



Notes du mont Royal

WWW.NOTESDUMONTROYAL.COM



Cette œuvre est hébergée sur «*Notes du mont Royal*» dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Lillorum, bibliothèque numérique patrimoniale
de l'Université de Lille

LES
QUINZE LIVRES
DES ELEMENTS
D'EUCLIDE.

Traduits de Latin en François :

*Avec un Sommaire & Abbregé de l'Algèbre, qui
sert à faciliter l'intelligence du dixiesme Livre.*

Par

D. HENRION Mathemat.



A PARIS,
Chez Abraham Pacard, rue saint Jacques,
à l'Estroille d'or.

M. DC. XV.
À. c. Priv. le g. du Ro.



D. HENRION.

AV LECTEUR.

L y a quatre ans ou environ , que voyant que personne n'auoit encore traduit en nostre langue , tous les Elemens de la Geometrie d'Euclide, le desir de seruir au public , m'excita d'entreprendre ceste traduction : Mais comme ie me resoluois de la mettre au iour, ie fus preuenue de Monsieur Dounot : ce qui me diuertit pour lors d'effectuer mon dessein , me persuadant que ledit Sieur se seroit contenu dans les bornes d'une iuste translation : Mais voyant en lisant ladite traduction , que ledit Dounot auoit alteré & changé le vray sens de l'Autheur en plusieurs endroicts , & mesme introduit de nouvelles demonstrations vicieuses & erronees : cela fut cause que ie me proposay de reprendre mes premieres erres : & neantmoins i'usay de quelque surseance, esperant que par vne seconde impression , ledit Dounot pourroit emander la premiere : Mais voyant qu'en ladite seconde impression il auoit corrigé peu de fautes , & mesme qu'il y en auoit de

†

AV LECTEUR

nouvelles, cela m'a faict resoudre à mettre en lumiere ceste miennne translation, pour le soulagement des François amateurs des disciplines Mathematiques. Or voicy comme ie m'y suis comporté. Ie me suis efforce de rendre les demonstrations des anciens, & principalement de Theon, lesquelles Proclus assure estre d'Euclide, quelquesfois plus briefues, autant que la matiere la peu permettre, ou pour le moins plus claires & intelligibles, retranchant où il y auoit de la superfluité, & esclaircissant où il y auoit trop de briefueté, suyuant en ce Commandinus & Clavius. Outre cela i'ay adiousté en diuers endroits plusieurs Problemes & Theoremes Vtils & dignes d'estre sçeus, lesquels i'ay tirez de diuers bons Auteurs. D'auantage i'ay tasché d'esclaircir les plus obscures definitions d'Euclide, qui à faute d'estre bien prises, en ont fait chopper plusieurs; comme l'a tresbien remarqué Clavius. Et d'autant que les doctes Commandinus, Stheuin, & Dibuadius ont estimé que le 10. liure (lequel est tenu par plusieurs fort difficile) seroit rendu beaucoup plus clair & intelligible y ioignant les nombres, ie les ay adioustez aux endroits plus difficiles & obscurs, me servant du travail des susdits Auteurs. Et finalement voyant que chacun n'entendoit pas les operations des nombres radicaux & sourds, comme estans esloignees de celles de l'Arithmetique vulgaires, lesquelles neantmoins sont necessaires pour l'intelligence de ces demonstrations numerales: i'ay faict preceder ce 10. liure des Elements d'Euclide, vn sommaire & ab-

AV LECTEUR.

*brégé de l'Algebre, lequel (comme i'estime) ne sera
desaggreable à ceux qui ne sçauent encore les opera-
tions d'icelle, & en desirent la cognoissance, ny trou-
ué mauuais par ceux qui l'ont desia acquise: Je n'ay
voulu à cause de briefueté mettre en ce sommaire les
demonstrations des operations y contenues, lesquel-
les neantmoins les studieux, & desireux d'icelles,
pourront voir dans Nonius, Schewin, ou Clavius; du
travail desquels ie me suis seruy en cest epitome. Voi-
la donc mon travail; reçois-le (amy Lecteur) atten-
dant que ie te puisse bailler la traductiō des Elementis
Spheriques de Theodose: le second volume de mes
memoires Mathematiques, & autres œures.*

*Maintenant parce que ces Elements d'Euclide
seruent d'entree à toutes les autres disciplines Ma-
thematiques, i'ay estimé qu'il seroit bon, auparauāt
que nous venions à les interpreter, de reciter succin-
ctement, (comme ont fait Commandin & Clavius)
d'où les disciplines Mathematiques ont pris leur
nom: quelle est leur diuision: par qui elles ont esté
premierement inuentees: & qui sont ceux par qui
elles ont esté depuis augmentees: combien grande est
leur excellence, & vtilité, & telles autres choses
qui conuiennent à nostre subiect.*

Prolegomene.

*Pourquoy les disciplines Mathematiques ont esté
ainsi appellees.*

Les disciplines Mathematiques, toutes lesquelles ont la quantité pour leur objet, ont pris leur nom de la diction Grecque *μαθημα*, ou bien *μαθηματις*, qui signifie discipline, ou doctrine, dont on apporte deux principales raisons. La premiere est que les Pythagoriens, & Platoniciens estimans que les ames raisonnables, estoient contenues en vn nombre certain & determiné, & qu'elles passioient d'un corps en vn autre, (ce que toutesfois la foy Chrestienne enseigne clairement estre faux) tesmoignent que ces disciplines mathematiques ont eu ce nom, pource que principalement par icelles nous acquerons le ressouvenir & la reminiscence de ceste science, de laquelle nostre ame (comme ils estimoient faulcement) estoit informee, & instruite auparauant qu'elle fust entree dans le corps. Mais les autres estiment que ces arts mathematiques obtiennent le nom de science & de doctrine par dessus tous les autres, d'autant que seuls ils retiennent le moyen, & la raison de la science: Car ils procedent tousiours de certains principes cogneus auparauant, pour faire les demonstrations des conclusions; qui est le propre deuoir de la doctrine ou discipline; ce que ne font pas toutes les autres disciplines: car bien souuent elles amenant pour confirmer ce qu'elles veulent monstrier, les choses qui n'ont pas esté assez expliquees ny demonstrees auparauant.

Division des disciplines mathematiques.

Les Pythagoriens lesquels ont esté suiuis presque de tous les Mathematiciens, & de plusieurs Philosophes, ont diuise toutes les disciplines mathematiques en quatre parties, sçauoir Arithmetique, Musique, Geometrie, & Astronomie: Car puis que toute quantité, qui est leur objet, est ou discrete, sous laquelle tous les nombres sont compris, ou continué, sous laquelle sont comprises toutes les grandeurs, & que l'une & l'autre partie, est considerée, tant selon foy, qu'en comparaison d'une autre; il leur a semblé raisonnable d'instituer les quatre parties susdites, lesquelles considerassent l'une & l'autre quantité, selon la double consideration susdite. C'est pourquoy l'Arithmetique traite de la quantité discrete selon foy, recherchant & expliquant soigneusement

Prolegomene.

toutes les proprietéz & passions des nombres. La Musique traite de la mesme quantite discrete, ou bien d'un nombre comparé avec vn autre, entend qu'elle considere les accords des sons & harmonies. La Geometrie dispute de la magnitude ou quantite continue, aussi selon soy, comme elle est immobile. Et finalement l'Astronomie considere la grandeur, comme elle est mobile, tels que sont les corps celestes, ainsi qu'ils sont meuz d'un continuel mouvement. Or à ces quatre sciences mathematiques, desquelles l'Arithmetique, & Geometrie sont appellees pures; mais la Musique, & l'Astronomie mixte: toutes les autres traitant en quelque maniere que ce soit de la quantite, telle qu'est la Perspective, la Geographie, & autres semblables, peuvent estre reduites, voire facilement, comme à leurs sources, desquelles elles despendent.

Quelques anciens Geometres diuisent les disciplines mathematiques d'une autre maniere: car ils disent qu'aucunes d'icelles consistent seulement es choses intellectibles separees de toutes matieres, & aucunes es choses sensibles, de telle sorte qu'elles touchent la matiere subiecte aux sens: du premier genre, ils establisent deux premieres & principales sciences, l'Arithmetique, & la Geometrie: Mais au dernier genre, ils en constituent six, Astrologie, Optique, Geodesie, Canonique ou Musique, Suputatrice, & Mechanique. Ils disent que l'Astrologie, est vne science qui discourt des mouuemens du monde: des magnitudes, figures, & illuminations des corps celestes; & de leurs distances de la terre, & d'autres choses semblables: Et derechef de ceste science, ils en constituent trois parties: La Gnomonique, laquelle s'exerce en la dimension des heures, par la position des Gnomons: La Meteoroscopique, laquelle enseigne la difference des eleuations, & trouue les distâces des astres, & enseigne plusieurs autres & diuers Theoremes Astrologiques: Et la Dioptrique, laquelle discerne par instrumens Dioptriques les distances des planettes, & autres estoilles. Ils disent que l'Optique est engendree de la Geometrie, pource qu'elle se sert de rayons visuels, comme de lignes, & d'angles qui sont constituez d'iceux rayons: Or elle est diuisee en trois parties: en l'Optique qui est le nom general, Catoptrique, & Scenographie, ou comme quelques vns ayment mieux Sciagraphie. L'Optique ou Perspective, rend la cause des apparances, lesquelles ont de coustume se presenter a nous, autrement qu'elles ne sont à cause des diuerses scituations, & distances des choses qui tombent sous la veue, comme de la coïncidence de paralle-

Prolegomene.

Ies, & de l'aspect des quarrez, comme si c'estoient cercles : La Catoptrique ou Speculaire vniuerselle, a diuerses refractions pour son obiet : Et la Sciagraphie, ou Designatrice des nombres, monstre par qu'elle maniere se peut faire, que les choses qui paroissent es images, semblent plaisantes & non difformes, pour les distances & hauteurs des choses designees. Ils appellent Geodesie la science, laquelle mesure les choses qui consistent en quantité, comme les ras & monceaux des choses materielles, ainsi que les Cones; & les puits, comme les Cylindres: Ce qu'elle faict, non pas par lignes droictes intellectuelles, comme de la Geometrie, mais seulement par les sensuelles. Ceste Geodesie, comme la Geometrie, est diuisee en la partie qui mesure les plans; & en celle qui mesure les solides Or quelques vns entre lesquels est Pedasimus comme rapporte Clavius au commencement du 6. liure de la Geometrie pratique, disent que Geodesie n'est que ceste partie de Geometrie, laquelle enseigne a partir ou diuiser les superficies: comme s'il falloit partir vn champ ou piece de terre, ou autre superficie entre diuerses personnes, cela seroit proprement appellé Geodesie. Ces antiens la appellent Canonique ou Musique, la science qui considere les raisons apparentes des accords des sons, & qui se sert par tout de l'aide des sens, & laquelle comme dit Platon, semble auoir preferé les oreilles a l'entendement. La supputatrice quant a eux, est la mesme que ce que nous appellons Arithmetique pratique: Car elle considere les nombres, non pas comme es choses intellectuelles, mais comme es choses sensuelles. Et finalement la Mechanique, laquelle consiste en la cognoissance des choses sensuelles & conioinctes a la matiere, ils la diuisent en plusieurs manieres: Car il y en a vne qui est effectrice des instrumens de guerre, tels que l'on dict qu'Archimede en auoit construit pour faire resistance a ceux qui auoient assiegé tant par mer, que par terre la ville de Syracuse. Il y en a vne autre qui est effectrice de choses du tout admirables: Car elle construit certains instrumens, qui par le moyen des vérs, ou de l'eau, feignent la voix de quelconques animaux, tels que Ctesibe & Heron en ont fabriqué: & d'autres qui par le moyen des pois, & des nerfs, imitent les conuulsions & mouuemens des choses animees, tels qu'Archimede, Architas Tarentin, & autres en ont construit Il y en a vne autre qui est la cognoissance des equilibres, & des choses appellees centroponderantes. Et finalement il y en a vne qui est appelée effectrice des spherres, a l'imitation des enconuolu

Prolegomene.

tiōs celestes, telle qu'Archimede en à aussi fabrique: Et pour dire en vn mot, toute science est mechanique, laquelle à la force de mouuoit la matiere. Or voila comme les anciens diuisoient les disciplines Mathematiques.

Les inuenteurs des disciplines Mathematiques.

Les histoires tesmoignēt que toutes les disciplines Mathematiques ont tire leur origine de diuers Autheurs, voire mesme que chacunes de ces sciēces n'ont pas acquis vne perfectiō des le cōmencement, mais qu'elles ont procede peu à peu des choses imparfaites aux choses plus parfaites: Car on croit que les premiers innēteurs de l'Arith. ont este les Pheniciēs à cause de leurs traffics & cōmerces frequens: laquelle depuis Pythagoras, & ses successeurs, & les Egyptiens, Grecs, & Arabes ont augmentee merueilleusement, & esclaircie de diuers problemes & Theoremes. Quand à la Musique plusieurs historiens ont laisse par escrit, qu'elle a este premierement inuentee par Mercure, laquelle depuis il communiqua & apprit à Orphee Musicien fort estime, & Orphee à Thamyre & à Linus; & Linus à Hercules; & ainsi par successiō cōtinuelle d'autres Musiciēs excellens, de tēps en tēps elle est paruenue iusqu'à nous. Mais la Geometrie, selon Procle a este trouuee par les Egyptiens, & a tiré son origine du mesurage des terres labourables: car comme l'inondation du fleue du Nil confondoit & gastoit les bornes des terres, tellement que chacun ne pouuoit pas recognoistre l'estendue des siennes, cela excita les Egyptiens d'appliquer leurs esprits à la maniere de mesurer les terres, afin que par ce moyen on rendist à chacun le sien: Laquelle maniere de mesurer les terres, encore que pour lors elle fut fort rude, & mechanique, si est-ce toutesfois que de là elle prit son nom de Geometrie, qui signifie autant que l'art de mesurer la terre. Or peu à peu la Geometrie cōmença à estre plus polie, & non contente de ses limites, elle s'appliqua aussi a mesurer les corps celestes, & enseigna les principes de l'Astronomie, de l'Optique, & de plusieurs autres disciplines qui depēdēt d'icelle cōme des racines. L'on dit que Thales Milesien la transfera d'Egypte en Grece, & depuis plusieurs Philosophes & renommez Mathematiciēs l'ont enrichie & embellie de plusieurs demonstrations: entre lesquels ceux cy sont les principaux des anciens, Pythagoras, Anaxagoras Clazomenien, Hippocrates de Chios, Platon, Oenopides, Zenodore, Briton, Antiphon, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentin,

Prolegomene.

Euclide, Serenus, Hypsicles Alexandrin, Archimede Syracusien, Appolonius Pergæus, Theodose Tripolitain, Mileus Romain, Menelaus, Theon Alexandrin, Ptolomee, Eutocius Ascalonite, Pappus, Proclus & plusieurs autres innombrables, lesquels il seroit long de rapporter. Finalement, plusieurs estiment que l'Astronomie a esté premierement inuentee par Atlas, d'où ils veulent que la fable a tiré son origine, que de ses espaulles, il auoit soustenu le ciel à cause de l'excellente cognoissance qu'il auoit de l'Astronomie. Les autres estiment que les Chaldeens par vne obseruation ont inuenté la science des astres. Les autres sont les Egyptiens les premiers inuenteurs de ceste science. Les autres les Assyriens. Et finalement les autres estiment que ceste gloire & louange doit estre desferree aux Babyloniens. Or en ceste science, comme elle est tres excellente, aussi y a-il eu plusieurs Autheurs excellents qui y ont trauaillé, lesquels nous ne rapporterons icy pour briefueté. Ces 4 principales disciplines Mathematiques ayans esté inuentees, toutes autres qui traictent de la quantité en quelque sorte que ce soit, ont esté facilement deriuées d'icelles, tout ainsi que petits ruisseaux d'vne fontaine,

L'excellence des sciences Mathematiques.

. D'autant que les disciplines Mathematiques traictent des choses, lesquelles sont considerees sans aucune matiere sensible, encore qu'elles ne soient naturellement sans matiere, il est euident qu'elles tiennent le milieu entre la Metaphysique, & la science naturelle, si nous considerons leur subiect, comme Procle le prouue fort bien. Car le subiect de la Metaphysique est separé de toute matiere tant intellectuëlle que sensuelle: mais le subiect de la Physique est conioinct à la matiere sensible, d'où vient que puis que le subiect des disciplines Mathematiques est considéré hors de toute matiere sensuelle, mais non hors de toute matiere intelligible: il est euident qu'il est moyen entre ces deux-là. Mais s'il faut estimer l'excellence d'vne science par la certitude des demonstrations desquelles elle vse, sans doubte les disciplines Mathematiques tiennent le premier lieu entre toutes: Car elles demonstrent toutes choses desquelles elles entreprennent la dispute, par des raisons tres fermes, & les confirment de telle sorte, qu'elles engendrent veritablement vne science en l'esprit de ses auteurs, & oste tous les doubtes: ce qu'a peu

Prolegomene.

ne pouuons nous attribuer aux autres sciēces, veu qu'en icelles souuent l'entendement est en suspend & en incertitude par la multitude des opinions, & diuersité des aduis sur la verité des conclusions: ce que tesmoignent ouuertement tant de sectes des Peripateticies, (afin que ie laisse tous les autres Philosophes à part) lesquelles ayant pris leur origine d'Aristote, comme les ruisseaux de leur source ou fontaine, sont tellement en discord, & entr'elles, & quelquesfois avec leur auteur mesme Aristote, qu'on ignore tout à fait ce que veut dire Aristote, d'où vient qu'une partie suit les interpretes Grecs, cōme guides & conducteurs, les autres les Latins, les autres les Arabes, les autres les Nominaux, & les autres les Philosophes qu'ils apellent Reaux, (tous lesquels toutefois se vantēt d'estre Peripateticies) laquelle diuersité ie n'estime pas que personne ignore combien est esloignee des demonstrations mathematiques. Car les theoremes d'Euclide, & des autres Mathematiciens retiennent auourd'huy la mesme pureté de la verité, la certitude des choses, la force & fermeté des demonstrations qu'elles ont eu par tant de siècles precedens. A ce cy se rapporte ce que Platon dict en son dialogue du souuerain bien, que ceste science là est la plus digne, & la plus excelente, laquelle est la plus amatrice de sincerité & verité. Veu donc que les disciplines Math. desirent, ayment, & cultiuent si soigneusement la verité, que non seulement elles n'admettent rien qui soit faux, mais mesme rien qui soit seulement probable, ny rien qu'elle ne confirme & fortifie par demonstrations tres-certaines, il ny a point de doute qu'il ne leur faille bailler le premier lieu entre toutes les autres sciences.

Diuerses vtilitez des disciplines Mathematiques.

Les disciplines mathemat. ne doiuent pas estre seulement estimees vtils, mais aussi fort necessaires, tant pour apprendre les autres arts parfaictement, que pour bien instituer & gouverner la chose publique: Car comme enseigne fort bien Proclus, il n'y a point d'entree à la Metaphysique, si ce n'est par les Mathematiques. Car si des choses sensibles, lesquelles le Physicien considere, nous voulons esleuer nostre entendement sans aucun milieu, aux choses du tout separees de la matiere sensible, lesquelles le Metaphysicien considere, nous nous aveuglons nous mesmes, tout ainsi qu'il arrive à celuy qui de quelque lieu tenebreux, où il a este long temps, vient

Prolegomene.

tout soudain paroistre en vne grãde lumiere. C'est pourquoy auparavant que l'entendement monte, des choses Physiques qui sont contoinctes à la matiere subiecte aux sens, aux choses Metaphysiques qui en sont separees, il est necessaire de peur d'estre esblouy de leur clairté, qu'il soit premierement accoustumé aux choses où il n'eschet pas vne si grande abstraction, telles qu'elles sont considerees par les Mathematiciens afin qu'il les puissent plus facilement comprendre. C'est pourquoy Platon assure que les Mathematiques esleuent l'esprit, & le subtilisent pour la contemplation des choses diuines. Or combien ces disciplines apportent d'utilitez pour bien entendre les saintes Escritures, Saint Augustin, saint Hierosme, & autres Docteurs nous l'apprennent, en disant qu'il y a beaucoup de choses, qui ne sont pas entendues de plusieurs par l'ignorance des nombres, pource qu'elles ont esté couchées dans l'Escriture mystiquement: Ces mesmes Docteurs disent que la Geographie, & la Geometrie sont grandement utiles aux Theologiens. Et S. Basile est grãdement loué par Gregoire Nazianzene, de ce qu'il estoit fort bien versé en l'Astrologie, Geometrie, en la cognoissance des nombres, & autres sciences des Mathemat. Pareillement elles ne seruent pas peu pour acquerir parfaictement la Philosophie naturelle, Morale, la Dialectique, & autres semblables, comme l'enseigne fort bien Proclus. I'adiouste que presque tous les volumes des anciens Philosophes, & nommément d'Aristote & de Platon, lesquels à bon droit sont proposez pour guide, pour bien & sainement philosopher, & presque de tous les Interpretes tant Grecs que Latins, sont remplis d'exemples mathematiques, pour ceste raison principalement, afin que les choses qui semblent estre enuolopees de grandes difficultez fussent rendues plus intelligibles par ces exemples plus clairs, lesquels on ne sera point capable d'entendre, si on est du tout destitué de la cognoissance des Mathematiques: d'où vient qu'antiënement la frequentation du college de Platon estoit interdite à ceux qui n'estoient pas bien versés es disciplines Mathemat. C'est pourquoy en son Timee, il appelle les Mathematiques le chemin de toutes vraies eruditions: voire mesme il dit en son Philebe, que toutes les disciplines sont viles & abiectes sans les Math. Je pourrois rapporter icy plusieurs autres tels tesmoignages tant de Platon, qu'autres Philosophes excellents, lesquels ie delaisse pour venir aux choses plus cogneues, voire mesme des plus ignorans. Car qui est celuy qui ne sçait l'utilité & necessité de l'Arithmet. non seulement à ceux qui s'employent

Prolegomene.

au cōmerce, mais presque a toutes sortes de personnes? Qui ne voit l'vtilité de la Geometrie: puis que c'est elle qui cōduit l'Architecte en la structure des maisons & autres bastimens: l'Ingenieur en la construction des forterefles, en l'inuention des machines, tant offensives, que deffensives: puis que c'est elle (dis ie) qui monstre à mesurer les longueurs, largeurs, hauteurs & profondeurs; la diuision des terres; a prendre, & représenter le plan des villes ou autres lieux: à faire la Carte des Prouinces ou Royaumes à diuiser & cōpasser en vn chāp les espaces pour camper vne armee; à celuy qui veut ranger des hommes en bataille, selon qu'elle figure ou forme, il doit ranger son armee, afin de faire paroistre le nombre de ses hommes plus grand ou moindre qu'il n'est: Bref qui ne voit combien l'Astrologie est vtile; puis que c'est elle qui enseigne la distinction des temps & des saisons. Et qui est ce qui peut sans l'aide de la Geometrie & Astrologie, courir les mers, aller es contrées lointaines, voir le nouveau monde, & en rapporter tant de richesses que nous auons de ces quartiers-là? Et comment l'Hystorien rapportera il la scituation des climats, les grandeurs, diametres, ou circuits des villes, sans l'aide de la Geometrie & Astronomie? Que dirons nous plus? la cognoissance des nombres ne fust-elle pas tres-vtile a Iosephe Sacrificateur des Iuifs, lors qu'a la prise de la ville de Iotapate, par Vespasien chef de l'armee Romaine, ceste cognoissance & subtilité des nombres, luy sauua la vie. La mesme vtilité apporta la cognoissance de l'Astrologie à Christophle Colomb grand Admiral de l'Océan Occidental, sous Dom Ferrand Roy de Castille, premier exp'orateur du nouveau monde: Car estant parvenu pres de l'Isle qu'on nomme Iamayque, & l'à perdu deux Carauelles que le Roy luy auoit baillee, tellement qu'il estoit sans vaisseau, les habitans d'icelle Isle ne luy voulurent par prieres, force, ou autrement deliurer aucun viure, dont luy & sa compagnie estoient en grande necessité, & par ce moyen lesdits habitans esperoient les pouuoir tous vaincre & saccager: Mais ledit Colomb cognoissant par l'Astrologie qu vne nuit prochaine, il se feroit vne grande eclypse de Lune, il dict à quelques vns des habitans, que s'il ne luy vendotent des viures, & à sa compagnie, que dans peu de temps ils mourroient tous par pestes, & effusion de sang, & pour tesmoignage que cela aduiēdroit ainsi, ils verroient en vn tel iour, & a vne telle heure qu'il leur nomma, la Lune toute sanglante: Ce qu'estant aduenu ainsi, lesdits habitans ignorant l'Astrologie, adiouterent foy aux me-

Prolegomene.

naces dudiect Colomb, & luy demandant pardon, luy apporterent tout ce qu'il demandoit, & le prierent qu'il les mit en la bonne grace de la Lune. Nous adiousterons encore icy que Hieron Roy de Syracuse, ayant fait bastir vne Nauiue pour enuoyer à Ptolomee Roy d'Egypte, d vne telle grandeur que tous les Syracusins ensemble ne la pouuoient remuer de sa place, vn seul Archimede par le moyen de la Geometrie, fist que le Roy seul sans aucune peine la remua de son lieu, dont le Roy, & tous les Syracusiens furent grandement esmerueillez. Qui est donc celuy qui ne doie desirer les disciplines Mathematiques sur toutes les autres sciences, puis qu'elles sont non seulement agreables, mais aussi tres-vtiles & necessaires à la vie humaine?

Recommandation d'Euclide, & de la Geometrie.

Les Autheurs ne sont pas bien d'accord, qui a esté Euclide, qui a composé ces Elemens, & en quel temps il a floruy. Car plusieurs pensent que ç'a esté vn Philosophe de la ville de Megare disciple de Socrates, qui institua la secte appelée par luy Megarique. Mais si nous croyons Proclus Autheur excellent, & autres antiens, nostre Euclide a esté depuis celuy de Megare, & a floruy au temps de Ptolomee premier, lequel commença à regner en Egypte apres la mort d'Alexandre la 115. Olimpiade, & l'an 399. au parauant la natiuité de nostre Seigneur, comme le rapporte Iean Lucide: Ce qui est plus vray semblable. D'autant que Diogenes Laertius rapportant tous les œuures d'Euclide Megarien, il ne fait aucune mention de cest admirable volume des Elemens Geometriques, par lequel nostre Euclide s'est acquis vne renommee & gloire immortelle. C'est pourquoy nostre Euclide tres-subtil Geometrien, est bien autre que ce Megarien l'à, d'autât qu'estât tres-biẽ versé en la doctrine des Academiques, il apliqua sô esprit aux Mathematiques, esquelles il se rendit si excellent que par le commun consentement de tous il a obtenu le premier lieu entre les Mathemat. Or il a escrit plusieurs volumes concernant les Mathematiques, esquels paroist sa grande diligence, & admirable doctrine, tels que sont ses Optique, Catoptrique, Musique, Phenomenes, & le liure des Donnez, l'œuure des diuisions, que nous estimons estre ce petit liure tres subtil des diuisions des superficies attribué à Machamet Bagdedin, qui depuis peu a esté mis en lumiere par la diligence de Iean Decé, & de Federic Commandin. Pareillemēt il a escrit les Elemens

Prolegomene.

coniques, comme dit Proclus, lesquels toutesfois ne sont pas encore paruenus iusques à nous, & autres petits traictez semblables. Mais principalement il a tissé ce volume des *Elemens Geometriques*, qui par le consentement de tous, ne sera iamais assez loué, avec vn ordre si admirable, & la remply d'une si grande erudition, qu'il n'y en a pas vn de tous ceux qui ont escrit de semblables *Elemens*, (car comme dit Proclus, il y en a plusieurs qui en ont composé) qui l'ait égalé, tant s'en faut qu'il y en ait quelqu'un qui l'ait surpassé, auquel volume comme il a fait paroistre la grande subtilité de son esprit, ainsi il n'a pas estimé qu'il fallut mettre au iour toutes les choses qui touchent la Geometrie, mais seulement les choses qui luy ont semblé utiles & necessaires pour tous, lesquelles il a confirmées & fortifiées d'argumens & raisons tres-fermes & tres-solides. Or l'on peut recognoistre clairement tant des choses que nous auons desia representees, que de ce que nous dirons encore presentement, combien est grande l'utilité & excellence de ces *Elemens Geometriques* d'Euclide, & consequemment de toute la Geometrie. Ces *Elemens* sont ainsi appelez d'autant que nous ne pouuons sans cela entreprendre aucunes ceures mathemat. tant s'en faut que nous en puissions retirer aucun fruit: Car tous les auteurs des mathemat. cōme Archimede, Appolonius Pergeus, Theodose &c. se seruent en leurs demonstrations de ces *Elemens* d'Euclide, comme de principes certains, & desquels les demonstrations estoient desia il y auidit lōg temps recogneues & tenues pour constantes & assurees de tout le monde. Parquoy il est necessaire que celuy qui desire sçauoir, & se rēdre familiere quelconque partie des mathematiques, apprene auparavant ces *Elements Geometriques*. Car d'iceux *Elemens*, comme d'une fontaine plantureuse, est produite la dimension des latitudes, longitudes, altitudes & profondeurs: la diuision des terres, montagnes, & isles: l'observation des astres du ciel, qui se fait par les instruments: la composition des horologes scroteriques: la force des machines: la raison des pois: & ceste diuersité d'apparences qu'on voit es miroirs, es peintures, es eaux, & en l'air diuersement illuminé. Par le moyen des-jc de ces *Elemens* a esté trouué le milieu & centre de toute ceste machine du monde; & ont esté trouuez les poles, aleptou desquels il se tourne continuellement: & a esté recherchée & trouuée la figure & quantité de toute la terre. Par la force de ceste seule science est monstree, & demonstree la conuersion de tout le Ciel, & des astres: leur leuer & seuer: leur aprochemēt

Prolegomene.

