté de 100, & le moindre de 60, les restes soient egaux.

Soient posez pour les nombres en raison septuple, 1R. & 7R. Les nombres egaux restans seront 100-7R & 60-1R. Adioustant donc 7R à chacun, l'equation sera entre 100. & 60+6R. & ostant 60 de chacun, elle sera entre 40. & 6R. Et diuisant 40 par 6, viendra pour 1R, $6\frac{2}{3}$ moindre nombre, & le

plus grand septuple de cestuy-cy sera $46\frac{2}{3}$. Et ostant celuy-là de 60, & celuy-cy de 100 : les nombres restans seront egaux, sçavoir $53\frac{1}{3}$.

6. Trouver deux nombres en raison donnée, & que le quarré du plus grand soit au moindre aussi en raison donnée.

Que les nombres cherchez ayent la raison triple, & le quarré du plus grand ait au moindre la raison sextuple. Soit posé le moindre 1R. & le plus grand 3R. Le quarré du plus grand, sçavoir 9q. doit avoir raison sextuple au moindre 1R : Donc l'equation sera entre 9q. & 6R. Et diuisant 9 par 6, viendra $\frac{3}{2}$ pour 1R. pource que les nombres cossiques sont collateraux. Les nombres cherchez sont donc $\frac{3}{2}$ & 2, ayans raison triple, & le quarré du plus grand, sçavoir 4, est en raison sextuple au moindre, sçavoir à $\frac{1}{3}$.

7. Estant donné un nombre composé de deux quarez, le diuiser en deux autres quarez.

Soit le nombre donné 34, composé des deux quarez 9 & 25, qu'il faut diuiser en deux autres quarez. Les costez des quarez dōnez sont 3 & 5 : soit posé le costé du premier quarré cherché estre 1R+3, sçavoir vne racine plus que le costé du premier quarré donné : mais le costé du second quarré cherché, soit posé quelconque nombre de racines moindre que le costé du second quarré donné, sçavoir 2R-5. Les quarez d'iceux costez seront 1q+6R+9. & 4q-20R+25, qui adioustez ensemble font 5q+34-14R. egal au nombre donné 34. adioustant donc 14R à chacun, l'equation sera entre 5q+34. & 14R+34. & ostant 34 de chacun, restera l'equation entre 5q. & 14R. Diuisant donc 14 par 5, viendront $\frac{14}{5}$ pour 1R, pource que les nombres cossiques sont collateraux. Donc le costé du premier quarré, lequel nous auons posé estre 1R+3, sera $\frac{22}{5}$: & le costé du second quarré, lequel a esté posé de 2R-5, sera $\frac{28}{5}$ -5, c'est à dire $\frac{3}{5}$. Les quarez d'iceux costez trouuez sont $\frac{242}{25}$ & $\frac{9}{25}$, qui font ensemble $\frac{251}{25}$, c'est à dire 34 nombre donné.

8. Coupper un nombre donné en trois parties, telles que la premiere diuisee par un nombre donné; & la seconde multipliee par un autre nombre donné; & la tierce diuisee par quelque autre nombre, produissent trois nombres egaux.

Soit le nombre donné 178, qu'il faut diuiser en trois parties, telles que la premiere diuisee par 5, vienne autant que de la seconde multipliee par 8, & autant que de la tierce diuisee par 6. Soit posé la premiere partie 1R, laquelle diuisee par 5, le quotient sera $\frac{1}{5}$ R. Et pource que la seconde partie en 8, doit faire autant, nous diuiserons $\frac{1}{5}$ R par 8. Car le quotient $\frac{1}{40}$ R

sera la 2. partie, qui multipliee par 8 faict $\frac{1}{2}$ R. Et pource que la 3. partie diuisee par 6 doit faire autant, nous multiplierons $\frac{1}{2}$ R. par 6; & le produit $\frac{6}{2}$ R. sera icelle 3. partie, qui diuisee par 6, le quotient est $\frac{1}{2}$ R. Maintenant reste que ces trois parties 1R., $\frac{1}{10}$ R. & $\frac{6}{7}$ R. fussent 178 nombre donné. Or elles font $2\frac{2}{10}$ R. Dôc l'equatiô sera entre 178. & $2\frac{2}{10}$ R. Et si on diuise 178 par $2\frac{2}{10}$, viendra 80 pour 1R. qui est la premiere partie; & la seconde sera 2, & la tierce sera 96. lesquelles parties font 178 nombre donné: & la premiere diuisee par 5, mais la seconde multipliee par 8, & la tierce diuisee par 6, est tousiours produit vn mesme nombre 16.

9. *Diuiser un nombre donné en trois parties continuellement proportionnelles, telles que le produit de la premiere en la tierce ait une raison donnée au produit de la premiere en la seconde.*

Soit le nombre donné 30, qu'il faut diuiser en trois parties continuellement proport. tellement que le produit de la premiere multipliee par la tierce, soit au produit d'icelle premiere en la seconde, en raison quadruple. Soit posé la seconde partie estre 1R.: & partant la somme de la premiere & tierce 30—1R. Et pource que 1R. en soy faict 1q. la premiere en la tierce fera aussi 1q. Veu donc que ce produit doit estre quadruple du produit de la premiere en la seconde, sera produit $\frac{1}{2}$ q de la premiere en la seconde, sçauoir en 1R. Si donc on diuise $\frac{1}{2}$ q par 1R. le quotient sera $\frac{1}{2}$ R., qui multiplié par 1R. nombre diuisant, faict $\frac{1}{2}$ q nombre diuisé: & partant la premiere partie sera $\frac{1}{2}$ R. qui avec la seconde faict 1 $\frac{1}{2}$ R., laquelle somme ostee du nombre donné 30, restera la tierce partie 30—1 $\frac{1}{2}$ R. Maintenant pource que la premiere en la tierce doit faire 1q, c'est à sçauoir yn nombre egal à celuy de la moyenne 1R. en soy-mesme: si on diuise 1q. par la premiere, c'est à dire par $\frac{1}{2}$ R. le quotient sera 4R., qui multiplié par $\frac{1}{2}$ R., produit 1q. & partant la tierce partie sera 4R. egales à l'autre tierce partie trouuee 30—1 $\frac{1}{2}$ R. Adioustant donc 1 $\frac{1}{2}$ R. à chacun, l'egalité sera entre 5 $\frac{1}{2}$ R. & 30. & diuisant 30 par 5 $\frac{1}{2}$, viendra 5 $\frac{1}{2}$ pour la valeur de 1R. sçauoir est pour la seconde partie: donc la premiere partie, laquelle nous auons trouuée estre $\frac{1}{2}$ R., sera 1 $\frac{1}{2}$: & la tierce partie, qui a esté trouuee de 30—1 $\frac{1}{2}$ R., sera 22 $\frac{1}{2}$. Et ces trois parties 1 $\frac{1}{2}$, 5 $\frac{1}{2}$, 22 $\frac{1}{2}$ sont ensemble 30 nombre donné: & la premiere 1 $\frac{1}{2}$ multipliee par la tierce 22 $\frac{1}{2}$, fait 32 $\frac{11}{10}$, qui est quadruple de 8 $\frac{1}{10}$, faict de la premiere partie en la seconde. Et il est euident qu'icelles trois parties sont continuellement prop. puis qu'un mesme nombre est produit de la premiere en la tierce, que de la moyenne en soy, c'est à sçauoir 32 $\frac{11}{10}$.

10 Trouver trois nombres continuellement proportionnaux, en une raison donnée, desquels les quarez ensemble fassent un nombre donné.

Qu'il faille trouver trois nombres continuellement en raison lesquitiere, desquels les quarez fassent 4329. Soient posez les nombres cherchez estre 9R. 12R. 16R. qui sont en proportion lesquitiere. Les quarez d'iceux, sçavoir 81q. 144q. 256q. font ensemble 481q. egaux à 4329. Divisant donc 4329 par 481, viendra 9 pour la valeur de 1q, & par consequent 12R. fera 3. Donc le premier nombre posé 9R. sera 27. le second 36. & le tiers 48, desquels les quarez 729. 1296. 2304. font ensemble 4329.

11 Estant donnez deux nombres, en trouver un autre, qui adiouste à l'un d'iceux, & la somme multipliee par iceluy trouue, produise le quarré de l'autre nombre donné.

Soient les deux nombres donnez 10 & 12; & il en faut trouver vn autre qui adiouste au premier 10, fasse vn nombre, qui multiplié par iceluy adiouste, produise le quarré de l'autre nombre 12, sçavoir 144. Soit posé le nombre cherché 1R. R adioustant à 10, viendra 1R + 10, qui multiplié par 1R, fait 1R + 10R, lequel doit estre egal à 144. Ostant donc 10R de chacun, l'equation sera entre 1q. & 144 — 10R. laquelle se resoudra ainsi: La moitié du nombre des racines 5, fait le quarré 25, auquel adioustant 144, vient 169, dont la racine quaree est 13, de laquelle soit oitee la susdite moitié 5, à cause du signe —, & restera la valeur de 1R, sçavoir 8 nombre cherché. Car iceluy estant adiouste à 10, fait 18, qui multipliez par 8, le produit est 144, quarré de l'autre nombre 12.

12. Coupper un nombre donné en deux parties, telles que le nombre produit de l'une en l'autre, multiplié par le quarré du nombre donné, fasse un autre nombre donné.

Soit le nombre donné 20, qu'il faut coupper en deux parties, telles que le nombre procréé de la multiplication d'icelles, estant multiplié par 400, quarré du nombre donné soit 300. Soit posé l'une d'icelles parties estre 1R, & l'autre 20 — 1R. icelles multipliees entr'elles, viendra 20R — 1R. & ce nombre multiplié en 400, fait 8000R — 400q. qui doit estre egal à 300. adioustant 400q à chacun, l'equation sera entre 8000R. & 300 + 400q. & ostant 300, restera equation entre 400q. & 8000R — 300. & divisât par 400, l'equation sera entre 1q. & 20R — $\frac{3}{4}$. La moitié des racines est 10, dont le quarré est 100, ou $\frac{100}{1}$ desquels ostant $\frac{3}{4}$ resteront $\frac{397}{4}$, qui adioustez à la susdite moitié 10, la plus grande racine sera 10 + $\sqrt{\frac{397}{4}}$; & ostant les mesmes $\frac{397}{4}$ d'icelle moitié, restera la moindre racine 10 — $\sqrt{\frac{397}{4}}$, qui sôt

les parties requises. Car l'une multipliee par l'autre fait $\frac{1}{2}$; & $\frac{1}{4}$ en 400, quarré du nombre donné 20. fait $\frac{1200}{4}$, c'est à dire 300.

Or és 12 questions cy dessus, les nombres sont abstraits de la matiere, mais és 12 suivantes les nombres sont accordez aux choses materielles.

13. *Il y a un rectangle duquel les costez sont en raison septuple, & les quarez d'iceux pris ensemble, ont raison centuple à la somme d'iceux costez: Trouver les costez, l'aire & le diametre dudit rectangle.*

Soit posé le moindre costé 18. & le plus grand 72. desquels la somme sera 84. & leurs quarez 19 & 49. adioustez ensemble feront 50. centuple de 84. Donc l'equation est entre 50. & 800. Et diuisant 800 par 50, viendra 16, pour 18. moindre costé: le plus grand qui est en raison septuple sera donc 112. & l'aire sera 1792 produit d'un costé par l'autre. Et le diametre sera $\sqrt{12800}$. Car les quarez des costez sont 256, & 12544, la somme desquels est 12800, centuple de 128. qui est la somme d'iceux costez, & partant le quarré du diametre sera 12800, dót la racine quaree, sçauoir est $\sqrt{12800}$ sera ledit diametre.

14. *Il y a une colonne quadrangulaire rectangle, de laquelle la base se les costez en raison sesquiterce; & sa hauteur est au plus grand costé de la base en raison double superbipartiente tierce; & la solidité d'icelle colonne cōtient 93312 toises: il faut trouuer chacune dimensions.*

Le moindre costé de la base soit posé 32. & le plus grand 42. mais la hauteur 10 $\frac{2}{3}$ 2. afin qu'elle soit au plus grand costé 42. en raison double superbipartiente tierce, & le plus grand costé au moindre en raison sesquiterce. Ces trois nombres multipliez entr'eux produisent 128. egal à 93312 solidité de la colonne. Diuisant donc 93312 par 128. viennent 726 pour 16. & 9 pour 12. donc le moindre costé de la base, lequel nous auons posé estre 32. sera 27. & le plus grand 42. sera 36. & la hauteur 10 $\frac{2}{3}$ 2. sera 96. Et ces trois dimensions multipliees entr'elles produisent la solide 93312.

15. *Il y a un rectangle duquel l'aire est 30. & les costez d'iceluy sont en raison sesquialtere, il faut trouuer iceux costez, & le diametre.*

Soit posé le moindre costé 22. & partât le plus grand 32. sequialtere à iceluy: de la multiplication des costez entr'eux, sera produit 64. egaux à 30 aire donné. Diuisant donc 30 par 6, 19. sera 5. & 12. 75. Et pource que nous auons posé le moindre costé estre 22. iceluy sera $\sqrt{20}$, nombre doublé de-

45. & le plus grand costé 32. sera $\sqrt{45}$. nombre triple de $\sqrt{5}$. Et pource que les quarrés des costés 10 & 45, sont ensemble egaux au quarré du diametre : le quarré d'iceluy diametre sera 65, & iceluy dia. $\sqrt{65}$.

16. Il y a une armee composee de François, Allemans & Anglois: les François sont 25000 : les Allemans sont moitié des François & Anglois. & les Anglois sont la 8. partie des François & Allemans: il faut trouver le nombre des Allemans & des Anglois : & combien il y a d'hommes en toute l'armee.

Soit posé 12. pour les Allemans : donc les François & les Anglois ensemble seront 22. & toute l'armee sera 32. Et puis que les Anglois sont la 8 partie des François, & des Allemans ensemble : & que les Allemans & François sont ensemble 12 + 25000 : les Anglois seront $\frac{1}{8} \times 12 + 3125$. Parquoy veu que les François sont 25000 ; les Allemans 12. & les Anglois $\frac{1}{8} \times 12 + 3125$. toute l'armee sera $\frac{1}{8} \times 12 + 28125$ egale à 32. Ostant donc 12. de chacun l'equation sera entre 28125, & $\frac{1}{8} \times 12$. & diuisant 28125 par $\frac{1}{8}$, le nombre 25000 sera la valeur de 12, qui est le nombre des Allemans ; & partant les François & Allemans feront ensemble 40000, dont la 8 partie est 5000 pour le nombre des Anglois : & toute l'armee sera de 45000 hommes.

17. Il y a un quarré duquel le diametre, & le costé ensemble font 62. trouver iceux costé & diametre.

Soit posé le costé 12. & partant le diametre 62 — 12. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du costé : & le quarré du costé est 14. & le quarré du diametre est 36 — 122 + 14, il y aura equation entre 14. & 36 — 122 + 14. & ostant 14 de chacun demeurera equatiō entre 14. & 36 — 122. maintenant la moitié, du nombre des racines est 9, dont le quarré est 36 qui adioustez à 36, viennent 72, dont la racine est $\sqrt{72}$, de laquelle estant ostée la susdite moitié 9, restera $\sqrt{72} - 6$. pour la valeur de 12. & autant sera le costé du quarré: lequel ostant de 6, restera 12 — $\sqrt{72}$ pour le diametre.

18. Il y a un quarré duquel le diametre surpasse le costé de 3: trouuer les dits costé & diametre.

Le costé soit posé de 12. & partant le diametre sera 12. + 3. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du costé; & le quarré du costé est 14. & le quarré du diametre 14 + 62 + 9. L'equation sera entre 14. & 14 + 62 + 9. & ostant 14. de chacun, restera l'equatiō entre 14. & 62 + 9. La moitié au nombre des racines est 3, dont le quarré est 9, qui adiouste à 9, fait 18, dont la racine est $\sqrt{18}$, à laquelle soit adiouste la susdite moitié 3, & sera $\sqrt{18} + 3$ valeur de 12 qui

est pour le costé : & partant le diametre sera $\sqrt{18+6}$.

19. Il y a un quarré duquel le costé multiplié par le diametre faict
10 : trouuer le/dits costé & diametre.

Soit posé le costé de $1\frac{1}{2}$. & partant le diametre sera $\frac{10}{1\frac{1}{2}}$. Car
 $1\frac{1}{2}$ multipliee par $\frac{10}{1\frac{1}{2}}$ faict 10 : lequel nombre est quotient, si
10 est diuisé par $1\frac{1}{2}$. Et ainsi le quotient multiplié par le diui-
seur $1\frac{1}{2}$, produit le nombre diuisé 10. Et pource que le quarré
du diametre est double du quarré du costé, sçauoir est de $1\frac{1}{2}$ &

le quarré du diametre est $\frac{100}{100}$. Il y aura equation entre $1\frac{1}{2}$.

& $\frac{100}{100}$, laquelle par la multiplication en croix sera reduite à

celle d'entre $1\frac{1}{2}$ & 100. Diuisant donc 100 par 2, viendra 50.
valeur de $1\frac{1}{2}$, & $1\frac{1}{2}$ sera $\sqrt{50}$. pour le costé. Et pource que

le diametre a esté posé $\frac{10}{10}$, c'est à dire 10 diuisez par $1\frac{1}{2}$: si on

diuise 10 par $\sqrt{50}$, sçauoir est par la valeur de $1\frac{1}{2}$, viendra au
quotient $\sqrt{200}$ pour le diametre.

20. Il y a un rectangle, duquel l'aire est 80, & la difference des co-
stex est 2 : trouuer le diametre, & les costez d'iceluy rectangle.

Soit posé le moindre costé de $1\frac{1}{2}$; & partant le plus grand
de $1\frac{1}{2}+2$. Ces costez multipliez entr'eux font l'aire $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}$.
egal à l'aire donné 80. Ostant donc $2\frac{1}{2}$ de chacun, l'equatiō
sera entre $1\frac{1}{2}$ & $80-2\frac{1}{2}$. La moitié du nombre des racines est
1, dont le quarré est 1, qui adiousté à 80, sera 81, dont la raci-
ne quarrée est 9, de laquelle ostant la susdite moitié 1, restera
8, estimation de $1\frac{1}{2}$. pour le moindre costé. Donc le plus grād
sera 10, excedant iceluy de 2. Iceux costez multipliez entre-
eux produisent 80 aire donné, & les deux quarrez des costez
sont 64 & 100, egaux au quarré du diametre : & partant le
quarré du diametre sera 164, & iceluy dia. $\sqrt{164}$.

21. Il y a un rectangle duquel le diametre est 30, & la somme des
costez 42 : trouuer iceux costez, & l'aire du rectangle.

Soit posé vn costé de $1\frac{1}{2}$. & partant l'autre $42-1\frac{1}{2}$. Leurs
quarrez seront $1\frac{1}{2}$ & $1764-8\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}$ qui sont ensemble egaux
au quarré du diametre. Parquoy l'equation sera entre $1\frac{1}{2}+1764-8\frac{1}{2}$ & 900. Et adioustant $8\frac{1}{2}$ à chacun, elle sera en-
tre $8\frac{1}{2}+900$, & $1\frac{1}{2}+1764$. Et ostant 900 de chacun, reste

ra equa-

ra equation entre $84R. \& 29. + 864.$ Et derechef ostant $864.$ de chacun, elle sera entre $29. \& 84R. - 864.$ Et diuisant tout par $2.$ l'equation viendra entre $19. \& 42R. - 432.$ La moitié du nombre des racines est 21 , dont le quarré est 441 , duquel ostant 432 , restera 9 , dont la racine quarrée est 3 , qui adioustée à la susdite moitié 21 , viendra 24 pour le plus grand costé : & partant restera 18 pour le moindre : & iceux costez multipliez entr'eux produisent 432 pour laire du rectangle.

22. Il y a un quarré duquel le costé multiplié par la difference d'entre iceluy costé, & le diametre fait 15 : trouuer le diametre, & le costé dudit quarré.

Soit posé le costé de $1R.$ & partant la difference d'entre le costé & le diametre sera $\frac{15}{1R}$, laquelle est trouuée diuisant 15

par $1R.$ sçauoir est afin que le quotient multiplié par le diuiseur $1R.$ produise le nombre diuisé 15 par $1R.$; sçauoir est afin que le quotient multiplié par le diuiseur $1R.$ produise le nombre diuisé 15 . Et pource que le diametre excède le costé de

ceste difference, le diametre sera $1R. + \frac{15}{1R}$. Et d'autant que le quarré du diametre est double du quarré du costé; & le quarré d'iceluy costé est 19 , & le quarré du dia. est $\frac{199 + 309 + 225}{19}$

Il y aura equation entre 19 , & $\frac{199 + 309 + 225}{19}$ qui par multi-

plication en croix sera reduite à l'equation d'entre $299. \& 199 + 309 + 225.$ Ostant donc $199.$ de chacun, l'equation sera entre $199. \& 309 + 225.$ La moitié du nombre des quarez est 25 , dont le quarré est 225 , qui adiousté à 225 , vient 450 , dont la racine quarrée est $\sqrt{450}$, à laquelle adioustant la susdite moitié 15 , viendra $\sqrt{450} + 15$ pour 19 , & partant $1R.$ sera $\sqrt{(\sqrt{450} + 15)}$ & autant est le costé requis, dont le quarré $\sqrt{450} + 15$. estant doublé donnera $\sqrt{1800 + 30}$, quarré du dia-dre; & partant iceluy diametre sera $\sqrt{(\sqrt{1800 + 30})}$ duquel estant soustrait le costé, restera la difference $\sqrt{(\sqrt{1800 + 30})} - \sqrt{(\sqrt{450} + 15)}$ qui multipliée par le costé $\sqrt{(\sqrt{450} + 15)}$ sera produict le nombre 15 .

23. Deux hommes mettant leur argent ensemble, la somme est 200 escus, mais diuisant l'argent du second par celui du premier le quo-

tient est 1 : Il faut trouver l'argent de chacun.

Soit posé $1R$ pour le premier, & pour le second $1A$: il faut donc résoudre la seconde racine en première, ainsi. Pource que les deux ensemble ont 200 escus; il y aura equatiō entre $1R + 1A$, & 200. Ostant $1R$ de chacun restera l'equation entre $1A$, & $200 - 1R$. donc $1A$ sera reduite en $200 - 1R$. Parquoy ie pose derechef le nombre du premier estre $1R$, & celuy du second $200 - 1R$, qui font ensemble 200 escus. Ie diuise maintenant le nombre du second par celuy du premier, & viēt $200 - 1R$.

— egal a $\frac{1}{2}$, laquelle equation par la multiplica-

$1R$

tion en croix sera reduite à l'equation d'entre $400 - 2R$. & $3R$. Et adioustant $2R$ à chacun, l'equation sera entre 400 & $5R$. diuisant dōc 400 par 5, le quotient sera 80 pour le nombre du premier & partant le second aura 120, qui diuisez par 80, le quotient est $1\frac{1}{2}$.

24. Trois hommes ayans de l'argent, le premier dict aux deux autres, que s'il auoit encore 100 escus, il auroit autant qu'eux: le second dit aussi aux deux autres, que s'il auoit encore 100 escus, il auroit le double de leur argent: pareillement le troisieme dit aux deux autres, que s'il auoit encore 100 escus, il auroit le triple de leur argent: sçauoir combien à chacun.

Soit posé l'argent du premier estre $1R$. donc avec 100, il aura $1R + 100$, & autant sera la somme du second & tier, & tous les trois auront $2R + 100$. Soit posé la somme du second estre $1A$. Donc avec 100 il aura $1A + 100$, lequel nombre est double de la somme du premier & tier, laquelle est $2R + 100 - 1A$. (Pource que ayans tous trois $2R + 100$, si on oste $1A$, c'est à sçauoir l'argent du second, restera $2R + 100 - 1A$ pour la somme du premier & tier; & partant il y aura equation entre $1A + 100$, & $4R + 200 - 2A$. Et adioustant $2A$ à chacun, l'equation sera entre $3A + 100$. & $4R + 200$. & ostant 100 de chacun, demeurera l'equation entre $3A$, & $4R + 100$. Si donc les tous sont diuisez par 3, l'equation viendra entre $1A$, & $\frac{4}{3}R + \frac{100}{3}$: & partant puis que le second est posé auoir $1A$, la somme sera $\frac{4}{3}R + \frac{100}{3}$ finalement la somme du tier soit posée estre $1B$. Donc avec 100, il aura $1B + 100$, qui est nombre triple de la somme du premier & second, laquelle est $\frac{4}{3}R + \frac{100}{3}$, composee de $1R$ somme du premier, & $\frac{1}{3}R + \frac{100}{3}$ somme du second: Il y aura donc equation entre $1B + 100$ & $\frac{4}{3}R + \frac{100}{3}$, c'est à dire entre $1B + 100$, & $7R + 100$, & ostant 100 de chacun, l'equatiō sera entre $1B$, & $7R$. & partant

la somme du tier qui a esté posée 18 sera 72. Parquoy puis que le premier a 12. le second $72 + \frac{100}{3}$, & le tier 72. tous les trois ensemble auront $92 + \frac{100}{3}$. Mais tous les trois avoient aussi 120: Il y a donc equation entre $92 + \frac{100}{3}$ & 120: & ostant 24 de chacun, restera equation entre $72 + \frac{100}{3}$, & 100: & ostant derechef $\frac{100}{3}$, c'est à dire 33 $\frac{1}{3}$ de chacun, demeurera equation entre 72 & 66 $\frac{2}{3}$: divisât d'oc 66 $\frac{2}{3}$ par 72, viendra $9 \frac{1}{12}$ pour 12 somme du premier: & le second ayant $12 + 33 \frac{1}{3}$, aura 45 $\frac{1}{3}$: & le tier ayant 72, aura 63 $\frac{1}{3}$. Car ainsi le premier avec 100 aura 109 $\frac{1}{12}$, egale à la somme du second & tier; & le second avec 100, aura 145 $\frac{1}{3}$, qui est le double de la somme du premier & tier: & finalement le tier avec 100, aura 163 $\frac{1}{12}$, qui est le triple de la somme du premier & second.

Fin du sommaire de l'Algebre.





ELEMENT

DIXIESME.

DEFINITIONS.

1.



COMMENSURABLES grandeurs, sont celles mesurees par vne mesme mesure.

2.

Incommensurables grandeurs, sont celles qui n'ont aucune commune mesure.

Telles grandeurs sont le diamètre de quelque quarré, & le costé d'iceluy ; car icelles n'ont nulle commune mesure, comme sera démontré à la dernière prop. de ce liure. Il y a encores plusieurs autres lignes incommensurables, sçavoir est ausquelles on ne peut donner aucune commune mesure, beaucoup desquelles seront expliquées en ce liure ; & enseigné par quelles manieres elles peuvent estre trouuees : derechef, les superficies sont dites incommensurables, & les solides incommensurables, qui n'ont aucune commune mesure.

3. Lignes droites commensurables par puissance, sont celles desquelles les quarréz peuvent estre mesurez par vne mesme superficie.

4. Lignes droictes incommensurables en puissance, sont celles desquelles les quarez n'ont aucune commune superficie qui les puisse mesurer.

5. Cela estant ainsi, il est euident que à toute ligne droicte proposee, on trouuera infinies lignes droictes commensurables, & infinies incommensurables: les vnes en longueur & puissance, les autres en puissance seulement. Or vne ligne droicte proposee, est appelée rationele.

Si on propose quelque ligne droicte de grandeur cogneüe & determinée, icelle est appelée rationele, pource que c'est selon elle que nous ratiocinons.

Dounot a estimé que ceste definition ne debuoit auoir lieu; & partant l'a reiettee. Ce que i'estime qu'il n'a deub faire, ven qu'il se sert presque à tous propos de ceste ligne rationelle mentionnee en ceste definition.

6 Les lignes commensurables à vne ligne rationele, soit en longueur & puissance, soit en puissance seulement, sont appelées rationeles.

7 Et les lignes incommensurables à vne ligne rationele, sont irrationeles.

Si cōparant quelque ligne droicte, à la ligne prinse pour rationele, & sur laquelle nous ratiocinons. elle est trouuee commensurable à icelle rationele, soit en longueur & puissance, soit en puissance seulement. telle ligne est aussi dictée rationele; mais si elle est incommensurable à icelle ligne rationele proposee, tant en longueur qu'en puissance, ceste dictée ligne est appelée irrationele.

8. Le quarré descrit sur vne ligne rationele, est appelé rationel.

Tout ainsi que ceste ligne là, laquelle est cognüe & déterminée de certaine quantité est dite rationele; ainsi aussi le quarré décrit sur icelle ligne, est appelé rationel, pour ce qu'iceluy est certain & cognu: & les superficies comparees à iceluy quarré, sont aussi dites rationeles, ou bien irrationeles, selon quelles seront trouuees commensurables à iceluy quarré rationel, ainsi qu'il est dit es deux definitions suivantes.

9. Les figures commensurables au quarré rationel, sont aussi rationeles.

10. Et celles qui sont incommensurables au quarré rationel, sont irrationeles & sourdes.

11. Et les lignes qui peuuent icelles figures irrationeles, sont irrationeles & sourdes.

Or une ligne est dite pouuoir une figure quand le quarré décrit sur icelle est egal à icelle figure, d'autant que tout quarré est la puissance de sa racine ou de son costé. Ainsi il a esté dit cy-dessus que deux lignes sont commensurables en puissance, lors que non pas les lignes, mais les quarréz d'icelle lignes, peuuent estre mesurez par une mesme superficie.

Or a ces definitions nous adiouterons (apres Clavius) une demande, & quelques communes sentences, dont l'usage sera trouué en ce liure.

DEMANDE.

Qu'on puisse multiplier quelconque grandeur tant de fois qu'elle excède quelconque grandeur de mesme genre.

COMMUNES SENTENCES.

1. Vne grandeur mesurant tant de grandeurs qu'on voudra, mesure aussi la composée d'icelles.

2. Vne grandeur mesurant quelconque grandeur, mesure pareillemēt toute grandeur que celle-là mesure.
3. Vne grandeur qui mesure toute vne grandeur, & vne ostee, mesure aussi le reste.

THEOR. I. PROP. I.

Estans proposees deux grandeurs inegales, si on retranche de la plus grande plus de la moitié, & encores du residu plus de la moitié, & en continuāt tousiours ainsi : Il demeurera à la fin vne grandeur plus petite que la plus petite des deux proposees.

Soient proposees deux grandeurs inegales AB & C, estant C la plus petite: Je dis que si on retranche plus de la moitié de AB, & du residu encores plus de la moitié, & en continuant tousiours ainsi, on trouuera à la fin vn residu plus petit que C.

Qu'il ne soit ainsi. Soit la grandeur C multipliee tant de fois qu'elle excede la plus grande AB, & soit la produite d'icelle multiplication DE, laquelle sera multipliee de C, & plus grande que AB : qu'elle soit donc diuisee en parties egales à C, comme en A C D DF, FG, & GE : Item soit osté de AB plus de la moitié, sçauoir AH, & du residu HB plus de la moitié, sçauoir HI, & en continuant tousiours cecy iusques à ce que AB soit diuisee en autant de parties que DE, sçauoir en AH, HI, & IB, comme DE est diuisee en DF, FG, & GE. Pour autant que DE est plus grande que AB, & que le retranché DF n'est plus grād que la moitié de DE ; comme le retranché AH est plus grand que la moitié de AB, le reste FE sera plus grand que le reste HB : semblablement si du plus grand residu FE, on oste FG, qui n'est pas plus que la moitié, & du plus petit residu HB on oste plus de la moitié HI ; le reste IB sera plus petit que le reste GE egal à C : & par consequent IB dernière partie de



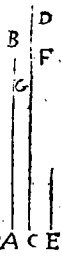
AB, fera plus petit que C : cè qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si de deux grandeurs inegales propoſees, on retranche touſiours alternatiuement la plus petite de la plus grande, ſans que le reſidu meſure la grandeur precedente ; telles grandeurs ſont incommenſurables

Soient propoſees deux grandeurs inegales AB & CD: ſi on retranche continuellement & alternatiuement la plus petite de la plus grande, & que le reſidu ne meſure iamais ſa grandeur precedente, c'eſt à dire que le plus petit reſidu ne meſure iamais le plus grand reſidu; Je dis que AB & CD ſont incommenſurables.

Autrement il faudra qu'elles ſoient commenſurables: Partant auſſi qu'elles ayent vne commune meſure, ſoit donc icelle E, ſ'il eſt poſſible. Maintenant, de la plus grande CD ſoit retranchee CF egale à AB, Et ſ'il ſe peut faire, ſoit continue ce retranchement iuſques à ce que le reſte DF ſoit plus petit que AB. Donc E commune meſure, meſurera la toute CD & la retranchee CF, egale à AB, ou multiplie d'icelle, par la 2. com. ſent. & elle doit auſſi meſurer le reſte DF par la 3. com. ſent. Item ſoit retranchee DF de AB tant de fois que faire ſe pourra, iuſques à ce que le reſte GB ſoit plus petit que E, qui meſure FD, & par conſequent ſa multiplie AG, par la 2. com. ſent. donc auſſi le reſte GB, par la 3. com. ſent. ce qui eſt abſurde. Partant AB & CD n'auoient point de commune meſure; partant incommenſurables: ce qu'il falloit demonſtrer.



PROBL. I. PROP. III.

Eſtans donnees deux grandeurs commenſurables, trouuer la plus grande commune meſure d'icelles.

Soient donnees deux grandeurs commensurables AB, CD, & il faut trouuer leur plus grande commune mesure. Or AB, qui est moindre que CD, mesurera icelle, ou elle ne la mesurera point : si elle la mesure, il est euident qu'elle sera la plus grande commune mesure. Si elle ne la mesure point, soit alternativement retranchée la plus petite de la plus grande iusques à ce que le reste mesure le reste : (ce qui doit aduenir d'autant que les grandeurs donnees sont commensurables) donc que AB soit retranchée de CD, & que le reste ED mesure AB. Je dis qu'icelle ED sera la plus grande commune mesure d'icelles grandeurs AB, CD.



Car puis qu'elle mesure AB, elle mesurera aussi CE son égale : & se mesurant soy-mesme, elle mesurera aussi la toute BE, par la 1. com. sent. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir G, (s'il est possible) donc par les com. sent. G mesurera AB, CD, & le retranché CE égal à AB, & par consequent le reste FG, qui est plus petit : ce qui est impossible : donc vne plus grande grandeur que ED, n'est commune mesure d'icelles AB, CD : Partant ED estoit la plus grande commune mesure.

C O R O L L A I R E.

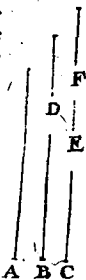
De cecy est manifeste que si vne grandeur mesure deux grandeurs, qu'elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté démontré que si G mesure AB & CD, qu'elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure ED.

P R O B L. 2. P R O P. IIII.

Trois grandeurs commensurables estans donnees, trouuer la plus grande cōmune mesure d'icelles.

Soient donnees trois grandeurs commensurables A, B, C, desquelles il faut trouuer la plus grande commune mesure. Soit trouuee D plus grāde commune mesure entre A & B par

la 3. p. 10. Si D mesure aussi C, il est manifeste que D est la plus grande commune mesure de toutes les trois grandeurs A, B, C. Car si vne plus grande grandeur que D mesure les grandeurs A, B, C, par le coroll. de la precedente prop. elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles A & B, c'est à dire D, qui est moindre grandeur, ce qui est impossible. Que si D ne mesure pas C, au moins D, C, seront commensurables: car veu que A, B, C sont commensurables, quelque mesure commune d'icelles, mesurera D plus grande mesure d'icelles A, B, par le corol. de la 3. p. 10. mais ceste mesme mesure la mesurera aussi C: donc D & C, seront commensurables. Soit donc trouuee par la 3. p. 10 E plus grande commune mesure d'icelles D, C: & icelle E sera la plus grande mesure des grandeurs donnees A, B, C. Car d'autant que E mesure D & C; & D mesure A & B, par la 2. com.



sent. E mesurera aussi icelles A & B. Mais elle mesure aussi C: donc E est mesure commune d'icelles A, B, C. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir F, s'il est possible. Donc puis que F mesure A & B, par le corol. de la 3. p. 10. elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure D. Mais elle mesure aussi C: donc F mesurant D & C, mesurera pareillement E plus grande mesure d'icelles: ce qui est absurde. Donc vne plus grande grandeur que E ne mesure pas les grandeurs A, B, C: & partant E est la plus grande commune mesure d'icelles.

COROLLAIRE.

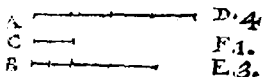
Par cecy est evident que si vne grandeur mesure trois grandeurs, qu'elle mesure aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté démontré que si F mesure A, B, C, qu'elle mesurera pareillement E plus grande commune mesure d'icelles.

Par semblable maniere, estans donnees plus de trois grandeurs commensurables, nous trouuerons leur plus grande commune mesure; & ce mesme corollaire aura lieu.

THEOR. 3. PROP. V.

Grandeurs commensurables, sont entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs commensurables A & B. Je dis qu'elles sont entr'elles comme nombre à nombre.



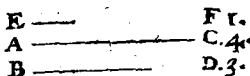
Car puis qu'elles sont commensurables, elles auront vne commune mesure, soit icelle C:

donc C mesurera A selon quelque nombre, comme selon D: il mesurera aussi B selon quelque autre nombre, comme selon E: ainsi puis que C est. autant de fois en A, comme l'vnité F est en D, & C en B, comme F en E. A, C, B, seront l'vne à l'autre comme D, F, E, & en raison egale A sera à B, comme le nombre D est au nombre E, par la 22. p. 5. ce qu'il falloit demonstrier.

THEO. 4. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont l'vne à l'autre comme nombre à nombre, elles seront commensurables.

Soient deux grandeurs A & B, qui soient l'vne à l'autre comme le nombre C est au nombre D: Je dis qu'elles seront commensurables.



Car soit diuisee A en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C, & l'vne d'icelles parties soit egale a E: donc E est à A, ainsi que l'vnité est au nombre C. Mais par l'hypothese A est à B, comme le nombre C est au nombre D. donc en raison egale, E sera à B, comme l'vnité à D, par la 22 p. 5. Mais l'vnité mesure D; donc aussi E mesure B: mais E mesure pareillement A. Donc E est commune mesure de A & B; & partant par la deff. de ce liure A & B sont commensurables. ce qu'il falloit demonstrier.

COROLAIRE.

Par cecy est euident qu'estant proposez deux nombres comme C & D, & vne ligne droite comme A qu'il sera aise de trouver vne au-

tre ligne droicte, à laquelle soit A comme le nombre C , est au nombre D : Car diuisant A en autant de parties egales qu'il y a d'unitéz au nombre C ; & on prend une ligne droicte B , contenant autant d'icelles parties qu'il y a d'unitéz au nombre D : alors A sera à B , comme le nombre C au nombre D , ainsi qu'il est manifeste par ce qui a esté demonsté.

De cecy appert de rechef, par quelle maniere on peut (estans donnez deux nombres, & une ligne droicte,) trouuer une autre ligne droicte, le quarré de laquelle soit au quarré de la donnée comme nombre à nombre. Car s'il faut trouuer une ligne droicte, au quarré de laquelle soit le quarré de la ligne A , comme le nombre C est au nombre D ; Il faudra trouuer ainsi que dessus la ligne B , à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D ; puis soit trouuée par la 11. p. 6. la moyenne prop. entre icelles A & B : & le quarré de A sera au quarré d'icelle moyenne prop. comme le nombre C au nombre D . Car le quarré de A sera (par le corol. de la 20. p. 6.) au quarré de la dite moyenne prop. comme A à B ; & partant comme le nombre C au nombre D .

THEOR. 5. PROP. VII.

Grandeurs incommensurables, ne sont entre elles comme nombre à nombre.

Ceste demonstration est aisée. Car si les grandeurs données estoient entr'elles comme nombre à nombre, elles seroient commensurables par la 6. p. 10. ce qui est contre l'hypothese.

THEOR. 6. PROP. VIII.

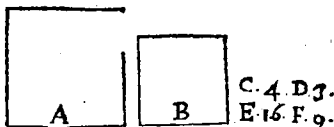
Si deux grandeurs ne sont entr'elles comme nombre à nombre, elles seront incommensurables.

Ceste demonstration est aussi facile. Car si les grandeurs données estoient commensurables, il faudroit qu'elles fussent comme nombre à nombre par la 5. p. 10. ce qui est contre nostre hypothese.

THEOR. 7. PROP. IX.

Les quarrez descrits sur lignes commensurables en longitude, sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré : Et les quarrez qui sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez commensurables en longitude. Mais les quarrez descrits sur lignes incommensurables en longitude, ne sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré : Et les quarrez n'estans entre eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez incommensurables en longitude.

Soient les lignes A & B commensurables en longitude : Je dis que leurs quarrez sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.



Car puis que les lignes A & B sont commens. en longitude, elles seront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. p. 10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D, & les quarrez d'iceux C & D soient E & F. Or les quarrez de A & B sont en raison doublee de leurs costez, par la 20. p. 6. Itē les nombres quarrez E & F sont aussi en raison doublee de leurs costez, par la 11. p. 8. Donc le quarré de A est au quarré de B, comme le nombre quarré E est au nombre quarré F : C'est à sçavoir en raison doublee des costez A & B, ou des nombres C & D, qui sont en la mēme raison que les lignes A & B.

Pour la seconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré E au nombre quarré F : Je dis que les lignes A & B seront commens. en longitude. Car par la 20. p. 6. & 11. p. 8. la raison des quarrez aux quarrez, est la raison doublee de leurs costez, & partant cōme le costé A au costé B, ainsi le nombre C au nombre D, puis que leurs raisons doublees sont egales. Donc par la 6. p. 10. A & B sont commensurables en longitude.

Pour la 3. partie soient les lignes droictes A & B incom-

mesurables en longueur. Je dis que leurs quarrés ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Car si les quarrés de A & B estoient ainsi que nombre quarré à nombre quarré, icelles A & B seroient commensurables en longueur contre l'hypothese.

Finablement les quarrés de A & B n'estans entr'eux come nombre quarré à nombre quarré. Je dis qu'elles sont incommensurables en longueur. Car autrement leurs quarrés seroient (par la premiere partie) comme nombre quarré à nombre quarré, contre l'hypothese.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par les choses cy dessus demonstrees, que les lignes commensurables en longueur, le sont aussi en puissance: mais que celles qui sont commensurables en puissance, ne le sont pas toujours en longueur. Que les incommensurables en longueur, ne le sont pas pourtant en puissance: & que celles incommens. en puissance, le sont aussi en longueur.

Car d'autant que les quarrés d'icelles lignes commens. en longueur sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à dire simplement comme nombre à nombre: iceux quarrés seront commensurables par la 6. p. 10. & parant les lignes commensurables en longit. le sont aussi en puissance.

Puis apres veu que les lignes dont les quarrés ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré, ains seulement comme nombre à nombre, sont commens. en puissance (car leurs quarrés sont commens. par la 6. p. 10.) & non en longit. comme il a esté demonsté: il appert que les lignes commens. en puissance, ne le sont pas pourtant en longit. sinon que les quarrés d'icelles lignes soient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

Derechef puis que les lignes desquelles les quarrés ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, mais toutesfois comme nombre à nombre sont incommensurables en long. & commensurables en puissance: il appert que les lignes incommens. en longit. ne le sont pas toujours en puissance: ains qu'il n'y a que celles dont les quarrés ne sont entr'eux comme nombre à nombre, qui soient aussi incommens. en puissance, veu que leurs quarrés sont incommens. par la 8. p. 10.

Finablement est manifeste que les lignes incommens. en puissance, le sont aussi en longueur: car si elles estoient commens. en long. elles le seroient aussi en puissance, comme appert par la premiere partie de ce corollaire qui est contre l'hypothese.

S C H O L I E.

Il est à noter qu'il s'entend aussi des lignes inexplicables par nombres, pourveu qu'elles soient commensurables en longueur; comme si les quarrés de A & B estoient 12 & 3. Leurs costez seroient $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$, qui sont inexplicables par nombres, toutefois commens. Car par la 20. p. 6. 12. seroit à 3. en raison double de $\sqrt{12}$. à $\sqrt{3}$. Mais 12. est quadruple de 3. Ainsi le costé A sera double du costé B, par la 10. d. 5. Car la double raison doubles est quadruple.

THEO. 8. PROP. X.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, & la premiere est commensurable à la seconde, la troisieme sera aussi commensurable à la quatrieme. Que si la premiere est incommensurable à la seconde, la troisieme sera aussi incommensurable à la quatrieme.

Soient quatre grandeurs proport. A, B, C, D: Si A est commensurable à B, Je dis que C sera aussi commens. à D.

Car si A est commensurable à B, ils seront entr'eux comme nombre à nombre, par la 5. p. 10. Mais comme A à B, ainsi C à D; Partant C est à D, comme nombre à nombre; & par consequent commens. par la 6. p. 10. Que si A estoit incommens. à B: Je dis que C seroit aussi incommensurable à D: Car A & B ne seroient pas comme nombre à nombre par la 7. p. 10. Mais comme A à B, ainsi C à D: donc C n'est pas à D comme nombre à nombre, & par consequent incommens. par la 8. p. 10.



L' E M M E.

Trouver deux nombres plans dissemblables, c'est à dire, qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Soit pris quelconque nombre quarré A , & un $A. 16.$ $B. 24.$ autre B non quarré. Je dis qu'iceux nombres A & B sont plans dissemblables. Car s'ils estoient plans semblables, ils seroient comme nombre quarré à nombre quarré, par la 26. p. 8. & partant A estant nombre quarré, aussi B seroit quarré par la 24. p. 8. contre l'hypothese. Donc A, B , ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

PROB. 3. PROP. XI.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables à vne ligne rationele proposee, sçauoir vne en longitude seulement, & l'autre en longitude & puissance.

Soit la ligne rationelle proposee A , à laquelle il faut trouuer A ————— $B. 24.$ deux autres lignes incommensurables, l'une seulement en longitude, & l'autre en longitude & puissance. E ————— $C. 16.$ D —————

Soient trouuez par le lemme précédent deux nombres B , & C , qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré : Item par le coroll. de la 6. p. 10. soit trouuee la ligne D , de laquelle le quarré soit au quarré de la ligne A , comme le nombre C est au nombre B . Or d'autant qu'iceux quarrés de A & D sont comme nombre à nombre, ils seront cōmens. entr'eux par la 6. p. 10. Mais n'estans pas comme nombre quarré à nombre quarré, ils n'auront pas les costez A & D cōmens. en longitude, par la 9. p. 10. Donc les lignes droictes A & D sont cōmensurables en puissance seulement : la ligne D est donc la première requise.

Maintenant soit trouuee la ligne E moyenne prop. entre A & D , par la 3. p. 6. & icelle E sera la seconde ligne demandee : car puis que par le coroll. de la 20. p. 6. le quarré de A est au quarré de E comme A à D , & icelles A & D sont incommensurables en longitude, comme il a esté démontré : le quarré de A sera aussi incommensurable au quarré de E , par la 10. p. 10. parquoy les lignes A & E sont incommensurables en puissance, & par le coroll. de la 9. p. 10. elles sont aussi incommensurables en longitude.

SCHOLIE.

S C H O L I E.

Soit $A 5$. donc la ligne D sera $\sqrt{20}$, laquelle il appert estre incommens. en longitude à A , mais commens. en puissance. Mais E estant moyenne prop. entre $A 5$, & $D \sqrt{20}$: sera $\sqrt{500}$, qui est incommens. tant en longit. que puissance à $A 5$.

Doumôt ayant delaisié le lemme precedent, se sert neantmoins d'iceluy en la construction cy dessus.

THEOR. 9. PROP. XII.

Les grandeurs commeensurables à vne autre sont aussi commeensurables entr'elles.

Soient les deux grandeurs A & B , commeens. chacune à la grandeur C . Je dis qu'elles sont commeensurables entr'elles.

Car puisque A & C sont commeens. icelles seront comme nombre à nombre par la 5.p.10. & soit comme le nombre D au nombre E . Derechef puis que C & B sont commeens. C sera à B , comme nombre à nombre, & soit comme le nombre F au nombre G . Soient pris par la



$D, 10. E, 8.$
 $F, 2. G, 3.$
 $H, 5. I, 4. K, 6.$

4.p.8. les trois nombres H, I, K , les plus petits continuellement proportionnauz, selon les raisons de D à E , & F à G : tellement que H soit à I comme D à E , c'est à dire comme A à C , & I à K comme F à G , c'est à dire comme C à B . Donc puis que A est à C , comme H à I ; & C à B , comme I à K , par raison egale A sera à B , comme H à K , c'est à dire comme nombre à nombre: & partant A & B sont commeens. par la 6.p.10. ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 10. PROP. XIII.

Si de deux grandeurs l'une est commeensu-

Aa

nable à vne troisiéme, mais l'autre incommens. icelles grandeurs seront incommens. entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, (en la precedente figure) desquelles A soit commens. à C ; & B incommens. à la mesme C. Je dis que A & B sont incommens. entr'elles. Car si B estoit cōmens. à A, lequel A est posé aussi commens. à C, par la 12. p. 10. B & C seroient commens. contre l'hypothese. Donc A & B ne sont commens. ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. II. PROP. XIV.

Si de deux grandeurs commens. l'une est incommens. à vne tierce, aussi sera l'autre à la mesme.

Soient deux grandeurs commens. A & B, & que A soit incommens. à la tierce C : Je dis que B & C sōt aussi incommensurables.

Autrement, si B est commens. à C, il sera aussi commens. à A, par la 12. p. 10. contre nostre hypothese : donc B est incommens. à C : ce qu'il falloit demonstrier.

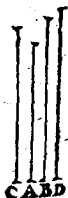


SCHOLIE.

Les Interpretes d'Euclide colligent de ceste prop. le theoreme suiuant, utile aux choses demonstrees en ce liure.

Les grandeurs commensurables à des incommensurables, sont aussi incommens. entr'elles.

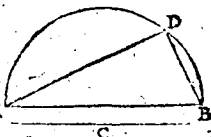
Soient deux grandeurs A & B incommensurables, auxquelles C & D soient commens. sçavoir est C à A, & D à B. Je dis que C & D sont incommens. entr'elles. Car puis que A & C sont poseés commens. & A incommens. à B, l'autre C sera aussi incommens. à B par la 14. p. 10. Derechef puis que D & B sont poseés commens. & B a esté demonstree incommens. à C, D sera aussi incommens. à la mesme C par la 14. p. 10. ce qui estoit proposé.



L E M M E.

Estans donnees deux lignes droictes inegales, trouver cōbien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soient donnees les deux lignes droictes inegales AB & C , desquelles AB est la plus grande: & il faut trouver combien la ligne AB peut plus que la ligne C . Soit desc. it sur AB le demy A



cercle ADB , & dans iceluy soit aced-modee AD egale à C , par la 1. p. 4. & soit menee DB . Je dis que AB peut plus que C du quarré de BD . Car d'autant que l'angle D est au demy cercle, il est droict par la 31. p. 3. & par la 47. p. 1. le quarré de AB sera egal aux quarréz de AD , DB ; & partant AB pourra plus que AD , c'est à dire que C , du quarré de BD .

Semblablement estans donnees deux lignes droictes, en trouver vne autre pouuant icelles.

Soient donnees les deux lignes droictes AD , BD : & il faut trouver vne ligne droictte qui puisse icelles. Soient posees icelles AD , BD à angle droict D , & tiré AB . Il est evident qu'icelle AB peut AD & BD , puis que par la 47. p. 1. le quarré d'icelle AB , est egal aux quarréz de AD , BD .

THEOR. 12. PROP. XV.

Si quatre lignes sont proportionnelles, & la premiere peut plus que la seconde du quarré d'une ligne qui luy est cōmensurable en longitude: aussi la troisieme pourra plus que la quatrieme du quarré d'une ligne qui luy sera cōmensurable en longitude. Que si la premiere peut plus que la seconde du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude: aussi la troisieme pourra plus que la quatrieme du quarré d'une ligne qui luy sera incommensurable en longitude.

Soient 4. lignes proport. A, B, C, D, & que A puisse plus que B du quarré de E, & C plus que D du quarré de F. Je dis que cōme A sera commens. ou incommens. à E, ainsi C sera commensurable, ou incommensurable à F.

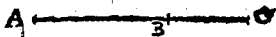
Car puis que A, B, C, D, sont proportionnelles, comme le quarré de A sera au quarré de B, ainsi le quarré de C sera au quarré de D, par la 22. p. 6. Mais le quarré de A est egal aux quarréz de B, E, par l'hypothese, & le quarré de C aux quarréz de D, F: done aussi les quarréz de B, E, serōt au quarré de B, comme les quarréz de D, F, au quarré de D: & en diuisant comme le quarré de E seta au quarré de B, ainsi le quarré de F au quarré de D; & par la 22. p. 6. comme la ligne E sera à la ligne B, ainsi la ligne F à la ligne D; & en échangeāt comme B à E, ainsi D à F. Donc puis que comme A à B, ainsi C à D, & comme B à E ainsi D à F, par raison egale comme A sera à E, ainsi C à F: Et par la 10. p. 10. si A est commens. ou incommens. à E, aussi C sera commens. ou incommens. à F: ce qu'il falloit demonstrez.



THEO. 13. PROP. XVI.

Si deux grandeurs commens. sont jointes, la composee sera commens. à chacune de ses parties: Et si la composee est commensurable à vne de ses parties, icelles seront commens. entr'elles.

Soient jointes deux grādeurs commens. AB & BC: Je dis que la composee AC, est commensurable à AB, & à BC parties d'icelle.



Car puis que AB & BC sont commensurables, elles auront vne commune mesure, laquelle mesurant AB & BC, mesurera aussi la toute AC, par la 1. com. sent. Partant la toute AC est commens. à ses parties.

Pour la seconde partie. Si la toute AC est commens. à vne de ses parties, icelles seront commensurables entr'elles. Car si AC & AB, sont commens. elles auront vne commune me-

sure, laquelle mesurant le tout & le retranché, mesurera aussi le reste par la 3. comm. sent. Partant le retranché & le reste seront commens. d'autant qu'ils ont vne commune mesure.

COROLLAIRE.

De icy resulte que si vne grandeur composée de deux, est commensurable à l'une d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC est commensurable à AB, elle le sera aussi à BC. Car par la seconde partie de ceste prop. AB, BC sont commens. donc par la premiere partie AC sera commens. a chascunes parties AB, BC.

S C H O L I E.

Soit AB 18. & BC 12, lesquelles sont commens. La composée AC sera 30. laquelle est commens. tant à 18. que à 12. Car 18 est à 30. comme 3 à 5, & à 12, comme 2 à 5.

THEOR. 14. PROP. XVII.

Si on conioinct deux grandeurs incommensurables, la composée sera incommens. à chacune de ses parties: Et si la composée est incommens. à l'une de ses parties, Icelles parties seront incommens. entr'elles.

Soient conioinctes deux grandeurs incommens. AB & BC: Je dis que la toute AC est incommens. à vne chacune de ses parties.



Autrement, si AC estoit commens. à AB, elle le seroit aussi à BC, car la commune mesure qui mesureroit AC & le retranché AB, mesureroit aussi le reste BC, par la 3. com. sent. Et par là AB & BC seroient commens. (ce qui est cōtre l'hypothese.) Donc AC & AB sont incommens. Il s'ensuira le mesme inconvenient si on nie que AC & BC soient incommensurables.

Pour la seconde partie: Je dis que si AC & BC, sont incō-

menf. que AB & BC feront auffi incommenf. Autrement fi elles eftoient commenfurables. La toute AC feroit auffi commenfurables à fa partie BC par la 16. p. 10. contre nostre hypothefe. Donc AB & BC font incommenf. Par mefme argument nous demonftrons que fi AC & AB font incommenf. que AB & BC font auffi incommenf.

COROLAIRE.

Il refulte de ces chofes que fi vne grandeur compofee de deux, eft incommenfurable à l'une d'icelles, qu'elle le fera auffi à l'autre. Comme fi AC compofee de AB & BC est incommenf. à AB, elle le fera auffi à BC Car fi AC eftoit commenf. à icelle BC, elle le feroit auffi à AB, par le corol. de la preced. prop. ce qui eft contre l'hypothefe. Donc AC & BC ne font commenf. mais incommenfurables.

S C H O L I E.

Soit AB 8, & BC 7. 28. lefquelles font incommenfurables. La compofee AC fera 15. 28. incommenfurable à chacune d'icelles AB 8, BC 7. 28.

THEOR. XV. PROP. XVIII.

Si l'y a deux lignes droictes inegales, & fur la plus grande on aplique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, deftaillant d'une figure quarrée, & que le rectagle diuife icelle plus grande ligne en parties commenf. en longitude; la plus grãde ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy fera commenf. en longitude: Et fi la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy foit commenf. en longitude, eftât apliqué vn rectangle fur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & de-

faillant d'une figure quarree ; le rectangle divisera icelle plus grande ligne en parties communes. en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & par la 28. p. 6. sur la plus grande AB soit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'une figure quarree (c'est à dire d'une ligne egale à son autre costé.) Et soit iceluy rectangle contenu de AD & DB. Je dis que si AD & DB sont commens. en longitude, que AB pourra plus que C du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longitude.

Qu'il ne soit ainsi. Soit la ligne AB coupee en deux également en E, & soit faicte EF egale à ED: Il est evident que AF sera egale à DB, puis que les toutes AE, EB sont egales, & aussi les retranchees EF, ED. Maintenant puis que AB est coupee en deux également en E, & en deux inegalement en D, par la 5. p. 2. le rectangle de AD & DB avec le quarré de ED, seront egaux au quarré de BE, lequel n'estant par l'hypothese que le quart du quarré de AB, quatre fois le rectangle de AD & DB, & quatre fois le quarré de ED, sont egaux au quarré de AB. Mais quatre fois le rectangle de AD & DB valent le quarré de C, d'autant que par l'hypothese le rectangle de AD, & DB est le quart du quarré de C. Donc le quarré de AB est plus grand que le quarré de C, de quatre fois le quarré de ED, ou du seul FD egal à iceux, par le scholie de la 4. p. 2. puisque FD est double de ED. Il faut donc demonstrier que AB & FD sont commensurables en longitude: D'autant que AD & DB sont posees commens. en longitude, la toute AB sera aussi commens. en longitude à sa partie DB par la 16. p. 10. Et partant a son egale AF, & à toutes les deux ioinctes en vne: Et par consequent au reste de la ligne FD par la mesme 16. p. 10. Donc la ligne droicte AB peut plus que C, du quarré de FD qui luy est commensurable en longitude.

Pour la seconde partie, sans rien changer à la construction: si AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longitude. Je dis que AD & DB seront aussi commens. en longitude. Car il sera demonsté ainsi que dessus que AB peut plus que C du quarré de FD. Mais AB a esté posee pouvoir plus que C du quarré d'une ligne qui luy est com-

menf. en longitude: & partant AB fera commenf. en longitude à icelle FD. Et puis que AB compofée de FD, de AF, DB comme d'une, eft commenfurable en longitude à la partie FD; la mefme AB fera auffi commenf. en longitude à l'autre partie compofée de AF, DB par le coroll. de la 16. p. 10. Mais icelle compofée de AF, DB, eft auffi commenf. en longit. à DB, puis qu'elle eft double d'icelle: donc plus que chacune d'icelles AB, DB eft commenf. en longit. à la compofée de AF, DB; auffi AB, DB feront commenf. entr'elles en longitude par la 12. p. 10. & partant veu que la toute AB compofée de AD, DB eft commenf. en longit. à icelle DB; auffi icelles AD, DB feront commenf. en longit. entr'elles par la 16. p. 10. ce qu'il falloit demonftrer.

S C H O L I E.

Soit AB 30, & C 24. donc les fegmens AD, & DB, feront 24, & 6, defquels le produit, c'eft à dire le rectangle eft 144, qui eft gal au quart de 576, quarré de C 24, & deffailant du quarré de DB 6, c'eft à dire 36: & font icelles parties AD 24, DB 6, commenf. en longitude: car l'une eft quadruple de l'autre. Ainfi FD, qui peut auoir C le quarré de AB, fera 18: car le quarré de AB eft 900, & celuy de C 576; & partant refte pour le quarré de FD, 324, dont la racine quarrée eft 18, commenf. en longitude à AB. L'autre partie fera auffi quidante par l'addapcion des nombres cy deffus.

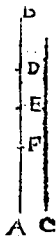
La propofition fuiuante fera auffi facilement entendue, fi on pofe AB 12, & C 496: car les fegmens AD, DB, feront 6 + $\sqrt{12}$. & 6 - $\sqrt{12}$; & FD 48, qui eft à 12 incommenf. en longit. &c.

THEOR. 16. PROP. XIX.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & fur la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & deffailant d'une figure quarrée, & que le rectangle diuife icelle plus grande ligne en parties incommenf. en longitude; la plus grãde ligne pour-

ra plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy sera incommens. en lōgitude. Que si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en lōgitude, estant appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'une figure quarrée; le rectangle diuifera la plus grande ligne en parties incommens. en lōgitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & sur la plus grande AB soit appliqué (par la 18. p. 6.) vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'une figure quarrée: & soit iceluy rectangle contenu sous AD, DB incommensurables en lōgitude. Je dis que AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en lōgitude. Car ayāt construit comme en la precedente prop. nous demonstrerōs semblablement que AB peut plus que AC du quarré de AD. Il faut donc demonstrer que AB & AD sont incommens. en lōg. D'autant que les lignes AD, DB sont posées incommens. en lōg. la toute AB sera aussi incommens. en lōg. à la partie DB par la 17. p. 10. Mais DB est commensurab. en lōgitude à la composée de AF, DB, veu que ceste-cy est double de celle-là: donc puis que de ces deux lignes commens. icelle DB est incommens. en lōgitude à AB; la composée de AF, DB sera aussi incommens. en lōg. à la mesme AB par la 14. p. 10. Et pour autant que AB composée de AF, DB comme vne, & de FD, est incommens. en lōg. à la composée de AF, DB; la mesme AB sera aussi incommens. en lōg. à FD, par le corol. de la 17. p. 10. Donc AB peut plus que C du quarré de FD, qui luy est incommens. en lōgitude.



Maintenant si AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en lōgitude, & sur icelle AB est appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, & defaillant d'une figure quarrée, lequel rectangle diuise AB es parties AD, DB. Je dis qu'icelles AD, DB sont incommens. en lōg.

Car nous démonstrerons comme deuant (les mesmes choses estans construíctes) que AB peut plus que C du quarré de FD, & qu'icelles AB & FD sont incommens. en longueur: & puis que AB est composée de FD & de AF, DB ioinctes en vne. icelle AB sera aussi incommens. en longueur à la composée de AF, DB par le corol. de la 17. p. de ce liure. Mais la composée de AF, DB est commens. en long. à icelle DB, puis que celle là est double de ceste-cy. Donc puis que AB est incommens. en longit. à la composée de AF, DB, icelle AB sera aussi incommens. en longit. à DB, par la 14. p. 10. Et partant puis que AB composée de AD, DB est incommens. en long. à DB, icelles AD, DB seront aussi incommensurables en longueur entr'elles par la 17. p. 10. ce qu'il falloit démonstrer.

LE MME.

Puis qu'il a esté démontré que les lignes commens. en longueur, le sont aussi en puissance, mais que celles commens. en puissance ne le sont pas toujours en longueur: il est manifeste que s'il y a quelque ligne commens. en longueur à une proposée rationelle: elle doit estre appelée rationelle & commensurable à icelle, non seulement en longueur, mais aussi en puissance: car les lignes commens. en long. le sont toujours aussi en puissance. S'il y a aussi quelque ligne droite commens. en puissance & longueur à l'exposée rationelle, elle sera aussi dite rationelle commens. en longueur & puissance. Que si derechef il y a quelque ligne commens. en puissance à icelle, mais incommens. en longueur, elle sera aussi dite rationelle commens. à icelle en puissance seulement.

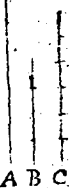
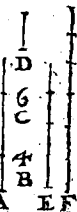
SCHOLIE.

Il appert par ce que dessus, qu'il y a de trois sortes de lignes rationelles commens. entr'elles en longueur. Car de deux lignes rationelles commens. entr'elles en longueur, ou l'une est égale à l'exposée rationelle; & partant l'une & l'autre commens. en longueur à la rationelle: ou l'une ny l'autre n'est égale à l'exposée rationelle, & toutesfois commens. en longueur à icelle: ou finalement l'une & l'autre est commens. à l'exposée rationelle en puissance seulement. Or nous trouuerons ces trois genres de lignes rationelles en ceste maniere. Soit une rationelle proposée A diuisée en quatre parties égales; c'est à

ſçavoir en autant qu'il y a d'unités au nombre B: puis apres eſtât pris quelque autre nombre C, la ligne D ſoit une partie de A; & autant de fois que D meſure A, autant de fois elle meſure quelque ligne E. Item autant de fois que l'unité eſt en C, qu'autant de fois la meſme D meſure quelque autre ligne F. Donc puis que A & E ſont composées de parties égales en nombre, qui ſont égales à D: elles ſeront égales. De rechef puis que D meſure toutes les trois lignes A, E, F; elles ſeront commens. en longueur, parquoy E & F ſont rationeles commens. en longueur à la rationele A: mais elles ont eſté demonſtrées eſtre auſſi commens. entr'elles en longueur. Nous avons donc trouvé deux rationeles E & F commens. en longueur, tant entr'elles qu'à la rationele expoſée A, & deſquelles une, ſçavoir eſt E, eſt égale à A.

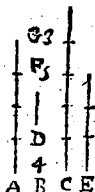
Or maintenant que D meſure deux lignes C & E par deux nombres F & G différens de B, tellement que l'une & l'autre ligne C & E ſoit inégale à A. Donc comme deſſus les trois lignes A, C, E, ayans D pour meſure commune, ſeront commens. en longueur; parquoy C & E ſont rationeles commens. en longueur à la rationele A: mais elles le ſont auſſi entr'elles. Nous aurons donc trouvé deux rationeles C & E commens. en longueur, tant entr'elles qu'à la rationelle propoſée A, l'une ny l'autre deſquelles n'eſt égale à icelle A.

Enfinement par la 11. p. 10. à l'expoſée rationele A ſoit trouvée la ligne B, incommens. en longueur ſeulement laquelle ſoit coupée en tant de parties égales qu'on voudra, & ſoit prise C, compoſée de quelconque nombre d'icelles parties de B: & icelles B & C ſeront commens. en longueur. Je dis qu'elles ſont auſſi commens. en puissance ſeulement à l'expoſée rationele A. Car puis que A & B ſont commens. en puissance; le quarré de A ſera commens. au quarré de B: Mais au meſme quarré de B, eſt auſſi commens. le quarré de C, pource que B, C eſtans commens. en longueur, elles le ſont auſſi en puissance. Donc par la 12. p. 10. les quarrés de A & C, ſont pareillement commens. entr'eux. Parquoy C eſt commens. en puissance à icelle A. Et pource que des deux lignes B & C commens. en longueur, B eſt incommens. en longueur à A; par la 14. p. 10. C ſera auſſi incommens. en longueur à la meſme A. Donc C eſt commens. à A ſeulement en puissance. Et pource que B & C, commens. en puissance à l'expoſée rationele A, ſont rationeles; elles ſeront deux rationeles commens. en longueur entr'elles, mais en



Puissance seulement à l'exposée rationelle A : elles sont donc les deux lignes requises à trouver.

Que si quelqu'un desire trouver tant qu'on voudra de lignes rationelles commens. en longitude entr'elles, cela se fera ainsi: Soit pris quelconque mesure D, & soient cōposees autant qu'on voudra de lignes A, C, E, d'autant de parties egales à icelle D, qu'il y a d'unités en autant de nombres inegaux B, F, G, car les lignes A, C, E ayant la commune mesure D, seront commens. en longitude.

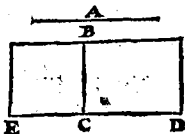


Or il est aussi evident que toutes lignes rationelles, sont commens. non seulement à une exposée rationelle, mais aussi entr'elles. Car puis que par la 6. d. 10. les lignes rationelles sont celles qui sont commens. à l'exposée rationelle, soit en longitude & puissance, ou en puissance seulement, & que par la 12. p. 10. les commens. à une mesure, sont aussi commens. entr'elles; il est manifeste que toutes lignes rationelles, sont commens. entr'elles.

THEOR. 17. PROP. XX.

Le rectangle compris de deux lignes rationelles commens. en longitude selon quelque vne des manieres cy deuant dites, est rationel.

Soit vne exposée rationelle A, & le rectangle BD compris sous BC, CD rationelles commens. en longitude, selon quelque vne des manieres cy dessus dites. Je dis qu'iceluy rectangle est rationel.



Car si sur BC on fait le quarré BE, il sera commens. au quarré de la rationelle A par la 3. d. 10. puis que BC est rationelle commens. à la rationelle exposée A, ou en longitude & puissance, ou en puissance seulement. Et puis que BC ou EC, CD sont commens. en longitude (car BC CD ont esté posees rationelles commens. en longit. entr'elles) & par la 15. p. 6. comme EC est à CD, ainsi EB à BD, par la 10. p. 10. EB, BD seront aussi commens. tellement donc que le quarré de A, & le rectangle BD sont commens. au quarré EB; & partant commens. entr'eux par la 12. p. 10. Mais le quarré de A est rationel par la 8. d. 10. Donc par la 9. d. 10. le rectangle BD sera aussi rationel: ce qu'il falloit demonstrier.

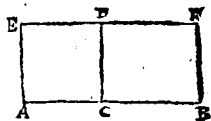
S C H O L I E.

Soit $BC\ 3$, $CD\ 4$, donc le rectangle BD sera 12 . Dorechef soit $BC\ \sqrt{3}$, & $CD\ 12$. Le rectangle BD sera $\sqrt{36}$, c'est à dire 6 . Et dorechef si BC est $\sqrt{8}$ & $CD\ \sqrt{18}$. Le rectangle BD sera $\sqrt{144}$, c'est à dire 12 . Ainsi iceluy rectangle est rationel.

THEOR. 18. PROP. XXI.

Si vn rectangle rationel a l'un des costez rationel, il aura aussi l'autre costé rationel: & iceux seront entr'eux commens. en longitude.

Soit le rectangle rationel DB ayant le coste CD rationel: ie dis que BC sera aussi rationel commens. en longitude à CD .



Car sur DC , soit fait le quarré AD , lequel sera rationel par la 8. d. 10. Et comme le rectangle au quarré, ainsi CB à CA par la 1. p. 6. Mais le quarré & le rectangle sont rationaux, & partant commens. Donc par la 10. p. 10. CB & CA ou CD son egale, seront rationels & commens. en longit.

S C H O L I E.

Soit le rectangle $DB\ 6$, & la ligne $CD\ \sqrt{3}$: BC sera donc $\sqrt{12}$, qui est commens. en longitude à $\sqrt{3}$. Car elle est double d'icelle. Soit dorechef $DB\ 12$, & la ligne droite $CD\ \sqrt{8}$, l'autre costé BC sera $\sqrt{18}$, qui est commens. en longitude à $CD\ \sqrt{8}$. Car si on diuise $\sqrt{18}$, par $\sqrt{8}$, prouiendra $\sqrt{2\frac{1}{2}}$, c'est à dire $\sqrt{\frac{5}{2}}$ qui est $\frac{1}{2}$; & partant $\sqrt{18}$ est à $\sqrt{8}$. comme 3 à 2 , c'est à dire comme nombre à nombre; & par conséquent commens. en longitude.

L E M M E.

Trouuer deux lignes droictes rationeles commensurables en puissance seulement,

Soit trouvé par la 11. p. 10. quelque ligne droite incommensurable en longueur seulement à une ligne droite rationelle proposée, & icelles seront les requises : car puis qu'elles sont commens. en puissance seulement par la construction, elles seront aussi rationelles par la 6. d. 10.

Que si à la ligne trouvée, on en trouve encore une autre, moindre ou plus grande que la proposée rationelle, il est manifeste par la 12. p. 10. que toutes les trois seront commens. entr'elles en puissance seulement, & partant rationelles.

THEOR. 19. PROP. XXII.

Le rectangle compris de deux lignes droites rationelles commens. en puissance seulement, est irrationnel : & la ligne droite qui peut iceluy est irrationelle. Soit icelle appelée Mediale.

Soit le rectangle CF, (en la figure de la prop. précédente) compris de deux lignes rationelles DC & BC commens. en puissance seulement. Je dis que le rectangle est irrationnel : & la ligne qui peut iceluy, pareillement irrationelle, qui doit estre appelée mediale.

Car si sur la rationelle CD on décrit le quarré AD, il sera rationel, & sera au rectangle CF, comme AC ou CD son égale, est à BC, par la 1. p. 6. Mais AC & BC sont incommens. en longueur : donc par la 10. p. 10. le quarré AD, & le rectangle CF seront incommens. Or le quarré est rationel : donc par la 10. d. 10. le rectangle sera irrationel ; & par la 11. d. 10. la ligne qui peut iceluy sera aussi irrationelle : & soit icelle ligne appelée mediale, pource que le quarré d'icelle est égal au rectangle compris sous les rationelles DC, CB commens. entr'elles en puissance seulement, & par conséquent moyenne prop. entre icelles rationelles par la 17. p. 6.

SCHOLIE.

Pour donc facilement définir la ligne mediale, nous dirons icelle estre une ligne irrationelle, moyenne proportionnelle entre deux lignes rationelles, entr'elles commensurables en puissance seulement. On voit

celle qui peut vn rectangle contenu sous deux lignes rationeles commensurables entr'elles en puissance seulement.

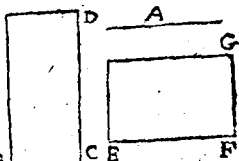
Et faut noter que le quarré d'icelle ligne mediale, ou le rectangle irrationel qu'elle peut, est aussi nommé medial, pour ce qu'il est moyē prop. entre les quarréz d'icelles lignes rationeles commens. entr'elles en puissance seulement, non qu'il faile pourtant entendre que tout rectangle medial soit tousiours contenu sous deux lignes droictes irrationeles commens. en puissance seulement, tel qu'est le medial CF: car il en aduiet quelquefois autrement, comme se verra cy-apres.

La ligne DC soit 2, & BC 8. Le rectangle BD sera 16, qui est irrationel; & sera dict medial, mais la ligne pouuāt iceluy. est 4, 32. laquelle on appelle mediale.

THEOR. 20. PROP. XXIII.

Le quarré d'une ligne mediale appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre costé rationel commens. en puissance seulement à la ligne à laquelle se fait l'application.

Pour appliquer sur une ligne rationele vn rectangle egal au quarré d'une ligne mediale autrement & plus facilement que par la 45. p. 1. Il faut en premier lieu poser quelconque ligne rationele, en second lieu la mediale, & chercher la tierce proportionnelle, laquelle sera l'autre costé du rectangle: car par la 17. p. 6. le quarré de la moyenne est egal au rectangle des extremes.



Soit la mediale A, le quarré de laquelle soit appliqué sur la ligne rationele BC, faisant le rectangle BD: Je dis que BC & CD, sont rationeles commens. en puissance seulement.

Car A estant mediale, elle peut vn rectangle compris de deux lignes rationeles commens. en puissance seulement, autrement elle ne seroit dicté mediale: Soit donc iceluy rectangle EG, contenu sous les rationeles EF, FG commens. en puissance seulement. Et pource que A, par l'hypotese peut aussi le rectangle BD: Iceux rectangles BD, EG seront egaux,

& par la 14. p. 6. ils auront les costez reciproques, sçavoir que comme BC à EF, ainsi FG à CD, & par la 22. p. 6. les quarrés d'icelles lignes seront proport. Mais le quarré de BC ligne rationelle, est commens. au quarré de EF aussi ligne rationelle : donc par la 10. p. 10. le quarré de FG fera aussi commens. au quarré de CD ; & parant les lignes FG, CD seront commens. au moins en puissance, & le quarré de FG estant rationel, le quarré de CD sera aussi rationel ; & par consequent les lignes CB & CD seront rationelles. Or qu'icelles BC & CD soient commens. en puissance seulement. Il est evident par ce qui a esté demonsté à la 21. p. 10. Car si elles estoient commensurables en longueur, le rectanglé BD seroit rationel, & nous l'avons posé medial, c'est à dire egal au quarré de la mediale A. Donc les lignes BC & CD sont incommens. en longueur.

S C H O L I E.

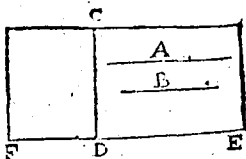
Soit le quarré de AB $\sqrt{40}$, mais BC soit 2. Si donc à BC on applique $\sqrt{40}$, l'autre costé CD sera $\sqrt{10}$. qui est incommens. en longueur à BC, mais commens. en puissance. Que si BC est $\sqrt{5}$: CD sera $\sqrt{8}$, aussi commens. en puissance seulement. Mais si la mediale A estoit $\sqrt{35}$, & BC $\sqrt{5}$: le quarré de A seroit $\sqrt{35}$: & CD $\sqrt{7}$. commens. en puissance seulement à BG.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Vne ligne droicte commensurable à vne ligne mediale, est aussi mediale.

Soit la mediale A, à laquelle soit commensurable la ligne droicte B. Je dis qu'icelle B est aussi mediale.

Car soit proposée la rationelle CD, & sur icelle appliqué le rectanglé CE egal au quarré de A : Item sur la mesme rationelle CD soit appliquée le rectanglé CF egal au quarré de B. D'autant que le quarré de la mediale A, est appliqué sur la rationelle CD, l'autre costé DE est rationel commensurable en puissance



puissance seulement à CD, par la 23. p. 10. Mais A & B estans commensurables, leurs quarréz (ou leurs egaux rectangles C E, & CF) seront aussi commens. Mais par la 1. p. 6. comme C E est à CF, ainsi la ligne droicte ED est à la ligne droicte DF: Donc par la 10. p. 10. ED, DF, seront commens. en longueur. Mais la ligne ED est rationele, & incommens. en longueur à la ligne CD: donc aussi DF est rationele & commens. en longueur à la mesme CD, par la 14. p. 10. & partant puis qu'icelles CD, DF sont rationeles, elles seront commensurables en puissance seulement, & par la 22. p. 10. le rectangle CF compris sous icelles CD, DF sera medial, & la ligne B qui peut iceluy rectangle, sera aussi mediale: ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que toute figure commensurable à une figure mediale, est aussi mediale: d'autant que les quarréz egaux à icelles figures seront aussi commensurables, & par consequent commens. les lignes qui les pourront, à tout le moins en puissance, & l'une d'icelle estant mediale, l'autre qui luy sera commens. sera aussi mediale par ceste proposition.

S C H O L I E.

Soit $AV \sqrt{200}$. $BV \sqrt{128}$, $CD 4$. Donc DE sera $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ & DF $\sqrt{8}$ commens. entr'elles: car elles sont comme 5 à 4. & DF est commens. en puissance seulement à CD; & par consequent le rectangle CF, qui est $\sqrt{128}$, est medial, & la ligne $BV \sqrt{128}$, qui peut iceluy, aussi mediale.

L E M M E 1.

Or ce qui a esté dit des lignes rationeles au lemmé de la 19. p. de ce livre, nous le dirons aussi des mediales: sçavoir est que les lignes droites commens. en long. à une mediale, est dite mediale, & com. à icelle, non seulement en long. mais aussi en puissance. Car uniuersellemens les lignes droites commens. en longit. le sont aussi en puissance. Et s'il y a quelque ligne com. en puissance & long. à une mediale, elle sera pareillement dite mediale, & à icelle commens. en long. & puissance. Que si de uechef il y a quelque ligne commens. en puiss. à une mediale, mais incommens. en long. elle sera aussi dite mediale com. à icelle en puissance seulement.

L E M M E 2.

Trouuer deux lignes mediales commensurables en longueur: Item deux commensurables en puissance seulement.

Soient trouuees les deux lignes A & B commens. à la mediale C , c'est à sçauoir A en long. & B en puissance seulement: & chacune d'iceiles A & B seront aussi mediales par la 24. p. 10. Veu donc que A & C sont commens. en long. & B , C en puissance seulement, est manifeste ce qui estoit proposé.

Or il est à noter qu'encore que toute ligne droite commen. à vne mediale, soit mediale, neantmoins toute ligne mediale n'est pas commens. à quelque mediale que ce soit. Car deux mediales se peuuent donner incommens. en long. & puissance, comme apparoiſtra par la 36. p. de ce liure, où nous enseignerons aussi à trouuer deux telles lignes mediales.



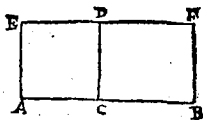
THEO. 22. PROP. XXV.

Le rectangle cōpris de deux lignes mediales commensurables en longueur, est aussi medial.

Soit le rectangle DB , compris des deux mediales commensurables en longueur DC & BC : Je dis qu'il est medial.

Car si sur la ligne DC on décrit le quarré DA , il sera medial estant décrit sur vne ligne mediale: & par la 1. p. 6. comme AC

est à CB , ainsi AD à DB : mais CD , ou CA son egale est commensurable en longueur à BC : Partant par la 10. p. 10. le quarré medial AD , sera commensurable au rectangle DB : & par le corolaire de la 24. p. 10. iceluy rectangle sera medial: ce qu'il falloit demonſtrer.



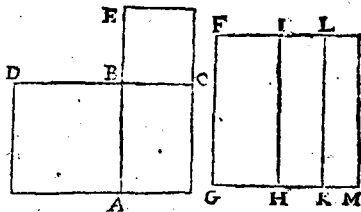
S C H O L I E.

Si les mediales DC, CB commensf. en longueur sont $\sqrt{2}$ & $\sqrt{2}$, 2: le rectangle d'icelles, sçavoir DB, sera $\sqrt{4}$, c'est à dire 2, qui est medial.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, est rationnel ou medial.

Soient les deux mediales commensurables en puissance seulement AB & BC, comprenant le rectangle AC: Je dis qu'iceluy rectangle est rationnel ou medial.



Qu'ainsi ne soit. Sur AB & BC soient faits les quarez AD & CE, lesquels comme estans faits sur lignes mediales seront mediaux. Maintenant soit proposee la ligne rationelle FG, & sur icelle soient descrits les trois rectagles FH, IK, LM, egaux aux trois figures AD, AC, CE, par la 45. p. 1. Et d'autant que les quarez AD & CE sont mediaux, leurs egaux rectangles FH, LM seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationelle FG, leurs autres costez GH & KM, seront rationaux commensf. en puissance seulement à FG par la 23. p. 10. Mais d'autant que les quarez AD & CE sont commensf. (estans faits sur lignes commensf. en puissance) leurs egaux rectangles FH & LM seront aussi commensf. mais par la 1. p. 6. comme FH est à LM, ainsi la ligne droite GH est à la ligne droite KM: donc par la 10. p. 10. GH & KM seront commensf. en longueur; & par la 10. p. 10. le rectangle de GH & KM sera rationnel. Et pource que AB, BD sont egales, & BC, BE aussi ega-

les, comme DB est à BC, ainsi AB à BE. Mais comme DB à BC, ainsi AD à AC par la 1.p.6. & comme AB est à BE, ainsi AC à CE : donc comme AD à AC, ainsi AC à CE : & partant AD, AC, CE sont proportionaux : & par consequent leurs egaux FH, HL, LM seront aussi proportionaux. Mais par la 1.p.6. les lignes GH, HK, KM sont entr'elles, comme les rectangles FH, HL, LM : elles seront donc proportionnelles : & par la 17.p.6. le rectangle de GH, KM, sera egal au quarré de HK. Or le rectangle d'icelles GH, KM a esté démontré rationel : donc aussi le quarré de HK sera rationel : & par consequent la ligne HK sera aussi rationelle : & par la 6.d.10. elle sera pareillement commens. à la rationelle proposée FG, ou à son egale HI, soit en longueur & puissance, ou en puissance seulement : Si en longueur, le rectangle HL contenu sous icelles HI, HK, ou le rectangle AC qui luy est egal, sera rationel par la 10.p.10 : mais si HK est commens. en puissance seulement à HI, iceluy rectangle HL ou AC sera medial par la 22.p.10. ce qu'il falloit démonstrer.

S C H O L I E.

Soient les mediales AB & BC, $\sqrt{18}$, & $\sqrt{12}$: (desquelles les puissances sont commensurables, car elles sont en raison double.) Le rectangle d'icelles AC sera $\sqrt{16}$, c'est à dire 4, qui est rationel. Mais si AB est $\sqrt{12}$, & BC $\sqrt{3}$, (desquelles les puissances sont comm. estant en raison double.) Le rectangle AC sera $\sqrt{36}$, c'est à dire 6, qui est un medial.

THEOR. 14. PROP. XXVII.

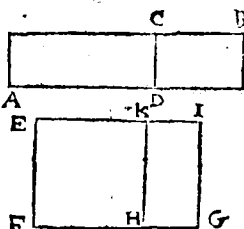
Vne figure mediale, n'est pas plus grande qu'une figure mediale, d'une figure rationelle.

Soit la figure mediale AB qui excède le medial AC du rectangle DB : ie dis que DB n'est pas figure rationelle.

Qu'il ne soit ainsi : Sur la proposée rationelle EF soient faits les rectangles EG & EH, egaux aux rectangles AB & AC par la 45.p.1. tellement que HI sera egal à DB : partant iceux rectangles EG, EH seront mediaux, lesquels estans appliquez sur la rationelle EF, les autres costez FG & FH se-

rent lignes rationnelles com-
menf. en puissance feulement à
EF par la 23. p. .

Maintenant si on dit que HI est rationel ; estant appliqué sur la rationele KH, l'autre costé GH sera rationel commef. en longitude à KH par la 21. p. 10. mais FH est incom. en long. à KH, ou EF: d'oc par la 14. p. 10. FH & GH



seront incom. en longueur: mais comme FH à GH, ainsi le rectangle de FH & GH au carré de GH par la 1. p. 6. (car ils sont de même hauteur) Partant par la 10. p. 10. le carré de GH est incommens. au rectangle de FH & GH. Il le sera aussi à deux fois le rectangle de FH & GH par la 14. p. 10. Item le même carré de GH est commens. au carré de FG qui est aussi rationnel; & par la 16. p. 10. les deux carrés de FH & GH, ensemble seront commens. au carré de GH: mais iceluy carré est incommensurable à deux fois le rectangle de FH & GH: donc par la 13. p. 10. les deux carrés de FH & GH seront incommens. à deux fois le rectangle de FH & GH. Mais iceux deux carrés, & deux fois le rectangle de FH, & GH sont égaux au carré de FG par la 4. p. 2. donc par 17. p. 10. le carré de FG sera incommens. aux deux carrés de FH & GH ensemble: lesquels estans rationaux (car ils sont faits sur lignes rationeles) il faudra que le carré de FG soit irrationnel, par la 10. d. 10. & par consequent la ligne FG irrationele: laquelle cy dessus nous auons monstré estre rationele. Ce qui est absurde: donc le rectangle HI, ou son egal DB n'estoit pas rationnel.

SCHOLIE.

Soit le rectangle medial $AB\sqrt{50}$. & le rectangle $AD\sqrt{18}$: le rectangle restant DB sera $\sqrt{8}$. qui est medial. De rechef AB estant $\sqrt{32}$, & $AD\sqrt{20}$; le restant DB sera $\sqrt{32}-\sqrt{20}$. qui n'est pas rationel.

PROBL. 4. PROP. XXVIII.

Trouuer deux mediales commensurables
en puissance seulement,comprenant yn recta-
ngle rationel,

Soient deux lignes rationeles commenſ. en puissance ſeulement A & B, (trouuees par le lemme qui precede la 22. p. de ce liure) entre lesquelles (par la 13. p. 6.) ſoit trouuee la moyenne proportionele C; puis (par la 12. p. 6.) aux trois A, B, C, ſoit trouuee la quatrieſme proportionele D: Je dis que C & D ſont les deux lignes demandees.

Car puis que C eſt moyenne proport. entre A & B, le rectangle de A & C (lequel par la 22. p. 10. eſt medial) ſera egal au quarré de C par la 17. p. 6. & par la 22. p. 10. C qui peut le rectangle medial, eſt mediale: Item puis que comme A a B, ainſi C a D, mais A eſt commenſ. en puissance ſeulement a B, auſſi ſera C a D. par la 10. p. 10. & par la 24. p. 10. D. ſera ligne mediale (pour eſtre commenſ. en puissance a la mediale D) Voila donc les deux lignes commenſ. en puissance ſeulement qui ſont trouuees. Reſte a prouuer que leur rectangle eſt rationel.

D'autant que comme A eſt a B, ainſi C a D, & en permutant comme A a C ainſi B a D; & comme A a C, ainſi C a B; pareillement comme C ſera a B, ainſi B ſera a D par la 11. p. 5. parquoy B eſt moyenne prop. entre C & D; & par la 17. p. 6. le quarré d'icelle B ſera egal au rectangle de C & D. Mais iceluy quarré de B eſt rationel: donc le rectangle compris de C & D eſt auſſi rationel. Nous auons donc trouué C & D mediales commenſ. en puissance ſeulement qui comprennent vn rectangle rationel, ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit A $\sqrt{20}$, & B $\sqrt{12}$. donc la moyenne prop. C ſera $\sqrt{240}$. & puis que come A a B, ainſi C a D; D ſera $\sqrt{86}$. Or les puissances de $\sqrt{240}$ & $\sqrt{86}$ ſont commenſ. car elles ſont comme 5 a 3: & le rectangle contenu d'icelles eſt $\sqrt{20736}$, c'eſt à dire 12, egal au quarré de $\sqrt{12}$, qui eſt auſſi 12. & partant iceluy rectangle de C & D commenſ. en puissance ſeulement eſt rationel.

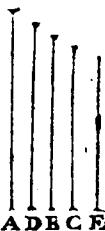
PROB. 5. PROP. XXIX.

Trouuer deux lignes mediales commenſurables en puissance ſeulement, comprenant vn rectangle medial.

Soient trois lignes rationeles commenſ. en puissance ſeulement A, B, C, trouuees comme il eſt enſeigné au lemme qui precede la 22. p. 10. & par la 13. p. 6. entre A & B ſoit trouuee la moyenne proportionele D : puis par la 12. p. 6. ſoit fait comme B à C ainſi D à E: Je diſ que D & E ſont les deux mediales demandees.

Car en premier lieu, il eſt euident que D eſt mediale par la 22. p. 10. d'autant que par la 17. p. 6. elle peut le rectangle irrationel de A & B: mais comme B à C, ainſi D à E, & B eſt commenſ. en puissance ſeulement à C, auſſi par la 10. p. 10. D ſera commenſurable en puissance ſeulement à E: Et par la 24. p. 10. D eſtant mediale, E ſera auſſi mediale commenſ. en puissance ſeulement à D.

D'auantage, ie diſ que le rectangle des deux mediales D & E eſt auſſi medial. Car puis que comme B à C, ainſi D à E, en changeant B ſera à D comme C à E: mais B eſt à D comme D à A; partant comme D eſt à A, ainſi C eſt à E; & par la 16. p. 6. le rectangle des extremes D & E ſera egal au rectangle des moyennes A & C. Mais le rectangle de A & C, rationeles commenſ. en puissance ſeulement, eſt medial par la 22. p. 10. Donc parce qui reſulte de la 24. p. 10. le rectangle de D & E ſera auſſi medial.



S C H O L I E. I.

Soit A 10, B 1200, & C 180. Donc la moyenne prop. D, ſera 120. Et puis que comme B à C, ainſi D à E; icelle E ſera 1200. Or les puissances de D & E, ſont commenſurables, car elles ſont comme 5 à 2: & le rectangle d'icelles eſt 1440000, c'eſt à dire 12000. egal au rectangle de A & C; qui eſt 18000.

Or es choſes ſuiuantes nous aurons beſoin de ce probleme cy.

Trouuer deux nombres plans ſemblables,

Soient pris quatre nombres proportionaux A 6. C. 12. B. 4. D. 8. c'eſt à dire que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D. Mais A & B ſe multipliant entr'eux faſſent E: Item C & D ſe multipliant faſſent F. Donc E & F ſeront nombres plans ſemblables, puis qu'ils ont les coſtez proportionaux.

Or d'autant qu'il a eſté demonſtré es 28. & 29. p. 9. que ſi on multiplie un nombre impair ou pair par un pair, eſt produit un nombre pair; mais un impair, ſi on multiplie un impair par un impair; il appert

par quelle maniere peuvent estre trouuez deux plans semblables, l'un & l'autre desquels soit pair ou impair; ou un seul pair, & l'autre impair: Car si les costez prins sont nombres pairs, les plans d'iceux seront aussi pairs; mais si les nombres sont impairs, les plans d'iceux seront aussi impairs. Que si les costez de l'un sont nombres impairs, mais de l'autre pairs, le plan de ceux-là sera impair, mais de ceux cy pair: Semblablement les plans seront, si chacun à un costé nombre pair, mais l'autre impair, &c.

L E M M E. I.

Trouuer deux nombres quarréz, tels que le compose d'iceux soit aussi quarré.

Soient trouuez par les choses cy-dessus $A.....E.....D.....B$
dictes deux plans semblables AB & C , un $C.....$
chacun desquels soit pair ou impair. Et d'autant que par les 24. & 26. p. 9. si on oste d'un pair, un pair, ou bien un impair d'un impair, le reste est pair; estant osté BD égal à C de $A B$. Le reste AD sera pair; & iceluy AD estant diuisé en deux également en E ; le double que le nombre faict de $A B$ en BD (qui est un quarré par la 1. p. 9) avec le quarré du nombre ED faict un quarré. Car puis que le nombre AD est diuisé en deux également en E , & à iceluy est adiouste DB ; le nombre qui est faict de $A B$ en BD , ensemble avec le quarré du nombre DE , sera égal au quarré du nombre EB , par le 6. theo. de ceux que nous auons demonsté à la 14. p. 9. Parquoy les deux quarréz, sçauoir celui faict de $A B$ en BD , & celui du nombre DE composez seront un quarré, sçauoir celui qui sera produit de BE . Ce qui estoit proposé.

C O R O L L A I R E.

De ces choses est manifeste que quand AB & C sont semblables, estre trouuez en la mesme maniere les deux nombres quarréz des nombres BE , ED , desquels l'excez, sçauoir le nombre faict de $A B$ en BD , est aussi quarré.

Que si les nombres AB & C ne sont prins semblables, l'un & l'autre toutesfois pair, ou impair, seront trouuez en la mesme maniere les deux quarréz des nombres BE , ED , desquels l'excez, sçauoir le nombre faict de $A B$ en BD n'est quarré. Car s'il estoit quarré, par la 2. p. 9. les nombres AB , BD , c'est à dire AB & C , seroient plans semblables. Ce qui est absurde, puis qu'ils ont esté posez dissemblables.

SCHOLIE. 2.

Parquoy s'il faut trouver deux nombres quarez, desquels l'excez soit aussi nombre carré, nous prendrons comme cy-dessus, deux plans semblables, desquels l'un & l'autre soit pair ou impair, savoir AB & C, & acheverons comme il est dict au prochain lemme.

Que s'il faut trouver deux quarez, desquels l'excez ne soit carré, il faudra prendre deux nombres plans dissemblables, & parachever comme dessus. Ce qu'on obtiendra plus facilement, divisant un nombre carré en deux nombres, l'un desquels soit carré, & l'autre non. Comme 16 en 4 & 12: ou 36 en 16 & 20: & ainsi des autres.

LEMME. 2.

Trouver deux nombres quarez, tels que le composé d'eux ne soit carré.

Soient deux nombres plans semblables AB, & C pairs, ou impairs, & soit A..H..I..E..F..G...D.....B.
C.....
fait mesme construction qu'au lemme
preced. tellement que le carré fait de la multiplication des nombres semblables AB, DB entr'eux, ensemble avec le carré de DE, soit egal au carré de BE: en apres de DE soit ostée l'unité EF. Donc le carré de DF sera moindre que le carré de DE, à cause de l'inegalité des costez. Je dis que le nombre composé des nombres quarez, desquels l'un est fait de AB en BD, & l'autre de DF en 10y, n'est pas carré. Car si ce composé estoit nombre carré, il sera plus grand, ou egal, ou moindre que le carré de BF: Soit premierement plus grand; & partant le costé d'iceluy sera plus grand que le costé BF: Donc le costé d'iceluy sera, ou egal, ou plus grand que le nombre BE: (car il ne sera moindre, pource qu'entre BE, BF, nombres differens de l'unité: ne tombe aucun milieu, & le susdit costé seroit milieu entre iceux, s'il estoit posé plus grand que EF, mais moindre que BE) Si on dict qu'il est egal, tellement qu'au carré de BE, soit egal le nombre carré composé du carré de AB en BD, & du carré de DF, puis qu'au mesme carré de BE, il a esté démontré au lemme precedent, estre egal le nombre fait de AB en BD, ensemble avec le carré de DE; celuy fait de AB en BD, ensemble avec le carré de DF, sera egal à celuy-là fait de AB en BD, ensemble avec le carré de DE. Ostant donc le commun fait de AB en DB, le reste carré de DF, sera egal

au reste quarré de DE; & partant le costé DF aussi egal au costé DE, la partie au tout: ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarréz, desquels l'un est fait de AB en BD, & l'autre de DE en soy, n'est pas egal au nombre BE. Mais il n'est pas plus grand. Car si faire se peut, le costé d'iceluy soit egal au nombre BI, qui est plus grand que BE. Donc puis que le quarré de BI plus grand costé, est plus grand que le quarré de BE moindre costé; pareillement le composé des quarréz, desquels l'un est fait de AB en BD, & l'autre de DF en soy, (puis que ce composé est posé egal au quarré de BI) sera plus grand que le quarré de BE. Mais au précédent lemme le quarré de BE a esté démontré egal au nombre fait de AB en BD, ensemble au quarré de DE: ostant donc le commun nombre fait de AB en BD, restera le quarré de DF, plus grand que le quarré de DE; & partant le costé DF plus grand que le costé DE, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarréz, desquels l'un est fait de AB en BD, & l'autre de DF en soy, n'est pas plus grand que le costé BE: mais il a esté démontré qu'il n'est pas aussi egal, ny moindre. Donc iceluy quarré composé n'est pas plus grand que le quarré de BE.

Soit maintenant si faire se peut, le nombre fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF, egal au quarré de BF; & soit posé AH double de l'unité EF. Donc puis que le tout AD est double du tout ED, (car AD a esté divisé en deux également en E) & l'osté AH double de l'osté EF, aussi le reste HD sera double du reste FD par la 7. p. 7. & partant HD est divisé en deux également en F: Parquoy par le 6. theo. de ceux que nous auons démontré sur la 14. p. 9. le nombre fait de HB en BD, ensemble avec le quarré de DF, sera egal au quarré de BF: Mais au mesme quarré de BF, est posé egal le nombre fait de AB en BD ensemble avec le quarré de DF. Donc le nombre fait de HB en BD, ensemble avec le quarré de DF, est egal à celuy fait de AB en DB. ensemble avec le quarré de DF. Ostant donc le commun quarré de DF, restera le nombre fait de HB en BD, egal à celuy fait de AB en DB. Parquoy puis que HB, AB multiplians le mesme BD, produisent nombre egaux, & par la 18. p. 7. les multiplians ont mesme raison que les produis; HB sera egal à AB, la partie au tout. Ce qui est absurde. D'oc le nombre fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF, n'est pas egal au quarré de BF.

Soit finalement, si faire se peut, le nombre fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF, moindre que le quarré de BF; & partant le costé d'iceluy, moindre que le costé BF, lequel soit BG, tellement que le nombre fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF, soit egal au quarré de BG: Soit pris AI double d'iceluy EG. Donc puis que le tout AD est double du tout ED, & l'osté AI double de l'osté EG; par la 7. p. 7. le reste ID sera aussi double du reste GD; &

partant I est diuisé en deux également en G. Parquoy par le 6. theor. démontré sur la 14. p. 9. le nombre fait de IB en BD. ensemble avec le quarré de DG est égal au quarré de BG. Mais au mesme quarré de BG a esté posé égal le nombre fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF: Donc le nombre fait de IB en BD, ensemble avec le quarré de DG est égal à celui fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF. Ostant donc les quarrés de DG & DF, desquels celui de DG est moindre, restera le nombre fait de IB en BD, plus grand que celui fait de AB en BD, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF, n'est pas moindre que le quarré de BF: mais il a esté démontré qu'il n'est pas aussi plus grand, ny égal. Donc le nombre produit de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF, n'est pas quarré. Ce qui estoit proposé à démonstrer.

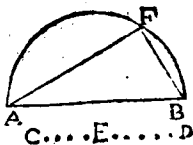
S C H O L I E. 3.

Par cecy nous trouuerons facilement deux nombres, tels que le composé d'iceux ne soit à l'un ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré. Car si par le Lemme precedent on trouue deux quarrés, tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ce composé non quarré ne sera à l'un ny à l'autre d'iceux, comme nombre quarré à nombre quarré. Nous obtiendrons le mesme, diuisant quelque nombre quarré en deux non quarrés: Car ainsi le quarré total ne sera à l'un ny à l'autre d'iceux nombres esquels il est diuisé, en raison de nombre quarré à nombre quarré,

PROB. 6 PROP. XXX.

Trouuer deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soit proposée la rationele AB, & soient trouuées (comme il a esté enseigné au 2. scholie de la preced. prop.) les deux nombres quarrés CD, CE, l'excez desquels DE ne soit quarré: puis par le corol. de la 6. p. 10. soit trouuée AF, au quarré de laquelle soit le quarré



de AB, comme le nombre CD est au nombre DE; & apres auoir descrit vn demy cercle sur AB, soit accommodee en iceluy AF: & ioinct BF. Je dis que AB & AF sont les deux lignes requises.

Car d'autant que le quarré de AB est au quarré de AF comme nombre à nombre, ils seront commens. par la 6. p. 10. & partant aussi leurs costez AB & AF aumoins en puissance, mais AB est rationele, & par consequent aussi rationele AF qui luy est commens. mais les quarréz de AB & AF n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. p. 10. les lignes AB & AF seront incommens. en longueur: elles seront donc rationeles commens. en puissance seulement.

Maintenant veu que l'angle F au demy cercle est droit par la 31. p. 3. le quarré de AB sera egal aux deux quarréz de AF & FB, c'est à dire que la ligne AB peut plus que AF, du quarré de FB. Et d'autant que comme CD à DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AF, par conuersion de raison, comme le nombre quatre CD sera au nombre quarré CE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de FB. (car ainsi que CD excède DE du quarré de CE, ainsi aussi le quarré de AB surpasse le quarré de AF du quarré de FB) parquoy les lignes droictes AB, FB sont commens. en longueur par la 9. p. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commens. en puissance seulement, & la plus grande AB peut plus que AF du quarré de la ligne FB, qui luy est commens. en longueur: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 6: AF sera $\sqrt{20}$: & partant BF sera 4. commens. en longueur à AB.

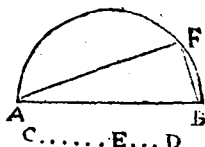
La construction & demonstration tant de ceste prop. que de plusieurs autres de ce liure, sont tellement deffectueuses en l'edition de Douuot, que ceux qui la verront pourront eux-mesmes (ayans bien entendu ce que nous auons dict iusques icy) recognoistre facilement les deffauts d'icelle: c'est pourquoy nous ne nous arresterons à les remarquer.

PROBL. 7. PROP. XXXI.

Trouuer deux lignes rationeles commens.

furables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur.

Soit exposée la rationelle AB & soient trouvez (comme il a esté enseigné au lemme 2. de la prop. 29. de ce liure) deux nombres quarréz tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ou plustost soit diuisé quelque nombre quarré CD, en deux nombres non quarréz CE, ED, afin que le tout CD ne soit à l'un ou à l'autre d'iceux CE, ED, comme nombre quarré à nombre quarré: puis sur AB soit décrit le demy cercle AFB; & par le corol. de la 6.p.10. soit trouuée la ligne droite AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CE au nombre CD: & finalement soit mené BF. Je dis que AB & AF sont les deux lignes demandées.



Car on prouuera tout ainsi qu'à la précédente, que AB & AF sont rationnelles commens. en puissance seulement (d'autant que leurs quarréz ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré) & que AB peut plus que AF du quarré de BF. Et d'autant que comme CE est à CD, ainsi le quarré de AB est au quarré de AF: par conuersion de raison comme CE sera à DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de BF. Mais CE n'est pas à DE comme nombre quarré à nombre quarré: donc le quarré de AB ne sera pas aussi au quarré de BF comme nombre quarré à nombre quarré. Parquoy les lignes droites AB, BF ne seront incommens. en longueur, par la 9.p.10. Nous auons donc trouué deux rationnelles AB, AF commens. en puissance seulement, tellement que la plus grande AB peut plus que AF, du quarré de la ligne BF, qui luy est incommens. en longueur: ce qu'il falloit faire.

S C H O R I E.

Si la rationelle AB est 3: AF sera $\sqrt{6}$, & BF 3.

PROB. 8. PROP. XXXII.

Trouuer deux mediales commensurables en

puissance seulement, comprenant vn rectagle rationel; & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur.

Soient trouuees par la 30. p. 10. deux lignes rationeles A & B commens. en puissance seulement, & que la plus grande A puisse plus que la plus petite B du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longueur: Item, par la 13. p. 6. soit trouuee C moyenne proportionele entre A & B; & finalement par la 12. p. 6. aux trois lignes A, B, C, soit trouuee la 4. proportionele D. Je dis que C & D sont les deux lignes demandees.



Car puis que A & B sont rationeles commensurables en puissance seulement, par la 22. p. 10. le rectangle d'icelles A & B sera irrationel, & la ligne C pouuant iceluy (car elle est moyenne prop. entre A & B) sera mediale. Et d'autant que come A a B, ainsi C a D; & A est commens. en puissance seulement a B, aussi C sera commens. en puissance seulement a D, par la 10. p. 10. Mais puis que C est mediale, par la 24. p. 10. D sera aussi mediale. Et d'autant que comme A est a B, ainsi C a D: & en changeant come A a C, ainsi B a D: mais comme A est a C, ainsi C a B: pareillement comme C sera a B, ainsi B sera a D: & partant le rectangle de C & D sera egal au quarré de B, par la 17. p. 6. & puis que le quarré de la rationele B est rationel, le rectangle compris sous C & D sera aussi rationel. Et veu que comme A est a B, ainsi C a D; & A peut plus que B du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur, aussi par la 15. p. 10. C pourra plus que D du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longueur. Nous auons donc trouué C & D, deux mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, C pouuant plus que D du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur: ce qu'il falloit faire.

Qui si on vouloit que C peut plus que D du quarré d'une ligne qui luy fust incommensurable en longueur, il ne faudroit que trouuer A & B, telles qu'elles sont requises par la precendente prop. au lieu que cy dessus, elles ont este trouuees par la 30. p. 10. & acheuer le tout comme dessus.

SCHOLIE.

Soit AB , BC : le rectangle d'icelles sera VI 1792, & la ligne CV 1792, qui est mediale. Et puis que comme AB , est à BC , ainsi CV 1792 est à D , icelle sera VI 343 : do c C & D sont deux mediales commens. en puissance seulement, lesquelles contiennent un rationnel 28. & la plus grande C peut plus que la moindre D , d'une ligne qui luy est commens. en longit. Car si du quarré d'icelle C , on oste le quarré de D , restera VI 567, & seront commens. en long. les deux mediales VI 1792 & VI 567. Car elles sont comme 4 à 3. Derechef soit AB , & BC : le rectangle d'icelles sera VI 1280, & la ligne CV 1280 & partant D sera VI 125 : donc C & D sont mediales comprenant un rationnel 20, & C peut plus que D du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur.

PROB. 9. PROP. XXXIII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grãde puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur.

Soient trouuees trois lignes rationeles commens. en puissance seulement A , B , C , (en la figure qui est de l'autre part) & que B puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longueur : (ce qu'on obtiendra trouuant premierement par la 10. p. 10. les deux rationeles B & C commensurables en puissance seulement, & que B puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur : puis à C & B soit trouuee A commens. en puissance seulement par ce qui est enseigné au lemme qui precede la 12. p. 10.) Item par la 13. p. 6. soit trouuee D moyenne prop. entre A & B : puis par la 12. p. 6. soit fait comme B à D , ainsi C à E . Je dis que D & E sont les deux lignes demandees.

Car puisque D est moyenne prop. entre A & B , par la 17. p. 6. elle peut le rectangle d'icelles A & B , qui est irrational, & par consequent D est mediale par la 12. p. 10. Mais d'autant que

comme B à D, ainsi C à E; en changeant comme B à C, ainsi D à E; & B, C estant commensurables en puissance seulement, & par là 24. 10. D estans mediale, E le sera aussi. Et d'autant que comme B à D, ainsi C à E, & D à A; comme D à A, ainsi C sera à E, & par là 16. p. 6. le rectangle des extremes D & E sera egal au rectangle de smoyens. Mais par la 22. p. 10. le rectangle de A & C rationeles commens. en puissance seulement est medial: Donc par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de D & E sera aussi medial. Finablement puis que comme B à C, ainsi D à E; & B peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur, par la 15. p. 10. D pourra aussi plus que E du quarré d'une ligne qui luy sera commensurable en longueur. Nous auons donc trouué deux mediales D & E commensurables en puissance seulement; &c. Ce qu'il falloit faire.



Que si on trouue A, B, C rationeles commens. en puissance seulement, tellement que B puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur, & on acheue de construire comme dessus; on demonstrera semblablement que D & E sont mediales, commensurables en puissance seulement comprenant un rectangle medial, & que la plus grande D, peut plus que E du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en long.

S C H O L I E.

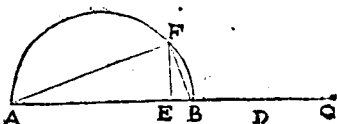
Soit A 8. B $\sqrt{48}$. & C $\sqrt{28}$: le rectangle compris de A & B sera donc $\sqrt{3072}$. & la ligne droite D $\sqrt{3072}$, qui est mediale, & A estant à C, comme D à E, icelle sera $\sqrt{588}$. Donc D & E, sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un medial, & la plus grande D peut plus que la moindre E du quarré d'une ligne, qui luy est commensurable en longueur. Car si du quarré d'icelle D, on oste le quarré de E, le reste sera $\sqrt{972}$. qui est commensurable en longueur à icelle D $\sqrt{3072}$. Derechef si A est 8, B $\sqrt{48}$, & C $\sqrt{20}$; D sera encore $\sqrt{3072}$, mais E sera $\sqrt{100}$. Donc D & E sont deux mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent un medial, & la plus grande D, peut plus que la moindre E, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur.

PROB.

PROB. 10. PROP. xxxiv.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarréz rationel; mais le rectangle contenu d'icelles, medial.

Soient deux lignes rationnelles les commensurables en puissance seulement AB & BC, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quar



ré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur, trouuees come il a esté enseigné en la 31. p. 10. & apres auoir couppe en deux également CB au point D, soit appliqué un rectangle sur BA egal au quarré de BD, defaillant d'une figure quarrée par la 28. p. 6. & soit iceluy rectangle compris de AE & EB: & apres auoir fait le demy cercle sur la ligne BA, & mené la perpendiculaire EF, soient menees BF & FA: Je dis qu'icelles lignes sont les lignes demandees.

Car puis que AB & BC sont inegales, & que la plus grande AB peut plus que la plus petite BC du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & que le rectangle de AE, EB appliqué sur AB, & defaillant d'une figure quarrée, est egal au quart du quarré de BC (c'est à dire au quarré de DB: car nous auons démontré au scholie de la 4. p. 2. que le quarré de BC est quadruple du quarré de BD:) les deux lignes AE & EB seront incommens. en longueur par la 19. p. 10. Mais par le scholie de la 13. p. 6. EF est moyenne proport. entre icelles AE, EB; & partant comme il a esté démontré à la 11. p. 10. elle sera incommensurable en puissance à EA. Mais come FE à EA, ainsi BF à FA par la 4. p. 6. (car iceux triangles sont equiangles par la 8. p. 6.) donc puis que FE, EA sont incommens. en puissance, par la 10. p. 10. BF & FA seront aussi incommens. en puissance. Item le quarré de AB, est egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. lequel quarré de BA est rationel, estant la ligne AB rationelle; partant le composé des quarréz de BF & FA, sera aussi rationel. Et d'autant que par l'hy-

porthese le rectangle de AE, EB, est egal au quarré de BD, & qu'il est aussi egal au quarré de la moyenne proport. EF par la 17. p. 6. le quarré de EF sera egal au quarré de BD : partant EF egale à BD : & par la 16. p. 6. le rectangle de BF & FA sera egal au rectangle de BA & EF ou BD son egale, (car par la 3. & 4. p. 6. AB est à BF comme FA à EF.) Or par la 1. p. 6. le rectangle de AB & DC est double du rectangle de AB & BD, (car la base BC est double de la base BD.) Mais le rectangle de AB & BC est medial par la 12. p. 10. donc aussi la moitié rectangle de AB & BD : & par consequent medial son egal rectangle de BF & FA. Nous auons donc trouué les deux lignes AF, FB, incommens. en puissance, qui font le composé de leurs quarez rationel: mais le rectangle compris d'icelles, medial: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

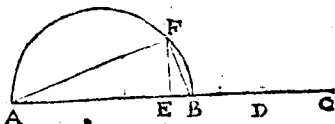
Si AB est 6, & BC 12. BD ou DC sera $\sqrt{3}$: & par consequent AE sera $3 + \sqrt{6}$, & EB $3 - \sqrt{6}$: & puis que le quarré de AF est egal aux quarez de AE, EF: ice^{te} AF sera $\sqrt{(18 + \sqrt{216})}$: mais BF sera $\sqrt{(18 - \sqrt{216})}$. Donc icelles AF, FB sont incommens. en puissance, & le composé de leurs quarez, sçauoir est 36 est rationel, mais le rectangle compris d'icelles, sçauoir est $\sqrt{108}$, est medial.

PROB. II. PROP. XXXV.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarez, medial: mais qui elles comprennent vn rectangle rationel.

Soient deux mediales commens. en puissance seulement AB & BC, comprenant vn rectangle rationel, & que AB puissa plus que BC du quarré

d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur trouuees comme il a esté enseigné en la 32. p. 10. & soit acheuee



la construction comme en la precedente. Je dis que BF & FA sont les deux lignes demandees.

Car nous demonstrerons ainsi qu'en la precedente prop. qu'icelles BF & FA sont incommens. en puissance : & le quarre de BA est medial, estant descrit sur vne ligne mediale, & egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. Partant le compose des deux quarrez de BF & FA est medial. Et d'autant que le rectangle de AB, BC (comme il a esté demonsté en la preced. prop.) est double du rectangle de AB, BD ; & qu'il est rationnel par la construction, aussi iceluy rectangle de AB, BD sera rationnel. Mais il a esté demonsté en la precedente qu'il est egal au rectangle de BF & FA : & par consequent iceluy est aussi rationnel. Nous auons donc trouué deux lignes AF. & BF incommens. en puissance, qui font le compose de leurs quarrez medial ; mais le rectangle compris d'icelles rationnel : ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Si AB est $\sqrt{432}$, & BC $\sqrt{48}$ BD ou EF sera $\sqrt{48}$; & AF $\sqrt{108 + 48}$, mais BF est $\sqrt{108 - 48}$: & partant icelles AF, BF sont incommens. en puissance, & le compose de leurs quarrez, sçauoir est 432, est medial : mais le rectangle compris d'icelles, sçauoir est 48, c'est à dire 6, est rationnel.

P R O B. 12. P R O P. XXXVI.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le compose de leurs quarrez medial, & aussi le rectangle d'icelles, medial, & incommensurable au compose de leurs quarrez.

Soient deux mediales commens. en puissance seulement AB & BC, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quarre d'une ligne qui luy soit incommens. en longitude, trouuees comme nous auons enseigné à la fin de la 33. p. 10, & apres auoir acheué la

construction comme en la 34. p. 10. Je dis que BF & FA sont les lignes demandees.

Car premierement elles sont incommensurables en puissance : comme en la demonstration de la 34. p. 10. & le quarre de BA estant medial comme en la precedente, le compose des quarrez de BF & FA sera aussi medial : Item le rectangle de AB & BC estant medial par hypothese, le rectangle de AB & BD (ou EF son egale) qui est sa moitié, sera aussi medial par ce qui resulte de la 24. p. 10. & par consequent medial le rectangle de BF & FA qui luy est egal, comme il a esté démontré en la 34. prop. 10. Et d'autant que par l'hypothese AB est incommensurable en longueur à BC, mais à icelle BC est commensurable en longueur sa moitié BD : Donc par la 13. p. 10. BD sera aussi incommensurable en longueur à AB, & par la 1. p. 6. le quarre de AB sera au rectangle de AB & BD (d'autant qu'ils sont tous deux de la hauteur de AB) comme AB à BD, c'est à dire incommensurable, par la 10. q. 10. & par consequent le rectangle de BF, & FA egal au rectangle de AB & BD, sera incommensurable au quarre de BA, c'est à dire au compose des quarrez de BF & FA. Nous auons donc trouué deux lignes droictes AF, BF incommensurables en puissance, faisant le compose de leurs quarrez, medial, & le rectangle contenu sous icelles medial, & incommensurable au compose d'iceux quarrez : ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Si AB est $\sqrt{192}$, & BC $\sqrt{48}$; BD ou son egale EF sera $\sqrt{48}$. & AF $\sqrt{(\sqrt{48} + \sqrt{24})}$ & BF $\sqrt{(\sqrt{48} - \sqrt{24})}$ Parquoy icelles AF, BF sont incommens. en puissance, & le compose de leurs quarrez, sçauoir est 192, est medial incommens. à $\sqrt{24}$, rectangle medial compris d'icelles AF, BF.

Or de ce probleme est manifeste le suiuant.

Trouuer deux mediales incommensurables en longueur & puissance.

Car puis que tant le compose des quarrez des lignes AF, BF, que le rectangle compris d'icelles, est medial, & qu'iceluy rectangle est incommensurable à ce compose, aussi les lignes pouuans iceluy compose, & rectangle, seront pareillement mediales incommens. tant en longueur qu'en puissance. Car si elles estoient commens. en puissance, aussi les quarrez d'icelles, c'est à dire le compose des quarrez des lignes AF, BF, & le rectangle sous icelles AF, BF, seroient commensurable. Ce

qui n'est pas. Parquoy si on prend AB pouuant le compose des lignes AF, FB ; & une autre ligne pouuant le rectangle d'icelles AF, FB , c'est à dire une moyenne proportionnelle entre AF, FB ; seront trouuees deux mediales incommens. en longueur & puissance.

I C Y C O M M E N C E N T L E S
sixaines des lignes irrationnelles par la
composition.

THEOR. 25. PROP. xxxvii. Six. 1.

Si deux lignes rationnelles commensurables en puissance seulement sont assemblees, la toute sera irrationnelle: soit icelle appelée Binome.

Soient assemblees deux lignes rationnelles commens. en puissance seulement AB & BC trouuees par le lemme qui precede la 22. p. 10. Je dis que la toute AC est irrationnelle.

Car par la 1. p. 6. le rectangle de AB & BC est au quarré de BC , comme AB à BC : mais AB, BC sont incommens. en longueur par l'hypothese. Donc par la 10. p. 10. le rectangle de AB, BC sera incommens. au quarré de BC ; & partant par la 14. p. 10. deux fois le rectangle de AB & BC sera incommens. au quarré de BC . Mais d'autant que les lignes AB, BC sont rationnelles commens. en puissance seulement, leurs quarez seront commensurables entr'eux, & le composé de tous deux sera commensurable au seul de BC par la 16. p. 10. & partant par la 14. p. 10. les deux quarez de AB & BC seront incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC , & par la 17. p. 10. le composé de deux fois le rectangle & des deux quarez, c'est à dire le quarré de la toute AC (car par la 4. p. 2. ce quarré est egal aux quarez de AB, BC , & deux fois le rectangle d'icelles AB, BC) est incommens. aux deux quarez de AB & BC , lesquels estans rationaux, & le composé d'iceux rationel, le quarré de AC qui luy est incommensurable sera irrationnel. par la 10. d. 10. & par consequent la ligne AC irrationnelle: icelle sera donc appelée binome.

S C H O L I E.

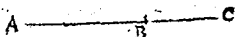
Soit $AB\ 2$, & $BC\ \sqrt{3}$: la toute AC sera $2+\sqrt{3}$, & son quarré est $7+\sqrt{48}$.

Or il appert de ce que dessus, que de deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, sont procées deux lignes irrationeles. Car la ligne moyenne prop. entre icelles rationeles est irrationele par la 22. de ce liure, laquelle est appelée mediale. Et la composée d'icelles, par la 37. p. 10. est une irrationele, qui est dite binome.

THEOR. 26. PROP. XXXVIII.

Si deux lignes mediales commensurables en puissance seulement; comprenant vn rectangle rationel sont assemblees, la toute sera irrationelle: soit icelle appelée bimediale premiere.

Soient assemblees deux mediales AB & BC commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, trouuees par la 28. p. 10. Je dis que la toute AC est irrationele.



Car par la mesme demonstration de la precedente prop. le quarré de AC se trouuera incommensurable deux fois le rectangle de AB & BC : lequel estant rationel, (puis qu'un seul rectangle de AB , BC est rationel par hypothese) le quarré de AC qui luy est incommensurable par la 14. p. 10. sera irrationel par la 10. d. 10. & par la 11. d. 10. la ligne AC sera aussi irrationele, laquelle sera appelée bimediale premiere.

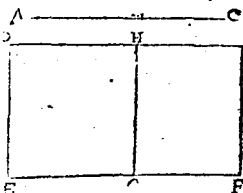
S C H O L I E.

Soit $AB\ \sqrt{54}$, & $BC\ \sqrt{24}$: La toute AC sera $\sqrt{54}+\sqrt{24}$, irrationele nommée bimediale premiere.

THEOR. 27. PROP. xxxix.

Si deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial sont assemblees, la, toute sera irrationnelle: soit icelle appelee bimediale seconde.

Soient assemblees les deux mediales AB & BC commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, trouuees par la 29 p. 10. Je dis que la toute AC est irrationnelle.



Car soit vne ligne rationelle proposee DE, sur laquelle soit appliqué le rectangle DF egal au carré de AC, & le rectangle DG egal au composé des quarrés de AB & BC par la 45. p. 1. Et d'autant que par la 4. p. 2. le carré de AC, c'est à dire le rectangle DF, est egal aux deux quarrés de AB, BC ensemble avec deux fois le rectangle de AB, BC; le rectangle HF sera egal à deux fois le rectangle de AB, BC: & puis que par l'hypothese le rectangle de AB, BC, est medial, par le coroll. de la 24. p. 10. le double rectangle de AB, BC, qui luy est commun. c'est à dire le rectangle HF, sera aussi medial. De rechef puis que les quarrés des mediales AB, BC sont commun. le composé d'iceux, c'est à sçauoir le rectangle DG sera aussi commun. à vn chacun d'iceux par la 16. p. 10. Mais chacun d'iceux quarrés des mediales AB, BC, est medial: Donc par le coroll. de la 24. p. 10. le rectangle DG sera aussi medial: Ainsi les deux rectangles DG & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationelle DE, (car GH est egale à la rationelle DE,) leurs autres costez EG & FG seront rationaux commensurables en puissance seulement à DH, par la 12. p. 10. Maintenant le rectangle de AB & BC est au carré de BC comme AB est à BC, par la 1. p. 6. c'est à dire incommensurable par la 10. p. 10. & partant le double du rectangle de AB & BC sera aussi incommensurable au carré de BC: & les deux quarrés de AB & BC estans commensurables entr'eux, les

deux ensemble seront commensurables au seul de BC, par la 16. p. 10. & par la 14. p. 10. les deux quarréz de AB & BC seront incommensurables à deux fois le rectangle de AB & BC : & par consequent aussi leurs egaux rectangles DG & HF : & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. EG & FG lignes rationeles seront incommensurables en longueur : elles seront donc commensurable en puissance seulement ; (car autrement elles ne seroient rationeles si elles estoient incommensurables,) & par la 37. p. 10. la toute composee EF sera irrationele : & le rectangle DF sera irrationel : car s'il estoit rationel la ligne DE estant rationele, il faudroit par la 21. p. 10. que l'autre costé EF fût aussi rationel, ce qui n'est pas. DF est donc irrationel : & partant aussi irrationel son égal quarré de AC ; & par consequent la ligne AC irrationele, qui sera appelée bimediale seconde.

COROLAIRE.

Il est manifeste par cecy que le rectangle compris d'une ligne rationele & d'une irrationele, est aussi irrationel. Car il a esté démontré que le rectangle DF compris de la rationele DE, & irrationele EF, ne peut estre rationel.

SCHOLIE.

Soit ABVV 18, & BCVV 8. La toute AC sera $\sqrt{VV 18} + \sqrt{VV 8}$. qui est irrationele appelée bimediale seconde.

THEOR. 28. PROPR XL.

Si deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, mais le composé de leurs quarréz est rationel sont assemblees, la route sera irrationele : & soit icelle appelée ligne maieure.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC incommen-

furables en puissance, comprenant vn rectangle medial & le composé de leurs quarrez rationel trouuees par la 34. p. 10. Je dis que la toute est irrationele.

Car par hypothese le rectangle de AB & BC estant medial, deux fois le mesme rectangle sera aussi medial par le corollaire de la 24. p. 10. & partant irrationel. Mais par hypothese le composé des quarrez de AB & BC est rationel: partant incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC. Et par la 17. p. 10. le composé des deux rectangles, & des deux quarrez (qui est le carré de AC par la 4. p. 2.) sera incommensurable au composé des deux quarrez de AB & BC qui est rationel: partant le carré de AC sera irrationel: & son costé A C aussi irrationel: lequel sera appelé ligne majeure.

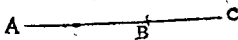
S C H O L I E.

Soit AB $\sqrt{18 + \sqrt{216}}$ & BC $\sqrt{18 - \sqrt{216}}$: La toute AC sera donc $\sqrt{18 + \sqrt{216}} + \sqrt{18 - \sqrt{216}}$, qui est irrationele nommee ligne majeure.

THEOR. 29. PROP. XLI.

Si deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial, sont assées; la toute sera irrationele: soit icelle appelee ligne pouuant vn rationel & vn medial,

Soient assemblees les deux lignes AB & BC, de telle nature que demande la propos. & qu'en seigne à trouuer la 35. p. 10. Je dis que la toute AC est irrationele.



Car puis que le composé des quarrez de AB & BC est medial, & leur rectangle rationel, deux fois iceluy rectangle sera aussi rationel, & incommensurable au composé des quarrez de AB & BC, lequel estant medial, par la 16. p. 10. le com-

posé des deux quarez, & des deux rectangles, sçavoir le quare de AC par la 4. p. 2. sera incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel est rationel: Ainsi par la 10. d. 10. le quare de AC sera irrationel: & par consequent la ligne AC aussi irrationele: laquelle sera appellee ligne pouuât vn rationel & vn medial.

SCHOLIE.

Soit $AB \sqrt{108 + \sqrt{72}}$, & $BC \sqrt{108 - \sqrt{72}}$ La toute AC sera donc $\sqrt{(108 + \sqrt{72})} + \sqrt{(108 - \sqrt{72})}$

THEOR. 30. PROP. XLII.

Si deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectagle medial, incommensurable au composé de leurs quarez aussi medial, sont assemblees, la toute sera irrationelle: Soit icelle appelee ligne pouuant deux mediaux.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC (comme en la figure de la prop. 39.) de telle nature que demande la prop. & qu'enseigne à trouuer la 36. p. 10. Je dis que la toute AC est irrationele.

Soit exposee la rationele DE, sur laquelle soit faicte mesme construction qu'en la 39. p. 10. sçavoir que le rectangle DH soit egal au quarré de AC; DG aux deux quarez de AB & BC, lequel sera medial, comme le composé d'iceux quarez, & incommens. au rectangle HF, egal à deux fois le rectangle de AB & BC, aussi medial, ainsi qu'il a esté demonstré en la 39. p. 10. & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. EG & GF seront aussi incommens. en longitude. Mais les deux rectangles DG & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationele DE, feront les deux autres costez EG & FG rationaux par la 23. p. 10. Ainsi EG & FG seront rationeles, commens. en puissance seulement & par la 17. p. 10. la toute EF sera irrationele. Mais DE estant rationele, le rectangle DF sera irrationel par le coroll. de la

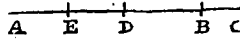
39. p. 10. Partant la ligne qui peut iceluy rectangle, ſçauoir AC ſera irrationele: laquelle on appellera ligne pouuant deux mediaux.

S C H O L I E.

Soit $AB \sqrt{(\sqrt{48} + \sqrt{24})}$ & $BC \sqrt{(\sqrt{48} - \sqrt{24})}$: Donc la ſomme AC ſera $\sqrt{(\sqrt{48} + \sqrt{24})} + \sqrt{(\sqrt{48} - \sqrt{24})}$

L E M M E. I.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux inegalement en vn poinct, & deréchef en deux inegalement en vn autre poinct, & les parties de l'une des diuiſions ſont inegales aux parties de l'autre diuiſion, chacune à la ſienne: les quarrez des deux lignes de la plus inegale diuiſion ſont plus grands, que les quarrez des lignes de la moins inegale.

Soit la ligne droicte AC diuiſe  inegalement en B: & encores inegalement en E, & les premieres parties AB, BC ſoient plus inegales que les poſterieures CE, AE: (c'eſt à dire que AE ſoit plus grande que BC.) Je diſ que les quarrez de AB & BC, ſont plus grands que ceux de AE & EC.

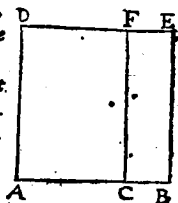
Car ſi AC eſt couppee en deux également en D; d'autant que AB, & BC ſont plus inegales que CE, AE; & que AE eſt plus grande que BC, il appert que ED ſera plus petite que BD: or par la 3. p. 2. le rectangle de AB & BC, avec le quarré de DB, eſt egal au quarré de DC: Item le rectangle de AE & EC, avec le quarré de DE, eſt auſſi egal au quarré de DC: partant le rectangle de AE & EC avec le quarré DE, eſt egal au rectangle de AB & BC, avec le quarré de BD. Et en oſtant les quarrez inegaux des lignes inegales DE, BD, le rectangle de AE & EC demeurera plus grand que le rectangle de AB & BC: & partant ſon double ſera auſſi plus grand que le double du rectangle de AB & BC. Maintenant les deux quarrez de AB & BC, & deux fois le rectangle de AB & BC, ſont egaux au quarré de AC par la 4. p. 2. auquel ſont auſſi egaux les deux quarrez de AE & EC, & deux fois le rectangle de AE & EC: & par conſequent les compoſez des quarrez, & rectangles ſont egaux entr'eux: mais les deux rectangles de AE & EC, ont eſté demonſtrez plus grands que les deux de AB & BC: partant les deux quarrez de AB & BC ſeront plus grands que les deux quarrez de AE & EC: Ce qui eſtoit propoſé.

LEMMME 2.

Vne figure rationele excède vne figure rationele, d'une figure rationele.

Soient les deux figures rationeles AE & AF , estant AE plus grande que AF de CE : Je dis que CE est figure rationele.

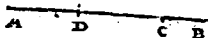
Car AE & AF estans rationeles, elles seront aussi commens. & par la 16. p. 10. AF & CF seront commens. entr'elles, & par consequent rationeles.



THEOR. 31. PROP. XLIII.

La ligne binome ne peut estre diuisee en ses noms, qu'en vn point seulement.

Soit le binome AB diuisé en ses noms au point C : tellement que AC, CB , soient rationeles commens. en puissance seulement, comme veut la 37. p. 10. Je dis qu'on ne peut diuiser AB en ses noms en vn autre point, sçauoir est que les lignes soient rationeles commens. en puissance seulement.



Car s'il se peut faire, soit diuisee derechef AB en ses noms au point D . Or il appert que AB n'est coupee en deux également és points C & D . Car AC, CB , ou AD, DB seroiēt commens. en longit. contre l'hypotese: il faut donc que AD & DB soient plus grandes ou plus petites que AC & CB , chacune à la sienne: car si elles estoient egales, elles seroient diuisees sur vn mesme point. Si AD & DB sont parties plus grandes que AC & CB , par le lemme qui suit la 42. p. 10. le composé des quarez de AC & CB sera plus grand que le composé des quarez de AD & DB : Et d'autant qu'iceux composés sont rationaux (car ce sont quarez bastis sur lignes rationeles) leurs excez sera aussi rationel par le lemme preced.

Or est il que le composé des quarez de AC & CB , avec deux

fois le rectangle de AC & CB, est egal au composé des quarez de AD & DB, avec deux fois le rectangle de AD DB : (car iceux sont chacun egaux au quarré de AB par la 4. p. 2.) Il faudra donc que d'autant que les quarez de AC & CB, sont plus grands que les quarez de AD & DB, d'autant les rectangles de AC & CB, soient plus petits que les rectangles de AD & DB : mais il a esté demonstté que l'excez des quarez est rationel : donc l'excez des rectangles sera aussi rationel : (puis que ces excez sont egaux) qui est contre la 27. p. 10. Car iceux rectangles par la 22. p. 10. sont mediaux, d'autant que les lignes AC & CB, ou AD & DB, sont rationeles commens. en puissance seulement. Donc le binome AB n'a peu estre diuisé en ses noms qu'en C : car en quelque autre point qu'on le diuise, il s'ensuiura la mesme absurdité.

S C H O L I E.

Il est à noter qu'es cinq sortes de lignes irrationeles qui suyuent, iamaïs les deux noms d'icelles ne peuuent estre egaux : car comme il a esté dict cy dessus, ils seroient commens. en longit. & ils ont esté demonstrez incommens. en long. faut aussi remarquer que quand on dict qu'icelles lignes ne peuuent estre diuisees en leurs noms qu'au point proposé, faut entendre que le contredisant apportant une autre diuision, les parties d'icelle doivent estre inegales aux parties de la proposée.

THEOR. 32. PROP. XLIII.

La bimediale premiere est diuisee en ses noms en vn point seulement.

Soit la bimediale premiere AB, diuisee en ses noms au point C en sorte que AC & BC soient mediales commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel, comme veut la 38. p. 10. Je dis qu'on ne la peut diuiser en ses noms en vn autre point.

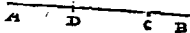
Car s'il se peut faire, soit AB derechef diuisee en D, scauoir que AD & DB soient mediales commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel. Nous demonsttrons tout ainsi qu'en la precedente proposition, que deux fois le rectangle de AD & DB sera autant plus grand que deux

fois le rectangle de AC & BC, que les quarrez de AD & DB sont plus petits que les quarrez de AC & BC: Or tous iceux rectangles sont rationaux par l'hypotese. Donc leur excez sera rationel par le lemme qui precede la 45.p.10. & par consequent l'excez des quarrez sera aussi rationel, ce qui est absurde: car iceux quarrez estans descrits sur lignes mediales, sont mediaux, & par la 27. p.10. l'excez d'iceux ne sera rationel. donc la ligne bimediale premiere AB ne pouuoit estre diuisee en ses noms, sinon au point C.

L E M M E 2.

Si vne ligne droicte est coupee inegalement, les quarrez des deux parties seront plus grandes ensemble que deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne droicte AB coupee inegalement en C: Je dis que les quarrez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB. Car ayant pris

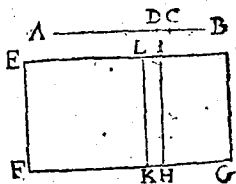


CD egale à la moindre partie CB, par la 7.p.2. les quarrez de AC, CD, c'est à dire de AC, CB sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, (c'est à dire de AC, CB) avec le quarré de AD: & partant les deux quarrez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, CB: ce qui estoit proposé,

THEOR. 39. PROP. XLV.

La bimediale seconde, est diuisee en ses noms en vn point seulement.

Soit la bimediale seconde AB diuisee en ses noms au point C, en sorte que AC & BC soient mediales commen. en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, comme veut la 39.p. de celiure: Je dis qu'elle ne peut estre diuisee en ses n^{os} en vn autre point.



Car si faire se peut qu'elle soit encore diuisee en AD & DB, en sorte que dessus: & soit vne ligne rationele proposee EF,

sur laquelle (par la 45. p. 1. soit construit le rectangle EG, egal au quarré de AB. Item EH egal aux deux quarréz de AC CB: le reste IG sera egal à deux fois le rectangle de AC, CB, puis que par la 4. p. 2. le quarré de AB est egal aux deux quarréz de AC, CB, avec deux fois le rectangle d'icelles AC, CB. En la mesme maniere si sur EF on applique EK egal aux quarréz de AD, DB: le reste LG sera egal à deux fois le rectangle de AD, DB. Et pour autant que les quarréz de AC, CB, sont inegaux aux quarréz de AD, DB: leurs egaux rectangles EH, EK seront aussi inegaux: & partant les lignes FH, FK, seront inegales. Et derechef puis que les quarréz de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, CB par le lemme precedent; EH sera aussi plus grand que IG: & partant EH plus grand que la moitié de EG: & consequemment la ligne FH plus grande que la moitié de la ligne FG. Nous demonstrerons par mesmes raisons que FK, est aussi plus grande que la moitié de FG. Donc les parties FH & HG, sont inegales aux parties FK, KG, chacune à la sienne. Et pource que AC, CB sont mediales, & commensurables en puissance; les quarréz d'icelles seront aussi mediaux & commensurables, & par la 16. p. 10. le composé d'iceux sera aussi commensurable à vn chacun d'eux; lesquels estant mediaux leur composé, s'est à sçauoir le rectangle EH sera aussi medial par le corol. de la 24. p. 10. Par mesme raison EK sera demonstré medial: parquoy EH, EK appliquez sur la rationele EF, auront les costez FH, FK, rationaux commensurables en puissance seulement à la rationele EF, par la 23. p. 10. Pareillement puis que le rectangle de AC, CB est posé medial; le double d'iceluy, sçauoir est IG, sera aussi medial par le corol. de la 24. p. 10. & estant appliqué sur la rationele HI, l'autre costé HG sera aussi rationel commensurable en puissance seulement à icelle HI, par la 23. p. 10. Et puis que AC, CB sont incommensurable en longueur, & par la 1. p. 6. comme AC est à CB, ainsi le quarré de AC est au rectangle de AC, CB: (car ils ont AC pour hauteur,) par la 10. p. 10. le quarré sera incommensurable au rectangle. Mais au quarré de AC est commensurable le composé des quarréz de AC, CB: (car d'autant que AC, CB sont commensurable en puissance, & partant les quarréz d'icelles commensurable, le composé d'iceux quarréz sera aussi commensurable au quarré de AC, par la 16. p. 10.) & le rectangle de AC, CB est commensurable à son double. Donc aussi le composé des quarréz de AC CB, s'est à dire le rectangle EH est incommens. au double

du rectangle de AC, CB, c'est à dire à IG, par le scholie de la 14. p. 10. & d'autant que par la 1. p. 6, comme EH est à IG, ainsi FH est à HG, par la 10. p. 10. icelle FH, HG seroit incommens. en longit. Mais elles ont esté demonstrees rationeles: Donc FH, HG sont rationeles commens. en puissance seulement. Et par la 37. p. 10. la route FG sera binome, & diuisee en ses n^{os} au point H. En la mesme maniere nous demonstrerons aussi FG binome estre diuisee en d'autres noms à vn autre point K, ce qui est absurde: car par la 43. p. 10. elle ne peut estre diuisee en ses noms qu'en vn seul point. Donc AB bimediale seconde ne peut estre diuisee en ses noms qu'au point C.