& esloignement : leur ascension & descention ; la varie é du jour & de la nuit, & des temps en toute l'année, par toute la situation des endroits de la terre. Pareillement les conjunctions des planettes, leurs oppositions, & diuers aspects, sont cogneus si facilement, que les Mathematiciens peuvent dire leurs lieux au ciel & prédire asseurement les ecliptes soit de Soleil, soit de la Lune, auparavant qu'elles aduenent pour si long temps qu'il leur plaist. Bref, par le moyen de la Geometrie, nous voyons tout ce grand œuvre de Dieu perceptible aux yeux de nostre entendement.

La diuision de la Geometrie, & des Elemens d'Euclide.

La Geometrie est diuisee en la contemplation des plans, qui est appelée du mot general Geometrie ; & en la doctrine des solides, laquelle les Mathematiciens appellēt par vn nom propre & peculier la Stereometrie. Car la Geometrie vniuerselle se propose ce but, qu'elle constitue ou les plans, ou les solides, ou bien estans constituez, elle les compare entr'eux, ou les diuise. Or nostre Euclide voulant laisser vne parfaite cognoissance en ces Elemens des choses Geometriques, il traite des plans aux 6 premiers liures ; & aux 5 derniers, il dispute fort subtilement des solides, & recherche leurs proprietiez les plus excellentes. Et d'autant que toutes les choses Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers, qui ont de coustume d'estre appelez corps Platoniques, ne pouuoient estre traittez parfaitement sans la cognoissance des lignes commensurables & incommensurables. Euclide afin de comprendre dans ces Elemens Geometriques, tous les enseignemens requis pour l'intelligence, & dimension des magnitudes, il a mis son 10. liure deuant sa Stereometrie, auquel il discourt subtilement de ces sortes de lignes là : Et qui plus est, Euclide sçachant que ce traité des lignes commensurables & incommens. ne se peut bien faire sans la cognoissance des nombres ; deuant le 10. liure, il traite des passions ou proprietiez des nombres, es trois liures qui le precedent. C'est pourquoy tout ce volume des Elemens Geometr. cōpris en 13 liures, (desquels les 13 premiers sont attribuez de tous à Euclide sans aucun cōtredit,) mais les 2 derniers sont attribuez à Hypsicle Alexandrin) se pourra à bon droit diuiser en 4. parties ; tellement que la premiere partie contenue es 6. premiers liures, traite des plans ; la seconde comprenant les trois liures suiuaus, recherche les passions des nombres : La troisieme partie, laquelle le 10. liure constitue seul, traite des lignes commensurables & incommensurables.

Prolegomene.

Et finalement la 4. partie contenue aux 5. autres livres, comprend la science des corps ou solides. La premiere partie se diuise derechef en 3: Car aux 4. premiers livres, il est traité des plans absolument, en recherchant leur egalité & inegalité; mais au 5. liure, il est traité en general des proportions des magnitudes: & au 6. sont examinees les proportions des figures planes.

Que c'est que Probleme, Theoreme, Proposition, Lemme, Corollaire, & Scholie, entre les Mathematiciens.

Toute demonstration de Mathematiques, est diuisee par les Antiens Auteurs en Probleme & Theoreme. Ils appellent Probleme, ceste demonstration qui commande & enseigne à construire quelque chose: Et Theoreme, la demonstration laquelle recherche seulement, quelque passion ou propriété d'une ou plusieurs quantitez ensemble: Bref les Problemes enseignent à trouuer & cōstruire quelque chose, & les Theoremes demonstrent les affections & proprietiez des choses desia faictes & construictes: Et tant le Probleme, que le Theoreme, sont appelez entre les Mathematiciens Proposition, d'autant que l'un & l'autre nous propose quelque chose. Ils appellent Lemme, quelque Probleme ou Theoreme, lequel estant necessaire à leur demōstration, ils le prennent & prouuent auparauant que venir à leur dite demonstration principale, afin de la faire plus euidente & briefue. Mais ce que nous appellons Corollaire, est vne consequence que nous tirons de ce qui a este demonstre en quelque proposition. Et finalement ce qu'on nomme Scholie, est vne annotation qu'on faict seulement, comme en passant sur quelque proposition.

Des principes des Mathematiciens.

Veu que toute doctrine & discipline est engendree d'une cognoissance precedente, comme le tesmoigne Aristote, & demonstre ses conclusions de certains principes pris & concedes, & qu'il n'y a aucune science, selon le mesme Aristote, & autres Philosophes, qui demonstre ces principes; les disciplines mathematiques auront aussi leurs principes, desquels estans posez & concedes, elles confirment leurs Problemes

Prolegomene.

& Theoremes. Or il y a entre les Mathematiciens trois genres de principes. Au premier sont mises les definitions, par lesquelles les mots & termes de l'art sont expliquez, de peur qu'en traitant de la science, estans trompez par l'ambiguité des noms, ou par l'obscurité, nous ne tombions en des paralogismes. Le second genre comprend les petitions ou denrées, qui sont choses si claires & evidentes en ceste science, qu'elles n'ont besoin d'aucune confirmation, mais requierent seulement le consentement de l'auditeur, afin qu'en faisant la demonstration, il n'y ait aucune hesitation ou difficulté. Au 3. genre sont referez les axiomes, ou communes notions de l'esprit, autrement communes sentences, qui sont choses si manifestes & evidentes, que celuy qui entendra bien les termes, n'y pourra contrarier en façon quelconque. Or Euclide en ce volume des Elemens Geometriques, met deuant les demonstrations de ses conclusions, ces trois genres de principes, lesquels sont facilement entendus de tous, pour tirer d'iceux des Theoremes admirables, auxquels iamais personne ne consentiroit, s'ils n'estoient confirmez par raisons certaines & evidentes. Or voila tout ce que nous nous estions proposé de declarer sur le subiect de ces Elemens d'Euclide, & autres preambules ou prolegomenes qu'on pourroit nommer en François Avant-propos. Nous viendrons donc maintenant a l'exposition des principes d'Euclide.

ELEMENT



ELEMENT PREMIER.

DEFINITIONS.

1. Le point, est ce qui n'a aucune partie.



Es Phisiciens disent que le point est le moindre objet de la veüe : & iceluy peut estre décrit avec ancre ou autre chose. Mais les Mathematiciens reietant ceste définition, disent que le point est vn objet de l'intellect si subtil qu'il ne peut estre diuisé en aucunes parties : Et iceluy ne se peut escrire : mais seulement entendre & imaginer : bien est vray que pour le représenter à nos sens extérieurs, nous nous seruons du point Phisique. Le point n'a donc aucunes des dimensions geometriques ; c'est à dire qu'il n'a ny longueur, largeur ny espaisseur, mais bien est-il principe d'icelles.

2. La ligne, est vne longueur sans largeur.

Après le point vient la ligne, qui n'est autre chose que le flux ou collement du point en longueur, laquelle n'aura aucune largeur, comme dit Euclide; puis que le point du coulement duquel elle est produite est imaginé n'auoir aucune quantité; & par consequent la ligne, qui est la premiere espèce de quantité a seulement vne dimension, sçauoir est longueur.

3. Les extremittez des lignes, ce sont poinçts.

Cecy est intelligible, puis que toutes lignes terminees commencent a vn poinçt & acheuent aussi a vn poinçt.

4. La ligne droiçte, est celle qui est egalle- ment comprise entre ses poinçts.

Les Mathematiciens ont diuerses sortes de lignes; mais Euclide ne traiçte que des deux plus simples, sçauoir est de la droiçte, & de la circulaire; en ceste definition il parle de la droiçte, laquelle est le plus court chemin d'un poinçt iusques à l'autre: ou comme dit Archimede, c'est la plus courte d'entre ses extremittez.

5. Superficie, est ce qui a longueur & largeur tant seulement.

Après la ligne, qui est la premiere espee de quãtité continuë, & qui a vne seule dimension, Euclide definit la superficie, qui est la seconde espee de quantité, & a deux dimënsions, sçauoir est, longueur & largeur; & cõme la ligne est produite par le flux ou coullement du poinçt, ainsi la ligne se mouuant en trauers, produiçt la superficie.

6. Les extremittez de la superficie, ce sont li- gnes.

Il faut icy entendre des superficies bornees, & terminees par lignes droiçtes: car il y a plusieurs superficies encloses d'une seule ligne, comme de la circulaire, & autres dont Euclide ne fait mention en ces Elements cy. Comme donc la ligne commence a vn poinçt, & finit a vn autre poinçt, ainsi la superficie commence par vne ligne, & finit par vne ligne.

7 Superficie plane, est celle qui est egalemẽt comprise entre ses lignes.

Ceste definition de la superficie plane se raporte a celle

3

de la ligne droiète : Car comme celle-cy est la plus courte d'entre ses extremitéz , ainsi aussi la superficie plane est celle qui est la plus courte d'entre ses limites ou extremitéz.

8. Angle plan , est l'inclination de deux lignes, l'une a l'autre se touchant en vn plan non directement.
9. Que si les lignes comprenant l'angle sont droiètes, l'angle sera appelé , retiligne.

Quand deux lignes constituees en quelque superficie plane, concurrent en vn poinct d'icelle superficie, & ne se rencontrent directement, alors l'inclination d'icelles deux lignes, s'appelle angle plan. Or tout angle plan est fait, ou de deux lignes droiètes, & alors il se nomme retiligne; ou de deux lignes courbes, & alors on l'appelle curuiline: ou bien d'une ligne droiète, & d'une courbe, & alors il s'appelle angle mixte. Quelques Geometres (entre lesquels est Dounot, & pource auoit-il changé ceste definition de l'angle plan en la premiere impression de sa traduction d'Euclide) ont estimé qu'afin que deux lignes fassent angle, il estoit necessaire qu'estant continuees du poinct de leur rencontre, elles s'entre-couppent en iceluy, dont l'ensuiuroit que deux cercles s'entre-touchant en vn plan, ou qu'une ligne droiète touchant vn cercle ne feroit angle, ce qui est contre l'intention d'Euclide, ainsi qu'il appert, tant par ceste definition de l'angle plan, que 16. p. 3. & comme la aussi bien demonsté Clavius sur la mesme proposition, ou il refute Pelletier, qui disoit que la ligne droiète touchant le cercle, ne faisoit angle; c'est pourquoy ceux qui tiennent encore ceste opinion, se moquent bien d'Euclide, de Clavius & autres Geometres, qui disent qu'une ligne droiète touchant vn cercle, fait vn angle contingent, ou d'attouchement. Or la grandeur d'un angle plan consiste en la seule inclination des lignes qui le constituent, & non en la longueur d'icelles lignes.

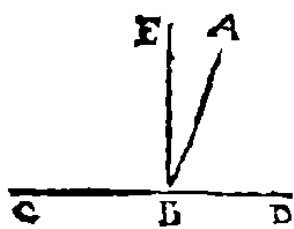
10. Quand vne ligne droiète tombant sur vne autre ligne droiète, fait les angles de part & d'autre egaux entr'eux, les angles sont droiêts; & la ligne tom-

bante, est perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe.

II. Angle obtus, est celuy qui est plus grand qu'un droit.

12. Mais l'aigu, est celuy qui est plus petit qu'un droit.

Si une ligne droite tombant sur une autre ligne droite, ne s'incline pas d'un costé que de l'autre, mais fait égale inclination, & par conséquent deux angles égaux entr'eux, chacun d'iceux est appelé angle droit, & la ligne ainsi tombante, perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe. Mais quant ceste ligne tombante s'incline plus d'un costé que de l'autre, elle fait deux angles inégaux entr'eux, dont le plus grand est appelé obtus, & l'autre aigu. Or d'autant que quelquesfois en un plan concurrent plus de deux lignes en un même point, & par conséquent constituent plusieurs angles, les Geometres ont accoustumé (pour éviter confusion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, desquelles celle du milieu monstre le point, auquel les lignes constituent l'angle, & celles des extremes signifient les commencemens d'icelles lignes, que font iceluy angle : Comme pour exemple en ceste figure ou les lignes AB & EB concurrent au point B de la ligne CD : & EB est autant inclinée vers CB qu'à DB, mais AB panche vers la partie DB. Pour donc exprimer ces angles, nous disons que les deux CBE & DBE sont droits, puis que la ligne EB tombant sur CD ne panche d'un costé ny d'autre, comme fait AB ; & par conséquent icelle EB est perpendiculaire à CD : Mais que l'angle ABC, qui est plus grand que le droit EBC, est obtus, & ABD, qui est moindre que le droit DBE, est aigu. Ce qu'on doit bien noter, afin de connoître facilement les angles, dont sera fait mention en démonstrations suivantes.



13. Terme, est l'extrémité de quelque chose.

Ainsi les points sont termes ou extrémités des lignes, les lignes des superficies, & les superficies des corps.

14. Figure, est ce qui est compris d'un, ou de plusieurs termes.

Toute quantité ayant termes, n'est pas dictée figure; ains seulement celles que les termes environnent: ainsi la ligne terminée par deux poinçts n'est pas dite figure: mais toutes superficies, & solides, finis & limitez, sont nommez figures, pour ce qu'ils sont environnez d'un seul, ou de plusieurs termes: d'un seul, comme le cercle, l'Ellipse, la sphere: de plusieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, &c.

15. Cercle, est vne figure plane, contenuë par vne seule ligne qu'on appelle circonférence; vers laquelle toutes les lignes droictes menees d'un seul poinçt de ceux qui sont en icelle figure, sont égales.

16. Et ce poinçt là est appellé centre du cercle.

17. Diametre du cercle, est vne ligne droite, menée par le centre du cercle, & finissant de part & d'autre à la circonférence d'iceluy cercle, le diuise en deux également.

18. Demi cercle, est vne figure comprise du diametre, & moitié de la circonférence.

Toutes ces definitions sont aisées; car le cercle, la circonférence, son centre, son diametre, le demy cercle declarez en icelles definitions, sont toutes choses cognues, voire aux plus ignorans.

19. Section de cercle, est vne figure comprise d'une ligne droictte, & de partie de la circonférence.

Ceste definition est repete'e au troisieme liure ; auquel lieu elle conuient mieux qu'en cestuy-cy.

- 20. Figure rectiligne , est celle qui est comprise de lignes droictes.
- 21. Figure de trois costez , est celle qui est comprise de trois lignes droictes.
- 22. Figure de quatre costez , est celle qui est comprise,de quatre lignes droites.
- 23. Figures multilateres ou de plusieurs costez, sont celles qui sont comprises de plus de quatre lignes droictes.

Le nombre des figures rectilignes est infiny : Les Geometres les nōment, tantost par le nombre de leurs costez, tantost par le nombre de leurs angles.

- 24. Or des figures de trois costez , celle se nomme, Triangle equilateral, qui a les trois costez egaux.
- 25. Triangle Iloscele , qui a deux costez egaux seulement.
- 26. Scalene, qui a les trois costez inegaux.
- 27. Encores des figures de trois costez , celle se nomme triangle rectangle qui a vn angle droit :
- 28. Ambligone, qui a vn angle obtus.
- 29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.
- 30. Mais des figures de quatre costez, celle qui a les quatre costez egaux, & les quatre angles droicts, s'appelle quarré.
- 31. Quarré long , qui a les quatre angles droicts , mais non pas tous les costez egaux.

32. Rhombe, qui a les quatre costez egaux, mais non pas les quatre angles droicts.
33. Rhomboide, qui a les angles, & aussi les costez opposez egaux entr'eux, sans estre equilaterale ny rectangle.
34. Toute autre figure de quatre costez, est appellee trapeze.
35. Lignes droictes paralleles, sont celles qui estant sur vn mesme plan, & prolongees de part & d'autre ne se rencontrent iamais.

Icy finissent les definitions du premier liure d'Euclide: Mais d'autant qu'en ce mesme liure est souuent parle de parallelogramme, lequel Euclide n'a point defini, nous adiouterons icy la definition.

36. Parallelogramme, est vne figure quadrilaterale qui a les costez opposez parallels ou equidistans.

Telle figure est tousiours l'une de ces quatre : Quarré, Quarré long, Rhombe, Rhomboide.

PETITIONS OV DEMANDES.

1. D'un point donné, à vn autre point mener vne ligne droicte.
2. Continuer infiniment vne ligne droicte donnee & terminee.
3. Descrire vn cercle de quelque centre & interual que ce soit.

Euclide ne se sert en ces Elemēs cy que de 2. sortes de lignes simples, sçauoir est de la droicte, & de la circulaire; la descri-

ption desquelles estant fort facile, il demande qu'il luy soit permis de décrire ou de s'imaginer des lignes droictes de telle longueur qu'il vouldra: Pareillement des cercles de tel diamètre qu'il vouldra, sans qu'il soit contrainct de démonstrer que cela est possible.

COMMUNES SENTENCES.

1. Les choses egales à vne mesme, sont egales entr'elles.
2. Si a choses egales, on adioust choses egales, les toutz sont egaux.
3. Si de choses egales, on oste choses egales, les restes sont egaux.
4. Si a choses inegales, on adioust choses egales, les tous sont inegaux.
5. Si de choses inegales, on oste choses egales, les restes sont inegaux.
6. Les choses doubles d'une autre sont egales entre elles.
7. Les choses qui sont moitez d'une mesme ou de choses egales, sont egales entr'elles.

Est aussi manifeste que les choses triples d'une mesme, ou quadruple, ou quintuple, &c. sont aussi egales entr'elles. Pareillement que les choses qui sont tierces parties d'une mesme, ou quart, &c. sont aussi egales entr'elles.

- 8 Les choses qui conuiennent entr'elles, sont egales entr'elles.

C'est adire, que deux grandeurs seront egales, si estant posees l'une sur l'autre, l'une n'excede l'autre, mais toutes deux ensemble s'adiustent entr'elles, comme deux lignes droictes, seront dictes estre egales, si l'une estant posee sur

l'autre, celle qui est posée dessus s'ajuste à toute l'autre, tellement qu'elle ne l'excede, ny ne soit excédée d'icelle. Ainsi aussi deux angles rectilignes seront égaux, quand le sommet de l'un, étant posé sur le sommet de l'autre, l'un n'excede l'autre, c'est à dire que les lignes de l'un, tombent sur celles de l'autre; car par ainsi les inclinations des lignes seront égales. Ainsi aussi deux superficies seront égales, quand l'une étant posée sur l'autre, elle ne l'excede, ny n'est excédée par icelle, mais s'ajustent totalement entr'elles. Or Dounot dit que convenir, c'est avoir les extremités sur les extremités: ce qui n'est pas vray en toutes grandeurs; Car pour exemple une ligne droite peut bien avoir ses extremités sur les extremités d'une ligne courbe, laquelle neantmoins ne luy sera égale. Ainsi aussi une ligne courbe peut bien avoir ses extremités sur les extremités d'une autre ligne courbe, laquelle ne luy sera pas pourtāt égale. Or il est manifeste que de cest axiome on peut biē convertir & prédre pour principe, *que les lignes droites égales conviennent.* Pareillement, *Que les angles rectilignes égaux conviennent.* Semblablement, *Que les superficies planes égales & semblables conviennent.* On peut biē encore tirer quelques autres conuerses de cest axiome: mais de le vouloir convertir vniuersellement (comme quelques-uns) c'est se moquer, veu que si on trouue une ligne courbe égale à une droite, elles ne conviendront pas pourtant: & aussi qu'à tout angle rectiligne, il s'en peut bailler un curviligne égal; lesquels neantmoins ne conviendront iamais: voire mesme faire un quarré égal à un triangle, ou à quelconque autre figure rectiligne; lesquels pourtant ne peuvent iamais convenir. Ce qu'a bien reconnu Dounot en cest endroit, & neantmoins il convertit vniuersellement ce principe au scholie de la 4. p. 1. concluant ainsi: *Car c'est une nécessité geometrique que les choses égales conviennent, & que celles qui conviennent soient égales.*

9. Le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous les angles droicts sont égaux entre-eux.

De ce principe, nous pouvons convertir & prendre pour maxime, que tout angle rectiligne égal à un angle droict, est aussi droict.

11. Si une ligne droicte tombant sur deux

10

deux autres lignes droictes ; faict les angles interieurs d'un mesme costé plus petits que deux droicts , icelles estant continuees à l'infini , se rencontreront du costé ou les angles sont plus petits que deux droicts.

12. Deux lignes droictes n'enferment pas un espace.



E L E M E N T

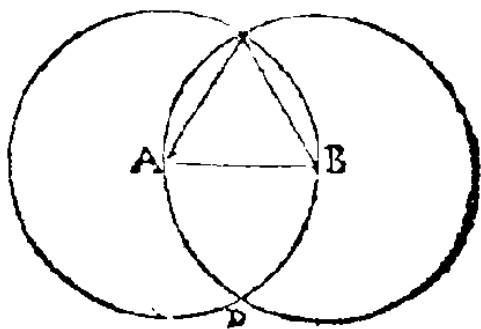
P R E M I E R.

P R O B L. I. P R O P. I.

Sur vne ligne droite donnee & terminee, de-
crire vn triangle equilateral.

SOIT la ligne droicte donnee AB; sur laquelle il faut faire
vn triangle equilateral.

Du centre A, & de l'intervalle de AB, soit descript le cer-
cle BCD: Item du centre B, &
de l'intervalle de la mesme AB,
soit descript vn autre cercle ACD
coupant le premier es poinçts
C & D, de l'un desquels, sçavoir
de C, soient menees les deux li-
gnes droictes CA & CB. Je dis
que le triangle ABC cõstruit sur
la ligne droicte donnee AB est equilateral.

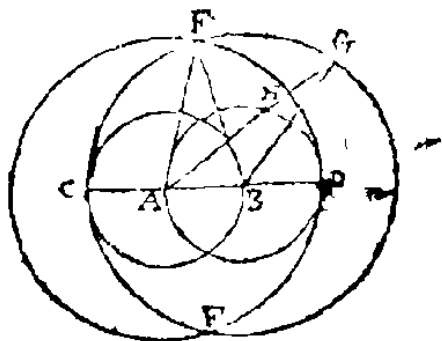


Car le costé AC est egal au costé AB par la 15. deff. d'au-
tant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circon-
ference: & par la mesme raison, le costé BA est egal au costé
BC. Donc par la 1. com. sent. les costez CA & CB seront
egaux, estant chacun egal à AB: & partant le triagle ABC des-
crit sur AB est equilateral; qui est ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

*Quelques Interpretes ont icy enseigné à descrire aussi sur vne li-
gne droicte donnee vn triangle Isoscelle, & vn Scalene, ce que nous
ferons aussi en ceste maniere. Soit vne ligne droicte donnee AB, à
l'entour de laquelle des centres A & B, soient descripts deux cercles,
ainsi que dessus. En apres soit prolongee icelle AB, de part & d'au-
tre vers les circonferences iusques en C & D: puis du centre A, &*

internale AD , soit décrit le cercle DEF : Item du centre B , & internele BC , le cercle CEF , couppant le premier es poinçts E & F , de l'un ou l'autre desquels, qui est de E , soient menez aux poinçts A & B , les deux lignes AE , EB . Je dis que le triangle AEB , fait sur la ligne donnee



AB , est Isofcelle, qui est que les deux costez AE , EB , sont egaux entr'eux, & plus grands que AB . Car d'autant que par la 15. def. AE est egal à la ligne AD , & icelle AD est double de AB , d'autant que BA , DB sont egales entr'elles: aussi AE sera double de AB . Derochef parce que BE est egal à BC , & icelle BC est double de AB , aussi BE sera double d'icelle AB . Veu donc que l'un & l'autre costé AE , BE est double de la mesme AB , ils seront egaux entr'eux par la 6. com. sent. & partant plus grande que la ligne AB . Donc le triangle AEB est Isofcelle. Maintenant si du poinçt A , on tire la ligne droite AG à la circonferençe EGF , qui ne soit la mesme que AE ou AD , couppant la circonferençe EHD en H , & de G on mène à B la ligne droite GB , sera constitué le triangle AGB sur la ligne AB , lequel ie dis estre scalene. Car par la 15. def. tant AH , AD que BG , BC sont egales. Mais AD , BC sont doubles de AB , d'icelle seront aussi doubles AH , BG , & partant plus grandes qu'icelle AB . Veu donc que AG est plus grande que AH , ou que BG , le triangle AGB sera scalene.

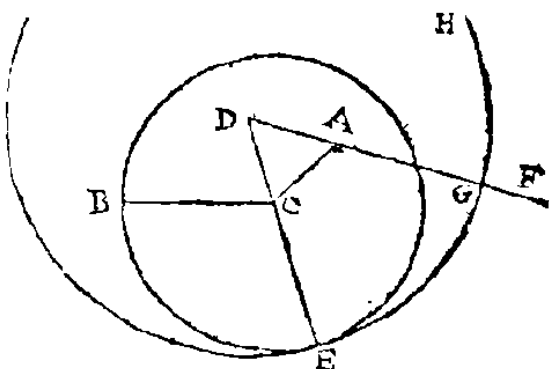
PROB. 2. PROP. II.

D'un poinçt donné, mener vne ligne droite egalle à vne ligne droite donnee.

Soit le poinçt donné A , & la ligne droite donnee BC , & il faut du poinçt A , mener vne ligne droite egalle a icelle donnee BC .

De l'un ou l'autre extreme de la ligne donnee BC , sçavoir est de C , comme centre, & de l'interval de CB , soit décrit le cercle BE : puis du poinçt donné A , au centre C , soit menee la ligne droite AC (sinon que le poinçt A fut donné en la ligne BC , par la precedente prop. soit décrit le triangle equilateral ADQ & soit continué le costé DE , iusques à ce qu'il ren-

contre la circonference en E, mais le costé D A tant qu'on voudra en F. En apres du centre D, & de l'interval de la ligne droicte DE, soit descript le cercle EGH coupant la ligne DF. Je dis que la ligne A G qui est menee du point donné A, est egale a la ligne droicte donnee BC.

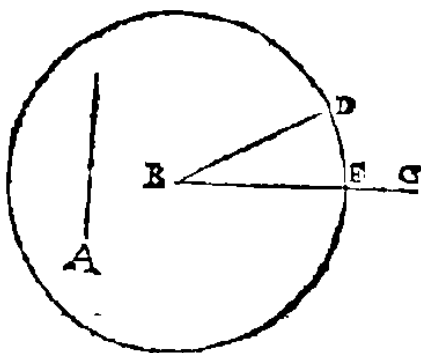


Car DG & DE sont egales, d'autant qu'elles procedēt de mesme centre vers vne mesme circonference, desquelles si on oste D A & D C qui sont egales, estant D A C triangle equilateral, les restes CE & AG seront egales par la 3. com. sent. Mais CB est egale a CE, parce qu'elle procede de mesme centre vers mesme circonference. Donc AG sera egale a CB, parce que les choses egales a vne sont egales entre elles. Nous auons donc du point donné A mené la ligne AG egale a la ligne droicte donnee BC. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 3. PROP. III.

Deux lignes droictes inegales estants donnees, oster de la plus grande, vne ligne droicte egale à la plus petite.

Soient les deux lignes inegales A & BC, desquelles BC est la plus grande: & d'icelle il faut oster vne ligne egale à A. A l'un ou l'autre des extremes de la plus grande ligne BC, scauoir est au point B, soit posce par la precedente prop. la ligne BD egale à la moindre A: puis du centre B, & de l'interval BD soit descript vn cercle coupant BC en E. Je dis que la ligne BE est egale à A. Car d'autant que par la 15. des lignes BD, BE sont egales, & par la constructiō BD est egale à A; par la 1. com. sent. BE sera egale à A. Nous auons donc osté de BC, la ligne BE egale à A, ainsi qu'il falloit faire.