THEOR. 34. PROP. XLVI.

La ligne maieure, est diuisee en ses noms, en vn point seulement.

Soit la ligne maieure AB, diuisee en ses noms au point C, En sorte que AC & BC soient incommens. en puissance: & le composé de leurs quarez soit rationel; mais le rectangle compris d'icelles, medial comme veut la 40. p. de ce liure. Je dis qu'on ne pourra diuiser icelle AB en ses noms en vn autre point que C.

Car si faire se peut, qu'elle soit diuisee en ses noms en vn autre point D. Donc en quelque lieu que soit le point D, nous demonstrerons tout ainsi qu'en la 43. p. de ce liure, que les composez des quarez de AC & BC, & de AD & DB ont vn mesme excez que les doubles rectangles de AC & BC, & de AD & DB. Mais d'autant que les composez quarez sont rationaux par l'hypothese; & par consequent leur excez rationel: il faudroit donc que l'excez des doubles rectangles (lesquels sont mediaux par le coroll. de la 24. p. 10.) fut rationel, ce qui est contraire à la 27. p. 10. Donc la ligne maieure AB, ne sera diuisee en ses noms en autre point qu'en C.

THEOR. 35. PROP. XLVII.

La ligne pouuant vn rational & vn medial, est diuisee en ses noms, en vn point seulement.

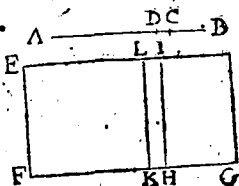
Soit la

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuisee en ses noms au point C, en sorte que AB & BC soient incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle rationel; & que le composé de leurs quarez soit medial: mais le rectangle d'icelles, rationel, comme veut la 41. p. 10. Je dis qu'on ne pourra diuiser icelle AB en ses noms en vn autre point que C. Car il s'ensuyuroit mesme absurdité qu'à la prec. p. sçauoir que si on la diuisoit encores au point D, il s'ensuyuroit comme la, quel'excès des quarez & des rectangles, seroit rationel, & medial.

THEO. 36. PROP. XLVIII.

La ligne pouuant deux mediaux, est diuisee en ses noms, en vn point seulement.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuisee en ses noms au point C, en sorte que AC & BC soient incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial incommensurable au composé de leurs quarez aussi medial, comme veut la 42. p. 10. Je dis qu'on ne peut diuiser icelle AB en ses noms en vn autre point que C.



Autrement, si faire se peut, soit diuisee au point D: & sur la rationelle proposée EF soit faite pareille construction qu'en la 45. p. 10. sçauoir est le rectangle EG égal au carré de AB, EH égal aux deux quarez de AC & CB: & partant IG égal au double du rectangle de AC & BC (comme il a esté démontré en ladite 45. p. 10.) & les deux rectangles EH & IG qui sont mediaux, feront les lignes FH & HG rationelles: mais le composé des quarez de AC & BC est incommensurable au double de leur rectangle: (car par l'hypothèse il est incommensurable à iceluy rectangle de AC, CB.) partant aussi les rectangles EG & EH seront incommensurables. Ainsi les lignes rationelles FH & HG seront commensurables en puissance seulement: & par la 17. p. 10. AB sera binome diuise en ses noms au point H. Que si on veut dire que AB peut encores estre diuise en ses noms au point D: il s'ensuyura, comme en la 45. prop. 10. Que le binome FG, diuise en ses noms au point H, se pourroit encores

diuifer en ses noms au poinct K; contre la 42. p. 10. Ainsi AB ne pouuoit estre diuisee en ses noms qu'au seul poinct C.

SECONDES DEFINITIONS.

Vne ligne rationele estant proposee, & le binome diuise en ses noms : lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit. du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude.

1. Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appelee Binome premier.

2. Mais si le plus petit nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appelee Binome second.

3. Que si ny l'un ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appelee Binome troiesme.

Et lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude.

4. Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appelee Binome quatriesme.

5. Mais si le plus petit nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne est appelee Binome cinquiesme.

6. Que si ny l'un ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute soit appelee Binome sixiesme.

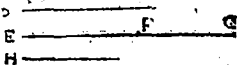
Il n'est rien dict icy des lignes, desquelles les deux noms soient commensurables en longueur à la rationelle proposée: parce que telles lignes ne sont binomes: car par la 37. p. 10. tout binome est composé de deux lignes rationelles commens. en puissance seulement.

PROB. 13. PROP. XLIX. Six. 3.

Trouuer vn Binome premier.

Estans trouuez deux nombres
 quarrez AB, CB (comme nous auons enseigné au scholie 2. de la 29. p. 10.) desquels l'excez AC ne soit carré, afin que AB CB soient comme nombre carré à nombre carré, & AB, AC ne soient comme carré à carré: Soit vne rationelle proposée D, à laquelle soit pris EF commens. en longueur: & icelles D & EF seront rationelles commens. en long. En apres par le corol. de la 6. p. 10. soit fait comme le nombre AB est à AC, ainsi le carré de EF au carré de FG. Iedis que la toute EG est binome premier.

A.....C.....B



Car puis que les quarrez de EF, FG qui sont entr'eux comme les nombres AB, AC sont commens. par la 6. p. 10. aussi les lignes EF, FG seront commensur. au moins en puissance: Et d'autant que EF est rationelle, aussi FG sera rationelle. Mais pource que AB, AC ne sont comme nombre carré à nombre carré, les quarrez d'icelles rationelles EF, FG ne sont comme nombre carré à nombre carré; & partant les lignes EF FG sont incommens. en longueur par la 9. p. 10. elles sont donc rationelles commens. en puissance seulement: & par la 37. p. 10 la toute EG sera binome. Je dis aussi qu'il est premier. Car puis que les quarrez de EF, FG sont entr'eux comme les nombres AB, AC; & AB est plus grand que AC, aussi le carré de EF sera plus grand que le carré de FG: soit donc du carré de H (trouué par le lemme qui suit la 14. p. 10.) Et puis que comme le nombre AB est à AC, ainsi le carré de EF au carré de FG: par conuersion de raison comme AB à CB, ainsi le carré de EF sera au carré de H. Mais AB est à CB comme nombre carré à nombre carré: donc le carré de EF sera au carré de H, comme nombre carré à nombre carré; & partant les lignes EF, H sont commens. en longueur

D d ij

par la 9. p. 10. Veu donc que EF plus grand nom est commenſ. en long. à la rationelle D, & peut plus que le moindre nom FG du quarré de H qui luy est commenſ. en longitude; EG ſera binome premier par la 1. des ſecondes def.

S C H O L I E.

Soit la rationelle propoſee D 8, & EF 6. faiſant donc que comme A B 9. eſt à AC 5, ainſi 36. quarré de EF ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera $\sqrt{20}$: & partant la toute EG, ſera $6 + \sqrt{20}$. qui eſt binome premier.

PROBL: 14. PROP. L.

Trouuer vn binome ſecond.

Eſtans trouuez les deux nombres quarréz AB, CB, comme en la ptop. precedente, & pris FG commensurable en longitude à vne rationelle propoſee D: icelles D & FG ſeront rationelles commensurables: puis apres par le corol. de la 6. p. 10. ſoit faiſt comme le nombre AC au nombre AB, ainſi le quarré de FG au quarré de EF. Je dis que EG eſt binome ſecond.

Car on demonſtrera premierement tout ainſi qu'en la precedente que EG eſt binome. Et puis que come le nombre AC eſt au nombre AB, ainſi le quarré de FG au quarré EF: en changeant comme AB à AC, ainſi le quarré de EF au quarré de FG. Mais AB eſt plus grand que AC: Donc auſſi le quarré de EF ſera plus grand que le quarré de FG, & ſoit du quarré de H. Nous demonſtrerons maintenant comme en la precedente prop. que EF & EF ſont commensurables en longitude. Et partant que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre nom FG du quarré de H qui luy eſt commensurable en longitude, & le moindre nom FG commensurable en longitude à la rationelle D: & par la 2. def. EG, ſera binome ſecond.

S C H O L I E.

La rationelle propoſee D, ſoit 7. & FG 5: faiſant donc que comme AC 5. eſt à AB 9. ainſi 25. quarré de FG ſoit au quarré de EF; icelle EF ſera $\sqrt{45}$. & partant la toute EG ſera $5 + \sqrt{45}$. qui eſt binome ſecond.

PROB. 15. PROP. LI.

Trouuer vn binome troisieme.

Estant trouuees deux nōbres AB, CB comme en la 49. p. 10. soit pris vn autre nombre I

A..... C..... B
I.....

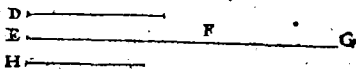
qui ne soit al'vn ny

à l'autre d'iceux A

B, AC, cōme nom-

bre quarré à nom-

bre quarré (ce qui



se fait prenant I nombre non quarré prochainement plus grand que AC. Car puis qu'il n'est quarré. Il ne sera au quarré AB, comme nombre quarré a nombre quarré. Derechef puis qu'il est non quarré prochainement plus grand que AC, il differe d'iceluy par l'vnité, ou par le binaire: Parquoy il ne tombera entre I & AC vn moyen proportionel, comme nous auons démontré au scholie de la 8. p. 8. Ils ne seront donc plans semblables: & partant ne serōt entr'eux comme nombres quarez) & apres auoir exposé la rationele D, par le corol. de la 6. p. 10. soit fait comme I à AB. Ainsi le quarré de D, au quarré de EF: ainsi les quarez de D, & EF, estans comme nombre à nombre seront commensurables par la 6. p. 10. & partant les lignes D, & EF aussi commensurables au moins en puissance, D estant donc rationele, EF sera aussi rationele. Mais parce que I n'est à AB, c'est à dire le quarré de D au quarré de EF, comme nombre quarré à nombre quarré; D & EF seront incommensurables en longitude par la 9. p. 10. Derechef soit fait par le susdit corol. comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG: & par la 6. p. 10. iceux quarez de EF, FG estans comme nombre quarré à nombre quarré, seront commens. & partant les lignes EF, FG aussi commensurables au moins en puissance; & EF estant rationele, FG le sera aussi. Et d'autant que AB n'est à AC. c'est à dire le quarré de EF au quarré de FG, comme nombre quarré à nombre quarré; les lignes EF, FG seront incommensurable en longitude par la 9. p. 10. & partant icelles EF, FG sont rationeles cōmensurables en puissance seulement: & par la 37. p. 10. la route EG sera binome. Je dis aussi qu'elle est binome troisieme. Car d'autant que comme I est à AB, ainsi le quarré de D au quarré de EF; & comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG, par raison egale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D au quarré de FG. Mais I n'est à AC, com-

me nombre quarré à nombre quarré ; donc les quarez de D, FG ne seront aussi comme nombre quarré à nombre quarré ; & partant les lignes D, & FG, seront incommensurables en longitude par la 9. 10. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG ; & AB est plus grand que AC, aussi le quarré de EF sera plus grâd que le quarré de FG : soit donc plus grand du quarré de H. Maintenant nous demonstrerons comme en la 49. p. 10. que EF & H, sont commensurables en longitude. Donc le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG du quarré de H qui luy est commensurable en longitude, & l'une ny l'autre d'icelles EF, FG n'est commensurable en longitude à la proposée rationelle D, cōme il a este démontré : partant EG sera binome troisieme par les secondes definitions.

SCHOLIE.

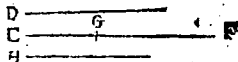
La rationelle proposée D soit 6: faisant donc que comme 16. est à AB 9. ainsi 36. quarré de D soit au quarré de EF ; icelle EF sera $\sqrt{54}$; & faisant que comme AB 9 est à AC 5, ainsi 54 quarré de EF soit au quarré de FG ; icelle FG sera $\sqrt{30}$: & partant la toute EG sera $\sqrt{54} + \sqrt{30}$, qui est binome troisieme.

PROB. 16. PROP. LII.

Trouuer vn binome quatriesme.

Estans trouuez deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB, ne soit à l'un ny à l'autre comme nombres quarez (cōme nous auons enseigné au 3.

A..... C... B



scholie de la 29. p. de ce liure :) Soit exposé la rationelle D ; & pris EG commensurable en longitude à icelle rationelle D ; & par consequent EG sera aussi rationelle : Et ayant construit le reste comme en la 49. p. 10. Nous demonstrerons comme là que la toute EF est binome. Item que le quarré de EG peut plus que le quarré de FG ; & que par conuersion de raison, comme AB est à CB, ainsi le quarré de EG au quarré de H. Mais AB n'est à CB comme nombre quarré à nombre quarré :

Donc le quarré de EG ne sera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré: & par la 9. p. 10. les lignes EG & H, sont incom. en longitude: parquoy puis que le plus grand nom EG peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy est incommensurable en longitude. & qu'icelle EG est commensurable en longitude à la rationelle proposée D; EF sera binome quatriesme par les def. secondes.

SCHOLIE.

La rationelle exposée D soit 8, & EG 6: faisant donc que comme A B 9 est AC 6, ainsi le quarré de EG, sçavoir 36. soit au quarré de FG; icelle FG sera trouuee de $\sqrt{144}$: & partant la toute EF sera 6 + $\sqrt{144}$, qui est binome quatriesme.

PROB. 17. PROP. LIII.

Trouuer vn binome cinquiesme.

Estans trouuees les deux nombres AC, CB comme en la precedente prop. & fait la construction comme en la 50 p. on démontrera comme en ladite 50. p. que EF est binome. Item que le quarré de EG est plus grand que le quarré de FG du quarré de H. Et comme la precedente qu'icelles EG & H sont incommens. en longitude: & partant par les secondes def. EF est binome cinquiesme.

SCHOLIE.

La rationelle proposée D soit 7, & FG 6: donc faisant que comme AC 6 est à AB 9, ainsi le quarré de GF, sçavoir est 36, soit au quarré de EG: icelle EG sera trouuee de $\sqrt{54}$: partant la toute EF sera $7 + \sqrt{54}$, qui est binome cinquiesme.

PROBL. 18. PROP. LIV.

Trouuer vn binome sixiesme.

Soient exposez 2. nombres AC, CB, tellement que le composé d'iceux AB ne soit à l'un ny à l'autre comme nombre quarré à nombre

A.....C...B
I.....

D _____
E _____ F _____ G
H _____

quarré (ce qu'on fera adioustant ensemble deux nombres pre-

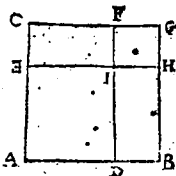
miers entr'eux : Car par la 30. p. 7 le total sera aussi premier à chacun deux ; & parant ne sera à l'un ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, par les choses demonstrees à la fin du 8. liure) Et soit pris quelque autre nombre non quarré I, afin qu'iceluy ne soit à AB, ny à AC, comme nombre quarré à nombre quarré. En après soit vne rationele proposée D : & par le corol. de la 6. p. 10. soit fait comme I à AB, ainsi le quarré de D au quarré de EF : & ayât acheué comme en la 51. p. 10. nous demonstrerons comme là que EG est binome : en après que D & FG sont incommensurables en longueur, & que le quarré de EF est plus grand que le quarré de FG du quarré de H. Finalement nous demonstrerons comme en la 49. p. que par conuersion de raison, comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'est pas à CB, comme nombre quarré à nombre quarré, ny par conséquent le quarré de EF au quarré de H : donc par la 9. p. 10. les lignes droictes EF & H, seront incommens. en longueur. Parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG, du quarré de la ligne H qui luy est incommens. en longueur : & l'un ny l'autre d'iceux noms n'est commens. en long. à l'exposée rationele D, par les secondes des. EG sera binome sixiesme.

S C H O L I E.

La rationele proposée D soit 6 : faisant que comme I 6 est à AB 8, ainsi le quarré de D, c'est à sçauoir 36, au quarré de EF : icelle EF sera trouuée de $\sqrt{48}$: & faisant que come AB 8 est à AC 5, ainsi 48 quarré de EE soit au quarré de FG : icelle FG sera trouuée de $\sqrt{30}$: parant la totale EG sera $\sqrt{48} + \sqrt{30}$, qui est binome sixiesme.

L E M M E.

Les quarez AI, IG estans conioints à l'angle I, tellement que les costez DI, IF facent vne seule ligne droicte DF ; & par conséquent les costez EI, IH aussi vne seule ligne droicte EH ; estât acheué le parallelogramme BC. Je dis qu'iceluy est quarré : & EF estre rectangle moyen proportionel entre les quarez AI, IG : & EG moyen prop. entre les quarez AG, IG.



Car d'autant que EI est égale à ID , mais HI à IF : la toute EH sera égale à la toute DF . Mais par la 34. p. 1. la ligne EH est égale à l'une & à l'autre d'icelles AB, CG : & DF à AC, BG : & par conséquent chacune d'icelles AB, CG est égale à l'une & à l'autre AC, BG : donc le parallelogramme BC est equilateral. Mais par la 29. p. 1. il est aussi rectangle: & partant quarré. Derechef puis que comme DI est à IF , ainsi EI à IH . Mais par la 1. p. 6. comme DI à IF , ainsi AI à EF : & comme EI à IH , ainsi EF à IG : donc comme AI à EF , ainsi EF à IG : & partant BF est moyen prop. entre AI, IG . Et finalement veu que comme AE à EC , ainsi CF à FG , icelles estant égales chacune à la sienne: & en composant comme AC à EC , ainsi CG à FG . Mais comme AC à CE , ainsi AC à EG : & comme CF à FG ainsi EG à IG par la 1. p. 6. Donc comme AG à EG , ainsi EG à IG : & par conséquent EG est moyen prop. entre AG, IG .

Or voila comme Commandin propose & demonstre ce lemme: mais Clavius le propose ainsi.

Si vne ligne droicte est coupee comme on voudra, le rectangle contenu sous les parties, est moyen proportionel entre les quatz d'icelles. Item le rectangle contenu sous la toute, & vne des parties, est moyen prop. entre le quarré de la toute, & le quarré de ladicte partie.

Ce qui est la mesme chose que dessus.

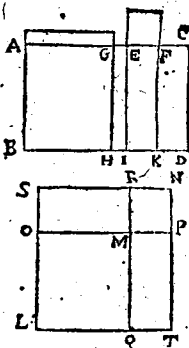
THEOR. 37. PROP. LV. Six. 4.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un binome premier; la ligne pouvant iceluy rectangle est binome.

Soit le rectangle AD , compris de la rationele AB & du binome premier AC : Je dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est binome.

Car d'iceluy binome AC , le plus grand nom soit AE : donc par la def. AE, EC sont rationeles commenç. en puissance seulement, & AE pourra plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est commenç. en longit. & aussi AE sera commenç. en longit. à la rationele proposée AB . Soit coupée EC en deux également en F . Donc puis que AE peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est commenç. en longit. si sur icelle AE on applique un rectangle égal au quart du quarré de EC , c'est à

dire au quarré de EF, & defaillant d'une figure quarrée, il diuifera icelle AE en parties commens. en longitude par la 8. p. 10. soient donc icelles parties AG, GE: & par les points G, E, F soient menees GH, EI, FK paralleles à icelles AB, CD: puis par la 14. p. 2. soient décrits les quarez LM, MN egaux aux deux rectangles AH, GI, & disposez en sorte que OM, MP facent vne ligne droiste: puis soit acheué le rectangle ST, lequel sera quarré par le lemme precedent.



Maintenant d'autant que par la construction le rectangle de AG, GE est égal au carré de EF; les lignes AG, EF, GE seront prop. par la 7. p. 6. Donc par la 1. p. 6. les rectangles AH, EK, GI seront aussi proportionaux: parquoy EK sera moyé prop. entre AH, GI, ou leurs egaux quarez LM, MN. Mais par le lemme précédent OR est aussi moyen prop. entre iceux quarez LM, MN: donc OR, EK seront egaux. Mais par la 43. p. 1. OR, QP sont egaux: & par la 36. p. 1. EK est égal à FD: donc QP sera aussi égal à FD: & par conséquent tout le carré LN égal à tout le rectangle AD: & ainsi la ligne OP peut le rectangle AD: Je dis donc qu'icelle OP est binome.

Car puis que AG, GE ont esté demonstrees commenſ. en longitude, la route AE sera aussi commenſ. en longitude à chacune d'icelles par la 16. p. 10. Mais AE est aussi commenſ. en longitude à AB: donc par la 12. p. 10. icelle AB est aussi cō-
menſ. en longit. à chacunes d'icelles AG, GE: & partant AB estant rationele, AG, GE feront aussi rationeles: & par la 20. p. 10. les rectangles AH, GI contenus sous icelles rationeles, seront rationaux: donc aussi rationaux leurs egaux quarez LM, MN: & par consequent les lignes QM, MP seront aussi rationeles. Et d'autant que AE est incommenſ. en longitude à EC, mais commēſ. à AG, & EC à sa moitié EF, par le scholie de la 14. p. 10. AG, EF seront incommenſ. en long. parquoy AH, EK qui ont meſme raiſon que AG, EF par la 1. p. 6. ſont aussi incommenſ. par la 10. p. 10. & par consequent leurs egaux LM, QP: donc par la 10. p. 10. les lignes OM, MP ſont aussi incommenſ. en longitude, puis que par la 1. p. 6. elles ſont en meſme raiſon que LM, QP. Mais OM, MP, ont esté démon-
ſtrees rationeles: & partant elles ſont rationelles commenſ.

en puissance seulement : donc la toute OP pouvant le rectangle AD est binome par la 37 p. 10. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, & AC 4 + $\sqrt{12}$. Donc le rectangle AD sera 20 + $\sqrt{300}$: Et puis que AE plus grand nom du binome est 4, & EF moitié du plus petit nom EC, est 3 ; AG sera 3, & GE 1. Donc le rectangle AH sera 15. & la ligne OM qui peut iceluy rectangle sera $\sqrt{15}$: Ainsi GI est 5, & MP 5. Mais EF est 3, & EI égale à AB : donc EK sera $\sqrt{75}$, & son double ED $\sqrt{300}$. Or si on multiplie OM, MP entr'elles, sera produicte MT 75, égal à EK. Mais à iceluy MT est égal MS : donc MS, MT ensemble seront aussi 7500. Or les quarez LM 15, MN 5, font ensemble 10 : Partant tout le quarré LN est 20 + $\sqrt{300}$, & son costé OP ou LT 15 + $\sqrt{5}$, qui est binome sixieme.

THEOR. 38. PROP. LVI.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un binome second ; la ligne qui peut iceluy rectangle, est bimediale premiere.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB & du binome second AC : Je dis que (apres auoir fait pareille construction & demonstration qu'en la precedente) la ligne OP qui peut iceluy rectangle AD, est bimediale premiere.

Car puis que AC est binome second, AE sera incommensurable en longueur à la rationele AB : Item AG & EG (qu'on prouuera estre commens. en longueur entr'elles, comme en la precedente, & par la 16. p. 10. à leur toute AE) seront par la 14. p. 10. aussi incommens. en longueur à icelle AB, laquelle estant rationele, icelles AG, GE seront aussi rationeles : & par consequent commens. en puissance seulement à icelle rationele AB. Donc par la 12. p. 10. les rectangles AH, GI seront mediaux : & leurs egaux quarez LM, MN aussi mediaux : Et partant les lignes OM, MP mediales, lesquelles on prouuera

estre commenſ. en puissance ſeulement, tout ainſi qu'en la precedente. Et d'autant que EC eſt commenſ. en longitude à la rationele AB, le rectangle ED ſera rationel par la 20. p. 10. auſſi ſera ſa moitié EK : & par conſequent ſon egal QP compris des deux mediales OM, MP : & par la 38. p. 10. OP eſt bimediale premiere.

SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 5, & AC $\sqrt{48+6}$: donc le rectangle AD ſera $\sqrt{1200+30}$. Et puis que AE eſt $\sqrt{48}$, & EC 6 : EF ſera 3, & ſon quarré 9, auquel eſtant poſé egal le rectangle de AG, GE, icelles ſeront $\sqrt{27}$, & $\sqrt{3}$: parquoy le rectangle AH ſera $\sqrt{675}$. & par conſequent la ligne OM, qui peut iceluy ſera $\sqrt{675}$ ainſi GI ſera $\sqrt{75}$, & MP $\sqrt{75}$. Or EC eſt 6 : partant ED double de MS $\sqrt{50625}$, c'eſt à dire 15, eſt 30 : & par conſequent MS, MT, ſeront auſſi 30. Parquoy tout le quarré LN composé des quatrez LM $\sqrt{675}$, MN $\sqrt{75}$, & des deux rectangles MS, MT 30, ſera $\sqrt{1200+30}$, & ſon coſté OP ou LT $\sqrt{675+75}$, qui eſt bimediale premiere.

THEOR. 39. PROP. LVII.

Si vn rectangle eſt compris d'une ligne rationele, & d'un binome troiſieſme, la ligne qui peut iceluy rectangle eſt bimediale ſeconde.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB & du binome troiſieſme AC (apres auoir conſtruit comme aux precedentes.) Je dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, eſt bimediale ſeconde.

Car on prouuera comme en la precedente, que les deux lignes OM, MP ſont mediales commenſurables en puissance ſeulement ; Item d'autant que AC eſt binome troiſieſme, EC eſt commenſurable en puissance ſeulement à la rationele AB ; & par la 22. p. 10. Le rectangle ID ſera medial, auſſi ſera ſa moitié EK : Et par conſequent medial ſon egal QP (compris des deux mediales OM & MP.) Ainſi OM, MP ſont deux mediales commenſurables en puissance ſeulement comprenant vn rectangle medial, & par la 39. p. 10. OP ſera bimediale ſeconde.

SCHOLIE.

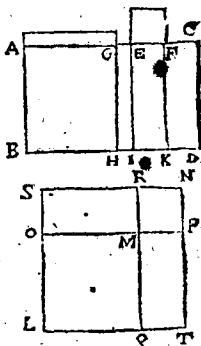
La rationelle AB soit 5, & AC $\sqrt{32} + \sqrt{24}$: Donc le rectangle AD sera $\sqrt{800} + \sqrt{600}$. Mais d'autant que AE est $\sqrt{32}$, & EC $\sqrt{24}$; EF sera $\sqrt{6}$, au quarré de laquelle est posé egal le rectangle de AG, GE; & partant AG sera $\sqrt{18}$, & GE $\sqrt{2}$. Parquoy le rectangle AH sera $\sqrt{450}$, & GI $\sqrt{50}$; & par consequent la ligne OM est $\sqrt{450}$, & MP $\sqrt{50}$. Et puis que EI est 5, & EC $\sqrt{24}$, le rectangle ED sera $\sqrt{600}$, lequel est double de MT $\sqrt{150}$. Donc tout le quarré LN, qui est composé des quarréz LM $\sqrt{450}$, MN $\sqrt{50}$, & des rectangle MS, MT $\sqrt{600}$; sera $\sqrt{800} + \sqrt{600}$; & partant son costé OP est $\sqrt{450} + \sqrt{50}$, qui est bimediale seconde.

THEOR. 40. PROP. LVIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un binome quatriesme; la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Maieure.

Soit le rectangle AD, compris du binome quatriesme AC & de la rationelle AB (après avoir construit & démontré comme en la 55.p.) Je dis que OP qui peut iceluy rectangle AD est ligne maieur.

Car puis que AC est binome quatriesme, AE plus grand nom est communurable en longueur à la rationelle AB, & peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & par la 19.p. 10. le rectangle deffaislant compris sous AG, GE (qui est egal au quart du quarré de EC) diuifera AE en AG & EG incommens. en longueur; & les rectangles AH & GI seront incommens. par la 1.p. 6. & 10.p. 10. Donc aussi incommens. leurs egaux quarréz LM, & MN: & par consequent les lignes OM, MP seront incommens. en puissance. Mais le rectangle AI cōp r s



des rationeles AB, AE, est rationel par la 20. p. 10. (qui est egal aux quarrez LM, MN). Et le rectangle OP compris d'icelles lignes OM, MP est medial, car son egal EK est medial, comme son double EC par la 22. p. 10. estant ED rationele commun. en puissance seulement à AB: & par la 40. p. 10. OP est ligne maieure.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 5, & AC $4 + \sqrt{8}$: Donc le rectangle AD sera $20 + \sqrt{200}$. Et puis que AE est 4, & EC $\sqrt{8}$; EF sera $\sqrt{2}$, au quarre de laquelle, sçavoir 2, ayant esté pose egal le rectangle de AG, GE; la ligne AG sera $2 + \sqrt{2}$, & GE $2 - \sqrt{2}$: partant le rectangle AH sera $10 + \sqrt{50}$, & GI $10 - \sqrt{50}$; & par consequent OM est $\sqrt{10 + \sqrt{50}}$, & MP $\sqrt{10 - \sqrt{50}}$. Or ED estoit $\sqrt{8}$; dont ED double du rectangle MTV 50; sera $\sqrt{200}$. La somme des quarrez LM, MN, sera donc 20, à laquelle si on adlouste les plans TMS $\sqrt{200}$, on auroit tout le quarre LN $20 + \sqrt{200}$; & partant son costé OP sera $\sqrt{10 + \sqrt{50}} + \sqrt{10 - \sqrt{50}}$ ou $\sqrt{20 + \sqrt{200}}$ qui est ligne maieure.

THEOR. 41. PROP. LIX.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un binome cinquiésme; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne irrationele pouuant vn rationel & vn medial.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB, & du binome cinquiésme AC; Je dis (apres auoir construit & démontré comme en la 55. p.) que OP qui peut iceluy rectangle AD, est ligne irrationele, pouuant vn rationel & vn medial.

Car puis que AC est binome cinquiésme, AE plus grand nom peut plus que EC du quarre d'une ligne qui luy est incommens. en longueur: & comme en la precedente AG & EG seront incommens. en longueur: Et les lignes OM, MP seront incommens. en puissance, & l'egal au composé de leurs quarrez, sçavoir le rectangle AI, est medial par la 22. p. 10. car les lignes AB & AE sont rationeles commun. en puissance seule-

ment. Et d'autant que AB, & le plus petit nom EC, sont commens. en longueur, par la 20. p. 10. ED est rationel : aussi sera sa moitié EK; & son égal QP, compris des lignes OM, MP, & par la 41. p. 10. OP est ligne irrationelle pouuant vn rationel, & vn medial.

S C H O L I E.

La rationelle AB soit 5, & AC $\sqrt{8+2}$. Donc le rectangle AD sera $\sqrt{200+10}$. Et d'autant que AE est $\sqrt{8}$, & EC 2; EF sera 1, au quarré de laquelle estant égal le rectangle de AGE, le cosié AG sera $\sqrt{2+1}$: & GE $\sqrt{2-1}$: Et partant le rectangle AH sera $\sqrt{50+5}$, & la ligne OMV ($\sqrt{50+5}$); & MPV ($\sqrt{50-5}$), puis que GI est $\sqrt{50-5}$. Et pource que EI est 5, & EC 2; le rectangle ED sera 10; & par consequent sa moitié MT est 5. Donc la somme des quarréz LM MN, est $\sqrt{200}$, à laquelle adionstant les rectangles SMT 10, tout le quarré LN sera $\sqrt{200+10}$; Et par consequent son cosié OP, est $\sqrt{(\sqrt{50+5})^2 + (\sqrt{50-5})^2}$, ou bien $\sqrt{(\sqrt{200+10})}$ qui est ligne pouuant un rationel, & un medial.

THEOR. 42. PROP. LX.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un binome sixiesme; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant deux mediaux.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB, & du binome sixiesme AC: (apres auoir construit & demonstté comme en la 55. p. que OP peut iceluy rectangle AD) Je dis qu'icelle OP, est ligne pouuant deux mediaux.

Car puis que AC est binome sixiesme, AE plus grand nom peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur, & si les deux noms sont incommensurables en longueur à la rationelle AB: Et comme il a esté demonstté à la 58. p. 10. OM, MP seront incommensurable en puissance; & si par la 12. p. 10. Le rectangle AI, qui est égal au composé de leurs quarréz est medial: Item EC qui est compris de deux rationelles commensurables en puissance seulement, est aussi medial par la mesme prop. aussi medial sa moi-

tié EK, & son egal QP compris d'icelles lignes OM, MP. Et si iceluy rectangle QP, ou son egal EK est incommens. au composé des quarréz LM, MN, sçauoir AI : car les lignes AE & EC estant incommens. en longitude, aussi AE & EF le seront ; & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. Les rectangles AI & EK seront incommens. Et par la 42. p. 10. OP sera ligne pouuant deux mediaux.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, AC $\sqrt{12} + \sqrt{8}$. Donc le rectangle AD sera $\sqrt{300} + \sqrt{200}$. Et pource que AE est $\sqrt{12}$, & EC $\sqrt{8}$; EF sera 2, au quarré de laquelle estant egal le rectangle de AGE; le costé AG sera $\sqrt{3} + 1$, & le costé GE $\sqrt{3} - 1$: Parquoy le rectangle AH sera $\sqrt{75} + 5$, & la ligne OM $\sqrt{(\sqrt{75} + 5)}$ & GI estant $\sqrt{75} - 5$, MP sera $\sqrt{(\sqrt{75} - 5)}$. Mais EC estant $\sqrt{8}$, le rectangle ED double de MT $\sqrt{50}$; sera $\sqrt{200}$. Donc les quarréz LM, MN, seront ensemble $\sqrt{300}$. & les rectangles SMT $\sqrt{200}$; & partant tout le quarré LN sera $\sqrt{300} + \sqrt{200}$; & par cōséquent son costé OP sera $\sqrt{(\sqrt{75} + 5)} + \sqrt{(\sqrt{75} - 5)}$ ou bien $\sqrt{(\sqrt{300} + \sqrt{200})}$, qui est ligne pouuant deux mediaux.

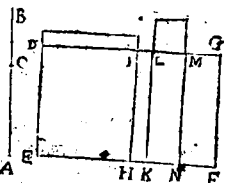
THEOR. 43. PROP. LXI. Six. 5.

Le quarré d'un binome, appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé binome premier.

Soit le binome AB, le plus grand nom duquel est AC; & sur la rationele DE soit appliqué par la 4. p. 1. le rectagle DF egal au quarré de AB: Je dis que l'autre costé DG est binome premier.

Car sur la mesme DE soit construit le rectangle DH egal au quarré de AC: & sur HI vn autre rectangle IK egal au quarré de CB: Il est donc euidēt par la 4. p. 2. que le reste LF est egal à deux fois le rectangle de AC, CB: & en diuisant LG également en M, & en menant MN parallele à CD, chascun rectangle LN, MP sera egal au rectangle de AC, CB. Et d'autant que AB est binome, AC, CB sont rationeles commens. en puis-

en puissance seulement ; & leurs
quarrez seront rationaux ; & leurs
egaux rectanglès DH & IK aussi ra-
tionaux ; & par la 21. p. 10. les costez
DI & IL seront rationeles commé-
surables en longueur à la rationele
DE, & entr'elles par la 12. p. 10. Et
par la 16 p. 10. la toute DL sera cō-
mens. en longueur à chacune DI, IL, & par la 12. p. 10. elle
sera rationele & commens. en longueur à DE rationele : Et
d'autant que par la 21. p. 10. le rectangle de AC, CB est me-
dial, son double LF sera aussi medial : & par la 22. p. 10. Ice-
luy medial LF estant appliqué sur la rationele LK, l'autre co-
sté LG sera aussi rationel incommens. en longit. à icelle LK,
c'est à dire à DE, à laquelle DL estant commens. en longit.
par la 13. p. 10. DL, LG sont incommens. en longit. mais elles
sont rationeles : elles seront donc commens. en puissance seu-
lement ; & par la 37 p. 10. DG est binome. Je dis en outre que
c'est binome premier.



Car il appert par le lemme de la 54. p. de ce liure, que le re-
ctangle de AC, CB est moyen prop. entre les quarrez d'icel-
les AC, CB : donc aussi LN moyen prop. entre DH, IK : & par
conséquent la ligne LM moyenne prop. entre les lignes DI,
IL par la 1. p. 6 & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL sera egal
au quarré de LM : Et d'autant que les quarrez de AC, CB sōt
commens. (car icelles AC, CB sont posées commensur. en
puissance) leurs egaux DH, IK seront aussi commens. Donc
aussi commens. en longueur les lignes DI, IL par les 1. p. 6. &
10. p. 10. Et d'autant que les deux quarrez de AC & CB sont
plus grands que leur rectangle deux fois, par le lemme qui
suit la 44 p. de ce liure : partant DK sera plus grand que LF,
& DL plus grand nom que LG : car icelles lignes sont entre-
elles comme DK à IF, par la 1. p. 6. Et puisque le rectangle de
DI, IL appliqué sur DL, est egal au quarré de LM, c'est à di-
re au quart du quarré de LG, & deffaillant d'une figure quar-
ree, & les parties DI, IL sont commens. en longueur : icelle
DL peut plus que LG du quarré d'une ligne qui luy est com-
mens. en longit. par la 18. p. 10. & partant icelle DL ayant esté
demonstree commens. en long. à la rationele DE, par les se-
condes def. DG sera binome premier.

S C H O L I E.

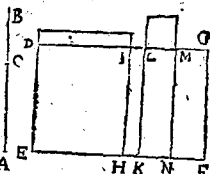
Le binome AB soit $\sqrt{45} + 3$, & la rationele DE 6. d'autant que le plus grand nom AC est 145 son quarré est 45, lequel appliqué sur DE 6, fait l'autre costé DI de $7\frac{1}{2}$: Et le moindre nom CB estant 3, son quarré est 9, qui appliqué sur IH 6, fait IL de $1\frac{1}{2}$, & partant la route DL est 9. Or le rectangle de ACB est $\sqrt{405}$, & son double LF $\sqrt{1620}$. Donc la ligne FG sera $\sqrt{45}$; & par consequent la route DF sera $9 + \sqrt{45}$, qui est binome premier.

THEOR. 44. PROP. LXII.

Le quarré d'une bimediale premiere, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé binome second.

Soit la bimediale premiere AB, diuisee en ses noms en C, dont le plus grand soit AC, (apres auoir construit comme en la precedente) Je dis que DG est binome second.

Car puis que AB est bimediale premiere, par la 38. p. 10. AC, CB s'ont mediales commenfur. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, duquel le double LF sera aussi rationel, & par la 21. p. 10. LG sera rationele commenfur. en longitude à DE. Mais icelles deux lignes AC & CB estans mediales, leurs quarrés sont mediaux: & partant leurs egaux rectangles DH, IK seront aussi mediaux & commenfur. Et d'autant que par la 16. p. 10. le total DK est cōmenfur. à chacun d'iceux DH, IK, par le coroll. de la 24. p. 10. iceluy DK sera aussi medial: Et par la 23. p. 10. son autre costé DL sera rationel incommenfur. en longitude à la rationele DE: & par la 13. p. 10. DL, LG seront incommenfur. en long. & partant rationeles commenfur. en puissance seulement: & par la 17. p. 10. DG sera binome. Je dis d'auantage qu'il est binome premier. Car il se prouuera comme en la precedente que DL est plus grand nom, & qu'il peut plus que le moindre LG du



quarré d'une ligne qui luy est commun. en longueur. Nous
avons aussi monstté que LG plus petit nom, est commun. en
longueur à la rationelle DE : & partant par les secondes def.
DG est binome second.

S C H O L I E.

La bimediale AB soit $\sqrt{180} + \sqrt{12}$, & la rationelle DE 4. D'au-
tant que le plus grand nom AC est $\sqrt{108}$, son quarré est 108, lequel
estant appliqué sur la rationelle DE 4, le costé DI sera $\sqrt{6}$. Ainsi aussi
le moindre nom estant $\sqrt{12}$, son quarré est 12 ; & par consequent
IL, est $\sqrt{2}$, & la toute DI $\sqrt{12}$. Or le rectangle de ACB est 6 : & par-
tant le rectangle KG double d'iceluy est 12, & le costé LG 3. Donc la
toute DG sera $\sqrt{12} + 3$, qui est binome second.

THEOR. 45 PROP. LXIII.

Le quarré d'une bimediale seconde, appli-
qué sur une ligne rationelle, faict l'autre costé
binome troisieme.

Soit la bimediale seconde AB, diuisee en ses noms en C
desquels AC soit le plus grand. (Après avoir construit comme
en la 61. p.) Je dis que DG est binome troisieme.

Car puis que AB est bimediale seconde, par la 19. p. 10. AC,
BC sont mediales commensurable en puissance seulement
comprenant un rectangle medial ; partant les quarrés d'icel-
les AC, CB seront commensurables & mediaux ; & aussi leurs
egaux rectangles DH, IK : & par la 16. p. 10. le total DK est
commensurable à chacun d'iceux DH, IK : donc par le co-
rol. de la 24. p. 10, DK sera aussi medial, & étant appliqué sur la
rationelle DE, par la 23. p. 10. son autre costé DL, sera ra-
tionnel incommensurable en longueur à icelle DE. Recherchez
puis que le rectangle de AC, CB est medial, son double LF le
sera aussi ; & iceluy LF étant appliqué sur la rationelle LK, son
autre costé LG sera rationnel incommensurable en longueur à
LK : c'est à dire à DE : Donc l'une & l'autre d'icelles lignes
DL, LG, est rationelle & incommensurable en longueur à la
rationelle DE. Et d'autant que comme AC à CB, ainsi le quar-

ré de AC au rectangle de AC & CB, par la 1. p. 6. Il est evident par la 10. p. 10. que le quarré sera incommensurable au rectangle (estans les deux lignes incommensurable en longueur. Mais par la 16. p. 10. au quarré de AC est commensurable le composé des quarrés de AC, CB; & au rectangle de AC, CB est commensurable son double: Donc le composé des quarrés de AC, CB, c'est à dire le rectangle de DK est incommensurable au double du rectangle de AC, CB; c'est à dire au rectangle LF. par le scholie de la 14. p. 10. parquoy les lignes DL LG qui sont en mesme raison que DK, LF sont incommens. en longit. par la 10. p. 10. mais elles sont rationeles: & partant commens. en puissance seulement: & par la 37. p. 10. DG est binome.

Je dis d'avantage qu'il est binome troisieme. Car il a esté demonstté que les deux noms sont incommens. en longueur à la rationele DE: Et se prouvera comme à la 61. p. que DL peut plus que LG du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur: & par les secondes def. DG est binome troisieme.

SCHOLIE.

AB soit $\sqrt{72} + \sqrt{8}$, & DE 4. Donc DH sera $\sqrt{72}$, IK $\sqrt{8}$, & LN ou MF $\sqrt{24}$, qui appliquez sur DE; DI sera $\sqrt{4}$, IL $\sqrt{1}$, & LM ou MG $\sqrt{1}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{8}$, & LG $\sqrt{6}$. Parquoy la toute DG est $\sqrt{8} + \sqrt{6}$, qui est binome troisieme.

THEO. 46. PROP. LXIII.

Le quarré d'une ligne maieur, appliqué sur une ligne rationele, faict l'autre costé binome quatrieme.

Soit la ligne maieur AB, diuisee en ses noms en C, dont le plus grand soit AC. (apres avoir construit comme en la 61. p. de ce liure). Je dis que DG est binome quatrieme.

Car puis que AB est ligne maieur, par la 40. p. AC, & CB sont incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial; & le composé de leurs quarrés rationel: partant

le rectangle DK egal au composé d'iceux quarré est aussi rationel, lequel estant appliqué sur la rationele DE, son autre costé DL sera aussi rationel cōmens. en longitude à icelle DE par la 21. p. 10. Item le rectangle LF double du rectangle de AC, CB sera medial, lequel apliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, par la 21. p. 10. LG sera rationele incommensurable en longitude à DE. Et partant par la 13. p. 10. Les rationeles DL & LG, seront incommensurable en longitude. Donc commensurable en puissance seulement: & par la 37. p. 10. DG est binome.

Je dis d'avantage qu'il est binome quatriesme. Car puis que les lignes AC & CB sont incommens. en puissance, leurs quarré seront incommens. partant aussi leurs egaux rectangles DH, IK, & les lignes DL, & IL incommens. Et d'autant que nous demonstrerons comme en la 61. p. que DL est plus grande que LG, & sur DL est appliqué le rectangle de DI, IL egal au quart du quarré de LG, & defaillant d'une figure quarrée, lequel divise icelle DL en parties incommensurables en longitude, par la 19. p. 10. DL, qui est commensurable en longitude à la rationele DE, peut plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude, & par les secondes def. DG est binome quatriesme.

S C H O L I E.

La ligne majeure AB soit $\sqrt{10 + \sqrt{37\frac{1}{2}}} + \sqrt{10 - \sqrt{37\frac{1}{2}}}$, & la rationele DE soit 5. Donc le rectangle DH sera $10 + \sqrt{37\frac{1}{2}}$, IK $10 - \sqrt{37\frac{1}{2}}$: LN ou MF $\sqrt{62\frac{1}{2}}$, qui appliquez sur DE, le costé DI sera $2 + \sqrt{1\frac{1}{2}}$, IL $2 - \sqrt{1\frac{1}{2}}$, & LM ou MG $\sqrt{2\frac{1}{2}}$. Parquoy DL sera 4. & LG $\sqrt{10}$; & par consequent la route DG est $4 + \sqrt{10}$, qui est binome quatriesme.

THEOR. 47. PROP. LXV.

Le quarré d'une ligne pouuant vn rationel & vn medial, appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé binome cinquiesme.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuisee en ses noms au point C, dont le plus grand est AC (apres auoir construit comme à la 61.p.) Je dis que DG est binome cinquieme.

Car puis que AB est ligne pouuant vn rationel, & vn medial, AC, CB, par la 41.p.10. sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarez medial : Partant le rectangle DK egal au composé d'iceux quarez est aussi medial, lequel estant appliqué sur la rationelle DE, son autre costé DL sera aussi rationel commensurable en puissance seulement à icelle DE par la 23. p. 10 Item le rectangle de AC, CB estant rationel, son double LF sera aussi rationel, & par la 21.p.10. Iceluy LE est, appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationelle DE, son autre costé LG, sera ligne rationelle com. en longi. à icelle DE; & par la 13.p. 10. les rationelles DL, LG seront com. en puissance seulement, & par la 36. p. 10. DG sera binome. Je dis de plus, qu'il est binome cinquieme. Car LG est commens. en longueur à la rationelle DE, & si on prouuera comme en la precedente, que DL peut plus que LG, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & par les secondes definitions DG est binome cinquieme.

S C H O L I E.

La ligne AB soit $\sqrt{125+5} + \sqrt{125-5}$, & la rationelle DE 5. Donc le rectangle DH sera $\sqrt{125+5}$, IK $\sqrt{125-5}$, & LN, ou MF 10, qui appliqué sur DE, le costé DI sera $\sqrt{5+1}$, IL $\sqrt{5-1}$, & LM, ou MG 2. Parquoy DL sera $\sqrt{10}$, & LG 4. & par consequent la taute DG est $\sqrt{20+4}$, qui est binome cinquieme.

THEOR. 48. PROP. LXVI.

Le quarré d'une ligne pouuant deux medians appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome sixieme.

Soit la ligne pouuant deux medians AB, diuisee en ses noms au point C, dont le plus grand est AC. (Après auoir construit comme aux precedentes (ie dis que DG est binome sixieme.

Car puis que AB est ligne pouuant deux mediaux, par la 42. p. 10. AC, CB sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarez aussi medial : ainsi il est euident que DK & LF sont mediaux, & incommens. & par la 23. p. 10. iceux estans appliquez sur lignes rationeles, leurs autres costez DL, LG seront rationaux commensur. en puissance seulement à la rationele DE. Mais iceux costez DL, LG estans entr'eux comme les parallelogrammes DK, LF, lesquels sont incommens. seront aussi entr'eux incommens. en longueur, par la 10. p. 10. Donc les rationeles DL, LG seront incommens. en puissance seulement, & par la 17. p. 10. DG est binome, duquel les deux noms sont incommens. en longit. à la rationele DE : & comme il a esté demonsté aux precedentes, le plus grand d'iceux DL plus que le moindre LG, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longit. & par les secondes def. DG est binome sixiesme.

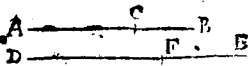
SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{252} + \sqrt{72}$, & $\sqrt{252} - \sqrt{72}$, & DE 6. Le rectangle DH sera donc $\sqrt{252} + \sqrt{72}$, & $\sqrt{252} - \sqrt{72}$, & LN, ou MFV 180, qui appliquez à DE, le costé DI est $\sqrt{7} + \sqrt{2}$, & LV $\sqrt{7} - \sqrt{2}$, & LM ou MG 5. Partant DL est $\sqrt{28}$, & LG $\sqrt{20}$; Et par consequent la toute DG est $\sqrt{28} + \sqrt{20}$, qui est binome sixiesme.

THEOR. 49. PROP. LXVII. Six. 6.

La ligne commens. en longueur au binome, est aussi binome de mesme ordre.

Soit quelconque binome AB diuisee en ses noms au point C, desquels AC est le plus grand, & CB le moindre : & soit la ligne droite DE, commensurab. en longueur au binome AB. Je dis que DE est aussi binome, & de mesme ordre que AB.



Car ayant fait par la 12. p. 6. comme la toute AB est à la toute DE, ainsi la retranchée AC à la retranchée DF, par la 19.

p. 5. le reste CB sera au reste FE, comme la toute AB à la toute DE. Et pource que AB, DE, sont commens. en longit. par la 10. p. 10. AC, DF, & CB, FE, seront aussi commens. en long. Mais par la 17. p. 10. AC, CB, sont rationeles. Donc aussi DF, FE sont rationeles. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en changeant comme AC sera à CB, ainsi DF à FE. Mais AC, CB sont rationeles commensur. en puissance seulement: donc aussi DF, FE seront rationeles commens. en puissance seulement. Et partant par la 37. p. 10. DE est binome. Maintenant ie dis qu'il est aussi binome de mesme ordre que AB.

Car si AC peut plus que CB du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longueur, aussi par la 15. p. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Et si AC est commens. en longueur à la rationele proposee, aussi sera DF par la 12. p. 10. Veu que l'une & l'autre est commens. en longueur à la mesme AC: Et partant AB, & DE seront binome premier: si BC est commens. en longueur à la rationele exposee, aussi sera FE: ainsi AB & DE seront binome second: si AC & BC sont incommens. en longueur à la rationele, aussi seront DF & FE, & par les def. AB & DE seront binome troisieme. Que si AC peut plus que CB du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en longueur, aussi par la 15. p. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Parquoy nous demonstrerons comme dessus, que AB, DE, seront binome ou quatrieme, ou 5. ou 6. Partant AB, DE, seront binomes de mesme ordre.

THEOR. 50. PROP. LXVIII.

La ligne commens. en longueur à une bimediale, est aussi bimediale de mesme ordre.

Soit quelconque bimediale AB, diuisee en ses noms au point C, desquels AC est le plus grand, & CB le plus petit, & icelle AB soit commensurable en longueur la ligne DE. Ie dis qu'elle est aussi bimediale de mesme ordre qu'icelle AB.

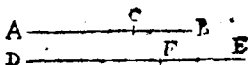
Car (apres avoir construit comme en la precedente) le reste CB sera au reste FE, come la toute AB, à la toute DE: & partant par la 6. p. 10. AC sera com. en long. à DF, & CB à FE. Mais AC, CB sont mediales: donc par la 24. p. 10. DF, FE, commens. à icelles sont aussi mediales. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en changeant comme AC à CB, ainsi DF à

FE. Mais AC, CB sont commens. en puissance seulement, par la 38. p. 10. Donc aussi DF, FE seront commensurables en puissance seulement, par la 10. p. 10. mais elles sont aussi mediales: & partant par la 38. ou 39. p. 10. DE sera bimédiale. D'avantage ie dis qu'elle est en mesme ordre que AB. Car d'autant que comme AC est à DF, ainsi BC à FE, par la 22. p. 6. Le carré de AC sera au carré de DF, comme le rectangle de AC, BC, est au rectangle de DF, FE, (estant iceux rectangles semblables, d'autant qu'ils ont les costez prop.) Mais le carré de AC est commensurable au carré de DF, ainsi par la 10. p. 10. les rectangles seront aussi commens. que si l'un est rationel, l'autre le sera aussi. Et partant AB, & DE seroient bimediales premières, par la 38. p. 10. Que si l'un des rectangles est medial, l'autre sera aussi medial, & AB & DE seront bimediales secondes, par la 39. p. 10. Ainsi DE sera bimédiale, & en mesme ordre que AB.

THEOR. 51. PROP. LXIX.

La ligne commens. à vne ligne majeure, est aussi ligne majeure.

Soit la ligne majeure AB, diuisee en ses noms en C, & à icelles soit commens. DE. Ie dis qu'elle est aussi ligne majeure.



Car (apres auoir construit comme aux precedentes) AC sera à CB cōme DF à FE, & AC commens. à DF & CB à FE: mais par la 41. p. 10. AC & CB sont incommens. en puissance; aussi DF & FE seront incommens. Item puis que icelles lignes AC, CB, DF, FE sont prop. par la 22. p. 6. leurs quarez seront proportionnaux: & en composant, les deux de AC & BC seront au seul de CB, cōme les deux de DF & FE, sont au seul de FE, & en changeant les deux quarez de AC, & CB, seront aux deux de DF & FE, comme le seul de CB est au seul de FE. Mais les lignes CB, FE estans commens. leurs quarez seront aussi commens. & partant les deux de DF & FE, seront par la 10. p. 10. commens. aux deux de AC & BC: & seront rationaux comme iceux. Itē on prouuera comme en la precedente que le rectangle de DF

& FE est commensurable au rectangle de AC & BC : lequel estant medial, par la 40. p. 10. aussi sera celui de DF & FE, par le corol. de la 24. p. 10. Parquoy DE sera ligne maieure.

THEOR. 52. PROP. LXX.

La ligne commensurable a vne ligne pouuant vn rationel, & vn medial; est aussi ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

Soit la ligne AB pouuant vn rationel & vn medial, diuisee en ses noms en D, & à icelle soit commens. la ligne DE. Je dis qu'elle est aussi pouuant vn rationel & vn medial.

Car (apres telle construction qu'aux precedentes) on prouuera que comme AC & BC sont incommens. en puissance, aussi seront DF & FE. Item les quarez de AC & BC composez seront commens. au composé des quarez de DF & FE; & le rectangle de AC & BC sera commens. au rectangle de DF & FE: Mais par la 41. p. 10. le composé des quarez de AC & BC est medial, & leur rectangle rationel: Partant le composé des quarez de DF & FE sera aussi medial, & leur rectangle rationel: & DE sera ligne pouuant vn rationel, & vn medial, par la 40. p. 10.

THEOR. 53. PROP. LXXI.

La ligne commensurable à vne ligne pouuant deux mediaux; est aussi ligne pouuant deux mediaux.

Soit la ligne AB pouuant deux mediaux, diuisee en ses nbs au point C, & à icelle soit commens. DE. Je dis qu'elle est aussi ligne pouuant deux mediaux.

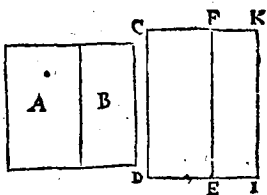
Car (apres construction faicte comme aux precedentes) on prouuera tout de mesme que DF & FE sont incommens. en puissances que le composé de leurs quarez est medial, & leur rectangle medial: Mais puis que le composé des quarez de

AC & BC, est ou composé des quarréz de DF & FE, comme le quarré de CB au quarré de FE : & que par la 22. p. 6. comme le quarré de CB au quarré de FE, ainsi le rectangle de AC & BC, au rectangle de DF & FE, par la 11. p. 5. Le composé sera au composé, comme le rectangle au rectangle : Et en changeant, comme le composé des quarréz de AC & BC est incommens. à leur rectangle, aussi le composé des quarréz de DF & FE est incommens. à leur rectangle, & par la 42. p. 10. DE est ligne pouuant deux mediaux.

THEOR. 5. PROP. LXXII. Six. 7.

Si vne superficie rationelle, & vne mediale sont ioinctes, la ligne qui peut tout le composé est binome, ou bimediale premiere, ou ligne maieure, ou ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

Soient ioinctes deux superficies A rationelle & B mediale : ie dis que la ligne qui peut toutes les deux est binome, ou bimediale premiere, ou ligne maieure, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.



Car premierement les deux superficies ne scauroient estre egales (car ou elles feroient toutes deux rationelles, ou toutes deux mediales). Soit donc premierement A plus grande que B : Et sur la rationelle CD soit appliqué le rectangle CE egal à A : & sur EF vn autre rectangle FI egal à B. Et puis que A est rationelle, & B mediale, aussi CE sera rationel, & FI medial, lesquels estans appliquez à la rationelle CD; CF sera rationelle commens. en longir, à icelle CD par la 21. p. 10. & aussi FK rationelle, mais incommens. en longir, à CD par la 23. p. 10. & par la 13. p. 10. les rationelles CF, FK seront incommens. en l'ogitude, donc commens. en puissance seulement : & par la 37. p. 10. CK sera binome diuise en ses noms en F. Et par la 1. p. 6. CE estant plus grande que FI : CF sera le plus grand nom, lequel peut plus que FG du quarré d'une ligne qui luy est co-

menfou incommenf. en long. Si commenf. (eftant CF commenf. en longitude à la rationele CD) CK fera binome premier par la 1. des feconde def. Et par la 55. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eft binome. Si incommenf. CK fera binome quatriefme, par la 4. des fecondes def. & par la 58. p. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle CI eft ligne maieure. Que fi A eft plus petit que B, auffi CE fera plus petit que FI, & CF fera le plus petit nom commenf. à la rationele CD : & par ce moyen CK fera binome fecond ou cinquieme : fi binome fecond, par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eft bimediale premiere. Si binome cinquieme, par la 59. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eft ligne pouuant vn rationel & vn medial.

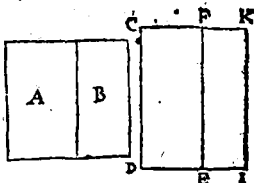
S C H O L I E.

Si la superficie rationele A eft 7, & la mediale BV 48. la ligne pouuant icelles adioutees enfemble fera $2 + \sqrt{3}$, qui eft binome premier: fi A & B font 21 & 432, la ligne pouuant icelles fera $\sqrt{12} + 3$, qui eft binome fecond: mais elle fera $\sqrt{8} + \sqrt{6}$, qui eft binome troisieme, si A eft 14. & B $\sqrt{192}$: mais si A eft 6, & B $\sqrt{32}$, elle fera $2 + \sqrt{2}$, qui eft binome quatriefme: si A eft 3 & B 8, elle fera $\sqrt{2} + 1$ qui eft binome cinquieme: & si A eft 5, & B $\sqrt{24}$, la ligne pouuant la compofee d'icelles fera $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ qui eft binome 6. mais si A eft 4 & B 18, la ligne pouuant la superficie compofee d'icelles fera $\sqrt{7} + \sqrt{2}$, qui eft mediale premiere: mais si A eft 6. & B 12, la ligne pouuant la compofee d'icelles fera $\sqrt{6 + 12}$ ou $\sqrt{3 + 6} + \sqrt{3 - 6}$: & finalement si A eft 2, & B 8, la ligne pouuant icelles fera $\sqrt{8 + 2}$, ou $\sqrt{2 + 1} + \sqrt{2 - 1}$, qui eft ligne pouuant vn rationel & vn medial.

THEOR. 55. PROP. LXXIII.

Si deux superficies mediales incommensurables font iointes, la ligne qui peut tout le compofé eft bimediale feconde, ou ligne pouuant deux mediaux.

Soient les deux superficies mediales incommens. A & B : Le dis que la ligne qui peut toutes les deux est bimediale seconde, ou ligne pouvant deux mediaux.



Soit faite construction comme en la precedente sur la rationele CD : les rectangles C

E & FI seront mediaux & incommens. Et par la 22. p. 10. CF FK seront rationeles commens. en puissance seulement entr'elles, & à la rationele CD : & par la 37. p. 10. CK sera binome. Soit donc CF le plus grand nom : Car CE & FK ne scauroient estre egales, d'autant qu'elles sont incommens. en longueur : Donc CF peut plus que CG du quarré d'une ligne qui luy est commens. ou incommens. en longueur. Si commens. CK est binome troisieme par la 3. d. secondes (estans les deux noms incommens. en longueur à la rationele) & par la 57. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est bimediale seconde : Si incommens. CK, par la 6. des secondes def. sera binome sixieme : & la ligne qui peut le rectangle CI est par la 60. p. 10. ligne pouvant deux mediaux.

S C H O L I E.

Si A est $\sqrt{50}$, & B $\sqrt{48}$. la ligne pouvant la composee d'icelles sera $\sqrt{18} + \sqrt{8}$, qui est bimediale seconde : mais si A est $\sqrt{12}$, & B $\sqrt{8}$. ladite ligne pouvant icelles sera $\sqrt{12} + \sqrt{8}$, ou bien $\sqrt{3} + 1$ & $\sqrt{3} - 1$, qui est ligne pouvant deux mediaux.

C O R O L A I R E.

De toutes ces choses on peut facilement colliger que le binome, & les autres lignes irrationeles qui suyuent icelle, sont differentes entr'elles, & à la mediale. Car le quarré d'une ligne mediale, appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre costé rationel commens. en puissance seulement à la rationele à laquelle il est appliqué par la 23. p. 10.

Mais le quarré d'un binome, fait l'autre costé binome premier par la 61. p. 10.

Le quarré d'une bimediale premiere, fait l'autre costé binome se-

cond. par la 62. p. 10.

Le carré d'une bimediale seconde, fait l'autre costé binome troisième, par la 63. p. 10.

Le carré d'une ligne majeure, fait l'autre costé binome quatrième, par la 64. p. 10.

Le carré d'une ligne pouvant un rationel & un medial, fait l'autre costé binome cinquième, par la 65. p. 10.

Le carré d'une ligne pouvant deux mediaux, fait l'autre costé binome sixième, par la 66. p. 10.

Mais il faut toujours entendre qu'ils soient appliquez sur une ligne rationelle. Et puis que tous ces costez sont differens entr'eux, il est manifeste que toutes icelles lignes irrationelles sont differentes entre-elles.

ICY COMMENCENT LES sixaines des lignes irrationelles par le retranchement.

THEOR. 56. PROP. LXXIV.

Si d'une ligne rationelle, est retranchée une ligne rationelle commens. en puissance seulement à la toute; le reste est irrationel: Soit appelé Residu.

Soit retranchée de la rationelle AB la rationelle AC, en sorte que AB & AC, soient rationelles commens. en puissance seulement: Je dis que le reste CB est irrationel.



Car par la 1. p. 6. comme AB est à AC, ainsi le carré de AB est au rectangle de AB & AC: mais AB est incommensura. en longueur à AC. Donc par la 10. p. 10. Le carré de AB est incommens. au rectangle de AB & BC: Partant aussi à son double: mais les carrés de AB & AC, sont posez commens. Donc par la 16. p. 10. les deux, ensemble seront commens. au seul de AB: & partant puis que le carré de AB est incommens.

furable au double du rectangle de AB, AC, par la 14 p. 10. les quarez de AB & AC, seront aussi incommens. à deux fois le rectangle de AB & AC, lesquels avec le quarré de CB, estans egaux, aux 2 quarez de AB & AC par la 7. p. 2. il s'ensuivra que le quarré de CB avec deux fois le rectangle de AB, & AC seront incommensurable à iceux deux rectangles : Et par le corol.^e de la 17. p. 10. deux fois le rectangle avec le quarré de CB, (ou les deux quarez de AB & AC) seront incommens. au quarré de CB; Mais iceux quarez de AB, AC, estans rationaux (car ils sont descrits sur lignes rationeles) le quarré de CB sera irrationel: Partant la ligne CB sera aussi irrationele appelee Residu.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 2 & AC $\sqrt{3}$: Donc le reste BC sera $2 - \sqrt{3}$. Or en ceste prop. Et és suivantes, ou Euclide monstrel l'origine des Apotomes ou residus, il ne veut dire autre chose, sinon que si aux lignes dont il s'agit és prop. 37. 38. 39. 40. 41. & 42, on retranche le plus petit nom du plus grand, ce qui restera est irrationel appelee residu, &c.

THEOR.^e 57. PROP. LXXV.

Si d'une ligne mediale, est retranchee vne mediale commens. en puissance seulement à la toute, comprenant avec la toute vn rectangle rationel; le reste est irrationel: Soit appelle residu medial premier.

Soit la mediale AC, de laquelle est retranchee la mediale AB  en sorte que AB & AC sont mediales commens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel: Je dis que le reste BC est irrationel,

Car puis que AB & AC sont mediales, leurs quarez seront mediaux, & partant incommens. au double du rectangle de AB & AC, lequel est rationel: Et par la 7. p. 2. deux fois le rectangle de AB & AC avec le quarré de BC estans egaux aux

quarrez de AB & AC, seront incommens. au double du rectang. de AB & AC, & par la 17. p. 10. le carré de BC sera incommens. au double du rectangle AB & AC, lequel estant rationnel, le carré de BC sera aussi irrationnel; & partant la ligne BC aussi irrationnelle, qu'on appellera *residu medial premier*.

SCHOLIE.

La mediale AC soit $\sqrt{54}$, & la retranchée AB $\sqrt{24}$: dont le reste BC sera $\sqrt{54} - \sqrt{24}$.

THEOR. 58. PROP. LXXVI.

Si d'une ligne mediale est retranchée vne ligne mediale commens. en puissance seulement à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial; le reste est irrationnel: Soit appelé *residu medial second*.

Soit la mediale AB, de laquelle est retranchée la mediale AC, en sorte que AB & AC soient commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial: Je dis que le reste CB est irrationnel.

Car puis que les quarrez de AB & AC sont commensurab. par la 16. p. 10. le composé d'iceux sera aussi commensur. à vn chacun d'eux: & chacun d'iceux estant medial; pource que les lignes AB, AC sont posées mediales) aussi le composé d'iceux quarrez est medial par le coroll. de la 24. p. 10. comme aussi le double du rectangle de AB, AC, puis que le seul rectangle de AB, AC est posé medial. Veu donc que par la 7. p. 2. le composé des quarrez de AB, AC, est égal au double du rectangle de AB, AC avec le carré de CB: le composé des quarrez de AB, AC, qui est medial, excèdera le double du rectangle de AB, AC, qui est aussi medial, du carré de CB. Mais par la 27. p. 10. vn medial n'excède pas vn medial, d'un rationnel: donc le carré de CB n'est pas rationnel; & partant il est irrationnel; & la ligne BC sera aussi irrationnelle, qu'on appellera *residu medial second*.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

La mediale AB soit $\sqrt{18}$, & AC $\sqrt{18}$: donc le reste CB sera $\sqrt{18} - \sqrt{18}$.

THEOR. 59. PROP. LXXVII.

Si d'une ligne droite est retranchée une ligne droite incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial, & le composé de leurs quarrés rationnel; le reste sera irrationnel: Soit appelé ligne Mineure.

Soit la ligne droite AC;
de laquelle est retranchée AB
incommensurable en puissance à la



toute AC, comprenant avec icelle un rectangle medial, & le composé de leurs quarrés est rationnel: Je dis que le reste BC est irrationnel.

Car puisque le composé des quarrés de AB, & AC est rationnel, il est incommensurable au rectangle de AC & AB, lequel est medial: partant aussi au double d'iceluy rectangle. Mais par la 7. p. 2. le composé des quarrés de AB, AC est égal au double du rectangle de AB, AC, ensemble au quarré de CB: donc par le corol. de la 17. p. 10. le composé d'iceux quarrés de AB, AC sera aussi incommensurable au quarré de CB. Et puis qu'iceluy composé est posé rationnel, par la 10. d. le quarré de BC est irrationnel, & la ligne BC irrationnelle, qu'on appellera ligne mineure.

SCHOLIE.

Soit la ligne AC $\sqrt{18 + \sqrt{108}}$. & AB $\sqrt{18 - \sqrt{108}}$: le reste BC sera donc $\sqrt{18 + \sqrt{108}} - \sqrt{18 - \sqrt{108}}$.

THEOR. 60. PROP. LXXVIII.

Si d'une ligne droite est retranchée une

ligne droiſte incômmeſurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel, & le compoſé de leurs quarrez medial, le reſte ſera irrationel : ſoit appellé ligne faiſant avec vne ſuperficie rationelle vn tout medial.

Soit la ligne droiſte AC, de laquelle eſt retranchée AB incômmeſ. en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel, & le compoſé de leurs quarrez eſt medial : Je diſ que le reſte BC eſt irrationel.

Car puis que le rectangle de AB & AC eſt rationel, auſſi ſera ſon double, & partant par la 10. d. il ſera incômmeſurable au compoſé des quarrez de AC & AB, lequel eſt medial, c'eſt à dire irrationel. Mais le compoſé d'iceux quarrez par la 7. p. 2. eſt egal au double du rectangle de AB, AC, enſemble au quarré de BC. Donc auſſi le double du rectangle de AB, AC eſt incômmeſurable au double d'iceluy rectangle avec le quarré de BC : Et par la 17. prop. 10. iceluy double rectangle ſera auſſi incômmeſ. au quarré de BC. Et puis que iceluy double rectangle eſt rationel, par la 10. d. le quarré de BC ſera irrationel, & la ligne BC irrationele. appellée ligne faiſant avec vne ſuperficie rationele, vn tout medial, ainſi nommée à cauſe que le quarré d'icelle ligne adiouiſté avec vne ſuperficie rationele fait vn tout medial comme il apparoitra à la 109. p. 10.

SCHOLIE.

Si AC eſt $\sqrt{(\sqrt{216} + \sqrt{72})}$ & AB $\sqrt{(\sqrt{216} - \sqrt{72})}$; le reſte BC ſera $\sqrt{(\sqrt{216} + \sqrt{72}) - \sqrt{(\sqrt{216} - \sqrt{72})}}$

THEOR. 61. PROP. LXXVIII.

Si d'une ligne droiſte, eſt retranchée vne ligne droiſte incômmeſurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle me-

dial ; incommensurable au composé de leurs quarez aussi medial, le reste est irrationel : soit appelé ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne droite AB, de laquelle est retranché la ligne A C incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial incommensurable au composé de leurs quarez aussi medial: le dis que le rectangle BC est irrationel.

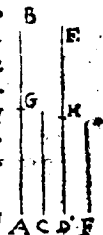
Car puis que par la 7. p. 2. le composé des quarez de AB, AC, est egal au double du rectangle de AB, AC, avec le quarré de BC: iceluy composé des quarez excédera le double du rectangle, du quarré de BC. Mais par la 27. p. 40. vn medial, n'excede pas vn medial d'un rationel : Donc le quarré de BC n'est pas rationel, & partant est irrationel; & la ligne BC aussi irrationele, qu'on appellera ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial : ainsi appelée parce que le quarré d'icelle avec vne superficie mediale fait vn tout medial, comme il apparoitra à la 110. p. 10.

S C H O L I E.

Si AB est $\sqrt{(180 + \sqrt{60})}$ & AC $\sqrt{(180 - \sqrt{60})}$ le reste CB sera $\sqrt{(\sqrt{180 + \sqrt{60}} - \sqrt{180 - \sqrt{60}})}$

L E M M E.

S'il y à quatre grandeurs AB, C, DE, F, & que GB excéde d'entre AB & C soit egal à DH excéde d'entre DE & F; aussi en changeant l'excéde d'entre AB & DE sera egal à l'excéde d'entre C & F. Car puis que GB est l'excéde d'entre AB & C, AG sera egal à C : En la mesme maniere DH sera egal à F. Donc l'excéde d'entre AG & DH sera egal à l'excéde d'entre C & F, puis que ces grandeurs cy sont egales à celles-là, chacune à la sienne, & partant adionstant à AG & DH choses egales GB & HF, l'excéde d'entre les toutes AB, & DE sera tousiours egal à l'excéde d'entre C & F. Ce qui estoit proposé.



COROLLAIRE.

De ces choses appert que quatre grandeurs ayant proportion Arithmetique, en changeant elles seront aussi en proportion Arithmetique.

THEOR. 62. PROP. LXXX.

Au residu ne peut conuenir qu'une seule ligne rationele commens. en puissance seulement à la toute.

Soit le residu AB, auquel conuienne BC en sorte que AB & BC soient rationeles commens. en puissance seulement : Je dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne en la mesme sorte.

Car s'il est possible, en soit une autre BD, s'accordant avec icelle AB, en sorte que AD, & BD soient rationeles commensurables en puissance seulement. Maintenant par la 7. p. 2. les deux quarrés de AC, BC sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, BC du quarré de AB. Pareillement les deux quarrés de AD, & BD sont plus grands que deux fois le rectangle de AD, BD, du mesme quarré de AB; & en changeant par le lemme precedent, les quarrés excéderont autant les quarrés, que les rectangles excèdent les rectangles: & d'autant que les quarrés sont rationaux, leur excès sera rationel, par le lemme precedent la 43. p. 10. & passant les rectangles estans mediaux, (pource que par la 22. p. 10. un seul d'iceux rectangles est medial, & par le corol. de la 24. p. 10. son double est aussi medial) leur excès sera rationel contre la 27. p. 10. Donc à AB ne peut conuenir autre ligne qu'BC, rationele commensurable en puissance seulement à la toute.

THEO. 63. PROP. LXXXI.

Au residu medial premier, ne s'accorde qu'une

ne seule ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel.

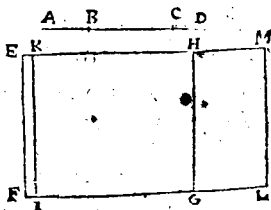
Soit le residu medial premier AB, auquel la mediale BC s'accorde en sorte que AC & BC, soient mediales commenç. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel. Je dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne que BC en la mesme sorte.

Car si faire se peut en soit vne autre BD. Maintenant par la 7. p. 2. il se prouuera comme en la preced. que l'excez d'entre le compo. des quarez de AB, BC, & le compo. des quarez de AD, BD, est tel que l'excez d'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre ces rectangles est rationel par le lemme qui precede la 43. p. 10. pource que chacun d'iceux est rationel: & partant l'excez d'entre les quarez qui sont mediaux (estans desormais lignes mediales) seroit aussi rationel, contre la 27. p. 10. Donc à AB n'a peu conuenir autre ligne mediale que BC, qui soit commenç. en puissance seulement à la toute, & comprenant avec icelle vn rectangle rationel.

THEOR. 64. PROP. LXXXII.

Au residu medial second, ne peut estre conioincte qu'une seule ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial.

Soit conioincte au residu medial second AB la mediale BC, commenç. en puissance seulement à la toute AC, & faisant avec icelle vn rectangle medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut pas conuenir vne autre ligne que BC, en la mesme sorte.



Car si faire se peut, en soit copioincte vne autre BD en la forte requise. Et sur la rationele proposee EF soit appliqué le rectangle EG égal aux deux quarrez de AC, BC; & à la mesme EF soit encore appliqué EI égal au carré de AB: parquoy par la 7. p. 2. le reste KG sera égal à deux fois le rectangle de AC, BC. Itē sur la mesme rationele soit encore appliqué le rectangle EL égal aux deux quarrez de AD, BD: Et puisque le rectangle EI est égal au carré de AB: aussi KL sera égal à deux fois le rectangle de AD, DB, par la 7. p. 2.

Maintenant les quarrez de AC & BC sont mediaux (estans faicts de lignes mediales) & si deux fois le rectangle de AB & BD doit estre medial: partant leurs egaux rectangles EG, & KG seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationele EF, auront les autres costez EH, & KH rationaux commens. en puissance seulement à EF par la 13. p. 10. en apres le carré de AC estant au rectangle de AC, & BC, par la 1. p. 6. comme AC est à BC, qui sont incommens. en longueur: par la 10. p. 10. le carré de AC sera incommens. au rectangle de AC & BC: & partant aussi à son double KG. Item le carré de BC est commens. au carré de AC, & par la 16. p. 10. le rectangle EG égal à iceux quarrez, sera commens. au seul carré de AC, auquel KG est incommens. Et par la 14. p. 10. EG, & KG seront incommens. aussi seront les lignes EH & KH par la 1. p. 6. & 10. p. 10. lesquelles estans rationeles seront commens. en puissance seulement: & par la 74. p. 10. EK sera residu, & KH la conuenable. Par mesme discours (si on maintient que DC soit aussi adiointe à AB, selon le requis) EK se trouuera residu, & KM la conuenable: ce qui seroit contre la 80. p. 10. Donc au residu medial AB ne peut s'adjoindre autre conuenable que BC.

THEOR. 65. PROP. LXXXIII.

A la ligne mineure, est conuenable vne seule ligne incommens. en puissance à la route, comprenant avec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle conuienne BC incommens. en puissance à

A B C D

la route AC, & faisant le composé de leurs quarrez rationel, & le rectangle compris d'icelles AC, BC, medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut estre adioincte autre ligne que BC selon le requis.

Car si faire se peut en soit adioustee vne autre BD selon le requis. Il se prouuera comme en la 80. p. 10. qu'il y a mesme excez entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, qu'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre les quarrez est rationel par le lemme qui suit la 42. prop. 10. pource que l'un & l'autre composé est rationel: donc aussi l'excez d'entre les rectangles sera rationel, contre la 17. p. 10. Car iceux rectangles estas mediaux l'excez d'iceux ne peut estre rationel. Donc à la ligne mineure AB on n'a peu adiouster autre ligne conuenable que BC.

THEOR. 66. PROP. LXXXIII.

A la ligne faisant avec vne superficie rationelle vn tout medial, s'accorde vne seule ligne incommensurable en puissance à la route, comprenant avec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarrez medial.

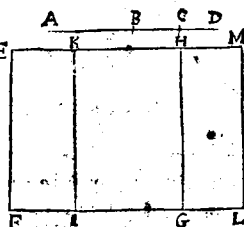
Soit la ligne faisant avec vne superficie rationelle vn tout medial AB, à laquelle s'accorde la ligne BC, incommensurable en puissance à la route AC, & comprenant avec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarrez medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut s'accommoder autre ligne que BC, qui soit selon le requis.

Car s'il est possible en soit encore vne autre BD: il se prouuera comme en la 80. p. 10. que les quarrez de AC, & BC, excèdent les quarrez de AB & BD d'un mesme excez, que deux fois le rectangle de AC & BC, excèdent deux fois le rectangle de AB, & BD, lequel excez comme en la precedente seroit rationel & irrationel si à AB, on pouuoit encore adioindre BD selon le requis.

THEOR. 67. PROP. LXXXV.

A la ligne faifant avec vne fuperficie mediale vn tout medial , fe conioinct vne feule incommenfurable en puiffance à la toute , cōprenant avec icelle vn rectangle medial, incommenfurable au compofé de leurs quarrez auffi medial.

Soit la ligne faifant avec vne fuperficie mediale vn tout medial AB, à laquelle s'accorde BC incommenf. en puiffance à la toute AC, & comprenant avec icelle vn rectangle medial incommenfurable au compofé de leurs quarrez, qui eft auffi medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut s'adijoindre autre ligne que BC, qui faffe le requis.



Car fi faire fe peut en foit adioustee vne autre BD. Puis soit fait mefme construction qu'en la 82. p. 10. Donc le compofé des quarrez de AC & BC eftant medial & incommenfurable à deux fois le rectangle de AC & BC auffi medial, leurs egaux rectangles EG, & KG feront mediaux, & incommenfurable: Et par la 23. p. 10. eftans appliquez fur la rationelle EF leurs autres coftez EH, & KH feront lignes rationeles, & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. commēfurables en puiffance feulemēt (puis que leurs rectangles font incommenfurables,) & par la 74. 10. EK fera refidu auquel KH fera conuenablement adioustee. Par mefme discours (fi on dit que BD foit auffi conuenable à AB felon le requis) EK fe trouuera refidu, & KM fa conuenable: ainfi le refidu EK n'auroit pas vne feule conuenable, cōtre la 80. p. 10. On ne pouuoit donc pas adjoindre à AB, autre ligne conuenable que BC.

DEFINITIONS TROISIÈMES.

*Estant proposée vne ligne rationele, & le residu:
Lors la toute composée du residu, & de sa conue-
nable ou adioustee, peut plus que la conuenable,
du quarré d vne ligne qui luy est commensurable
en longitude.*

1. Si la toute est commensurable à la rationel-
le proposée; le residu soit appelé residu pre-
mier.

2. Mais si l'adioustee est commensurable, à la
rationele exposée; Soit residu second.

3. Que si ny l vne ny l'autre n'est commensu-
rable à la rationelle proposée; Soit residu troi-
siesme.

*Derechef lors que la toute peut plus que l'adioustee,
du quarré d vne ligne qui luy est incommensura-
ble en longitude.*

4. Si la toute est commensurable à la rationel-
le proposée; Soit residu quatriesme.

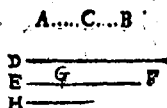
5. Mais si l'adioustee est commensurable à la
rationele; Soit residu cinquiésme.

6. Que si ny l vne ny l'autre n'est commensu-
rable à la rationele; Soit residu sixiésme.

PROBL. 19. PROF. LXXXVI.

Trouuer vn residu premier.

Estans trouuez deux nombres quarrez AB, CB, (comme nous auons enseigné au 1. scholie de la 29. p. 10.) desquels l'excez AC ne soit quarré, soit exposée la rationele D, à laquelle EF soit commensurab. en longitude: & partant icelle EF sera aussi rationele: puis apres par le corol. de la 6. p. 10 soit fait que comme le nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF soit au quarré de GF. Je dis que EG est residu premier.



Car puis que les quarrez de EF, GF qui sont comme nombre à nombre, sont commens. par la 6. p. 10. aussi les lignes EF, GF seront comm. au moins en puissance: & EF étant rationele, GF le sera aussi. Mais d'autant que AB, AC ne s'entr'eux comme nombres quarrez: aussi les quarrez de EF, GF ne seront comme nombres quarrez: & partant par la 9. p. 10. les lignes EF, GF sont incommens. en longitude: elles sont donc rationeles commens. en puissance seulement, & partant le reste EG sera residu par la 74. p. 10.

Je dis d'auantage qu'il est residu premier: car EF étant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle GF, soit du quarré de H. Et puis que come le nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF, au quarré de GF, par conuersion de raison comme AB sera à CB, ainsi le quarré de EF sera au quarré de H. Mais AB, CB sont nombres quarrez: Donc les quarrez de EF & H sont comme nombres quarrez: & partant par la 9. p. 10. les lignes EF, & H sont commens. en longitude. Ainsi la toute EF, commensur. en longitude à la rationele D, peut plus que la conuenable GF, du quarré de la ligne H qui luy est commens. en longitude: & partant par la 1. d. des troisieme, EG sera residu premier.

S C H O L I E.

La rationele D soit 9. EF 6: AB 9, CB 4, & par consequent AC est 5: faisant donc que comme 9 est à 5, ainsi le quarré de EF, c'est à dire 36, soit au quarré de FG; icelle FG sera 20: & partant le reste EG sera 6—120, qui est residu premier.

PROB. 20. PROP. LXXXVII.

Trouuer vn residu deuxiesme.

Estans trouuees deux nombres quarrez AB, CB, (comme en la precedente proposition) & l'exposee rationele D, soit prise GF commens. en longitude à icelle D, laquelle sera aussi rationele: puis soit fait comme le nombre AC, est au nombre AB, ainsi le carré de GF soit au carré de EF par le corol. de la 6. p. 10. Je dis que E G est residu second.

Car puis que les quarrez de GF, EF, ayans la raison des nombres AC, AB, sont commens. par la 6. p. 10. les lignes GF, EF seront aussi commens. au moins en puissance: & GF estant rationele, EF sera aussi rationele. Et d'autant que les nombres AC, AB, & partant aussi les quarrez de GF, EF, ne sont comme nombres quarrez, par la 9. p. 10. GF, EF, incommens. en longit. donc les rationeles GF, EF, sont commens. en puissance seulement: & partant par la 74. p. 10. le reste EG est residu.

Je dis aussi qu'il est residu second. Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, & soit du carré de H. Donc puis que comme AC est à AB, ainsi le carré de GF au carré de EF: & en changeant cōme AB à AC, ainsi le carré de EF au carré de GF. Maintenant nous demonstrerons comme en la precedente prop. que la ligne H est commensurable en longitude à icelle EF. Parquoy puis que la route EF, peut plus que l'adioustee GF, du carré de H, qui luy est commens. en longit. comme aussi à la rationele proposee D; par les troisiemes def. EG, sera residu second.

S C H O L I E.

La rationele D soit 9, FG 5, AB 9, CB 4. & par consequent AC 5: faisant donc que comme AC 5 est AB 9, ainsi le carré de GF soit au carré de EF: icelle EF sera 45: & partant EG sera 45-5, qui est residu second.

P R O B. 21. P R O P. LXXXVIII.

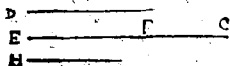
Trouuer vn residu troisieme.

Ayant trouué les deux nombres quarrez AB, CB, comme en la prop. 36. soit pris vn autre nombre I. Comme nous auons enseigné en la 51. prop. de ce liure) qui ne soit à l'un ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre carré à nombre carré:

puis estant exposee la rationele D
soit fait que comme I est à AB, le
quarré de D soit au quarré de EG,
lesquels quarez par la 6. p. 10. se-
ront commensurables: & partant
les lignes D & EG, aussi commen-
surables au moins en puissance.

A.....C.....B

I.....



Donc D estant rationele, aussi EG sera rationele. Et d'au-
rant que les nombres I & AB, & partant les quarez de D &
EG, ne sont en raison de nombres quarez, par la 9. p. 10. les
lignes D & EG seront incommensur. en longueur. Derechef
soit fait que comme AB est à AC, ainsi le quarré de E soit
au quarré de GF. Je dis que EF est residu troisieme.

Car puis que les quarez de EG, GF, estans comme nom-
bre à nombre, sont commensurables par la 6. p. 10. les lignes
EG, GF seront aussi commensurables au moins en puissance.
Mais EG estant rationele, GF le sera aussi. Et puis que AB,
AC, & partant aussi les quarez de EG, GF, ne sont comme
nombres quarez, par la 9. p. 10. les lignes EG, GF, seront in-
commensurables en longueur. Donc EG, GF sont ratione-
les commensurables en puissance seulement: & partant puis
que de EG, est ostee GF commens. en puissance à icelle, par la
74. p. 10. le reste EF sera residu.

Je dis qu'il est aussi residu troisieme: Car puis que comme
I est à AB, ainsi le quarré de D, au quarré de EG, & comme
AB à AC, ainsi le quarré de EG au quarré de GF, en raison
egale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D au quarré de
GF. Or les nombres I & AC ne sont comme nombres quar-
rez: ny par consequent aussi les quarez de D & GF: parquoy
par la 9. p. 10. les lignes D & GF sont incommensurables en
longueur. Donc l'une & l'autre d'icelles EG, GF est incom-
mensurable en longueur à la rationele proposee D. Et com-
me en la 86. p. on prouera que EG peut plus que GF du quar-
ré de la ligne H, qui luy est commensurable en longueur: Et
par les tierces def. EF sera residu troisieme.

S C H O L I E.

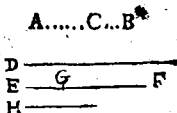
La rationele D soit 6, & soit fait que comme le nombre 16, est à
AB9, ainsi le quarré de D, sçavoir 36, soit au quarré de EF, & iceluy
sera 54, & par consequent la ligne EF √ 54. Mais faisant que comme

AB 9, est à AC 5, ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG, icelle FG sera $\sqrt{30}$, & par consequent EG sera $\sqrt{54} - \sqrt{30}$, qui est residu troisieme.

PROBL. 22. PROP. LXXXVIII.

Trouuer vn residu quatriesme.

Estans trouuez (comme nous auons enseigné au 3. scholie de la 29. prop. 10.) deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB ne soit à l'un ny à l'autre AC, CB, comme nombre quarré à nombre quarré. soit proposée la ratio-



nele D. à laquelle soit commensurable en longueur EF, laquelle sera par consequent aussi rationele. Que si on achue de construire comme en la 86. p. on demonst.era comme là que EG est residu : & d'auantage ie dis qu'il est residu quatriesme.

Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, soit du quarré de H. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de GF : par conuersion de raison comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais les nombres AB, CB, ne sont comme nombre quarré à nombre quarré : donc par la 9. p. 10. les lignes EF & H seront incommens. en longi. Farquoy la route EF peut plus que l'adiouctée GF, du quarré de H qui luy est incommensurable en longueur, & la mesme EF, est commens. en longueur à la rationele D : partant par la def. EG sera residu quatriesme.

S C H O L I E.

La rationele D soit 9, EF 6: faisant donc que comme AB 9 est à AC 6, ainsi 36 quarré de EF soit au quarré de FG, icelle sera $\sqrt{24}$, & par consequent le reste EG sera $6 - \sqrt{24}$, qui est residu quatriesme.

PROB. 23. PROP. XC.

Trouuer vn residu cinquieme.

Estans trouuez les deux nombres AC, CB, comme en la prop. preced. soit fait mesme construction qu'en la 87. p. puis soit demõstré comme en icelle 87. p. que EG est residu. Je dis qu'il est aussi residu. Car EF peut plus que G du quarré de H: Et comme en la 86. p. nous demonstrexõs par conuersion de raison, que comme AB est à CB, ainsi le quarré de EF est au quarré de H: & comme en la precedente les lignes EF & H serõnt incommens. en longitude: & la conuenable GF commens. en long. à la rationele D. Parquoy par les def. troisiẽmes EG sera residu cinquiẽme.

S C H O L I E.

La rationele D soit 9, EG 6. faisant que comme AC 6, est à AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF, iceluy sera 54 & par consequent la ligne EF √54; & le reste EG √54 — 6, qui est residu cinquiẽme.

PROB. 24. PROP. XCI.

Trouuer vn residu sixiẽme.

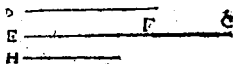
Estans trouuez les trois nombres AG, CB, & I, comme en la 54.

prop. & exposé la rationele D, soit acheuee la construction comme en la 88. prop. Nous demonstrexõs cõme là, que D & EG sont incommens. en longit. & que EF est

residu: puis que D & FG seront aussi incommens. en longitude, & partant l'une & l'autre d'icelles EG, FG est incommens. en longitude à la rationele proposee D. Maintenant EG, peut plus que FG du quarré de la ligne H, laquelle nous demonstrexõs comme en la 89 p. estre incommens. en longitude à icelle EG. Parquoy par la derniere des 3. d. EF sera residu sixiẽme.

A.....C.....B

I.....



S C H O L I E.

La rationele D soit 9; & soit fait que comme 19 est à AB 12, ainsi 81 quarré de D soit au quarré de EF; lequel sera trouu. de 108, & par consequent icelle sera √108; & faisant que comme AB.2 est à

AC 7. ainsi 108 soit au quarré de FG ; icelle FG sera $\sqrt{63}$. & par consequent le reste EG sera $\sqrt{108} - \sqrt{63}$. qui est residu sixiesme.

Or nous trouuerons encores (comme enseigne Theon) les six residus susdits, ainsi qu'il ensuit.

S'il faut trouuer pour exemple le residu premier : soit trouué par la 49. p. 10. le binome premier AD, auquel le plus grand nom est AC, & le moindre CD; puis soit couppé de AC la ligne CB égale à CD. Je dis que AB est residu premier. Car d'autant que AC, CD, sont rationeles commensurable en puissance seulement; aussi AC, BC seront rationeles commensurables en puissance seulement : Donc par la 7. p. 10. AB est residu. Et parce que AC p. ut plus que CD, ou CB du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur, & AC est commens. en longueur à la rationele proposee par la d. f. du binome premier; AB sera residu premier par la 1. des tierces des. Par la mesme maniere seront trouuez tous les autres residus, sçauoir est le 2. si du second binome nous osons le moindre nom du plus grand, &c.

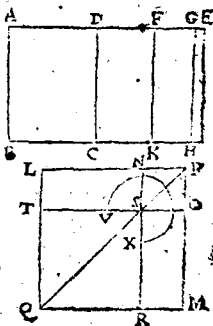
Ainsi ayant trouué le binome premier AD $9 + \sqrt{45}$, si du plus grand nom AC 9. on est le moindre nom, restera le residu AB de $9 - \sqrt{45}$. & ainsi des autres.

THEOR. 68. PROP. XCII. Six. 4.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un residu premier; la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du residu premier AC. Je dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Au residu AB soit sa conuenable DE, laquelle soit couppée en deux également au point F, & apres auoir appliqué vn rectangle sur la ligne AE defaillant d'une figure quarrée, c'est à dire d'une ligne égale à son autre costé, & égal au quart du quarré de DE, qui est le quarré de FE, soit iceluy rectangle compris sous AG,



GE: en apres soient menees les lignes FK, GH, EI paralleles à AB, qui rencontrent la ligne BC prolongee en K, H & I, puis soit fait le quarré LM egal au rectangle AH, & le quarré NO, egal au rectangle EH, ayant avec LM l'angle LP. M commun. Donc les quarrés LM, NO, par la 26. p. 6. seront au long d'un mesme diametre, lequel soit PQ: soient continuees les lignes NS, OS, afin d'acheuer le gnomon VX: Maintenant FE est moyene proportion. entre AG & GE, par la 17. p. 6. car par hypothese le quarré de EF est egal au rectangle de AG & GE, & par la 1. p. 6. le rectangle KE sera milieu proportion. entre les deux rectangles AH & HE; il se fera aussi entre leurs egaux quarrés LM & NO. Mais par le lemme de la 54. p. 10. le rectangle LO, est aussi milieu proportion. entre iceux quarrés: Donc KE, ou DK son egal, sera egal au rectangle LO; Et par consequent KG à LS, (estant HE egal à NO.) Ice-luy GK sera aussi egal à SM: ainsi le rectangle DH sera egal au gnomon VX. Mais tout le quarré LM: est egal au rectangle AH. Partant le rectangle AC sera egal au quarré TR. Je dis que la ligne TS: qui peut le rectangle AC est residu. Soit ceste construction generale à toute la sixaine: •

Car puisque AD est residu premier, & DE sa conuenable: les deux lignes AE & DE, sont rationeles commens. en puissance seulement, estant la toute AE commens. en longueur à la rationele AB, & pouuant plus que l'adioustee DE, du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur: Et par la 18. p. 10. le rectangle defaillant aura les deux costez AG, & GE commens. en longueur, & par la 16. p. 10. Ils seront commensurables en longueur à la totale AE, laquelle estant commensurable en longueur à la rationele AB, par la 12. p. 10. AE, AG, GE, AB seront toutes rationeles commens. en longueur: & par la 20. p. 10. les rectangles AH & HE seront rationaux, & leurs egaux quarrés LM & NO aussi rationaux, & les lignes TO & SO rationeles.

Pareillement les deux lignes DF & FE estans egales, & commens. elles le seront aussi à leur toute DE, par la 16. p. 10. Laquelle DE estans rationele; DF, & FE seront aussi rationeles commens. en puissance seulement à AB, comme leur toute DE; & par la 21. p. 10. leurs rectangles CF & KE seront mediaux. Mais le rectangle LO est egal au medial KE, partant aussi medial, & incommens. au quarré rationel NO. Et par la 1. p. 6. & 10. p. 10. leurs costez TO & SO seront incommens. en longueur: & pour autant qu'ils sont rationaux, ils seront com. en puissance seulement, & par la 74. p. 10. T S est residu.

SCHOLIE.

S C H O L I E.

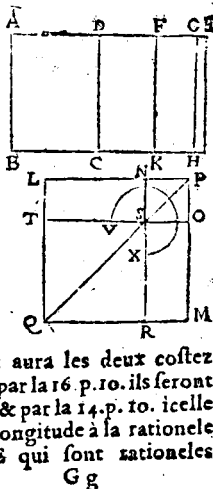
La rationele AB soit 8, & AD 9— $\sqrt{45}$: DE est donc $\sqrt{45}$, & sa moitié DF $\sqrt{11\frac{1}{4}}$: mais AG sera $7\frac{1}{2}$, & GE $1\frac{1}{2}$. Donc rectangle BF est 72, AH 60, HE 2, CF $\sqrt{720}$, & AC $\sqrt{2880}$, & le rectangle de AG, GE est $11\frac{1}{4}$. Parquoy le quarré LM sera 60, & NO 12: & partant la ligne LP est $\sqrt{60}$, & NP $\sqrt{12}$: & par consequent LN, ou TS sera $\sqrt{60}$ — $\sqrt{12}$, qui est residu, & son quarré TR est 72— $\sqrt{2880}$, egal au rectangle AC.

THEOR. 69. PROP. CXIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un residu second; la ligne qui peut iceluy rectangle, est residu medial premier.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du residu second AD (le dis) apres avoir construit comme en la precedente) que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, est residu medial premier.

Car puis que AD est residu second, & DE la conuenable, les deux lignes AE & DE sont rationeles commensurables en puissance seulement, la conuenable DE estant com. en long. à la rationele AB; & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur, & par la 18. p. 10. Le rectangle defaillant aura les deux costez AG & GE commens. en longueur, & par la 16. p. 10. ils seront aussi commensurables à la totale AE, & par la 14. p. 10. icelle totale estant incommensurable en longueur à la rationele AB, aussi seront AG, & GE qui sont rationeles



(car elles sont commens. à leur totale qui est rationele) commensurable en puissance seulement à la rationele AB, & par la 22 p. 10. les rectangles AH & HE seront mediaux ; partant mediaux leurs egaux quarrés LM & NO, & leurs costez TO & SO seront lignes mediales.

Pareillement DE estant commens. en longitude à la rationele AB, aussi sera sa moitié FE, & par la 20. p. 10. le rectangle KE sera rationel : partant aussi rationel son egal rectangle LO, compris des deux mediales TO & SO, lesquelles sont incommens. en longitude : (autrement leur rectangle seroit medial par la 25. p. 10.) & par la 75. p. 10. TS est residu medial premier.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 4, AD $\sqrt{45}$ — 5 : DE est donc 5, & sa moitié DF $2\frac{1}{2}$, & par consequent le quarré d'icelle DF ou FE est $6\frac{1}{4}$, auquel estant egal le rectangle de AG, GE, icelles seront $\sqrt{31\frac{1}{4}}$ & $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: parquoy le rectangle HE, ou quarré NO sera $\sqrt{10}$: & partant son costé SO est $\sqrt{20}$. Mais puis que la ligne AE est $\sqrt{45}$, & AG $\sqrt{31\frac{1}{4}}$: le rectangle BE sera $\sqrt{720}$, & AH, ou le quarré LM $\sqrt{500}$: & par consequent la ligne TO est $\sqrt{500}$: de laquelle estant ostée SO, restera TS $\sqrt{500}$ — $\sqrt{20}$, qui est residu medial premier, & son quarré TR est $\sqrt{720}$ — $\sqrt{20}$. Mais le rectangle AC est autant : car multipliant AB 4 par AD $\sqrt{45}$ — 5, viendra aussi $\sqrt{720}$ — $\sqrt{20}$. Donc TS residu medial premier peut le rectangle AC.

THEOR. 70. PROP. XCIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu troisieme ; la ligne pouvant iceluy rectangle, est residu medial second.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du residu troisieme AD (apres avoir construit comme en la 92. p. 10.) Je dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, est residu medial second.

Car puis que AB est residu troisieme, & DE sa conuenable, les lignes AE & DE sont rationeles commensu. en puissance.

THEOR. 71. PROP. XCV.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu quatriesme; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne mineure.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du residu quatriesme AD: (apres construit comme en la 92. p. 10.) Je dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC est ligne mineure.

Car puis que AD est residu quatriesme, & DE sa convenable, les lignes AB & DE, sont rationeles commens. en puissance seulement; & AE qui est commens. en longueur à la rationele AB, peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur: & par la 19. p. 10. AG & GE seront incommens. en longueur: partant par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les rectangles AH & HE seront incommens. aussi seront donc leurs egaux quarrés LM & NO: partant les lignes TO & SO seront incommens. en puissance: Mais AE étant commensurable en longueur à la rationele AB, par la 10. p. 10. le rectangle AI sera rationel: partant aussi rationel sera le composé de leurs egaux quarrés LM & NO. Pareillement DE étant commensurable en puissance seulement à AB, le rectangle CE sera medial par la 22. p. 10. aussi sera sa moitié KE: & par conséquent son egal LM sera aussi medial: partant les deux lignes TO & SO, qui comprennent iceluy rectangle, mediales (estans incommens. en puissance) & le composé de leurs quarrés étant rationel, par la 77. p. 10. TS est ligne mineure.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 6, AD 9— $\sqrt{54}$; donc DE est $\sqrt{54}$, & sa moitié DF $\sqrt{11}$, son quarré 11, lequel appliqué sur AE 9, & desfaillant d'une figure quarrée, les costez AG, GE seront $4\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{2}}$ & $4\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{1}{2}}$. Parquoy le rectangle AC sera $54 - \sqrt{1944}$, BE 54, AH $27 + \sqrt{243}$, DK $\sqrt{486}$, & HE $24 - \sqrt{243}$. Mais le quarré LM étant egal à AH, sera aussi $27 + \sqrt{243}$, NO egal à HE $27 - \sqrt{243}$: & partant leurs costez TO, SO sent $\sqrt{(27 + \sqrt{243})}$ & $\sqrt{(27 - \sqrt{243})}$: & par conséquent TS est $\sqrt{(27 + \sqrt{243}) - \sqrt{(27 - \sqrt{243})}}$, & son quarré TR $54 - \sqrt{1944}$, egal au rectangle AC.

THEO. 72. PROP. XCVI.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un residu cinquieme; la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant avec une superficie rationelle vn tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationelle AB, & du residu cinquieme AD: (apres auoir construit comme en la 92. p. 10.) Je dis que TS qui peut iceluy rectangle AC, est ligne faisant avec une superficie rationelle, vn tout medial.

Car puis que AB est residu cinquieme, & DE sa conuenable, les lignes AE, & DE sont rationelles commensurables en puissance seulement, & DE est commensurable en longueur à la rationelle AB, & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur, & par la 19. p. 10. Les lignes AG & GE sont incommensurables en longueur: & comme en la precedente TO & SO seront incommensurables en puissance. Mais AE estant incommensurable en longueur à la rationelle AB, le rectangle AI sera medial par la 22. p. 10. partant aussi medial le composé de leurs egaux quarrés LM, & NO.

Pareillement DE estant commensurable en longueur à la rationelle AB, par la 10. p. 10. le rectangle CE sera rationel, aussi sera sa moitié KE, & son egal LO, compris de deux lignes incommensurables en puissance TO & SO, desquelles le composé de leurs quarrés fait vn tout medial, & par la 78. p. 10. TS sera ligne faisant avec une superficie rationelle vn tout medial.

S C H O L I E.

La rationelle AB soit 4, AD $\sqrt{54} - 6$: donc DE est 6, & sa moitié DF 3, son quarré 9, auquel estant egal le rectangle de AGE: AG sera $\sqrt{13\frac{1}{2}} + \sqrt{4\frac{1}{2}}$ & GE $\sqrt{13\frac{1}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{2}}$. Mais le rectangle AC sera $\sqrt{864} - 24$, BE $\sqrt{864}$, AH $\sqrt{216} + \sqrt{72}$, DK 12, & HE $\sqrt{216} - \sqrt{72}$: ainsi le quarré LM sera $\sqrt{216} + \sqrt{72}$, NO $\sqrt{216} - \sqrt{72}$. &

leurs cossez $TO, SO, \sqrt{\sqrt{216+72}}$, & $\sqrt{\sqrt{216-72}}$, & par conséquent TS est $\sqrt{\sqrt{216+72}} - \sqrt{\sqrt{216-72}}$, & son quarré TR sera $\sqrt{864} - 24$.

THEOR. 73. PROP. XCVII.

• Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu sixiesme; la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

Soit le rectangle AC , compris de la rationele AB , & du residu sixiesme AD (apres avoir construit comme en la 92. p. 10.) Je dis que TS qui peut iceluy rectangle AC , est ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

Car puis que AD est residu sixiesme, & DE la convenable; AE & DE sont rationeles commensurables en puissance seulement entr'elles, & à la rationele AB ; & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur: Et par la 19. p. 10. AG & GE seront incommensurable en longueur: Et comme en la 95. p. 10. TO & SO seront incommens. en puissance, & tout ainsi qu'en la precedente le rectangle AI estant medial, le compose de leurs egaux quarrés LM & NO , sera aussi medial: Item DE estant commensu. en puissance seulement à AB rationele, par la 22. p. 10. le rectangle CE sera medial: aussi sera donc la moitié KE , & son egal LO . Et AE, DE estans incommens. en longueur, par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les rectangles AI, CE , seront incommensurables, & puis que CE est commens. à la moitié KE , par la 14. p. 10. KE sera incommens. à AI : Et partant le medial LO (egal à KE) compris des lignes TO & SO incommens. en puissance, est incommensu. au compose des quarrés d'icelles TO & SO (egal à AI) medial: Parquoy par la 79. p. 10. le reste TS sera ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

SCHOLIE.

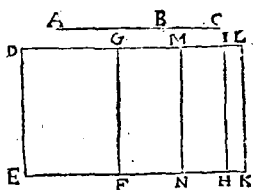
La rationele AB soit 6, $AD \sqrt{108} - \sqrt{63}$: donc DE est $\sqrt{63}$, & sa moitié $DF \sqrt{15\frac{1}{2}}$, son quarré $15\frac{1}{2}$, $AG \sqrt{27} + \sqrt{11\frac{1}{2}}$, $GE \sqrt{27} -$

VII: mais le rest. AC sera $\sqrt{3888}$ — $\sqrt{2268}$, BE $\sqrt{3888}$, AH $\sqrt{972}$ + $\sqrt{405}$, DK $\sqrt{567}$, & HE $\sqrt{972}$ — $\sqrt{405}$: ainsi le quarré LM sera $\sqrt{972}$ + $\sqrt{405}$, NO $\sqrt{972}$ — $\sqrt{405}$, & leurs costez TO, SO, seront $\sqrt{972}$ + $\sqrt{405}$, & V $\sqrt{972}$ — $\sqrt{405}$: & par consequent TS est $\sqrt{972}$ + $\sqrt{405}$ — $\sqrt{972}$ — $\sqrt{405}$, & son quarré TR $\sqrt{3888}$ — $\sqrt{2268}$.

THEOR. 74. PRO. XCVIII. Six. 5,

Le quarré d'un residu appliqué sur une ration-
nelle, fait l'autre costé residu premier.

Soit le residu AB, & BC sa
conuenable, tellement que AC,
BC soient rationeles. commensu-
rables en puissance seulement: &
sur la rationele DE soit appliqué
le rectangle DF egal au quarré
de AB. Je dis que l'autre costé D
G est residu premier.



Car sur la mesme rationele DE
 soit appliqué le rectangle DH egal au quarré de AC : & sur
 IH vn autre rectangle IK egal au quarré de BC, tellement
 que le total DK est egal au composé des quarréz de AC, BC;
 lequel estant egal par la 7.p.2. à deux fois le rectangle de AC,
 CB, ensemble avec le quarré de AB, si on oste le quarré de AB
 & le rectangle DF; restera GK egal à deux fois le rectangle
 de AC, CB: partant GL estant coupee en deux également
 en M, & tiré MN parallele à DE: MK sera egal au rectangle
 de AC, CB. Et pource que AC, CB sont rationeles, leurs
 quarréz seront aussi rationaux, & partant commens. & par la
 16.p.10. le composé d'iceux quarréz est commensu. à vn cha-
 cun d'eux: & partant iceluy composé, ou DK son egal, est ra-
 tionel, lequel estant appliqué sur la rationele DE, par la 21.
 p.10. DL sera rationele commens. en longit. à icelle DE. De-
 rechef puis que AC, CB sont rationeles commens. en puissan-
 ce seulement, le rectangle d'icelles, & partant aussi son dou-
 ble GK, sera medial: & iceluy estant appliqué à la rationele
 GF, par la 23.p.10. GL sera rationele incommens. en longi-

tude à GF, ou DE : Et puis que DK rationel, & GK medial, c'est à dire irrationel, sont incommensurab. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les lignes DL, GL, seront aussi incommens. en longueur. Parquoy puis qu'elles ont esté demonstrees rationeles, elles seront commensurab. en puissance seulement; & partant par la 74. p. 10. le reste DG sera residu. Je dis d'avantage qu'il est residu premier.

Car puis que par le lemme de la prop. 54. le rectangle de AC, CB, ou son egal MK, est moyen prop. entre les quarrés de AC, CB, c'est à dire entre DH, IK : DH, MK, IK seront continuellement proportionaux; & par consequent aussi les lignes DI, ML, IL. & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL est egal au quarré de ML, c'est à dire au quart du quarré de GL, par le scholie de la 4. p. 2. Et puis que les quarrés de AC, CB, ou leurs egaux rectangles DH, IK, sont commens. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les lignes DI, IL, seront commens. en longit. Parquoy puis que les lignes DL, GL sont inegales, & à la plus grande DL est appliqué le rectangle de DI, IL, egal à la quatre partie du quarré de GL, & defaillant d'une figure quarrée, par la 18. p. 10. DL pourra plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur; & par la 1. des 3. def. DG sera residu premier.

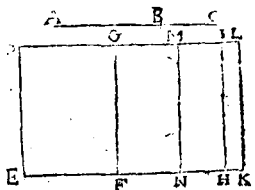
SCHOLIE.

Le residu AB soit $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, & BC $\sqrt{12}$: donc la toute AC est $\sqrt{60}$: mais la rationele DE soit 8, sur laquelle estant appliqué le quarré de AB, qui est $72 - \sqrt{2880}$, l'autre costé DG sera $9 - \sqrt{45}$: aussi DI sera 7, IL 1, DL 9 & GL $\sqrt{45}$, & GM $\sqrt{11}$: Ainsi le rect. DK sera 72, DH 60, IK 12, GN $\sqrt{710}$, GK $\sqrt{2880}$, & DF $71 - \sqrt{2880}$.

THEOR. 75. PROP. XCIX.

Le quarré d'un residu medial premier, appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé residu second.

Soit le residu medial premier AB, duquel la conuenable soit B C, tellement que AC, BC, soient mediales commens. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle rationel: & sur la rationele DE soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de DB. Je le dis que l'autre costé DG est residu second.



Car soit construit ainsi qu'en la precedente, tellement que derechef DH, IK, soient egaux aux quarrés de AC, BC, & GK double du rectangle compris d'icelles lignes AC, BC, & partant MK egal à vne fois le rectangle de AC, BC. Veu donc que les lignes AC, CB, sont mediales dommens. en puissance seulement; les quarrés d'icelles, ou leurs egaux rectangles D H, IK, seront aussi mediaux & commens. & partant par la 16. p. 10. le tout DK sera aussi commens. à chacun d'iceux: Donc aussi medial, par le corol. de la 24. p. 10. Et par la 23. p. 10. DL sera rationele commensurable en puissance seulement à DE: & d'autant que le rectangle de AC, BC est rationel, son double GK sera aussi rationel: & par la 21. p. 10. GL sera rationele commensurable en longitude a DE rationele, & les deux rectangles DK, & GK estans incommens. (car l'un est rationel, l'autre medial) les rationeles DL & GL seront commensurables en puissance seulement, & par la 74. p. 10. DG sera residu: lequel je dis estre aussi second. Car on prouera de mesme qu'en la precedete, que la toute DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude, & partant par les tierces definitions DG est residu second.

SCHOLIE.

Le residu medial premier AB soit $\sqrt{500}$ — $\sqrt{20}$, & BC $\sqrt{20}$: la toute AC sera donc $\sqrt{500}$: & estât appliqué sur la rationele DE 4. le quarré de AC, qui est 500, l'autre costé DL sera $\sqrt{31}$, & si à la mesme DE est appliqué IK egal au quarré de BC, qui est 20, IL sera $\sqrt{1}$: ainsi la toute DL sera $\sqrt{45}$. Derechef appliquant à DE le rect. GN egal au rect. de ACB, qui est 10, l'autre costé GM sera $2\frac{1}{2}$, & son double GL 5: parquoy DG sera $\sqrt{45}$ — 5. qui est residu second.

THEOR. 76. PROP. C.

Le quarré d'un residu medial second , appliqué sur vne ligne rationele , faict l'autre costé residu troisiésme.

Soit le residu medial second AB, auquel conuienne BC, tellement que AC, BC, soient mediales commensurables en puissance seulement, & contiennent vn rectangle medial : Et sur la rationele DE , soit appliqué le rectangle DF. Je dis que l'autre costé DG est residu troisiésme.

Cár (ayant construit comme en la 98.p.10.) on démontrera comme en la precedente que le rectangle DK est medial, & partant par la 23.p.10. son autre costé DL sera rationnel communurable en puissance seulement à la rationele DE. Item le rectangle de AC, BC estant medial, aussi sera son double GK, & par la 23.p.10. GL sera aussi rationele communurable en puissance seulement à la rationele DE : Et puis que AC, BC sont incómens. en longitude, le quarré de AC sera incommensurable au rectangle de AC, BC, par la 1.p.6. & 10.p.10. partant aussi à s^d double GK : Mais le quarré de AC est aussi commun. au quarré de BC : (pource qu'iceux quarrés sont descriptz sur lignes communurables en puissance :) & partant par la 16.p.10. le composé d'iceux quarrés, c'est à dire DK, sera aussi com au quarré de AC, auquel est incó. GK, parquoy par la 13.p.10. DK sera incom. a GK, & par la 10.p.10. les lignes DL, GL, ayât mesme raison que DK, GK serót incom. en lon. Mais estés rationeles, elles seront commens. en puissance seulement, & par la 74.p.10. BG sera residu. Mais n'y DL, ny GL ne sont communurable en longitude à la rationele DE, & si on prouuera comme en la 98.p.10. que DL peut plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude : Et par les tierces def. DG est residu troisiésme.

SCHOLIE.

Le residu medial second AB soit $\sqrt{V} 600$ — $\sqrt{V} 24$, & BC $\sqrt{V} 24$: la route AC sera donc $\sqrt{V} 600$: & appliquant sur la rationele DE 4, le rect. DH egal au quarré de AC, qui est $V 600$, l'autre costé DI se-

ea $\sqrt{37\frac{1}{2}}$; mais appliquant sur la mesme DE le rect. IK egal au quar-
 ré de BC, l'autre costé IL sera $\sqrt{1\frac{1}{2}}$; & partant la toute DL sera
 $\sqrt{54}$: & si derechef on applique sur la mesme DE le rect. GN egal
 au rectangle de ACB, qui est $\sqrt{120}$, l'autre costé GM sera $\sqrt{7\frac{1}{2}}$, &
 son double GL $\sqrt{30}$: parquoy DG est $\sqrt{54} - \sqrt{30}$, qui est residu troi-
 siesme.

THEOR. 77. PROP. CI.

Le quarré d'une ligne mineure, appliqué sur
 une ligne rationele, fait l'autre costé residu
 quatriesme.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle BC convienne, en for-
 te que AC, BC, soient incommens. en puissance, comprenant
 un rectangle medial, & le composé de leurs quarrés rationel,
 & le quarré d'icelle AB soit appliqué sur la rationele DE: ie
 dis que l'autre costé DG est residu quatriesme.

Car (apres avoir construit comme en la 98. p. 10. le rectagle
 DK sera rationel, & GK medial, par le discours des preceden-
 tes; & par la 21. p. 10. DL sera rationele, com. en long. a la ratio-
 nele DE; & GL, par la 23. p. 10. sera rationele com. en puissan-
 ce seulement à icelle rationelle DE: & puis que DK est ra-
 tionel, & GK medial, ils sont incommensurables, & par la
 10. p. 10. les lignes DL, GL qui sont en mesme raison que DK,
 GK, seront incommensurable en longueur. Mais elles sont
 rationeles, elles seront donc commensu. en puissance seule-
 ment: & par la 74. p. 10. DG sera residu.

D'auantage il est residu quatriesme. Car puis que les lignes
 AC, BC sont incommens. en puissance, leurs quarrés seront
 incommens. Aussi incommens. leurs egaux rectangles DH,
 IK, & par consequent incommens. les lignes DI, IL, costez
 du rectangle defaillant d'une figure quartee egale au quarré
 de ML, c'est à dire à la quarte partie du quarré de GL, comme
 il a esté démontré en la 98. p. 10. & par la 19. p. 10. DL (qui est
 commensu. en longueur à la rationele DE,) peut plus que la
 convenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommen-
 surable en longueur: & par les tierces definitions DG est re-
 sidu quatriesme.

SCHOLIE.

La ligne mineure AB soit $\sqrt{17 + \sqrt{243}} - \sqrt{17 - \sqrt{243}}$ & BC $\sqrt{17 - \sqrt{243}}$: la toute AC sera donc $\sqrt{17 + \sqrt{243}}$, le quarré de laquelle appliqué sur la rationele DE 6, l'autre costé DI sera $4\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{2}}$: mais estant appliqué sur la mesme DE, le rectangle IK, egal au quarré de BC, qui est $17 - \sqrt{243}$, l'autre costé IL sera $4\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera 9. Que si à la mesme DE on applique le rect. GN egal au rectang. de ACB, qui est $\sqrt{486}$, l'autre costé GM sera $\sqrt{11}$, & son double GL $\sqrt{54}$: & partant DG est $9 - \sqrt{54}$, qui est residu quatriesme.

THEOR. 78. PROP. CII.

Le quarré d'une ligne faisant avec une superficie rationele, un tout medial, appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre costé residu cinquieme.

Soit la ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial AB, de laquelle le quarré soit appliqué sur la rationele DE : Je dis que l'autre costé DG est residu cinquieme.

Car (apres avoir construit comme en la 98. p. 10.) AB étant ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial, & BC sa conuenable, les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance, comprenant un rectangle rationel, & le composé de leurs quarrés medial : partant le rectangle DK sera medial, & GK rationel, & par la 23. p. 10. DL sera rationele incommens. en longueur à la rationele DE : & par la 21. p. 10. GL sera aussi rationele, mais commens. en longit. à la rationele DE : Item les rectangles DK, GK estans incommensur. (car l'un est rationel, l'autre medial) les lignes DL, GL seront aussi incommens. en longueur. Mais icelles sont rationeles : elles seront donc commens. en puissance seulement, & par la 74. p. 10. DG sera residu. Mais GL étant commens. en longueur à la rationele D.E, & si comme en la precedete on prouuera que la toute DL peut plus que la conuenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur : & partant par les tierces def. DG est residu cinquieme.

SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{J(216+V72)} - \sqrt{J(216-J72)}$, & BC $\sqrt{J(216-J72)}$; la toute AC sera donc $\sqrt{J(216+J72)}$, le quarré de laquelle soit appliqué sur la rationele DE 4, & l'autre costé DI sera $\sqrt{13\frac{1}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{2}}$; mais étant appliqué sur la mesme rationele, le rectangle IK égal au quarré de BC, qui est $\sqrt{216-J72}$, l'autre costé IL sera $\sqrt{13\frac{1}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{2}}$; & partant la toute DL sera 854: Que si à la mesme rationele on applique le rect. GN ou MK, égal au rect. de ACB, qui est 12, l'autre costé ML sera 3, & son double GL 6: Parquoy DG sera $\sqrt{54}-6$, qui est residu cinquiesme.

THEOR. 79. PROP. CIII.

Le quarré d'une ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre costé residu sixiesme.

Soit la ligne AB, faisant avec une superficie mediale un tout medial, le quarré de laquelle AB soit appliqué sur la rationele DE: Je dis que l'autre costé DG est residu sixiesme.

Car (apres avoir construit comme en la 98. p. 10.) AB est une ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, & BC la convenable à icelle AB: les deux lignes AC, BC sont incommensurables en puissance, comprenant un rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrés aussi medial: partant les deux rectang. DK & GK sont mediaux & incommens. & par la 23. p. 10. DL, GL seront rationeles incommens. en longueur entr'elles, & à la rationele DE; & par conséquent incommens. en puissance seulement: & par la 74 p. 10. BG sera residu. Mais on peut prouver comme en la 101. p. 10. que la toute DL peut plus que la convenable GL, du quarré d'une ligne qui lui est incommensurable en longitude: & partant par les tierces def. GD est residu sixiesme.

SCHOLIE.

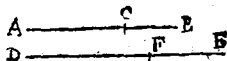
La ligne AB soit $\sqrt{J(972+V405)} - \sqrt{J(972-J405)}$, &

BCV (972— $\sqrt{405}$) : donc la toute AC sera $\sqrt{V}$ (972+— $\sqrt{405}$) : au quarré de laquelle soit egal le rectangle DH, appliqué sur la rationele DE 6 : l'autre costé DI sera donc $\sqrt{27+}$ $\sqrt{11\frac{1}{2}}$: mais estant appliqué sur la mesme rationele, le rect. IK egal au quarré de BC, qui est $\sqrt{972-}$ $\sqrt{405}$, l'autre costé IL sera $\sqrt{27-}$ $\sqrt{11\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{108}$: Si derechef on applique sur la mesme rationele le rectangle MK, ou GN, egal au rectangle de ACB, qui est $\sqrt{567}$ l'autre costé GM sera $\sqrt{15\frac{3}{4}}$, & son double $\sqrt{63}$: parquoy DG sera $\sqrt{108-}$ $\sqrt{63}$, qui est residu sixiesme.

THEOR. 80. PROP. CIIII. Six. 6.

La ligne commensurable en longitude à vn residu, est aussi residu, & de mesme ordre.

Soit le residu AC, auquel soit commenſ. en longitude la ligne droite DF. Je dis que DF est residu de mesme ordre que AC.



Car CB soit la conuenable au residu AC, tellement que AB, CB soient rationeles commensurables en puissance seulement, & par la 12. p. 6. soit fait que comme AC est à DF, ainsi CB soit à FE. Donc par la 12. p. 5. la toute AB sera à la toute DE, comme AC à DF, ou CB à FE : & par la 10. p. 10. comme AC est commensura. en longitude à DF, ainsi AB à DE & BC à FE. Et en changeant comme AB à BC, ainsi DE à FE. Maintenant comme AB & BC sont rationeles, aussi seront DE & FE : (car elles sont commensurables à icelles, par la 10. p. 10.) Mais AB & BC sont commensurables en puissance seulement : partant DE & FE seront aussi rationeles commensurables en puissance seulement, & par la 74. p. 10. DF est residu.

Je dis d'auantage qu'il est residu de mesme ordre que AC. Car la ligne AB peut plus que BC du quarré d'une ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude : si commensurable : aussi DE pourra plus que FE de mesme façon par la 15. p. 10. (estans les quatre lignes proport.) que si AB est commenſ. en lon. à une ligne rationele proposee, aussi DE qui luy est commenſ. en longitude sera commenſ. en longitude à la mesme rationele proposee par la 12. p. 10. Parquoy

AC & DF seront residus premiers : Que si BC est commens. en longitude à la rationele, aussi sera FE : & AC, DF seront residus seconds : si AB & BC sont incommensurables en longitude à la rationele : aussi seront DE & FE ; & AC, DF seront residus troisièmes. Que si AB peut plus que BC du carré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude : aussi DE pourra plus de mesme que FE par la 15. p. 10. & si AB est commensurable en longitude à la rationele ; aussi sera DE : & AC DF seront residus quatrièmes. Si BC est commensurable en longitude à la rationele, aussi sera FE : & AC DF seront residus cinquièmes. Si AB & BC sont incommensur. en longitude à la rationele, aussi seront DE & FE : partant AC & DF seront residus sixièmes : par ainsi DF est residu de mesme ordre que AC.

S C H O L I E.

Le residu AC soit $\sqrt{60}$ — $\sqrt{12}$, & DF $\sqrt{15}$ — $\sqrt{3}$. lesquelles sont commens. en longitude, l'une estant double de l'autre, & la convenable CB soit $\sqrt{12}$: Donc la toute AB est $\sqrt{60}$: & puis que comme A C est à DF, ainsi CB $\sqrt{12}$ est à FE ; icelle FE sera $\sqrt{3}$: & la toute DE $\sqrt{15}$ commens. seulement en puissance à DF.

THEOR. 81. PROP. CV.

La ligne commensurable à vn residu medial, est aussi residu medial de mesme ordre.

Soit la ligne DF commens. au residu medial AC : ie dis que icelle DF est aussi residu medial, & de mesme ordre que AC.

Car ayant fait construction qu'en la preced. prop. AB & BC seront cominens. à DE, lesquelles sont mediales commens. en puissance seulement, & par la 24. p. 10. DE & FE seront mediales commens. en puissance seulement, par la 10. p. 10. Et partant par la 75 ou 76. p. 10. DF est residu medial : ie dis d'avantage qu'il est de mesme ordre que AC.

Car le carré de AB est au rectangle de AB, BC comme AB à BC : Item le carré de DE est aussi au rectangle de DE, FE comme DE à FE, par la 1. p. 6. Mais le carré de AB est com-

menſau quarré de DE, eſtant AB & DE commenſ. & par la prop. 10. les deux rectangles ſeront auſſi commenſ. Que comme l'un ſera rationel ou medial, auſſi l'autre ſera rationel ou medial: partant ſi les rectangles ſont rationaux, AC & DF ſeront reſidus mediaux premiers: ſi les rectangles ſont mediaux, AC & DF ſeront reſidus mediaux ſeconds.

S C H O L I E.

*Le reſidu medial AC ſoit $\sqrt{1500}$ — $\sqrt{20}$, & DF $\sqrt{11}$ — $\sqrt{11}$:
BC ſera $\sqrt{20}$. & la toute AB $\sqrt{1500}$; mais FE ſera $\sqrt{11}$, & la toute
DE $\sqrt{11}$.*

THEOR. 82. PROP. CVI.

La ligne commenſurable à vne ligne mineure; eſt auſſi ligne mineure.

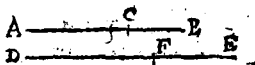
Soit la ligne DF, commenſ. à la ligne mineure AC: Je dis qu'icelle DF eſt auſſi ligne mineure. Car CB eſtant conuenable à icelle AC, & fait meſme conſtruction qu'en la 104 p. 10. AB & BC ſeront incommenſu. en puissance, comprenant un rectangle medial, & le compoſé de leurs quarréz rationel. Mais comme AB à CB, ainſi DE à FE, & par la 10. p. 10. DE & FE ſeront incommenſ. en puissance. Item puis que comme A B à BC, ainſi DE à FE, par la 22. p. 6. leurs quarréz ſeront proportionaux, & en compoſât comme le compoſé des quarréz de AB, BC ſera au quarré de BC, ainſi le compoſé des quarréz de DE, FE, ſera au quarré de FE; & en permutant comme le compoſé des quarréz de AB, BC ſera au compoſé des quarréz de DE, FE, ainſi le quarré de CB ſera au quarré de FE: leſquels quarréz de CB & FE ſont commenſ. (car les lignes B C & FE ſont commenſ. comme AC & DF, ainſi qu'il a eſté demonſtré à la 104. p. 10.) & partant par la 10. p. 10. le compoſé des quarréz de AB & BC, (lequel eſt rationel) ſera comméſurable au compoſé des quarréz de DE & FE, lequel ſera auſſi rationel. Parcillemeſt d'autant que comme nous auons dit à la prop. precedente, le quarré de AB eſt au rectangle de AB & BC, comme le quarré de DE au rectangle de DE & FE, & en changeant comme le quarré au quarré, ainſi le rectangle au rectangle

rectangle : c'est à dire commensur. Car les lignes AB & DE sont commens. par la 10. p. 10. & par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de AB & BC estant medial, celui de DE & FE sera aussi medial : partant DE & FE estant incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarréz rationel, par la 77. p. 10. DF sera ligne mineure.

THEOR. 83. PROP. CVII.

La ligne commensurable à vne ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial, est aussi ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.

Soit la ligne DF commensurable à la ligne AC, faisant avec vne superficie rationele vn tout medial. Je dis que DF est aussi ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.



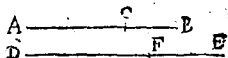
Car soit CB conuenable à AC, tellement que AB, CB soient incommens. en puissance, & fassent le composé de leurs quarréz medial, mais le rectangle compris d'icelles rationel : Et estant fait mesme construction qu'en la 104. p. on démontrera comme en la precedente que les lignes DE, FE sont incommens. en puissance ; & que le composé des quarréz de AB, CB est commens. au composé des quarréz de DE, FE. Mais celui là est medial : aussi sera donc cestuy-cy, par le corol. de la 24. p. 10. Derechef comme nous auons démontré en la 105. p. le rectangle de AB, CB, est commens. au rectangle de DE, FE : mais cestuy-là est posé rationel : aussi sera donc celui-cy par la 9. d. 10. Veu donc que DE, FE, sont incommens. en puissance, & font le composé de leurs quarréz medial, mais leur rectangle rationel, par la 78. p. 10. DF sera ligne faisant avec superficie rationele vn tout medial.

THEOR. 84. PROP. CVIII.

La ligne commensurable à la ligne faisant
Hh

auec vne superficie mediale vn tout medial, est
aussi ligne faisant auec vne superficie mediale
Vn tout medial.

Soit la ligne DF commens. à
la ligne AC , faisant auec vne su-
perficie mediale vn tout medial:
Je dis que DF est aussi ligne fai-
sant auec vne superficie media-
le vn tout medial.



Car à AC soit CB conuenable, tellement que AB , CB soient
incommens. en puissance, & facent le composé de leurs quar-
rez medial, & leur rectangle aussi medial, & incommens. au
composé de leurs quarrez: & ayant fait semblable constru-
ction qu'aux precedentes, on prouuera comme en la 106. p.
que les lignes DE , FE , sont incommens. en puissance, & que
le composé des quarrez de AB & BC , est commensurable au
composé des quarrez de DE & FE : & comme en la 105. p. que
le rectangle de AB & BC , est commensurable au rectangle de
 DE & FE . Mais le rectangle de AB , & CB est medial, & in-
commensurable au composé des quarrez de AB & CB , aussi
medial: partant par le scholie de la 14. p. 10. le rectang. de DE
& EF , sera medial, & incommens. au composé des quarrez de
 DE & FE , aussi medial: & DF sera ligne faisant auec vne su-
perficie mediale vn tout medial.

THEOR. 85. PROP. CIX.

Si d'une superficie rationele, est retranchée
vne superficie mediale: la ligne qui peut le re-
ste est residu, ou ligne mineure.

Soit la superficie rationele AB , (en la figure de la prop. sui-
uante) de laquelle soit retranchée la mediale A : Je dis que la
ligne qui peut le reste, B est residu, ou ligne mineure.

Qu'il ne soit ainsi. Sur la rationele proposée CD soit des-
crit le rectangle CE egal à A , & FI egal à B . Il est euident que
 CI sera rationel, & par la 21. p. 10. son autre costé CK sera ra-
tionel commens. en longueur à CD . Item par la 23. p. 10. CE

estant medial, CF sera rationele commenf. en puissance seulement à CD, & par la 13. p. 10. CK & CF seront rationeles commenf. en puissance seulement : & partant par la 74. p. 10. FK sera residu. Maintenant CK peut plus que CF du quarré d'une ligne qui luy est commenf. ou incommensur. en longit. Si commenf. FK sera residu premier : & la ligne qui peut le rectangle FI (ou son egal B) est residu par la 92. p. 10. Si incommensur. CK est residu quatriesme : & la ligne qui peut le rectangle FI, (ou son egal B) est ligne mineure. par 95. p. 10.

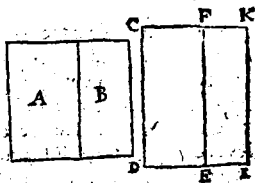
S C H O L I E.

Si le rectangle rationel AB est 32, le medial A $\sqrt{320}$, & la ligne rationele CD 6, sur laquelle est décrit le rect. CE egal à A, & FI egal à B : les costez CF, & FK, seront $\sqrt{8\frac{1}{2}}$ & $\frac{1}{3} \sqrt{8\frac{1}{2}}$: & partant la toute CK sera $\frac{4}{3} \sqrt{8\frac{1}{2}}$: & le rectangle CI 32, duquel ostant CE, qui est $\sqrt{320}$, le reste rectangle FI sera 32 — $\sqrt{320}$: & la ligne pouvant icy luy sera $\sqrt{(16 + \sqrt{176})} - \sqrt{(16 - \sqrt{176})}$, qui est ligne mineure.

THEOR. 86. PROP. CX.

Si d'une superficie mediale, est retranchée une superficie rationele, la ligne qui peut le reste, est residu medial premier, ou ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial.

Soit comme dessus la superficie mediale AB, de laquelle soit retranchée la rationele A. Je dis que la ligne qui peut le reste B, (apres avoir construit comme en la precedente) ou son egal FI, est residu medial premier, ou ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial.



Car puis que la superficie totale AB est mediale, aussi la totale CI est mediale, & par la 21. p. 10. Le costé CK est rationel commenf. en puissance seulement à la rationele CD.

H h ij

Item puis que le retranché A est rationel, aussi sera son égal CE, & par la 21. p. 10. CF sera rationele commensurable en longueur à la rationele CD: & par la 13. p. 10. CK & CF seront rationeles commensurables en puissance seulement; & partant par la 74. p. 10. FK sera aussi residu. Mais à cause que CK peut plus que CF du quarré d'une ligne qui luy est commensurable, ou incommensurable en longueur: FK sera residu second, ou residu cinquieme. Si residu second; la ligne qui peut le rectangle FI est residu medial premier par la 93. p. 10. si residu cinquieme, la ligne qui peut le rectangle FI, est ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial par la 96. p. 10.

S C H O L I E.

Si la superficie mediale AB est $\sqrt{800}$, & la rationele A 12; le reste B sera $\sqrt{800} - 12$, & la ligne pouvant iceluy sera $\sqrt{(\sqrt{800} - \sqrt{164})}$, qui est ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial.

THEOR. 87. PROP. CXI.

Si d'une superficie mediale, est retranchée une superficie mediale incommensurable à la toute; la ligne qui peut le reste est ou residu medial second, ou ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

Soit la superficie mediale AB, de laquelle soit retranchée la superficie mediale A, incommens. à la toute AB. Je dis que la ligne qui peut le reste B, est residu medial second, ou ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

Car ayant fait même construction qu'aux precedentes, les rectangles CI, CE seront mediaux & incommens. entreux; & par la 21. p. 10. les lignes CK, CF seront rationeles incommensurables en longueur à CD. Et puis que CI, CE. sont incommensurables rationeles CK, CF, qui sont en même raison que CI, CE; seront aussi incommensurables en longueur, par la 10. p. 10. & par consequent elles sont seulement commens.

en puissance : Donc FK sera residu par la 74. p. 10. & FC sera conuenable. Maintenant CK, peut plus que FK, du quarré d'une ligne qui luy est commens. ou incommens. en longueur : si commensurable ; FK sera residu troisieme, par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou son egal B) est residu medial second, par la 94. p. 10. Si incommens. FK sera residu 6. par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou B son egal) est ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, par la 97. p. 10.

SCHOLIE.

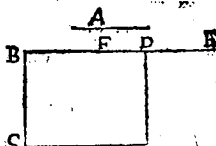
Si la superficie mediale AB est $\sqrt{179}$, & AV 40 : la superficie restante B sera $\sqrt{279} - \sqrt{40}$: & la ligne pouuant icelle sera $\sqrt{69\frac{1}{2}} + \sqrt{59\frac{1}{2}} - \sqrt{59\frac{1}{2}} - \sqrt{59\frac{1}{2}}$, qui est appelée ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

THEO. 88. PROP. CXII.

La ligne appelee residu, n'est pas la mesme que Binome.

Soit le residu A. Je dis qu'elle n'est pas mesme ligne que binome.

Car soit la rationelle proposee BC, sur laquelle soit appliqué le rectangle CDegal au quarré du residu A : par la 98. p. 10. BD sera residu premier : auquel si on adiouste sa conuenable DE ; BE & DE, seront rationeles commensurables en puissance seulement ; & BE commensur. en longueur à la rationelle BC.



BE & DE, seront rationeles commensurables en puissance seulement ; & BE commensur. en longueur à la rationelle BC.

Maintenant si on pose A estre binome ; BD sera binome premier, par la 61. p. 10. lequel estant diuisé en ses noms au point F ; (estant BF le plus grand nom) BF & FD seront rationeles commensurables en puissance seulement, & BE commensurable en longueur à la rationelle BC ; & par la 12. p. 10. BE & BF, seront commensurables en longueur. Veu donc que la toute BE est commens. en longueur à la partie BF, par le corol. de la 16. p. 10. l'autre partie FE sera aussi commensu.

en longueur à BE: partant aussi rationele comme icelle BE. Mais DE qui est aussi rationele, n'est commensurable en longueur à BE, & par la 14. p. 10. FE, DE sont rationeles commensurables en puissance seulement: & partant par la 74. p. 10. FD est residu, & par consequent irrationele; ce qui est absurde: car elle a esté prouuee tantost rationele: donc le residu A, sera differend du binome.

COROLLAIRE.

De ces choses on peut facilement colliger que la ligne, appellee residu, & les cinq sortes de lignes irrationeles suivantes, sont differentes de la mediale, & entr'elles. Car le quarré de la mediale appliquee sur une ligne rationele, fait l'autre costé rationel commensurable en puissance seulement à icelle rationele, par la 23. p. 10.

Le quarré du residu, fait l'autre costé residu premier, par la 98. p. 10.

Le quarré du residu medial premier, fait l'autre costé residu second, par la 99. p. 10.