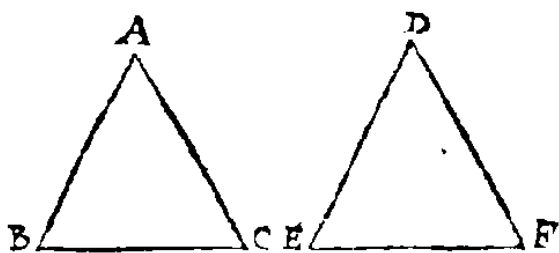


Ceste construction a esté retenuë par tous les Interpretes d'Euclide, excepté Dounot qui l'a chāgée: car à l'extreme de la moindre ligne, il en pose une egale à la plus grande; quoy faisant il aduient que d'icelle plus grande ligne donnee, il n'en coupe pas une egale à la moindre, comme est requis, ains seulement d'une egale à icelle.

THEOREME I. PROP. III.

Si deux triāgles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien; & l'angle contenu d'iceux, egal à l'angle: la base sera egale à la base; & les autres angles, egaux aux autres angles chacun au sien; & le triangle egal au triangle.

Soient les deux triangles ABC & DEF, desquels le costé AB soit egal au costé DE, & AC à DF, & l'angle A egal à l'angle D: Je dis que la base BC sera egale à la base EF, & l'angle B egal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F, & le triangle au triangle.

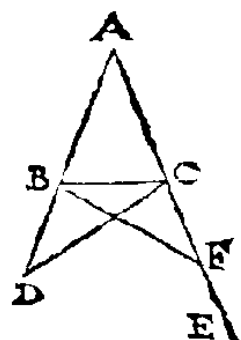


Qu'il ne soit ainsi: si on entend le point D estre posé sur le point A, & que DE tombe sur AB, aussi DF tombera sur AC, autrement l'angle A ne seroit pas egal à l'angle D. Et d'autant que les costez AB & AC sont egaux aux costez DE & DF, chacun au sien, ils conuiendront par la 8. com. sent. conuertie, & partant les extremittez B & C, tomberont sur les extremittez E & F. Ainsi les deux bases BC & EF cōuendront, & seront egales par la mesme 8. com. sent. Et le triangle conuiendra avec le triangle, & l'angle B conuiendra avec l'angle E, & l'angle C avec l'angle F: partant egaux. Ce qu'il falloit demonstret.

THEO. 2. PROP. V.

Les triangles Iſoſceles, ont les angles ſur la baſe egaux : & les coſtez egaux eſtans continuez, les angles extérieurs ſoubs la baſe, ſont egaux.

Soit le triangle Iſoſcele ABC. Je diſ que les angles ABC, & ACB, ſur la baſe BC, ſont egaux.



Qu'il ne ſoit ainſi. Soient prolongez AB & AC, coſtez egaux iuſques en D & E : & ſoit fait AF egalle à AD par la 3. p. 1. & ſoient menees les lignes BF & CD. Les deux triangles ADC, & AFB, ayans l'angle A commun, ont les deux coſtez AD & AC egaux aux deux coſtez AF & AB, chacun au ſien ; & par la 4. p. 1. la baſe BF ſera egalle à la baſe CD, & l'angle ABF egal à l'angle ACD, & l'angle D egal à l'angle F. Item les triangles DCB, & FCB, ayant l'angle D egal à l'angle F, & les deux coſtez DB, & DC egaux aux deux coſtez CF & FB. (car BF a eſté prouvé tantôt egal à DC ; & AD AF eſtans egaux ; & AB, AC auſſi egaux ; les reſtes BD, & CF ſeront auſſi egaux) par la 4. p. 1. la baſe ſera egale à la baſe, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au ſien : ſçavoir l'angle BCD, ſera egal à l'angle CBF. Et qui des angles egaux ABF & ACE, oſte les angles egaux CBF ; & BCD ; les demeurans ABC, & ACB, ſeront egaux.

Pour la ſeconde partie. Que les coſtez egaux AB & AC eſtans continuez, les angles extérieurs ſoubs la baſe BC, ſont egaux, ſçavoir DBC à BCF, elle à eſté ſuffiſamment démontrée, lors qu'on a prouvé que les triangles DBC, & CFB, avoient leurs angles egaux, chacun au ſien.

S C H O L I E.

Ceſte propoſition eſt auſſi vraie es triangles equilateraux. Car les deux coſtez AB, AC du triangle ABC eſtans egaux entr'eux, ou

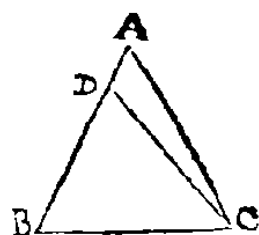
L'autre costé CB, est pareillement egal à iceux, comme il aduient au triangle equilateral; ou bien inegal, comme il arrive au triangle Iso-scelle; Il s'ensuit necessairement, que les angles de dessus la base EC, sont egaux entr'eux, & ceux de dessous la mesme base aussi egaux entr'eux, comme il apert par la demonstration cy dessus.

THEO. 3. PROP. VI.

Si vn triangle a deux angles egaux entr'eux;
les costez feustendans iceux angles seront
aussi egaux entr'eux.

Soit le triangle ABC, duquel les deux angles ABC, & ACB sur la base BC sont egaux. Je dis que les deux costez AB & AC sont aussi egaux.

Autrement soit AB plus grand que AC, s'il est possible: on en pourra donc retrancher vne partie egalle a AC par la 3. p. 1. soit icelle BD egalle a AC, & soit menée la ligne DC: ainsi les triangles DBC, & ACB, ont les deux costez BD, & BC egaux aux deux costez AC, & CB, & l'angle B egal a l'angle ACB, & par la 4. p. 1. ils seront egaux, ce qui est impossible: car l'un est partie de l'autre. Donc les costez AB, & AC n'estoient pas inegaux: ce qu'il falloit demonstrier.

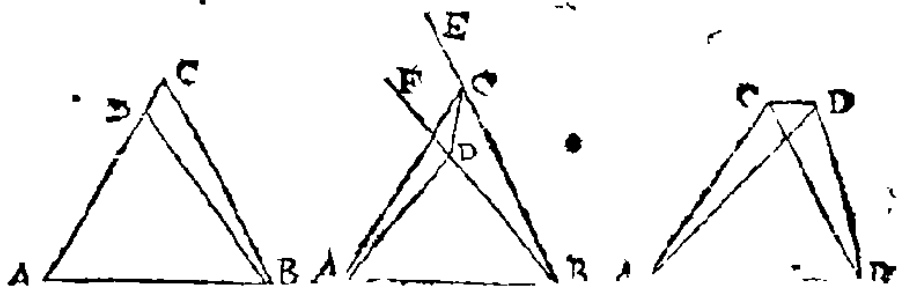


THEOR. 4. PROP. VII.

Si des extremittez de quelque ligne droicte, on
meine deux autres lignes droictes, se
rencontrant en vn poinct; des mesmes ex-
tremités on n'en pourra mener deux au-
tres egales à icelles, chacune à la sienne, &
de mesme part, se rencontrant à vn autre
poinct.

Soit la

Soit la ligne AB , des extremittez de laquelle soient me-



nees les deux lignes droictes AC , & BC se rencontrant au point C . Je dis que des mesmes extremittez A & B , & de la mesme part que C , on ne peut mener deux autres lignes droictes egales a icelles AC , BC , chacune a la siene, qui se rencôtrant a vn autre point que C ; c'est a dire, que si de l'extremite A on mene la ligne AD egalé a AC , & de l'extremite B , la ligne BD egalé a BC , il ne peut estre que le point de rencontre D , soit autre que le point de rencontre C .

Car si faire se peut que le point de rencontre D tombe ailleurs qu'au point C : ou iceluy point D tombera sur l'une ou l'autre des lignes AC , BC ; ou dans le triangle ACB ; ou hors iceluy.

Premierement iceluy point de rencontre D , ne peut estre sur la ligne AC : car il faudroit que les deux lignes AD , & AC fussent egales entr'elles, sçavoir est la partie autour: ce qui est absurde; partant la rencontre D , ne se fera point sur AC ; ny sur BC a cause de la mesme absurdité.

Soit donc iceluy point de rencontre D dans le triangle ABC : & apres auoir prolongé BC iusques en E , & BD iusques en F , soit menee CD . Puis que les deux lignes AC , & AD sont posées egales, le triangle ACD sera Isoscele, & par la 5. p. 1. les deux angles ACD & ADC sur la base CD seront egaux. Mais l'angle ACD est moindre que l'angle DCE : (car il n'est que partie d'iceluy) donc l'angle ADC est aussi moindre que le mesme angle DCE ; & par consequent l'angle CDF , qui n'est que partie d'iceluy ADC , sera beaucoup moindre que le mesme angle DCE . Derechef puis que les lignes BC , BD , sont posées esgales, le triangle BCD doit estre Isoscele; & partant les angles CDF & DCE sous la base DC seront egaux par la 5. p. 1. Mais il a esté demonsté que l'angle CDF est beaucoup moindre que l'angle DCE : donc le mesme angle CDF est moindre que l'angle DCE , & aussi egal a iceluy: ce qui est absurde.

Soit donc finalement iceluy point de rencontre D , hors iceluy triangle ACB , comme en la 3. figure: apres auoir mené la ligne CD , il s'ensuira que les deux triangles ADC & BCD

seront Iſoſceles ; & partant qu'ils feront les angles ſur la baſe CD egaux : ſçavoir eſt $\angle ACD$ à $\angle ADC$ & $\angle BCD$ à $\angle BDC$. Mais iceluy $\angle D$ eſt plus grand que $\angle ADC$: donc auſſi $\angle B$ eſt plus grand que $\angle ACD$; c'eſt à dire la partie que le tout : ce qui eſt abſurde. Le poinct de rencontre D ne tombera donc pas hors le triangle ABC , ny dedans iceluy, ny ſur les lignes AC & BC : Il faut donc qu'iceluy poinct de rencontre D tombe au premier poinct de rencontre C : ce qu'il falloit demonſtrer.

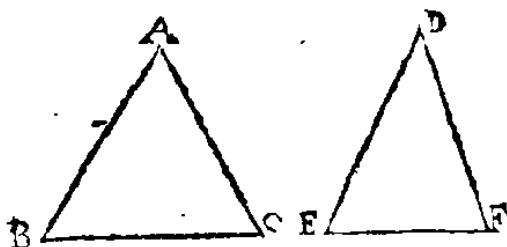
S C H O L I E.

Dounot a traduit ceſte propoſition ainſi. Si deux lignes droictes menees des extremittez d'une autre ligne droite ſe rencontrent en un poinct, & des meſmes extremittez on en meine deux autres egales aux deux premieres, elles ſe rencontreront au meſme poinct, pourueu que chacune ſoit du coſté de ſon egale. Ce qui eſt fort eſloigné de l'intention d'Euclide - car il ne dit pas que les deux lignes ſe rencontreront, choſe qui eſt euidentement faulſe, veu qu'infinies lignes peuvent eſtre menees, cōme dit eſt, leſquelles ne ſe récontreront pas. Mais bien que ſi elles ſe rencontrent, ce ſera au meſme poinct que les premieres.

THEOR. 5. PROPOS. VIII.

Si deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chaſcun au ſien, & la baſe egale à la baſe, ils auront auſſi l'angle egal, compris d'iceux coſtez egaux.

Soient deux triangles ABC , DEF , deſquels le coſté AB eſt egal à DE , AC à DF , & la baſe BC à la baſe EF . Je diſ que les angles A & D compris d'iceux coſtez egaux, ſont egaux.



Car puis que la baſe BC eſt egale à la baſe EF ; ſi on entend icelles eſtre poſees l'une ſur l'autre, elles conuiendront tombant le poinct E ſur le poinct B ; & F ſur C : & par la 7. p. 1. les deux lignes ED & FD , qui ſont egales à BA & CA , ſe ren-

contreront au poinct A, & conuiendront avec les lignes BA & CA: partant conuiendront aussi les angles A & D cōtenus d'icelles lignes; & par consequent seront egaux par la 8. com. sent. ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E.

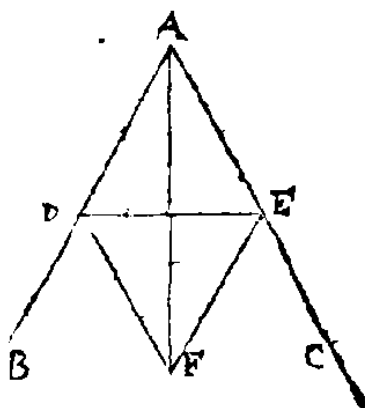
Puis que la base EF conuiert avec la base BC & les costez DE, DF conuiennent aussi avec les costez AB, AC. Il s'ensuit que non seulement l'angle A est egal à l'angle D; mais qu'also l'angle E est egal à l'angle B, & l'angle F, egal à l'angle C, & tout le triangle egal à tout le triangle.

P R O B L. 4. P R O P O S. IX.

Cōper en deux egallement vn angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné BAC, lequel il faut couper en deux egallement; c'est à dire en deux angles egaux entr'eux.

Soit de AB, & AC retranché deux parties egales AD & AE: & apres auoir mené la ligne DE, sur icelle, soit desceint le triagle equilateral DEF par la 1. p. 1. & soit mence la ligne AF. Je dis que icelle ligne coupe l'angle BAC en deux egallement.



Car les deux lignes AD & AE du triagle DAE estans egales aux deux lignes AE & AF du triangle EAF, & la base DF esgale à la base EF (estant DFE triangle equilateral) par la 8. p. 1. l'angle DAF sera egal à l'angle EAF: & partant l'angle BAC est couppe en deux egallement. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Nous auons enseigné la prat. que de ceste propo. En nostre Geometrie pratique Prob 5. Or il apert parce que dessus qu'on peut aussi couper vn angle rectiligne en 4. parties egales, en 8. en 16. en 32. & ainsi consecutiuement en procedant tousiours par augmentation double.

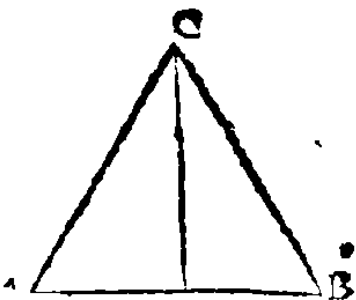
Car après qu'un angle rectiligne est coupé en deux également, si on diuise derechef chaque partie en deux également, on aura 4. angles egaux. Que si on coupe derechef chacun d'eux en deux également, nous aurons 8. angles egaux, & ainsi consequemment.

PROBL. 5. PROP. X.

Couper en deux également vne ligne droite donnee & terminee.

Soit la ligne droite dōnee & terminee AB :laquelle il faut couper en deux également.

Soit sur icelle ligne construit le triangle equilateral ACB par la 1. p. 1. & par la precedente prop. soit l'angle C coupé en deux également par la ligne CD. Je dis que CD coupe AB en deux également en D.



Car puis que les angles du point C sont egaux, & le triangle ACB est equilateral, les deux triangles ACD, & BCD, ont deux costez egaux à deux costez, & vn angle egal à vn angle; & partant par la 4. p. 1. la base AD sera egalle à la base DB. Donc AB est coupee en deux également en D. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

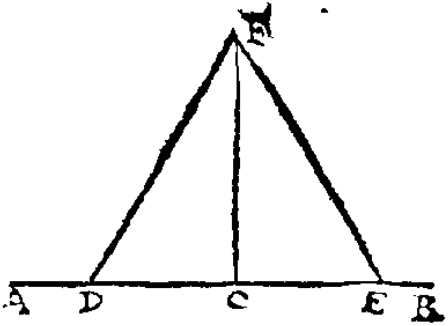
Nous auons enseigné la pratique de ceste propo. en nostre Geometrie pratique Prob. 1. Or il apert par ce que dessus qu'on peut aussi couper vne ligne droite finie en quatre parties egales, en 8. en 16. en 32. &c. ainsi que nous auons dit en la precedente prop. de la diuision de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diuiser vne ligne droite terminee en tant de parties egales qu'on voudra, nous l'auons enseigné en nostre Geometrie pratique Prob. 7. & ce tant Geometriquement, que mechaniquement avec le compas de proportion.

PROBL. 6. PROP. XI.

Sur vne ligne droite dōnee, & d'un point en icelle, mener vne ligne perpendiculaire.

Soit la ligne droite donnée AB, & le point en icelle C : d'iceluy point il faut mener vne ligne perpendiculaire à icelle AB.

Soient du point C prises les deux lignes egales CD & CE par la 3. p. 1. & sur DE soit fait le triangle equilateral DFE, & de C à F soit menee la ligne CF. Je dis qu'icelle CF est la ligne perpendiculaire demandee.



Car les triangles DFC & CFE ayans deux costez egaux à deux costez, chascun au sien, sçauoir DC à CE par la construction, & CF commun, & la base DF egale à la base EF, à cause que le triangle DFE est equilateral; par la 8. p. 1. les angles au point C, contenus de costez egaux, seront egaux: & partant par la 10. d. ils sont dits droicts, & la ligne CF perpendiculaire à AB.

S C H O L I E.

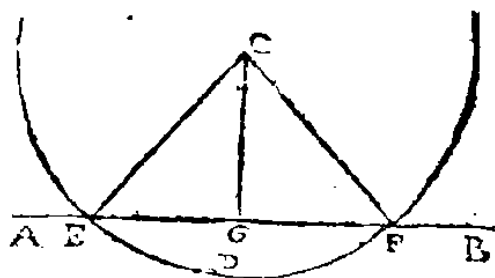
La pratique, tant de ceste propo. que de la suivante est enseignée en nostre Geometrie pratique, Prob. 2. & 3. ou l'apprenty trouuera soulagement à quelque doute qui luy peuuent arriuer en la pratique de ceste propo.

PROBL. 7. PROP. XII.

Abaisser vne ligne droite perpendiculaire sur vne ligne droite infinie, & d'un point hors icelle.

Soit la ligne droite donnee & interminée AB, & le point hors icelle C, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire sur AB.

Soit pris au delà de la ligne AB quelconque point D; puis du centre C, & intervalle CD, soit descrit le cercle EDF, coq



pant la ligne AB és points E & F ; puis par la 10. p. r. soit coupée EF en deux également au point G , & soit menée la ligne CG, laquelle ie dis estre perpendiculaire à AB.

Car estans tirees les lignes droictes CE , CF ; les deux costez EG & GC du triangle EGC seront egaux aux deux costez FG, & GC du triangle FGC, vn chacun au sien , & la base CE est egale à la base CF, estans icelles tirees du centre C vers la circonference , & par la 8. p. r. les angles du point G seront egaux ; & partant par la 10. d. ils seront droicts, & la ligne CG perpendiculaire à AB : ce qu'il falloit faire.

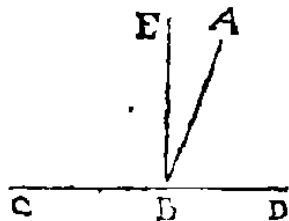
S C H O L I E.

Au lieu de prendre le point D, de l'autre costé de la ligne AB, Donnott dit qu'on le prenne à l'aduenture dans icelle AB, & que descrivant un cer. le du centre C & interuale CD, il coupera la ligne AB: ce qui n'est pas vniuersellement vray, car il est manifeste que si le point D estoit pris d'auanture en G, le cercle ne couperoit AB en deux endroits, comme il est necessaire, ains la toucheroit seulement: le point D ne doit donc estre pris à l'auanture dans la ligne AB, comme veut Donnott.

THEOR. 6. PROPOS. XIII.

Quand vne ligne droite tombant sur-vne autre ligne droite fait deux angles , ou iceux seront droicts, ou egaux à deux droicts.

Soit la ligne droite AB, laquelle tombant sur vne autre ligne droite CD, faict les deux angles CBA, & DBA. Ie dis que iceux angles sont droicts, ou egaux à deux droicts.

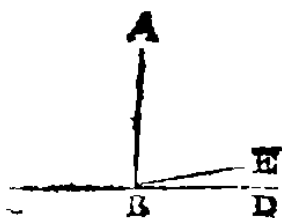


Car ou icelle ligne AB est perpendiculaire à CD, ou elle ne l'est pas. Si elle est perpendiculaire, les angles sont droicts: Si elle ne l'est pas, soit leuée la perpendiculaire BE par le 11. p. r. & les deux angles CBE & DBE seront droicts : mais les deux angles CBA & DBA ensemble occupent autant d'espace qu'iceux CBE, DBE, & conuenient avec eux : Donc par la 8. com. sent. CBA & DBA seront egaux à deux droicts.

THEOR. 7. PROPOS. XIII.

Si à l'extrémité d'une ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites de part & d'autre d'icelle faisant deux angles égaux à deux droits, icelles lignes se rencontreront directement.

Soit la ligne AB, à l'extrémité de laquelle B se rencontrēt deux autres lignes droites CB, & DB, faisant les deux angles ABC & ABD égaux à deux droits. Je dis que CB, & DB se rencontrent directement, c'est à dire que CBD est une ligne droite.



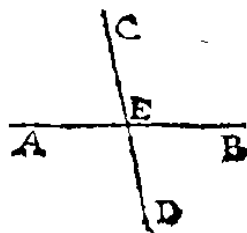
Autrement si CBD n'est ligne droite, soit continuée CB directement, tant qu'il sera de besoin : ce qui sera adjoûté à CB directement, ou bien tombera au dessous de BD, ou au dessus; soit au dessus, & soit CBE, ligne droite ; les deux angles ABC, & ABE, seront donc égaux à deux droits par la 13. p. 1. & les deux ABC & ABD sont aussi égaux à deux droits, & par la 1. com. sent. ils seront égaux aux deux ABC, & ABE, c'est à sçavoir que ABD & ABE seront égaux, le tout à la partie, ce qui est impossible : donc CB, & DB se rencontrent directement.

THEOR. 8. PROPOS. XV.

Si deux lignes droites se coupent l'une l'autre, elles feront les angles opposés au sommet égaux.

Soient les deux lignes AB, & CD, se coupant l'une l'autre au point E. Je dis que les angles opposés au sommet AEC, & DEB sont égaux.

Car d'autant que sur AB tombe la ligne CE, les angles AEC, & BEC, sont égaux à



deux droicts par la 13. p. 1. Item pour la mesme raison CEB & DEB seront egaux à deux droicts : partant les deux AEC & CEB, sont egaux aux deux CEB & DEB. Que si on oste le commun CEB, le demeurant AEC sera egal au demeurant DEB. Le mesme se peut dire des deux AED & CEB.

COROLLAIRE.

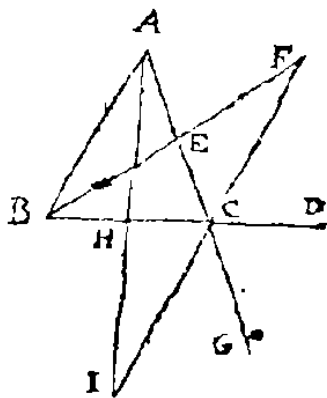
*Il s'enfuit de ceste demonstration, que deux lignes droictes s'en-
tre-couppant, font au poinct de leur section quatre angles egaux à
quatre angles droicts. Est aussi manifeste qu'estans constituez tant
d'angles qu'on voudra alentour d'un seul & mesme point, qu'ils
seront seulement egaux à quatre angles droicts : car si de E on mè-
ne tant d'autres lignes qu'on voudra, elles diuiseront seulement les
quatre angles constitués au poinct E, en plusieurs parties : toutes les-
quelles prinſes ensemble seront egales aux quatre angles d'iceluy
poinct, c'est à dire à quatre droicts.*

THEOR. 9. PROP. XVI.

Vn costé d'un triangle estant prolongé, l'an-
gle exterieur est plus grand que l'un ou
l'autre des opposez interieurement.

Soit le triangle ABC, duquel le costé
BC soit continué iusques en D. Je dis
que l'angle exterieur ACD est plus grand
que l'opposé interieur BAC ; ou que
ABC autre opposé interieur.

Qu'ainsi ne soit. Apres auoir couppé
AC en deux également en E, soit menée
la ligne BE continuee iusques en F, &
soient faictes BE & EF egalles, & soit
menée FC. Les deux triangles AEB &
CEF auront les deux costez AE & EB egaux aux deux costez
CE & EF, par la construction, & par la precedente prop. l'an-
gle AEB. est egal à l'angle CEF : donc par la 4. p. 1. les bases
AB, & FC seront egalles, & les autres angles egaux, chacun
au sien : & partant l'angle BAE, sera egal à l'angle ECF,
qui n'est que partie de l'angle ACD, lequel pour ceste raison



sera plus grand que l'opposé BAC. Que si le costé AC est prolongé en G, & BC couppé en deux également en H, & on tire la ligne AH, tellement que HI soit égalé à AH, & soit menée CI. On démontrera par mesme raison que dessus, que l'angle externe BCG est plus grand que l'interne & opposé ABC. Mais par la prop. precedente a iceluy BCG est egal l'externe ACD: donc iceluy ACD est aussi grand que l'interne & opposé ABC.

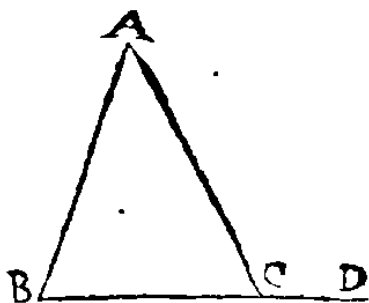
THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droits, de quelle façon qu'ils soient pris.

Soit le triangle ABC. Je dis que les deux angles B, & ACB sont plus petits que deux droicts.

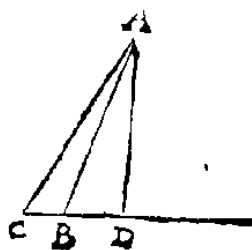
Car apres avoir continué le costé BC iusques en D; Il est euident par la 16.p.1. que l'angle extérieur ACD, est plus grand que l'opposé intérieur B.

Mais les deux ACD & BCA sont egaux à deux droicts, par la 16.p.1. Partant ABC & BCA sont plus petits que deux droicts. On démontrera pareillement que les angles A & ACB: Item les angles A & B, en prolongeant vn autre costé, sont moindres que deux droicts.



C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste que d'un mesme point on ne peut mener plus d'une ligne perpendiculaire sur une ligne droicte. Car si faire se peut, soient menees de A sur la ligne droicte BD, deux perpendicul. AD, AB. Donc au triangle ABD, les deux angles internes ABD, ADB seröt egaux à deux droicts, puis qu'ils sont droicts. Ce qui est impossible: Car il a esté démontré cy dessus que deux angles d'un triangle sont moindres que deux angles droicts.



Il s'ensuit aussi de ceste prop. qu'en tout triangle, duquel un angle est droit, ou obtus, que les autres sont aigus. Car puis qu'il a esté démontré que deux angles quels qu'ils soient sont moindres que deux droicts, il est nécessaire que s'il y en a un droict, ou obtus, celui qu'on voudra des deux autres soit aigu : car autrement en un triangle se- roient deux angles droicts, ou plus grands que deux droicts.

S'ensuit encore de ceste prop. que si une ligne droicte AB, fait avec une autre ligne droicte CD, angles inegaux, sçavoir est ABD aigu, & ABC obtus, & de quelconque point d'icelle AB, on tire une perpendiculaire sur CD, comme AD : icelle perpendiculaire AD tombera du costé de l'angle aigu ABD. Car qu'elle tombe, s'il est possible du costé de l'angle obtus ABC. Donc au triangle ABC, les deux angles ABC, ACB obtus & droict, sont plus grands que deux droicts ; mais aussi moindres que deux droicts par ceste prop. ce qui est absurde. La perpendiculaire tirée de A ne tombera donc pas du costé de l'angle obtus : & partant tombera du costé de l'angle aigu.

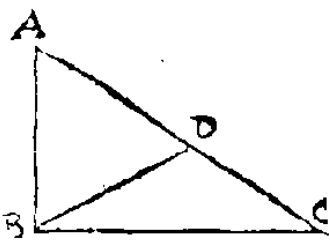
Est encore manifeste par ceste prop. que tous les angles d'un triangle equilateral, & les deux angles de dessus la base d'un triangle Isocele, sont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils soient d'un triangle equilateral, & les deux de dessus la base d'un Isocele sont egaux entr'eux par la 5. p. 1. & tant ces deux cy ensemble, que ces deux là, sont moindres que deux droicts par ceste prop. chacun d'iceux sera moindre qu'un droict, c'est à dire aigu : car s'il estoit droit ou obtus, tous les deux ensemble seroient, ou egaux à deux droicts, ou plus grands.

THEOR. II. PROP. XVIII.

De tout triangle le plus grand costé soustient le plus grand angle.

Soit le triangle donné ABC, duquel le costé AC est plus grand que le costé AB. Je dis que l'angle ABC est plus grand que l'angle ACB.

Qu'il ne soit ainsi. Puis que AC est plus grand que AB, soit d'iceluy retranché AD egal à AB. & soit mené BD. Le triangle ABD est Isocele, & par la 5. p. 1. les deux angles ABD & ADB sur la base BD seront egaux. Or l'angle extérieur ADB est plus grand que l'opposé intérieur C, par la 16. p. 1. Mais ABC étant plus grand



que ABD, il sera aussi plus grand que son égal ADB: & à plus forte raison ABC sera plus grand que C. Par mesme raison si on pose le costé AC plus grand que le costé BC; on démontrera l'angle ABC estre plus grand que l'angle BAC; sçavoir est si de CA on coupe vne ligne égale à CB, &c. Parquoy le plus grand costé de tout triangle, soutient le plus grand angle: ce qu'il falloit démontrer.