Le quarré du residu medial second, fait l'autre costé residu troisieme, par la 100. p. 10.

Le quarré de la ligne mineure, fait l'autre costé residu quatrieme, par la 101. p. 10.

Le quarré de la ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial, fait l'autre costé residu cinquieme, par la 102. p. 10.

Le quarré de la ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, fait l'autre costé residu sixieme, par la 103. p. 10.

Puis donc que tous ces costez, (qui sont les latitudes des rectangles) sont differens; les lignes qui les peuvent feront aussi differentes. Mais les quarrés des binomes, & des cinq lignes irrationeles suivantes, estans appliquez sur une ligne rationele font l'autre costé binome de quelque ordre: partant le binome & les cinq suivantes sont differentes du residu, & des cinq suivantes.

Ainsi toutes les lignes irrationeles cy deuant dites sont treize: sçavoir celles cy.

1. Mediale.
2. Binome.
3. Bimediale premiere.
4. Bimediale seconde.
5. Ligne majeure.
6. Ligne pouvant yn rationel & yn medial.

7. Ligne pouuant deux mediaux.
8. Residu.
9. Residu medial premier.
10. Residu medial second.
11. Ligne mineure.
12. Ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.
13. Ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

THEOR. 89. PROP. CXIII.

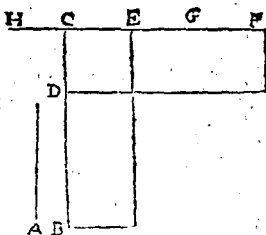
Le quarré d'une ligne rationele estant appliqué sur vn binome, faict l'autre costé residu, les noms duquel sont proportionaux, & commensurables aux noms du binome: en outre le residu est de mesme ordre que le binome.

Soit la rationele A, & le binome BC, duquel le plus grand nom soit BD: & à icelle BC soit appliqué le rectangle BE egal au quarré de la rationele A. Je dis que l'autre costé CE est residu tel que dit la proposition.

Car sur le plus petit nom CD soit appliqué le rectangle DF aussi egal au quarré de rationele A: donc les deux rectangles BE, DF, seront egaux, & par

la 14. p. 6. leurs costez seront reciproques, sçavoir que comme BC à DC, ainsi CF à CE, & en diuisant comme BD à DC, ainsi FE à EC. Mais BD est plus grande que CD: donc aussi FE sera plus grande que EC. Maintenant de EF soit retranchée EG egale à EC, & soit faict comme FG à GE, ainsi EC, à CH, par la 12. p. 6. & en composant comme FE à EG (ou EC son egale) ainsi EH à CH, & par la 12. p. 5. les deux antecedents FEH seront aux deux consequents ECH. comme l'un des antecedens EH à l'un des consequens CH: & partant

H h iij



les trois lignes PH, EH, CH, seront continuellement proportionnelles en la raison de FE à EC, ou BD à DG: & par la 22. p. 6. & 10. p. 10. comme le quarré de BD est commun. au quarré de DC, (car iceux quarréz sont commun. puis que BD, DC sont les noms du binome BC) ainsi que le quarré de EH, sera commun. au quarré de CH: & par le corol. de la 20. p. 6. & 10. p. 10. CH sera commun. en longueur à la troisième proportionnelle FH, & par la 16. p. 10. CH & CF seront commun. en longit. Et d'autant que le rectangle DF est rationel (estant égal au quarré de la ligne rationelle A) & DC ligne rationelle: CF sera aussi ligne rationelle commun. en longueur à CD, par la 21. p. 10. Et CH sera aussi rationelle commun. en longueur à CD, par la 12. p. 10. & par la 10. p. 10. comme CD & DB sont rationelles commun. en puissance seulement, aussi CH, EH, seront rationelles commun. en puissance seulement: & partant par la 74. p. 10. CE sera résidu: duquel les noms EH, CH, sont proportionaux, & commun. aux noms BD, DC, du binome BC: Car il a esté démontré que comme BD est à DG, ainsi EH à CH; & partant en changeant comme BD sera à EH; ainsi DC à CH. Mais DC, CH ont esté démontrées commun. en long par la 10. p. 10. BD, EH, seront donc aussi commun. en longueur.

Reste donc à prouver que le résidu est de mesme ordre que le binome: Or les noms de l'un estans proportionaux, & commun. aux noms de l'autre: par la 15. p. 10. comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy sera commun. ou incommun. en longueur: le plus grand nom du résidu pourra plus de mesme: Que si le plus grand nom du binome est commun. en longueur à la rationelle: aussi sera le plus grand du résidu par la 12. p. 10. & ils seront binome premier, & résidu premier. Que si le plus petit nom du binome est commun. en longit. à la rationelle: aussi sera le plus petit du résidu; & ils seront binome & résidu second. Que si ny l'un ny l'autre nom du binome est commun. à la rationelle: semblablement l'un ny l'autre nom du résidu ne sera commun. à la mesme rationelle: Et ils seront binome, & résidu troisième: & ainsi des autres.

S C H O L I E.

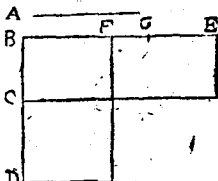
Si la rationelle A est 8, le binome BC $9 + \sqrt{45}$. tellemant que BD soit 9. & CD $\sqrt{45}$: Le quarré de A estant appliqué sur BC, l'autre costé du

Le rectangle CE sera $16 - \sqrt{142}$, qui est residu: & puis que comme DC est à CB, ainsi CE à CF, icelle CF sera $\sqrt{91\frac{1}{2}}$; & EF $\sqrt{460\frac{1}{2}} - 16$. Mais EG estant égale à CE, est $16 - \sqrt{142}$; GF $\sqrt{115\frac{1}{2}} - 32$: & d'autant que comme FG est à GE, ainsi EC à CH; icelle sera $\sqrt{142}$; & EH 16: Ainsi est manifeste que CE est residu de mesme ordre que le binome BC, & que les noms EH, CH, sont proportionaux aux noms BD, CD.

THEOR. 90. PROP. CXIII.

Le quarré d'une ligne rationele, estant appliqué sur un residu, faict l'autre costé binome, les noms duquel sont proportionaux, & commens. aux noms du residu: En outre le binome est de mesme ordre que le residu.

Soit la rationele A, & le residu BC auquel conuienne CD, & sur BC soit décrit le rectangle CE égal au quarré de la rationele A: Je dis que l'autre costé BE sera binome tel que demande la proposition.



Car sur BD, soit décrit le rectangle DF égal au mesme quarré de la rationele A: Donc les rectangles CE & DF seront égaux, & ayans les costez reciproques par la 14 p. 6. BD sera à BC comme BE à BF, & par conuersion de raison BD sera à CD, comme BE à FE. Maintenant soit couppé EF en G, par la 10. p. 6. tellement que comme BE est à FE, ainsi EG à GF, veu donc que comme la route BE est à la route FE, ainsi EG retranchée de BE, est à GF retranchée de FE, aussi par la 19 p. 5. le reste BG, sera au reste EG, comme la route à la route, c'est à dire comme la retranchée EG à la retranchée GF: & partant EG est moyenne proportion. entre BG & GF. Parquoy comme BG sera à GF, ainsi le quarré de BG sera au quarré de EG, par le corol. de la 20. p. 6. Et puis que comme BD à CD, ainsi BE à FE, c'est à dire BG à GE; & BD, CD noms du residu BC sont rationeles commens. en puissance seulement: & par la 10 p. 10. BG, GE seront aussi commens.

surable en puissance seulement: & partant les quarrez d'icelles BG, GE sont commens., & par consequent les lignes BG, FG qui ont mesme raison qu'iceux quarréz, sont commensurables, en longueur, par la mesme 10.p.10. Et par le corol. de la 16.p. 10. BG, BF seront aussi commensurables en longueur. Et d'autant que BD plus grand nom du residu BC est rationele, & le rectangle DF egal au quarré de la rationele A, est rationel; par la 21.p.10. BF sera aussi rationele commensu. en longueur a BD. Donc par la 12.p. 10. BG sera aussi rationele commens. en longueur a la mesme BD. Et puis que BG, GE, ont esté demonstrees. commens. en puissance seulement, & BG rationele, GE sera aussi rationele. Donc BG, GE sont rationeles commens. en puissance seulement: Et partant par la 37.p.10. BE est binome: duquel les noms BG, GE, sont proportionnaux, & commens. aux noms BD, CD, du residu BC. Car il a esté demonstré que comme BD a CD, ainsi BG a GE: & partant en permutant comme BD a BG, ainsi CD a GE: mais BD a esté demonstré commensurable en longueur a BG: dōc aussi CD sera commens. en longueur a GE, par la 10.p.10. Reste donc a prouuer que BE est binome de mesme ordre que le residu BC: ce qu'on fera tout ainsi qu'en la precedente.

S C H O L I E..

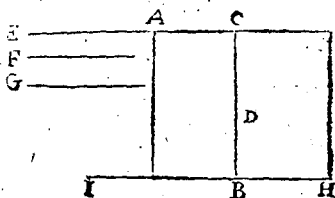
Si la ration. A est 4, & le residu BC 9, & CD 45, & BD 9: le rest. DE sera 16, & aussi GE 16: ainsi le costé BF sera $\sqrt{1^2 + 15^2}$, & BE $4 + \sqrt{8^2 + 15^2}$: & par consequent FE sera $\sqrt{8^2 + 15^2}$; & GE $\sqrt{8^2 + 15^2}$, FG 1^2 , BG 4: ainsi est evident que BE est binome en mesme ordre que le residu BC, & que les noms d'iceux sont proportionaux.

THEOR. 91. PROP. CXV.

Si vn rectangle est compris d'un residu, & d'un binome, desquels les noms sont proportionnaux & commensurables; la ligne droicte pouuant icelluy rectangle est rationelle.

Soit le rectangle AB, compris sous le residu AC, & le binome CB, duquel les noms CD, DB soient proportionaux, &

commensurab. aux n^{os}
CE, AE du residu AC, &
soit la ligne droite F
pouvant iceluy rectan-
gle AB. Je dis que F est
rationele.



Car soit vne ratione-
le propsee G, le quar-
ré de laquelle estant ap-
pliqué sur le binome C
B, face le rectangle CH. Donc par la 113. p. 10. l'autre costé
BH sera residu, duquel les noms HI, BI sont commensur. &
proportionaux aux noms CD, DB, sçavoir est que comme HI
à BI, ainsi CD à DB, & partant ainsi CE à AE : & en changeant
comme la toute HI à la toute CE, ainsi la retranchée BI à la
retranchée AE ; & par la 19. p. 5. le reste BH sera aussi au reste
AC, comme la toute à la route. Mais icelles toutes sont com-
mens. en long. par la 12. p. 10. pource que l'une & l'autre est
commens. à CD : donc aussi BH, AC seront commensur. en
long. par la 10. p. 10. & par consequent les rectangles HC &
BA estans par la 1. p. 6. en mesme raison que BH, & AC, seront
aussi commens. Mais HC egal au carré de la rationele G, est
rationel : donc aussi AB sera rationel ; & partant la ligne F
qui peut iceluy AB, sera aussi rationele.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste qu'un rectangle rationel, peut estre compris
de lignes irrationeles.

SCHOLIE.

Si le residu AC est $4 - \sqrt{8\frac{1}{2}}$, tellement que les noms d'iceluy CE,
& AE soient 4, & $\sqrt{8\frac{1}{2}}$, mais le binome BC soit $9 + \sqrt{45}$, le rectan-
gle AB sera 16, qui est rationel : & partant la ligne F qui peut iceluy
est 4, & par consequent rationele. Or la rationele G estant 8, le rectan-
gle CH sera 64, & le costé BH $16 - \sqrt{142\frac{1}{2}}$, HI 16, & BI $\sqrt{142\frac{1}{2}}$.

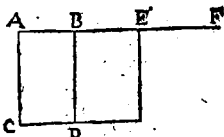
THEO. 92. PROP. CXVI.

De la ligne mediale naissent infinies lignes

irrationeles, toutes differentes des deuant dictes.

Soit la ligne mediale AB, ie dis que d'icelle naissent infinies lignes irrationeles toutes differentes des deuant dictes.

Car si sur l'extremite de la mediale on meine la perpendiculaire AC qui soit rationele, & on acheue le rectangle AD: iceluy rectangle sera irrationele par le coroll. de la 39. p. 10. & par la 11. d. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle est irrationele: soit icelle BE: laquelle sera differente de toutes les deuant dictes. Car son quarré appliqué sur vne ligne rationele comme AC, fait l'autre costé AB medial: Ce que ne faisoit pas vne des deuant dictes. Item si on accomplit le rectangle DE, il sera aussi irrationel: & la ligne qui le peut aussi irrationele: & soit EF, laquelle sera differente de toutes les deuant dictes. Car le quarré de pas vne d'icelles, appliqué sur vne ligne rationele, ne fait l'autre costé tel que BE: & de ceste façon on peut proceder à l'infiny.



SCHOLIE.

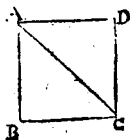
Si la mediale AB est $\sqrt{2}$, & la rationele AC 2; le rectangle AD sera $\sqrt{2}$ la ligne & BE qui peut iceluy sera $\sqrt{2}$: Ainsi le rectangle DE sera $\sqrt{2}$ & la ligne EF qui peut iceluy sera $\sqrt{2}$, & ainsi à l'infiny.

THEOR. 93. PROP. CXVII.

Au quarré, la diagonale est incommensurable en longueur au costé.

Soit le quarré ABCD, duquel AC soit diagonale. Ie dis que la diagonale AC est incommensurable en longueur au costé AB.

Car par la 47. p. 1. le quarré de AC est double du quarré de AB: mais toute grandeur double d'une autre est comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. Donc le quarré de AC est au



quarré de AB, comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré, comme nous auons démontré au corol. de la 24.^{re} p. 8. & partant par la 9.^{re} p. 10. la diagonale AC, & costé AB, sont incommensurables en longueur.

S C H O L I E.

Si AB costé du quarré est 1, la diagonale AC sera $\sqrt{2}$: tellement que la raison du costé au diametre est comme 1 à $\sqrt{2}$, c'est à dire incommens. en longueur.

Fin du dixiesme liure.





ELEMENT

VNZIESME.

DEFINITIONS.

1.  Solide, est ce qui a longueur, largeur & profondeur : Mais les termes d'un solide, sont superficies.

2.  Une ligne droite est perpendiculairement esleuee sur vn plan, quand toutes les lignes sur iceluy plan menees vers elle la rencontrent en angles droicts.

3. Vn plan est esleué perpendiculairement sur vn plan, quand les lignes menees sur l'un d'iceux perpendiculairement à la ligne de commune section, sont aussi perpendiculaires à l'autre plan.

4. L'inclination d'une ligne droite à vn plan est l'angle aigu contenu d'icelle ligne, & d'une autre ligne droite menee au plan de l'inclination, par le point auquel tombe une perpendiculaire tiree du sommet d'icelle inclinante sur le dit plan.

5. Vn plan est incliné sur vn plan, quand les lignes menees sur l'vn & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune section, & vers vn mesme point d'icelle, ne sont point perpendiculaires les vnes aux autres : & l'inclination d'iceux plans; est l'angle aigu compris d'icelles perpendiculaires.

6. Vn plan est dit estre semblablement incliné à vn plan, lors que les susdicts angles d'inclination sont egaux entr'eux.

7. Plans parallels, sont ceux lesquels estans continuez ne se rencontrent point.

8. Solides semblables, sont ceux qui sont compris de superficies semblables, egales en nombre.

9. Solides egaux, & semblables, sont ceux qui sont compris de semblables superficies, egales en nombre & grandeur.

10. Angle solide, c'est la rencôtre de plus de deux angles plans en vn mesme point, estans iceux constituez sur plans differens.

11. Pyramide, est vn solide compris de plusieurs plans, se rencontrés en vn même point, & ayans vn autre plan pour base.

12. Prisme, est vn solide compris de plans, desquels deux qui sont opposez sont egaux, semblables, & parallels, & les autres sont parallelogrammes.

13. Sphere, est vne figure comprise par le demy cercle, lors que son diametre demeurant

immobile, iceluy demy cercle tourne iusques à ce qu'il reuienne là, d'où il estoit party.

14. L'axe de la sphere, est iceluy diametre immobile à l'entour duquel tourne le demy cercle.

15. Le centre de la sphere, est celuy mesme que du demy-cercle.

16. Diametre de la sphere, est vne ligne laquelle passant par le centre d'icelle, est terminée à la superficie de la sphere.

17. Cone, est vn solide compris par vn triangle rectangle, lors que l'un des costez qui comprennent l'angle droit demeurant immobile, le triangle fait vn tour alentour d'iceluy costé. Et si ledit costé immobile est egal à l'autre costé comprenant l'angle droit; le cone sera rectangle: si plus petit, il sera ambligone: si plus grand, il sera oxigone.

18. L'axe du cone est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle tourne le triangle.

19. Mais le cercle descript par l'autre costé comprenant l'angle droit qui tourne, est la base du cone.

20. Cylindre, est vn solide compris par vn parallelogramme rectangle, lors que l'un des costez demeurant immobile, le parallelogramme fait vn tour à l'entour d'iceluy costé.

21. L'axe du cylindre, est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle se meust le parallelogramme.

22. La base du cylindre, est le cercle d'escrié par l'autre costé, qui avec l'axé du cylindre comprend l'angle droit.

23. Semblables cones, & cylindres, sont ceux desquels les axes & les diametres de leurs bases sont proportionaux.

24. Cube est vn solide compris de six quarez.

25. Tetraedre, est vne figure solide comprise de quatre triangles egaux, & equilateraux.

26. Octaedre, est vn solide cõpris de huit triangles egaux, & equilateraux.

27. Dodecaedre, est vn. solide compris de douze pentagõnes egaux, & equilateraux & equiangles.

28. Icosaedre, est vn solide cõpris de vingt triangles egaux, & equilateraux.

29. Parallelipipede, est vn solide compris de six quadrangles plans, desquels les opposez sont parallels.

30. Vne figure solide, est diète inscrite en vne figure solide, lors que tous les angles de la figure inscrite sont construits, ou és angles, ou és costez, ou finablement és plans de la figure en laquelle elle est inscrite.

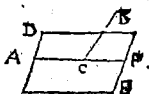
31. Mais vne figure solide, est diète circonscrite à vne figure solide, quand ou les angles, ou les costez, ou les plans de la figure circonscrite, touchent tous les angles de la figure à

l'entour de laquelle elle est descripte.

THEO. 1. PROP. I.

Vne partie d'une ligne droite ne peut estre sur vn plan, & l'autre partie en l'air.

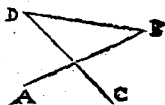
La demonstration de ceste prop. est facile. Car si AC partie de la ligne ACB est sur le plan DE, & l'autre partie CB en l'air, il est evident que ACB ne sera pas ligne droite, comme il est requis.



THEOR. 2. PROP. II.

Si deux lignes droictes se coupent l'une l'autre, elles seront sur vn mesme plan : Et tout triangle est en vn mesme plan.

Soient deux lignes AB & CD se coupans l'une l'autre au point E, & en EB, ED soient pris quelcôques points B & D, & soit tirée la ligne droite BD. afin de faire le triangle EBD. Je dis que les deux lignes droictes AB, CD, sont constituees en vn seul plan : Item que le triangle EBD est pareillement en vn seul plan.

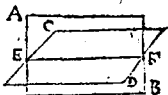


Car d'autant que les lignes AB, CD s'entrecoupent en E, BE, DE feront vn angle au point E : & par la definition de l'angle plan conuertie, & r. p. i. elles seront en vn mesme plan. Et par la mesme raison BD faisant deux angles avec iceiles deux lignes BE, DE; sera aussi au mesme plan : Partant tout le triangle EBD est en vn mesme plan. Et puis que BE, DE parties des lignes AB, CD, sont en vn mesme plan, il s'ensuit par la r. p. i. qu'iceiles AB, CD, sont aussi en vn mesme plan; sçavoir est en celuy auquel nous auons demonsté estre le triangle EBD.

THEOR. 3. PROP. III.

Si deux plans se coupent l'un l'autre, leur commune section sera vne ligne droicte.

Soient les deux plans se coupans l'un l'autre AB & CD, & les termes de leur commune section, soient les poinçts E, F. Je dis que leur commune section est vne ligne droicte.

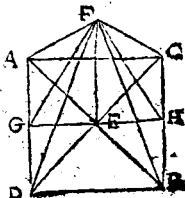


Car puis que les poinçts E, F, sont communs à tous les deux plans, d'un poinçt à l'autre soit menee vne ligne droicte sur le plan AB; item des mesmes poinçts soit menee vne ligne droicte sur le plan CD: Je dis qu'il est impossible qu'icelles deux lignes soient autres qu'une seule ligne droicte, sçavoir EF: car si elles estoient différentes, il s'enfuiroit que deux lignes droictes auroient leurs extremitez communes: ce qui est impossible, car elles enfermeroient vne espace, contre la raison. La ligne droicte EF est donc sur l'un & l'autre plan, & partant leur commune section.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si deux lignes droictes se coupans l'une l'autre, & au poinçt de leur section on esleue perpendiculairement vne autre ligne droicte, elle sera aussi esleuee perpendiculairement sur le plan d'icelles.

Soient les deux lignes AB & CD, se coupans l'une l'autre au poinçt E, & du poinçt de section E soit esleuee la perpendiculaire EF à chacune d'icelles: Je dis qu'elle est aussi perpendiculaire à leur plan.



Car soient posees egales AE, EB, CE & ED, & soient tirees les lignes AD, BC,

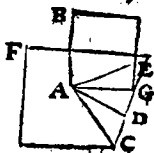
& par le point E soit menee la ligne droite GH, coupant les lignes AD, BC, es points G & H: Item du point en l'air F soient tirees les lignes FA, FG, FD, FB, FH & FC. D'autant que les costez EA, ED du triangle AED, sont egaux aux costez EB, EC du triangle BEC, & les angles AED, BEC contenus par iceux costez aussi egaux par la 15. p. 1. les bases AD, BC seront pareillement egales, par la 4. p. 1. Derechef puis que les angles AEG, BEH sont egaux par la 15. p. 1. les deux angles AEG, EAG du triangle AGE seront egaux aux deux angles BEH, EBH du triangle BHE, & le costé AE est egal au costé BE: donc par la 26. p. 1. les deux costez AG, GE, seront egaux aux deux costez BH, HE. Et puis que les deux costez FE, EA du triangle FEA sont egaux aux costez FE, EB du triangle FEB, & les angles contenus d'iceux costez aussi egaux, sçauoir droicts par l'hypotese, par la 4. p. 1. les bases EA, EB seront egales. Par mesme raison seront aussi egales les lignes FD, FC. D'auantage veu que les costez FA, AD du triangle FAD, sôt egaux aux costez FB, BC du trian. FBC, & la base FC, egale à la base FD, par la 8. p. 1. les angles FAD, FBC serôt aussi egaux: Parquoy les costez FA, AG du trian. FAG estans egaux aux costez FB, BH, du triangle FBH, les bases FG, FH, seront pareillemēt egales par la 41. p. 1. Et finalement puis que les costez FE, EG, du triangle FEG, sont egaux aux costez FE, EH du triangle FEH, & les bases FG, FH aussi egales, les angles FEG, FEH seront pareillement egaux par la 8 p. 1. & partant par la 10. d. 1. la ligne droite FE sera perpendiculaire à la ligne GH, qui la touche en E, & constituee au mesme plan que les lignes AB, CD, par la 2. p. 11.

On pourra semblablement prendre tant de lignes qu'on voudra sur le mesme plan, qui feront les angles droicts rencontrant la perpendiculaire FE, par les mesmes raisons que dessus: & par la 2. d. 11. FE sera perpendiculaire au plan des lignes AB & CD: ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droite rencontre en vn point perpendiculairement trois autres lignes droites; icelles trois lignes droites seront en vn mesme plan.

Soit la ligne droite AB perpendiculaire a trois autres lignes droictes AC, AD, AE, au point de leur rencontre A. Je dis qu'icelles trois lignes AC, AD, AE, sont sur vn mesme plan.

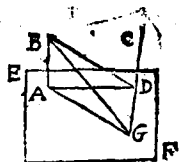


Car puis que deux d'icelles quelles qu'elles soient sont en vn mesme plan par la 2. p. 11. soient AC, AD, au plan FC: Si donc on dit que AE n'est point sur le mesme plan FC, mais qu'elle est esleuee en l'air, elle pourra estre au mesme plan que AB par la 2. p. 11. & soient toutes deux au plan BE. Ainsi FC, & BE sont deux plans differens, lesquels se touchans au point A, ne sont pas parallels, partant estans continuez tant qu'il sera de besoin ils se couperont, & leur commune section sera vne ligne droite par la 3. p. 11. soit la ligne AG, laquelle par ce moyen sera au mesme plan que AC; & partant par la 3. d. 11. BA, & GA se rencontreront en angles droicts: mais par hypothese AB & AE se rencontrent aussi en angles droicts: par ainsi les angles BAE, BAG estans au plan BG tiré par les lignes BA, AG, seroient egaux, la partie au tout: ce qui est impossible: Donc AE estoit au mesme plan que AC & AD.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux lignes droites sont esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan; elles seront paralleles.

Soient les deux lignes AB, CD esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan EF. Je dis qu'elles sont paralleles entr'elles.



Car si des points A & D, ou icelles lignes rencontrent vne mesme superficie plane on mene la ligne droite CD, les deux angles BAD & CDA seront droicts par la 2. d. 11. partant si les deux lignes BA & CD sont en vn mesme plan, elles seront paralleles par la 18. p. 1.

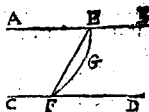
Ores qu'elles soient en vn mesme plan, on le prouue ainsi. Sur le plan EF & du point D, soit menee DG perpendicu-

laire à AD par la 11. p. 1. & soit posée icelle DG égale à AB, & soient menées les lignes BD, BG, AG. D'autant que les 2. triangles ABD & AGD ont les deux costez AB, DG égaux, & AD commun, & l'angle BAD droit égal à l'angle GDA aussi droit, par la 4. p. 1. la base BD sera égale à la base AG. Item les deux triangles AGB & GDB ayans les deux costez AB, & DG égaux, & les deux autres AG & BD aussi égaux, & la base BG commune à tous deux, par la 8. p. 1. les deux angles BAG, BDG seront égaux. Mais l'angle BAG est droit par la 3. d. 11. donc BDG sera aussi droit: il est donc évident que GD touche perpendiculairement en vn poinct D, les trois lignes DA, DB, DC: & partant par la 5. p. 11. icelles trois lignes seïont en vn mesme plan, c'est à dire que CD sera au plan mené par les lignes AD, DB. Mais par la 2. p. 11. les trois lignes AB, BD, AD sont aussi sur vn mesme plan: partant AB & CD seront ch vn mesme plan.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux lignes droites sont paralleles, & de l'une à l'autre on mene vne ligne droite, elle sera au mesme plan des lignes paralleles.

Soient deux lignes paralleles AB & CD, & de l'une à l'autre soit menée la ligne droite EF. Je dis qu'icelle ligne est au mesme plan des lignes paralleles AB & CB.



Car si elle n'est au mesme plan, ains en vn autre: que celui cy coupe cestuy-là es poincts E, & F, & la commune section d'iceux plans soit EGF, laquelle sera ligne droite par la 3. p. 11. donc les deux lignes droictes EF, EGF, ayans mesmes termes E & F, enfermeroiēt vn espace: ce qui est absurde. Donc la ligne droite EF n'est pas en vn autre plan que celui auquel sont les paralleles AB, CD.

SCHOLIE.

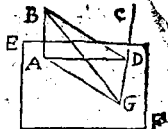
Ceste mesme proposition est aussi veritable, encore que les deux lignes AB, CD ne soient paralleles, pouru. n qu'elles soient en vn mes-

une plan, comme il est manifeste par la demonstration.

THEOR. 8. PROP. VIII.

S'il y a deux lignes paralleles, desquelles l'une soit à angles droicts à quelque plan : aussi l'autre sera à angles droicts sur le mesme plan.

Soient les deux lignes paralleles AB & CD, & que l'une d'icelle AB soit esleuee perpendiculairement sur le plan EF. Je dis que l'autre CD est aussi esleuee perpendiculairement sur le mesme plan EF.

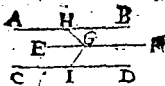


Qu'il ne soit ainsi. Soit faicte mesme constructio qu'en la 6. p. II. & comme il a esté demonstré, les deux angles BAG & GDB seront droicts, & par la 4. p. II. GD sera esleuee perpendiculairement sur le plan des lignes AD & BD : mais par la 7. p. II. les deux lignes AB & AD sont au mesme plan de AB & CD : car elles sont paralleles par hypothese : il s'ensuit que GD est perpendiculaire sur le plan où est la ligne CD : Ainsi l'angle CDG sera droit. Mais l'angle ADC est aussi droit par la 29. p. I. estis AB & CD paralleles : & par la 4. p. II. CD sera perpendiculaire au plan de GD & AD, c'est à dire au plan EF. Ce qu'il falloit démonstrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les lignes droites paralleles à vne mesme, lesquelles ne sont à vn mesme plan qu'icelle ; sont aussi paralleles entr'elles.

Soient les lignes droictes AB, CD, paralleles à la ligne EF, & ne soient en vn mesme plan qu'icelle. Je dis que AB, CD, sont aussi paralleles entr'elles.



Soit pris en EF quelconque point G, duquel soient tirees à icelle EF deux perpendiculaires, sçavoir GH au plan des paralleles AB, EF ; &

GI au plan des paralleles CD, EF. D'autant que EF est perpendiculaire aux deux lignes GH, GI, qui s'entre-touchent en G : elle le sera aussi au plan tiré par icelles par la 4. p. 11. Parquoy puis que AB, EF, sont paralleles : & EF est perpendiculaire au plan mené par GH, GI : aussi AB sera perpendiculaire au mesme plan par la 8. p. 11. Par mesme raison CD sera perpend. au plan passant par GH, GI : & partant par la 6. p. 11. AB, CD estans perpend. à vn mesme plan, sont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si deux lignes droites s'entre-touchant, sont paralleles à deux autres lignes droites s'entre-touchant, & ne sont en vn mesme plan, elles comprendront angles egaux.

Soient les deux lignes AB & AC se touchans en A, lesquelles soient paralleles aux deux autres lignes DE & DF se touchant en D : & AB, AC ne soient au mesme plan que DE, DF. Je dis que les angles BAC, EDF, compris par icelles sont egaux.



Qu'ainsi ne soit. Soient egales les quatre lignes AB, AC, DE, DF; & soient menees les lignes AD, BE, CE, BC, EF. Premièrement AB & DE estans egales & paralleles, AD & BE seront aussi egales & paralleles par la 33. p. 1. & par la mesme raison AD, & CF seront aussi egales & paralleles : & partant par la 9. p. 11. BE & CF seront aussi egales & paralleles entr'elles : & par la 33. p. 1. BC & EF seront egales & paralleles : Ainsi les deux triangles ABC, & DEF auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, & par la 8. 1. les angles BAC, EDF seront egaux. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROBL. 1. PROP. XI.

D'un point esleué en haut, mener vne ligne perpendiculaire sur le plan qui est au dessous d'iceluy point,

Soit le point A esleué en haut, duquel il faut tirer vne perpendiculaire au plan BC qui est au dessous d'iceluy point A. Au plan BC, soit menee comme on voudra la ligne DE; à laquelle de A soit tirée la perpendiculaire AF par la 12. p. 1. Et au plan BC par F, soit tirée GH perpendiculaire à DE par la 11. p. 1. Et à icelle GH soit tirée de A la perpendiculaire AI par la 12. p. 1. Je dis qu'icelle AI est perpendiculaire au plan BC.

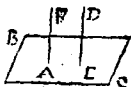


Car au plan BC, étant tirée par I, la ligne KIL parallèle à DFE par la 31. p. 1. puis que DF est perpendiculaire aux deux lignes FA, FH par la construction: & partant aussi perpend. au plan tiré par FA, FH par la 4. p. 11. pareillement KI sera perpend. au mesme plan par la 8. p. 11. Et d'autant que par la 2. p. 11. AF est en vn mesme plan que FA, FH, & touche la ligne KI en I, l'angle KIA sera droit par la 1. d. 11. & AI sera perpendiculaire aux deux KI, IF. Donc par la 4. p. 11. AI sera perpendicul. au plan où sont les lignes KI, IF, sçavoir au plan BC.

PROB. 2. PROP. XII.

A vn plan donné, & d'un point donné en iceluy, esleuer vne ligne perpendiculaire.

Soit le plan donné BC, & le point donné en iceluy soit A: Il faut d'iceluy point A esleuer vne ligne perpendiculaire au plan donné BC.



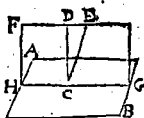
Soit pris en l'air comme on voudra le point D, & d'iceluy soit menee sur le plan BC, la perpendiculaire DE, rencontrant le plan au point E par la 11. p. 11. Et du point A soit menee AF parallèle à ED, par la 31. p. 1. il est euident que par la 8. p. 11. AF sera aussi perpendiculairement esleuee sur le plan BG, ainsi qu'il estoit requis.

THEOR. II. PROP. XIII.

D'un mesme plan, & d'un mesme point

d'iceluy, on ne leuera pas en l'air d'un mesme costé, deux lignes perpendiculaires.

Soit donné quelque plan comme AB, & le point en iceluy C : ie dis que du point C, on n'esleuera pas en l'air deux lignes perpendiculaires sur iceluy plan, & de mesme costé.



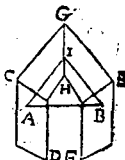
Autrement s'il est impossible: du point C, soient esleuees en l'air les deux perpendiculaires CD & CE, elles seront en un mesme plan, par la 2. p. 11. & soit iceluy FG, lequel d'autant qu'il touche le plan AB, au point C, n'est point parallele à iceluy AB : partant estans continuez ils se couperont, & leur commune section sera vne ligne droite: soit icelle GCH. Et parce que les lignes CD & CE sont perpendiculaires à iceluy plan AB, les angles ECG & DCG seroient droicts & egaux, la partie au tout: ce qui est impossible. Il ne se peut donc esleuer du point C, deux lignes perpendiculaires au plan AB, & de mesme costé, ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si vne ligne droite est perpendiculaire à deux plans, iceux plans seront parallels.

Soit la ligne droite AB, perpendiculaire à chacun des plans CD & EF : ie dis qu'iceux plans sont parallels entr'eux.

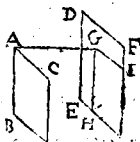
Autrement s'ils n'estoient parallels, estans continuez ils se rencontreront, & leur commune section sera vne ligne droite par la 3. p. 11. soit icelle GH, en laquelle soit pris comme on voudra le point I, & soient d'iceluy menées les lignes IA, IB és plans GCD, GEF. Maintenant puis que la ligne AB est perpendiculaire à chacun d'iceux plans GCD, GEF, au triangle AIB les angles IAB & IBA, seront droits, contre la 17. p. 1. donc les deux plans CD, EF ne se rencontreront point, ains seront parallels: ce qu'il falloit prouuer.



THEOR. 13. PROP. XV.

Si deux lignes droictes s'entretouchant sont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, n'estans toutesfois en vn mesme plan: les plans passans par icelles, seront aussi parallels.

Soient les deux lignes AB & BC, se touchans au poinct A, paralleles à deux autres lignes DE, DF, s'entretouchans en D, & ne soiet en vn mesme plan qu'icelles. Je dis que le plan BC mené par icelles AB, AC est parallele au plan EF tiré par les lignes DE, DF.



Car par la 31. p. 11. de A soit tirée sur le plan EF la perpendiculaire AG, rencontrant le plan EF en G: puis par la 31. p. 1. au plan EF, soient tirées de G, les lignes GH, GI paralleles à DE, DF, Maintenant d'autant que AB, GH sont paralleles à DE, icelles AB, GH seront paralleles entr'elles, par la 9. p. 11. & partant par la 29. p. 1. les angles BAG, AGH sont egaux à deux droicts. Mais AGH est droit, par la 3. d. 11. Donc BAG sera aussi droit. Par mesme raison on prouuera l'angle CAG estre droit. Parquoy ven que la ligne GA est perpend. aux deux AB, AC; par la 4. p. 11. elle sera aussi perpend. à leur plan BC: Mais par la construction elle l'est aussi au plan EF. Donc par la 14. p. 11. les plans BC, seront parallels: ce qu'il falloit demonstrier.

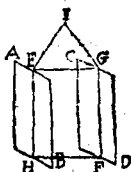
THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux plans parallels sont coupez par vn autre plan; les lignes de commune section seront paralleles.

Soient les deux plans parallels AB & CD, coupez par le

troisième plan EF : Je dis que leurs lignes de commune section (c'est à sçavoir HE & GF) sont parallèles.

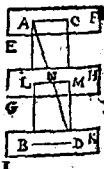
Autrement si elles n'estoient parallèles , estans cōtinuées, elles se rencontreroiēt comme au point I: Mais d'autant qu'iceux plans AB, CD sont Parallèles , estans cōtinués ils ne se rencontrent iamais: il faudroit donc que les lignes HEI, FGI (lesquelles se rencontrent) fussent en partie sur leurs plans, en partie dehors, ce qui est contre la 1. p. 11. Donc HE & GF estant continuées ne se rencontrent point , & partant sont parallèles: ce qui estoit à prouver.



THEO. 15. PROP. XVII.

Si deux lignes droictes sont coupees par plusieurs plans parallèles, elles seront coupees proportionnellement.

Soient les deux lignes AB, CD, tranversans les trois plans parallèles EF, GH, IK, tellement qu'icelles lignes sont coupees par iceux plans en points A, L, B, C, M, D. Je dis qu'elles sont coupees proportionnellement, c'est à dire que les segmens d'icelles interceps entre les susdits plans sont proportionaux, sçavoir que comme AL est à LB, ainsi CM à MD.

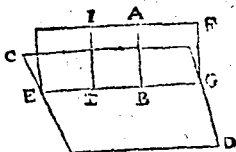


Car es plans EF, IK, soient menees les lignes droictes AC, BD : & tiré AD rencontrant le plan GH au point N, duquel soient menees les lignes NL, NM, au mesme plan GH ; & le triangle ABD, par la 2. p. 11. sera en vn mesme plan : semblablement le triagle ADC en vn seul plan. Et d'autant que les plans parallèles GH, IK sont coupees par le plan du triangle ABD : leurs communes sections LN, BD seront parallèles par la 16. p. 1. Par mesme raison MN, AC, seront aussi parallèles. Parquoy par la 1. p. 6. comme AL sera à LB, ainsi AN sera à ND : Item comme AN à ND, ainsi CM à MD : Et partant par la 11. prop. 5. comme AL sera à LB, ainsi CM sera à MD : ce qui estoit à prouver.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte est esleuee perpendiculairement sur vn plan, aussi tous les plans procedans d'icelle, seront perpẽdiculaires au mesme plan.

Soit la ligne AB perpendiculaire sur quelque plan CD : Je dis que tous les plans menez de la ligne AB, quelle part on voudra, seront esleuez perpendiculairement sur le mesme plan CD.

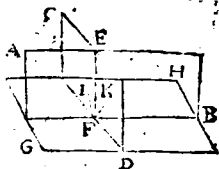


Qu'ainsi ne soit. Soit tiré par AB le plan EF, coupant le plan CD par la ligne EG : & en icelle soit pris quelconque point H, duquel au plan EF soit mence HI parallele à AB par la 11. p.1. Donc puis que AB, IH sont paralleles, & AB a esté posee perpendiculaire au plan CD : aussi IH sera perpend. au mesme plan CD, par la 8. p.11. & partant par la 2. d.11. aussi perpendiculaire à la commune section EG. Par mesme discours toutes autres lignes qui seront tirees au plan EF paralleles à icelle AB, seront perpendiculaires au plan CD : & par consequent à la ligne EG. Parquoy par la 3. d.11. le plan EF sera perpendiculaire au plan CD. Par mesme raison seront demonstrez tous autres plans tirez par la ligne AE, estre perpendiculaires au plan CD.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si deux plans esleuez perpendiculairement sur vn autre plan s'entrecourent, leur ligne de commune section est perpendiculaire sur iceluy plan.

Soient les deux plans se couppans l'un l'autre AB & CD, esleuez perpendiculairement sur le plan GH, & soit la ligne de leur commune section FE: ie dis qu'icelle est perpendiculaire au mesme plan GH.



Car si elle n'est perpendiculaire au plan GH: puis que le plan AB, est perpendiculaire au plan GH, ils auront vne commune section qui sera ligne droicte: soit icelle FB; & du point F pris en icelle soit menee FI perpendiculaire à la ligne FB, sur le plan CD, par la 11. p. 1. & par la 4. d. 11. conuertie, elle sera perpendiculaire au plan GH. Tout de mesme le plan CD estant perpendiculaire au plan GH, si à leur commune section DF, & du point F, on leue la perpendiculaire FK sur le plan CD, elle sera aussi par la mesme def. conuertie perpendiculaire au plan GH: ainsi FI & FK seroient toutes deux d'un mesme point esleues perpendiculairement sur vn mesme plan: ce qui est contre la 13. p. 11. D'oc du point F on n'en a peul mener d'autres perpendiculaires au plan GH, sinon vne seule, laquelle doit estre commune à tous les deux autres plans: partant il est euident que c'est leur ligne de commune section FE.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si vn angle solide est compris de trois angles plans, les deux pris comme on voudra, sont plus grands que le troisieme.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB. Ie dis que deux pris comme on voudra, comme BAD & DAC sont plus grands que le troisieme BAC.



Car si on dict que BAC soit plus grand que les deux autres: au plan tiré par AB, AC, soit fait DAE egal à DAB par la 23. p. 1. & soient faites egales les deux lignes AD, AE: puis apres au mesme plan soit menee par E la ligne droicte BC, couppant les lignes AB, AC, en B & C: & soient tirees les lignes BD, DC. Main-

tenant puis que les deux costez AB & AD sont egaux aux 2. costez AB & AE, & leurs angles egaux : la base DB sera egale à la base BE, par la 4. p. 1. Item puis que l'on pose l'angle BAC plus grand que les deux autres, & que le retranché BAE est egal à l'un d'iceux BAD, le reste CAE sera plus grand que l'autre CAD : mais les deux costez EA & AC sont egaux aux deux costez AD & AC, & l'angle CAE est plus grand que l'angle DAC : & partant par la 24. p. 1. la base EC sera plus grande que la base DC : & BD estant egale à BE, il est evident que au triangle ABC le costé BC est plus grand que les deux autres : ce qui est contre la 20. prop. 1. Donc l'angle BAC n'est point plus grand que les deux autres BAD, CAD. Que si on dit qu'il est egal, il s'ensuyura par le mesme discours que BC est egal à BD & CD : ce qui contrevient tousiours à la 20 p. 1. Il est donc plus petit que les deux autres : ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Tous les angles plans d'un angle solide, sont plus petits que quatre droits.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans CAB, BAD, DAC. Je dis qu'iceux trois angles plans sont plus petits que quatre droits.

Car estans tirees les trois lignes BC, CD, BD, seront constituez trois angles solides B, C, D, desquels chacun est contenu sous trois angles plans, sçavoir B, sous ABC, ABD, CBD : & C sous ACB, ACD, BCD : & D sous ADB, ADC, BDC. Et d'autant que par la 20. p. 1. de chacun d'iceux angles solides, deux angles plans pris comme on voudra sont plus grands que le troisieme, les deux ABC, ABD, seront plus grands que le troisieme BDC ; & les deux ACB, ACD, seront plus grands que le troisieme BCD : Item les deux CDA, & BDA, sont plus grands que BDC : & partant les six angles ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA ensemble, seront plus grands que les trois de la base triangulaire BCD, c'est a dire que deux droits (car iceux trois angles valent autant par la 32. p. 1. (Mais d'autant qu'iceux six angles avec



les trois qui font l'angle solide A, valent six droicts, par la 32. p. 1. (Car ce sont les angles de trois triangles plans ABC, ACD, ABD, & qu'iceux six angles sont plus grands que de deux droicts) ; il est manifeste que les trois qui font l'angle solide A, sont plus petits que quatre droicts : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que l'autre, & les lignes droictes comprenant iceux egales ; Il se peut faire que des lignes qui conioignent icelles egales, soit constitué vn triangle.

Soient trois angles plans A, B, C, contenus des lignes egales AD, AE, BF, BG, CH & CI: deux des-



quels en quelques sortes qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre. Je dis que des trois lignes droictes DE, FG, HI, qui conioignent icelles lignes egales, peut estre constitué vn triangle.

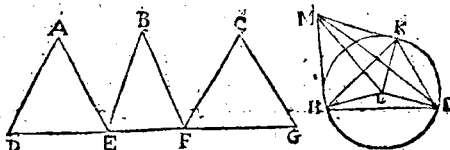
Car puis que deux d'iceux angles pris comme on voudra, sont plus grands que le troisieme: qu'on en mette deux ensemble tels qu'on voudra, cômme si à HCI, on adiouste HCK egal à FBG par la 23. p. 1. & ayant fait CK egal à BG: on tire IK & HK; l'angle ICK estant plus grand que le troisieme A, la base IK par la 24. p. 1. sera plus grãde que la base DE: (car les deux costez sont egaux) & à plus forte raison les deux IH, HK qui par la 20. p. 1. sont plus grandes qu'icelle IK, seront plus grandes que la troisieme DE. Et par mesme discours on monstrera tousiours que deux d'icelles bases DE, FG, HI, prises comme on voudra, sont plus grandes que la troisieme: Partant d'icelles on pourra faire vn triangle. Ce qui estoit à demonstres.

PROB.

PROB. 3. PROP. XXIII.

Faire vn angle solide de trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que le tiers. Mais il faut qu'iceux trois angles soiēt moindres que quatre droicts.

Soient trois angles plans A, B, C, moindres que 4 droicts, & desquels deux quels qu'ils soient sont plus grands que



l'autre. Il faut faire vn angle solide de trois angles plans egaux à iceux A, B, C.

Soient posees egales les six lignes AD, AE, BE, BF, CF, & CG qui comprennent les angles proposez, lesquels soient soutenus des trois bases DE, EF, FG. Donc puis que par la precedente prop. on peut faire vn triangle d'icelles lignes DE, EF, FG, soit fait le triangle HIK, ayans les trois costez egaux à icelles bases DE, EF, FG par la 22. p. 1. lequel soit circonscrit du cercle HIK par la 5. p. 4. & du centre L soient menees les trois lignes LH, LI, LK : & apres auoir par la 12. p. 11. esleué en l'air perpendiculairement LM, par le lemme de la 14. p. 10. soit icelle retranchée en sorte, que son quarré avec le quarré de LH, soient egaux au quarré de l'un des costez d'iceux angles plans : puis soient menees les lignes HM, IM, KM : Je dis que HIMK est vn angle solide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez A, B, C.

Car les trois lignes LH, LI, LK estant egales, & LM perpendiculaire à icelles : les trois lignes HM, IM, KM, seront egales par la 47. p. 1. d'autant qu'elles peuuent autant l'une comme l'autre : & puis qu'elles peuuent autant que l'un des costez des angles plans donnez, elles seront egales aux costez d'iceux angles plans : puis les trois bases HI, IK, KH estans

K ■

egales aux bases des angles donnez, par la 8. p. 1. les trois angles plans faisant l'angle solide au point M , seront egaux aux trois donnez A, B, C .

SCHOLIE.

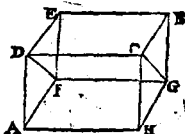
Si quelq^{ue} un obiectoit icy que la perpendiculaire LM ne peut pas toujours estre retranchee, en sorte que son quarré avec le quarré de LH soient egaux au quarré de l'un des costez des angles donnez: comme par exemple si iceluy costé estoit egal ou plus petit que HL . Je dis que cel. n'arrive iamais, non pas seulement qu'il soit egal à HL . Car si HL & IL estoient egaux à AD & AE : & la base HI egale à la base DE , par la 8. p. 1. (& ainsi des deux autres triangles) les trois angles au point L seroient egaux aux trois angles A, B, C , chacun au sien: ce qui est euidentement faux: Car toujours par hypothese les trois angles A, B, C , sont plus petits que quatre droicts; & par l. coroll. de la 15. p. 1. les trois au point L sont egaux à quatre droicts.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si vn solide est compris de plans parallels; les plans opposez d'icelles seront parallelogrames semblables, & egaux.

Soit le solide AB compris de six plans parallels AC, FB, AG, DB (AE, HB): Je dis que les plans opposez sont parallelogrames, semblables & egaux.

Car puis que les plans AC & FB sont parallels, estans coupez par les plans AE & HB ; les lignes de cōmune section AD, FE sōt paralleles: Itē HC & GB , par la 16. p. 11. par la mesme raison les plans AG & DB estans parallels, les lignes de cōmune section AF & DE : Item GH & BC sont paralleles: partant AE & HB sont parallelogrames. Par le mesme discours AG, DB, AC, FB , se prouueront estre parallelogrames. Je dis maintenant que les parallelogrames opposites sont semblables & egaux. Car puis que les lignes AF, AD , sont paralleles

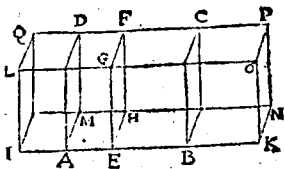


aux lignes HG, HC, & non en mesmes plans, mais en opposez; par la 10. p. 11. les angles DAF, CHG, seront egaux: par mesme raison les autres angles du parallelograme AE, seront egaux aux autres angles du parallelograme HB. Et puis que par la 34. p. 1. au parallelog. AC. les costez AD, HC sont egaux comme aussi les costez AF, HG, du parallelog. AG; comme AD sera à AF, ainsi HC à HG, & partant comme AF, FE, ainsi HG à GB, &c. Donc les costez des parallelog. AE, HB, & long des angles egaux, seront proportionaux: & partant ils sont parallelogrames semblables. Maintenant estans tirez les diametres DF, CG: veu que les costez AD, AF, du triangle ADF, sont egaux aux costez HC, HG, du triagle HCG, & les angles DAF, CHG aussi egaux par la 4. p. 1. les triangles ADF HCG, seront pareillement egaux: lesquels estans moitez des parallelogrames AE, HB, par la 34. p. 1. iceux parallelogrames seront aussi egaux entr'eux. Par mesme discours on demonstera les autres parallelogrames opposez AG, DB; AC, FB, estre semblables & egaux.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Si vn solide parallelipede est couppé par vn plan parallel aux plans opposez, les solides coupez seront l'un à l'autre comme leur base.

Soit le solide parallelipede ABCD couppé par le plan EF parallel aux deux opposez AD & BC, & faisant deux solides AF & EC: ie dis qu'iceux solides seront l'un à l'autre, comme la base AH à la base BH.



Qu'il ne soit ainsi (la ligne AB estant prolongee de part & d'autre.) Soient faictes egales AI à AE, & BK à BE, & soient accomplis les parallelogrames IM & BN. Item les solides A Q & BP. Doncques puis que AI, AE, sont egales, les parallelog. IM, AH seront aussi egaux par la 1. p. 6. & par la 24. p. 11. les

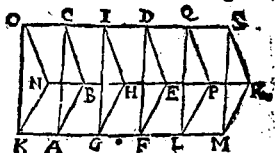
plans opposez LD, GD seront semblables & egaux: Item AI, AG semblables & egaux à MQ. MF, plans opposez; & ainsi des autres: & par la 9. def. de ce liure, le solide AQ est egal au solide AF. Par le mesme discours le solide BP sera egal au solide FB: partant le solide IF est autāt multiplie du solide AF, comme la base IH est multiplie de la base AH: Item le solide EP est autant multiplie du solide EC, comme la base EN est multiplie de la base BH: & partant comme la base IH sera plus grande, egale ou plus petite que la base AH, ainsi le solide IF sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide AF. Tout de mesme, comme la base EN sera plus grande, egale, ou plus petite que la base BH, ainsi le solide EP sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide EC. Maintenant soient quatre grandeurs, les deux bases AH, BH, & les deux solides AF, EC: desquelles de la premiere & troisieme, (sçavoir de la base AH & du solide AF) on a pris les equemultiplices HI base, & IF solide: Item de la seconde & quatrieme, (sçavoir de la base BH, & du solide EC) les equemultiplices EN base, & EP solide, lesquels nous auons monstré estre comme demande la 6. d. 5. plus grands, egaux ou plus petits, en quelconque multiplication qu'elles soient prises: & partant comme la base AH à la base BH, ainsi le solide AF au solide EC: ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Ceste propos. se peut accommoder à tous prismes: Car si quelconque prisme est couppé par un plan parallel aux plans opposez; tout ainsi que la base sera à la base, ainsi le solide sera au solide. Car soit premierement le prisme ABCDEF, auquel les plans opposez sont les triangles ABC, DEF; & soit icy couppé par le plan GHI parallel aux plans opposez. Je dis que comme la base AI est à la base FI, ainsi le solide ABGHI est au solide FEDIHG. Car soit imaginé le prisme ABCDEF estre prolongé de part & d'autre, tant qu'on voudra; & de AF prolongee soient prises AK egale à GF, & FL, LM egales à FG: En apres par les points G, L, M soient entendus les plans KNO, LPQ, MRS parallels aux plans ABC, GHI, FED. Donc puis que les plans parallels ABC, GHI, sont coupez par le plan AI; leurs communes sections AC, GI, seront parallels par la 6. p. 1. Mais à cause que AD est parallelog. AG, CI seront aussi paralleles. Donc AI est parallelog. Par mesmes raisons seront demonstrez AH, CH estre parallelog. Et pource que les costez AC, AB, du triangle ABC, sont egaux,

aux costez GI, GH , du triangle GHI , (car par la 34. p. 1. AC est egal à GI , & AB à GH) & par la 10. p. 11. les angles BAC, HGI sont aussi egaux; (pource que les lignes AB, AC sont paralleles aux lignes GH, GI , & en diuers plins) par la 4. p. 1. les triangles ABC, GHI sont egaux entr'eux, & equiangles: Parquoy par la 4. p. 6. l. 5 costez d'a-

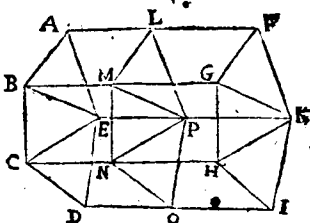
lontour les angles egaux, seront pr^o portionnaux; & partant iceux triangles seront semblables. Donc le solide $ABCIHG$, contenu des deux plans opposez ABC, GHI e-



gaux & semblables, & des parallelog. AI, IB, GB , est un prisme. Par mesme raison $ABCONK, GHIDEF, DEFLPQ, LPQSR$ seront prismes: Et pource que les parallelogrammes AI, KC sont egaux & semblables, comme aussi AH, KB ; & CH, GB ; tous les plans du prisme $ABCIHG$, seront egaux & semblables à tous les plans du prisme $ABCONK$. Parquoy par la 9. d. 11. les prismes $ABCIHG, ABCONK$ sont egaux. Par mesme raison les prismes $GHIDEF, DEFLPQ, LPQSRM$ seront egaux. Partant le prisme $KNOIHG$ sera autant multiple du prisme $ABCIHG$, que la base KI , de la base AI ; & le prisme $GHISRM$ autant multiple du prisme $GHIDEF$, que la base GS de la base GD . Et pource que si la base KI , (multipliee de la base AI premiere grandeur) est egale à la base GS (multipliee de la base GD 2. grandeur) aussi le prisme $KNOIHG$ (multiple du prisme $ABCIHG$ 3. grandeur) est egal au prisme $GHISRM$, (multiple du prisme $GHIDEF$ 4. grandeur.) Mais si la base KI est plus grande que la base GS , aussi le prisme est plus grand que le prisme; & si moindre, en quelconque multiplication: par la 6. d. 5. cōme la base AI premiere grandeur, sera à la base GD 2. grandeur, ainsi le prisme $ABCIHG$ 3. grandeur sera au prisme $GHIDEF$ 4. grandeur. En la mesme maniere on demonstrera que le prisme est au prisme, comme la base AH est à la base GE , & comme la base CH est à la base EI . Ce qui estoit proposé.

Soit maintenant le prisme $ABCDEFGHIK$, duquel les plans opposez sont polygones, c'est à sçavoir pentagones, & soit couppé par le plan $LMNOP$. Je dis derechef, que comme la base CM est à la base NG , ainsi est le solide $ABCDELMNOP$, au solide $LMNOPFGHIK$. Car si les plans opposez parallels sont resouds en triangles; aussi le prisme sera resoud en autant de prismes qu'il y aura de triangles es plans opposez. Parquoy comme la base BP est à la base MK , ainsi le prisme $ABEPAL$ sera au prisme $LMPKGF$, par les choses d'monstrees cy dessus. En la mesme maniere, comme la base CP est à la base NK , ainsi le prisme $BCPERN$ sera au prisme $MNPKGH$; &

le prisme CDEPNO au prisme NOPKHI. Mais par la 1. p. 6. comme BP est à MK; & CP à NK, ainsi est la ligne EP à la ligne PK, c'est à dire comme CN est à NH, & comme CN est à NH, ainsi est CM à NG. Donc les prismes ABEP, ML, BCEPMN, CDEPNO, ont mesme raison aux prismes LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, que CM à NG; & partant ont la mesme entr'eux. Mais par la 12. p. 5. comme un seul est à un seul, ainsi sont les trois aux trois. Donc comme le prisme BCEPMN sera au prisme MNPKGH, c'est à dire comme la base CM à la base NG, ainsi le prisme ABCDELMNOP composé des trois sera au prisme LMNOFEGHIK composé des trois. Ce qui estoit proposé. Il y aura mesme demonstration en quelconque autre prisme.



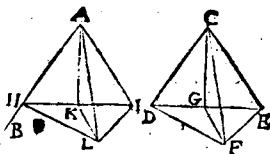
COROLLAIRE.

De cety resulte que si quelconque prisme est couppé par un plan parallel aux plans opposez, que la section est une figure egale & semblable aux plans opposez. Car il a esté démontré au premier prisme que le triangle GHI est egal, & semblable au triangle ABC, & partant au triangle DEF. Et il y a mesme demonstration en tous. Le mesme se doit entendre des parallelepipedes.

PROB. 4. PROP. XXVI.

Sur vne ligne droicte, & à vn point donné en icelle, constituer vn angle solide egal à vn angle solide donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, & le point en icelle A; & il faut construire sur icelle AB, & au point A, vn angle solide egal à l'angle solide C compris de trois angles plâs DCE, ECF, FCD.



Soit tiree de F, la ligne FG perpendiculaire au plan des li-

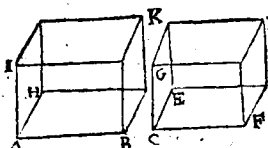
ignes CD, CE, par la 11. p. 11. & soient menees les lignes DF, FE, EG, GD, CG : en apres soit prise AH egale à CD : & par la 23. p. 1. soit fait l'angle HAI egal à l'angle DCE : & la ligne AI egale à la ligne CE. Derechef au plan tiré par AH, AI soit fait l'angle HAK egal à l'angle DCG : & la ligne AK egale à la ligne CG : puis par la 12. p. 11. de K soit tiree au plan auquel sont les trois AH, AK, AI, la perpendiculaire KL : laquelle soit posee egale à FG, & soit menee la ligne AL. Ie dis que l'angle solide A, contenu des trois angles plans HAI, HAL, LAI, est egal à l'angle solide donné C.

Car estans menees les lignes HK, KI, IL, LH : veu que les costez AH, AK du triangle AHK, sont egaux aux costez CD, CG du triangle CDG, & les angles HAK, DCG egaux par la construction : les bases HK, DG seront egales par la 4. p. 1. Et d'autant que des angles egaux HAI, DCE, estans ostez les angles egaux HAK, DCG, demeurent egaux les angles KAI, GCE : lesquels par la construction sont compris de lignes egales; par la 4. p. 1. les bases KI, GE, seront aussi egales. Les costez KH, KL sont aussi egaux aux costez GD, GF, & les angles HKL, DGL droicts : donc par la mesme 4. p. 1. les bases HL, DF, seront egales. Parquoy puis que les costez AH, AL du triangle AHL, sont aussi egaux aux costez CD, CF du triangle CDF : (car les costez AK, KL, sont egaux aux costez CG, GF, par la construction, & comprennent angles droicts : partant les bases AL, CF sont egales par la 4. p. 1.) les angles HAL, DCF seront pareillemēt egaux par la 8. p. 1. Finalement pour ce que les costez KI, KL sont egaux aux costez GE, GF : & les angles IKL, EGF droicts; par la 4. p. 1. les bases IL, EF sont egales : partant puis que les costez AI, AL du triangle AIL sont egaux aux costez CE, CF du triangle CEF, par la construction, les angles IAL, ECF seront aussi egaux par la 8. p. 1, donc les trois angles plans HAI, HAL, LAI, composant l'angle solide A, sont egaux aux trois angles plans DCE, DCF, FCE, composant l'angle solide C ; & partant l'angle solide A est egal à l'angle solide C : ce qui estoit requis.

PROB. 5. PROP. XXVII.

Sur vne ligne droite donnee, descrire vn solide parallelepipedes semblable, & semblablement posé à vn solide parallelepipedes donné.

Soit la ligne donnée AB, sur laquelle il faut construire vn solide parallepipede semblable, & semblablement posé au parallepipede donné CD.



Sur la ligne AB & au point A, soit fait vn angle solide egal à l'angle solide C par la 26. p. 11. lequel soit compris des trois angles plans HAI, BAI, BAH : & par la 12. p. 6. soit fait comme CF est à CG, ainsi AB à AI, & comme CG à CE, ainsi AI à AH : & en raison egale AB sera à AH comme CF à CE. Soient maintenant paracheuez les parallelog. BH, HI, BI, BK, KI, KH. Je dis que le solide AK est semblable & semblablement posé au solide CD donné.

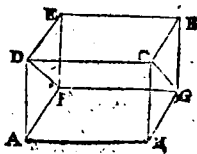
Car ils ont autant de superficies planes l'un comme l'autre : & d'autant que AB est à AI, comme CF à CG, & l'angle BAI egal à l'angle FCG, le parallelogramme BI est semblable au parallelog. FG : par la mesme raison le parallelog. BH sera semblable au parallelog. FE : & HI à EG. Partant trois parallelog. du solide AK sont semblables & semblablement posez, à trois parallelog. du solide CD. Mais par la 24. p. 11. les trois opposez sont egaux, & semblables. Parquoy les six plans du solide AK sont semblables & semblablement posez aux six plans du solide CD : & partant par la 8. d. de ce liure les solides AK & CD seront semblables & semblablement posez.

THEOR. 23. PROP. XXVIII.

Si vn solide parallepipede est coupé par vn plan passant par les diagonales des plans opposez : il sera coupé en deux egalemt.

Soit le solide parallepipede AB coupé par vn plan passant par les diagonales des plans opposez DF, CG. Je dis qu'il est coupé en deux egalemt.

Car il est euident par la 34. p. 1. que les triangles ADF, EFD sont egaux : item les deux CGH & GCB, & le plan AG egal & semblable au plan DB, &

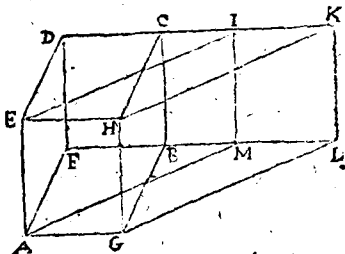


AC à FB par la 24. p. 11. (car ils sont opposez) Partant les deux prismes ADCHGF, FEBGCD, sont cōpris de parallelogrammes, & de triangles opposez semblables & egaux : & par la 9. def. de ce liure iceux prismes sōt egaux. Parquoy puis qu'ils composent le parallepipede AB : iceluy sera couppé en deux également par le plan DCGF : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 24. PROP. XXIX.

Les solides parallelipedes ayans mesme base, & mesme hauteur, & desquels les plās opposez à la base sont entre mesmes lignes droictes, sont egaux entr'eux.

Soient les deux solides parallelipedes AB CDEEGH, ALKIEH GM, tous deux sur la mesme base AH, de mesme hauteur ; ayans les deux plans FC & MK opposez à la base AH constituez entre les mesmes lignes droictes DK & FL : ie dis qu'iceux deux solides parallelipip. sont egaux entr'eux.



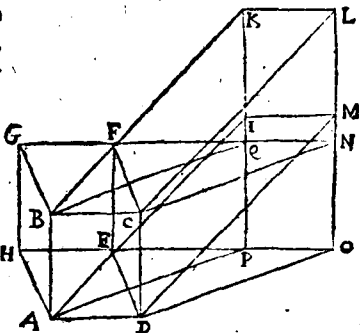
Ceste demōstration est facile à celuy qui a bien conceu celle de la 35. p. 11. Car ce que celle-là prouue par les triangles egaux, auxquels on oste & adiouste. Icy on prouue par les prismes egaux, desquels on retranche & adiouste vn prisme commun. Les prismes AFMIDE, GBLKCH, seront monistrez egaux par la 24. p. 11. parce que les plans opposez des parallelipedes sont semblables, & egaux : & d'iceux sont faicts les prismes. Le reste est aisé.

THEOR. 25. PROP. XXX.

Les solides parallelipedes constituez sur

mesme base, & de mesme hauteur, & desquels les plâs opposez à leur base ne sont entre mesmes lignes droites, sont egaux entr'eux.

Soient deux solides parallelipipedes ABCD EFGH, ABCDMLKI, tous deux sur mesme base ABCD, & de mesme hauteur (c'est à dire que leurs plans opposez, & parallels à leur base ABCD, sçauoir GE & KM soient en vn mesme plâ, lequel soit parallel à la base AC) ie dis qu'ils sont egaux entr'eux, encores que les plans GE & KM opposez à leur base commune AC, ne soient entre mesmes lignes droites.



Car puis que les plans GE & KM sont en vn mesme plan, & qu'ils ne sont entre mesmes lignes droites: il est certain que deux costez de l'un estans continuez, couperont deux costez de l'autre aussi continuez. Soient donc les costez GF, HE continuez vers N & D: Item KI, LM vers P & O: elles se couperont donc aux poincts Q, N, P, O, faisant vn parallelograme (d'autant que les lignes continuees sont paralleles) lequel sera egal à la base plane AC: Car par la 34. p. 1. les lignes QP & NO estans egales à GH, FE, elles le seront aussi à BA & CD: item PO & QN estans egales à IM & KL, elles le seront aussi à BC & AD: & apres auoir mené les quatre lignes AP, DO, BQ, CN: il est manifeste que les deux solides AF, AN, sont sur mesme base, & de mesme hauteur; (car ils sont entre mesmes plans) & les plans HF, PN opposez à la base AC, entre mesmes lignes droites, & par la 29. p. 11. ils sont egaux.

Pareillement le solide AN se trouuera egal au solide AL, (estâs sur mesme base AC, de mesme hauteur, & les plans QO, KM opposez à la base AC entre mesmes lignes droites) & par la commune sentence le solide AF sera egal au solide AL: ce qui estoit à demonstrier.

SCHOLIE.

On convertira tant ceste proposition que la precedente en ceste maniere.

Les solides parallelepipedes egaux ayans mesme base, soit qu'ils soient colloquez entre mesmes lignes droictes, ou non, sont en mesme hauteur.

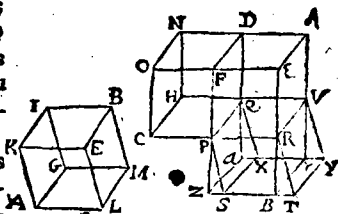
Car si l'on dit que l'un est plus haut, si d'iceluy on coupe un parallelepipede de mesme hauteur que l'autre, le couppé & l'autre serbent egaux, par la 29. ou 30. p. 1. & puis qu'à cest autre est posé egal au tout; le couppé sera egal au tout; Ce qui est absurde.

THEOR. 26. PROP. XXXI.

Les solides parallelepipedes estans sur bases egales, & de mesme hauteur; sont egaux entre eux.

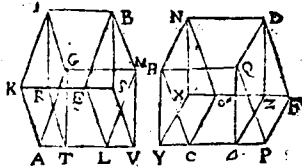
Soient les deux solides parallelepipedes A B, C D constituez sur bases egales A E & C F, & de mesme hauteur A G, C H. Je dis qu'iceux solides sont egaux.