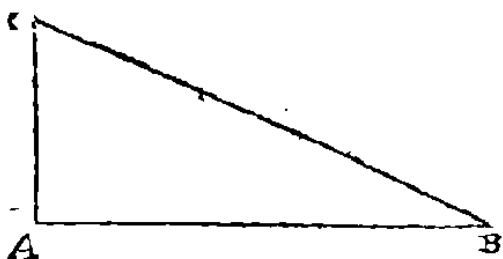
C O R O L L A I R E.

Il est donc manifeste par ceste demonstration que tous les trois angles d'un triangle scalene sont inegaux.

THEOR. 12. PROPOS. XIX.

En tout triangle le plus grand angle est soutenu du plus grand costé.

Soit le triangle ABC duquel l'angle A est plus grand que l'angle C. Je dis que le costé BC qui soutient le plus grand angle A, est plus grand que le costé AB; qui soutient vn moindre angle C.



Autrement il sera égal, ou plus petit. Il ne peut estre égal; d'autant que le triagle seroit Isocele, & par la 5. p.1. les deux angles A & C seroient égaux contre l'hypothese. Il ne peut aussi estre plus petit: d'aurat que par la 18. p.1. l'angle A seroit plus petit que l'angle C, qui est aussi contre l'hypothese. Il sera donc plus grand. Par mesme raison on prouuera le costé BC estre plus grand que le costé AC, si on pose l'angle A estre plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grand angle est soutenu du plus grand costé: ce qu'il falloit démontrer.

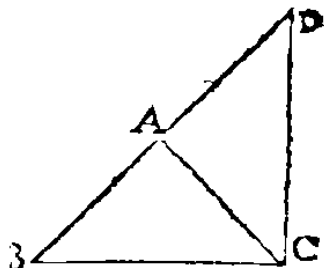
THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle deux costez, de quelle façon

qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisieme.

Soit le triangle ABC . Je dis que deux costez d'iceluy, lesquels on voudra, sçavoir est AB , & AC sont plus grâds ensemble que le troisieme BC .

Qu'il ne soit ainsi; apres avoir prolongé BA , iusques en D , & fait AD egal à AC , soit menee la ligne DC . Le triangle DAC sera Isoscelle, & par la 5. p. 1. les deux angles ADC & ACD sur la base DC , seront egaux. Mais DCB est plus grand que DCA : aussi sera il plus grand que son egal ADC ; & partât par la 19. p. 1. BD sera plus grâd costé que BC . Mais BD est egal aux deux costez AC & BA , d'oc Iceux AC & BA seront plus grands que BC . On demonstrera en la mesme maniere que deux autres costez sont plus grâds que l'autre. Parquoy deux costez d'un triangle pris en quelque sorte que ce soit, sont plus grands que l'autre: ce qu'il falloit demoustrer.

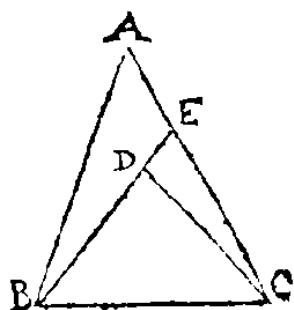


THEOR. 14. PROP: XXI.

Si des extremittez d'un costé dequelque triangle, on mene deux lignes droites se rencontrans au dedans d'iceluy; icelles seront plus petites que les deux autres costez du triangle, mais elles feront un plus grand angle.

Soit le triangle ABC , & des extremittez du costé BC , soient menees interieurement deux lignes BD , CD se rencontrans au point D . Je dis qu'icelles lignes sont plus petites que BA , & CA : Mais que l'angle D est plus grand que l'angle A .

Qu'ainsi ne soit: soit continuee BD iusques au point E . Donc par la 20. p. 1. les



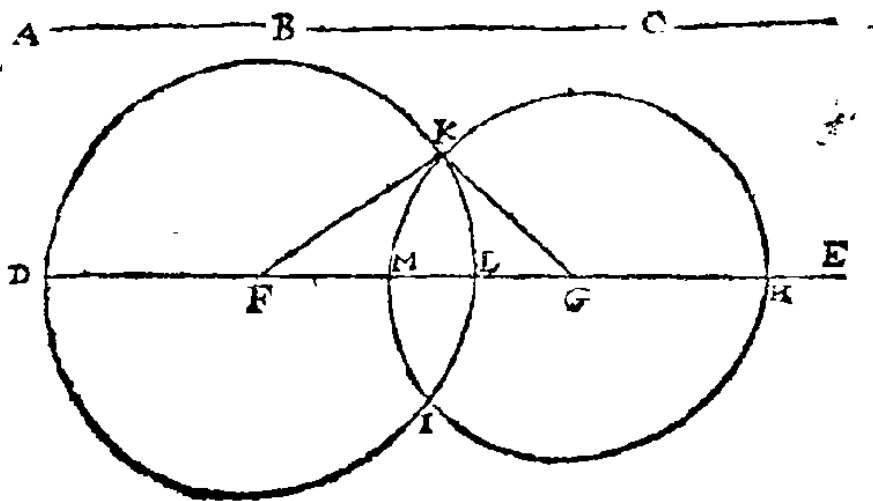
deux costez BA, & A E du triangle BAE, seront plus grands que le troisieme BE. Que si à BA, & A E, plus grands que BE, on adioust chose commune EC, les tous CE, EB seront tousiours plus petits que les tous CE, EA, AB; c'est à dire CA AB. Pareillement les deux costez CE & ED du triangle CED sont plus grands que le troisieme CD: ausquels si on adioust chose égale, sçauoir DB, les tous CE, ED, DB, ou CE, EB seront tousiours plus grands que les tous CD & DB. Mais il a esté démontré que CA, AB sont plus grands que CE, EB: donc CA, AB seront beaucoup plus grands que CD, BD. Ce qui estoit proposé en la premiere partie.

Pour la seconde partie, sçauoir que l'angle D est plus grand que l'angle A. D'autant qu'il est extérieur au triangle CED, il sera plus grand que son opposé interieurement CED par la 16. p. 1. Mais pour la mesme raison, iceluy angle CED est aussi plus grand que son opposé interieurement A: donc à plus forte raison D sera plus grand que A.

PROBL. 8. PROP. XXII.

Faire vn triangle de trois lignes droites, égales à trois autres donnees: mais il faut que deux d'icelles de qu'elle façon qu'elles soient prises, soient plus grandes que l'autre: D'autant que de tout triangle, les deux costez de quelque façon qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre.

Soient les
trois lignes
donnees A,
B & C, des-
quelles deux
de quelle fa-
çon qu'elles
soient prises
sont plus
grandes que



la troisieme. Il faut faire vn triangle d'icelles ou de trois autres egales à icelles.

Soit prise vne ligne droite, tant grande qu'il sera de besoin comme DE, de laquelle soit retranchée DF, egale à A, & du reste, FG egale à B, & GH egale à C; & soit décrit vn cercle du centre F, & interual FD. Item vn autre cercle du centre G, & interual GH, coupant le premier cercle au point K duquel soient menées les deux lignes KF, KG. Je dis que les costez du triangle FKG, sont egaux aux trois lignes donnees A, B, C.

Car FD, FK estans egales par la diff. du cercle: item GK & GH. Il est euident que les trois costez du triangle FKG, sont egaux aux trois lignes FD, FG, GH, lesquelles estans egales aux donnees, aussi les costez du triangle, seront egaux aux lignes donnees.

S C H O L I E.

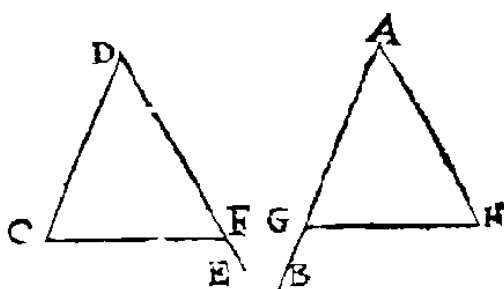
La pratique tant de ce prob. que du suivant est enseignee en nostre Geometrie pratique Prob. II. & 4.

PROBL. 9. PROPOS. XXIII.

Sur vne ligne droite donnee, & sur vn point donné en icelle, faire vn angle rectiligne egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnee AB: & le point en icelle A, sur lequel il faut faire vn angle rectiligne egal à l'angle rectiligne donné CDE.

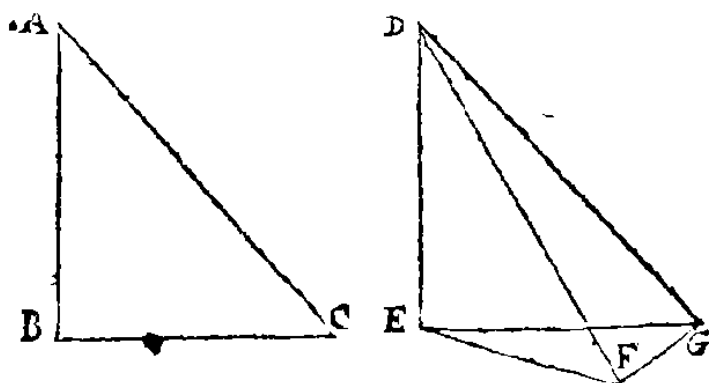
Ayant pris és lignes CD, DE quelsconques points C & F, soit menée la ligne CF, & sur AB, soit basti par la 22. p. 1. le triangle AGH, ayant les trois costez egaux aux trois costez du triangle CDF, sçauoir est les deux costez GA, HA, aux deux costez CD, FD, & la base GH à la base CF. Il est euident par la 8. p. 1. que l'angle A sera egal à l'angle D. donné.



THEOR. 15. PROPOS. XXIIII.

Si deux triângles ont deux costez egaux à deux costez, chascun au sien, & l'angle contenu d'iceux costez plus grand que l'angle, ils auront la base plus grande que la base.

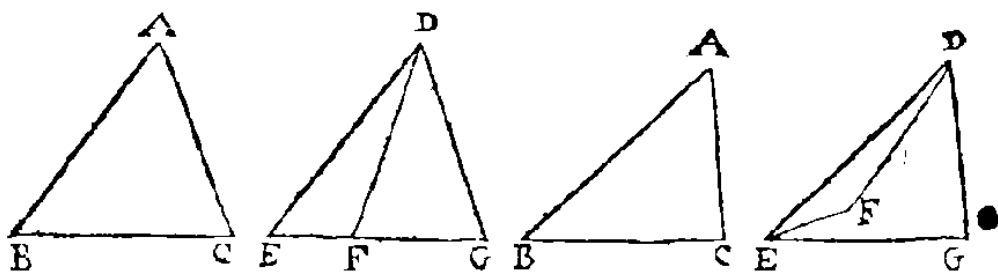
Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les deux co-



stez AB, AC, sont egaux aux deux costez DE, DF, chacun au sien; mais l'angle A est plus grand que l'angle EDF. Je dis que la base BC est plus grande que la base EF.

Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne DE, & au point D, soit fait par la precedente prop l'angle EDG egal à l'angle A; (& la ligne droite DG tombera hors le triangle DEF, puis que l'angle EDF a esté posé moindre que l'angle A) & soit posée DG, egale à DF, c'est à dire à AC: Soit tirée puis apres la ligne EG, laquelle tombera ou au dessus de la ligne EF; ou sur icelle; ou au dessous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au dessus de EF, & soit tirée la ligne FG. D'autant que les costez AB, AC, sont egaux aux costez DE, DG, vn chacun au sien, & l'angle A egal à l'angle EDG par la construction: la base BC sera egale à la base EG, par la 4 p. 1. Et puis que les deux costez DF, DG, sont egaux entr'eux: les angles DFG, DGF seront aussi egaux entr'eux par la 5. p. 1. Mais l'angle DGF est plus grand que l'angle EGF: donc aussi l'angle DFG sera plus grand que le mesme angle EGF: par quoy tout l'angle EFG sera beaucoup plus grand que le mesme angle EGF. Donc au triangle EFG, le costé EG sera plus grand que le costé EF par la 19. p. 1. Mais il a esté démontré que EG est egale à BC: donc BC sera aussi plus grande que EF: ce qui estoit proposé.

Maintenant que EG tombe sur icelle EF: d'autant que cō-



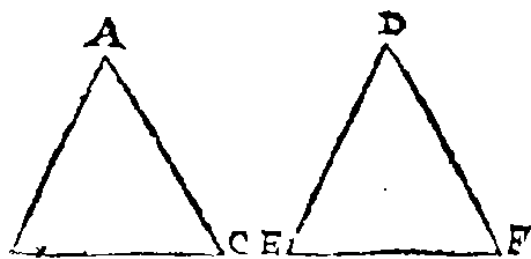
me dessus la base EG, sera egale à la base BC par la 4. p. 1. EG est plus grande que EF par la 9. com. sent. aussi BC est plus grande que EF: ce qui estoit proposé.

En troisieme lieu, que EG tombe au dessous de EF. Il est evident que les deux lignes interieures DF, EF sont plus petites que DG, EG, par la 21. p. 1. Mais par la construction DG est egale à DF: donc EG est plus grande que EF par la 5. com. sent. Mais comme dessus par la 4. p. 1. EG est egale à BC: donc aussi icelle BC sera plus grande que EF: ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triângles ont deux costez egaux à deux costez, chascun au sien, & la base plus grande que la base; ils auront aussi l'angle contenu d'iceux costez egaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les deux costez AB & AC sont egaux aux deux DE & DF chacun au sien, Mais la base BC est plus grande que la base EF. Je dis que l'angle A est plus grand que l'angle D.



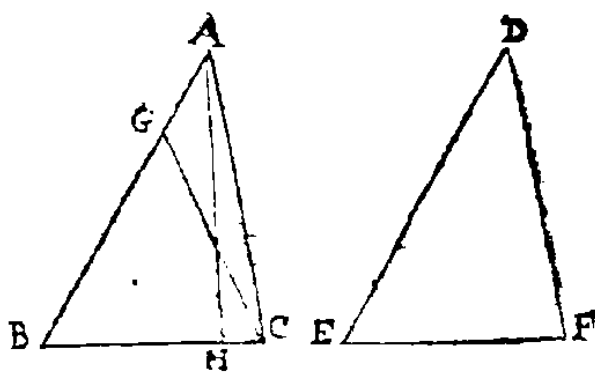
Autrement il sera egal ou plus petit. Mais il ne peut estre egal: d'autant que par la 4. p. 1. les bases BC & EF seroient egales contre l'hypotese. Pareillement il ne peut estre plus petit; d'autant que par la 24. p. 1. la base BC seroit plus petite que la base EF: donc il sera plus grand.

THEO

THEO. 17. PROP. XXVI.

Si deux triâgles ont deux angles egaux à deux angles, chascun au sien, & vn costé egal à vn costé, sçauoir est, ou celuy aux extremitez duquel sont les angles egaux ; ou bien celuy qui soustiët l'vn d'iceux angles egaux ; ils auront aussi les autres costez egaux aux autres costez, chacun au sien ; & l'autre angle egal à l'autre angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les angles B, & ACB sôt egaux aux deux E, & F chascun au sien, & soit premierement le costé BC, aux extremitez duquel sont les angles B, & ACB, egal au costé



EF, aux extremitez duquel sont les angles E & F. Je dis que les deux autres costez AB, AC, sont egaux aux deux autres costez, DE, DF, chascun au sien, sçauoir est AB à DE & AC à DF. Et l'autre angle BAC egal à l'autre angle D.

Car si AB n'est egal à DE, soit AB plus grand, duquel soit retrâché BG egale à DE : puis soit tirée la ligne droite CG. Donc puis que les costez BC, BG sont egaux aux costez EF, DE, chascun au sien, & l'angle B egal à l'angle E, par la 4. p. 1. la base CG sera egale à la base FD, & les autres angles egaux aux autres angles chacun au sien : c'est à sçauoir que l'angle BCG sera egal à l'angle F, auquel est aussi egal l'angle ACB par l'hypothèse. Partant les deux angles ACB & GCB seroient egaux, la partie au tout : ce qui est absurde. Dôc le costé, AB n'estoit pas inegal au costé DE, mais egal. Parquoy veu que les costez AB, BC sont egaux aux costez DE, EF, chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle E ; la base AC sera egale à la base DF, & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D par la 4.

p. r. ce qui estoit proposé.

Soient maintenant egaux deux autres costez, sçavoir est AB à DE soustendans angles egaux ACB, & F. Je dis derechef que les deux autres costez AC, BC sont egaux aux deux autres costez DF, EF, chacun au sien, c'est à dire AC à DF, & BC à EF; & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D. Car si le costé BC n'est egal au costé EF, soit le plus grand BCII, duquel soit couppé BH egal à EF, puis tiré la ligne AH. Donc puis que les costez AB, BH sont egaux aux costez DE, EF vn chacun au sien, & l'angle B est egal à l'angle E par l'hypothese, par la 4. p. r. la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, c'est à sçavoir, que l'angle AHB sera egal à l'angle F. Mais par l'hypothese l'angle ACB est aussi egal à l'angle F. Donc l'angle AHB sera aussi egal à l'angle ACB, l'exterieur à son opposé interieur: ce qui est absurde; car il est plus grand par la 16. p. r. Le costé BC n'estoit donc pas plus grand que le costé EF, ains egal. Parquoy les deux costez AB BC sont egaux aux deux costez DE, EF chacun au sien, & par la 4. p. r. l'angle B estât egal à l'angle E, les bases AC, DF, seront egales, & les autres angles BAC & D aussi egaux.

C O R O L L A I R E.

Il est manifeste par la demonstration de ceste proposition, que le triangle est aussi egal au triangle.

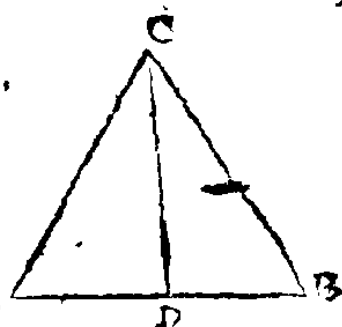
S C H O L I E.

Nous demonstrerons icy deux theoremes assez utiles & necessaires en Geometrie: le premier est tel.

En vn triangle equilateral, ou Isoscele, estant menee vne ligne droicte de l'angle contenu des deux costez egaux, laquelle diuise en deux egalement, ou l'angle, ou la base; elle sera perpendiculaire à la base: & si elle coupe l'angle en deux egalement, elle coupera aussi la base en deux egalement: Mais si elle coupe en deux egalemēt la base, elle coupera pareillement l'angle en deux egalement. Et au contraire estant tiree vne ligne droicte perpendiculaire a la base, elle diuise en deux egalement, tant la base que l'angle.

Au triangle ABC soient deux costez egaux AC, BC, & la ligne droicte CD diuise premierement l'angle C, en deux egalement. Je dis

qu'icelle ligne CD est perpendiculaire à la base AB , & la diuise également. Car puis que les deux costez AC, CB , sont égaux aux deux costez BC, CD , & les angles qu'ils contiennent aussi égaux, par la 4. p. 1. les bases AD, BD seront aussi égales, & les angles au point D égaux, & partant droicts.



Que si la ligne droicte CD diuise en deux également la ligne AB : ie dis que la ligne droicte CD est perpendiculaire à la ligne AB , & que l'angle C est couppé en deux également. Car puis que les deux costez AD, DC , sont égaux aux deux costez BD, DC , & la base AC égale à la base BC , par la 8. p. 1. les angles du point D seront égaux, & partant droicts, & la ligne CD perpendic. & par le corol. de la 8. p. 1. les angles qui sont en C seront aussi égaux.

Maintenant soit la ligne droicte CD perpendic. à AB : Ie dis qu'elle coupe aussi la base EA , & l'angle C , en deux également. Car par la 5. p. 1. les angles A & B seront égaux: parquoy puis que les deux angles A & D du triangle ACD , sont égaux aux deux angles B & D , du triangle BCD , vn chascun au sien, & le costé CD opposé aux angles égaux A & B comu, par la 26. p. 1. les autres costez AD, BD , seront aussi égaux, & les autres angles à A pareillement égaux. Ce qu'il falloit demonstrier.

Le second Theoreme est tel.

Le triangle auquel vne ligne droicte tirée de l'un des angles perpendiculaire a la base, diuise ou la base, ou l'angle en deux également, a les deux costez comprenant iceluy angle égaux: Et si la base est diuisée en deux également, l'angle sera aussi diuisé en deux également: Mais si l'angle est diuisé en deux également: aussi sera la base diuisée en deux également.

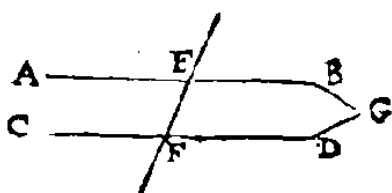
Au mesme triangle AEC , soit CD perpendiculaire à la base AB , & la diuise en deux également. Ie dis que les costez AC & BC sont égaux, & les angles à C aussi égaux. Car puis que les deux costez AD, DC , sont égaux aux deux costez BD, DC , & les angles qu'ils comprennent aussi égaux, sçauoir droicts, par la 4. p. 1. les bases AC, BC , & les angles à C seront pareillement égaux.

Maintenant que la perpendiculaire CD coupe en deux également l'angle C : ie dis que les costez AC, BC , & les lignes AD, BD sont égales: Car puis que les deux angles D, C du triangle ACD , sont égaux aux deux angles D, C du triangle BCD , & le costé CD est commun, par la 26. p. 1. les deux costez AC, BC , & les costez AD, BD , seront égaux, ce qu'il falloit demonstrier

THEO. 18. PROP. XXVII.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes faict les angles opposez alternativement egaux, icelles lignes seront paralleles.

Soient deux lignes droictes AB & CD, sur lesquelles tombant la ligne droicte EF faict les angles BEF, & EFC alternativement egaux. Je dis que AB & CD sont paralleles.



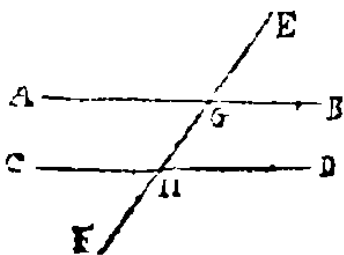
Car si elles ne sont paralleles, estans continuees, elles se rencontreront. Que si elles se rencontroient comme au point G, elles feroient vn triâgle avec le costé EF, & l'angle exterior CFE seroit plus grand que l'opposé interieur FEB par la 16. p. 1. ce qui est contre l'hypothese. Donc les deux lignes AB, & CD ne se rencontreront iamais; & par la derniere def. icelles seront paralleles.

THEO. 19. PROP. XXVIII.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes, faict l'angle exterior egal à son opposé interieur du mesme costé; ou bien les deux interieurs de mesme costé egaux à deux droicts; icelles lignes seront paralleles.

Soient deux lignes AB & CD, sur lesquelles tombant vne autre ligne EF, elle faict l'angle exterior EGA egal à GHC son opposé interieur de mesme costé. Je dis que AB & CD sont paralleles.

Car puis que l'angle GHC est posé



égal à l'angle EGA , auquel est aussi égal l'angle BGH par la 15. p. 1. les angles alternes BGH , GHC seront égaux par la 1. com. sent. partant les lignes AB , CD seront parallèles par la prop. precedente.

Pour la seconde partie. Je dis que si les deux angles intérieurs de mesme costé AGH , & CHG sont égaux à deux droits, que aussi AB & CD seront parallèles. Car par la 13. p. 1. les deux angles GHC & GHD sont égaux à deux droits; partât aussi égaux aux deux AGH & GHC . Que si d'iceux angles égaux on oste le commun GHC , les demeurans AGH & GHD se trouueront alternatiuement égaux, & par la 27. p. 1. AB & CD seront parallèles.

THEO. 20. PROP. XXIX.

Si vne ligne droicte tombe sur deux lignes droictes parallèles, elle fera les angles opposez alternatiuement égaux; & l'exterieur égal à son opposé interieur du mesme costé: & les deux interieurs de mesme costé égaux à deux droicts.

Soient deux lignes droictes parallèles AB & CD , (en la figure de la precedente proposition) sur lesquelles tombe la ligne droicte EF . Je dis en premier lieu que les angles AGH & GHD opposez alternatiuement sont égaux. Autremét s'ils ne sont égaux, l'un sera plus grand ou plus petit. Soit donc AGH plus petit s'il est possible, que GHD : & si à iceux angles inegaux on a adiousté chose commune, sçauoir l'angle GHC , les deux AGH & GHC serót plus petits que les deux GHC & GHD , lesquels par la 13. p. 1. estans égaux à deux droicts, AGH & GHC seront plus petits que deux droicts, & par la penult. comm. sent. les deux lignes AB & CD ne sont point parallèles: ce qui est contre nostre hypothese. Donc il falloit que l'angle AGH fust égal à l'angle GHD son alterne opposé.

Pour la seconde partie. Je dis que l'angle exterieur EGB est égal à son opposé interieur de mesme costé GHD : ce qui est manifeste par ce qui a esté demonsté cy dessus, sçauoir que

les angles AGH & GHD estoient egaux, estant aussi EGB egal à AGH par la 15. p. 1. & par la 1. com. sentence. EGB & GHD seront egaux : estans tous deux egaux au mesme AGB.

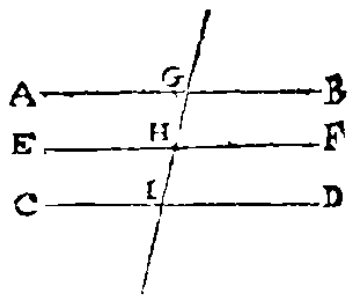
Pour la troisieme partie : ie dis que les deux interieurs de mesme costé AGH & GHC sont egaux à deux droicts : car s'il estoit autrement les lignes AB & CD ne seroient paralleles par la penult. com. sent. contre l'hypothese.

THEOR. 21. PROP. XXX.

Les lignes droictes paralleles à vne mesme ligne droicte , sont paralleles entr'elles.

Soient les lignes droictes A^B , CD , paralleles a vne mesme ligne droicte EF .

~~Soit AB parallele à CD, & CD parallele à EF.~~ Je dis que A^B & CD sont paralleles entr'elles. Car d'autant que toutes ces lignes sont posees en vn mesme plan, estant tiree la ligne droicte GHI , elle les coupera toutes, sçavoir est AB en G ; EF en H ; & CD en I . Et puis que AB est posee parallele à EF , les angles alternes AGH , GHE seront egaux entr'eux par la precedente prop. derechef puis que CD est aussi posee parallele à la mesme EF ; l'angle DHI fera aussi egal au mesme angle GHE , c'est à sçavoir l'interne à l'externe. Parquoy les angles AGH & DHI seront egaux entr'eux, lesquels estans alternes, les lignes AB & CD sont paralleles entr'elles par la 27. p. 1.

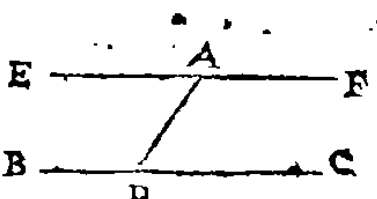


PROB. 10. PROP. XXXI.

Sur vn point donné, mener vne ligne droicte parallele à vne ligne droicte donnée.

Soit le point donné A, duquel faut mener une ligne parallèle à la donnée BC.

Soit menée la ligne AD faisant avec BC l'angle ADC, & sur icelle AD, & au point A soit fait l'angle DAE égal à l'angle ADC. Je dis que la ligne EA tirée tant qu'on voudra vers F, est parallèle à BC. Car puis que par la construction les angles alternes ADC, DAE sont égaux, les lignes BC, FE seront parallèles par la 27. p. 1.



S C H O L I E.

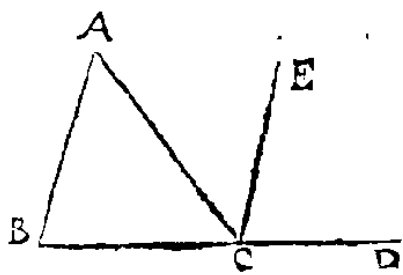
Il est manifeste par ceste construction, que le point donné doit estre tellement scitué hors la ligne donnée, qu'icelle estant continuée ne conuienne avec iceluy. Quant à la pratique de ceste prop. nous l'auons enseignée en nos memoires Mathemat. prob 6. de la Geometrie pratique.

THEOR 22. PROP. XXXII.

En tout triangle l'un des costez estant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux opposés intérieurs : & de chacun triangle les trois angles intérieurs sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ABC, duquel le costé BC, soit prolongé iusques en D. Je dis en premier lieu que l'angle extérieur ACD, est égal aux deux opposés intérieurs A & B.

Qu'il ne soit ainsi, qu'on mène CE parallèle à BA par la 31. p. 1. & d'autant que la ligne AC tombe sur les parallèles AB, EC, par la 29. p. les angles BAC, & ACE seront alternatiuement égaux : item l'extérieur ECD sera égal à son opposé intérieur ABC.



Partant il est manifeste que le total ACD, est egal aux deux A & B. opposez interieurement.

Pour la seconde partie, que les trois angles A, B & C interieurs du triangle ABC sont egaux à deux droits, il est evident, estant ACD egal aux deux A, & B; Mais ACD avec ACB sont egaux à deux droicts par la 13. p. 1. Partant les deux A & B avec ACB, seront egaux à deux droits.

S C H O L I E.

De ceste proposition nous pouvons colliger, à cōbien d'angles droicts sont egaux tous les angles internes de quelcōque figure rectiligne: sçavoir par deux manieres, dont la premiere est telle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle est entre les figures rectilignes.

C'est à dire, que tous les angles de la premiere figure rectiligne sont egaux à deux fois un droict, c'est à dire à deux droicts: Mais les angles de la seconde figure rectiligne, sont egaux à deux fois 2. droicts, sçavoir est à quatre droicts: Mais ceux de la troisieme figure sont egaux à 2. fois trois droicts, c'est à dire à six droicts; Et ainsi des autres. Or le lieu qu'obtient chaque figure rectiligne entre les figures rectilignes, est monstre par le nōbre des costez ou des angles, deux d'iceux ostez, d'autant que les lignes droites n'enfermēt une superficie, Et par consequēt ne constituent une figure, mais sont requises au moins trois lignes droites pour construire une figure rectiligne; d'oū vient que le triangle est la premiere figure rectiligne; Car de ses costez, en estans ostez deux, reste un: ainsi la figure ayant douze costez, ou douze angles, sera la 10. figure, puis que deux estans ostez de 12. restent 10. Et ainsi faut-il iuger des autres. Parquoy puis que la figure contenue de 12 costez est la 10. elle aura 12. angles equivalens à 20. angles droicts: c'est à sçavoir à deux fois 10. angles droicts. Ainsi aussi tous les 10. angles de la figure contenue de 10. costez, equivalent à 16. angles droicts, puis qu'icelle figure est la 8. en ordre entre les figures rectilignes. Or la raison de recy est, que toute figure rectiligne se diuise en autant de triangles, qu'elle est quantiesme en ordre entre les figures, ou bien qu'elle a d'angles ou costez, deux estans ostez. Car de quelconque ang'e d'une figure on peut tirer des lignes droictes à tous les angles opposez: mais aux deux plus prochains on n'en peut tirer. Parquoy la figure sera diuisee en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux estans ostez. Ainsi il est evident que le triangle ne se peut diuiser en autres triangles: mais le quadrangle se coupe en deux

le Pentagone en trois, &c. Veu donc que les angles d'iceux triangles constituent tous les angles de la figure proposée, & tous les angles de quelconque triangle sont égaux à deux droits ; il est manifeste que tous les angles de quelconque figure rectiligne sont égaux à deux fois autant d'angles droits, que est le nombre des triangles esquels elle se divise, c'est à dire à deux fois autāt d'angles droits, qu'icelle figure est quantiesme en ordre entre les figures rectilignes. Ce qui est ven manifestement es figures proposees.

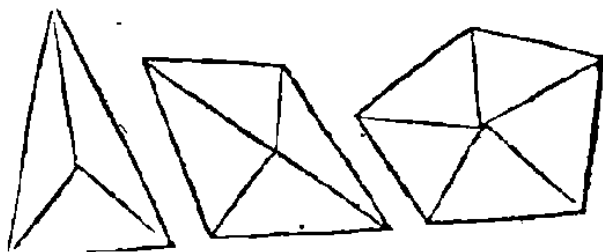


Le second moyen par lequel on sçaura la valeur des angles de quelconque figure rectiligne, est cestuy-cy.

Tous les angles de quelque figure rectiligne, sont égaux à deux fois autant d'angles droits, quatre estans ostez, qu'il y a en icelle d'angles, ou de costez.

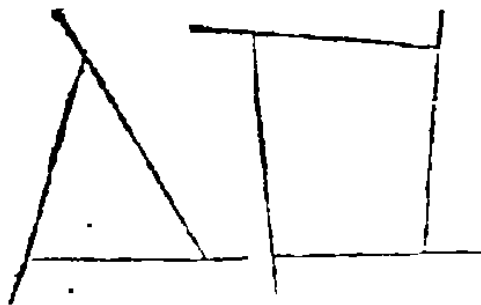
C'est à dire que les angles de chascun triangle sont égaux à deux fois trois droits, quatre ostez, c'est à sçavoir à deux droits: Ainsi aussi les angles de la figure de 12. costez, vaudroient deux fois 12. angles droits, moins quatre, sçavoir est 20. angles droits, &c. Or la demonstration de cela est telle. Si de quelconque poinct pris dedans la figure on tire des lignes droites à tous les angles, il y aura autant de triangles en ladite figure, qu'elle a d'angles ou costez. Veu donc que les angles de chascun triangle par la 32. p. 1. sont égaux à deux droits, tous les angles d'iceux triangles sont égaux à deux fois autant de droits, qu'il y a de costez en la figure. Mais il est evident que les angles des mesmes triangles, qui sont à l'entour du point pris dedans la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure proposée : & partant si on oste ces angles là, les autres angles des triangles qui constituent ceux de la figure proposée, seront aussi égaux à deux fois autant de droits, ceux d'alentour le poinct pris, estans ostez, qu'il y a de costez, ou angles à la figure.

Mais tous ces angles là d'alentour le poinct pris, sont seulement égaux à quatre droits, ainsi que nous l'avons colligé de la 15. p. 1. Parquoy les an-



gles de quelconque figure rectiligne sont égaux à deux fois autant de droits, quatre estans ostez, que ladite figure contient d'angles, ou de costez.

Or il appert de ce que dessus, que si chasque costé de quelconque figure rectiligne, est prolongé par ordre vers une mesme part : tous les angles externes pris ensemble, seront égaux à quatre droicts. Car par la 13 p. 1. les angles interieurs pris avec les extérieurs sont égaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'il y a d'angles, ou de costez en la figure. Mais les angles interieurs sont égaux à deux fois autant de droicts, quatre ostez, que ladite figure a d'angles, comme nous avons



monstré cy dessus; partant les extérieurs sont toujours égaux à quatre droicts. Par exemple : En quelconque triangle, les angles interieurs & extérieurs ensemble, sont égaux à six droicts : comme en la figure cy dessus. Mais par la 32. p. 1. les internes seuls sont égaux à deux droicts. Donc les seuls extérieurs seront égaux à 4. droicts. En un quadrangle, les angles extérieurs & les interieurs ensemble, sont égaux à huit droicts. Mais les interieurs seuls sont égaux à 4. droicts, comme nous avons démontré : les extérieurs seuls seront donc aussi égaux à quatre droicts. Toutes lesquelles choses peuvent estre venues es figures apposees. Il y a là mesme raison en toutes autres figures.

C O R O L L A I R E.

Il resulte de ceste 32. prop. que les trois angles de quelconque triangle, pris ensemble, sont égaux aux trois angles de quelconque autre triangle pris ensemble : Pource que tant ces trois là, que ces trois cy, sont égaux à deux droicts. D'où vient que si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle : le 3. de l'un sera aussi égal au 3. de l'autre, & les triangles seront equiangles.

Il appert aussi que tout triangle Isoscèle, duquel l'angle compris par les costez égaux, est droit, à chacun des autres angles demy droicts. Car les deux restans ensemble font un droit, puis que par la 32. p. 1. les trois sont égaux à deux droicts : & le 3. est pose droit. Parquoy puis que par la 5. p. 1. les deux restans sont égaux entr'eux & chacun

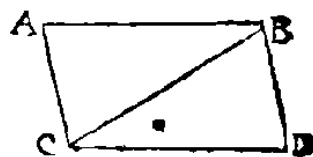
l'icellx sera demy droict. Mais si l'angle contenu des costez egaux estoit obtus, chacun des autres seroit moindre qu'un demy droict. Car les deux restans ensemble seront moindres qu'un droict &c. Finalement si ledit angle estoit aigu, chacun des autres sera plus grand qu'un demy droict. Pource que les deux restans ensemble seront plus grands qu'un droit, &c.

Il est pareillement manifeste que chascun angle d'un triangle equilateral, est les deux tierces parties d'un droit, ou la tierce partie de deux droits. Car deux angles droits, auxquels sont egaux les trois angles d'un triangle equilateral, diuisez en trois angles egaux, sont les deux tierces parties d'un droict.

THEO. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droites qui conioignent deux lignes droites egales & paralleles, & de mesme part, sont aussi egales & paralleles.

Soient deux lignes droictes AB, & CD, qui conioignent de mesme part les deux autres lignes AC & BD egales & paralleles. Je dis que AB, & CD, sont aussi egales & paralleles.



Qu'il ne soit ainsi: soit menee la diagonale BC. Icele tombant sur les deux paralleles AC, & BD, fera les angles ACB & CBD alternativement egaux par la 29. p.1. Item AC, & BD estant egales, les deux triangles CAB & CBD auront deux costez egaux à deux costez, & un angle egal à un angle, & par la 4. prop. 1. la base AB sera egale à la base CD, & l'angle ABC sera egal alternativement à l'angle DCB, & par la 27. p.1. les egales AB, & CD seront aussi paralleles.

THEOR. 24. PROP. XXXIII.

En tout parallelograme, les costez & les angles opposez, sont egaux entr'eux, & la diagonale le coupe en deux egallement.

Soit le parallelograme ABCD, en la figure precedente. Je dis que le costé AB est egal à son opposé CD; AC à BD: Item l'angle A egal à son opposé D, & l'angle ABD egal à l'angle ACD: finalement que iceluy parallelograme ABCD est coupé en deux également par la diagonalle BC.

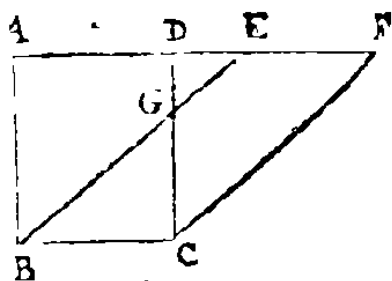
Car puis que ABCD est parallelograme, AB sera parallele à CD, & AC à BD, & par la 29. p. 1. l'angle ABC sera alternativement egal à l'angle BCD. Item l'angle ACB alternativement esgal à l'angle BCD. Ainsi les deux triangles BAC, & DCB auront les angles ABC, & BCA egaux aux angles BCD & CBD chascun au sien, & le costé commun entre iceux angles BC. Et par la 26. p. 1. les autres costez AB & AC seront egaux aux autres costez CD, & DB chacun au sien, & l'autre angle A egal à l'angle D. Et si il est euidet que les deux angles au point B ensemble serot egaux aux deux ensemble au point C. Encores par la 4. p. 1. les triangles ABC, & CDB seront egaux; & partant le parallelograme ABCD est coupé en deux également par la diagonalle BC; ce qui estoit à prouver.

THEOR. 25. PROP. XXXV.

Les parallelogrames constituez sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient deux parallelogrames ABCD, & BCEF tous deux sur mesme base BC, & entre mesmes paralleles AF, & BC. Je dis qu'ils sont egaux.

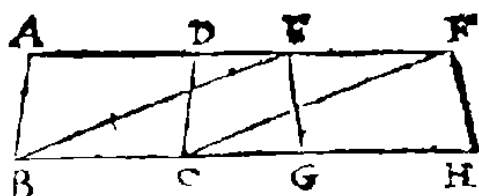
Car par la 34. p. 1. les costez opposes des parallelogrames estans egaux, AD & BC seront egaux. Item BC, & EF, & partant AD, & EF egaux, auxquels si on adioute la ligne commune DE; AE sera egale à DF. Item AB est egale à DC, lesquelles estans paralleles, l'angle exterior CDE sera egal à l'opposé interieur EAB; & par la 4. p. 1. les triangles BAE, & CDF seront egaux: desquels si on oste le triangle commun GDE, les demeurans trapezes BADG, & CGEF seront egaux: auxquels si on adioute le triangle commun BGC le parallelog. ABCD sera egal au parallelograme BCEF; ce qui estoit à demonstrier.



THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallelogrames constituez sur bases egales , & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient les deux parallelogrames ABCD, & EFGH, ayans les bases BC, & GH egales , & entre les mesmes paralleles AF, & BH. Je dis qu'ils sont egaux.

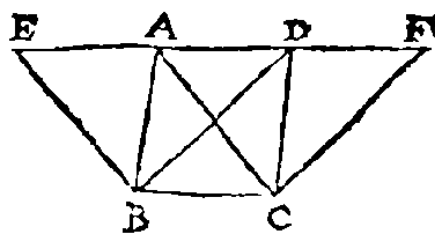


Qu'il ne soit ainsi: soient menees les deux lignes BE, CF, d'autant que BC est posee egale à GH, & par la 34. p. 1. la mesme GH est egale à son opposee EF; BC, EF seront egales entr'elles par la 1. com. sentence. Mais elles sont aussi paralleles par l'hypothese: Donc les lignes BE, CF qui les conioignent, seront aussi egales & paralleles par la 33. p. 1. & par consequent BEFC sera parallelograme, sur mesme base, & entre mesmes paralleles que le parallelog. ABCD, & par la 35. p. 1. ils seront egaux; & par la mesme prop. il sera aussi egal au parallelog. EFGH estant sur mesme base EF, avec iceluy, & entre mesmes paralleles AF, BH: Et par la 1. com. sent. les parallelog. ABCD, & EFGH seront egaux entr'eux: ce qu'il falloit demonst. rer.

THEOR. 27. PROP. XXXVII.

Les triangles qui sont sur mesme base , & entre mesmes paralleles , sont egaux.

Soient deux triangles ABC, & BDC tous deux sur la mesme base BC, & entre mesmes paralleles EF, & BC. Je dis qu'ils sont egaux. Car si on mene BE parallele à CA, & CF parallele à BD, seront accõplis les parallelogrames A E B C, & BCFD, lesquels seront egaux par la 35. p. 1. Mais les trian-

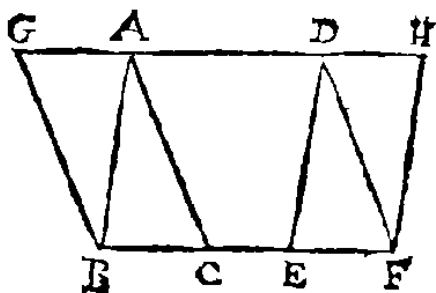


gles dōnez ABC & DBC sont moitiés d'iceux parallelogrames par la 34. p. 1. pource qu'ils sont coupez en deux également par les diagonales AB, DC : donc aussi les triangles ABC & DBC seront egaux, par la 7. com. sent. ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur bases egales & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, DEF , constitués sur bases egales $BC, & EF$, & entre mesmes paralleles $GH, & BF$. Je dis que ils sont egaux.

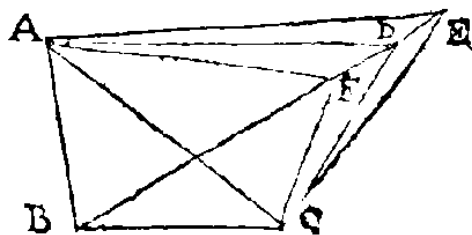


Car apres avoir mené BG parallele à CA , & FH parallele à DE par la 31. p. 1. les deux parallelogrames $ACBG, DEFH$, estans sur bases egales, & entre mesmes paralleles, seront egaux par la 36. p. 1. aussi egales seront leurs moitiés, sçavoir les triangles proposez $ABC, & DEF$ par la 34. p. 1. estant les parallelogrames coupez en deux également par les diagonales $BA, & DF$.

THEOR. 29. PROP. XXXIX.

Les triangles egaux constitués sur mesme base, & de mesme part, sont aussi entre mesmes paralleles.

Soient deux triangles egaux $ABC, & BCD$ constituez sur mesme base BC , & de mesme part. Je dis qu'ils sont entre mesmes paralleles, c'est à dire que si on mene la ligne AD , elle sera parallele BC .

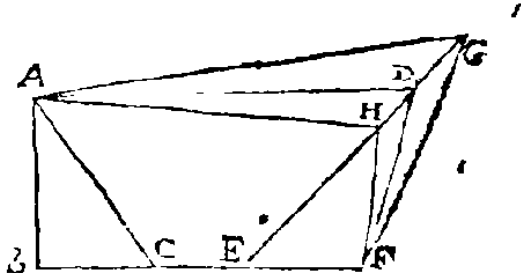


Autrement du point A on en pourra mener vne autre qui sera parallele à BC (si AD ne l'est) par la 31. p. 1. Laquelle tombera, ou bien au dessus de AD, ou au dessous; qu'elle tombe premierement au dessus, & soit icelle AE, s'il est possible: & apres auoir continué BD iusques en E, & mené EC. Les deux triâgles BAC, & BEC par la 37. p. 1. estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles seront egaux. Mais par l'hypothese BAC, & BDC sont aussi egaux; partant BEC, & BDC seroiēt aussi egaux, la partie au tout; donc AE parallele ne pouuoit tomber par dessus AD. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on pose la parallele AF au dessous de AD: car ayant mené CF; il s'ensuiura que les triâgles BFC, & BDC sont egaux, ce qui ne peut estre: Donc du point A on ne menera point d'autre ligne que AD parallele a BC.

THEOR. 30. PROP. XL:

Les triâgles egaux constituez sur bases egales, & de mesme part, sont aussi entre mesmes paralleles.

Soient deux triâgles egaux ABC, & DEF, constituez sur bases egales BC, & EF, & de mesme part. Je dis qu'ils sont aussi entre mesmes paralleles; c'est à dire que si on mene vne ligne droite de A, en D, qu'elle sera parallele à BF.



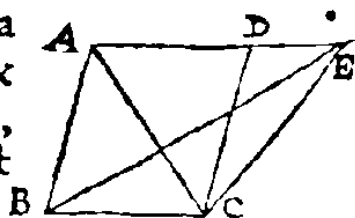
Autrement du point A on en pourra mener vne autre qui sera parallele à BF (si AD ne l'est) par la 31 p. 1. Laquelle tombera, ou au dessus de AD, ou au dessous. Soit donc premierement au dessus, & soit icelle AG, s'il est possible. Les deux triâgles BAC, & EGF seront egaux par la 38. p. 1. Mais par l'hypothese BAC, & EDF sont aussi egaux: partant EGF & EDF seront egaux par la 1. com. sent. la partie au tout; ce qui est impossible: Partât la parallele menee du point A ne tombera point au dessus de AD. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on la fait tomber au dessous, comme AH, car les trian-

gles EHF, & EDF se trouueroient egaux ; donc du point A ne pourra estre menee autre ligne que AD parallele à BF.

THEOR. 31. PROP. XLI.

Si vn parallelograme, & vn triangle ont vne mesme base, & sont entre mesmes paralleles, le parallelograme fera double du triangle.

Soit le parallelograme ABCD sur la mesme base BC, que le triangle BCE, & tous deux entre mesmes paralleles AE, & BC. Je dis que le parallelograme est double du triangle.

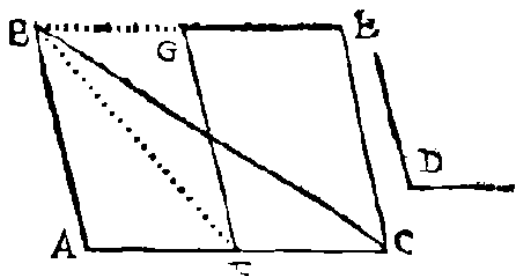


Car si on mene la diagonale AC, le triangle ABC fera la moitié du parallelogr. par la 34. p. 1. lequel sera egal au triangle BEC par la 37. p. 1. partant le parallelograme qui est double de l'un, sera aussi double de l'autre.

PROBL. 11. PROP. XLII.

Faire vn parallelograme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle re-ctiligne donné.

Soit le triangle donné ABC auquel il faut faire vn parallelograme egal, ayant vn angle egal à l'angle donné D.



Soit la base du triangle AC coupée en deux egallement en E, fait l'angle CEG egal

à l'angle D par la 23. p. 1. puis par la 31. p. 1. soit menee de B, la ligne BF parallele à AC, laquelle coupe EG en G. Derechef de C soit menee CF parallele à EG, rencontrant BF en F: & sera constitué vn parallelograme EGFC, lequel ie dis estre egal au triangle donné ABC. Car estant tiree la ligne BE, iceluy parallelograme EGFC sera double du triangle EBC par la prop

la prop. preced. duquel est aussi double le triangle ABC par la 38. p. 1. pource qu'ils sont sur bases egales, & entre mesmes paralleles: le parallelograme EGFC, & le triangle ABC seront donc egaux entr'eux par la 6. com. sent. & puis qu'iceluy parallelograme à l'angle CEG egal au donné D par la construction, est manifeste ce qui estoit proposé.

S C H O L I E.

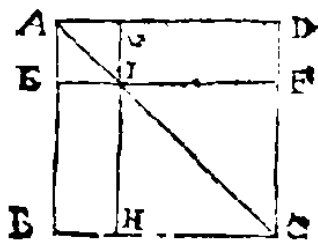
Pelletier adiouste icy la conuerse de ceste proposition, qui est telle. Faire un triangle egal à un parallelograme donné, & qui ait un angle egal à un angle rectiligne donné.

Et d'autant que nous auons enseigné ce probleme en nos memoires Mathematiques, prob. 14. nous n'en ferons icy repetition.

THEOR. 32. PROP. XLIII.

En tout parallelograme, les suppléments des parallelogrammes qui sont sur le diametre, sont egaux entr'eux.

Soit le parallelograme ABCD, son diametre AC, à l'entour duquel sont les parallelog. AEIG & IHCF. Je dis que les parallelogrammes GIFD & EBHI qu'on appelle suppléments, sont egaux entre eux.



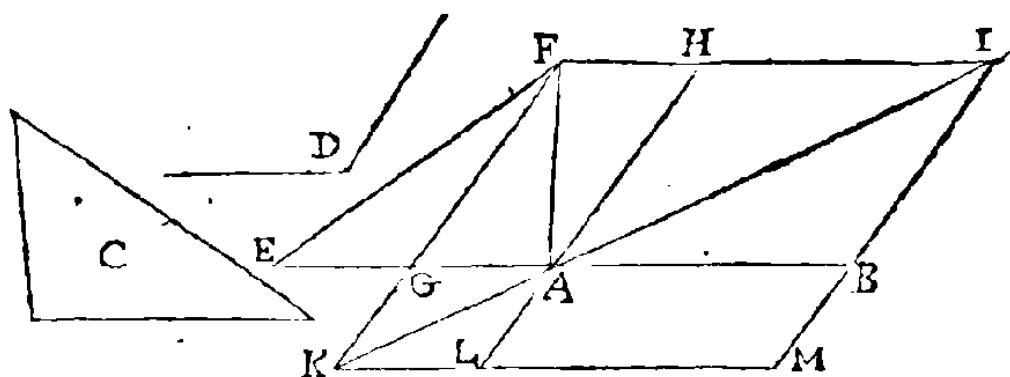
Car d'autant que par la 34. p. 1. les triangles ABC, ADC sont egaux entr'eux: Item les triangles CIH, CFI aussi egaux; si on oste ceux-cy de ceux-la, resteront egaux les trapezes ABHI, ADFI. Mais par la 34. p. 1. sont aussi egaux les triangles AEI, AGI; partant si on les oste des trapezes, demeureront egaux les suppléments EBHI, GIFE. Ce qui estoit à prouuer.

PROB. 12. PROP. XLIIII.

Sur vne ligne droite donnée, descrire vn pa-

rallellograme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, le triangle donné C, &



l'angle rectiligne donné D. Il faut sur AB descrire vn parallelograme egal au triangle C, & qui ait vn angle egal au donné D.

Soit prolongee la ligne donnee AB iusques en E, tellemēt que AE soit egale à quelconque des costez du triangle C, & soit acheué de construire par la 22. p. 1. le triangle AFE, ayant les costez egaux aux costez dudit triangle donné C, lequel lui sera aussi egal par le corol. de la 8. p. 1. Soit maintenant construit par la 42. p. 1. le parallelograme AGFH, egal au triangle AFE, & ayant l'angle GAH egal au donné D: & apres auoir continué la ligne FH iusques en I, tellement que HI soit egale a AB, soit menee IA iusques à ce qu'elle rencontre FG prolongee en K: ce qui doit arriuer, n'estant IA parallele à FG, par la 11. com. sent. puis du poinct K, soit menee KM parallele a GB, iusques à ce qu'elle rencontre IB tiree en M: & finalement soit prolongee HA iusques à ce qu'elle rencontre KM en L. Je dis que le parallelograme ABML est le requis.

Car il est constitué sur la ligne droicte donnee AB, & à l'angle BAL egal a l'angle donné D, puis que par la 15. p. 1. il est egal à l'angle GAH, qui a esté fait egal à l'angle D: Finalement il est egal au triangle donné C, puis que par la 43. p. 1. il est egal au parallelograme AHFG, lequel a esté fait egal au triangle AFE, ou C.

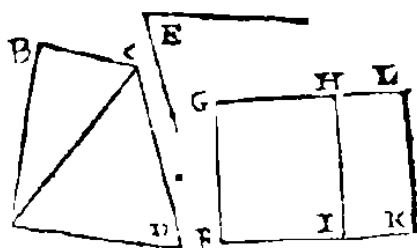
S C H O L I E.

Nous avons enseigné la pratique de ce Prob. en nos memoires Mathemat. Prob. 15. & le conuerse d'iceluy au Prob. 16. C'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

P R O B L. 13. P R O P. XLV.

Faire vn parallelograme egal à vne figure rectiligne donnee, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la figure rectiligne donnee ABCD, & l'angle donné E. Et il faut faire vn parallelograme egal à icelle figure rectiligne ABCD, qui ait vn angle egal au donné E. Soit resoluë la figure rectiligne donnee en triangles, sçauoir est menant la ligne AC: puis par la 42. p. 1. soit fait le parallelograme FGH I egal au triangle ADC, ayant l'angle F, egal à l'angle donné E. Itē sur H I soit fait le parallelog. HIKL egal au triangle ABC, ayant vn angle HIK egal au donné E: & sera fait ce qui est requis. Car les deux parallelogrames FH & IL sont construits egaux à la figure rectiligne ABCD, & ont chacun vn angle egal à l'angle donné E; & ces deux parallelog. ensemble en font vn seul. Car d'autant que chacun des angles GFI, HIK, est egal à l'angle donné E, ils le seront aussi entr'eux: auxquels si on adioust l'angle cōmun FIH, les deux angles GFI, HIF, qui sont egaux à deux droits par la 29. p. 1. estant FH, parallelograme; seront egaux aux deux angles HIK, HIF, lesquels partant seront egaux à deux droicts, & par la 14. p. 1. les deux lignes FI, KI se rencontreront directement. Pareillement les deux angles GHI, HLK estans egaux par la 34. p. 1. car ils sont opposez à angles egaux GFI, HIK: Si à iceux on adioust l'angle commun IHL, par le mesme discours que cy dessus, les deux lignes GH & LH se rencontreront directement: ainsi FK & GL estans lignes droictes, & conjoignant de mesme part les egales & paral-



elles FG & KL ; elles seront aussi égales & parallèles par la 33. p. 1. & partant FGLK fera parallélograme.

S C H O L I E.

S'il y eust eu d'avantage de triängles en la figure donnée, il eust fallu construire sur KL un troisieme parallelogramme egal au troisieme triangle ; puis sur le costé opposé à KL, un autre parallelogramme egal au 4. triangle, & ainsi proceder de triängle en triangle jusques à la fin. Et quant à la demonstration, ce sera toujours la mesme que dessus, repetee autant de fois qu'il sera de besoin. Or Pelletier adjouste icy un Probleme tres-util, qui est, Qu'estans donnees deux figures rectilignes inegales, trouver l'excez de la plus grande par dessus la moindre. Mais d'autant que nous l'avons enseigné en suite de celui cy dessus, en nostre Geometrie pratique, Prob, 18. nous n'en ferons icy repetition.

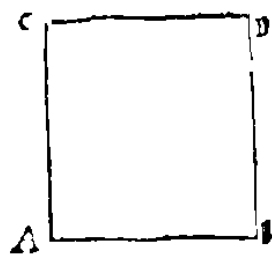
C O R O L L A I R E.

*Il est manifeste par les choses dictes cy dessus, comment on descri-
ra sur une ligne droicte donnee un parallelogramme egal à une fi-
gure rectiligne donnee, & qui ait un angle egal à un angle rectili-
gne donné. Car pour exemple, si la ligne droicte FG eust esté donnee,
nous eussions par la precedente prop. descrit sur icelle le parallelo-
gramme FGHI ; puis sur la mesme ligne FG, ou plustost sur une éga-
le à icelle HI, le parallelog. HIKL ; & ainsi consecutiuelement s'il y
auoit d'avantage de triangles en la figure rectiligne donnee.*

PROBL. 14. PRO P. XLVI.