Qu'ainsi ne soit. Leurs hauteurs sont perpendiculaires, ou non: Soient premierement perpendiculaires: & apres avoir continué C P iusques à K, & fait P R egale à K E, au plan de O P prolongé, soit fait l'angle R P S egal à l'angle A K E, & fait P S egale à K A: puis soit acheué le parallelogramme P T, sur lequel soit construit le parallelepipede Q S T V à la hauteur de la perpendiculaire P Q. Donc puis que les costez P R, P S sont egaux aux costez E K, K A, & les angles R P S, E K A egaux, les parallelog. P T, K L seront eg. & semblab. Derechef puis que les costez P Q, P S sont egaux aux costez K I, K A, & les angles Q P S, I K A droicts par la 2. d,



11. pource qu'icelles IK, PQ sont posees perpendiculaires aux plans AE, PT : aussi les parallelog. QS, AI, seront eg. & semblab. Par mesme raison, d'autant que les costez PR, PQ sont egaux aux costez KE, KI, & les angles RPQ, EKI droicts par la mesme 2. d. 11. pareillement les parallelog. PV, KB seront eg. & semblab. Parquoy puis que les trois parallelog. PT, QS, PV, du parallelepiped QSTV sont egaux & semblables aux trois KL, AI, KB, du parallelepiped AIBL, par la 24. p. 11. tant ceux-là que ceux-cy seront egaux & semblables à leurs autres parallelog. opposez : & partant par la 9. def. de ce liure les parallelepipedes AB, SV seront egaux entr'eux. Maintenant que FP, TS prolongees se rencontrent en Z : & DQ, YX, en A & soit acheué le parallelepiped ZV. Item que ND, YV prolongees se rencontrant en A, & OF, BR, en I, & soit acheué le parallelepiped DR. Donc puis que les parallelepipedes SV, ZV, ont mesme base PV, & sont en mesme hauteur, & que les plans SY, ZY, opposez à la base, sont entre mesmes lignes droictes ZT, AY : iceux solides seront egaux entr'eux par la 29. p. 11. Mais le parallelepiped SV est egal au parallelepiped AB : donc le parallelepiped ZV sera egal au mesme AB. Et d'autant que par la 35. p. 1. les parallelogrammes PT, PB sont egaux, & PT egal à AE, aussi PB sera egal au mesme AE, c'est à dire à CF (car AE, CF sont posees bases egales) & par la 7. p. 5. comme CF sera à P₁, ainsi PB sera à P₁ : & par la 25. p. 11. comme la base CF est à la base P₁, ainsi le solide CD est au solide P₁, puis que le parallelepiped CD est couppé par le plan PD parallel aux plans opposez CN, RA : Par la mesme raison cōme PB est à P₁, ainsi le solide ZV ou solide P₁, pource que le parallelepiped DB est couppé par le plan PV parallel aux plans opposez. Donc par la 9. p. 5. les parallelepipedes CD, ZV seront egaux, puis qu'ils ont vne mesme raison au solide P₁, sçavoir est la mesme qu'ont les bases CF, PB, à la base P₁. Parquoy puis que le parallelepiped ZV a esté demonstré egal au parallelepiped AB : les parallelip. AB & CD seront pareillement egaux : ce qui estoit proposé.

Maintenant si leurs hauteurs ne sont perpendiculaires sur les bases AE, CF, soient tirees des points (apres auoir continué les lignes AL, KE & PC, FO, tant qu'il sera de besoin) G, I, B, M, & H, N D, Q, & sur les plans d'audeffous d'iceux points les perpen-



diculaires GT, IR, BS, MV, & HY, NX, DZ, Qa, par la 11. p. 11, & soient tirées RT, SV, XY, Za. Il est évident par ce qui a été démontré cy dessus que le solide TB est égal au solide YD, car ils sont sur bases égales GB, HD : & de même hauteur : Mais par la 29. p. 1. le solide TB est égal au solide AB; & le solide YD égal au solide CD : donc le solide AB sera égal au solide CD. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E .

On convertira ceste 31. prop. en ceste manière.

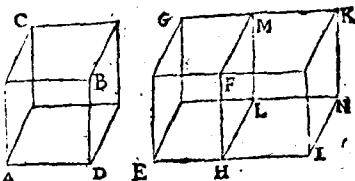
Les solides parallépipèdes égaux, constitués sur bases égales, sont en même hauteur : & les solides parallépipèdes égaux, qui sont en même hauteur : sont sur bases égales, s'ils n'ont une même base.

Cār si on croit l'un plus haut que l'autre : si on coupe du plus haut un parallépip. de même hauteur que l'autre : par la 31. p. 11. le coupé sera égal à l'autre, auquel est aussi posé égal le tout : parquoy le coupé sera aussi égal au tout : ce qui est absurde. Que si les parallépip. étant de même hauteur, on croit que la base de l'un soit plus grande que la base de l'autre, si on coupe d'icelle base une égale à l'autre, & sur icelle coupée on entend estre un parallépip. ede de même hauteur, nous démontrerons en la même manière, la partie estre égale au tout : ce qui est absurde.

THEOR. 27. PROP. XXXII.

Les solides parallépipèdes de même hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux parallépipèdes de même hauteur ABCD, EF GH, desquels les bases soient AB, EF : Je dis que le solide est au solide comme la base à la base.



Car si sur la ligne HF (après avoir prolongé le plan EF vers I) & sur l'angle FHI on construit le parallélogramme FE

egal au parallelograme AB : puis on acheue le solide IFLK; iceluy estant de mesme hauteur que le solide ABCD, & sur base egale, il luy sera egal par la 31. p. 11. Parquoy par la 7. p. 5. comme le solide IFKL est au solide EFGH, ainsi le solide ABCD au mesme solide EFGH. Mais par la 25. p. 11. le solide IFKL est au solide EFGH, comme la base IF, c'est à dire AB à la base EF; Donc aussi le solide ABCD, sera au solide EFGH, comme la base AB, à la base EF: ce qu'il falloit prouuer.

S C H O L I E.

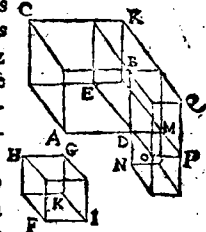
La conuerse ; si les solides parallelepipèdes sont entr'eux comme leurs bases, ils seront en mesme hauteur. Car si l'une est plus grande que l'autre, soit de la plus grande coupee une egale à la moindre, & soit tiré un plan parallél à la base ; & par la 32. p. 11. comme la base sera à la base, ainsi le parallelepipède sera au parallelepipède couppé: mais ainsi il estoit aussi au parall. lip. total. Donc le couppé est egal au tout par la 9. p. 5. ce qui est absurde.

THEO. 28. PROP. XXXIII.

Les semblables solides parallelepipèdes, s'ont l'un à l'autre en raison triplee de leurs costez homologues.

Soient deux semblables parallelepipèdes ABCDEFGHIK constituez sur les bases semblables AE, FK, esquelles les costez homologues sont AD, FI. Je dis que le parallelepipède ABCDE est parallelepipède FGHIK en raison triplee des costez homologues AD, FI.

Qu'ainsi ne soit : soit prolongé AD vers M, tellement que DM soit egale à FI, ou HG. Item BD vers N, en sorte que DN soit egale à LI ou GK : Item ED vers O, tellement que DO soit egale à KI ou GL : puis apres estans accomplis les parallelogrames DP, MN, NO, soit acheué le parallelepipède NMP. Il est donc euident que les deux parallelepipèdes



FG, NP sont semblables & égaux, puis qu'ils sont composez de plús qui ont les angles égaux, & les costez au long d'iceux angles égaux, aussi égaux. Item soient construis les parallelepipedes BMOQ, & EBRM. D'autant que les parallelepipedes ABCD; FGHI, sont semblables, comme AD est à FI, c'est à dire à DM, ainsi DE à KI, c'est à dire à DO; & BD à LI, c'est à dire à DN. Mais par la 1. p. 6. comme AD à DM, ainsi est le parallelo. AE, au parall. BM; & cōme ED à DO, ainsi le parall. EM à DP; & comme BD à DN, ainsi le parallelograme BM à MN. Donc comme AE sera à EM, ainsi EM à DP, & BM à MN. Mais par la 32. p. 11. comme la base AE à la base EM, ainsi est le parallelepipedes AECB au parallelepipedes EMRB; & comme la base EM est à la base DP, ainsi le parallelepipedes EMRB est au parallelip. DPBQ; & comme la base BM est à la base MN, ainsi le parallelepipedes DPBQ au parallelipipedes NP. Parquoy comme le parallelip. AECB sera au parallelipipedes EMRB, ainsi le parallelip. EMRB sera au parall. DPBQ; & le parallelipipedes DPBQ au parallelip. NP: Partāt les quatre quantitez AECB, EMRB, DPBQ; NP sont continuellement proportioneles; & par la 10. d. 5. la premiere AE CB sera à la 4. NP, c'est à dire à FG, en raison triplee de la premiere AECB à la seconde EMRB. Mais par la 32. p. 11. comme AECB est à EMRB, ainsi la base AE, est à la base EM; & par la 1. p. 6. comme AE est à EM, ainsi AD est à DM, c'est à dire à FI. Donc par la 11. p. 5. AECD sera à EMRB comme AD à FI: partant la raison triplee de AECD à EMRB, sera la mesme que de AD à FI; & par consequent AECD estant à FG en raison triplee de AECD à EMRB; il sera aussi en raison triplee de AD à FI. Ce qu'il falloit demonstret.

COROLLAIRE.

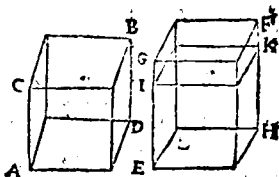
Par cecy est evident que s'il y a quatre lignes droictes continuellement proportioneles, comme la premiere est à la 4. ainsi le parallelepipedes décrit sur la premiere, est au parallelip. semblable, & semblablement décrit sur la seconde. Puis que tant le parallelepipedes est au parall. lip. que la premiere ligne à la 4. en raison triplee de la raison de la premiere ligne à la 2. savoir des costez homologues.

THEOR. 29. PROP. XXXIV.

Les égaux solides parallelepipedes, ont les

bases & les hauteurs reciproques : Et ceux qui ont les bases & les hauteurs reciproques, sont egaux.

Soient egaux les parallepipèdes ABCD, EFGH sur les bases AD, EH. Je dis que leurs bases & leurs hauteurs sont reciproques, c'est à dire, que comme la base AD est à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur AC.



Qu'il ne soit ainsi. Premièrement il est evident que si les bases AD & EH sont egales (estans les solides egaux) qu'il faudra aussi que les hauteurs soient egales. Soient donc les bases inegales, sçavoir AD plus grande que DH. Je dis que la hauteur EG doit estre plus grande que CA : car elle ne peut estre plus petite, non pas seulement egale, d'autant que par la 32 p. 11. iceux solides seroient l'un à l'autre cōme leurs bases; partant AB plus grand que EF, & nous les auons posez egaux: La hauteur EG sera donc plus grande que CA, & d'icelle soit retranchee EI egale à CA, & d'iceluy poinct I soit imaginé le plan IK parallel à EH, couper le parallepipede EF : Or les deux solides AB & EF estans egaux; ils auront mesme raison l'un comme l'autre au solide EK, par la 7. p. 5. Mais AB & EK estans de mesme hauteur, ils seront l'un à l'autre commela base AD à la base EH, par la 32. p. 11. Partant EF sera aussi à EK comme la base AD à la base EH. Or comme le parallepipede EF est au parallepipede EK, ainsi la base GL à la base IL, par la 25. p. 11. & icelle base GL est à la base IL, comme la ligne EG est à la ligne EI, par la 1. p. 6. & partant par la 11. p. 5. le solide EF est au solide EK, comme EG à EL. Mais le solide EF est aussi au solide EK, comme la base AD à la base EH : Donc par la 11. p. 5. comme la base AD à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur EI, où à son egale AC.

Pour la seconde partie si AD base est à EH base, comme EG hauteur est à AC hauteur. Je dis que les deux solides AB, & EF sont egaux.

Car si les hauteurs sont egales, il est evident que les bases sont aussi egales, puis qu'elles sont posees en mesme raison; & partant par la 31. p. 11. les parallepipèdes AB, EF seront pareillement egaux.

Que si la hauteur EG est plus grande que la hauteur AC, soit retranchée d'icelle EI, égale à AC, & par I soit tiré le plan IK parallèle à la base EH. Donc par la 32 p. 11. comme la base AD est à la base EH, ainsi le solide AB est au solide EK, puis que leurs hauteurs sont égales: Et par la 1. p. 6. comme EG est à EI, ainsi le plan GL est au plan IL. Mais comme la base GL est à la base IL, ainsi le solide EF, est au solide EK: (car ils sont de même hauteur,) donc comme le solide AB est au solide EK, ainsi le solide EF est au même solide EK, puis que par l'hypothèse AD est à EH comme EG à AC ou EI: partant par la 9. p. 5. les solides AB, EF seront égaux.

S C H O L I E.

Il faut noter qu'à ceste démonstration & presque à toutes les autres de ce livre, les hauteurs des solides doivent estre perpendiculaires. Parquoy si elles n'estoient telles, les y faudroit reduire, comme nous avons fait à la fin de 31. p. de ce livre.

Or toutes les choses que nous avons démontrées es 6 précédentes propositions, sçavoir, 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conviennent aussi aux prismes qui ont deux plans opposés triangulaires, observant les susdites hypothèses. Car si à deux tels prismes de même hauteur, & constitués sur une même base, ou sur bases égales, on appose deux autres prismes égaux & semblables à iceux, seront faits deux parallélipèdes de même hauteur, & constitués sur même, ou bases égales. Parquoy par la 29. 30. ou 31. p. 11. seront égaux iceux parallélip. & partant aussi les prismes donnés, c'est à sçavoir les moitiés d'iceux parallélip.

Derechef si aux deux prismes susdits de même hauteur, & constitués sur diverses bases, on adjoinct deux autres prismes égaux, & semblables à iceux, seront faits derechef deux parallélipèdes de même hauteur: Parquoy par la 32. p. 11. le parallélipède sera au parallélipède comme la base à la base; & partant par la 15. p. 5. le prisme sera au prisme, c'est à sçavoir la moitié de l'un des parallélip. à la moitié de l'autre, comme la même base à la base, si les bases des prismes sont parallélogrames, ou comme le triangle au triangle, sçavoir est la moitié d'une base à la moitié de l'autre, si les bases sont triangulaires.

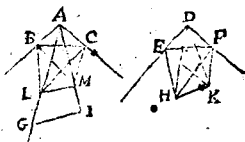
D'avantage, si à iceux deux prismes semblables, on adjoûte deux autres prismes égaux & semblables à eux seront constitués deux parallélip. semblables, lesquels par la 33. p. 11. seront entr'eux en raison triplee des costez homologues. Donc aussi par la 15. p. 5. les prismes, sçavoir est les moitiés d'iceux, auront la raison triplee de mêmes costez homologues, lesquels sont pareillement costez homologues des prismes.

Finablement, si aux deux susdits prismes égaux, on adionste deux autres prismes égaux & semblables à ceux, seroit constitué deux parallélépipèdes égaux de mesme hauteur que les prismes: Parquoy par la 34 p. 11. puis que les bases, & les hauteurs des parallélépipèdes, sont reciproques, & les bases des prismes sont les mesmes, ou les triangles moictiez d'icelles, ayant mesme raison par la 15 p. 5. Aussi les bases & hauteurs des prismes seront reciproques.

THEOR. 30. PROP. XXXV.

S'il y a deux angles plans égaux, aux sommets desquels soient leuees en l'air deux lignes droictes faisant angles égaux avec les costez des angles premieremēt posez, chacun au sien: & d'un point pris au haut de chacune des deux lignes sont menees des lignes perpendiculaires sur les plans esquels sont les angles premiere-ment posez; & des points où tombent icelles perpendiculaires sont tirees des lignes droites vers les sommets des angles premierement posez: Les angles que font icelles lignes, avec les leuees en l'air sont égaux entr'eux.

Soient les deux angles plans égaux BAC, EDF, du sommet desquels A & D, soient leuees en l'air les lignes droites AG, DH, tellement que l'angle BAG est égal à l'angle EDH: & l'angle CAG égal à l'angle FDH: & des points



G & H pris es lignes AG, DH, soient tirees aux plans esquels sont les angles BAC, EDF, les perpendiculaires GI, HK, tombantes es points I, K, desquels soient menees les lignes IA, KD. Je dis que les angles GAI, HDK, sont égaux entr'eux.

Car si les deux lignes AG, DH sont inegales, de la plus grande AG, soit retranchée AL égale à DH; & de L au plan de

triangle AGI, soit tirée LM perpendiculaire à GI : laquelle LM sera perpendiculaire au plan de l'angle BAC par la 8. p. 11. puis que GI est perpendicul. à iceluy plan. Soient aussi tirez des poinçts M, K, les lignes MB, MC, KE, KF, perpendiculaires aux lignes AB, AC, DE, DF ; & soient menees les lignes BC, BL, LC, EF, EH, HF. Or d'autant que LM est perpendiculaire au plan de l'angle BAC, elle le sera aussi à la ligne AM tirée au mesme plan par la 2. d. 11. partant par la 47. p. 1. le quarré de AL sera egal aux quarréz de AM, ML : mais par la mesme prop. le quarré de AM est egal aux quarréz de AC, CM, puis que l'angle ACM est droit par la construction. Donc le quarré de AL est egal aux quarréz de AC, CM, ML : Et par la 47. p. 1. le quarré de CL est egal aux quarréz de CM, ML, puis que par la 2. d. de ce liure, l'angle CMB est droit. Donc le quarré de AL est egal aux quarréz de AC, CL : & partant par la 48. p. 1. l'angle ACL est droit. Derechef, puis que par la 47. p. 1. le quarré de AL est egal aux quarréz de AM, ML : & le quarré de AM est egal aux quarréz de AB, BM, l'angle ABM estant droit par la construction : le quarré de AL est egal aux quarréz de AB, BM, ML : mais le quarré de BL est egal à iceux quarréz de BM, ML, pource que l'angle BML est droit par la 2. d. 11. Donc le quarré de AL est egal aux quarréz de AB, BL : & partant par la 48. p. 1. l'angle ABL sera droit. On démontrera en la mesme maniere que les angles DFH, DEH sont aussi droits. Maintenant puis que les angles ABL, LAB, du triangle ABL sont egaux aux angles DBH, HDE, du triangle DEH, & les costez AL, DH aussi egaux, par la 26. p. 1. les autres costez AB, BL seront pareillement egaux aux autres costez DE, EH. Par mesme raison seront egaux les costez AC, CL, aux costez DF, FH. Parquoy les costez AB, AC du triangle ABC, estans egaux aux costez DE, DF du triangle DEF, & les angles BAC, EDF aussi egaux, par la 4. p. 1. les bases BC, EF, seront pareillement egales entr'elles, & les angles ABC, ACB egaux aux angles DEF, DFE. Mais tous les angles ABM, ACM, sont egaux à tous les angles DEK, DFK, puis qu'ils sont tous droits : Donc aussi les autres angles MBC, MCB seront egaux aux autres angles KEF, KFE : & partant puis que les costez BC, EF, ont esté demostrez egaux, les costez BM, CM, seront egaux aux costez EK, FK, par la 26. p. 1. veu donc que les costez AC, CM, du triangle ACM sont egaux aux costez DF, FK du triangle DFK, & les angles ACM, DFK sont droits, par la 24. p. 1. les bases AM, DK seront egales. Et puis que BL, EH ont esté demostrees egales, leurs quar-

rez seront aussi égaux : Mais par la 47. p. 1. le carré de BL est égal aux carrés de BM, ML, & le carré de EH aux carrés de EK, KH, pour ce que les angles BML, EKH sont droicts, par la 2. d. 17. Donc les carrés de BM, ML seront égaux aux carrés de EK, KH : & partant estans ostez les carrés de BM EK, qui sont égaux, les lignes BM, EK, ayant esté démontrées égales; resteront égaux les carrés de LM, HK, & partant les lignes LM, HK seront égales. Parquoy veu que les costez AL, AM du triangle ALM, sont égaux aux costez DH, DK du triangle DHK, & la base LM égale a la base HK; les angles LAM, HDK seront égaux par la 8. p. 1. ce qu'il falloit démontrer.

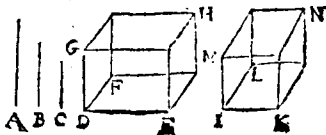
COROLLAIRE.

Parquoy s'il y a deux angles plans égaux, es sommets desquels soient esleuées en l'air des lignes droictes égales, lesquelles avec les lignes d'iceux angles premierement posez, contiennent angles égaux, chacun au sien; les perpendiculaires tirées des points extremes d'icelles lignes esleuées en l'air, sur les plans des angles premierement posez; seront égales entr'elles. Car d'autant que les angles plans BAC, EDF, sont posez égaux, & les lignes égales AL, AL, DH esleuées en haut constituent les angles égaux LAB, HDE; Item LAG, HDF; il a esté démontré que les perpendiculaires LM, HK, sont égales entr'elles.

THEOR. 31. PROP. xxxvi.

Si trois lignes sont proportionnelles; le solide parallelipede cõpris d'icelles trois lignes, est égal au solide parallelipede compris de la moyenne; moyennant qu'iceux deux solides soient equiangles.

Soient trois lignes continuellement proportionnelles A, B, C : & soit constitué vn angle solide D, de trois quelconques angles plâs EDF, EDG, FDH tellement que la ligne DE



soit egale à A, & DG à B, & DF egale à C: & soit accompli le parallelipede DH: en apres par la 26. p. 11. sur la ligne IK egale à B, & au point I soit fait l'angle solide I des trois angles plans KIL, KIM, & KIL, egaux aux trois EDF, EDG, FDG: tellement que les lignes IK, IL, IM soient egales à la moyenne B; & soit fait le parallelipede IN. Je dis que les solides DH, IN sont egaux.

Car puis que comme DE est à Ik, ainsi IL à DF: (car DE est egale à A; Ik, IL à B; & DF à C) & les angles EDF, KIL egaux; les parallelogrammes EF, kL seront egaux par la 14. p. 6. pource qu'ils ont les costez au long des angles egaux reciproques. Et d'autant qu'aux sommets des angles plans egaux EDF, kIL sont esleuez en l'air les lignes egales DG, IM, lesquelles avec les lignes des angles premierement posez comprennent angles egaux, vn chacun au sien: les perpendiculaires tirees de G, M, sur les plans des bases EF, KL; (sçauoir est les hauteurs des parallelipedes DH, IN) seront egales entr'elles par le corolaire de la precedente proposition Parquoy par la 31. p. 11. les parallelipedes DH, IN, seront egaux entr'eux, puis qu'ils ont les bases EF, KL egales, & pareillemēt les hauteurs egales: ce qu'il faloi demonstrier.

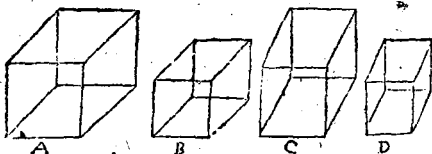
THEOR. 32. PROP. xxxvii.

Si quatre lignes sont proportioneles, les solides parallelipedes semblables, & semblablement descrits sur icelles, seront proportionaux: Et si iceux quatre semblables solides parallelipedes sont proportionaux; les quatre lignes sur lesquelles ils seront semblablement posez, seront aussi proportioneles.

Soient quatre lignes proportioneles comme A, B, C, D: & soient descrits sur icelles quatre solides semblables & semblablement posez A, B, C, D. Je dis qu'iceux solides sont proportionaux.

Car puis que le solide A est semblable au solide B: par la 33. p. 11. ils seront l'un à l'autre en raison triplee de la ligne A.

à la ligne B : pareillement les solides C & D seront aussi en raison triplee de C à D : mais la raison de A à B, est comme C à D par l'hypothese. Donc la raison triplee de A à B, sera



semblable à la raison triplee de C à D ; & partant par la 11. p. 5. le solide A sera au solide B, comme le solide C au solide D.

Maintenant si les quatre solides A, B, C, D sont proportionaux, la ligne A sera à la ligne B, comme la ligne C à la ligne D. Car tout de mesme le solide A sera au solide B, en raison triplee de la ligne A à la ligne B : Item le solide C au solide D, en raison triplee de C à D : mais le solide A est au solide B come le solide C au solide D : partant leur raison triplee sera semblable ; & par consequent les quatre lignes A, B, C, D, seront proportioneles.

SCHOLIE.

Nous adiousterons icy cest autre theoreme.

Si 4 lignes sont continuellement proportioneles : le parallelipede cõpris sous le quarré de l'une des extremes, & sous le quarré de l'autre extreme, est egal au cube de la moyenne proportionele plus prochaine de la premiere extreme prise.

Soient quatre lignes continuellement proportioneles A, B, C, D. Le *dis* que le parallelipede compris sous le quarré de l'extreme A, & sous le quarré de l'autre extreme D, est egal au cube de la moyenne B plus prochaine de l'extreme A.

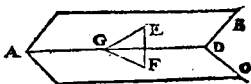
Car puis que par le coroll. de la 20. p. 6. le quarré de A est au quarré de B, comme A à C, c'est à dire comme B à D : les bases avec les hauteurs seront reciproques, puis que le quarré de A est la base du parallelipede, & la ligne D, la hauteur d'iceluy ; & la base du cube est le quarré de B, & sa hauteur la mesme ligne B. Donc par la 34. p. 11. le parallelipede & le cube seront egaux. Par mesme raison le paralle. ip. compris sous le quarré de l'extreme D, & sous le quarré

de l'autre extreme A, sera d:monstré egal au cube de la moyenne prop. C plus prochaine de l'extreme D.

THEO. 33. PROP. xxxviii.

Si vn plan est esleué perpendiculairement sur vn autre plan, & d vn point de l vn d iceux on meine vne ligne perpendiculaire sur l'autre; elle tombera sur leur commune section.

Soit le plan AB, esleué perpendiculairement sur le plan AC, leur ligne de commune section AD; & du point E pris en AB on laisse tomber vne perpendiculaire sur le pla AC: ie dis qu'elle tombera sur la commune section AD.

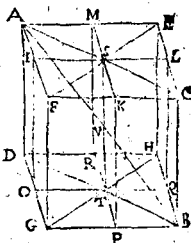


Autrement qu'elle tombe au point F, du plan AC, s'il est possible: & par la 12. p. 1. du point F sur la ligne AD soit menée la perpendiculaire FG; & la ligne GE faisant le triangle GFE. Or si la ligne EF est perpendiculaire au plan AC, elle le sera aussi à la ligne FG: & icelle FG estant perpendiculaire à la commune section AD: elle le sera pareillement au plan AB: & par consequent à la ligne GE: partant au triangle GFE, les deux angles sur la ligne GF seroiét tous deux droits contre la 17. p. 1. Donc la perpendiculaire tombant de E sur le plan AC ne tombera pas hors la commune section AD, mais elle tombera en icelle: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. xxxix.

Si les costez des plans opposez d vn solide parallelepiede, sont coupez en deux egale-ment; & on meine des plans par les sections: la ligne de commune section d iceux plans, & le diamette du solide parallelepiede, se couperont en deux egale-ment.

Soit le parallelepiped AB; les plâs opposez AC, BD, desquels tous les costez soient coupez en deux egalemēt es points I, K, L, M, O, P, Q, R, par lesquels soit imaginez passer les plans IQ, KR, se couppans l'un l'autre en la ligne ST: & soit menee la diagonale AB, Je dis que la ligne ST & la diagonale AB s'entre-couppent en deux egalemēt.



Car estans tirées les lignes SA, SC, TD, TB: soient considerez les deux triangles BQT, DOT, desquels les deux costez RQ, QT sont égaux aux deux costez DO, OT, (car BQ, DO, sont moitez des lignes droictes egales BH, DG: & par la 34. p. 1. QT, OT, sont egales aux deux egales BP, GP, puis que PQ, PO sont parallelogrammes) & l'angle EQT par la 29. p. 1. est egal à l'interne DOT: partant par la 4. p. 1. les bases BT, DT seront aussi egales: & les angles BTQ, DTO pareillemēt egaux; Et par la 13. prop. 1. les angles BTO, DTO sont egaux à deux droicts. Donc aussi DTO, BTO sont egaux à deux droicts; & partant par la 14. p. 1. BT, DT constituent vne seule ligne droicte. En la mesme maniere sera demōstré que AS, CS sont egales, & composent vne seule ligne droicte. Maintenant puis que l'une & l'autre AD, BC est parallele & egale à FG, à cause des parallelogrammes DF, FB: icelles seront aussi egales & paralleles entr'elles par la 9. p. 11. Parquoy AE, BD qui conioignent les extremitez d'icelles AD, BC, sont aussi egales & paralleles par la 33. p. 1. & par consequent AS, BT moitez d'icelles sont egales. Mais pource que AC, BD sont paralleles, les lignes AB, ST seront avec icelles en vn mesme plan, par la 7. p. 11. & partant s'entre-couperont en vn point, sçavoir en V. Et d'autant que par les 29 & 15. p. 1. les deux angles ASV, AVS du triangle ASV, sont egaux aux deux angles BTV, BVT du triangle BTV, & le costé AS egal au costé BT: les autres costez AV, SV, seront aussi egaux aux autres costez BV, TV, chacun au sien; par la 16. p. 1. Parquoy les deux lignes AB, ST s'entre-couppent en deux egalemēt au point V: ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

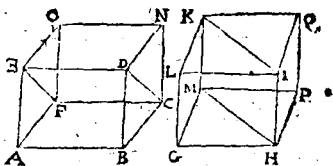
Par ce cy est evident qu'en tout parallelepipedo, tous les diametres

S'entrecoüppent en deux également en vn seul poinct, sçauoir est au poinct V, auquel ils diuisent en deux également la ligne ST. Est aussi manifeste que tout plan qui couppe le parallelepipede en deux également passe par le centre d'iceuy, sçauoir par V.

THEOR. 35. PROP. XL

Deux prismes de mesme hauteur sont egaux, si la base de l'vn triangulaire, n'est que la moitié de la base de l'autre, estant vn parallelogramme.

Soient deux prismes de mesme hauteur ABCDEF, GHIKLM; & que celuy-là ait pour base le parallelogramme ABCF, double du triangle GHM base du prisme GHIKLM. Je dis qu'iceux prismes sont egaux.



Car si on les accomplit pour estre solides parallelepipedes AN, GQ, la base GP sera egale à la base BF: & estans de mesme hauteur, ils seront egaux par la 31. p. 11. & par la 28. p. 11. les plans diagonaux CDEF, HIKM les diuiseront en deux également, & partant les prismes donnez au commencement estans les moitez de choses egales, seront egaux entr'eux: ce qu'il falloit prouuer.

Fin de l'Element vnziesme.



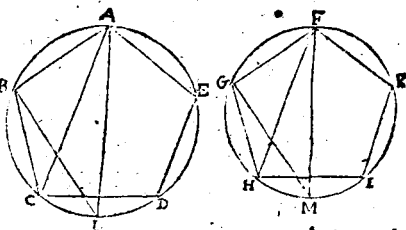
ELEMENT

DOVZIESME.

THEOR. I. PROP. I.

Es polygones semblables inscrits aux cercles ; sont l'un à l'autre comme les quarréz descrits des diametres des cercles .

Soient deux polygones semblables A BCDE, & FGHIK, inscrits dans les cercles, desquels les diametres sont AL, FM. Je dis qu'ils sont l'un à l'autre comme les quarréz des diametres AL, FM.



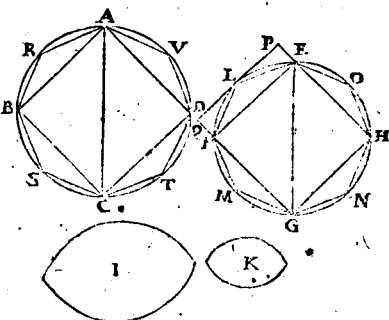
Qu'il ne soit ainsi. Soient menees les lignes AC, FH, item BL, & GM. D'autant que les pentagones sont semblables AB

est à BC, comme FG à GH, & l'angle ABC, égal à l'angle FGH; par la 6. p. 6. les triangles ABC, FGH sont equiangles; partant l'angle BCA sera égal à l'angle FHG. Mais ils sont chacun égaux, l'un à l'angle L, l'autre à l'angle M, par la 21. p. 3. (car ils sont sur mesmes sections BA & FG.) Ainsi l'angle L sera égal à l'angle M: & par la 31. p. 3. les angles ABL, FGM estans droicts dans les demy cercles, & égaux, les triangles ABL, FGM seront equiangles: (car le troisieme sera égal au troisieme, par la 32. p. 1.) & par la 4. p. 6. comme AL sera à AB, ainsi FM à FG; & en changeant comme AL sera à FM, ainsi AB à FG. Parquoy par la 22. p. 6. comme le pentagone descript sur AB sera à l'autre pentagone semblable, & semblablement posé sur FG: ainsi le quarré de AL au quarré de FM: ce qui estoit à prouver.

THEOR. 2- PROP. II.

Les cercles sont l'un à l'autre, comme les quarez descripts de leurs diametres.

Soient les deux cercles ABCD, EFGH, descripts sur les deux diametres AC & EG: Je dis qu'ils sont l'un à l'autre comme le quarré de AC est au quarré de EG; c'est à dire que si on imagine que comme le quarré de AC, au quarré EG, ainsi



le cercle ABCD a quelque figure quatriesme. propor. (comme I) qu'icelle figure I est égale au cercle EFGH.

Autrement elle sera plus petite ou plus grande. Soit premierement plus petite s'il est possible: & soit le cercle EFGH plus grand qu'icelle de la figure K. Or par la 1. p. 10. on peut retrancher plus de la moitié du cercle EFGH, & du residu plus de la moitié tant de fois qu'il demeure, a en fin vne qua-

tiré plus petite que K : Soit donc dans iceluy cercle EFGH
 décrit le quarré EFGH, qui est plus grand que la moitié du
 cercle: (d'autant que le quarré de EG, qui est son double, est
 plus grand que le cercle.) Si les quatre sections du cercle sont
 plus petite que K, nous auons ce que nous demandons: Sinon
 soit couppe l'arc EF en deux également au point L, & les
 trois autres arcs semblablement es points L, M, N, O; &
 soient tirées les lignes EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, & OE, a
 fin d'auoir l'octogone ELFMGNHO, inscrit dans le cercle:
 Il est euident que dans les quatre sections egales, il y aura qua-
 tre triangles egaux, & que chacun comme ELF, est plus de
 la moitié de sa section: (car le triangle Isoscele FLE est la
 moitié du rectangle FP de mesme hauteur & sur mesme base
 FE, par la 41. p. 1. lequel rectangle est plus grand que la section
 FLE.) Soient maintenant les huit petites figures restantes
 plus petites que la figure K, que si cela n'estoit, il faudroit
 tousiours couper les arcs derniers, & tousiours inscrire des
 polygones, desquels le dernier auroit deux fois autant de
 costez que son precedent, & soustraire tousiours plus de la
 moitié de chascune section, sçauoir son triangle Isoscele: Il est
 certain qu'à la fin les dernieres sections seront plus petites
 que la figure K. Mais pour abreger soient les deuant dictes
 huit sections restantes plus petites que la figure K: Il est eui-
 dent que l'octogone ELFMGNHO sera plus grand que la fi-
 gure I, puis que les deux I & K sont egales au cercle EFGH.
 Soit pareillement inscrit vn octogon esembleable, au cercle A
 BCD, ce qui est facile: car il n'y a qu'à couper en deux egale-
 ment les deux demy cercles ABC, ADC, en B & D; puis les cir-
 conferences AB, BC, CD, AD aussi en deux également en R, S,
 T, V; & ayant tiré les lignes droictes AR, RB, BS, SC, CT, TD,
 DV & VA; il est euident que la figure inscrite sera sēblable
 à la figure octogone descrite au cercle EFCH. Maintēnāt par
 la 1. p. 12. l'octogone ARBSCTDV sera à l'octogone ELFMG-
 NHO, comme le quarré de AC: est au quarré de EG: mais cō-
 me le quarré de AC est au quarré de EG, ainsi le cercle ABC
 D est à la figure I: & par la 11. p. 5. cōme le poligone ARBS-
 CT DV sera au poligone ELFMGNHO, ainsi le cercle ABCD
 sera à la figure I. Mais le poligone ARBSCTDV est moīn-
 dre que le cercle ABCD: Donc par la 14. p. 3. le polygone EL-
 FMGNHO sera aussi moindre que la figure I: Mais il a aussi
 esté demonstṛé plus grand. Ce qui est absurde. Donc la figu-
 re I n'est pas plus petite que le cercle EFGH.

On prouuera aussi qu'elle ne peut estre plus grande: Au-

trement s'il est possible ; puis que comme le quarré de AC au quarré de EG , ainsi le cercle ABCD à la figure I : aussi en changeant la figure I sera au cercle ABCD , cōme le quarré de EG au quarré de AC : mais soit imaginé que comme I est au cercle ABCD , ainsi le cercle EFGH soit à quelque autre figure , comme K : & par la 14. p. 5. cōme la figure I est plus grande que le cercle EFGH , ainsi le cercle ABCD sera plus grand que la figure K : & par la 11. p. 5. le cercle ABCD sera à la figure K , comme le quarré de AC est au quarré de EG : ce qui contreuiet à la première partie de la démonstration , en laquelle nous auons monsté que l'un des cercles estant à vne figure , en la raison des quarrés des diametres , qu'icelle figure ne pouuoit estre plus petite que l'autre cercle : Partant la figure I ne pouuoit estre plus grande que le cercle EFGH : ny plus petito , comme en la première partie : elle estoit donc égale à iceluy : ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

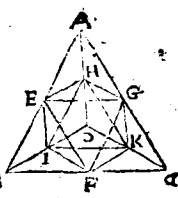
Par ces choses est euident que le cercle est au cercle comme le polygone décrit en celuy-là est au polygone semblable décrit en cestuy-cy. Puis que par la 2. p. 12. tant le cercle est au cercle , que par la 1. p. 12. le polygone est au polygone , comme le quarré du diametre est au quarré du diametre , ainsi qu'il a esté démontré.

THEOR. 3. PROP. III.

Toute pyramide ayant base triangulaire , peut estre diuisee en deux pyramides egales , semblables entr'elles , & à la totale ; & en deux prismes egaux , & plus grands que la moitié de la pyramide totale.

Soit la pyramide ABCD , ayant la base triangulaire ABD , & le sommet au poinct C : Je dis qu'elle peut estre diuisee en deux pyramides egales , semblables entr'elles , & à la totale : & en deux prismes egaux , plus grands que la moitié de la pyramide donnee.

Qu'il ne soit ainsi. Soient coupez en deux également, tous les costez des plâs d'icelle pyramide, sçavoir les trois de la base ABD aux points E, F, G, & les trois hypothenuses AC, BC, DC aux trois points H, I, K, & soient meacés les lignes FE, FG, HI, IK, KH, HG, HE, FI. Premièrement la base ABD est di-



uisée en trois figures; au quadrangle BEGF; & les deux triangles DGF, & EAG, lesquels sont semblables entr'eux, & au tout ABC, puis que les costez d'iceluy sont coupez proportionnellement, & par la 2. p. 6. la ligne EG est parallèle à BD, & FE à AD. Partant estant l'angle A commun aux deux triangles BAD, & EAG, l'angle extérieur GEA sera égal à l'opposé intérieur DBA, par la 29. p. 1. Et par la 32. p. 1. le troisieme sera égal au troisieme, & par la 4. p. 6. & 1. d. 6. les deux triangles BAD & EAG seront semblables. Par le mesme discours le triangle FGD, sera semblable au triangle BAD, & par la 21. p. 6. les deux triangles EAG, FGD, seront semblables entr'eux, & egaux, d'autant que leurs costez sont egaux. Quant au quadrangle BEGF; il est evident par la 41. p. 1. qu'il est double du triangle FGD. (car il est sur base égale, & entre mesmes paralleles) Il est aussi manifeste que toute la pyramide ABCD, est diuisée aux deux pyramides AEGH & HICK égales & semblables; & aux deux prismes, l'un EHGFI, duquel la base est le quadrangle BEGF, l'autre HIKFDG, duquel la base est le triangle FGD: & pourautant qu'ils sont de mesme hauteur, sçavoir de la hauteur du point H, ou du point K, & que la base quadrangulaire est double de la triangulaire: ils seront egaux par la 40. p. 11.

Or que les pyramides AEHG, & HICK soient semblables, on le prouve en ceste sorte: d'autant que les costez AC, DC du triangle ACD ont esté coupez en deux également, par la 2. p. 6. HK, AD, sont paralleles, & l'angle extérieur CHK est égal à son opposé intérieur HAG par la 29. p. 1. Et AHG à HCK, & par la 32. p. 1. le troisieme sera égal au troisieme; & partant par la 4. p. 6. Les triangles equiangles CHK & HAG seront semblables entr'eux, & au triangle ACD, par la 21. p. 6. ils seront aussi egaux entr'eux, estans les lignes CH & HA égales. Par les mesmes raisons les triangles ICH, & EHA seront egaux, & semblables entr'eux, & au triangle ACB. Ité le triangle IKH se prouvera facilement equiangle, & semblable au triangle ABD, par la 10. p. 11. (ayans leurs costez paral-

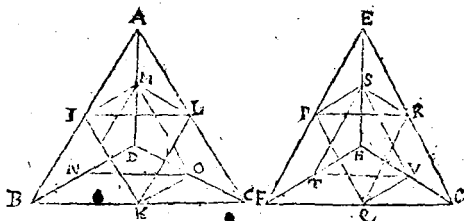
lés se touchans en diuers plans) partant auffi semblables au triangle GAE, & egal à iceluy par la 11. p. 6. Car HK est egal à GD, & GD à GA : & par la 10. p. 11. KCI & BCD seront semblables à GHE, & KGI egal à iceluy : & par la def. des solides semblables & egaux, icelles trois pyramides ABCD, AEHG, HICK, faictes de plans semblables, seront semblables ; & les deux petites seront egales, faictes de plans egaux.

Que les deux prismes EHGFI B, & HIKFDG soient ensemble plus de la moitié d'icelle pyramide totale ABCD, il appert ainsi : iceux deux prismes estans egaux, l'un d'iceux EHGFI B, ayant base quadrangulaire BEGF double du triangle FGD, base de la pyramide AGHE, & de mesme hauteur qu'icelle, on en peut retrancher vne pyramide egale à icelle pyramide EAGH : partant iceluy prisme est plus grand que la pyramide, le tout que la partie : Et par consequent les deux prismes ensemble, seront plus grands, que les deux pyramides AEHG, HICK ensemble. Mais iceux prismes, & pyramides font ensemble la pyramide totale ABCD : donc iceux prismes estans plus grands qu'icelles deux pyramides, seront aussi plus grands que la moitié d'icelle pyramide totale ABCD : ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 4. PROP. IIII.

S'il y a deux pyramides de mesme hauteur, ayans base triangulaire, & chacune d'icelles est diuisee en deux autres pyramides semblables entr'elles, & à la toute ; & en deux prismes egaux ; & les pyramides de la diuision sont tousiours subdiuisees de mesme façon : comme la base de l'une des pyramides sera à la base de l'autre, ainsi aussi tous les prismes ensemble tant de la diuision que subdiuision d'icelle pyramide, seront à tous les prismes ensemble de l'autre pyramide.

Soient sur les bases triangulaires ABC, EFG, les pyramides ABCD, EFGH de mesme hauteur, desquelles chacune soit diuisee comme en la precedente proposition en deux pyrami-



des egales entr'elles & semblables à la toute, sçauoir est en AILM, MNOD ; EPRS, STVH ; & en deux prismes egaux IBKLMN, CKLMNO ; PFQRST, GQRSTV : Et de mesme façon soient entendues chactunes des pyramides AILM, MNOD, EPRS, STVH estre diuisees ; & en continuant tousiours de mesme façon. Je dis que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi tous les prismes faicts en la pyramide ABCD à tous les prismes faicts en la pyramide EFGH.

Car puis que comme BC à CK, ainsi FG à GQ ; pource que l'une & l'autre ligne est diuisee en deux également, & les triangles ABC LKC sont semblables & semblablement posez. Item les triangles EFG RQG, par le corol. de la 4. p. 6. pareillemēt par la 22. p. 6. comme le triangle ABC au triangle LKC, ainsi le triangle EEG au triangle RQG : & en permutāt comme ABC à EFG, ainsi LKC à RQG. Mais cōme LKC à RQG ainsi est le prisme CKLMNO au prisme GQRSTV, comme nous demonstrerōs incontinent : & partant ainsi aussi le prisme IBKLMN est au prisme PFQRST, puis que ceux-cy sont egaux à ceux-là : Et cōme vn seul prisme, sçauoir IBKLMN est à vn seul prisme PFQRST, ainsi sont les deux prismes ensemble IBKLMN, CKLMNO, aux deux prismes ensemble PFQRST, GQRSTV par la 12. p. 5. Donc aussi comme la base ABC à la base EFG, ainsi les deux prismes en la pyramide ABCD seront aux deux prismes en la pyramide EFGH. Nous demonstrerons en la mesme maniere, deux prismes es pyramides AILM, MNOD, faictes en la pyramide ABCD, estre aux deux prismes es pyramides EPRS, STVH, faictes en la pyramide EFGH, comme sont les bases AIL, MNO de ces pyramides là aux bases EPR, STV de ces pyramides-cy : & ainsi

ainsi continuellement, tant que la mesme diuision sera faicte. Mais comme ces bases là sont à celles-cy, ainsi la base LKC, qui est egale & semblable à celles-là, est à la base RQG, qui est egale & semblable à celles-cy; c'est à dire ainsi la base ABC est à la base EFG. Donc aussi comme la base ABC est à la base EFG, ainsi les prismes de quelconque pyramide faicte en la pyramide ABCD, seront aux prismes de quelconque pyramide faicte en la pyramide EFGH: & partant aussi comme les prismes de la pyramide ABCD seront aux prismes de la pyramide EFGH, ainsi seront les prismes tant de la pyramide AILM, aux prismes de la pyramide EPRS, que les prismes de la pyramide MNOD, aux prismes de la pyramide STVH; & ainsi continuellement. Parquoy puis que par la 12. p. 3. comme les deux prismes de la pyramide ABCD sont aux deux prismes de la pyramide EFGH, ainsi tous les prismes estans és pyramides ABCD, AILM, MNOD. &c. ensemble, sont à tous les prismes estans és pyramides EFGH, EPRS, STVH &c. ensemble, si celles-cy sont egales en multitude à celles-là; pareillement comme la base ABC est à la base EFG, ainsi seront tous les prismes estans en la pyramide ABCD, à tous les prismes en la pyramide EFGH; ce qu'il falloit prouuer.

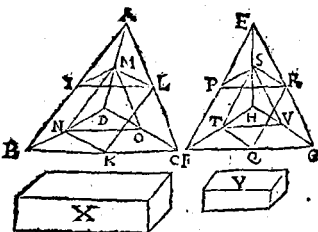
L E M M E.

Or que comme LKC est à RQG, ainsi le prisme CKLMNO soit au prisme GQRSTV, nous le demonstrerons ainsi. Soient imaginees tomber des sommets D, H, des lignes perpendiculaires sur les bases ABC, EFG, lesquelles serot les hauteurs egales des pyramides ABCD EFGH. Donc puis que les plans parallels ABC, MNO couppent proportionnellement par la 17. p. 11. deux lignes droictes, sçauoir DC & la perpendiculaire tombant de D; & DC est coupee en deux également en O: pareillement la perpendiculaire tombant de D, sera coupee en deux également au poinct auquel elle rencontre le plan MNO. Par la mesme raison la perpendiculaire tombant de H, sera coupee en deux également par le plan STV. Parquoy puis qu'icelles perpendiculaires sont posees egales, leurs moitez, sçauoir est les hauteurs des prismes, seront aussi egales: & partant les prismes CKLMNO, GQRSTV estans d'egales hauteurs, seront entr'eux, comme les bases LKC, RQG, par les choses que nous auons demonstrees sur la 34. prop. 11.

THEOR. 5. PROP. V.

Les pyramides de mesme hauteur ayans bases triangulaires, sont l'une à l'autre comme leurs bases.

Soient les pyramides de mesme hauteur ABCD, EFGH, desquelles les bases sont les triangles ABC, EFG. Je dis que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base.



Autrement, soit imaginé comme en la 2. p. 12. que comme la base ABC à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD à quelque solide, comme X: ie dis qu'iceluy solide X est égal à la pyramide EFGH, autrement il sera plus petit ou plus grand: & soit en premier lieu plus petit comme de la quantité du solide Y. Ainsi nous imaginons que les deux solides X & Y, soient égaux à la pyramide EFGH. Maintenant par la 3. p. 12. on peut diuiser vne pyramide en deux pyramides égales, & en deux prismes égaux, lesquels seront plus grands que la moitié de la pyramide totale: Que si de la pyramide EFGH, on retranche plus de la moitié, sçauoir les deux prismes PFQ, RST, GQRSTV, & de chacune pyramide restante EPRS, STVH, encores plus de la moitié, sçauoir deux prismes, en continuant tousiours iusques à ce que toutes les pyramides restantes apres le dernier retranchement, soient toutes ensemble manifestement plus petites que le solide Y: ce qui peut arriuer par la 1. p. 10. Ainsi tous les prismes ensemble retranchez de la pyramide EFGH, seront plus grâds que le solide X, puis que le reste est plus petit que le solide Y. Pareillement soient retranchez autât de fois deux prismes de la pyramide ABCD, comme on en a retranché de la pyramide EFGH: il est euidé par ce qui a esté demonsté à la precedente proposition, que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD seront à tous les prismes

retranchez de la pyramide EFGH: Mais nous auons posé que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X. Et partant par la 11. p. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD seront à tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH, comme la pyramide ABCD est au solide X. Or tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD sont plus petits qu'icelle pyramide: Et partant par la 14. p. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH, seront plus petits que le solide X, & nous les auons tantost prouuez estre plus grands en posant le solide X plus petit que la pyramide EFGH: partant icelle hypothese a esté faulce, qui nous a conduit à absurdité: Et le solide X n'estoit plus petit que la pyramide EFGH.

Soit donc plus grand, s'il est possible; puis que comme la base ABC à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD au solide X, en changeant la base EFG, sera à la base ABC, comme le solide X est à la pyramide ABCD. Pareillement comme le solide X à la pyramide ABCD soit posé la pyramide EFGH estre à quelque autre solide, comme Y: Et par la 14. p. 5. d'autant que le solide X est posé plus grand que la pyramide EFGH, aussi la pyramide ABCD sera plus grande que le solide Y: & par la 11. p. 5. comme la base EFG est à la base ABC, ainsi la pyramide EFGH à un solide plus petit que l'autre pyramide: mais nous auons démontré que cela estant, il s'ensuit vne absurdité, sçauoir que les prismes retranchez d'une pyramide, estoient plus grand que la pyramide de laquelle ils sont retranchez: Partant le solide X ne peut estre plus grand que la pyramide EFGH, ny aussi plus petit: il sera donc egal. Parquoy puis qu'il a esté posé que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X; & que par la 7. p. 5. la pyramide ABCD est au solide X, comme à la pyramide EFGH egale à iceluy solide X; pareillement comme la base ABC sera à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD sera à la pyramide EFGH: ce qu'il falloit démonstrer.

S C H O L I E.

Par la conuerse; Si les pyramides triangulaires sont entr'elles comme leurs bases: elles seront de mesme hauteur. Car si on croit que la hauteur de l'une soit plus grande que l'autre, soit coupee d'icelle vne egale à la moindre, & du point de la section à tous les angles de la

Mm ij

base, soient tirees des lignes droictes: & comme la base sera à la base ainsi la pyramide sera à la pyramide n'agueres constituee: mais elle estoit pareillement ainsi à toute la pyramide. Donc par la 9. p. 5. la pyramide constituee sera egale à toute la pyramide, la partie au tout: ce qui est absurde.

COROLLAIRE.

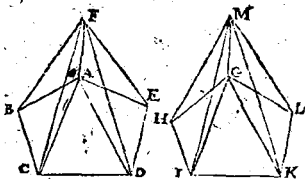
De cecy resulte que les pyramides de mesme hauteur constituees sur mesmes, ou egales bases triangulaires, sont egales entr'elles: puis qu'elles sont en mesme raison que leurs bases, lesquelles sont posees egales, ou une seule & mesme.

Item il s'ensuit au contraire que les pyramides triangulaires constituees sur une mesme ou egales bases, sont de mesme hauteur. Et que les pyramides egales, & ayans mesme hauteur, ont les bases egales, si elles ne 'ont une mesme: lesquelles deux choses nous demonstrerons par la premiere partie du corol. par le mesme argument dont nous auons usé en demonst. ant la conuerse des 30 & 31. p. II. si tant sur la hauteur, que sur la base coupee est constituee une autre pyramide &c.

THEOR. 6. PROP. VI.

Les pyramides de mesme hauteur ayans bases polygones, sont l'une à l'autre comme leurs bases.

Soit la pyramide ABC DEF de mesme hauteur que la pyramide GHIK LM, desquelles les bases ABCDE & GHIKL s'ont polygones: Je dis que comme la base est à la base, ainsi la pyramide est à la pyramide.

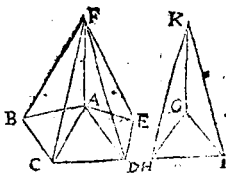


Car les bases estans reduites en triangles ABC, ACD, ADE: GHI, GIK, GKL: soit imaginé sur chacun d'iceux vne pyramide de mesme hauteur que la totale. Donc puis que par la 5.

p. 12. comme la base ABC est à la base ACD, ainsi la pyramide ABCF est à la pyramide ACDF; en composant comme la base ABCD sera à la base ACD, ainsi la pyramide ABCDF sera à la pyramide ACDF: Mais derechef, par la §. p. 12. comme la base ACD est à la base ADE, ainsi la pyramide ACDF est à la pyramide ADEF: Donc en raison égale, comme la base ABCD est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDF est à la pyramide ADEF: & partant en composant comme la base ABCDE est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDEF est à la pyramide ADEF. Par semblable argument sera démontré que comme la base GHIKL est à la base GKL, ainsi la pyramide GHIKLM est à la pyramide GKLM; & en changeant comme la base GKL est à la base GHIKL, ainsi la pyramide GKLM est à la pyramide GHIKLM. Derechef puis que par la §. p. 12. comme la base ADE est à la base GKL, ainsi la pyramide ADEF est à la pyramide GKLM; les 4. bases ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, seront es mesmes raisons que les 4. pyramides ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM: Parquoy en raison égale comme la base ABCDE est à la base GHIKL, ainsi la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHIKLM: Ce qu'il falloit prouver.

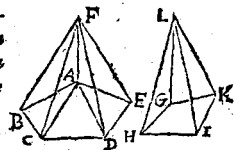
S C H O L I E.

Encore que selon plusieurs Interpretes, il soit parlé en la démonstration de ceste prop. seulement des pyramides de mesme hauteur, desquelles les bases polygones ont les costez égaux en nombre: toutes fois nous démontrerons aussi le mesme des pyramides de mesme hauteur, la base de l'une desquelles contiët plus de costez que la base de l'autre. Car soient premièrement deux pyramides de mesme hauteur ABCDEF, GHIK, la base de l'une desquelles soit polygone & de l'autre triangulaire. Je dis que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base: Car le pentagone estant resoud en triangles, aussi la pyramide sera diuisée en pyramides égales en nombre. Et pource que par la §. p. 12. comme la base ABC première quantité est à la base GHI, seconde quantité, ainsi la pyramide ABCF 3. quantité est à la pyramide GHIK 4. quantité. Et en la mesme maniere, comme la base ACD, 5. quanti-



est à la base GHI 2. quantité, ainsi la pyramide $ACDF$ 6. quantité est à la pyramide $GHIK$ 4. quantité: par la 24. p. 5. comme la base $ABCD$ premiere & 2. quantitez ensemble, sera à la base GHI seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCDF$ 3. quantité, avec la 6. sera à la pyramide $GHIK$ 4. quantité. Derechef puis que comme la base $ABCD$ est à la base GHI , ainsi la pyramide $ABCDF$ est à la pyramide $GHIK$, comme nous venons de demonstrier: & que par la 5. p. 12. comme la base ADE 5. quantité, est à la base GHI 2. quantité, ainsi la pyramide $ADEF$ 6. quantité est à la pyramide $GHIK$ 4. quantité: par la mesme 24. p. 5. la base $ABCDE$ sera à la base GHI , comme la pyramide $ABCDEF$ est à la pyramide $GHIK$: ce qui estoit proposé. En la mesme maniere faudroit tousiours proceder si il y auoit d'auantage de triangles en la base du polygone. Or puis que comme il a esté demonstrier, la base du polygone $ABCDE$ est à la base triangulaire GHI , ainsi que la pyramide $ABCDEF$ est à la pyramide $GHIK$: pareillement en changeant, comme la base GHI sera à la base $ABCDE$, ainsi la pyramide $GHIK$ sera à la pyramide $ABCDEF$. Parquoy deux pyramides, desquelles l'une a la base polygone, & l'autre triangulaire, sont tousiours comme leurs bases, de quelque part où l'on commence: Car encore que la demonstration commence au polygone & à sa pyramide, comme appert par la demonstration, toutesfois en changeant il est permis prendre le commencement au triangle & à sa pyramide, comme il a esté dict.

Maintenant soient deux pyramides de mesme hauteur $ABCDEF$, $GHIKL$, desquelles les bases sont polygones, & sont plus de costez en vne base qu'en l'autre: Je dis derechef que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base. Car estant resoud le polygone $ABCDE$, es triangles ABC , ACD , ADE : la pyramide sera diuisee en autant de pyramides. Et d'autant qu: comme la base triangulaire ABC , premiere quantité, est à la base polygone $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCF$ troisieme quantité, est à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité; & comme la base ACD 5. quantité est à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ACDF$ 6. quantité, est à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité: aussi par la 24. p. 5. comme la base $ABCD$ premiere quantité avec la 5. sera à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCDF$ troisieme quantité avec la 6. sera à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité. Derechef puis que comme la base $ABCD$ premiere quantité est à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCDF$ tierce quantité, est à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité: & aussi



que comme la base ADE quinte quantité, est à la base GHK seconde de quantité, ainsi la pyramide ADEF sixiesme quantité, est à la pyramide GHKL quarte quantité : pareillement par la 24. p. 5. comme la base ABCDE premiere quantité avec la quinte, sera à la base GHK seconde quantité, ainsi la pyramide ABCDEF tierce quantité avec la 6. sera à la pyramide GHKL 4. quantité : ce qui estoit proposé. Il faudroit tousiours proceder en la mesme maniere s'il y auoit d'auantage de triangles en la base.

Or nous conuertirons tant ceste 6. prop. que celle demonstreee en ce scholie, en ceste maniere.

Les pyramides de quelconques bases, lesquelles sont entr'elles comme leurs bases, sont en mesme hauteur.

Ce qu'on demonstrera en la mesme maniere, que les choses dites au scholie de la 5. p. de ce liure, ont esté demonstrees.

COROLLAIRE.

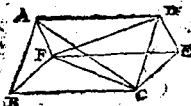
Il appert aussi que les pyramides de mesme hauteur, constituees sur bases egales multilateres, ou sur une mesme, estre egales entr'elles; puis qu'elles ont mesme raison que leurs bases, lesquelles sont posees egales, ou une mesme.

Derechef est euident que les pyramides multilateres egales, & construites sur bases egales, ou sur une mesme, ont mesme hauteur. Et que les pyramides multangulaires egales, & ayans mesme hauteur, ont aussi les bases egales, si elles ne sont une mesme. Ce qui se peut demonstrier comme nous auons dict au corol. de la 5. p. de ce liure.

THEOR. 7. PROP. VII.

Tout prisme peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires.

Soit le prisme ABCDEF duquel les deux triangles opposites ABF, DCE sont egaux & semblables. Je dis qu'iceluy prisme peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires.



Car si des trois parallelogrammes d'iceluy prisme, on mei-

ne les trois diametres AC, CF, FD, il est evident que le prisme sera diuisé en trois pyramides : montrons qu'elles sont egales. D'autant que la diagonale AC, couppant le parallelog. A BCD en deux également, les triangles ABC, ADC sont egaux : Partant la pyramide ABCF, ayant pour base le triangle ABC est egale à la pyramide ADCF ayant pour base le triangle ADC, par la 5. p. 12. Car icelles Pyramides sont de mesme hauteur, sçavoir est de la perpendiculaire tombant du sommet F sur le plan ABCD. Par mesme raison seront egales les pyramides ADFC, EFDC, constituees sur les bases egales AD F, EFD, & sous mesme hauteur, sçavoir de la perpendiculaire menee du sommet C sur le plan ADEF. Mais la pyramide ADCF est la mesme que la pyramide ADFC ; puis que l'une & l'autre est contenuee des 4. plans ADC, ADF, ACF, DCF. Donc les trois pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ou CDEF, composans tout le prisme, sont egales entr'elles: ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE. I.

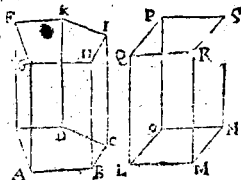
De cecy resulte que tout prisme est triple d'une pyramide de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales. ou bien qu'une pyramide est la tierce partie d'un prisme de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales.

SCHOLIE.

Nous adionsterons icy la demonstration d'une autre proposition, touchant les prismes qui ont au sommet les plans parallels à la base, egaux & semblables : ceste proposition est telle.

Les prismes estans sous mesme hauteur, & ayans quelconques bases, sont entr'eux comme leurs bases.

Soient deux prismes de mesme hauteur ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, desquels les bases sont figures multilateres. Je dis que comme la base ABCE est à la base LMNO, ainsi est le prisme au prisme. Car si de tous les angles de chascue base, on tire des lignes droictes à un point du plan superieur, qui est oppose à la ba-



se, se feront deux pyramides sous mesme hauteur, ayans mesmes bases que le prisme : Et partant par le coroll. cy dessus, chaque pyram. sera la troisieme partie de son prisme. Parquoy par la 15. p. 5. comme la pyramide sera à la pyramide, ainsi le prisme sera au prisme : Mais la pyramide est à la pyramide, comme la base à la base, ainsi qu'il a esté démontré à la 6. p. Donc aussi comme la base sera à la base, ainsi le prisme sera au prisme. Ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE II.

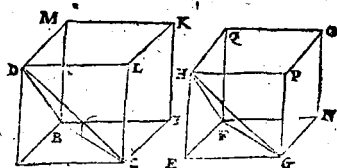
Il est manifeste par ces choses, que les prismes de mesme hauteur, & construez sur mesme base, ou sur bases egales quelles quelles soient, sont egaux entr'eux, puis qu'ils ont mesme raison entr'eux que leurs bases, lesquelles sont une mesme, ou bien sont egales.

Appert aussi par le contraire, que les prismes egaux, construez sur une mesme base, ou sur egales, sont en mesme hauteur : Et que les prismes egaux de mesme hauteur, ont aussi mesme base, ou egales. Ce qu'on démontrera en la mesme maniere qu'a esté démontré la conuerse de la 31. p. II.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Pyramides semblables ayans bases triangulaires, sont en raison triplee de leurs costez homologues,

Soient les deux pyramides semblables A BCD & EFGH, ayans bases triangulaires A BC & EFG : ie dis qu'elles sont en raison triplee des costez de mesme raison AC & EG.



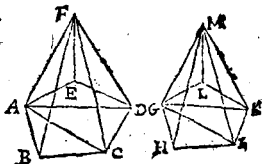
Qu'ainfin soit. Soient achenez les parallelipedes AK & EO. D'autant que les pyramides sont semblables, les trois costez AD, AB, AC, seront proportionnaux aux trois costez EH, EF, EG, & l'angle solide A egal à l'angle solide E, par la

diff. des solides semblables : & par la mesme demonstration qui a esté faicte à la 27. p. 11. les deux solides AK & EO seront semblables , ayans les trois costez AB, AD, AC, proportionaux aux trois costez EF, EH, EG; & les opposez seront aussi proportionaux; & par consequent les six plans proportionaux aux six plans. Mais les 2. solides AK & EO, estans semblables, ils seront en raison triplee de leurs costez homologues AC, & EG, par la 13. p. 11. Et cōme le solide AK est au solide EO, ainsi la pyramide ABCD est à la pyramide EFGH : (car chacune pyramide est la sixiesme partiē de son solide, d'autant que par la 18. p. 11. chaque solide peut estre diuisé en deux prismes egaux , & chacun prisme en trois pyramides egales par la 7. p. 12.) & partant la 11. p. 5. les pyramides sont aussi en raison triplee des costez de mesme raison AC , & EG. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'aussi les pyramides semblables, desquelles les bases ont plus de trois costez ; sont en raison triplee de leurs costez homologues.

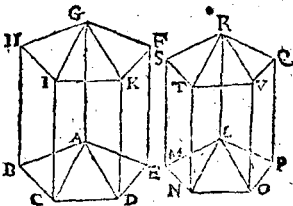
Soient les pyramides semblables ABCDEF, GHJKLM, ayans bases rectilignes semblables de plusieurs costez. Je dis qu'icelles pyramides sont en raison triplee des costez homologues AB, GH. Car si des angles A & G, on tire aux angles opposez les lignes droictes AC, AD : GI, GK : par la 20. p. 6. les bases semblables seront diuisees en nombre egal de triangles semblables, sçauoir est que les triangles ABC, ACD, ADE, seront semblables aux triangles GHI, GIK, GKL. Donc puis que les pyramides sont semblables : les triangles AFB, GMH, sont semblables, & l'angle FAB egal à l'angle MGH; & comme FA sera à AB, ainsi MG sera à GH : mais comme AB à AC, ainsi GH à GI, à cause de la similitude des triangles ABC, GHI : donc en raison egale, comme FA sera à AC, ainsi MG sera à GI. Derechef puis que comme AC est à CB, ainsi GI est à IH : à cause de la similitude des triangles ABC, GHI : & comme GB à CF, ainsi IH à IM, puis que à cause de la similitude des pyramides, les triangles BCF, HIM, sont semblables : aussi par raison egale, comme AC sera à CF, ainsi GI



sera a IM : & partant puis que comme FA a AC, ainsi MG a GI ; & comme AC a CF, ainsi GI a IM : pareillement en raison egale, comme FA sera a FC, ainsi MG a MI. Parquoy par la 5. p. 6. les triangles AFC, GMI, seront equiangles, & partant semblables. Mais les triangles AFB, BFC, ABC sont aussi semblab. aux triangles GMH, HMI, GHI. Donc par la 8. d. 11. les pyramides ABCF, CHIM, sont semblables. Par mesme raison seront semblables les pyramides ACDF, GIKM : Item ADEF, GKLM. Parquoy par la 8. p. 12. les pyramides ABCF, ACDF, ADEF, seront aux pyramides GHIM, CIKM, GKLM, chacune a la sienne, en raison triplee des costez homologues AB, CD, DE, a GH, IK, KL, chacun au sien. Veu donc qu'à cause de la similitude des bases ABCDE, GHIKL, il y a une seule & mesme raison de AB, CD, DE a GH, IK, KL : aussi les pyramides ABCF, ACDF, ADEF, auront aux pyramides GHIM, GIKM, GKLM, une seule & mesme raison, c'est à sçavoir triplee. Et par la 12. p. 5. comme une seule pyramide ABCF est a une seule pyramide GHIM, ainsi toutes les pyramides, sçavoir est la pyramide ABCDEF, est a toutes les pyramides, sçavoir est a la totale GHIKLM. Parquoy puis que par la 8. p. 12. la pyramide ABEF est à la pyramide GHIM en raison triplee des costez homologues AB, GH ; aussi la pyramide ABCDEF sera à la pyramide GHIKLM en la raison triplee des mesmes costez homologues AB, GH. Ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

Par mesme raison les prismes semblables sont en raison triplee de leurs costez homologues. Car soient deux prismes semblables ABCDEF, GHIK, LMNOPQRSTV ; Je dis qu'ils sont en raison triplee des costez homologues. Car si des angles A & L on tire les lignes AC, AD, LN, LO ; par la 20. p. 6. les triangles ABC, CAD, DEA, seront semblables aux triangles LMN, LN O, OPL. Semblablement si des angles G & R, on tire les lignes GI, GK, RT, RV ; les triangles GHI, GIK, GKF, seront aussi semblables aux triangles RST, RTV, RVQ. Et aux susdits, puis que par la def. du prisme, tous les plans opposites des prismes sôt semblab. Et d'ailleurs qu'à cause de la similitude des prismes, les parallelogrammes CH, NS sont semblables ; comme CI sera à CB, ainsi TN sera



à NM, mais BC est à CA, ainsi aussi NM est à NL, à cause de la similitude des triangles. Donc par raison égale, comme CI sera à CA, ainsi TN à NL. Derechef pource que l'angle solide N, est égal, à l'angle solide C, à cause de la similitude des prismes, si celui-cy est superposé à l'autre, l'angle MNO conviendra à l'angle BCD, & l'angle TNM à l'angle ICB, & l'angle TNO à l'angle ICD. Mais aussi la ligne droicte NL conviend à la ligne CA, pource que les angles MNL, BCA sont égaux. Donc les angles ICA, TNL sont égaux; & partant puis que les costez d'alentour iceux, ont esté démontréz proportionaux, les parallelogrames CG, NR, seront semblables. Mais aussi les parallelogrames CH, HA sont semblables aux parallelog. NS, SL, & les triangles ABC, GHI, aux triangles LMN, RST. Donc les prismes ABCI GH, LMNTRS, sont semblables, par la 8. def. 11. On démontrera en la mesme maniere que les prismes CDAGIK, NOLTRV, sont semblables, comme aussi les prismes ABDKGF, LPOVRQ. Parquoy les prismes ABCIGH, CDAGIK, ABDKGF, par les choses demonstrees à la 34. p. 11. sont aux prismes LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, chacun au sien, en raison triplée des costez homologues BC, CD, DE à MN, NO, OP, chacun au sien. Et partant en la mesme maniere que nous avons démontré cy dessus des pyramides multangles, on démontrera que les prismes ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, sont en raison triplée des costez homologues BC, MN.

De toutes ces choses se collige, que les pyramides multangles semblables, se diuisent en pyramides triangulaires semblables, & en nombre égal, & homologues aux toutes. Car cecy est manifeste par la demonstration du preced. corol.