Sur vne ligne droite donnée, descrire vn quar-
ré.

Soit la ligne droicte donnée AB, sur laquel-
le il faut descrire vn carré. Du poinct A,
soit menee AC ligne perpédiculaire à AB
par la 11. p. 1. laquelle soit faite égale à AB ;
& apres auoir mené CD parallèle à AB,
& BD parallél à AC par la 31. p. 1. ie dis
que le quadrilatere AD est carré.



Car d'autant que par la construction il est parallélogramme, les costez, & les angles opposez sont egaux par la 34. p. 1. partant AB est egal à CD, & AC a BD: mais AC est egal à AB par la construction, il est evident que les quatre costez sont egaux. Item l'angle A estant droit par la construction, aussi son opposé D sera droit. Et la ligne AC tombant sur les deux lignes parallèles AB, CD, les deux angles intérieurs A & C sont egaux à deux droits par la 29. p. 1. Mais l'angle A est droit: donc l'angle C sera aussi droit: partant aussi droit son opposé B: ainsi les quatre angles A, B, C, D, seront droits; & par la def. du quarré, la figure AD sera quarrée.

S C H O L I E.

Nous avons enseigné la pratique de ceste prop. en nostre Geometrie pratique Prob. 12.

Proclus demonstre icy: Que les quarrés de lignes egales sont egaux. & que de quarrés egaux, les lignes sont egales. Ce qui est aisé à prouver par la superposition d'un quarré sur l'autre; Car les lignes estant egales, si l'une est posée dessus l'autre, elles conviendront entr'elles; & les angles estant aussi egaux, c'est à sçavoir droits, ils conviendront pareillement entr'eux: & partant tout le quarré conviendra à tout le quarré. Que si les quarrés sont egaux, ils conviennent entr'eux, à cause de l'egalité des angles: Donc aussi les lignes, autrement un quarré seroit plus grand que l'autre. Nous avons laissé la demonstration de Proclus qui est tres-longue, pour suivre celle-cy qui est briefue & facile.

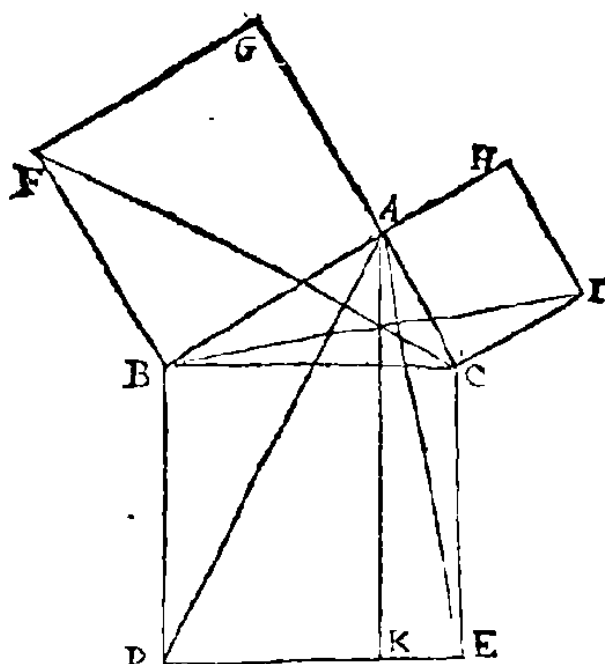
THEO. 33. PROP. XLVII.

Au triangle rectangle, le quarré du costé qui soustient l'angle droit, est egal aux deux quarrés des deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC, sur les costez duquel soient décrits les trois quarrés BCDE, ABFG, AHIC. Je dis que le quarré BE décrit sur le costé BC, qui soustient l'angle droit BAC, est egal aux deux quarrés AF & AI décrits sur les deux autres costez AB & AC.

Car soit menée la ligne AK parallèle à BD, ou à CE, & ti-

Les lignes AD, AE, CF, BI. Et d'autant que par la défini-



tion du carré, les 4. angles au point A sont droicts, les lignes droictes AB, AH se rencontreront directement, & ne feront qu'une ligne droite: Item CA, AG par la 14. p. 1. D'ailleurs, puis que les angles ABF, CBD sont égaux, car ils sont droicts, si on leur adjoûte le commun ABC, le total FBC sera égal au total ABD. Le triangle ABD a donc les deux costez AB, BD égaux aux deux costez FB, BC du triangle CBF, chacun au sien, & les angles ABD, CBF contenus d'iceux costez, égaux, & par la 4. p. 1. les triangles ABD, CBF seront égaux. Mais le carré AF est double du triangle FBC par la 41. p. 1. car ils sont sur mesme base BF, & entre mesmes parallèles BF, GC, il sera donc aussi double de son égal ABD: duquel le rectangle BK est aussi double par la mesme 41. p. 1. & par conséquent le carré AF sera égal au rectangle BK: car les choses doubles d'une mesme sont égales entr'elles. Par mesme discours on prouvera que le rectangle CK est égal au carré AI: partant les deux ensemble BK, & CK seront égaux aux deux carrés ensemble AF, & AI. Donc le carré BE qui est composé d'iceux rectangles BK, CK sera aussi égal aux mesmes carrés AF, AI: ce qu'il falloit prouver.

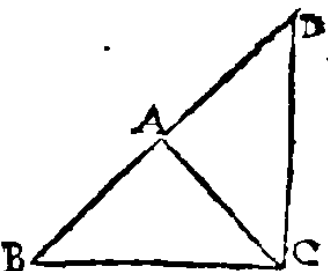
THEOR. 34. PROP. XLVIII.

Si le carré de l'un des costez d'un triangle, est

égal aux quarez des deux autres costez, le triangle sera rectangle.

Soit le triangle donné ABC, & soit le quarré du costé BC égal aux deux quarez des deux autres costez BA, & AC. Je dis que l'angle BAC est droit.

Car apres avoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. p. 1. & fait AD égale à AB, soit mencee CD. Le triangle CAD sera rectangle, & par la 47. p. 1. le quarré de CD sera égal aux deux quarez de CA, & AD, lesquels sont égaux aux quarez de BA, & AC, estans leurs lignes égales; & par la 1. com. sent. le quarré de BC sera égal au quarré de CD: partant la ligne CB égale à CD. Donc les triangles BAC, & CAD auront deux costez égaux à deux costez chacun au sien, & la base égale à la base, & par la 8. p. 1. l'angle BAC sera égal à l'angle droit CAD: partant il sera aussi droit.



Fin du premier Element.

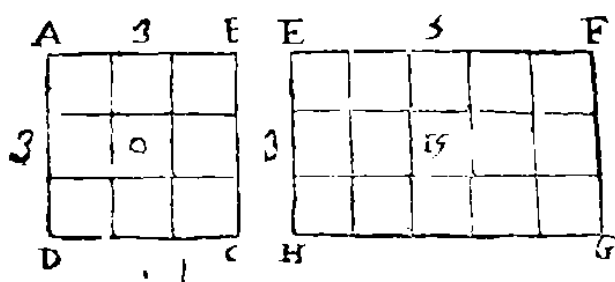


ELEMENT SECON D.

DEFINITIONS.

1. Tout parallélograme rectangle est dict estre compris des deux lignes droictes qui font l'angle droict.

IL a esté dit en la 36. def. 1. que c'est que parallélograme, & qu'il y en a de quatre sortes : mais maintenant il faut entendre qu'un parallélograme est dit rectangle, lors qu'il a tous les angles droicts, & par consequent il y a seulement le quarré, comme $ABCD$, & le quarré long comme $EFGH$, qui soient rectangles : car il n'y a que ces



deux parallélog. qui ayent les angles droicts. Est icy à noter, qu'en tout parallélog. si un seul angle est donné droit, il est nécessaire que les trois autres soient aussi droicts : comme si l'angle E du parallélograme $EFGH$ est droict : ie dis que les trois autres F, G, H, sont aussi droicts. Car d'autant que les lignes EF, GH sont parallèles, les angles internes E & H sont égaux à deux droicts par la 29. p. 1. Mais si l'angle E est droict par l'hypothese : l'angle H sera donc aussi droict : & par la 34. p. 1. leurs opposez G & F seront aussi droicts. Parquoy Euclide dit tout parallélog. estre contenu sous deux lignes droictes,

qui comprennent un seul angle droit : tellement que le parallélog. rectangle EFGH, sera dict estre contenu sous les deux lignes droictes EF, EH : ou sous les deux EF, FG - ou sous FG, GH : ou finalement sous GH, HE : ainsi deux lignes expriment toute la magnitude d'un parallélograme rectangle : sçavoir l'une comme EF, ou HG, sa longueur, & l'autre comme EH, ou FG, sa largeur : & par le mouvement imaginaire de l'une de ces deux lignes en l'autre, se faiét iceluy parallélograme. Car si l'esprit conçoit que la ligne EF, en allant en bas au long de la ligne EH, se meuve en trauers, tellement qu'elle face toujours angle droit avec icelle EH, iusques à ce que le point E paruienne au point H, & le point F, au point G : sera décrit tout le parallélog. rectangle EFGH. Le mesme sera faiét, si on pose EH sa mouoir en trauers, selon la ligne EF. D'où aduient que si EF est de 5 pieds, & l'autre costé EH de trois : si on multiplie un nombre par l'autre, sera produit 15. pieds quarrez, pour l'aire ou contenu de tout le parallélograme. Pareillement au rectangle ABCD, le costé AB estant de 3 pieds, & le costé AD aussi de trois pieds : multipliant l'un par l'autre, seront produits neuf pieds quarrez pour l'aire d'iceluy rectangle. Comme monstre la figure cy dessus.

Et est icy à noter, qu'en ce second liure, & és autres suiuaus, Euclide appelle les parallélog. rectangles, simplement rectangles : ce que obseruent aussi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut toujours entendre parallélograme rectangle.

2. En tout parallélograme, l'un des parallélogrames décrits à l'entour du diametre avec les deux supplementens, est appellé Gnomon.

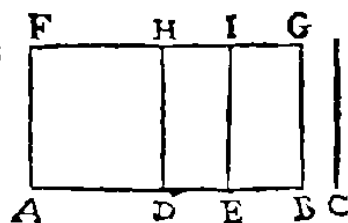
Au parallélograme ABCD (en la figure de la 4. proposition de ce liure) soit menée la diagonale BC, & EF parallèle à AC coupant la diagonale en I, & par iceluy point I soit menée GH parallèle à AB : & le parallélograme sera diuise en 4. parallélog. deux desquels EG, & HF sont dicts estre décrits à l'entour du diametre ou diagonale, mais les autres deux sont appellez supplementens. Or la figure composee d'iceux supplementens & de l'un ou l'autre des parallélogrames d'alentour la diagonale, sera dicta Gnomon, comme la figure FACDHI, ou EDBAGI.

THEO. I. PROP. I.

Si de deux lignes droites l'une est coupee en

tant de parties que l'on voudra, le rectangle compris des deux routes, est egal au rectangle de la non coupee, & d'une chacune partie de celle qui est coupee.

Soient les deux lignes AB & C, dont la premiere AB est coupee à l'aduanture en plusieurs parties, sçauoir est en AD, DE, EB. Je dis que le rectangle compris des deux lignes AB, & C, sera egal aux trois rectangles compris de la ligne C & d'une chacune partie de AB.



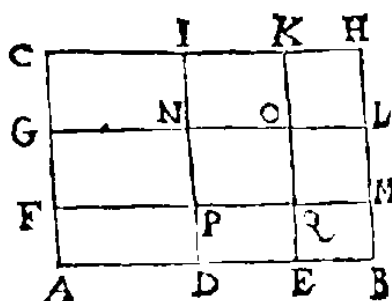
Qu'il ne soit ainsi: Qu'on mene AF perpendiculaire à AB par la 11. p. 1. laquelle soit faicte egale à C, & du point F soit menee FG parallele à AB, & BG parallele à AF par la 31. p. 1. Il est euident que le rectangle AG sera compris des deux lignes donnees AB & C, puis que AF est egale à C. Item soient menees les deux lignes DH, & EI paralleles à AF par la 31. p. 1. Donc les trois parallelogrammes AH, DI, EG seront rectangles compris des lignes AF, DH, EI, & des trois segmens AD, DE, EB, c'est à dire de la ligne C, & d'iceux trois segmens. Mais iceux trois parallelogrammes rectangles ensemble, conuiennent au rectangle AG, compris des lignes donnees: & par la 8. com. sent. ils luy sont egaux.

S C H O L I E.

Commandin demonstre icy deux autres theoremes qui ensuiuent.

S'il y a deux lignes droictes, l'une & l'autre desquelles soit coupee en tant de parties qu'on voudra; le rectangle compris d'icelles deux lignes, est egal aux rectangles contenus de chaque segment de l'une, & d'un chacun des segmens de l'autre.

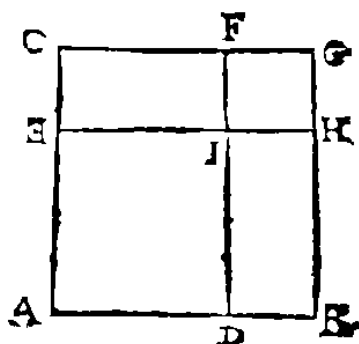
Soient deux lignes droictes AB, AC contenant un angle droit A: & AB soit coupee es points D & E, mais AC es points F & G. Je dis que le rectangle contenu sous AB, AC, est egal aux rectangles compris de chascunes parties AD, DE, EB & d'un chascun segment AF, FG, GC: c'est à dire egal aux rectangles contenus



de $AD, AF:AD, FG:AD, GC:DE, AF:DE, FG:DE, GC:EB, AF:EB, FG:EB, GC$. Car estant accompli le rectangle AH , soient tirees DI, EK paralleles à AC : Item FM, GL paralleles à AB , qui coupperont les premieres es poinçts P, Q, N, O . Ven donc que le rectangle AP est contenu sous AD, AF : & FN sous AD, FG : & GI sous AD, GC , (pource que par la 34. p.1. les lignes FP, GN sont egales à icelle AD .) Item que les rectangles DQ, PO, NK , sont contenus sous $DE, AF:DE, FG:DE, GC$: (car DP, PN, NI sont egales à icelles AF, FG, GC , & PQ, NO , à icelle DE , par la 34. p.1.) Et par mesmeraison les rectangles EM, QL, OH , sont compris sous $EB, AF:EB, FG:EB, GC$. Il est evident que le rectangle contenu sous AB, AC , est egal aux rectangles compris sous chascques parties AD, DE, EB , & un chacun des segmens AF, FG, GC : ce qui estoit propose.

S'il y a deux lignes droictes coupees comme on voudra; le rectangle compris sous icelles, avec ce luy compris sous vne partie de l'une d'icelles lignes, & vne partie de l'autre, est egal aux rectangles contenus sous les lignes totales & les susdites parties reciproquement, avec le rectangle contenu es deux autres parties.

Soient deux lignes droictes AB, AC , faisant l'angle droit A , lesquelles soient coupees comme on voudra en D & E . Je dis que le rectangle compris sous AB, AC , avec celuy compris sous les parties AD, EC , est egal aux rectangles contenus sous $AB, EC:AC, AD:DB, AE$. Car ayant accompli le rectangle AG , soit menee DF parallele à AC , & EH à AB , s'entreceupans en I . Ven donc que le rectangle



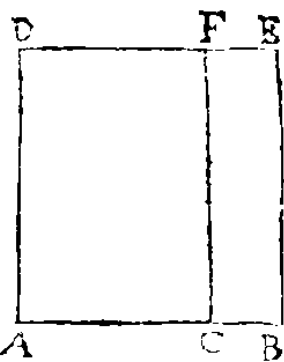
angle AG est egal aux rectangles EG, AI, DH : si on leur adioust le commun rectangle EF : les rectangles AG, EF , qui sont compris sous les toutes AB, AC , & les parties AD, EC , seront egaux aux rectangles EG, AF, DH , compris sous $AB, EC:AC, AD:DB, AE$: ce qui estoit propose.

THEOR. 2. PROP. II.

Si vne ligne droite est coupee comme on voudra; les rectangles compris de la toute & d'une chascune partie, sont egaux au quarré de la toute.

Soit la ligne droite AB , couppee en deux parties telles qu'on voudra au point C . Je dis que le rectangle de la toute AB & de la partie AC , avec le rectangle de la toute AB & de l'autre partie CB , sont egaux au carré de la toute AB .

Qu'il ne soit ainsi. Sur AB soit décrit le carré AE , puis de C soit menée CF parallèle à AD , laquelle CF sera égale à icelle AD , c'est à dire à AB : car icelles AD , AB sont égales par la def. du carré. Il est donc evident que les deux rectangles AF & CE , sont compris de la toute AB , ou son égale CF , & des deux parties AC & CB ; & si ils contiennent avec le carré AE , & par conséquent egaux.



S C H O L I E.

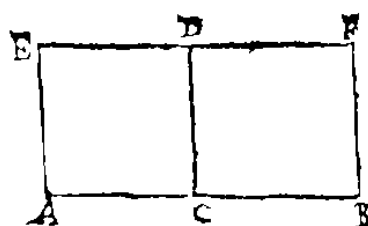
Encore qu'en ce theoreme Euclide propose d'une ligne diuisee en deux parties seulement, si est-ce toutesfois qu'en la mesme maniere sera demonstree le mesme, si la ligne est diuisee en tant de parties qu'on voudra. Sera aussi demonstree comme dessus que si une ligne droite est couppee en tant de parties qu'on voudra; le carré de la toute est egal aux rectangles contenus sous chascun segment & un chascun segment.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droite est coupee comme on voudra; le rectangle compris de la toute, & de l'une des parties, est egal au rectangle compris des parties, & au carré d'icelle partie premierement prise.

Soit la ligne droite AB couppee à l'adventure au point C . Je dis que le rectangle compris de la totale AB , & de l'une ou l'autre partie, comme AC , est egal aux deux rectangles compris des deux parties AC , & CB , & au carré de la partie AC , laquelle auoit esté premierement prise.

Qu'il ne soit ainsi. Sur la partie AC soit fait le carré AD

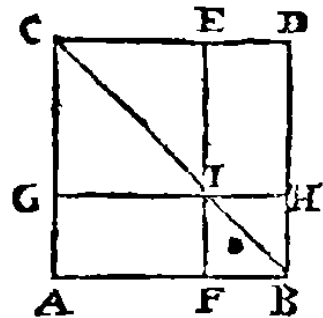


par la 46. p. 1. Item soit menée BF parallèle à CD par la 31. p. 1. rencontrant ED, prolongée en F. Il est donc évident que AD est le quarré de AC, & CF le rectangle de AC & CB (car CD est égal à AC, par la définition du quarré) & AF le rectangle de AB & AC, partie sur laquelle a esté fait le quarré. Or le quarré AD & le rectangle CF ensemble cōviennent avec le rectangle AF; & par conséquent egaux à iceluy.

THEOR. 4. PRO. III.

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra; le quarré de la toute est égal aux deux quarrés des deux parties, & deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne donnée AB, coupée cōme on voudra au point F. Je dis que les deux quarrés décrits sur les parties AF & FB, avec deux fois le rectangle d'icelles AF & FB sont egaux au quarré de la totale AB.



Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne totale AB soit décrit le quarré AD, & apres auoir mené la diagonale BC, & du point F, FE parallèle à AC, coupant la diagonale BC en I, & derechef par iceluy point I soit menée GH parallèle à AB, le tout par la 31. p. 1. ie dis premierement que HF, & EG sont quarrés.

Car desja il appert qu'ils sont parallelogrames, estés décrits entre lignes paralleles. Item puis que AD est quarré, les deux costez AB & AC seront egaux, & le triangle ABC est Isoscele, & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base BC, sçauoir est ABC & ACB seront egaux. Pareillement la ligne BC tombant sur les deux paralleles AC & FE fera l'angle extérieur FIB egal à l'opposé interieur ACB par la 29. p. 1. lequel estant egal à ABC par la 1. comm. sent. ABC & FIB seront egaux, & par la 6. prop. 1. les deux costez BF & FI seront egaux; & par la 34. p. 1. le parallelograme HF aura les quatre costez egaux; & partant il sera quarré; car l'angle FBH estant droit, les trois autres seront aussi droits, comme nous auons démontré à la 1. def. de ce liure. Par mesme discours on montrera

GE estre aussi quarré. Maintenant d'autant que AI & ID sont décrits entre lignes parallèles, & les angles A & D sont droicts, il appert qu'ils sont parallelog. rectangles, & egaux entr'eux par la 43. p. 1. & sont compris des deux parties AF FB, estant EI egale à AF, & HI, IF à FB par la 34. p. 1. & def. du quarré. Partant AI & ID sont deux fois le rectangle de AF & FB, lesquels avec les deux quarez FH & GE conuiennent avec le quarré total AD, & par la 8. comm. sent. ils luy seront egaux.

C O R O L L A I R E.

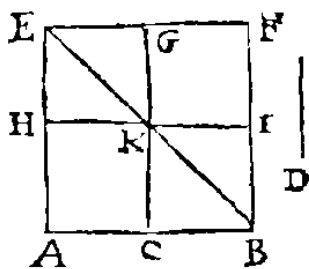
Il est manifeste par ce que dessus, que les parallelogrames décrits à l'entour de la diagonale d'un quarré, sont quarez. Et aussi que la diagonale coupe en deux egalement les angles du quarré.

S C H O L I E.

Clavius demonstre en ce lieu le theoreme suivant.

Si une ligne droicte est double d'une autre, le quarré de celle là est quadruple du quarré de ceste-cy : & si un quarré est quadruple d'un autre quarré : le costé de celui-là est double du costé de cestuy cy.

Soient deux lignes droictes AB & D, desquelles AB est double de D. Je dis que le quarré de AB est quadruple du quarré de D. Car ayant diuisé AB en deux egalement en C, si on faict telle construction qu'en ceste 4. p. il est euident que les 4. parallelogrames AK, CI, HG, KF, seront quarez & egaux entr'eux. Mais le quarré AF est egal à iceux quatre quarez : donc le quarré de AB sera quadruple du quarré de AC, c'est à dire de D, qui luy est egale : car AB est double de l'une & de l'autre.

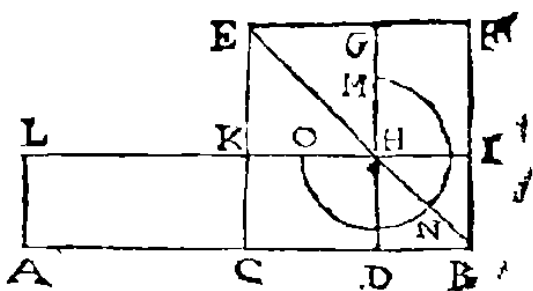


Pour la seconde partie: Soit le quarré de AB quadruple du quarré de D. Je dy que AB est double de D. Car AB estant couppee en deux egalement en C, le quarré de AB sera quadruple du quarré de AC, comme il a esté démontré cy dessus. Mais le quarré de AB a esté posé aussi quadruple du quarré de D: donc les quarez des lignes AC & D sont egaux, & partant icelles lignes AC & D aussi egales. Mais AB est double de AC; donc aussi double de D.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droite est coupee en deux parties egales, & en deux inegales; le rectangle des deux parties inegales, avec le quarré de la section du milieu, sont egaux au quarré de la moitié de la toute.

Soit la ligne donnée AB coupee en deux parties egales au point C, & en deux inegales au point D. Je dis que le rectangle compris des deux parties inegales AD, & DB, avec le quarré de la section du milieu CD, sont egaux au quarré de la moitié CB.



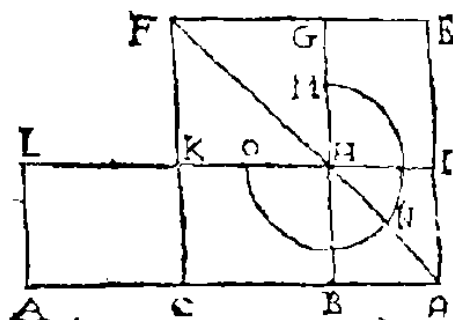
Car sur la ligne CB, soit descrit le quarré CF par la 46. p. r. & apres auoir mené DG parallele à BF, soit menée la diagonale BE coupant DG au point H, par lequel soit mené IKL parallele à AB, puis AL parallele à DH coupant KL en L. Donc par le corol. de la preced. prop. DI, KG seront quarez; & partant la ligne DH egale à la ligne DB, & par la 34. p. r. KH est aussi egale à HG: parquoy le rectangle AH est compris des deux segmens AD, DB; & KG sera quarré de la section du milieu CD. Il faut donc prouuer que le rectangle AH, avec le quarré KG est egal au quarré CF, fait sur la ligne CB moitié de la toute AB.

Or le rectangle AK est egal au rectangle CI par la 36. p. r. d'autant qu'ils sont sur bases egales AC, & CB, & entre mesmes paralleles AB & LI. Pareillement les supplementes CH, & HF sont egaux par la 43. p. r. auxquels si on adioust le quarré commun DI, les tous CI, & DF seront egaux: & par 1. com. sent. DF sera egal à AK, auxquels pareillement si on adioust le supplement commun CH, le gnomon ONM sera egal au rectangle AH. Mais iceluy gnomon, & le quarré KG, conuiennent avec le quarré CF, & sont egaux par la 8. com. sent. Donc aussi le rectangle AH, & quarré KG, seront egaux au quarré CF par la 1. com. sent. ce qu'il falloit demonst. er.

THEOR 6. PROP. VI.

Si vne ligne droite est coupee en deux parties egalles, & on luy adiousté directement quelque autre ligne droite: le rectángle de la toute & de l'adioustee comme d'une, & de l'adioustee avec le quarré de la moitié, est egal au quarré qui est fait de la moitié & de l'adioustee comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupee en deux egalemét au point C , & à icelle soit adioustee directement BD . Je dis que le rectángle compris de la totalle AD , & de l'adioustee BD , avec le quarré de la moitié CB , est egal au quarré de la ligne CD .



Qu'ainsi ne soit: sur la ligne CD soit descript le quarré CE avec sa diagonale DE , & apres avoir mené BG parallèle à DE , laquelle coupera la diagonale au point H : par iceluy point H soit menée IKL parallèle à AD par la 31. p. 1. Item AL parallèle à DI , rencontrant IL en L .

Premierement le rectángle AI est compris de la toute & adioustee comme d'une AD , & de l'adioustee DI (car elle est egalle à l'adioustee BD , estant BI quarré par le corol. de la 31. p. 1. 2. Item KG , qui est quarré par le mesme corol. est fait sur HK egal à la moitié CB par la 34. p. 1. Je dis donc que le rectángle AI , & le quarré KG sont egaux au quarré CE .

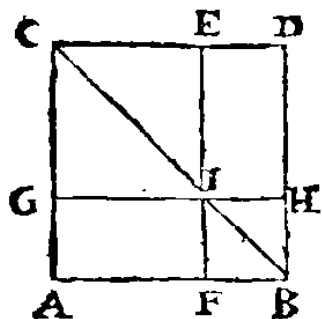
Car les deux suppléments CH , & HE estans egaux par la 43. p. 1. Item les deux rectángles AK , & CH aussi egaux par la 36. p. 1. d'autant qu'ils sont sur bases egalles, & entre mesmes parallèles, & par la 1. corol. sent. AK fera egal à HE , & en adioustant à chascun d'iceux le rectángle commun CI , le Gnomon MNO fera egal au rectángle AI . Mais iceluy Gnomon avec le quarré KG sont egaux au quarré CE : donc le rectángle AI avec le quarré KG sera egal au mesme quarré CE .

THEOR

THEOR. 7. PROP. VII.

Si vne ligne droite est coupce comme on voudra: le quarré de la toute & le quarré de l'une des parties, sont egaux au quarré de l'autre partie, & deux fois le rectangle compris de la totale, & de la partie premierement prise.

Soit la ligne AB coupce comme on voudra au point F. Je dis que les deux quarrés de la totale AB, & de la partie AF, sont egaux au quarré de l'autre partie FB, & au rectangle deux fois, de AB, AF.



Qu'il ne soit ainsi: sur AB soit décrit le quarré AD avec sa diagonale BC, & après auoir mené du point F, FE parallèle à AC, laquelle coupera la diagonale BC au point I, d'iceluy point soit menée GH parallèle à AB par la 31. p. 1. Donc FH & GE seront quarrés par le corol. de la 4 p. 2. & puis que par la 34. p. 1. GI est égale à AF; GE sera quarré du segment AF. De rechef pour ce que AC est égale à AB, le rectangle AE sera compris sous la toute AB, & le segment AF. Par mesme raison le rectangle GD sera compris sous les mesmes lignes AB, AF: (car CD, CG sont égales à AB, AF, à cause des quarrés AD, GE.) Veu donc que les rectangles AE, ID, avec le quarré FH sont égaux au quarré AD; si on leur appose le commun quarré EG, les quarrés AD, EG seront égaux aux rectangles AE, GD, (chacun desquels est compris de la toute AB & de la partie AF) avec le quarré FH: ce qu'il falloit démonstrer.