Se collige aussi que les prismes multangulaires semblables, se diuisent en prismes semblables, ayans bases triangulaires, & en nombre égal, & homologues aux tous, comme appert par la demonstration de ce scholie.

THEOR. 9. PROP. IX.

Des pyramides égales, ayans bases triangulaires; leurs hauteurs sont reciproques aux bases: Et les pyramides ayans bases triangulaires reciproques à leurs hauteurs, sont égales:

Soient les deux pyramides égales ABCD, & EFGH, ayans bases triangulaires: ie dis que les bases d'icelles sont reciproques a leurs hauteurs; c'est à dire que cōme la base ABC à la

base EFG, ainsi la hauteur du point H à la hauteur du point D.

Qu'il ne soit ainsi. Soient achevez les parallelipipedes AK, EO, & comme en la precedente, il sera evident que chacun d'iceux parallelipipedes sera sextuple de sa pyramide. Et les deux pyramides estans egales, iceux solides AK, EO, seront egaux: & par la 34. p. 11. ils auront les hauteurs reciproques aux bases (C'est à dire que comme la hauteur du point D à la hauteur du point H, ainsi la base EN a la base AI) Mais comme EN à AI, ainsi la moitié le triangle EFC, à la moitié de A I, sçavoir le triangle ABC; & partant par la 1^{re}. p. 5. comme la hauteur du point D à la hauteur du point H, ainsi le triangle EFG au triangle ABC.

Pour la seconde partie: Si la hauteur du point D est à la hauteur du point H, comme le triangle EFG, est au triangle ABC: ie dis que les pyramides ABCD, EFGH seront egales. Car il est evident comme cy-dessus que la hauteur du point D, sera à la hauteur du point H, comme la base EN, à la base AI (d'autant qu'elles sont doubles des triangles EFG & ABC) ainsi les parallelipipedes AK, EO, auront les hauteurs reciproques aux bases: & par la 34. p. 11. ils seront egaux; & par consequent leurs sixiesmes parties seront aussi egales, sçavoir les pyramides ABCD, & EFGH: ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Les pyramides egales, desquelles les bases ne sont triangulaires, ont aussi les bases & hauteurs reciproques: & les pyramides desquelles les bases ne sont triangulaires, & ont leurs bases reci-

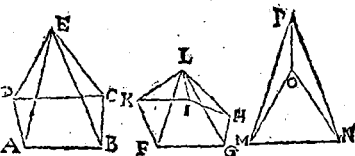


proques à leurs hauteurs, sont egales. Car soient premierement deux pyramides egales, l'une desquelles ABCD ait la base triangulaire, mais l'autre EFGHI ne l'ait pas. Soit fait le triangle KLM egal à la base non triangulaire EFGH; puis sur iceluy triangle soit construite la pyramide KLMN, de mesme hauteur que la pyramide EFGHI. Or d'autant que les pyramides EFGHI, KLMN, ont les bases egales, & mesme hauteur; elles seront egales, par les choses demonstrees au scholie de la 6. p. 12. Mais la pyramide EFGHI a esté posee egale a la pyramide ABCD; donc aussi les pyramides ABCD, KLMN, seront egales: Parquoy puis qu'elles ont les bases triangu-

laïres, par la 9. p. 12. comme la base ABC sera a la base KLM , ou a sa
egale $EFGH$, ainsi la hauteur de la pyramide $KLMN$, c'est a dire
la hauteur de la pyramide $EFGH$, sera a la hauteur de la pyramide
 $ABCD$: Et partant des pyramides egales $ABCD, EFGH$, les bases &
hauteurs sont reciproques.

Mais maintenant d'icelles pyramides, les bases & hauteurs soient
reciproques. Je dis qu'icelles pyramides sont egales. Car demeurant
la mesme construction faicte cy dessus; puis que la base ABC est
possee estre a la base $EFGH$, come la hauteur de la pyramide $EFGH$
est a la hauteur de la pyram. $ABCD$; aussi la base ABC sera a la base
 KLM , come la hauteur de la pyram. $KLMN$ sera a la hauteur de la
pyramide $ABCD$. Parquoy par la 9. p. 12. les pyramides $ABCD, KL$
 MN sont egales. Mais comme nous avons demonstre au scholie de
la 6. p. 12. la pyramide $KLMN$ est egale a la pyramide $EFGH$: donc
aussi la pyramide $ABCD$ sera egale a la pyramide $EFGH$. Ce qui
estoit propose.

Soient maintenant
les pyramides egales
 $ABCDE, FGHIKL$,
ayans bases multan-
gulaires. Soit faict de
rechef le triangle
 MNO , egal a la base
 $ABCD$: & la pyra-
mide $MNOP$ de
mesme hauteur que



la pyramide $ABCDE$. Donc par les choses demonstrees au scho-
lie de la 6. p. 11. la pyramide $MNOP$ sera egale a la pyramide ABC
 DE : laquelle a esté possee egale a la pyramide $FGHIKL$: donc aussi
la pyramide $MNOP$ sera egale a la pyramide $FGHIKL$. Parquoy
comme nous avons demonstre cy dessus, ainsi que la base MNO , c'est
a dire la base $ABCD$, sera a la base $FGHIK$, ainsi la hauteur de la
pyramide $FGHIKL$ sera a la hauteur de la pyramide $MNOP$, c'est
a dire a la hauteur de la pyramide $ABCDE$: Et partant des pyra-
mides egales $ABCDE, FGHIKL$, les bases & hauteurs sont reci-
proques.

Mais soient maintenant reciproques les bases & hauteurs d'icel-
les pyramides: on demonstrera comme dessus qu'elles sont egales.

Or tout ce que nous avons demonstre cy dessus peut aussi convenir
a quelconques prismes. Car si les prismes estoient egaux, aussi les py-
ramides de mesme hauteur qu'iceux, ayans les mesmes bases, seront
egales, puis que d'iceux prismes par le corol. de la 7. p. 12. elles sont les
tierces parties, ou les deux tierces parties par le scholie de la mesme

prop. Parquoy comme nous auons demonst^ré n'agu^res, les bases & hauteurs d'icelles pyramides seront reciproques. Veu donc que ces bases & hauteurs sont les mesmes que des prismes, les bases & hauteurs des prismes seront pareillement reciproques.

Derechef si les bases & hauteurs des prismes sont reciproques : les bases & hauteurs des pyramides aians mesmes bases & hauteurs que les prismes, seront aussi reciproques. Parquoy, comme il a esté demonst^ré, les pyramides sont egales ; & partant aussi les prismes, puis que d'icelles pyramides ils sont triples, ou sesquialteres. Ce qui estoit proposé.

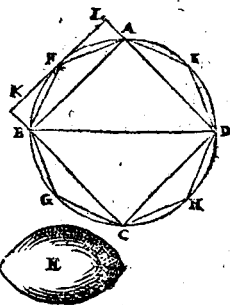
THEOR. 10. PROP. X.

Tout cone est la troisieme partie du cylindre ayant base egale, & de mesme hauteur.

Soit vn cylindre & vn cone, tous deux de mesme hauteur, & ayans vne mesme base, sçauoir le cercle AB CD : Je dis que le cylindre est triple du cone.

Autrement il sera plus grand, ou plus petit que le triple d'iceluy cone. Soit premierement plus grand s'il est possible, sçauoir de la quantité du solide E, c'est à dire que si du cylindre, ayant pour base le cercle ABC D est retranché le solide E, le reste sera triple du cone, ayant pour base le mesme cercle ABCD. Maintenan^t dans le cercle soit inscrit le quarré

ABCD, diuisé en deux triangles par la diagonalle BD, & sur iceux triangles soient imaginez estre esleuez deux prismes de mesme hauteur que le cylindre : Et parce que le quarré est plus de la moitié du cercle, il est euident qu'iceux deux prismes seront plus de la moitié du cylindre. Que si les segmens restans du cylindre, (les deux prismes estans soustraits) sont encores plus grands que le solide E ; sur les bases d'iceux segmens soient faictz les quatre triangles Isosceles AFB, BGC, CHD, DIA, & sur iceux soient imaginez estre esleuez quatre



prismes de mesme hauteur que le cone ou cylindre ; dont la base est le cercle ABCD. Il est euident qu'iceux triangles isosceles sont plus de la moitié des bases des segmens restans du cylindre ; & par consequent qu'iceux quatre prismes serot plus de la moitié d'iceux quatre segmens : Que si les huit petits segmens restans du cylindre ne sont plus petits que le solide E, soit tousiours en ceste façon soustrait plus de la moitié de ce qui restera, iusqu'à ce que par la 1. p. 10. les segmens restans soient plus petits que le solide E. Et pour abreger soient iceux huit petits segmens plus petits qu'iceluy solide E : Il est donc manifeste que la colonne composee de ces six prismes, ayant pour base le polygone inscrit au cercle ABCD, & de mesme hauteur que le cylindre donné ; sera plus que triple d'iceluy cone, par ce qui a esté dit cy-dessus. Or d'autant que chacun prisme est triple de la pyramide de mesme hauteur, & ayant base egale, (car il peut estre diuisé en trois telles pyramides gaies par la 7. p. 12.) il s'ensuit que tous iceux prismes faisant la colonne ayant pour base le polygone inscrit au cercle ABCD, c'est à dire icelle colonne de mesme hauteur que le cylindre I) est triple de toutes les six pyramides, faisant la seule pyramide, ayant le mesme polygone pour base, & de mesme hauteur qu'icelle colonne. Partant icelle pyramide sera plus grande que le cone de mesme hauteur, ayant le cercle ABCD pour base : ce qui est impossible ; n'estant la pyramide que partie du cone. Donc le cylindre n'estoit pas plus grand que le triple du cone.

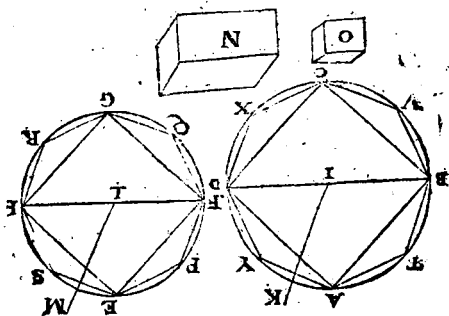
Soit donc plus petit, s'il est possible ; sçauoir de la quantité du solide E, c'est à dire que si on retranche le solide E du cone, que le residu soit la troisieme partie du cylindre. Maintenant du cone, ayant pour base le cercle ABCD, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de mesme hauteur, ayant pour base le quarré ABCD, & du residu, sçauoir des quatre segmens E, G, H, I, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de chacun segment, de mesme hauteur qu'iceluy segment ; & ayant pour base le triangle isoscele en iceluy segment : soit continué ce retranchement iusques à ce que les segmens restans soient plus petits que le solide E : ce qui doit arriuer par la 1. p. 10. Soient donc pour abreger iceux huit petits segmens plus petits que le solide E : il est donc euident que la pyramide de mesme hauteur que le cone, ayant iceluy octogone pour base, est plus grād' q' le tiers du cylindre donné, d'autant qu'elle est plus grande que le cone, apres que d'iceluy on a retranché le solide E. Or iceluy cone ainsi resecindé
est le

est le tiers du cylindre donné, & la pyramide est aussi, (comme il a esté dit cy-dessus) le tiers de la colonne de mesme hauteur, ayant le mesme octogone pour base: Partant icelle colonne seroit plus grande que le cylindre donné, duquel elle est partie: Ce qui est impossible. Donc le cylindre donné n'estoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone: il faut donc qu'il soit egal: ce qui estoit a demonstrier.

THEOR. II. PROP. XI.

Les cones & cylindres de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux cones de mesme hauteur, desquels les bases sont les cercles ABCD & EFGH; les diametres BD & FH leurs axes ou hauteurs IK & LM. Je dis que comme le cercle



ABCD est au cercle EFGH, ainsi le cone BK est au cone FM; C'est à dire que si on imagine que comme le cercle au cercle ainsi le cone BK à quelque autre solide, comme N: qu'iceluy solide N sera egal au cone FM.

Autrement il sera plus petit ou plus grand: Soit premièrement plus petit, & s'il est possible de la quantité du solide O: ainsi les deux solide SN & O seront egauls au cone FM. Maintenant du cone FM comme en la precedente, soit retranché plus de la moitié, sçavoir une pyramide de mesme

N

hauteur que le cône, ayant pour base le quarré $FGHE$: & du residu encores plus de la moitié, sçavoir quatre pyramides de mesme hauteur que le cône, ayans pour base les quatre triangles isosceles EPE, FQG, FQH, GRH, HSE , en continuant tousiours iusques à ce que par la 1. p. 10. le residu soit plus petit que le solide O : & soit iceluy residu pour abreger les huitts petits segmens: il s'ensuit que la pyramide FM de mesme hauteur que le cône FM , & ayant pour base l'octogone $EPFQGRHS$, sera plus grande que le solide N . Dans le cercle $ABCD$, soit inscrit vn polygone semblable au polygone inscrit dans la base circulaire $EFGH$, & sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyramide de mesme hauteur que le cône BK . Or par le corol. de la 2. p. 12. comme le cercle $ABCD$ est au cercle $EFGH$, ainsi le polygone $TVXY$ est au polygone $PQRS$: mais comme le cercle $ABCD$ au cercle $EFGH$, ainsi le cône BK est au solide N , & par la 6. p. 12. comme le polygone au polygone, ainsi la pyramide à la pyramide de mesme hauteur que les cones: & partât par la 11. p. 5. la pyram. $ATBVCXDYK$ sera à la pyramide $EPFQGRHSM$, comme le cône BK au solide N . Mais la pyramide $ATBVCXDYK$ est plus petit que le cône BK , la partie que le tout: Donc aussi par la 14. p. 5. la pyramide $EPFQGRHSM$ sera moindre que le solide N . Mais elle a esté demonstrée aussi plus grande: ce qui est absurde. Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cône FM , puis que le posant tel, il nous a conduit à absurdité.

Soit donc plus grand s'il est possible: & soit en changeant comme le solide N au cône BK , ainsi le cercle $EFGH$ au cercle $ABCD$: & comme iceluy solide N au cône BK , soit aussi le cône FM à quelque autre solide, comme O : Et par la 14. p. 5. puis que le solide N est plus grand que le cône FM , aussi le cône BK sera plus grand que le solide O . Parquoy puis que comme le cercle $EFGH$ est au cercle $ABCD$, ainsi le solide N est au cône BK : par la 11. p. 5. comme le cercle $EFGH$ est au cercle $ABCD$, ainsi le cône FM au solide O , plus petit que le cône BK : ce que tantost nous auons monsté estre impossib. Donc le solide N n'est pas plus grand ne plus petit que le cône FM , ains egal. Parquoy puis qu'on a posé la base $ABCD$ estre à la base $ABCD$ estre à la base $EFGH$, ainsi que le cône $ABCDK$ au solide N : & par la 7. p. 5. comme le cône $ABCDK$ est au solide N , ainsi est le mesme cône $ABCDK$ au cône $EFGHM$: pareillement comme la base $ABCD$ sera à la base $EFGH$, ainsi le cône $ABCDK$ sera au cône $EFGHM$.

Ce que nous auons prouué des cones de mesme hauteur, se doit aussi entendre des cylindres de mesme hauteur : d'autant que par la 10. p. 12. le cylindre est triple de son cone de mesme hauteur, & ayant base egale. Que si le cone est au cone comme la base à la base, aussi le triple du cone sera au triple du cone, comme la base à la base par la 15. p. 5. c'est à dire le cylindre au cylindre, comme la base à la base. Donc les cones & cylindres de mesme hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que les cones & cylindres de mesme hauteur, constituez sur mesme base ou sur bases egales, sont aussi egaux.

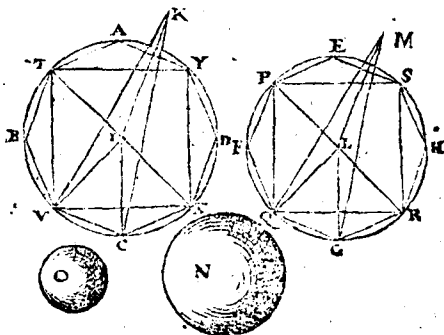
THEOR. 12. PROP. XII.

Les cones & cylindres semblables, sont l'un à l'autre en raisõ triplee des diametres de leurs bases.

Soient semblables cones & cylindres, ayans pour bases les cescles ABCD, EFGH, mais les axes d'iceux soient IK, LM; & les diametres des bases TV, PR. Je dis que le cone duquel la base est le cercle ABCD, mais le sommet K, est au cone ayant pour base le cercle EFGH, & pour sommet le point M, en raison triplee du diametre TX au diametre PR, c'est à dire que si on imagine comme aux precedentes, que le cone ABCDK soit à quelque solide, comme à N, en raison triplee du diametre TX au diametre PR. Je dis que le solide N est egal au cone EFGHM.

Autrement il sera plus grand ou plus petit. Soit premiere-ment plus petit, sçauoir de la quantité du solide O: Donc les deux solides O & N seront egaux au cone EGHM: & comme en la precedente soit faicte detraction de plus de la moitié du cone EFGHM, & du residu encore plus de la moitié, iusques à ce que par la 1. p. 10. les restes (c'est à sçauoir pour abreger les huit petits segmens, qui sont à l'entour de la pyramide à la base octogone EPFQGRSM, ou de plus s'il est besoin) soient plus petits que le solide O: Il est euident qu'icelle py-

ramide à la base poligone FM, sera plus grande que le solide N. Maintenant dans le cercle ABCD soit inscrit vn mesme poligone que le plus grand qui soit inscrit au cercle EFGH, sçauoir ATBVCXDY: & sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyramide de mesme hauteur que le cone BK, & ayant tiré les lignes VI, CI; QL, GL; soient menees les lignes QM, CM; VK, CK, afin d'auoir les deux pyramides VCIK, QLGM. Il est manifeste que la pyramide ATBVCXDYK est composee d'autant de pyramides egales, qu'il y a de costez au poligone inscrit dans le cercle, (c'est à sçauoir qu'icelle pyramide totale VICK est composee de huit pyramides egales & semblables à la pyramide de mesme hauteur que la to-



rale.) Le mesme se peut dire que l'autre pyramide totale EPFQGRHSM est composee de huit pyramides egales & semblables à la pyramide QLGM, de mesme hauteur que sa totale. Mais d'autant que les cones BK & FM sont semblables par la definition des cones semblables, comme le diametre TX est au diametre PR; & partant par la 15. p. 5. comme le demy diametre VI est au demy diametre QL, ainsi l'axe IK est à l'axe LM: & en permutant comme le demy diametre VI sera à l'axe IK, ainsi le demy diametre QL est à l'axe LM: & les angles VIK & QLM estans droicts, (car les cones sont posez droicts; & par consequent les axes d'iceux, sont aussi a droicts angles sur leurs bases) par la 6. p. 6. le triangle VIK sera equiangle au triangle QLM. Item CIK sera aussi equiangle à GLM; & par la 4. p. 6. ils auront les costez proportionaux, & seront semblables. Item VI est à CI comme QL à GL, (estés chacun egaux) & l'angle I egal à l'angle L; (ayans chacun

la huitiesme partie de sa circonference pour base) & partant par la 6. p. 6. les triangles VIC, QLG, seront equiangles: partant semblables. Item VC est à VI, comme QG à QL, d'autant que les triangles VIC, & QLG sont semblables) & pour la mesme raison VI est VK comme QL à QM; & en raison egale VC sera à VK comme QG à QM. Et par mesme discours VC est à CK, comme QG à GM: Et les egales VK & CK, seront l'une à l'autre, comme les egales QM à GM: Et partant par la 5. p. 6. les triangles VKC, QMG, seront equiangles, & semblables: & par la deff. des pyramides semblables, les deux pyramides VICK, & QLGM, seront semblables: Et par la 8. p. 12. elles seront en raison triplee de leurs costez homologues, sçauoir des demy diametres VI & QL. Par mesme discours on prouuera les sept autres pyramides de la totale ATBVCDYK, proportionnelles à vne chacune de sept autres pyramides de la totale EPFQGRHSM: Et partant par la 12. p. 5. Les toutes seront aux toutes, comme l'une d'icelles est à l'une d'icelles: C'est à dire que toute la pyramide BK est à toute la pyramide FM, en raison triplee du demy diametre VI au demy diametre QL, ou bien du diametre TX, au diametre PR; puis que comme VI est à QL, ainsi TX est à PR, par 15. p. 5. Mais par nostre hypothese le cone BK est au solide N, aussi en raison triplee des deux diametres TX, PR: Et partant par la 11. p. 5. le cone BK sera au solide N, comme la pyramide TBVCXDYK à la pyramide EPFQGRHSM. Parquoy puis que le cone BK est plus grand que la pyramide BK, le tout que la partie, aussi par la 14. p. 5. le solide N sera plus grand que la pyramide FM: & il a esté demonstré estre aussi moindre. Ce qui est absurde. Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cone FM, puis que le posant tel il nous a conduit à l'absurdité.

Soit donc maintenant le solide N plus grand que le cone EFGHM, s'il est possible. D'autant qu'on a posé que le cone ABCDK est au solide N en raison triplee du diametre TX au diametre PR, & la pyramide BK est à la pyramide FM en raison triplee des mesmes diametres, comme nous auons démontré, par la 11. p. 5. comme le cone BK sera au solide N, ainsi la pyramide BK à la pyramide FM: & en changeant comme N au cone BK, ainsi la pyramide FM à la pyramide BK. Parquoy puis que par le corol. de la 8. p. 12. la pyramide FM est à la pyramide BK en raison triplee des costez homologues QG à VC: c'est à dire du diametre PR au diametre TX: pareillement le solide N sera au cone BK en raison triplee des mes-

mes diametres PR à TX. Soit posé que comme N est au cone BK, ainsi le cone FM au solide O. Donc aussi le cone LM sera au solide O en raison triplee du diametre PR au dia. TX. Et puis que le solide N. a esté posé plus grand que le cone FM : par la 14. p. 5. le cone BK sera aussi plus grand que O. Parquoy le cone FM sera au solide O moindre que le cone BK, en raison triplee du diametre PR au dia. TX : ce qui est absurde. Car il a esté démontré cy dessus qu'un cone ne peut estre à vn solide moindre qu'un autre cone, en raison triplee des diametres des bases d'iceux cones. Donc le solide N n'est pas plus grand ny plus petit que le cone EFGHM : il est donc egal. Parquoy par la 7. p. 5. le cone ABCDK a mesme raison au cone EFGHM qu'au solide N. Et partât puis qu'on a posé le cone ABCDK estre à N en raison triplee des diametres TX & PR : le cone ABCDK sera aussi au cone EFGHM en la raison triplee des mesmes diametres.

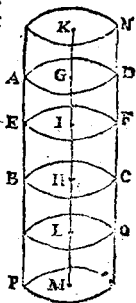
Ceste preuue se doit aussi entendre des cylindres semblables : car leurs cones estans en raison triplee des diametres, par la 15. p. 5. Les cylindres qui sont triples d'iceux cones, seront aussi l'un à l'autre en raison triplee de leurs diametres.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si yn cylindre est couppé par vn plan parallel, aux plans opposez d'iceluy cylindre : les segmens du cylindre sont l'un à l'autre comme les segmens de l'axe.

Soit le cylindre ABCD, couppé par le plan EF, parallel aux deux plans opposez AD & BC, lequel coupe l'axe GH en I. Je dis que le segment de cylindre AEFD, est au segment de cylindre EBCF, comme l'axe GI, est à l'axe IH.

Qu'il ne soit ainsi : apres auoir continué l'axe GH de part & d'autre, soit faicte GK egale à GI : & de l'autre costé HL, LM egales à IH : Et soit imaginé le cylindre ABCD, continué d'un costé iusques au point K, & de l'autre iusques au point M. Il est euident que tous les cylindres AN, ED, BF, BO, PO, sont tous sur bases egales ;



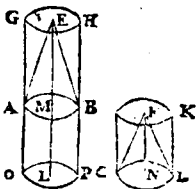
& par le corol. de la 11. prop. 12. les deux qui ont les axes égaux GK, GI, (c'est à dire qui sont de mesme hauteur) sont égaux entr'eux: Item les trois BF, BO, PO, estans de mesme hauteur, sont aussi égaux entr'eux: Ainsi il est evident que l'axe IK est autant multiplie de l'axe IG, que le cylindre EN, est multiplie du cylindre ED: Pareillement que l'axe IM est autant multiplie de l'axe IH, que le cylindre PF, est multiplie du cylindre BF; & partant si l'axe IK (multiplie de IG premiere grandeur) est egal, plus grád, ou plus petit que l'axe IM, (multiplie de IH seconde grandeur) aussi le cylindre EN (multiplie du cylindre ED troisieme grandeur) sera egal, plus grand, ou plus petit que cylindre F, (multiplie du cylindre BF 4. grandeur) & ce en quelque multiplication: & partant par la 6.d. 5. l'axe GI sera à l'axe IH, comme le cylindre ED au cylindre BF. Ce qui estoit à demonstrier.

THEOR. 14. PROP. XIII.

Les cones, & cylindres ayans bases egales; sont l'un à l'autre, comme leurs hauteurs.

Soient sur bases egales AB, CD, les deux cones ABE, CDF; & les deux cylindres ABGH, CDIK, desquels les axes & hauteurs soient ME, NF. Je dis que le cone ABE est au cone CDF; & le cylindre ABGH au cylindre CDIK, comme la hauteur ME est à la hauteur NF.

Qu'il ne soit ainsi: Soit continué l'axe EM, iusques au point L, & soit faicte ML egale à FN; & soit imaginé le cylindre AH continué iusques au plan OP parallel à AB, & passant par le point L. Et d'autant que le plan AB coupe le total cylindre OPGH, estant parallel aux deux plans opposés OP, GH par la 13. p. 12. les cylindres AH, AP seront l'un à l'autre comme les axes EM & ML: Mais ML est egal à FN, & la base AB egale à la base CD: Donc par le corol. de la 11. p. 12. le cylindre AP sera egal au cylindre CK: Partant comme EM sera à NF, ainsi le cylindre AH au cylindre CK. Et d'autant que par la 10. p. 12. les cones ABE, CDF, sont tierces

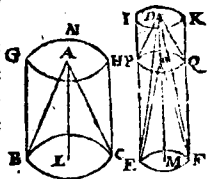


parties des cylindres AH, CK ; ils auroient mesme raison qu'iceux cylindres, par la 15. p. 5. Et partant le cone ABE sera pareillement au cone CDF , comme la hauteur ME à la hauteur NF . Donc les cones & cylindres constituez sur bases egales, sont entr'eux, comme leurs hauteurs. Ce qui estoit à demonstrier.

THEOR. 15. PROP. XV.

Aux cones, & cylindres egaux; les hauteurs sont reciproques aux bases: Et les cones & cylindres sont egaux, desquels les hauteurs sont reciproques aux bases.

Soient egaux les cones ABC, DEF ; & les egaux cylindres $BGHC, EIKF$, desquels les bases soient BC, EF ; leurs axes ou hauteurs AL, DM . Je dis que les bases sont reciproques aux hauteurs; c'est à dire que comme la base BC est à la base EF , ainsi la hauteur DM à la hauteur AL .



Car premierement si DM est egale à AL , les cylindres estant egaux, il est evident par la 11. p. 12. que la base sera egale à la base. Que si MD est plus grande que AL , soit retranchée MQ egale à AL ; Et soit couppe le cylindre Ek , par le plan PQ , parallele à EF , & passant par le point Q . Donc par la 14. p. 12. le cylindre Ek sera au cylindre EQ , comme la hauteur MD à la hauteur MO : & partant par la 7. & 11. p. 5. le cylindre BH egal à iceluy Ek , sera au cylindre EQ , comme MD est à MO : & par la 11. p. 12. comme le cylindre BH est au cylindre de mesme hauteur EQ , ainsi la base BC à la base EF : Et partant par la 11. p. 5. comme la base BC , à la base EF , ainsi la hauteur MD à la hauteur MO , ou LA son egale. Donc les cylindres egaux BH, Ek ont les bases & les hauteurs reciproques.

Par mesme discours on prouuera que les bases & hauteurs des cones egaux ABC, DEF , sont reciproques; si on cõstruit deux cones sous les hauteurs MO, OD , comme appert en la figure.

Maintenant soient les bases reciproques aux hauturs: Je dis que les cylindres BH & EK sont egaux. Car ayant con-

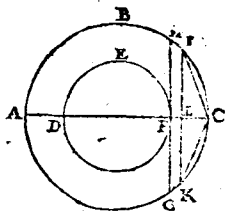
Aruiſt comme deſſus, puis que la baſe BC, eſt à la baſe EF, cō-
me la hauteur MD, à la hauteur LA, ou MO ſon egale: Et
par la 11. p. 11. comme la baſe BC, à la baſe EF, ainſi le cylindre
BH au cylindre de meſme hauteur EQ: Item par la 14. p. 12.
comme la hauteur MD à la hauteur MO, ainſi le cylindre EK
au cylindre EQ: par la 11. p. 5. Les deux cylindres BH & EK,
auront meſme raiſon au troiſieſme EQ, l'un comme l'autre:
Et par la 9. p. 5. ils ſeront egaux.

Quant aux cones qui ont auſſi leurs baſes & hauteurs reci-
proques, ils ſeront par le meſme diſcours demonſtrez egaux.
Ce qui eſt toutesſois aſſez euident, puis qu'ils ſont par la 10.
p. 12. tierces parties des cylindres.

PROBL. I. PROP. XVI.

Deux cercles inegaux eſtans à l'entour d'un
meſme centre; inſcrire au plus grand cercle
vn polygone equilateral, ayant le nombre des
coſtez pair, & lequel ne touche point le plus
petit cercle.

Soient deux cercles inegaux AB
C, & DEF, tous deux ſur vn meſ-
me centre: Il faut dans le plus
grand ABC, inſcrire vn polygone
equilateral, duquel les coſtez ſoiēt
nombre pair, & ne touchent point
la circonference du plus petit cer-
cle DEF.



Soit mené par le centre d'iceux
cercles le diametre commun AC,
coupant le petit cercle au point
F: Et d'iceluy point ſoit menee HFG perpendiculaire au dia-
metre DF, rencontrant la circonference du grand cercle aux
pointſ H & G: & laquelle touchera le cercle DEF en F par
le corol. de la 16. p. 3. Item ſoit coupee la demie circonfere-
nce ABC en deux egalemeſt; Et la moitié encores en deux
egalemeſt, en continuant touſiours inſques à ce qu'on vien-
ne à vn arc plus petit que l'arc HC: ce qui eſt poſſible par la
1. p. 10. Soit donc iceluy plus petit arc IC, & ſoit tiree la ligne

droicte subtendante IC. Je dis qu'icelle ligne droicte IC est vn costé du polygone requis. Car puis que le demy cercle & autres arcs d'iceluy ont tousiours esté diuisez par moitié iusques à l'arc IC : il est euident qu'iceluy arc est contenu précisément certain nombre de fois en la circonference du cercle, & en nôbre pair; & par consequent que la ligne droicte IC sera certain nombre de fois également dans iceluy cercle ABC, & en nombre pair. Partant sera décrit dans le cercle ABC vn polygone equilateral & de costez pair. Et qu'il ne touche le cercle DEF, on le demonstre ainsi : De I soit menée IK perpendiculaire à AC, couppant icelle AC en L. D'autant que les angles HFC, ILF sont droicts, les lignes GH, IK seront paralleles par la 28. p. 1. Parquoy puis que la ligne droicte GH touche le cercle DEF au seul point F; la ligne droicte IK sera totalement hors d'iceluy cercle, & ne peut iamais toucher, puis que iamais elle ne conuiendra avec la ligne droicte GH. Donc à plus forte raison la ligne droicte IC, qui est moindre & plus esloignée d'iceluy cercle que IK, ne le touchera pas; ny partât aussi les autres costez du polygone inscrit, puis qu'il sont egaux à IC, & par consequent egalemēt distans du centre d'iceluy cercle par la 14. p. 3.

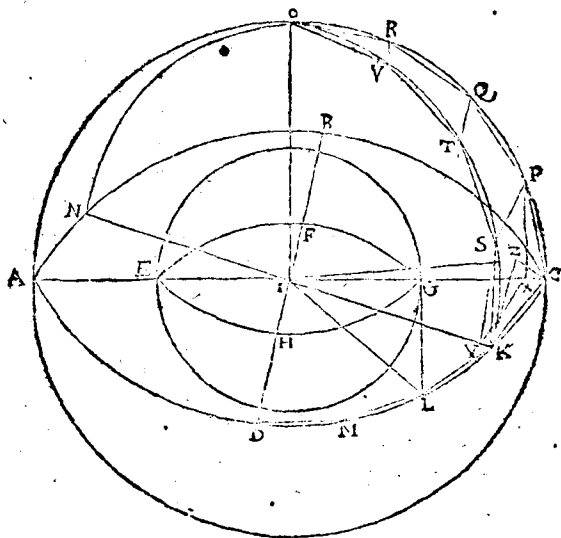
COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que si à l'extremité du costé du polygone inscrit, lequel conuiert avec le diametre, on tire vne ligne perpendic. à iceluy diametre, qu'elle ne peut toucher le moindre cercle, mais qu'elle tombera toute dehors. Car telle est la ligne IK, laquelle du point I extreme du costé IC conuenant avec le diametre AC, est tirée perpendiculairement sur iceluy diametre AC. & a esté demonstree qu'elle ne touche pas le cercle DEF.

PROB. 2. PROP. XVII.

Deux spherés inegales estans sur vn mesme centre; inscrire en la plus grande vn polyedre, duquel les plans ne touchent point la superficie de la petite sphere.

Soient les deux spheres inegales ABCD, EFGH, alentour
d'un mesme centre I: & il faut dans la plus grande ABCD in-
scrire vn solide polyedre ou de plusieurs costez, lequel ne tou-
che la superficie de la moindre sphere EFGH,



Soient les deux spheres couppees par quelque plan passant par le centre I : il est euident par la def. de la sphere, (qui est faicte par la circonduction du demy cercle) que les communes sections seront cercles, & les plus grands de toute la sphere : d'autant qu'ils ont pour diametre le diametre de la sphere, puisque le plan couppant passe par le centre de la sphere: soient donc icelles communes sections, sçauoir en la plus grande sphere, le cercle ABCD, & en la plus petite, le cercle EFGH : & soient leurs diametres AC & BD se couppans en angles droicts au centre I : Et dans le cercle de la plus grande sphere ABCD, soit inscrit vn polygone, ne touchant point le moindre cercle EFGH, par la 16. p. 12. Duquel les costez de la quarte CD, soient Ck, kL, LM, MD: Et soit menee la ligne KI, continuee iusques au poinct N : Item par la 12. p. 11. du centre I soit mene IQ perpendiculaire sur le plan des cercles ABCD, EFGH, rencontrant la superficie de la plus grande sphere.

re en O : Pareillement par les lignes AC, IO, & Nk, OI, foiet tirez les plans AOC, NOk. Ils feront (par ce qui a esté dit cy dessus) les demy cercles AOC, NOK, tres-grands en la sphere, (d'autant que leurs diametres passent par le centre I :) Et d'autant que la ligne IO est esleuee perpendiculairement sur le plan du cercle ABCD, les deux demy cercles AOC, NOk, seront par la 18. p. 11. esleuez perpendiculairement sur le plan d'iceluy cercle. Et puis que les trois demy cercles ADC, AOC, NOk sont egaux (ayans les diametres egaux) aussi leurs moitez seront egales, sçauoir les quartes DC, OC, Ok : Partant aiant qu'il y aura de costez du poligone en la quarte DC, on en pourra inscrire autât en chacune des quartes OC, Ok. Soient iceux CP, PQ, QR, RO : & Ks, ST, TV, VO : & soient menees les lignes SP, TQ, VR : Item des points P & S foiet menees par la 11. p. 11. les perpendiculaires PX, SY ; par la 38. p. 11. elles tomberont sur les lignes IC, IK, qui sont les communes sections des quarts de cercles IOC, IOK, esleuez perpendiculairement sur le quart IDC. Soit aussi menee la ligne XY. Maintenant puis que les arcs & les cordes PC & SK sont egales : les angles PXC, SYK droicts, & les angles PCX SKY egaux : car ils insistent sur les peripheres egales AOP, NOS : les deux angles PCX, PXC du triangle PCX, & le costé PC, sont egaux aux deux angles SKY, SXK, & au costé SK du triangle SKY : partant par la 26. p. 1. les autres costez PX, XC seront egaux aux autres costez SY, YK. Parquoy puis que les deux diametres AC, NK sont egaux : & les segmens XC, YK aussi egaux ; les segmens AX, NY seront pareillemēt egaux : partant comme IX est a XC, ainsi IY est a YK : & par la 2. p. 6. TX sera parallele a KC. Item les deux perpendiculaires PX, SY estans egales, sont aussi paralleles par la 6. p. 11. & par la 33. p. 1. SP, TX, seront egales & paralleles : & par la 9. p. 11. SP & KC seront paralleles, & par la 7. p. 11. SK & PC seront au mesme plan d'icelles. Partant tout le quadrilatere CK SP, est en vn mesme plan. Par mesme discours on monstrera aussi que les quadrilateres TP, VQ, & le triangle VOR ont chacun toutes leurs parties en vn mesme pla. Que si des points O, P, R, S, T, V, on imagine des lignes menees vers le centre I, on se representera vne figure solide, comprise entre OC & OK, composee de quatre pyramides, desquelles le sommet est au centre I, & leurs bases sont les quadrilateres SC, TP, VQ, & le triangle VOR : Et si on construiet pareillement sur les costez KL, LM, & MD, comme on a fait sur CK : Et semblablement sur toutes les autres quartes, on aura inscrit vn Poliedre en la sphere donnee.

Je dis d'auantage qu'iceluy polyedre ne touche la petite sphere EFGH. Car si du centre I on meine la ligne IZ perpendiculaire sur le plan SC: Je dis qu'elle sera plus grâde que IG demy diametre de la petite sphere.

Car ayant pour l'inscription du polygone tiré du poinct G la ligne GL perpendiculaire à AC, laquelle est manifestement plus grande que CK costé d'iceluy polygone inscrit, soit tirée IL; & aussi CZ, KZ. D'autant que par la 2.d.11. les angles IZC, IZK sont droicts, le quarré de IC sera egal aux quarréz de IZ, CZ, & le quarré de IK egal aux quarréz de IZ, ZK: Parquoy les quarréz des demy diametres egaux IC, IK, estans egaux, les quarréz de IZ, CZ, seront egaux aux quarréz de IZ ZK: ostant donc le quarré de IZ commun, resteront egaux les quarréz de CZ, KZ; & par consequent les lignes CZ, KZ sont egales. On demonstrera en la mesme maniere, estant tirees des lignes de Z à P & S, qu'elles seront egales, tant entr'elles qu'à icelles CZ, KZ: Parquoy si du centre Z, & de l'interuale de l'une d'icelles, on décrit vn cercle il circonserira le quadrilatere CKSP: duquel les trois costez CK, CP, KS qui soustiennēt arcs egaux de cercles eg. estās eg. & l'autre costé SP plus petit; (car les triang. ICK, IXY estans semblables, & le costé IC plus grand que le costé IX, aussi le costé CK sera plus grand que le costé XI, qui a esté démontré egal à SP) il est euident que l'angle CZK sera plus grand qu'un droit; & par consequent le plus grand du triangle CZK: & par la 19 p.1. CK sera plus grand costé que CZ. Parquoy GL estant plus grande que CK, sera aussi plus grande que CZ; & par consequent le quarré de GL plus grand qu'iceluy de CZ. Et d'autant que par la 47. p.1. les quarréz de IG & GL, sont egaux aux quarréz de IZ, CZ, (estans chacuns egaux au quarré du demy diametre de la grande sphere, d'autant que les triangles IGL, ICZ sont rectangles) & le quarré de GL, est plus grâd que le quarré de CZ; le quarré de IZ, sera plus grand que le quarré de IG; & par consequent la ligne IZ, plus grande que la ligne IG. Le plan CKSP ne touche donc pas la petite sphere EFGH. On prouuera par mesme raison que tous les autres plans du polyedre inscrit en la grande sphere ne touchent pas la petite sphere EFGH. Donc estans donnees deux spheres inegales alentour d'un mesme centre, nous auons inscrit en la plus grande vn polyedre, qui ne touche pas la superficie de la petite sphere. Ce qu'il falloit faire.

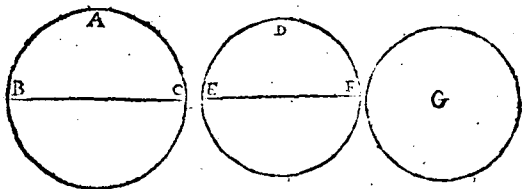
COROLLAIRE.

Des choses cy dessus demonstrees, resulte que si en un autre sphere, on inscrit un polyedre seblable au polyedre cy dessus descript, qu'iceux polyedres seront en raison triplee des diametres des spheres, ausquelles ils seront inscrits. Car iceux polyedres estans semblables par la deff. des solides semblables, ils auront en leur conuexité autant de plans semblables l'un comme l'autre: partant ils se pourront diuiser en autant de pyramides semblables l'un comme l'autre, ayant toutes le demy diametre de leur sphere pour un de leurs costez: Partant prises vne à vne, elles seront en raison triplee des costez homologues, sçauoir est des demy diametres des spheres, par le corol. de la 8 p. 12. Et les toutes aux toutes, pareillement en raison triplee des mesmes demy diametres, par la 12. p. 5. Et par la 15. p. 5. en raison triplee des diametres entiers.

THEO. 16. PROP. XVIII.

Les spheres sont l'une à l'autre, en raison triplee de leurs diametres.

Soient les deux spheres ABC, DEF, desquelles les diametres sont BC, EF. Je dis qu'elles sont l'une à l'autre en raison triplee du diametre BC, au diametre EF: C'est a dire que si



on imagine que comme la raison triplee de BC à EF, ainsi la sphere BAC, a quelque autre sphere, comme G: icelle fera egale a la sphere DEF.

Autrement elle sera plus grande ou plus petite. Soit premierement la sphere G, plus petite que la sphere DEF, s'il est possible: Elle pourra estre enfermee dans icelle, si on les met toutes deux sur vn mesme centre: Et partant dans la sphere DEF, peut estre inscrit vn polyedre qui ne touchera point la plus petite sphere G par la 17. p. 12. Et dedans l'autre sphere pourra estre pareillement inscrit vn semblable polyedre par la mesme prop. Et par le corol. d'icelle, ce polyedre cy sera a celuy-la, en raison triplee du diametre BC, au diametre EF: mais en telle raison, la sphere BAC est posce estre a la sphere G, & par la 11. p. 5. comme la sphere BAC, a la sphere G, ainsi le polyedre de la sphere BAC, sera au polyedre de la sphere DEF. Or la sphere BAC, est plus grande que son polyedre, n'estant que partie d'icelle: donc par la 14. p. 5. la sphere G est plus grande que le polyedre de la sphere DEF: ce qui est impossible, n'estant que partie d'iceluy. Donc la sphere BAC, ne peut estre en raison triplee des diametres BC & EF, a vne autre sphere plus petite que DEF.

Soit donc la sphere G plus grande que DEF, s'il est possible: Et puis qu'on a posé que comme la sphere ABC a la sphere G, ainsi la raison triplee du diametre BC au diametre EF; en changeant la sphere G sera a la sphere BAC, en raison triplee du diametre EF, au diametre BC. Item on peut imaginer que comme la sphere G a la sphere BAC, ainsi la sphere DEF, a vne quatriesme proportionelle: laquelle sera plus petite que BAC par la 14. prop. 5. d'autant que G est posce plus grande que DEF: Et partant icelle quatriesme pourra estre inscrite en la sphere BAC: Et si par la 11. p. 5. la sphere DEF, sera à icelle quatriesme inscrite dans BAC, en raison triplee du diametre EF au diametre BC, ce que nous auons demonsté estre impossible. Donc la sphere G, n'a peu estre plus grande, ne plus petite que la sphere DEF, mais egale: & par consequent les spheres sont l'une à l'autre en raison triplee de leurs diametres.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'une sphere est à une sphere, comme le polyedre descript dans celle-là, est au polyedre semblable descript en celle

cy: pource que tant les spheres que les polyedres sont en raison triplée des diametres d'icelles spheres, comme il a esté démontré.

Fin de l'Element douziesme.



ELEMENT



ELEMENT

TREIZIESME.

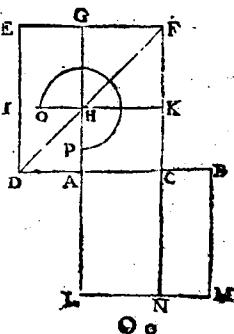
THEOR. I. PROP. I.



Si vne ligne droicte est coupee en la moyenne & extreme raison : le quarré de la moitié de la toute , & du plus grand segment comme d'une seule ligne, est quintuple du quarré de la moitié d'icelle ligne totale.

Soit la ligne AB, coupee en la moyenne & extreme raison au point C, à laquelle on adiouste AD, ligne égale à la moitié de la totale AB: ie dis que le quarré de DC est quintuple du quarré de DA.

Car soit descript sur CD le quarré CE, & tiré le diamètre DF; puis soit menée AG parallèle à DE, coupant le diamètre DF en H, par lequel point soit tirée IK parallèle à CD. En apres ayant prolongé GA & accompli le quarré AM, soit produi-



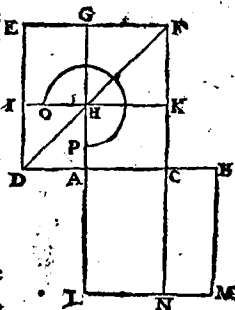
te FC iusques en N. Premièrement par le corol. de la 4. p. 2. les quadrilateres AI, GK seront quarrés des lignes DA, AC. Et puis que AB est couppee en la moyenne & extreme raison en C, comme AB sera à AC, ainsi AC est à CB; & par la 17. p. 6. le rectangle CM, sous AB, CB, est egal au quarré de AC, scauoir GK. Et puis que AB est posée double de DA; & AL est égale à celle AB, & AH à AD; aussi AL sera double de AH. Mais comme AL est à AH, ainsi le rectangle AN est au rectangle AK, par la 1. p. 6. Donc AN est double de AK. Et puis que par la 43. p. 1. AK est egal à IG; AN sera egal aux deux IG, AK adioustant donc ces egaux, aux egaux CM, KG, le quarré AM sera egal au gnomon OP. Parquoy puis que par le scholie de la 4. p. 2. le quarré AM est quadruple du quarré AI, aussi le gnomon OP sera quadruple du mesme quarré AI: & partant si au gnomon OP est adiousté le quarré AI, CE quarré de DC sera quintuple de AI quarré de DA. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si le quarré d'une ligne, est quintuple du quarré d'une partie d'icelle: le double d'icelle partie estant couppee en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera l'autre partie de la donnee.

Soit la ligne DC diuisee au point A, en sorte que le quarré de la toute scauoir EC, soit quintuple du quarré de la plus petite partie DA, scauoir AI: & soit prise AB double d'icelle AD: le dis que si on diuise AB en la moyenne & extreme raison, que le plus grand segment sera AC, autre partie de la totale DC.

Car ayant acheué la construction comme en la precedente: les quadrilateres AI, GK seront quarrés par le corol. de la 4. p. 2. Et puis que AB, c'est à dire AL, est double de DA, ou

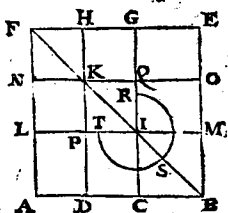


• AH son egale, le rectangle AN sera double du rectangle AK par la 1. p. 6. ou egal aux deux AK, IG qui sont egaux par la 43. p. 1. Or par le scholie de la 4. p. 2. le quarré AM est quadruple du quarré AI; & le quarré EC est quintuple du mesme par l'hypothese: Il est donc euident que le quarré AM est egal au gnomon OP, duquel les deux rectangles AK, IG, sont egaux au rectangle AN. Il faut donc que le rectang CM, soit egal au quarré GK, fait sur vne ligne egale à AC: & partant par la 17 p. 6. comme BM, c'est à dire AB est à AC, ainsi AC à CB. Parquoy par la 3. d. 6. la ligne AB sera coupee en la moyenne & extreme raison au point C: & AC autre partie de la totale DC, est le plus grand segment d'icelle. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droicte est coupee en la moyenne & extreme raison; le quarré du plus petit segment & de la moitié du plus grand segment comme d'une seule ligne, est quintuple du quarré de la moitié du plus grand segment.

Soit la ligne AB, coupee en la moyenne & extreme raison au point C, de laquelle le plus grand segment AC est coupé en deux également en D: ie dis que le quarré du petit segment & de la moitié du grand BD, est quintuple au quarré de la moitié du grand segment DC.



Qu'il ne soit ainsi: Soit AB soit décrit le quarré AE, & ayant mené son diametre BF, des points C & D, soient menees CG, DH paralleles à AF, couppans le diametre BF es points I & K, par lesquels soient menees LM, NO paralleles à AB, lesquelles couppent CG, DH en P & Q: Et par le corol. de la 4. p. 2. les quadrilateres LG, PQ, DO seront quarrés des lignes AC, CD, DB: ie dis donc que le quarré DO est quintuple au quarré PQ.

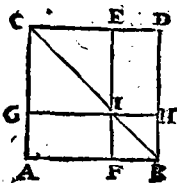
Car puis que comme AB à AC, ainsi AC à CB, par la 17. p. 6.

le rectangle des extremes AB & CB (ſçavoir AM) eſt egal au quarré de la moyène AC, ſçavoir LG, lequel eſtât par le ſcho- lie de la 4. p. 2. quadruple du quarré PQ, le rectangle AM ſera auſſi quadruple de PQ: mais AP & DI eſtans ſur baſes ega- les, ſont egaux par la 1. p. 6. Et DI eſtant egal à IO, par la 43. p. 1. le gnomon RST ſera egal au rectangle AM quadruple du quarré PQ: ainſi il eſt euident que le quarré DO, eſt quin- tuple du quarré PQ. Ce qu'il falloir demonſtrer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si vne ligne droite eſt couppee en la mo- yenne & extreme raiſon, le quarré de la toute, & le quarré du petit ſegment enſemble, ſont triples du quarré du plus grand ſegment.

Soit la ligne AB, couppee en la mo- yenne & extreme raiſon au point F: ie dis que le quarré de la toute AB, & le quarré de FB plus petit ſegment, ſont triples du quarré de AF plus grand ſeg- ment.



Car ſoit deſcrit ſur AB le quarré AD, auquel eſtant tiré le diametre BC, ſoit menee de F la ligne EF parallele à AC, coupant BC en I, par lequel ſoit menee GH parallele à AB. Par le corol de la 4. p. 2. les parallelogrammes GE, FH ſeront quarez des lignes AF, FB: Et puis que comme AB eſt à AF, ainſi AF eſt à FB, par la 17. p. 6. le rectangle des extremes AB, FB, ſçavoir AH eſt egal au quarré de la moyène AF, ſçavoir GE. Veu donc que AH & FD ſont egaux, le gnomon EBG avec le quarré FH, ſera egal au double du quarré GE: & par- tant adiouſtant le quarré GE; AD quarré de AB, avec FH quarré de FB ſera triple de GE quarré de AC. Ce qu'il falloir prouuer.

THEO. 5. PROP. V.

Si vne ligne droite eſt couppee en la mo-

yenne & extreme raison, & à icelle on adiouste directement le plus grand segment; la toute compoſee, ſera couppee en la moyenne & extreme raison, & la toute ſimple ſera le plus grand ſegment.

Soit la ligne AB, couppee en la moyenne & extreme raison au point C, & à icelle on adiouste directement AD egale à AC grand ſegment: ie diſ que DB eſt auſſi couppee en la moyenne & extreme raison au point A, & que la toute donnee AB eſt le plus grand ſegment.



Car puis que comme AB eſt à AC, c'eſt à dire AD, ainſi AC eſt à CB; en changeant comme DA ſera à AB, ainſi BC à AC: & en compoſant comme DB ſera à AB, ainſi AB à AC, c'eſt à dire à AD. Donc par la 3. d. 6. la ligne DB eſt couppee en la moyenne & extreme raison au point A, & le plus grand ſegment eſt la ligne AB propoſee au commencement. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne rationele eſt couppee en la moyne & extreme raison: l'un & l'autre ſegmēt eſt ligne irrationele appelee reſidu.

Soit la ligne rationele AB, couppee en la moyenne & extreme raison au point C: ie diſ que AC & BC ſont irrationeles & reſidus.

Car ſi au plus grand ſegment AC on adiouſtee directement DA, egale à la moitié de AB. D'autant que par la 1. p. 13. le quarré de DC eſt quintuple du quarré de la ligne DA, il eſt à iceluy comme nombre à nombre. Parquoy par la 6. p. 10. les quarrés de DC, DA ſeront commenſurables, & par conſequent les lignes DC, DA, ſont auſſi commenſurables, au moins en puiſſance. Or AD eſt rationele, puis qu'elle eſt moitié d'une rationele AB: Donc auſſi DC ſera rationele. Et

d'autant que les quarréz de DC, DA ne font comme nombre quarré à nombre quarré: (comme il appert par le corol. de la 24.p.8. car ils font comme 5 à 1, ou 15 à 5) les lignes DC, DA, seront incommensurables en longueur, par la 9.p. 10. & partant rationeles commensurables en puissance seulement. Parquoy si de DC rationele on oste DA commensurable en puissance seulement, par la 74 p.10. le reste AC sera irrationele appelée residu.

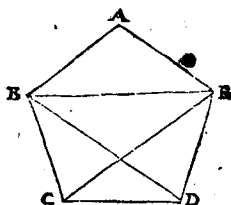
Derechef AB estant couppee en la moyenne & extreme raison en C, le quarré de AC sera egal au rectangle de AB, CB par la 17.p.6. Or le quarré du residu AC appliqué sur la rationele AB, doit faire l'autre costé CB residu premier, par la 98.p.10. Donc les segmens AC, CB, sont lignes irrationeles appellees residus. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si en vn pentagone equilateral trois angles pris comme on voudra sont egaux : il sera equiangle.

Soit le pētagone equilateral ABCD E, duquel trois angles pris cōme on voudra sont egaux, sçauoir A, C, D, ie dis qu'iceluy pentagone est equiangle.

Car estant tirees à iceux angles egaux A, C, D, les lignes substendantes BE, BD, CE, elles seront egales par la 4 p.1. (estans tous les costez egaux.) Item les deux triāgles DBC & DEC, ayans les trois costez egaux aux trois costez, chacun au sien, les deux angles DBC & DEC seront egaux par la 8. p.1. Item B E estant isoscele, les deux angles sur la base BE, seront egaux par la 5. p.1. Pareillement les deux triangles CB E & DEB, ayās les trois costez egaux aux trois costez, chacun au sié, ils auront l'angle CEB egal a l'angle DBE, par la 8. p.1. Partant le total angle B est egal au total angle E. Mais d'autant que CBE est triangle isoscele, & que BAE a les trois costez egaux aux trois costez du triangle DEC chacun au sien,

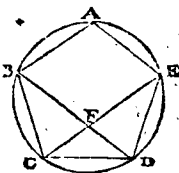


l'angle ABE sera egal a l'angle DCE par la 8. p. 1. Parquoy le total C sera egal a l'angle total B, & par la 1. commune sentence ils seront tous egaux entr'eux. Partant le pentagone sera equiangle. Ce qui estoit a demonstrier.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si deux lignes droictes subtiennent deux angles d'un pentagone equiangle & equilateral, lesquels soient d'ordre: icelles subtennantes se couperont l'une l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs plus grands segmens seront egaux à un costé du pentagone.

Au Pentagone ABCDE equiangle & equilateral soient deux lignes droictes BD, CE, subtennantes les angles C, D, qui sont d'ordre, lesquelles s'entre-couppent en F. Je dis qu'elles seront ainsi coupees en la moyenne & extreme raison, & que leurs plus grands segmens BF, EF seront egaux a quelconque costé du pentagone.



Car ayant descrit par la 14. p. 4. un cercle alentour du pentagone, les arcs AB, BC, CD, DE, & EA seront egaux par la 28. p. 3. Et d'autant que les triangles CBD, CED, ont deux costez egaux, & l'angle compris par iceux aussi egal par l'hypotese; les bases BD, CE, & les angles CDB, DCE seront pareillement egaux par la 4. p. 1. Et partant veu qu'au triangle CDF, les deux angles DCF, CDF, sont egaux, & par la 32. p. 1. l'angle externe BEC est egal à iceux: iceluy BEC sera double de DCE. Mais par la 33. p. 6. l'angle BCE est aussi double du mesme DCE, pource que l'arc BAE est double de l'arc DE: Donc les angles BEC, BCE sont egaux; & partant par la 6. p. 1. BF est egal au costé du pentagone BC. Et d'autant que par la 26. p. 3. les angles DBC, ECD, insistsans sur arcs egaux, les deux angles DBC, CDB du triangle BCD sont egaux aux deux angles DCF, EDC du triangle CDF: & partant les deux triangles BCD, CDF seront equiangles par la 32. p. 1. Parquoy

par la 4. p. 6. comme BD sera a DC, c'est à dire a BF, ainsi CD ou BF sera a FD: & partant la subtendante BD est couppee en F, en la moyenne & extreme raison, & le plus grand segment BF est egal a BC costé du pentagone. Par mesme raison on demoustrera CE estre couppee en la moyenne & extreme raison en F, & que le grand segment EF est egal à DE costé du pentagone. Ce qu'il falloit prouuer.

S C H O L I E.

Donnot a traduit ceste proposition ainsi.

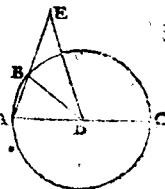
Si deux lignes droictes sont tirees d'angle en angle en vn pentagone equiangle, & equilateral, elles se couperont l'une l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs plus grâds segmens seront egaux aux costez du pentagone.

Ce qu'estant ainsi, la proposition ne seroit vniuersellement vraye: Car il est evident que si on tire deux lignes droictes de l'angle A, aux angles C & D, ou de l'angle B, aux angles D & E, &c. Icelles lignes droictes ne se couperont point.

THEOR. 9. PROP. IX.

La ligne droicte composee du costé de l'hexagone, & du costé du decagone, tous deux inscrits en vn mesme cercle, est couppee en la moyenne & extreme raison, de laquelle le plus grand segment est le costé de l'hexagone.

Dans le cercle ABC soit inscrit le costé du decagone AB, auquel soit adiousté directement le costé de l'hexagone BE qui peut estre inscrit dans le mesme cercle, c'est à dire que BE soit egale au demy diametre du cercle. (car le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle auquel il est inscrit par le corol. de la 15. p. 4.) Je dis que AE est couppee en



la moyenne & extreme raison, & que BE costé de l'hexagone est le plus grand segment.

Car ayant mené de A par le centre D le diametre AC, & tiré les lignes DB, DE : l'arc AB estant la 10. partie de la periphère du cercle, sera la 5. de l'arc AC : & partant l'arc BC sera quadruple d'iceluy AB : Parquoy par la 33. p. 6. aussi l'angle BDC sera quadruple de l'angle ADB : & par la 32. p. 1. BDC estant extérieur, il vaudra les deux DAB, DBA : lesquels estés égaux par la 5. p. 1. parce que le triangle ABD est isoscele. l'un ou l'autre sera double de ADB : mais l'un d'iceux DBA estant extérieur, est égal aux deux opposés intérieurement DEB & BDE (lesquels sont égaux, estant le triangle DBE isoscele, pource que DB demy diametre, & BE sont égaux par la construction) aussi l'angle DBA sera double de l'angle E : lequel par ce moyen sera égal à l'angle ADB : ainsi les deux triangles AED, ADB seront equiangles, ayans l'angle A commun, & l'angle E égal à l'angle ADB, par la 32. p. 1. le tiers sera égal au tiers : & par la 4. p. 6. comme AE est à AD ou BE son égal, ainsi AD, ou BE est à AB : partant AE est couppee en la moyenne & extreme raison en B : & BE costé de l'hexagone est le plus grand segment. Ce qu'il falloit prouver.

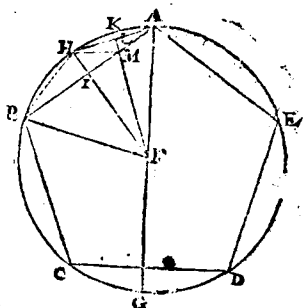
COROLLAIRE.

De cery est evident que le costé de l'hexagone estant couppe en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment est costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car si de BE costé de l'hexagone on coupe une partie égale à AB : comme la toute AE sera à la toute BE ainsi la retranchée BE sera à la retranchée de BE, c'est à dire à AB : & partant par la 19. p. 5. le reste sera au reste, comme la toute à la toute, ou la retranchée à la retranchée. Parquoy BE sera semblablement couppee que AE en la moyenne & extreme raison par la 3. d. 6. dont le plus grand segment sera AB costé du decagone.

THEOR. 10. PROP. X.

Le quarré du costé du pentagone equilateral inscrit en vn cercle, est égal aux deux quarrés des costez du decagone, & de l'hexagone, inscrits au mesme cercle.

Au cercle $ABCDE$, duquel le centre est F , soit inscrit vn pentagone equilateral; vn costé duquel est AB . Je dis que le quarré d'iceluy costé AB est egal aux deux quarréz des costez de l'hexagone, & du decagone inscrit au mesme cercle.



Car ayant tiré le diametre AFG , & ioinct FB , soit couppe l'arc AB en deux également par la ligne FH , laquelle coupe aussi la ligne AB en I ; & soient tirees les lignes droictes AH , BH ; & AH sera costé du decagone, & FB costé de l'hexagone: En apres soit couppe l'arc AH en deux également en K , par la ligne FK , laquelle coupe aussi la ligne AH en L , & la ligne AB au point M , auquel soit menee la ligne HM . Veu donc que les arcs AH , BH sont egaux, aussi seront egaux les angles AFH , BFH , par la 27. p. 1. Parquoy les costez AF , FB estans egaux, & FI commun aux deux triangles AFI , BFI , la base AI sera egale à la base BI , par la 4. p. 1. & les angles AIF , BIF aussi eg. & partant droicts. Par mesme raison serot egales les lig. AL , HL , & les ang. ALF , HLF droicts. Or si des demis cercles eg. $ABCG$, $AEDG$, on oste arcs egaux ABC , AED , resteront eg. les arcs CG , CD , & partant l'arc CG sera moitié de l'arc CGD . Mais aussi l'arc AH est moitié de l'arc AHB ; donc puis que les arcs AB , CD sont egaux, les arcs AH , CG moitié d'iceux, seront aussi egaux: & partant l'arc AH estât double de l'arc HK , aussi le sera CG . Aussi puis que les arcs AB , BC sont egaux, & l'arc AB est double de l'arc BH , l'arc BC sera pareillement double du mesme arc BH . Parquoy les arcs CG , BC sont equemultiples, sçauoir est doubles, des arcs HK , BH , & partant par la 1. p. 5. tout l'arc BG sera double de l'arc BK : & par consequent l'angle BFG aussi double de l'angle BFK , par la 33. p. 6. Mais par la 20. p. 3. le mesme angle BFG au centre, est double de l'angle FAB : donc les angles BFM , FAB seront egaux, & partant l'angle ABF estant commun aux deux triangles ABF , FBM , & le tiers au tiers, par la 32. p. 1. iceux triangles seront equiangles; & par la 4. p. 6. comme AB sera à BF , ainsi BF à BM : & partant par la 17. p. 6. le re-

l'angle de AB, BM sera egal au quarré de BF. Drectef puis que les costez AL, LM du triangle ALM sont egaux aux costez HL, LM du triangle HLM, & les angles contenus d'iceux aussi égaux, sçavoir droicts, par la 4. p. 1. les bases AM, HM, & les angles LAM, LHM seront egaux. Mais par la 3. p. 1. l'angle LAM est egal a l'angle HBA, pource que les costez HA, HB sont egaux : Donc aussi l'angle LHM sera egal au mesme HBA : & partant par la 32. proposition 1. les triangles ABH, AHM seront equiangles, puis qu'ils ont les angles ABH, AHM egaux, & l'angle HAM commun. Parquoy par la 4. p. 6. comme AB sera a AH, ainsi H a AM : & par la 17. p. 6. le rectangle de AB, AM sera egal au quarré de AH. Mais il a esté démontré que le rectangle de AB, BM, est egal au quarré de BF : donc les rectangles de AB, AM, & de AB, BM ensembles, sont egaux aux deux quarrés de AH, BF. Mais par la 2. p. 2. iceux rectangles sont egaux au quarré de AB : donc le quarré de AB costé du pentagone est egal aux deux quarrés des lignes BF, AH, costez de l'hexagone, & du decagone. Ce qui estoit à prouver.

C O R O L L A I R E. I.

Par cecy est manifeste qu'une ligne droite tirée du centre, & laquelle diuise en deux également un arc, diuise aussi la ligne subtendante d'iceluy arc en deux également, & a angles droicts.

Est aussi euident que le diametre du cercle tiré de l'angle du pentagone, diuise en deux également l'arc que le costé oppose à iceluy angle subtend, comme aussi iceluy costé oppose, & a angles droicts. Car il a esté démontré que le diametre AG tiré du point A, diuise en deux également l'arc CD, lequel le costé oppose CD subtend : Parquoy par ce que dessus, il coupera aussi en deux également & a angles droicts iceluy costé CD. La mesme demonstration sera en tout polygone equilateral inscrit au cercle, le nombre des costez estant impair.

T H E O R. II. P R O P. XI.

Si dans vn cercle ayant le diametre rationel, on inscrit vn pentagone equilateral ; le costé du pentagone est irrationel : appellé ligne mineure.

Soit le pentagone equilateral AB CDE, inscrit dans le cercle ABCDE, duquel le diametre est rationel : je dis que AB costé du pentagone est irrationel, appellé ligne mineure.

Car soient menez par le centre F les diametres AG, BH, desquels AG coupera le costé CD en deux également en I, & à angles droicts par le corol. de la preced. soient aussi tirees les lignes AC, AH, desquelles AC, sera couppee par le diametre BH en deux également en K par le corol. de la preced. Partant est manifeste que les deux triangles ACI & AKF sont equiaugles; car l'angle du point A est commun a tous les deux, & le droict AKF egal au droict AIC; le tiers sera egal au tiers par la 32. p. 1. Et par la 4. p. 6. comme IC à CA, ainsi KF à FA. Item du demy diametre FH (lequel est rationel & egal à FA) soit retranchée FL egal e au quart de FA, laquelle FL sera rationele estant le quart d'une ligne rationele, & par la 16. p. 10. BL composee des deux BF, FL, & commensurable à chacune d'icelles, sera aussi rationele. Item de AC soit retranché CM quart d'icelle ligne: Et par la 15. p. 5. CI sera à CM quart de CA, comme KF à FL quart de FA: Que si on double les deux CI & CM par la 15. p. 5. CD sera à CK (car elle est la moitié de CA & double de CM) comme KF à FL: & en composant comme les deux CD & CK ensemble à CK, ainsi KL à FL: Et par la 22. p. 6. le quarré de la composee de CD & CK sera au quarré de CK, comme le quarré de KL au quarré de FL. Mais d'autant que la ligne AC estant couppee en la moyenne & extreme raison (sçavoir est estant tiree la ligne droite BD) par la 8. p. 13. son plus grand segment est egal au costé du pentagone, sçavoir à iceluy CD; par la 1. p. 13. le quarré de la composee de CD plus grand segment, & CK moitié de la toute CA, sera quintuple au quarré de CK moitié de la toute: partant aussi le quarré de KL, sera quintuple du quarré de FL. Mais la ligne BL est aussi quintuple de FL, estant FL quart de IB: donc comme BL à FL, ainsi le quarré de KL, au quarré de FL; c'est à dire en raison doublee de KL à FL: dont s'ensuit que KL sera moyenne proportionele entre BL & FL: Partant par la mesme raison doublee de la 10. deff. 5. & 20. proposition du 6. le quarré de BL sera au quarré KL, comme BL à FL: c'est à dire que le quarré de BL sera quintuple du quarré de KL: Partant iceux

quatrez seront entr'eux comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré, (comme il appert par le corol. de la 24. p. 8) Parquoy par la 9. p. 10. les lignes BL & KL, seront commensurables en puissance seulement : desquelles BL estant rationele : BL & KL seront rationeles commensurables en puissance seulemēt, & par la 74. p. 10. BK sera residu. Maintenant que la ligne BL puisse plus que la ligne KL, du quarré de la ligne N. Donc puis que BL est rationele commens. en longitude à la rationele proposee BF (car elles sont entr'elles comme 5. à 4.) Et que BL peut plus que KL, du quarré de la ligne N qui luy est incommens. en longitude ; (car la puissance de la ligne BL estant quintuple de la puissance de la ligne KL, le quarré de N, qui reste apres avoir osté le quarré de KL de celuy de BL ; sera au quarré de BL, comme, 4. à 5. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré : & partant par la 9. proposition. 10. BL qui peut plus que KL du quarré de la ligne N, est incommens. en longitude à icelle N.) par la 4. des tierces def. du 10. BK sera residu quatriesme.