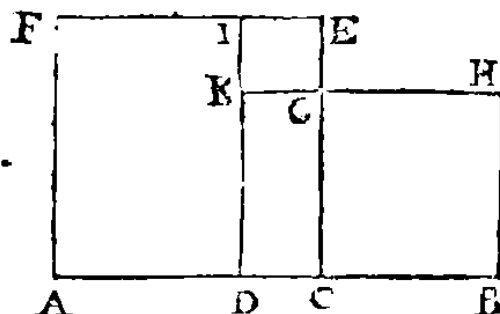
S C H O L I E.

Commandin demonstre en ce lieu le theoreme suivant.
Si vne ligne droite est coupce en deux parties inegales; les quarrés d'icelles parties sont égaux au rectangle contenu deux

fois sous icelles parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excède la moindre.

Soit la ligne droite AB couppee en deux parties inegales, AC , CB , desquelles AC est la plus grande; & d'icelle AC soit prise AD egale à BC , afin que DC soit l'excez de la partie AC par dessus BC . Je dis que les quarréz des parties AC , CB , sont egaux au rectangle contenu deux fois sous AC , CB , & au quarré de DC .

Car soient construits les quarréz AE , CH , & mené DI parallele à CE : puis prolongé HG iusques à ce qu'elle rencontre DI en K . Or d'autant que les lignes BC , AD sont egales, leur



adioustant la commune DC , la toute AC , c'est à dire CE , sera egale à la toute DB . Mais CG est aussi egale à CB : donc aussi le reste GE sera egal au reste DC : & partant puis qu'aussi IE est egale à DC par la 34. p. 1. GE , IE seront egales: & partant IG sera le quarré de l'excez DC : Et d'autant que les rectangles AI , DH , sont contenus sous les parties AC , CB (car AC est egale à l'une & à l'autre ligne AF , DB : & CB à l'une & à l'autre AD , BH .) Il est manifeste que les quarréz AE , CH , des parties AC , CB , sont egaux aux rectangles AI , DH , qui sont contenus sous les parties AC , CB , & à IG quarré de l'excez DC : ce qui estoit proposé.

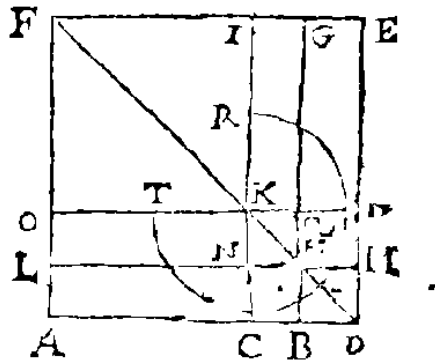
THEOR. 8. PROP. VIII.

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra; quatre fois le rectangle compris de la toute & de l'une des parties, avec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré de la toute, & d'icelle partie premierement prise comme d'une seule ligne.

Soit la ligne donnee AB couppee comme on voudra au point C . Je dis que quatre fois le rectangle compris de AB & de l'un ou l'autre segment, sçavoir BC , c'est à dire de AB , & ED (si apres auoir prolongé la ligne AB , on fait BD egale à BC) avec le quarré de AC sont egaux au quarré de AD

composée de la totale AB , & de la partie BC .

Qu'il ne soit ainsi : sur AD soit fait le quarré AE avec sa diagonale FD , & des deux poinçts B & C soient menées BG & CI parallèles à DE . Item des poinçts H & K , auxquels elles coupent la diagonale FD , soient menées LM & OP parallèles à AD , par la 31. p. 1. lesquelles coupēt les premières parallèles en N & Q .



Premierement par ce qui resulte de la 4. p. 2. les rectangles OI , NQ , BM , au long de la diagonale seront quarréz. Item d'autant que CB est égale à BD ; CH & BM seront égaux, & quarréz : (étant l'un d'iceux quarré) pareillement NQ & HP aussi égaux quarréz ; ainsi les quatre CH , BM , NQ , HP , seront quarréz & égaux : & par la 43. p. 1. les deux suppléments LK & KG seront aussi égaux entr'eux, & par la 36. p. 1. LK est égal à AN , & KG à QE : & par conséquent iceux quatre rectangles sont aussi égaux entr'eux. Mais comme aux précédentes, il est évident que AH est vne fois le rectangle de AB & BH (égale à BD) qui est vn des quatre rectangles avec vn des quatre petits quarréz égaux : donc iceux quatre rectangles avec iceux quatre quarréz faisant le Gnomon RST , seront égaux à quatre fois le rectangle de AB & BD , lequel Gnomon avec le quarré de OK (égale à AC par la 34. p. 1.) sçavoir est OI , conviennent avec le quarré AE , & par la 8. com. sent. ils luy seront égaux : ce qui estoit à démonstrer.

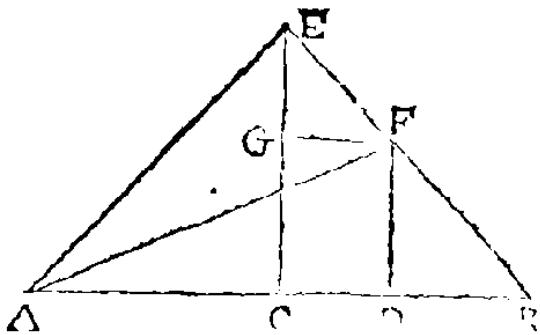
THEO. 9. PROP. IX.

Si vne ligne droite est coupee en deux parties égales, & en deux inégales; les quarréz des parties inégales seront doubles des quarréz de la moitié, & de la section du milieu.

Soit la ligne donnée AB coupee en deux également au poinçt C , & en deux inégalement en D . Je dis que les quar-

rez de AD & DB parties inégales, sont doubles des quarrés de AC moitié, & de CD partie du milieu.

Qu'il ne soit ainsi: au point C soit leuee la perpendiculaire CE., qu'on fera egalle à CA; & apres auoir mené



AE, & BE, soit leuee la perpendiculaire DF, coupant BE en F, duquel point soit menée FG parallèle à AB, coupant CE en G: & finalement soit menée AF.

Premierement, les triangles ACE, & ECB seront Isosceles, & feront les angles sur les bases AE, & EB egaux par la 5. p. 1. sçauoir GEF, à FBD, & demy droicts par la 32. p. 1. estant l'angle ECB droit pour estre CE perpendiculaire. Item FDB estant droit, & DBF demy droit, aussi par la 32. p. 1. DFB sera demy droit, & par la 6. p. 1. les costez DB, & DF, du triangle BDF, seront egaux entr'eux. Par le mesme discours sera démontré que les costez GF, GE du triangle FGE, sont egaux entr'eux. Item il est euident que l'angle AEB sera droit, estant composé des deux demy droicts AEC, BEC.

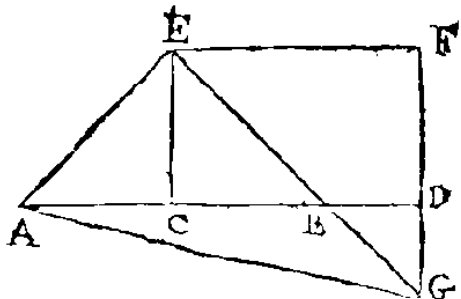
Maintenant par la 47. p. 1. au triangle rectangle ACE, le quarré de AE, costé qui soustient l'angle droit, est double du quarré de AC, estant égal à tous les deux de AC, & CE. Par le mesme discours EF est double du quarré de GF, ou CD son egale par la 34. p. 1. partant les deux quarrés de AE & EF, seront doubles des deux de AC, & CD. Pareillement le quarré de AF estant égal aux deux de AE, & EF par la 47. p. 1. iceluy sera double des deux de AC, & CD Mais par la mesme 47. p. 1. le quarré de AF est égal aux deux de AD, & DF, ou DB son égal: donc les deux quarrés de AD & DB seront doubles des deux de AC, & CD; ce qui estoit à demonstrier.

THEOR. 10. PROP. X.

Si vne ligne droite est coupee en deux parties egales, & on luy adiousté directement quelque autre ligne droite; le quarré de la toute avec l'adioustee comme d'une, & le quarré de l'adioustee, sont doubles aux

quarrez de la moitié, & de celle qui est faicte de la moitié, & de l'adjouſtee comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupee en deux également au point C, a laquelle ſoit adjouſtee directement BD. Je diſ que les quarrez de AD & BD, ſont doubles des quarrez de AC, & CD.



Qu'ainſi ne ſoit, au point C ſoit leuee la perpendiculaire CE par la 11. p. 1. egale à AC: & apres auoir mené les deux lignes AE & EB, ſoient menees par la 31. p. 1. EF parallele à CD, & DF à CE ſe rencontrant en F, & ſoient continuees EB, & FD juſques à ce qu'elles ſe coupent au point G. Finablement ſoit tiree la ligne AG.

Premierement puis que AC & CE ſont egaux, auſſi par la 5. p. 1. les angles EAC, & CEA ſont egaux & demy droicts par la 32. p. 1. eſtant l'angle ACE droit. Par meſme diſcours, les angles CBE & BEC ſeront auſſi demy droicts, & l'angle AEB droit, eſtant compoſé de deux demy droicts. Item par la 15. p. 1. l'angle DBG ſera egal à CBE, & demy droit, & les deux lignes CD & EF eſtans paralleles, par la 29. p. 1. l'angle interieur de meſme coſté BEF ſera auſſi demy droit, & l'angle F, eſtant droit par la 34. p. 1. car il eſt oppoſé à vn droit, BGD ſera demy droit par la 32. p. 1. & par la 6. p. 1. les triangles EGF, & BDG ſeront Iſoſceles rectangles, & CF parallelograme rectangle.

Maintenant par la 47. p. 1. le quarré de AE, coſté qui ſouſtient l'angle droit C, eſt egal aux deux quarrez des deux autres coſtez AC, CE; partant double du quarré de AC. Par meſme diſcours EG ſe trouuera double du quarré de EF, ou de CD qui luy eſt egal par la 34. p. 1. ainſi les deux quarrez de AE, & EG, ou le ſeul de AG qui leur eſt egal par la 47. p. 1. ſera double des deux de AC & CD. Mais par la meſme 47. p. 1. il eſt egal au deux quarrez de AD & DG, ou BD ſon egal; & par conſequent les deux quarrez de AD & BD ſeront doubles des deux de AC & CD: ce qu'il falloit prouuer.

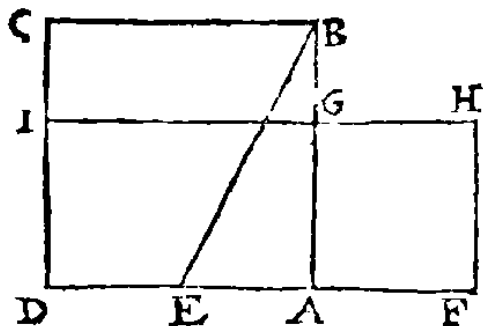
PROBL. I. PROP. XI.

Couper vne ligne droite donnee, tellement

que le rectangle de la toute, & de l'une des parties, soit egal au quarré de l'autre.

Soit la ligne droite donnee AB, laquelle il faut diuiser selon le requis de la prop.

Après auoir construit sur icelle le quarré AC, soit diuisee AD en deux également au point E, & après auoir mené EB, & prolongé EA vers F, tellement que EF soit égale à EB, sur AF soit fait le quarré AH & soit continuee HG iusques en I. Je dis que la ligne



AB est coupee au point G, en sorte que le rectangle CG compris de BC égale à BA, & de BG partie de BA, est egal au quarré de l'autre partie AG, sçauoir à GF.

Car la ligne AD estant coupee en deux également en E, & on luy adiouste directement AF, le quarré de la moitié & de l'adioustee comme d'une, sçauoir EF ou de son égale EB, est egal au rect. de DF, AF, & au quarré de AE par la 6. p. 2. Mais le quarré de EB est egal aux deux de BA, & AE par la 47. p. 1. ainsi les deux quarrés de BA, & AE seront egaux au rectangle de DF, AF, & au quarré de AE : ostans donc le quarré de AE commun, les demeurans quarré de AB, sçauoir AC, & le rectangle de DF, AF, sçauoir FI, seront egaux, desquels AC & FI, si on oste le rectangle commun AI, le demeurant quarré FG, sera egal au demeurant rectangle GC.

S C H O L I E.

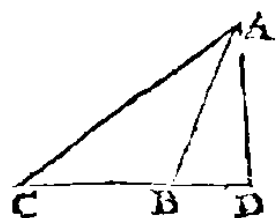
Nous auons enseigné en nos memoires Mathematiques Prob. 72 à couper une ligne droite, non seulement comme enseigne icy Euclide, mais aussi en sorte que le rectangle de la toute, & de l'une des parties soit double, ou triple, ou quadruple &c. ou moitié, ou tiers, ou quart &c. du quarré de l'autre partie : bref qu'iceluy rectangle soit à quarré, selon quelconque raison darnee.

THEOR. II. PROP. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du co-

ste qui soutient l'angle obtus, est plus grand que les quarez des deux autres costez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris du costé contenant l'angle obtus, sçavoir celui sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

Soit le triangle ambligone ABC, duquel soit prolongé le costé CB iusques en D, & du point A soit mence la perpendiculaire AD par la 12.p.1. Je dis que le quarré du costé AC qui soutient l'angle obtus ABC, est plus grand que les quarez de



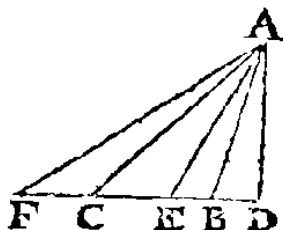
AB & CB, de deux fois le rectangle de CB & BD, sçavoir CB, qui est l'un des costez faisant l'angle obtus, celui sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire AD, & BD prise dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire; c'est à dire que le quarré du costé AC est egal aux deux quarez des costez AB, BC, avec deux fois le rectangle de CB, BD.

Qu'il ne soit ainsi: Puis que la ligne CD est couppee en B, le quarré d'icelle CD sera egal aux deux quarez de CB, BD, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD, par la 4.p.2. Adioustant donc le commun quarré de AD, les deux quarez de CD, DA, seront egaux aux trois quarez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD. Mais par la 47.p.1. le quarré de AC est egal aux quarez de CD, DA: donc aussi le quarré de AC sera egal aux trois quarez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD. Et puis que par la 47.p.1. le quarré de AB est egal aux quarez de BD, DA; le quarré de AC sera egal aux quarez de CB, AB, & a deux fois le rectangle de CB, BD: ce qui estoit à prouuer.

S C H O L I E.

Or que la perpendiculaire tiree de A, doine tomber sur le costé CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a pris icy Euclide, nous

le démonstrerons ainsi : Soit le triangle ABC ayant l'angle B obtus, & le costé CB prolongé de la part de B . Je dis que la perpendicul.

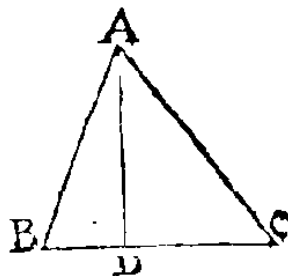


re de A , tombe hors le triangle sur le costé CB prolongé, comme est la ligne droite AD . Car si elle tomboit dans le triangle, comme est la ligne AE , les deux angles ABE , AEB seroient plus grands que deux droicts, contre la 17. p. 1. Mais si elle tomboit hors le triangle sur le costé BC prolongé de la part de C , comme est AF , derechef au triangle ABF , les deux angles ABF , AFB seroient plus grands que deux droicts : ce qui est absurde.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, est plus petit que les quarez des deux autres costez, de deux fois le rectangle de l'un des costez qui font l'angle aigu, sçavoir celui sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise au dedás entre la perpédiculaire, & l'angle aigu.

Soit le triangle ABC , ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au costé BC . Je dis que le quarré du costé AB , qui soustient l'angle aigu C , est plus petit que les deux quarez des deux autres costez AC , & CB de 2. fois le rectangle de BC & CD : sçavoir BC , l'un des costez qui font l'angle aigu C , sur lequel tombe la perpendiculaire, & CD prise entre la perpendiculaire & l'angle aigu C .



Car d'autant que la ligne BC est couppee en D , les quarez de BC , CD sont egaux au quarré de BD , & deux fois le rectangle de BC , CD par la 7. p. 2. auxquels si on adiouste le

quarré commun de AD, les trois quarez de BC, CD, AD, seront egaux aux deux quarez de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC, CD. Mais les deux triangles A D B, A D C estans rectangles, le quarré de AB est égal aux deux quarez de AD, DB : & le quarré de AC aux deux quarez de AD, DC par la 47. p. 1. Donc les deux quarez de AC, BC seront egaux au quarré de AB, & deux fois le rectangle de BC, CD : en ostant donc iceux deux rectangles, le quarré de A B sera d'autant plus petit que les quarez de A C, B C : ce qu'il falloit prouver. On démontrera en la mesme maniere que le quarré du costé AC, qui soustient l'angle aigu B, est plus petit que les deux quarez des deux autres costez AB, BC, de deux fois le rectangle de CB, BD.

S C H O L I E.

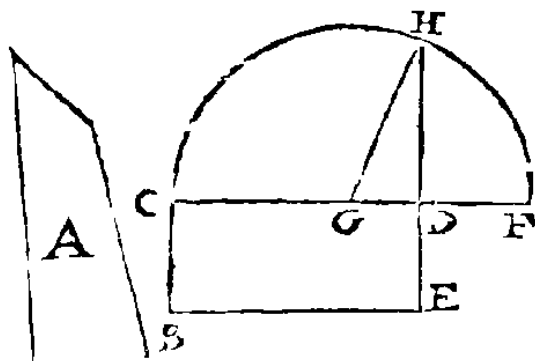
Or combien qu'Euclide propose ce theoreme des triangles oxigones seulement : toutesfois le mesme est aussi veritable es triangles rectangles & ambligones, la perpendiculaire tombant de l'angle droit ou obtus : Car il est manifeste par la 17. ou 32. p. 1. que les deux autres angles sont aigus : & partant la perpendiculaire tombera toujours dans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demonstration : ce qui est aussi facile à prouver. Car si elle tomboit hors le triangle, il s'ensuiuroit qu'un angle aigu seroit plus grand que le droit : ce qui est absurde.

P R O B. 2. P R O P. XIII.

Faire vn quarré egal à vne figure rectiligne donnee.

Soit donnee la figure rectiligne A, à laquelle il faut faire vn quarré egal.

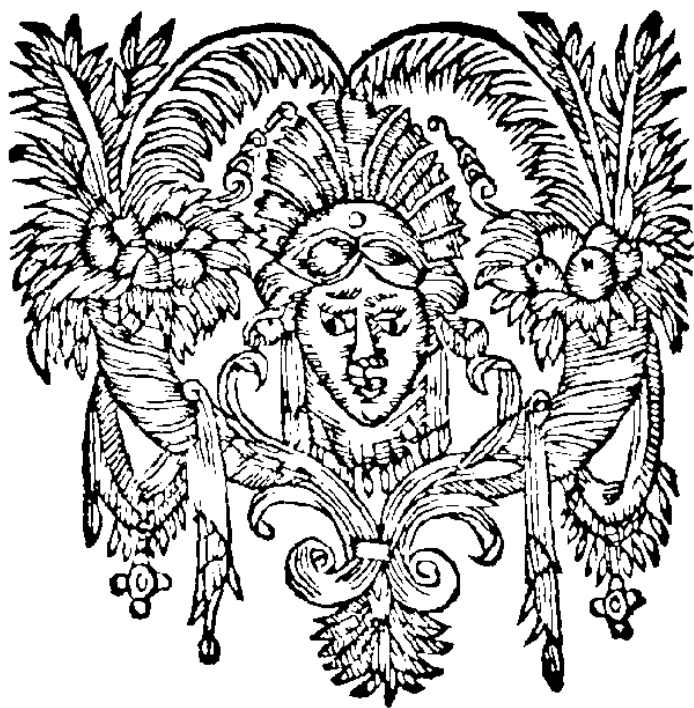
Soit premierement fait le parallelograme BD egal à la figure A & ayant vn angle droit par la 45. p. 1. puis soit prolongé le costé CD iusques en F, & fait DF egale a DE : & apres auoir couppé CF, en deux egallement au poinct G, & d'iceluy poinct G & intervalle GC ou GF, descrire le demy



cercle CHF soit continuée ED iusques en H en la circonférence du demy cercle. Je dis que le quarré de DH est egal a la figure rectiligne A.

Car puisque CB est couppee en deux egalelement au point G & en deux inegalelement au point D, le rectangle de CD & DF, sçauoir BD, avec le quarré de la section du milieu GD, est egal au quarré de la moitié GF par la 5. p. 2. ou de son egal GH, lequel est egal aux deux quarez de GD & DH par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de GD, le demeurant quarré de DH, se trouuera egal au demeurant rectangle BD: & par consequent a la figure rectiligne donnée A.

Fin du second Element.



E L E M E N T

TROISIÈME.

DEFINITIONS.



Ercles egaux , sont ceux desquels les diametres sont egaux , ou desquels les lignes menees du centre à la circonference sont egalles.

2. Vne ligne droite est dite toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, si elle est continuee ne le coupe point.

3. Les cercles sont dits se toucher l'un l'autre, quand en se touchant ils ne se coupent point.

4. Les lignes droictes sont dictes estre equidistantes du centre , lors que les perpendiculaires tirees du centre sur icelles sont egales. Mais celle est plus esloignee du centre , sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

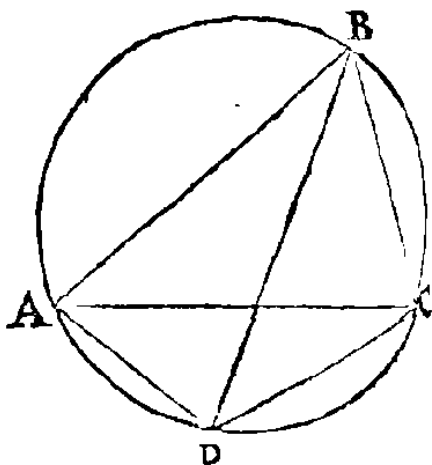
5. Section de cercle , est vne figure comprise d'une ligne droite , & de la circonference du cercle.

6. L'angle de la sectiō, est celuy cōpris d'une ligne droicte , & de la circonference du cercle.

7 Vn angle se dit estre en la section, lors que sur vn poinct pris en la circonférence, sont menees deux lignes droictes des deux extremités de la ligne qui sert de base à la section, & c'est l'angle compris d'icelles deux lignes.

8. Mais quand les lignes droictes qui comprennent l'angle embrassent quelque circonférence, l'angle est dit estre en icelle.

Euclide définit ex trois precedentes definitions trois sortes d'angles qu'on considere au cercle. En la 6. il dit que l'angle mixte BAC ou BCA , contenu sous la ligne droicte AC , & la circonférence AB C , s'appelle angle de la section. En la 7. def. il dit que si à quelque poinct B , prins en la circonférence d'une section ABC , sont menees deux lignes droictes AB , CB , des extremités de la ligne droicte AC qui sert de base à la section; l'angle rectiligne ABC , sera dit estre en la section ABC : Ainsi aussi l'angle rectiligne ADC sera dit estre en la section ADC : mais l'angle BAC , en la section BAC . Et en la 8. def Euclide dit qu'est pris quelque poinct B , en la circonférence du cercle $ABCD$, si on tire d'iceluy les lignes droictes BA , BC , aux deux extremes A & C , de la circonférence ADC , laquelle prennent icelles lignes BA , BC ; l'angle rectiligne ABC sera dit estre, ou s'appuyer sur la circonférence ADC . Ainsi aussi l'angle ABD sera dit s'appuyer sur la circonférence AD & l'angle BAD , sur la circonférence BCD ; mais l'angle BAC , sur la circonférence BC .



9. Secteur de cercle, est vne figure de deux lignes droictes embrassant quelque circonférence, & faisant angle au centre du cercle.

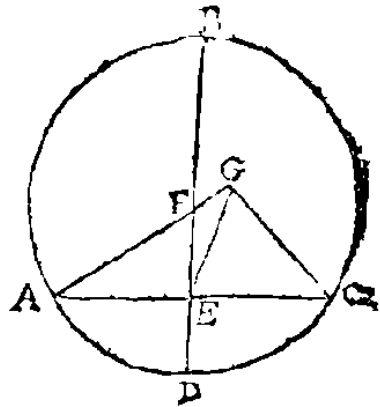
10 Semblables sections de cercle, sont celles qui reçoivent angles egaux; ou bien celles les angles sont egaux entr'eux.

PROBL. I. PROP. I.

Trouuer le centre d'un cercle donné.

Soit le cercle donné ABC , duquel il faut trouuer le centre.

Soit tirée la ligne AC à l'aduenture, laquelle par la 10. & 11. p. 1. soit couppee en deux également, & à droicts angles par la ligne BD , se terminant à la periphèrèe es poinçts B & D ; & icelle BD estant couppee en 2. également en F . Je dis que F est le cẽtre du cercle proposẽ.



Car en icelle ligne droiçte BD , vn autre poinçt que F ne fera pas le centre, veu que tout autre poinçt la diuise inegalement. Si donc le poinçt F n'est le centre; le poinçt G hors la ligne BD soit le centre (s'il est possible) duquel soiẽt mencees les trois lignes droiçtes GA , GE , & GC : d'autant que si G estoit le centre, par la def. du cercle AG & GC seront egales; mais AE & EC sont aussi egales, & GE commune: donc les deux triangles GEA & GEC ont deux costez egaux à deux costez chacun au sien, & la base AG egale à la base CG , & par la 8 p. 1. les angles AGE & CEG seront egaux, & partant droiçts, & la ligne EG perpendiculaire par la 10. def. 1. Mais l'angle BEA par la construction est droiçt, & tous les angles droiçts sont egaux par la 10. commune sentence: donc les 2. angles AGE & BEA seroient egaux, sçauoir le tout à sa partie; ce qui est absurde. Donc le poinçt G n'est pas le centre. Le mesme inconuenient s'ensuiura prenant tout autre poinçt hors la ligne BD . Partant le poinçt F sera le centre du cercle ABC requis à trouuer.

COROLLAIRE.

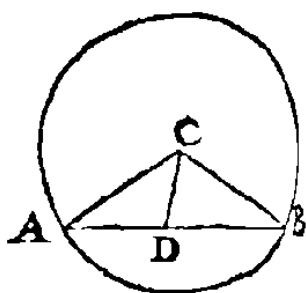
De cecy est manifeste que si au cercle une ligne droiçte coupe une autre ligne droiçte en deux également, & à angles droiçts; le centre du cercle sera en icelle coupante. Car il a esté demonstrez qu'il est impossible que le centre du cercle ABC soit ailleurs qu'au poinçt F

milieu de la ligne BD , laquelle coupe la ligne AC en deux également, & à angles droicts en E .

THEOR. I. PROP. II.

Si en la circonference d'un cercle, on prend deux poinçts à l'adventure ; la ligne droite mennee de poinçt à autre, tombera dans le cercle.

En la circonference de cercle AP , dont le centre est C , soient pris deux poinçts tels qu'on voudra A & B . Je dis que la ligne droite AB mennee d'un poinçt à l'autre tombe dans iceluy cercle.



Car soit prins en icelle ligne droite AB quelconque poinçt comme D , entre ses extremes A & B ; puis du centre C , soient menees les lignes droictes CA , CD , CB . D'autant que les deux costez AC , BC du triangle ACB sont egaux, les angles BAC , ABC , seront egaux par la 5. p. 1. Mais l'angle externe ADC est plus grand que l'angle interne ABC par la 16. p. 1. donc le mesme angle ADC sera plus grand que l'angle BAC : & partant par la 19. p. 1. le costé AC sera plus grand que le costé CD : parquoy puis que CA est tirree du centre iusques à la circonference, la ligne droite CD ne paruiendra iulques à icelle circonference : & par consequent le poinçt D tombe dans le cercle. Le mesme sera demonstrie de tout autre poinçt pris Donc toute la ligne droite AB tombe dans le cercle : ce qu'il falloit prouuer.

C O R O L L A I R E.

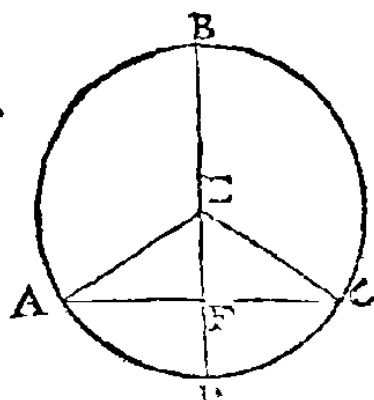
De cecy est manifeste, qu'une ligne droite touchant un cercle, le touche seulement à un poinçt : car si elle le touchoit à deux poinçts, la partie de la ligne d'entre iceux poinçts tomberoit dans le cercle par ceste prop. parquoy elle couperoit le cercle, contre l'hypothese.

THEO. 2. PROP. III.