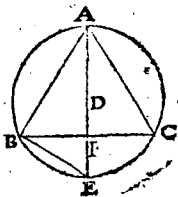
Finalement pource que par le corol. de la 8. p. 6. AB est moyenne proportionele entre BH, BK (car le triangle BAH, à l'angle droit, duquel est tiree AK perpend. à la base BH) le quarré de AB sera egal au rectangle de BH, BK. Parquoy puis que la ligne droicte AB peut la superficie contenue de la rationele BH, & du residu 4. BK : par la 95 p. 10. icelle AB sera ligne mineure. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XII.

Le quarré du costé du triangle equilateral inscrit dans vn cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.

Soit le triangle equilateral ABC inscrit en vn cercle ABC, duquel le centre est D. Je dis que le quarré de AB costé d'iceluy triangle, est triple du quarré du semidiametre.

Car estant tire le diametre AE, lequel coupera par le corol. de la 10. p. de ce liure, l'arc BC en deux egalement en E : & aussi la ligne droicte BC en deux ega-



lement & à angles droicts : veu que l'arc BEC est le tiers de toute la circonference, BE sera la sixiesme partie : partant estant tirée la ligne droicte BE, elle sera le costé de l'hexagone & egal au demy diametre DE, par le corol. de la 15. p. 4. Or le quarre du diametre AE sera quadruple du quarre de BE egal au demy diametre, par le scholie de la 4. p. 2. & par la 47. p. 1. Il est aussi egal aux deux de BA & BE: il est donc manifeste qu'il sera triple du quarre de BE, ou ED son egal. Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

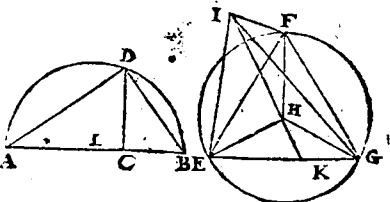
Il s'ensuit de ce que dessus que le quarre du diametre d'un cercle est au quarre du costé du triangle equilateral inscrit en iceluy cercle, en raison sesquiterce, c'est à dire comme 4. à 3. Car puis qu'il a esté démontré que le quarre du costé AB est triplé du quarre du demy diametre AD; posant le quarre de AB 3. le quarre de AD sera 1; & le quarre de A^F quadruple d'iceluy sera 4. Parquoy le quarre de AE sera au quarre de AB comme 4. à 3.

Et pource que le corol. de la 8. p. 6. comme AE est à AB, ainsi AB à AF perpendiculaire tombant d'un angle sur un costé; pareillement le quarre de AB, sera au quarre de AF, comme 4. à 3. On peut aussi facilement colliger que le semi-diametre D^F est couppe en deux également en F par le costé du triangle BC. Car puis que le quarre de AB est triple du quarre de BE; si on pose iceluy quarre de AB estre 12. le quarre de BE sera 4, & le quarre de BF 3; & par consequent le quarre de EF sera 1. par la 47. p. 1. Partant le quarre de BE, c'est à dire de DE son egal, sera quadruple du quarre de FE. Parquoy par le scholie de la 4. p. 2. la ligne DE sera double de FE; & par consequent DE est couppe en deux également en F.

PROB. I. PROP. XIII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vne pyramide equilaterale : & monstrier que le quarre du diametre d'icelle sphere, est en raison sesquialtere au quarre du costé d'icelle pyramide.

Soit la ligne AB, diametre de la sphere donnee, diuisee en C, de sorte que AC soit double de BC: Et apres auoir descrit sur AB le demy cercle ADB, leuee la moyenne proportionele CD, & mené les lignes DA



& DB: Soit de'crit le cercle EFG, duquel le demy diametre HE soit egal à CD: & apres auoir inscrit en iceluy le triang. equilateral EFG, du centre H soit leuee la perpendiculaire HI par la 12. p. 11. laquelle soit egalee à AC: puis soient menees les lignes IE, IF, IG. Je dis premierement que la pyramide EFGI est equilaterale: puis qu'elle peut estre inscrite en la sphere, de laquelle le diametre est AB: & que le quarré du diametre AB, est en raison sesquialtere au quarré du costé EG.

Que la pyramide soit equilaterale: il appert en premier lieu que le triángle EFG, est equilateral: Item que les trois lignes IE, IF, IG, sont aussi egales entr'elles: (d'autant que par la 47. p. 1. le quarré d'une chacune d'icelle est egal au quarré de la perpendiculaire IH, & au quarré de l'une des trois lignes HE, HF, HG, lesquelles sont egales.) Et d'autant que les costez AC, DC du triangle ADC sont egaux aux costez HI, HE du triangle IHE: & les angles qu'ils comprennent egaux; la base AD sera egale à la base EI par la 4. p. 1. En la mesme maniere sera demonstre AD estre egale à FI, GI. Et veu que le quarré de AC, est double du quarré de CD (car ils sont l'un à l'autre comme AC à CB par le coroll. de la 20. p. 6. estans les 3. lignes AC, CD, CB continuellement proportioneles) le quarré de AD, qui est egal à tous les deux, sera triple du quarré de CD, ou de son egale HE: Mais par la 12. p. 13. le quarré de EF est aussi triple du quarré de HE; Partant EF, & AD sont egales: & par la 1. comm. sent. EF & EI seront egales. Parquoy puis que AD est aussi egale à FI, GI; les quatre triang. EFG, EFI, FGI, GEI seront equilateraux, & egaux entr'eux. Et par consequent la pyramide EFGI, est equilaterale.

Qu'elle puisse estre inscrite à la sphere, ayant pour diametre AB, il appert: Soit continuee la ligne perpend. IH par dessous la base de la pyramide iusques en K: Et soit faicte IK

egale à AB, & soit imaginé estre posé le demy cercle ADB à l'entour de la pyramide : sçavoir le point A, au point I ; le point B au point K : Et puis que AC & BC sont egales à IH & HK ; & HG egale à DC, faisant angle droit avec IH, aussi bien que leurs egales AC & CD, il est evident que le point D, du demy cercle tombera sur le point G. Partant le diametre demeurant immobile, si le demy cercle fait vne revolution, il touchera les deux autres angles de la pyramide E & F ; (estans les lignes HE, HF, HG egales) ainsi la pyramide est inscrite en la sphere donnee.

Finalemēt que le quarré du diametre AB, soit sesquialtere au quarré du costé AD, qui est egal à chacun costé de la pyramide, il appert : Car puis que AB est triple de BC : & AC double de la mesme BC : AB sera en raison sesquialtere à AC. Mais par le corol. de la 8. p. 6. les trois lignes AB, AD, AC sont proportioneles : Et partant par le cor. de la 20. p. 6. comme AB sera à AC, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AD. Donc aussi le quarré de AB sera au quarré de AD en raison sesquialtere.

COROLLAIRE.

De ces choses on peut facilement colliger, que la puissance du diametre de la sphere est quadruple sesquialtere de la puissance du semidiam. du cercle descript al'entour de la base de la pyramide. Car puis que AB diam. de la sphere, a esté demonsté sesquialtere en puissance à EF costé de la pyramide, le quarré de EF sera de 6. parties, telles que le quarré du diametre AB en contiendra 9, & le quarré de la ligne HE 2, pource que le quarré de EF est triple du quarré de HE, par la 12. p. 13. Donc de 9 telles parties que le quarré de AB contiendra, le quarré de HE en contiendra 2 : Et partant le diametre AB est quadruple sesquialtere en puissance au semidiametre HE, puis que la raison des quarrés est comme 9 à 2.

Aussi la perpendiculaire tiree du centre de la sphere au plan de la base de la pyramide est la sixiesme partie du diametre de la sphere, & la tierce partie du semidiam. Car L soit le centre du demy cercle ADB : L sera pareillement le centre de la sphere. Je dis que la ligne LC (qui est la perpend. tiree du centre de la sphere à la base EFG : puis que AC est egale à HL, & partant le point C, le mesme que H, ainsi aussi L est le mesme que le centre de la sphere) est la 6. partie du dia. de la sphere, sçavoir est de AB, & la tierce partie du semidiam. AL. Car puis que AC est double de CB, de telles 4 parties qu'est AC, 2 telles sera CB : & partant 6 telles sera la rouse AB, & 3 le semidiam. AL.

Parquoy

Parquoy si AC est 4, & AL 3; LC sera 1: & partant LC sera la sixiesme partie de AB , & la tierce de AL .

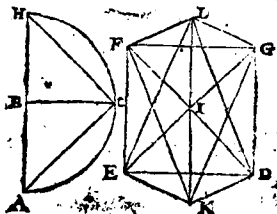
Semblablement la hauteur de la pyramide HI sera deux tierces parties du diametre de la sphere. Car HI est la mesme que AC , laquelle par la construction est deux tierces parties d'iceluy diametre.

Aussi de 9 telles parties que sera le quarré d'iceluy diam. le quarré de la hauteur de la pyramide en sera 4. Car la raison de 9 à 4, est la raison doublee de 3 à 2.

PROB. 2. PROP. XIII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn octaedre: Et monstrier que le quarré du diametre de la sphere, est double du quarré du costé de l'octaedre.

Soit le diametre de la sphere donnee AH , couppé en deux egalement au point B : & apres auoir construit le demy cercle $A CH$; leué la perpendiculaire BC , & mené les lignes CA, CH , lesquelles seront egales entr'elles par la 4. p. 1. sur la ligne DE egale à l'une d'icelles AC, CH , soit construit le quarré $DEFG$,



dans lequel soient menées les deux diagonales DF, GE se couppans au point I , duquel point par la 12. p. 11. soit esleuee la ligne IL , perpendiculairement sur le quarré GE ; laquelle soit aussi continuee perpendiculairement par dessoubs iceluy plan, & soit icelle IK , laquelle soit faicte egale à AB ; & IL aussi à AB : Item des points L & K , soient menées aux angles du quarré les lignes $LD, LE, LF, LG, KD, KE, KF, KG$.

Je dis maintenant que la figure solide $DLFK$, est enuironée de huit triangles equilateraux; & que c'est vn octaedre. Car le quarré $DEFG$, ayant les costez egaux à AC ; Il est euident que les diagonales EG, FD seront egales à AH : partant leurs moitez à AB . Mais les deux lignes IL & IK sont aussi egales à AB : & par consequent elles seront egales à vne chacune d'icelles demy diagonales; & par la 4. p. 1. les huit lignes

LD, LE, LF, LG, KD, KE, KF, KG, seront routes égales entr'elles : & aux quatre du quarré DEFG par la mesme 4. p. 1. (estans les demy diagonales égales aux perpendic. IL & IK, en constituant des angles droicts au point I milieu du quarré) Et puis que tous les costez sont égaux, tous les triang. seront equilateraux, sçauoir les quatre au dessus du quarré DEFG, & ayans leurs bases sur les quatre costez d'iceluy quarré, & se terminans au point L : & quatre autres au dessous du mesme quarré, ayans aussi leurs bases sur les costez du quarré, & se terminans au point K : ainsi le solide DLFK compris de huit triangles equilateraux, sera octaedre.

Je dis d'auantage qu'iceluy octaedre est inscriptible en la sphere donnee. Car il est euident que la ligne LK, est égale au diametre AH, & que l'angle LDK est droit : (d'autant que les deux lignes LI, ID estans égales ; les angles sur la base LD seront égaux, & demy droicts, pource que l'angle LID est droit : Et par mesme raison l'angle IDK est demy droit ; & partant le total LDK sera droit.) Partant le demy cercle ayât pour diametre LK, & faisant vne reuolution à l'entour de l'octaedre il touchera le point D : Et par mesme discours il touchera aussi les trois autres E, F, G, desquels les angles sont égaux à l'angle D.

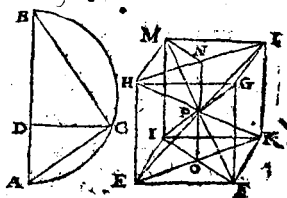
Finablement il est euident par la 47. p. 1. que le quarré du diametre de la sphere AH ou LK, est egal aux deux quarrés de LD, DK, lesquels sont égaux ; & partant iceluy quarré de LK diametre de la sphere, sera double du quarré de l'un d'eux costez de l'octaedre. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROB. 3. PROP. XV.

Dans la sphere donnee, inscrire vn cube : & monstrier que le quarré du diametre de la sphere, est triple au quarré du costé d'iceluy cube.

Soit le diametre de la sphere donnee AB, lequel soit coupé au point D, en sorte que BD soit double de AD, c'est à dire que AB soit triple d'icelle AD : Puis, apres auoir construit le demy cercle ABC, leuë la perpendiculaire DC, & mené les deux lignes AC, & BC : sur EF égale à BC, soit fait le quarré EFGH, sur lequel soient esleuees par la 12. p. 11. les quatre li-

gnes perpendiculaires EI, FK, GL, HM, qu'on fera egales à EF: puis soient menees les quatre lignes IK, KL, LM, MI. D'autant que les lignes EI, FK sont perpend. au plan EF GH: elles seront paralleles par la 6. p. 11. Mais elles sont aussi egales: donc par la 33. p. 1. EF, IK seront pareillement egales & paralleles: & partant EFKI est vn parallelogramme ayant les 4 costez egaux. Mais il a aussi par la 34. p. 1. les 4 angles droicts, puis que les angles EIK, FKI sont opposez aux droicts KFE, IEF: donc EFKI est quarré. Par mesme raison FKL G, GLMH, HMIB seront quarréz: & partant IKLM sera aussi quarré, puis que par la 24. p. 11. il est egal & semblable au quarré oppose EFGH: Car EL est vn solide parallelepiped: pource que par la 15. p. 11. les plans opposez d'iceluy sont parallels, estans tirez par lignes paralleles qui s'entre-touchent. Parquoy EL sera vn cube: lequel ie dis estre inscriptible en la sphere donnee. Car ayant mené les diametres EK, FI, HL, GM, des plans opposez EFKI, HGLM, soient imaginez estre tirez par iceux diametres, les plans EKLH, FIMG, lesquels par la 28. p. 11. coupperont le cube en deux egalelement, & passeront par le centre d'iceluy, sçauoir par le point P, auquel par le corol. de la 39. p. 11. tous les diametres dudit cube s'entre-couperont aussi en deux egalelement: & partant la commune section d'iceux plans, sçauoir NO, passera par le mesme centre P. Mais il est euident qu'iceux plans EKLH, FIMG sont rectangles egaux: & que par consequent leurs diametres & semidiametres seront aussi egaux. Parquoy estant décrit vn cercle du centre P, sur le diametre EL: il est euident qu'iceluy demy cercle faisant vne reuolutio alentour du cube, descriura vne sphere passant par tous les angles du cube: laquelle ie dis estre egale à celle du diametre AB. Car puis que par la 47. p. 1. le quarré de EK est egal aux quarréz des lignes egales EF, FK, & partant double du quarré de EF, ou de KL: les quarréz de EK, KL seront triples du quarré de KL. Mais par la 47. p. 1. le quarré de EL est eg. aux quarréz de EK, KL: donc aussi le quarré de EL sera triple du quarré de KL, c'est à dire du quarré de AC: duquel est aussi triple le quarré de AB. (car par le corol. de la 8. p. 6. AB, AC, AD sont prop. & partant par le corol. de la 10. p. 6. comme AB est à AD, ainsi le



quarre de AB sera au^{quarre} de AC: Veu donc que AB est triple de AD, aussi le quarre de AB sera triple du quarre de AC.) Parquoy les quarrez de EL, AB sont egaux: & par consequent les lignes EL, AB, diametres des spheress: comme aussi les spheress d'iceux diametres, sont pareillement egales.

Or il a este demonstre que le quarre du diametre EL est triple du quarre du costé du cube KL. Parquoy nous auons fait tout ce qui estoit propose.

C O R O L L A I R E.

Il est manifeste que le quarré du diametre de la sphere, ou du cube, est egal aux quarrez du costé du Tetraedre & du cube pris ensemble. Car par la 47 p.1 le quarré de AB diametre de la sphere, est egal aux deux quarrez de AC, BC costez du cube & du tetraedre.

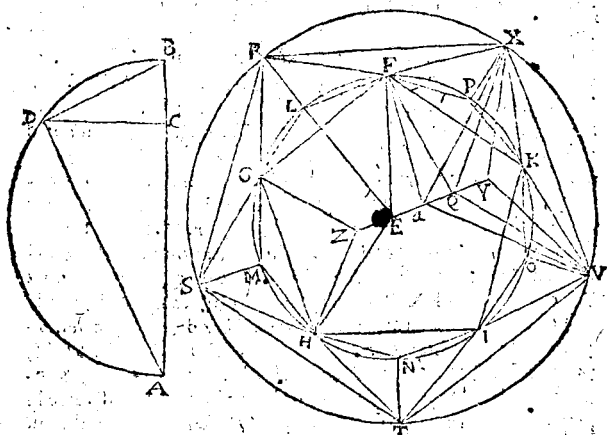
Est aussi euident que tous les diametres du cube sont egaux entre eux, & qu'ils se diuisent en deux egalemt au centre de la sphere: & pareillement que les lignes droictes qui conioignent les centres des quarréz opposéz, se couppent en deux egalemt au mesme centre de la sphere.

P R O B. 4. P R O P. XVI.

Dans la sphere donnee, inscrire vn icosaedre: Et monstrier que son costé est ligne irrationele, appelée ligne mineure.

Soit le diametre de la sphere donnee AB, lequel soit diuisé au point C, en sorte que AC soit quadruple de BC, & apres auoir construit le demy cercle, leué la perpendiculaire CD, & mené les lignes AD, DB; du centre E, & interual EF, egale à BD; soit fait vn cercle, dans lequel soit inscrit le pentagone equilateral FGHK, & puis dans le mesme cercle, soit aussi inscrit vn decagone equilateral, (ce qui se fera en coupant en deux egalemt l'arc d'vn chacun costé du pentagone.) En apres par la 12. p.11 du centre E, & des points L, M, N, O, P, soient leuees les lignes EQ, LR, MS, NT, OV, PX perpendiculaires au plan du cercle FGHK, lesquelles soient posees egales à EF ou BD, & par la 6. p.11. elles seront paralleles entre elles: & partant les lignes droictes conioignant icelles, se-

voir $EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX$, (toutes lesquelles toutesfois nous n'auons tirees pour éviter cōfusion) serōt egales & parallèles entr'elles, par la 33. p. 1. Dōc puis que



EL, EM , &c. sont egales au semidiametre EE ; aussi QR, QS, QT, QV, QX serōt egales tant entr'elles qu'à iceluy demy diametre EE , ou à la ligne BD . Et pource que par la 15. p. 11. le plan mené par les lignes QR, QS est parallel au plan $FGHIK$ tiré par les lignes EL, EM : Et que pour la mesme raison le plā tiré par les lig. QS, QT , est parallel au mesme plan $FGHIK$, tiré par les lignes EM, EN ; mais, que le plan tiré par les lignes QR, QS conuient avec le plan mené par les lignes QS, QT , en la ligne droicte QS : il est euident par les choses demonstrees à la 16. p. 11. que ces deux plans en font vn seul. On demonstrea en la mesme maniere que le plan tiré par QT, QV , avec celuy-cy en fait vn seul, & aussi celuy tiré par QV, QX , & par QX, QR : tellement donc que les 5 lignes QR, QS, QT, QV, QX sont en vn mesme plan; & partant si de Q , & del'interuale QR , on décrit vn cercle en iceluy plan, il passera par les autres poinets S, T, V, X , & sera egal au cercle $FGHIK$. Soient tirees les lignes droictes RS, ST, TV, VX, XR . Et d'autant que LR, PX sōt egales & parallèles; si on imagine estre tiree vnelig. droicte LP ; aussi par la 33. p. 1. LP, RX serōt egales & parallèles: & partant par la 28. p. 3. de cercles egaux, elles prennent arcs egaux: Mais LP prend la 5. partie du cercle $FGHIK$, scauoir

deux 5. parties LF, FP. Donc aussi RX prend la 5. partie du cercle RSTVX. Par mesme maniere nous concludrons que chacune des autres lignes droictes RS, ST, TV, VX, prend la 5. partie d'iceluy cercle. Parquoy RSTVX est vn pentagone equilateral, ayant tous les costez egaux à ceux du pentagone FGHIK. Soient tirees des angles du pentagone RSTVX, aux angles du pentagone FGHIK, les lignes droictes RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Donc puis que la perpendiculaire LR est egale au demy diametre EF, c'est à dire au costé de l'exagone du cercle FGHIK; & LF est costé du decagone par la 10. p. 13. le quarré du costé du pentagone du mesme cercle, est egal aux quarréz de LR, LF. Mais le quarré de FR, par la 47. p. 1. est egal à iceux quarréz de LR, LF. Donc le quarré de FR est egal au quarré du costé du Pentagone; & par consequent la ligne RF sera egale à LP costé du pentagone, ou à FG, c'est à dire à RX. Par la mesme raison, les autres lignes R, G, SG, &c. seront egales aux autres costez de chaque pentagone: & partant les 10. triangles RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, seront equilateraux, & egaux entr'eux. Maintenant soit prolongé de part & d'autre la perpendiculaire EQ, tellement que QY, EZ soient egales au costé du decagone, & soient tirees les lignes VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. D'autant que QX est demy diametre du cercle RSTVX, c'est à dire costé de l'exagone, & QY est costé du decagone de mesme cercle; par la 10. p. 13. le quarré de XV costé du pentagone, sera egal aux quarréz de QX, QY. Mais par la 47. prop. 1. à iceux quarréz de QX, QY, est aussi egal le quarré de XY (car l'angle XQY est droict, estant EQ perpendiculaire à l'un & l'autre plan des cercles parallels.) Donc le quarré de XY est egal au quarré de XV; & partant la ligne XY egale à ligne XV. Par mesme raison XV sera demonstree egale à VY; & partant le triangle VYX est equilateral. Par mesme maniere, (estans tirees les lignes RY, SY, TY, lesquelles ne sont tirees pour euitr confusion) les quatre triangles RYX, RYS, SYT, TYV, seront demonstrez equilateraux, & egaux au triangle VYX, c'est à dire aux dix premiers triangles, puis que tous leurs costez sont egaux aux costez du pentagone. Par semblable argument sera prouué que le triangle GZH est equilateral; comme aussi les 4. autres triangles HZI, IZK, KZF, FZG, (desquels toutesfois nous n'auons aussi tiré les lignes, afin d'euitr la confusion) tous lesquels seront egaux aux 15. precedans. Veu donc que tous ces 20. triangles sont equilateraux, & egaux, & qu'ils se conioignent les vns aux

autres par lignes droictes; sera constitué d'iceux *vn* Icosaedre; lequel ie dis estre inscriptible en la sphere donnee, de laquelle le diametre est AB. Car ayant couppé en deux egale-
ment EQ en *a*, & tire les lignes *a*F, *a*X, *a*V; les costez *a*Q, QV du triangle *a*QV seront egaux, aux costez *a*Q, QX du triangle *a*QX, (car QV, QX sont semy diametres du cercle RS TVX) & les angles *a*QV, *a*QX sont droicts; & partant par la 4.p.1. les bases *a*V, *a*X seront egales. Par la mesme raison, si on tire des lignes de *a* & Q, à R, S, T, les lignes *a*R, *a*S, *a*T seront demonstrees egales entr'elles, & à icelle *a*V, *a*X. Et puis que les costez *a*Q, QX du triangle *a*QX; sont egaux costez *a*E, EF du triangle *a*EF, (pource que QX, EF sont demy diametres de cercles egaux, & EQ est couppee en deux egale-
ment en *a*,) & les angles *a*QX, *a*EF sont aussi egaux, (sçavoir droicts; par la 4.p.1. les bases *a*X, *a*E, seront aussi egales. Par mesme raison, si de *a* & E on tire des lignes droictes à G, H, I, K, on demonstrera les lignes *a*G, *a*H, *a*I, *a*K, estre egales à icelle *a*X; & partant les dix lignes droictes tirees de *a* aux dix angles F, G, H, I, K, R, S, T, V, X, sont egales. Et d'autant que QE est semidiametre, c'est à dire costé de l'exagone du cercle FGHK; & EZ costé du decagone du mesme cercle; par le 9.p.11. QZ sera diuisee en la moyenne & extreme raison en E, & le plus grand segment sera QE. Parquoy par la 3. p.13. le quarré de AZ sera quintuple du quarré de Ea. Mais le quarré de *a*F est aussi quintuple du mesme quarré de Ea: Car le quarré de EF estant quadruple du quarré de Ea par le scholie de la 4.p.2. pource que EF est double de Ea; les quarrés de EF, Ea, sont le quintuple du quarré de Ea. Mais par la 47.p.1. le quarré de *a*F est egal à iceux quarrés de EF, Ea; donc aussi le quarré d'icelle *a*F sera quintuple d'iceluy quarré de Ea.) Donc les quarrés de *a*Z, *a*F, sont egaux; & par consequent les lignes *a*Z, *a*F seront egales. Et puis que *a*B, *a*Q; & EZ, QY sont egales, aussi *a*Z, *a*Y seront egales; & toutes les lignes droictes tirees de *a*, à tous les angles de l'icosaedre pareillement egales. Parquoy la sphere descrite alentour du diametre ZY, passera par tous les angles de l'icosaedre. Car d'autant que par la 15.p.5. comme *a*Z est à *a*E, ainsi YZ à QE, & partant par la 22.p.6. comme le quarré de *a*Z est au quarré de *a*E, ainsi le quarré de YZ au quarré de QE, & que le quarré de *a*Z a este demônstré quintuple du quarré de *a*E; pareillement le quarré YZ sera quintuple du quarré de QE, c'est à dire du quarré de BD son egale. Mais aussi le quarré de AB est quintuple du mesme quarré de BD: (car AB, BD, SC estans propor.

par le corol. de la 8. p. 6. le quarré de AB sera au quarré de BD, comme AB à BC par le corol. de la 20. p. 6. & partant AB estât quintuple de BC, aussi le quarré de AB sera quintuple du quarré de BD.) Donc les quarrés de YZ, AB sont egaux; & partant les lignes YZ, AB, & les spheres descrites alentour d'icelles seront egales.

Je dis finalement que le coste de l'icosaedre est ligne irrationele, appellee ligne mineure: ce qui est euident par la 11. p. 13. estant par la 6. p. 10. le demy diametre EF, ou son egale BD, ligne rationele communurable en puissance à la posee rationele AB, de laquelle nous monstre que le quarré estoit quintuple du quarré de BD. Nous auons donc faict ce qui estoit propose.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que le quarré du diametre de la sphere est quintuple du quarré du semidiametre du cercle comprenant 5 costez de l'icosaedre.

Et aussi qu'iceluy diametre de la sphere est composé du costé de l'hexagone, & de deux costez du decagone, décrit en vn mesme cercle.

Et encore que le costé de l'icosaedre est egal au costé du pentagone, par le moyen duquel est construit iceluy icosaedre.

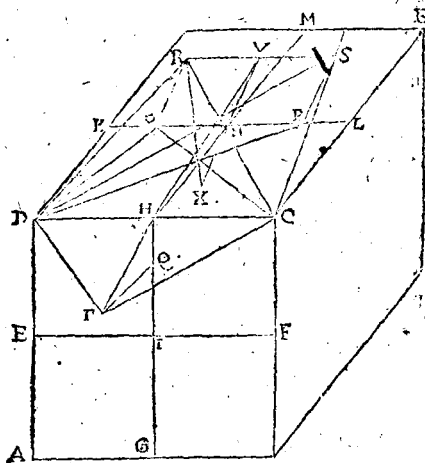
PROBL. 5. PROP. XVII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn dodecaedre: Et monstre que son costé est ligne irrationele appellee residu.

Soit le cube AB, & d'iceluy les deux plans extérieurs AC, & DB, se rencōtrās à droits angles à la ligne de commune section DC: & d'iceux plans tous les costez soient couppez en deux également, sçauoir AC, par les deux lignes EF, GH se couppās au poinct I; & DB, par les lig. KL & HM se couppās au poinct N. Item soient les trois lignes KN, NL, HI couppees en la moyenne & extreme raison aux poincts O, P, Q, desquelles les plus grands segmens soient ON, NP, IQ: Et par la 12. p. 11. soient leuees les deux lignes OR, PS perpend.

au plan DB: mais QT au plan AC, lesquelles soient posées
egales aux trois segmens ON, NP, IQ. Puis soient menees
les lignes DR, RS, DT, CS, CT. Je dis que DR SCT est pen-
tagone equilateral constitué sur vn mesme plan, & equian-
gle.

Car soient menees les lignes DO, DP, DS: Et d'autant que
KN est couppee en la moyeue & extreme raison au point
O, & que ON, est le plus segment, par la 4. p. 13. les deux quar-



rez de KN, KO seront triples du carré de ON: Et KN estât
egale à KD; & ON à OR, les deux quarrés de KD, & KO, ou
par la 47. p. 1. le seul de DO, est triple du carré de OR: & le
carré de DR, qui est egal à tous les deux, par la 47. p. 1. sera
quadruple du seul de RO: Et d'autant que RS est double de
RO, son carré, par le scholie de la 4. p. 2. sera aussi quadruple
du carré de RO, aussi bien que le carré de DR: Partant les
lignes DR, RS seront egales. Par mesme discours on mon-
strera l'egalité des trois autres costez SC, CT, TD tant entre-
eux qu'aux deux DR, RS: donc le pentagone est equilateral.

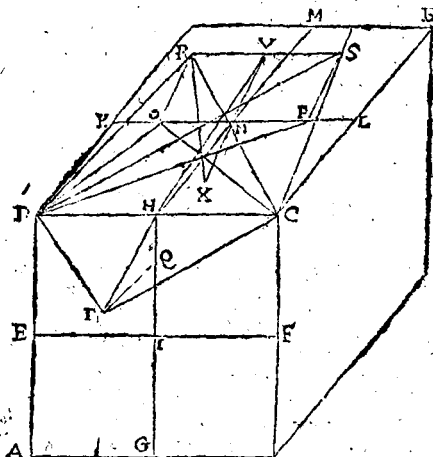
Je dis maintenant qu'il est en vn mesme plan. Soit menee
NV, parallele à OR: Item les deux TH & HV. Je dis qu'i-
celles deux lignes se rencontrent directement, & font vne seu-

le ligne droicte THV. Car pour autant que HI est couppée en la moyenne & extreme raison au poinct Q; IH sera à IQ, comme IQ à QH. Mais HN est egale à HI, & NV à IQ, & QT à QI: donc comme HN est à NV, ainsi QT à QH. Parquoy puis que les triangles NVH, QTH, ont deux costez proportionaux à deux costez, & sont composez à vn angle H, tellement que les costez homologues sont parallels par la 6. p. 11. sçavoir HN & TQ, qui sont perpendic. au plan du quarré AC: & NV, QH qui sont à angles droicts sur le plan DB: par la 32. p. 6. THV sera vne seule ligne droicte. Or par la 1. p. 11. Toute ligne droicte est en vn mesme plan: par consequent le pentagone DRSC est en vn mesme plan.

Je dis encores qu'il est equiangle: Car puis que KN est couppée en moyenne & extreme raison, estant ON plus grand segment, par la 5. p. 13. en adioustant KN à NP, egale au plus grand segment ON, la toute KP sera couppée en la moyenne & extreme raison au poinct N, & sera KN le plus grand segment: & partant par la 4. p. 13. les quarrés de KP & NP (ou PS son egale) sont triples du quarré de KN, (ou de son egale KD.) & en adioustant le quarré de KD avec les deux de KP & PS, iceux trois quarrés seront quadruples du seul de KD (ou par la 47. p. 1. au lieu des deux de KP & KD, le seul de DP avec celui de PS, ou encore le seul de DS, sera quadruple du quarré de KD) duquel le quarré de DC est aussi quadruple par le scholie de la 4. p. 2. estant DC double de KD: partant les 2. lignes DC & DS seront egales: Mais aussi estaus tous les costez du pentagone egaux, les deux triangles DCT, DSR auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien: Et par la 8. p. 1. l'angle au poinct R sera egal à l'angle au poinct T. Et semblablement nous monstrerons que l'angle RSC est egal à l'angle DTC: ainsi trois angles du pentagone seront egaux, & par la 7. p. 13. il sera equiangle. Il est aussi equilateral, & sur DC l'un des costez du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que si on veut construire de mesme façon vn pentagone, sur chacun des vnze costez restans, on trouuera vne figure solide enuironnée de douze pentagones equiangles & equilateraux: Et par les def. sera dodecaedre.

Je dis dauantage qu'il est inscriptible en la sphere donnée; Car si on prolonge VN, qui est perpend. sur le centre du quarré DB: il appert par la 39. p. 11. qu'elle coupera la diagonale du cube en deux egalement: qu'elle la coupe donc au poinct X, auquel poinct sera le centre de la sphere enuironnant le cube par le corol. de la 15. p. 13. & NX est egale au demy co-

ste du cube; Soit menee la ligne RX. Or nous auons tantost monstre par la 4. p. 13. que les quarrez de kP & NP sont triples du quare de KN: Mais VX est egale à kP; & RV à NP: (car



NX est egale à KN: & VN à NP). Partant les deux quarrez de RV, XV, ou le seul de RX, par la 47. p. 1. est triple du quare de KN: Mais par la 15. p. 13. le quare du diametre de la sphere circonscrite au cube, est triple du quare du coste d'iceluy cube: Et par la 15. p. 5. le quare du demy diametre est triple au quare du demy coste. Or KN est le demy coste du cube: Partant RX sera le demy diametre de la sphere circonscrite au cube AB, duquel le centre est X. Par mesme discours nous monstrerons que du point X toutes les lignes menees vers les autres angles du dodecaedre, sont egales au demy diametre de la sphere circonscrite au cube. Partant vne mesme sphere pourra estre circonscrite au cube & au dodecaedre.

Je dis finalement que le coste du dodecaedre est ligne irrationnelle appelee residu. Car d'autant que les deux demy costez du cube KN, NL sont chacun coupees en la moyenne & extreme raison: par la 15. p. 5. toute la ligne KL sera aux deux plus grands segmens ensemble, scauoir à OP, comme iceux plus grands segmens sont aux plus petits ensemble, scauoir à la composee de KO & PL. Parquoy si KL coste du

cube est coupee en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera OP. Mais la toute KL ainsi coupee est rationele: (car son quarre est commensurable au quarre du diametre de la sphere, lequel est pose rationel: puis qu'il est le tiers d'iceluy par la 15. p. 13.) Donc par la 6. p. 13. le plus grand segment OP, n'est à dire RS coste du dodecaedre qui luy est egal, est ligne irrationele, appelee residu. Nous auons donc fait tout ce qui estoit propose.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que le coste d'un cube estant coupe en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera le coste du dodecaedre inscrit en vne mesme sphere.

Aussi que le coste du cube est egal à la ligne droite subtendant un angle du pentagone du dodecaedre. Et d'autant qu'icelle mesme ligne estant coupee en la moyenne & extreme raison, par la 8. p. 13. le plus grand segment est coste d'un pentagone: & partant par la 5. p. 13. la ligne droite composee d'icelle, c'est à dire du coste du cube, & du plus grand segment, c'est à dire du coste du dodecaedre, est semblablement diuisee, & le moindre segment est coste du dodecaedre, mais le plus grand, est coste du cube: Il s'ensuit que si une ligne droite est coupee en la moyenne & extreme raison, & que le moindre segment soit coste du dodecaedre: le plus grand segment sera coste du cube inscrit en la mesme sphere.

P R R O B. 6. P R O P. XVIII.

Le diametre d'une sphere estant donnee, trouuer les costez des cinq figures inscrites en icelle; & les comparer entr'eux.

Soit le diametre d'une sphere donnee AB: & il faut premierement trouuer les costez des cinq figures inscriptibles en icelle sphere.

Soit diuise le diametre AB en deux egalement au point C; mais au point D, tellement que AD soit la tierce partie de AB; puis ayant descrit sur AB un demy cercle, soient esleuees les perpendiculaires CE, DF; & tiré les lignes AE, AF, BE, BF.

G sera egal au tiers H par la 32. p.1.) & par le scholie de la 47. p.2. le quarre de HL sera quadruple du quarre de IC : & partant le quarre de HO (ou de son egale AC) qui par la 47. p.1. est egal à tous les deux, sera quintuple du quarre de CI. Mais d'autant que AD est le tiers du diametre AB, & AC sa moities DC sera le demy tiers : & partāt AC sera triple de DC ; & son quarre vaudra neuf fois le quarre de DC, par la 20. p.6. Or iceluy quarre de AC n'est que quintuple du quarre de CI: dōc la ligne CI sera plus grande que DC. Soit prise CK egale à CI, & apres auoir leue la perpendiculaire KL, soit menée la ligne AL. Puis donc que le quarre de AC est quintuple du quarre de CI, par la 15. p.5. le quarre de AB, (la double de AC) sera quintuple du quarre de IK (la double de IC.) Or par le corol. de la 16. p.13. le quarre dudiametre de la sphere circonscrite à l'icosaedre est quintuple au quarre du demy dia. du cercle circōscriuāt ; costez de l'icosaedre: donc CK sera semidia. c'est à dire coste de l'hexag. d'iceluy cercl. lequel coste de l'hexagone avec deux fois le coste d'edecagone inscrit dās le même cercle, est egal au diametre de la sphere AB, par le co. de la mesme 16. p.13. Il faut donc que AK, & IB lignes egales, soient les deux costez du decagone inscrit dans le mesme cercle; dans lequel KI est le coste de l'hexagone. Mais KI & KL sont egales: (car KL est egale à IH, pour estre en mesme distance du centre C, laquelle estant double de CI sera egale à KI.) Partant KL sera costé de l'hexagone, & AK du decagone : & par la 47. p.1. & 10. p.13. AL sera le coste du pentagone inscrit au mesme cercle. Donc il sera aussi le coste de l'icosaedre, par la 16. p.13.

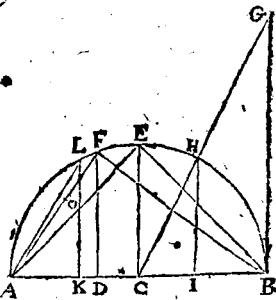
Nous auons donc trouue les costez des 5. figures regulieres inscriptibles en vne mesme sphere.

Maintenant pour le regard de la comparaison d'iceux costez trouuez. D'autant qu'il a esté demonstre que le quarre du diametre de la sphere est sesquialtere au quarre du coste de la pyramide ; mais double de celuy du coste de l'octaedre, & triple du quarre du coste du cube; il est euidēt que le quarre du diametre de la sphere estant 6. celuy du coste du tetraedre sera 4. celuy du coste de l'octaedre 3. & celuy du coste du cube 2. Partant le quarre du coste de la pyramide est sesquiterce au quarre de l'octaedre : mais double de celuy du coste du cube. Item le quarre du coste de l'octaedre est sesquialtere a celuy du coste du cube. Parquoy les quarrez des costez d'icelles trois figures, & celuy du diametre de la sphere, sont entr'eux comme nombre à nombre: & partant par la 6. p.10.

celuy diametre de la sphere , & costez d'icelles figures sont lignes commensurables, & rationeles, pource que le diametre est pose rationel. Mais les susdits quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarre à nombre quarre, ainsi qu'il apert par le corol. de la 14. p. 8. Donc icelles lignes (sçavoir le diametre de la sphere, le coste de la pyramide, le costé de l'octaèdre, & celuy du cube,) sont incommens. en longueur par la 9. p. 10. & partant elles sont rationeles commensu. en puissance seulement.

Et quand aux costez de l'icosaèdre, & dodecaèdre : pource qu'ils sont lignes irrationeles, il est euident que ils sont incommens. tant entr'eux, qu'au diametre de la sphere, & aux costez des autres figures.

Or lesquels d'iceux costez sont les plus grands, nous le rendrons manifeste ainsi : d'autant qu'il a este demonstre cy dessus que le quarre de AB est triple du quarre de AF : mais quatriuple du quarre de KL, c'est à dire de KL son egale; trois quarrez de AF seront egaux à 5 quarrez de KL. Et puis que AF est coupee en la moyenne & extreme raison en O, & AO est le plus grand segment, il est euident par la 1. p. 6. que le rectangle compris de AF, AO sera plus grand que le rectangle de AF, OF : & partant iceux deux rectangles ensemble, seront plus grands que le double du rectangle de AF, OF : Mais à iceux deux rectangles ensemble, est egal le quarre de AF, par la 2. p. 2. & au double du rectangle de AF, OF, est egal le double du quarre de AO : (car par la 17. p. 6. le simple rectangle de AF, OF est egal au simple quarre de AO.) Donc aussi le quarre de AF sera plus grand que deux fois le quarre de AO : & par consequent trois quarres de AF, ou cinq quarres de KL leurs egaux) seront aussi plus grands que 6. quarres de AO. Parquoy vn seul quarre de KL sera plus grand



qu'un seul quarre de AO : & par consequent la ligne KL sera plus grande que AO : Partant AL qui est plus grande qu'icelle KL, sera beaucoup plus grande que la mesme AO coste du dodecaèdre. Nous auons donc fait ce qui estoit propose.

S C H O L I E.

Or outre les cinq figures solides cy dessus declarees, on n'en peut
trouver d'autres comprises de superficies planes, equiangles, & equi-
laterales. Car de deux triangles, ou deux autres superficies planes,
on ne comprendra aucun solide, ne pouvant constituer un angle soli-
de. De trois triangles equilateraux, est constitue l'angle de la pyra-
mide: de quatre, l'angle de l'octaëdre: de cinq, l'angle de l'icosaëdre:
de six triangles equilateraux on ne constituera aucun angle solide:
car iceux sont egaux à quatre angles droicts, & tous les angles plâs
d'un angle solide, doivent estre plus petits que quatre angles droicts
par la 21. p. 11. Partant on ne pourra constituer un angle solide de
plus de six angles plans. De trois angles droicts est compose l'angle
solide du cube: de quatre angles droicts on ne fera aucun angle soli-
de: car ce seroit tousiours contrenuier à la 21. p. 11. l'angle solide du
dodecaëdre est compris de trois pentagones equiangl. De quatre pen-
tagones, il sera impossible: estans iceux plus grâds que quatre droicts.
Et de pas un autre polygone equiangle, on ne pourra constituer aucun
angle solide, d'autant qu'il s'ensuyuroit absurdité. Partant il est
evident qu'outre les cinq figures regulieres cy dessus declarees, on n'en
trouvera point d'autres.

Fin de l'Element treiziesme.

ELEMENT



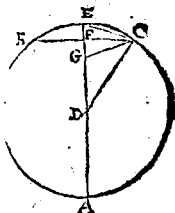
ELEMENT

QVATORZIESME.

THEOR. I. PROP. I.

LA ligne perpendiculaire menée du centre vers le costé du pentagone inscrit au cercle, est la moitié des deux costez de l'hexagone, & decagone ensemble, inscrits au mesme cercle.

• Soit dans le cercle ABC, le costé du pentagone BC, & du centre D soit mené la ligne DF, tombant perpendiculairement sur iceluy costé BC; & icelle estant prolongee de part & d'autre iusques en A & E, elle couppera l'arc BEC en deux également, comme la ligne BC par la 3. p. 3. ainsi estant tirée la ligne EC, elle fera le costé du decagone, & DE costé de l'hexagone. Je dis que la perpendiculaire DF est la moitié des deux costez ensemble EC & DE.



Qu'il ne soit ainsi. Apres auoir pris FG egale à FE, soit menée la ligne GC. Puis que l'arc BEC est la cinquième partie de la circonférence du cercle, EC la moitié sera la cinquième

me partie de la demy circonference ACE: Et partant l'arc AC sera quadruple de CE, & par la 33. p. 6. l'angle CDA sera quadruple de CDE au centre, & double de DEC à la circonference par la 20. p. 3. lequel par ce moyen sera double à CDE: mais par la 4. p. 1. la base CE est egale à la base CG: & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base EG seront egaux: & FGC sera double de GDC: & iceluy FGC estant par la 32. p. 1. egal à tous les deux opposez interieurement, les deux angles sur la base DC seront egaux entr'eux: & par la 6. p. 1. GC & GD seront egales; & EC à chacune d'icelles. Parquoy les deux GF & FE estans egales, la seule FD, sera egale aux deux FE, EC ensemble: & partant les trois ensemble DF, FE, EC, c'est à dire les deux ensemble DE, EC, seront egales au double de la seule DF: & par consequent icelle DF perpendiculairement tiree du centre sur le costé du pentagone, sera moitié des deux ensemble DE, EC, costez de l'hexagone, & du decagone. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 2. PROP. II.

S'il y a deux lignes droictes coupees en la moyenne & extreme raison; elles seront semblablement coupees.

Soient les deux lignes AB & DE coupees en la moyenne & extreme raison aux points G & H: leurs plus grands segmens soient AG & DH. Je dis qu'icelles lignes sont semblablement coupees: c'est à dire que comme AB est à DE, ainsi AG à DH, & GB à HE. Item comme AG à GB, ainsi DH à HE, &c.

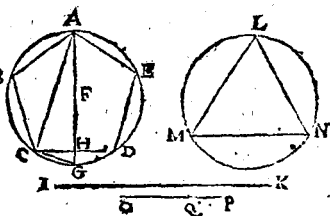
Car par la 17. p. 6. comme le rectangle de AB, & GB, sera egal au quarré de AG, ainsi le rectangle de DE & HE sera egal au quarré de DH: & partant quatre fois le rectangle de AB & GB sera au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE au quarré de DH: & en composant, (apres auoir adiousté directemēt BC egale à BG; & EF egale à EH) quatre fois le rectangle de AB & GB avec le quarré de AG (ou par la 8. p. 1. le seul quarré de AC) est au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE, avec le quarré de

DH, (ou le seul carré de DF) est au carré de DH. Parquoy par la 22. p. 6. comme AC à AG; ainsi DF à DH: Et en composant comme la composée de AC, AG, c'est à dire la double de AB, est à AG, ainsi la composée de DF, DH, c'est à dire la double de DE, est à DH: & en changeant comme la double de AB est à la double de DE, ainsi AG à DH: Et par la 15. p. 5. comme la double de AB est à la doub. de DE, ainsi AB à DE. Donc comme AB sera à DE, ainsi AG à DH: & partant par la 19. p. 5. ainsi sera aussi le reste GB au reste HE. Parquoy comme AG à DH, ainsi sera GB à HE, puis que l'une & l'autre raison est comme AB à DE: & en permutant comme AG sera à GB, ainsi DH sera à HE: & ainsi selon toutes les autres manieres d'argumenter es proportions, on demonstrera toutes lignes, & parties d'icelles estre proportionnelles entr'elles.

THEOR. PROP. III.

Vn mesme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'Icosaedre inscrit en vne mesme sphere.

Auparavant que d'expliquer ceste propoit. il conuient demonstrier que le carré du costé du pentagone avec le carré de la ligne qui soustient vn angle d'iceluy, est quintuple du carré demy diam du cercle d'as lequel est inscrit iceluy pentagone.



Soit le costé du pentagone inscrit dans vn cercle CD, la ligne qui soustient vn angle d'iceluy pentagone CA, le demy diametre FG; lequel coupe en deux également, tant l'arc CGH que le costé CD, par le corol. de la de la 10. p. 13. Je dis que les deux quarrés de CA & de CD sont ensemble quintuples du carré de FG.

Car si on meine CG, ce sera le costé du decagone: & par le scholie de la 4. p. 2. le carré de AG, sera quadruple du carré

du demy diametre FG; & par consequent les deux de AC, CG qui par la 47. p. 1. sont egaux au quarré de AG, seront aussi quadruple d'iceluy quarré de FG. Parquoy les trois de AC, CG, & GF, seront ensembles quintuples du seul de GF. Mais les deux de CG, & GF, costez de l'hexagone & decagone sont ensemble egaux au quarré de CD costé du pentagone, par la 10. p. 13. partant les deux quarréz de AC & CD sont quintuples du seul quarré de GF. Ce qui estoit proposé.

Pour la proposition. Soit IK le diametre de la sphere comprenant le dodecaedre & l'icosaedre; & d'iceluy dodecaedre soit vn pentagone ABCDE, & de l'icosaedre soit le triangle equilateral LMN: ie dis qu'un mesme cercle circonscrit le pentagone ABCDE, & le triangle LMN; c'est à dire que les cercles ABCDE, LMN, qui les circonscrivent sont egaux.

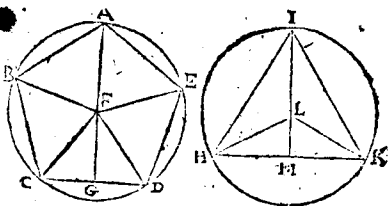
Car estant tiree AC subtendante de l'angle du pentagone B, ce sera le costé du cube inscrit en la mesme sphere, par le corol. de la 17. p. 13. & soit esposee la ligne droicte OP, telle que le quarré de IK diametre de la sphere, soit quintuple du quarré d'icelle OP: laquelle OP sera egale au demy diametre du cercle, dans lequel on construit l'icosaedre par le corol. de la 16. p. 13. soit icelle OP coupee en la moyenne & extreme raison en Q; & le plus grand segment OQ sera costé du decagone inscrit au mesme cercle, dont OP est costé de l'hexagone ou demi-diametre, par le corol. de la 9. propo. 13. Mais par la 7. prop. 13. lors que CA est diuisee en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment est AB: L'one par la 2. prop. 14. comme la toute AC sera à la toute OP, ainsi le plus grand segment AB, sera au plus grand segment OQ: partant par la 22. p. 6: comme le quarré de AC sera au quarré de OP, ainsi le quarré de AB sera au quarré OQ; & par la 4. p. 5. comme le triple du quarré de AC est au quintuple du quarré de OP, ainsi le triple du quarré de AB est au quintuple du quarré de OQ. Mais le triple du quarré de AC est egal au quintuple du quarré de OP: (pource que le quarré de IK diametre de la sphere, est egal, tant au triple du quarré de AC costé du cube, par la 15. p. 13. que au quintuple du quarré de OP par l'hypothese.) Donc aussi le triple du quarré de AB sera egal au quintuple du quarré de OQ. Or par le corol. de la 16. p. 13. ML costé du triangle de l'icosaedre, est egal au costé du pentagone inscrit dans le cercle, dont OP est demidiametre; & partant puis que par la 10. p. 13. le quarré d'iceluy costé est egal aux deux quarréz de OP, & OQ, costez de l'hexagone & du decagone; cinq quarréz de ML, seront egaux à cinq quar-

rez de OP, & à cinq de OQ : ou à trois de BA, & trois de AC. Parquoy les deux quarrez de BA, & AC estans quintuples du quarre du demy-diametre FA, (cōme nous auons demonstré au commencement de ceste proposition) trois quarrez de AB, & AC seront egaux à quinze quarrez du demy-diametre FA. Mais cinq quarrez de ML, costé du triangle equilateral, sont aussi egaux à quinze quarrez du demy diametre du cercle LMN : (car chacun quarre de ML est triple du quarre du demy-diametre , par la 12. proposition du 13.) D'ōnc les trois de BA & AC, estans egaux aux cinq de ML, les quinze du demy-diametre FA, seront egaux aux quinze du demy-diametre du cercle LMN: Partant vn quarre d'iceux sera egal a vn quarré, & le demy-diametre au demy-diametre, & par consequent les cercles ABCDE, LMN seront egaux: ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 4. PROP. III.

Si du cētre du cercle circōscriuant le pētagone du dodecaedre, on meine vne ligne perpēdiculaire sur vn costé d'iceluy pentagone; trente fois le rectāgle compris de la perpēdiculaire, & du costé du pentagone, sont, egaux à toute la superficie du dodecaedre.

Soit le cercle ABCE circonscriuant vn pentagone d'vn dodecaedre, & le cētre d'iceluy cercle soit F, duquel soit tirée FG perpēdiculairement sur le costé CD. Je dis



que trente fois le rectāgle compris de la perpēdiculaire FG & costé CD, sont egaux à la superficie du dodecaedre.

Car ayant tiré les lignes FA, FB, FC, FD, FE: il est euident par la 41. p. 1. que le rectāgle compris de FG, CD, est double du triangle CFD. Or en la superficie du dodecaedre, il y a douze pentagones egaux, & chascun pētagone à cinq pareils

triangles que CFD, qui sont en tout soixante triangles, desquels soixante rectangles, seroient le double : Donc trente rectangles de FC, & CD, leur seront egaux.

Nous demonstrerons semblablement que si un triangle equilateral, comme HIK, est inscrit en un cercle, du centre duquel L, on tire sur le costé HK la perpendiculaire LM : trente fois le rectang. de LM & HK, seront egaux à la superficie de l'Icosaedre. Car icelle superficie contient vingt triangles equilateraux semblables à HIK ; & chacun d'iceux se diuise en trois egaux entr'eux, & semblables & egaux à HLK, qui sont en tout soixante triangles comme HLK : mais le rectangle de la perpendiculaire LM & du costé HK, est double du triangle HLK, par la 41. p. 1. Et par consequent soixante rectangles seroient doubles de soixante triangles : Donc trente rectangles de LM & HK seront egaux à la superficie totale de l'icosaedre.

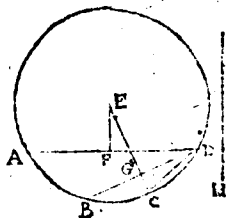
C O R O L L A I R E.

De cecy resulte, par la 15. p. 5. que comme un seul rectangle de FG & CD, est à un seul rectangle de LM & HK, ainsi la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre.

T H E O R. 5. P R O P. V.

Comme la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'icosaedre ; ainsi le costé du cube au costé de l'icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.

Dans le cercle donné A B C D soit pris AD le costé du triangle equilateral de l'icosaedre, & dans le mesme cercle le costé du pentagone du dodecaedre (ce que nous auons monstré estre possible par la 3. p. 14. qu'un mesme cercle cōprent & le triangle de l'icosaedre, & le pentagone du dodecaedre.) Soit donc iceluy costé du pentagone



BD, & du centre E soient tirees sur AD, BD les perpendiculaires EF, EG : & icelle EG estant prolongee iusques à la circonference, elle coupera l'arc BCD en deux également en C : & estant tiree la ligne droicte CD, ce sera le costé du decagone : & finalement soit exposee la ligne droicte H costé du cube inscrit en la mesme sphere. Je dis que la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'Icosaedre, comme H costé du cube, est à AD costé de l'Icosaedre.

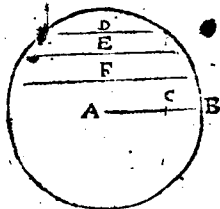
Car d'autant que EC est costé de l'hexagone, & CD costé du decagone inscrit en vn mesme cercle; la cōposée d'iceux costez, sera couppée en la moyenné & extreme raison, dont le plus grand segment sera EC par la 9.p.13. & par la 1.p.14. la moitié d'icelle cōposée est EG ; & par le corol. la 12. p. 13. la moitié d'iceluy plus grand segment est EF : Et partant puis que par la 15.p.5. les toutes sont aux toutes, comme les moitez aux moitez : il est euident que la moitié EG estant couppée en la moyenne & extreme raison, la moitié EF sera le plus grand segment : (car la moitié du plus grand segment, & la moitié du plus petit fait la moitié de la toute.) Mais par le corol. de la 17.p.13. H costé du cube estant aussi couppé en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment sera BD costé du dodecaedre. Donc par la 2.p.14. comme la toute H, sera à BD son plus grand segment, ainsi la toute EG sera à EF son plus grand segment : Et partant par la 16. p. 6. le rectangle compris des extremes H, EF, sera egal au rectangle des moyennes BD, EG. Et pource que par la 1.p.6. comme H est à AD, ainsi le rectangle de H, EF, est au rectangle de AD, EF : aussi comme H sera à AD, ainsi le rectangle de BD, EG (lequel est egal à celuy de H, EF) est au mesme rectangle cōpris sous AD, EF. Parquoy puis que par le corol. de la preced. comme le rectangle compris sous BD, EG, est au rectangle compris de AD, EF, ainsi la superficie du dodecaedre est à la superficie de l'icosaedre : pareillement comme H costé du cube sera à AD costé de l'icosaedre, ainsi sera la superficie du dodecaedre à la superficie de l'Icosaedre. Ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison ; cōme les deux quar-

rez de la toute & du plus grand segment, sont aux deux quarrez de la toute & du plus petit segmēt, ainsi le quarré du costé du cube, est au quarré du costé de l'icosaedre inscrit en vne mesme sphere.

Soit le cercle comprenant & le triangle de l'icosaedre, & le pentagone du dodecaedre, duquel le demy diametre AB, soit couppe en la moyenne & extreme raison en C, le plus grand segment soit AC, lequel sera le costé du decagone inscrit dans le mesme cercle par le corol. de la 9. p. 13. Item soient prises trois lignes, D costé du dodecaedre, E costé de l'icosaedre, F costé du cube: Je dis que le quarré de F, est au quarré de E, comme les deux quarrez de AB & AC sont aux deux quarrez de AB & CB.



Car D estant le costé du pentagone, & E costé du triangle, tous deux inscrits dans le cercle donné; lors que F costé du cube est diuisé en la moyenne & extreme raison, D est son plus grand segment, par le corol. de la 17. p. 13. Donc E estant le costé du triangle inscrit au cercle donné, son quarré sera triple du quarré du demy diametre AB par la 12. p. 13. & par la 4. p. 13. les deux quarrez de AB & CB sont triples du quarré de AC: Ainsi le quarré de E, est au quarré de AB, comme les 2. quarrez de AB, CB sont au quarré de AC: Et en changeant le quarré de E, sera aux deux quarrez de AB, CB, comme le quarré de AB au quarré de AC. Mais comme le quarré de AB au quarré de AC, ainsi le quarré de F au quarré de D: (car par la 2. p. 14. comme la toute AB est à son plus grand segmēt AC, ainsi la toute F à son plus grand segment D; & passant par la 22. p. 6. comme le quarré de AB au quarré de AC, ainsi le quarré de F sera au quarré de D) donc par la 11. p. 5. comme le quarré de E aux quarrez de AB & CB, ainsi le quarré de F, au quarré de D: Et en changeant comme le quarré de E au quarré de F, ainsi les quarrez de AB & CB, sont au quarré de D, costé du pentagone: lequel par la 10. p. 13. est égal aux deux quarrez de AB & AC costez de l'hexagone & decagone inscrits en

Vn meſme cercle; & par conſequent le quarré de F coſté du cube eſt à E coſté de l'Icoſaedre, comme les deux quarréz de AB & AC, ſont aux deux quarréz de AB & CB. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Comme le coſté du cube au coſté de l'icoſaedre, ainſi le dodecaedre à l'icoſaedre, inſcrits en vne meſme ſphere.

Ceſte demonſtration eſt facile, les precedētes eſtans bien entendues: Car puisque par la 3. p. 14. le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icoſaedre ſont inſcrits dans vn meſme cercle: il eſt euident qu'iceux triangle & pentagone ſerōt equidiſtans du centre de la ſphere. Parquoy ſi on diuiſe le dodecaedre & l'icoſaedre en pyramides, toutes icelles pyramides tant de l'vn que de l'autre ſolide ſerōt de meſme hauteur: Et par les 5. & 6. p. 12. elles ſeront l'vne à l'autre, comme leurs baſes; c'eſt à ſçauoir douze pyramides du dodecaedre à vingt pyramides de l'icoſaedre, comme douze pentagones à vingt triangles: C'eſt à dire que comme la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie de l'icoſaedre, ainſi tout le dodecaedre à tout l'icoſaedre. Mais par la 5. p. 14. icelles ſuperficies ſont l'vne à l'autre, comme le coſté du cube au coſté de l'icoſaedre: donc par la 11. p. 5. comme le coſté du cube au coſté de l'icoſaedre; ainſi le dodecaedre à l'icoſaedre. Ce qui eſtoit à prouuer.

Fin du quatorzieſme Element.

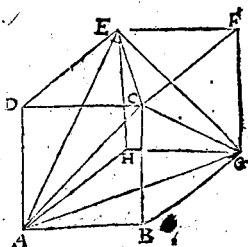


ELEMENT QVINZIESME.

PROB. I. PROP. I.

DANS vn cube donné, inscrire
vne pyramide.

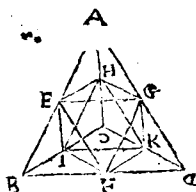
Soit le cube donné AF, dans lequel il faut inscrire vne pyramide. Soient menez les diagonales AE, EC, EG, & des extremitéz d'icelles A, C, G, soient aussi menées les diagonales AG, AC, GC: Toutes lesquelles diagonales s'ont égales entr'elles, parce que les fix quarrez dans lesquelles elles sont menées sont égaux par la définition du cube: Partant les quatre triangles composez d'icelles AGE, ACE, ACG, ECG, sont equilateraux, & égaux entr'eux: & partant la pyramide AEGC. constituée d'iceux triangles est inscrite au cube donné AF, par la 30.^e d. 11. Car tous les angles d'icelle sont colloquez és adgles d'icelles cube proposé.



PROB. 2. PROP. II.

Dans vne pyramide donnee, inscrire vn octaedre.

Soit la pyramide donnee ABCD, dans laquelle il faut inscrire vn octaedre. Soient coupez tous les costez d'icelle pyramide en deux egale-
 ment aux points E, F, G, H, I, K. Et soient menees les lignes EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE. Toutes lesquelles lignes sont egales entr'elles, par la 4. p. 1. estant toutes les lignes coupees egales, & les angles des triangles plans de la pyramide egaux: Etpartant le quadrilatre EGKI à les quatre costez egaux, & les quatre triâgles EHI, IHK, KHG, GHE, cōmençans sur iceluy quadrilatre, & finissans au point H, sont tous equaliteraux & egaux entr'eux. Itē les quatre autres triâgles IFE, EFG, GFK, KFI commençans au dessous du quadrilatre, & finissans au point F, sōraussi equilateraux & egaux tant entr'eux qu'aux 4. precedans. Parquoy la figure EIKGHF composee d'iceux 8. triangles est vn octaedre, par la 26. d. 11. & par la 30. d. 11. il est inscrit dans la pyramide donnee ABCD puis que tous les angles d'iceluy touchent les costez d'icelle pyramide.

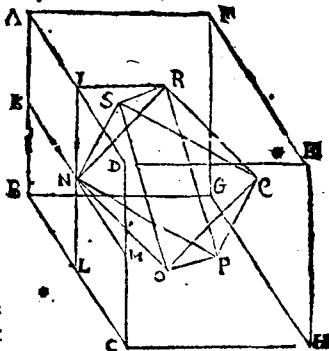


PROB. 3. PROP. III.

Dans vn cube donné, inscrire vn octaedre.

Soit le cube donne AH, dans lequel il faut inscrire vn octaedre. Soient coupez en deux egale-
 ment les costez du quarre AC, es points I, K, LM, & soient menees les deux lig. IL, KM, s'entre-coupan en N, lequel point sera le centre du quarre AC, comme il appert par la demonstration de la 8. p. 4. Par la mesme maniere seront trouuez les centres des 3. autres quarrez du cube, lesquels centres soient O, P, Q, R. S. Donc toutes les lignes droictes tirees d'iceux centres à chaf-

que point de la section des costez de leurs quarréz, telles que sont NI, NK, NL, NM, NR, &c. seront egales aux moitez d'iceux costez, comme il appert par la susdite demonstration de la 8. p. 4. Item soient tirees les quatre lignes droictes NP, PQ, QS, SN, lesquelles seront routes egales, par la 4. p. 2. d'autant qu'elles sont bases de quatre triangles ayans deux costez egaux à deux costez, & vn angle egal à vn angle: Il est euident que icelles quatre lignes seront aussivn quarré qui est au milieu de l'octaedre. Or des quatres angles d'iceluy quarré soient menees les quatre lignes NR, PR, QR, SR, vers le point R, lesquelles comme il a este dit cy-dessus seront toutes egales tant entr'elles qu'aux quatre precedentes, & seront les quatres triangles equilateraux NRP, PRQ, QRS, RNS: Item des mesmes quatres angles au dessoubs du quarré vers le centre D, soient aussi menees les lignes NO, PO, QO, SO, qui seront egales comme dessus, & feront quatres autres triangles equilateraux NOP, POQ, QOS, NOS, lesquels seront aussi egaux aux quatre premiers. Parquoy le solide NOPQRS composé d'iceux 8 triangles equilateraux & egaux entr'eux est Octaedre inscrit au cube donné, par les 23. & 27. d. 11.

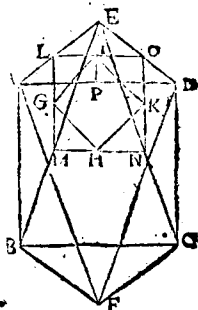


PROB. 4. PROP. IIII.

Dans vn octaedre donné, inscrire vn cube.

Soit donné l'octaedre ABCDEF, dans lequel il faut inscrire vn cube des quatre triangles AEB, BEC, CED, AED, qui se terminent au point E. Soient pris les centres G, H, I, K, & soient menees les lignes GH, HK, KI, GI: Il est euident que GHKI sera quarré. Car si d'iceux quatre centres on mene les lignes droictes LM, MN, NO, OL, paralleles chacune à son costé du quarré du milieu de l'octaedre ABCD: les triangles LEM, MEN, NEO, LEO seront equilateraux, puis qu'ils

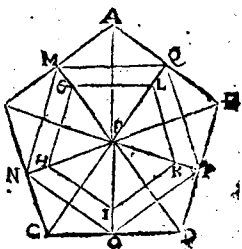
sont semblables aux triangles equilateraux cy dessus par le corol. de la 4. p. 6. & partant egaux entr'eux, pource qu'ils ont les costez communs; & par consequent les quatre bases LM, MN, NO, LO sont egales. Item si de E par le centre I on mene EP: elle diuise l'angle E en deux egalement: & par consequent LI sera egale à IO, c'est à dire que LO sera coupee en deux egalement au centre I. Par mesme raison LM, MN, NO seront aussi coupez en deux egalement aux centres G, H, K. Ainsi les 4 triangles GLI, IOK, GMH, HNK sont isosceles rectang. (Car par la 10. p. 11. les angles des points L, M, N, O, sont egaux aux droicts du quarre ABCD.) Parquoy les 4 bases GI, IK, GH, HK seront egales, & les angles qu'elles comprennent droicts: partant GHKI est quarre. Que si semblablement des autres triang. de l'octaedre on prend les centres: iceux centres estans tous conioincts par lignes droictes, seront descrits encores 3 quarez, lesquels ayans les costez communs seront egaux entr'eux. Parquoy le cube compose d'iceux 6 quarez sera inserit dans l'octaedre donne, puisque les angles d'iceluy touchent les bases de l'octaedre.



PROB. 5. PROP. V.

Dans vn icosaedre donné, descrire vn dodecaedre.

Soit ABCDE le pentagone par le moyen duquel on construit l'icosaedre, sur lequel soit vne des 12. pyramides pentagonales de l'icosaedre ayant pour sommet le point F, auquel s'assemblent les 5 triang. equilateraux ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, & soit trouue le centre de chacun d'iceux triangles aux points G, H, I, K, L, & d'iceux soient menees les lignes HG, GL, LK, KI, IH:



Item de F par iceux centres, soient menees les lignes FM, FN, FO, FP, FQ, lesquelles couperont en deux egalemēt les costes AB, BC, CD, DE, EA, comme il apert. par le corol. de la 10. p. 13. & partant estant menees les lignes droictes MN, NO, OP, PQ, QM; il est euident par la 4. p. 1. quelle seront egales; & que par la 8. p. 1. les angles qu'elles soustiennent au poinct F sont egaux; & d'autant que les lignes FG, FH, FI, FK, FL sont aussi egales; (car ce sont demis diametres de cercles circonscrivans triangles equaliteraux egaux) les lignes GH, HI, IK, KL, LG seront pareillement egales, & les angles de dessus icelles aussi egaux, par la 4. p. 1. Parquoy le pentagone GHIKL est equilateral & equiangle: & il se prouuera aisement comme à la 17. p. 13. qu'il est aussi en vn mesme plan. Que si semblablement on conioinct par lignes droictes, les centres de tous les triangles des autres 11. pyramides de l'icosaedre, seront aussi descriptes des pentagones equaliteraux & equiangles, lesquels puis qu'ils ont des costez communs, seront aussi egaux entr'eux. Parquoy 12. tels pentagones constitueront vn dodecaedre, lequel sera inscrit dans l'icosaedre, puis que les 20. angles touchent les vings bases de l'icosaedre.



Fin du quinzieme & dernier Element.

Extraict du Priuilege du Roy.

PAR grace & priuilege du Roy, il est permis à D. Henrion Mathematicien, de faire imprimer par tel Imprimeur que bon luy semblera, Les Elements d'Euclide, qu'il a traduictz de Latin en François, & ce iusques au terme de six ans finis & accomplis, à compter du iour que ledit liure sera acheué d'imprimer: pendant lequel temps defences sont faictes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes de quelque estat & condition qu'ils soient, d'imprimer ou faire imprimer, alterer ny extraire aucune chose dudit liure, d'acheter, vendre, ny distribuer aucune indene impression d'iceluy, sur peine de mille liures d'amende, & confiscation des liures & exemplaires d'icoux, qui se trouueront d'autre impression que de celle qu'aura fait faire ledict Henrion. Voulant en outre sa Majesté, qu'en apposant au commencement ou à la fin dudit liure un extraict des presentes, elles soient tenuës pour bien notifiees & signifiees, non obstant quelconque lettre au contraire: Car tel est le plaisir de sa Majesté. Donné à Paris le vingt-sixiesme Septembre 1614.

Par le Roy en son Conseil,

ADDRE

Ces Elements d'Euclide ont esté acheuez d'imprimer le 15. Octobre de ladicte année 1614.