Si dans le cercle quelque ligne droite passe

par le centre, & coupe en deux egalle-
ment
vne autre ligne droicte ne passant point par
le centre; elle la couppera à droicts angles:
& si elle la coupe à droicts angles, elle la
couppera aussi en deux egallement.

Au cercle ABCD soit la ligne droi-
cte BD, laquelle passant par le centre
E, coupe en deux egalemēt la ligne
droicte AC, laquelle ne passe point
par le centre; ie dis que BD coupe
aussi AC en angles droicts au
point F.



Car estans menees les deux lignes
CE & AE, les deux triāgles AEF, CEF
auront les deux costez AF, FE, egaux
aux deux costez CF, FE, chacun au sien, & la base AE egale à
la base EC, & par la 8. p. r. les deux angles au point F seront
egaux, & partant droicts par la 10. def. r.

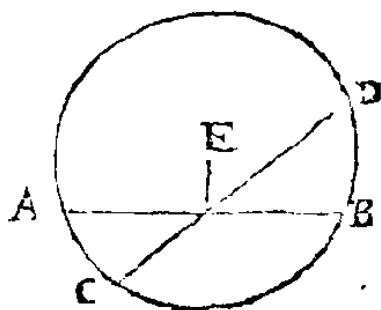
Ie dis pareillement que si BD coupe AC en angles droicts
au point F; qu'elle la couppera aussi en deux egalemēt. Car
les deux angles au point F estans droicts, ils seront egaux, &
l'angle A est egal à l'angle C par la 5. p. r. estant A E C isos-
cele, & le costé EF cōmun aux deux triāgles AEF, CEF, &
par la 26. p. r. AF sera egale a CF.

THEOR. 3. PROP. IIII.

Si dans le cercle deux lignes droictes ne pas-
sans point par le centre, s'entrecoupent, el-
les ne se couperont point l vne l'autre en
deux egallement.

Au cercle ACBD, duquel le centre
est E, soient deux lignes AB & CD
s'entrecoupans au point F, & des-
queilles ny l vne ny l'autre ne passe
par le centre E. Ie dis que l vne ou
l'autre est coupee inegalemēt.

Car du centre E estant menee la li-



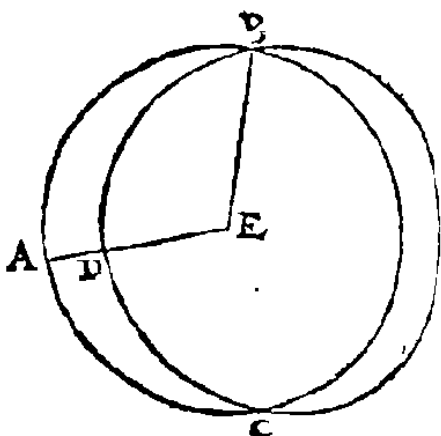
gne EF; si icelles lignes AB, CD se coupent en deux également au point F, EF les coupera au mesme point aussi en deux également, & à droicts angles par la 3. p. 3. & les angles AFE, EFB seront droits & égaux à CFE EFD aussi droits & égaux: ce qui est impossible, n'estant AFE que partie de CFE: ainsi les lignes AB, CD ne se coupoient pas en deux également.

THEOR. 4. PROP. V.

Si deux cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles ABC, BCD se coupans l'un l'autre en B & C. Je dis qu'ils ne sçauroient auoir vn mesme centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun E, duquel soient tirees deux lignes droictes: sçauoir EB à la section B, mais EA coupant l'une & l'autre circonference en A & D. D'oc puis que E est posé centre du cercle BCD la ligne droicte ED sera égale à la ligne droicte EB par la 1. d. 1. Derechef puis que E est aussi posé centre du cercle ABC la ligne droicte EA sera aussi égale à la mesme ligne EB, & par la 1. com. sent. ED, EA seront égales entr'elles, la partie au tout, ce qui est impossible: partāt les deux cercles ne pouuoient auoir vn mesme centre.

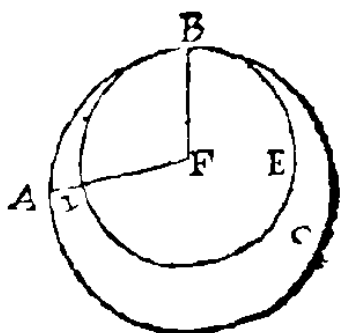


THEOR. 5. PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles ABC, & DBE se touchans l'un l'autre au dedans en B. Je dis qu'ils n'auront pas mesme centre.

Car s'il est possible, soit leur centre cõmun F, & d'iceluy soient menees les 2. lignes FA & FB : sçauoir est FB à l'atouchement B ; & FA, couppant l'un & l'autre cercle en D, A, il est euidnt que la mesme absurdité aduiendia qu'en la precedente ; sçauoir que FA, FD seroiẽt egales : donc F ne pouuoit estre centre commun des cercles proposez.



S C H O L I E.

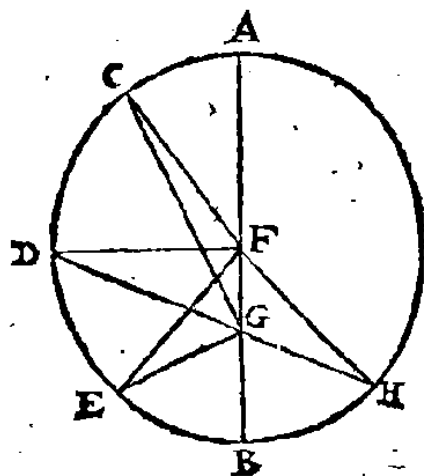
Euclide a proposé ce theoreme des cercles s'entre-touchans seulement au dedans, d'autant que des cercles qui se touchent par dehors il appert assez que leurs centres sont diuers : veu qu'un des cercles est dehors l'autre, & le centre est tousiours au milieu de son cercle. Ce que Dounot pouuoit icy remarquer, & non pas faire la prop. generale comme il a fait contre l'intention d'Euclide, laquelle il a changée en plusieurs endroits de ce liure, soit ou en changeant les mots dont il a usé pour s'exprimer, ou en les retranchant, ou y adioustant : Comme pour exemple en la prop. suivante, au lieu qu'il y a selon Euclide, qui est menee par le centre, Dounot luy fait dire, qui coupe le centre : chose absurde, puis que par les def. le centre du cercle est un point lequel est indiuisible : Il fait encore la mesme faute à la 19. p. 3. & en la 8. de ce mesme liure il a retranché ces mots, De laquelle l'une passe par le centre, & les autres où l'on voudra. Et au lieu que ceste prop. ne contient que 5. parties, il en a adiousté une à la demonstration : sçauoir est celle qu'il fait la tierce. Item il a retranché les deux dernieres parties de la 31. p. de ce mesme liure.

THEOR. 6. PROP. VII.

Si au diametre du cercle se prend quelque point qui ne soit pas le centre, & d'iceluy point tombent quelques lignes droites en la circonference; la plus grande sera celle en laquelle est le centre, & la plus petite celle qui

de celle qui est menée par le centre, est plus grande que la plus esloignée : Et deux lignes droictes tant seulement venans d'iceluy point de part & d'autre du diametre, sont egales.

Au diametre AB du cercle ACD
EB, duquel le centre est F, soit pris
quelque point G outre le centre,
& d'iceluy point G tombent tant
qu'on voudra de lignes droictes
GC, GD, GE, en la circonference.



Je dis en premier lieu, que de toutes les lignes menees de G à la circonference, GA en laquelle est le centre, est la plus grande. Car du centre F estans menees à C, D, & E, les lignes FC, FD, & FE : le triangle G F C aura les deux costez GF, FC, plus grands que le costé GC par la 20. p. r. Mais les lignes GF, FC sont egales aux lignes GF, FA, c'est à dire à toute la ligne GA : donc GA sera aussi plus grande que GC. Par mesme raison GA sera aussi plus grande que GD, & que GE : parquoy la ligne GA est la plus grande de toutes celles menees de G à la circonference.

Secondement, ie dis que GB est plus petite que GD, ou autre quelconque : car au triangle DFG, les deux costez DG & GF, seront plus grands que le troisieme DF par la 20. p. r. ou que son egale BF. Que si on oste la ligne commune GF, le demeurant GD sera plus grand que le demeurant GB. Par mesme raison GB sera aussi plus petite que GE, & que GC, ou autre quelconque tombant de G à la circonference.

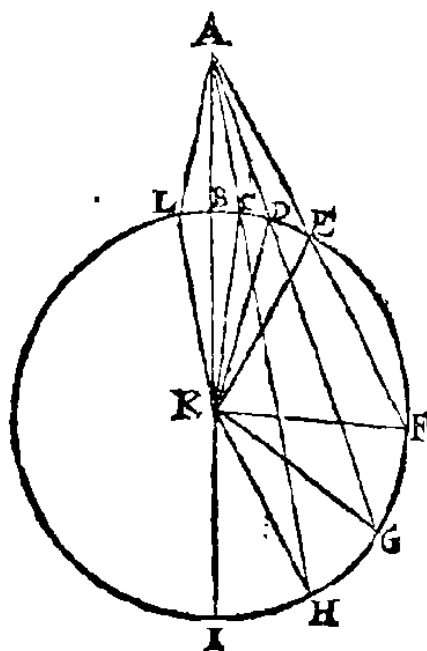
Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG, que GD, est plus grande qu'icelle GD : & pour la mesme raison GD plus grande que GE, & ainsi des autres s'il y en auoit davantage de tirees de F à la circonference. Car les deux costez GF, FC du triangle GFC, sont egaux aux deux costez GF, FD du triangle GFD, chacun au sien : mais l'angle C F G plus grand que l'angle D F G : & partant par la 24. p. 1. la base GC sera plus grande que la base GD. Pour mesme raison GC sera plus grande que GE : Item GD plus grande que GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui est menee par le centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignée.

Finalemēt, ayant fait l'angle BFH égal à l'angle BFE, & tiré GH: ie dis que les lignes GE, GH, sont egales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonférence aucune autre égale à icelles. Car d'autant que les costez EF, FG du triangle EFG, sont egaux aux costez HF, FG du triangle HFG, & les angles EFG, HFG aussi egaux: les lignes GH, GE, qui sont de part & d'autre du diamètre, sont egales entr'elles: Et il est euident qu'on ne pourra tirer du poinct G vne autre ligne dans le cercle, qui ne s'approche ou recule de la ligne BA tombant de costé ou d'autre de GE, ou GH; & par ce qui a esté mōstré cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'vne & l'autre d'icelles GE, GH. Dōc du poinct G à la circonférence ne se peuvent tirer plus de deux lignes droictes qui soient egales entr'elles.

THEOR. 7. PROP. VIII.

Si on prend quelque poinct hors le cercle, & d'iceluy soient menees quelques lignes droictes dans la circonférence, desquelles l'vne passe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui passe par le cētre sera la plus grāde de toutes celles qui seront menees dans la circonférence concaue. Quant aux autres, toujours la plus proche de celle qui passe par le centre est plus grande que la plus esloignée. Mais de celles qui tombent en la circonférence conuexe, la plus petite est celle qui est comprise entre le poinct & le diamètre. Quant aux autres, la plus esloignée de la plus petite est plus grande que celle qui en est plus proche; & n'y a que deux lignes droictes qui puissent tomber egales de part & d'autre de la plus petite.

Du point A hors le cercle BCD E, le centre duquel est K, soient menees les lignes droictes AF, AG, AH, AI couppans le cercle, desquelles AI passe par le centre K, & les autres comment que ce soit. Je dis que AI qui passe par le centre, est la plus grande de toutes : puis apres que AH qui est la plus proche d'icelle AI, est plus grãde que AG qui en est plus esloignee : Et pour mesme raison AG, plus grande que AF. Et au contraire. Je dis que AB cõprise entre le point A & la circonference convexe, est la plus petite ligne, de toutes celles qui sont hors le cercle : puis apres que la ligne AC plus prochaine de la plus petite AB, est moindre que AD qui en est plus esloignee : Et par mesme raison icelle AD moindre que AE. Enablement ie dis que de A, on peut seulement mener deux lignes droictes, egales des deux parts de la plus petite AB.



Car du centre K estât menees aux points C, D, E, F, G, H, les lignes droictes KC, KD, KE, KF, KG, KH; les deux costez AK, KH, du triangle AKH, sont plus grands que la ligne AH. Mais les lignes AK, KH sont egales aux lignes AK, KI, c'est à dire à toute la ligne droicte AI: icelle AI sera donc aussi plus grande que AH. Pour la mesme raison AI sera plus grande que AG, & que AF. Parquoy la ligne AI est la plus grande de toutes celles qui tombent de A dans le cercle.

Puis apres, d'autant que les costez AK, KH du triangle AKH sont egaux au costez AK, KG du triangle AKG, chacun au sien, & l'angle AKH, plus grand que l'angle AKG; la base AH sera plus grande que la base AG, par la 24. p. 1. Par mesme raison AH sera plus grande que AF; item AG plus grãde que AF. Parquoy la ligne plus proche de celle qui passe par le centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignee.

Derechef, puis qu'au triangle AKC la ligne AK est moindre que les deux AC, CK; si on oste les egales BK, CK, demeurera encore AB moindre que AC. Par semblable raison AB sera plus grande que AD, & que AE. Parquoy la ligne AB est la plus petite de toutes celles qui son menees de A a la circonference convexe.

Derechef, d'autant que dans le triangle ADK tombent deux lignes droictes AC, CK, des extremitéz du costé AK; icelles AC, CK seront moindres que AD, DK par la 21. p. 1. desquelles si on oste les egales CK, DK, restera encore AC moindre que AD. Par mesme raison on prouuera que AC est moindre que AE: Item AD moindre que AE. Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB, est moindre que la plus esloignée.

Finablement, soit fait l'angle AKL egal à l'angle AKC, & soit menee la ligne AL. D'autant que les costez AK, KC du triangle AKC, sont egaux aux costez AK, KL du triangle AKL; & les angles AKC, AKL aussi egaux, les lignes droictes AC, AL de part & d'autre de la moindre AB, seront egales entr'elles par la 4. p. 1. Or que nulle aut e puisse estre egale à icelles, il est euident; car si on en mene vne autre du point A, il faudra qu'elle soit plus proche ou plus esloignée de AB; & par ce qui a esté demonsté cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AL. Donc du point A tomberont seulement deux lignes droictes egales de part & d'autre de la moindre AB.

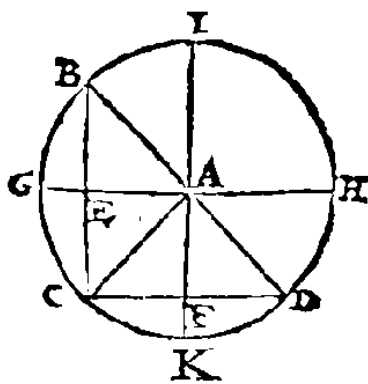
THEOR. 8. PROP. IX.

Si on prend quelque point au cercle, & d'iceluy point vers la circonferencetombent plus de deux lignes droictes egales, le point pris est le centre du cercle.

Soit pris le point A au cercle BCD, & d'iceluy point tombent les trois lignes egales AB, AC, AD. Je dis que le point pris, A est le centre du cercle.

Qu'il ne soit ainsi: soient menees les lignes BC & CD, & apres les auoir couppé en deux egalement aux points E & F, d'iceux points au

point A soient menees les deux lignes EA & FA. D'autant que les deux triangles BEA & CEA ont deux costez egaux à

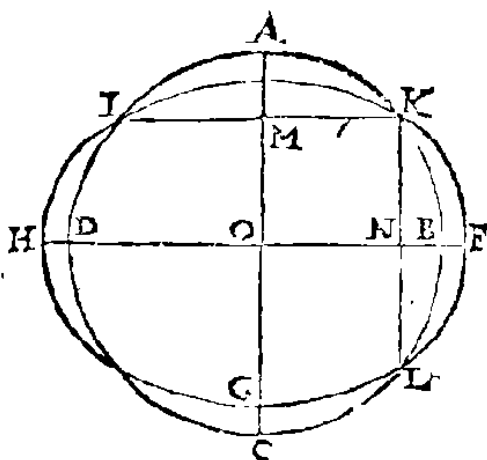


deux costez, chacun au sien; & les bases AB , AC aussi égales; les deux angles au point E seront égaux; & partant droicts, & par le corol. de la 1. p. 3. le centre du cercle sera en la ligne GAH , puis qu'elle diuise BC en deux également, & à angles droicts en E . Par mesme discours le centre du cercle se trouuera aussi en KI . Il faut donc que ce soit à leur commune section A , n'y ayant point d'autre point commun.

THEOR. 9. PROP. X.

Vn cercle ne coupe pas vn autre cercle en plus de deux points.

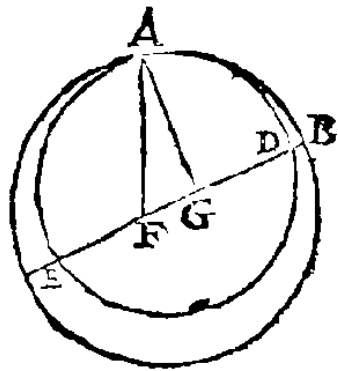
Soient les deux cercles ABC & $EFGH$, se couppans aux trois points I , K , & L , s'il est possible. Item soient menees les deux lignes IK , & KL , lesquelles soient coupees en deux également aux points M & N par la 10. p. 1. & soient menees les lignes MC , & NH à droicts angles sur IK , & KL . Il faudra par le corol. de la 1. p. 3. que les deux centres des deux cercles soient en la ligne AC ; ils seront aussi en la ligne FH : Ce sera donc au point de la commune section O , & en ce faisant les deux cercles auroient mesme centre, contre la 5. p. 3. Donc les cercles ne se pouuoient couper en trois points.



THEOR. 10. PROP. XI.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, & l'on prend les centres diceux: ayant ioinct iceux centres par vne ligne droicte & produite, elle tombera en l'attouchement des cercles.

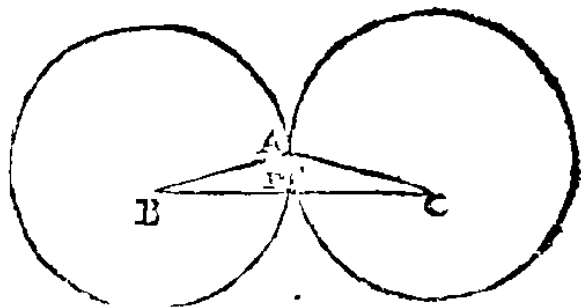
Soient deux cercles ABC & ADE se touchans intérieurement au point A; & F, soit le centre du cercle ABC, & G le centre du cercle ADE, lesquels centres sont nécessairement diuers, puis que par la 6. p. 3. deux cercles s'entre-touchant au dedans, ne peuvent auoir vn mesme centre. Je dis que la ligne droicte menée d'un centre à l'autre, & produicte, tombera sur le point de l'atouchement A. Car si elle n'y tombe, qu'elle coupe l'un & l'autre cercle es points B, D, E, C, & de l'atouchement A, aux centres F & G, soient menées les lignes AF, AG. D'autant que par la 20. p. 1. les deux costez AG, FG du triangle AFG, sont plus grands que le costé FA; & FA est égale à la ligne FB (pource que F a esté posé le centre du cercle ABC) aussi AG, GF seront plus grandes que FB: ostant donc FG commune, restera GA, plus grande que GB. Et partant puis que GA est égale à GD; (car G a esté posé centre du cercle ADE) GD sera aussi plus grande que GB, la partie que le tout: ce qui est absurde. Donc la ligne droicte conioiguât les deux centres des cercles ABC, ADE, & produicte, ne tombera pas ailleurs qu'à l'atouchement A.



THEOR. II. PROP. XII.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors, la ligne droicte menée d'un centre à l'autre, passera par l'atouchement.

Soient deux cercles se touchés au point A, desquels les centres soient B, & C. Je dis que si d'un centre à l'autre on mène une ligne droicte, qu'elle passera par le point d'atouchement A.



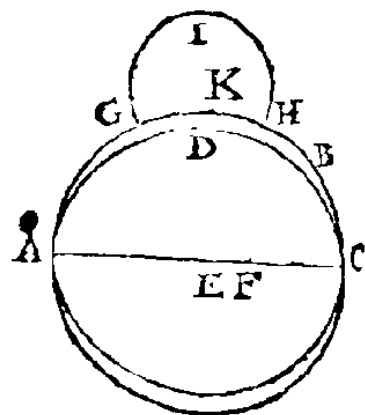
Autrement il s'en suivra absurdité: car si icelle ligne ne passe par le point d'atouchement, qu'elle passe ailleurs s'il est possible, sçavoir aux points

D & E, & du point d'attouchemēt A soient menees les deux lignes AB, & AC, lesquelles par la 20. p. 1. seront plus grandes que BC, & par la def. du cercle, il s'ensuit que BD, étant égale à BA, & CE à CA, que les deux lignes BD & CE, seroient plus grandes que BC, la partie que le tout. La ligne droicte menee d'un centre à l'autre, passera donc par l'attouchemēt A.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Vn cercle ne touche point vn autre cercle à plus d'un point, tant dehors que dedans.

Soient les deux cercles ABC, & AD C se touchans interieurement aux deux points A, & C, s'il est possible; & d'autant qu'ils ne peneuent auoir vn mesme centre par la 6. p. 3. soient les deux centres diuers E, & F, par lesquels étant tirée la ligne droicte EF, & produite de part & d'autre, il faut qu'elle tombe es points d'attouchemēt A & C, & par la def. du cercle, il



faut que E A & EC soiēt égales. Itē FA, & FC. Mais FA est plus grande que EA. Partant FC sera aussi plus grande que EC, la partie que le tout: ce qui est impossible: Donc les deux cercles ne se toucheront point en deux points au dedans.

Parcillement il est impossible qu'ils se touchent exterieurement à plus d'un point: car si le cercle HIG, le centre duquel est K, pouuoit toucher le cercle ABC en deux points, sçauoir H, & G, il faudroit que la ligne droicte menee par les deux centres E & K coupast les deux points d'attouchemēt H, & G. par la 12. p. 3. ce qui estoit impossible: ainsi les cercles ne se touchent point à plus d'un point, tant dehors que dedans.

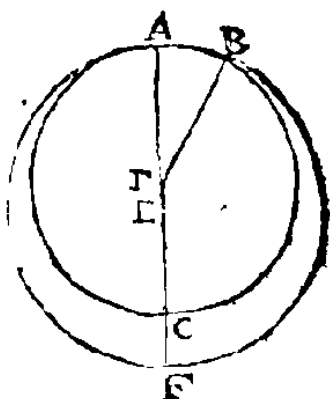
SCHOLIE,

F. Clavius demonstre en ce lieu le theoreme suiuant.

Si au demy diametre d'un cercle produit, on prend vn point, outre

le centre ; le cercle décrit d'iceluy poinct comme centre, par le poinct extreme du demy diametre , touchera le premier cercle en iceluy poinct extreme du semi-diametre, & tombera tout dehors le mesme cercle.

Soit le cercle ABC , duquel le centre est D , & au demy diametre AD prolongé, soit prins quelconque poinct E , duquel & de l'intervalle EA soit décrit le cercle AF , lequel ie dis toucher le cercle ABC au seul poinct A . Car ou le poinct E est dans le cercle ABC , ou dehors. S'il est dedans : d'autant que AE est plus grande que AD , c'est à dire que DC , & à plus forte raison que EC ; EF qui est égale à EA sera aussi plus grande que EC ; & partant le poinct F est hors le cercle ABC , & le cercle AF hors le mesme cercle pres du poinct F . Iceluy poinct F tombera beaucoup d'avantage hors le cercle ABC , si E est hors le mesme cercle ABC . Si donc le cercle AF ne tombe tout dehors le cercle ABC , tellement qu'il le touche au seul poinct A ; que le cercle AF coupe ou touche le cercle ABC en un autre poinct B , si faire se peut, & soit tirée la ligne DB . Veu donc q'au d'ameure du cercle AF est pris le poinct D , outre le centre E ; DA sera la plus petite de toutes les lignes tombantes de D , par la 7 p. 3. Donc DA est moindre que DB , ce qui est absurde; car DA, DB tombant du centre D en la circonference d'un mesme cercle ABC , sont égales. Donc le cercle AF ne coupe ou touche le cercle ABC en un autre poinct que A , mais tombe tout dehors iceluy, ce qui estoit proposé.



Que si au semi-diametre non produit, on prend un poinct outre le centre, le cercle décrit d'iceluy poinct comme centre, par le poinct extreme du semi-diametre touchera pareillement le premier cercle, au susdit poinct extreme du demy diametre, & tombera tout dedans le mesme cercle. Comme si au semi-diametre AE , du cercle AF , on prend le poinct D , duquel & intervalle DA on décrit le cercle ABC , iceluy tombera tout dehors AF , & le touchera au seul poinct A . Car puis qu'il a esté démontré cy dessus que le cercle AF tombe tout dehors le cercle ABC , pareillement tout cestuy-cy tombera dedans celuy là, tellement qu'ils s'entre-touchent au seul poinct A .

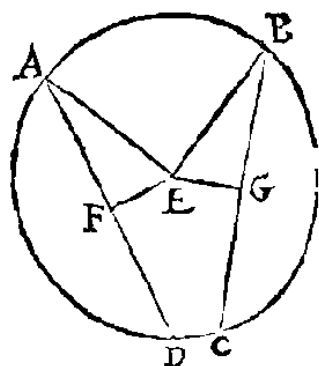
THEO. 13. PROP. XIII.

Dans vn cercle les lignes droictes égales sont

equidistantes du centre : & les equidistantes du centre sont egales entr'elles.

Au cercle ABCD, duquel le centre est E, soient deux lignes droictes, egales AD, & BC. Je dis qu'elles seront equidistantes du centre E.

Qu'ainsi ne soit; par la 12. p. 1. du centre E soient menees les deux lignes EF, EG, perpendiculaires aux deux lignes AD, BC: puis soient tirees les deux AE, & BE. Or les deux lignes AD, & BC estans coupees en angles droicts par les perpendiculaires EF, & EG, elles seront aussi coupees en deux également par la 3. p. 3. & partant AF sera egale a BG. Pareillement AE estant egale a BE par la d. f. du cercle, & le quarré de AE estant egal aux deux quarez de AF, FE, par la 47. p. 1. & son egal quarré de BE estant aussi egal aux deux quarez de BG, GE; les deux quarez de AF, FE seront egaux aux deux quarez de BG, GE. Mais le quarré de AF est egal au quarré de BG; & par consequent le quarré de FE est egal au quarré de GE. Parquoy la ligne FE sera egale à la ligne GE, & par la 4. def. du 3. AD, & BC seront equidistantes du centre du cercle propose.

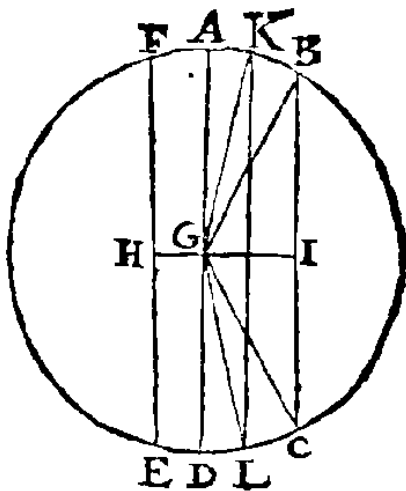


Quant à la seconde partie. Je dis que si AD, BC sont equidistantes du centre E, qu'elles seront egales; car avant construit comme dessus, les perpendiculaires EF & EG seront egales par la 4. d. f. de ce liure, & couperont AD, BC en deux également par la 3. p. 3. & par deduction de la 47. p. 1. comme cy dessus, AF se trouuera egale a BG, & par consequent aussi leurs doubles AD, & BC seront egales; ce qui estoit à démonstrer.

THEO. 14. PROP. XV.

Dans le cercle la plus grande ligne est le diametre: quant aux autres, toujours la plus proche du centre, est plus grande que la plus esloignée.

Au cercle $ABCDEF$, duquel le centre est G , soit le diametre AD , & la ligne FE la plus proche d'iceluy, mais BC la plus esloignee. Je dis que de toutes ces lignes AD est la plus grande, & que FE est plus grande que BC .



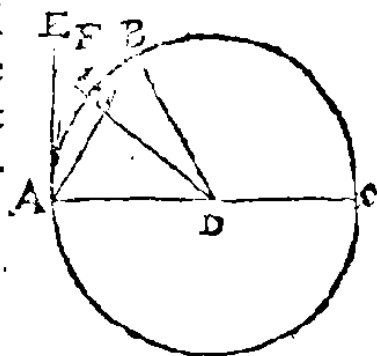
Car soient tirees du centre G les lignes GH , GI perpendicul. aux lignes FE , BC : & pource que BC est plus esloignee du centre que FE , GI sera plus grande que GH , par la 4. def. de ce liure. Soit donc couppe d'icelle GI , la ligne GM egale à GH , & par M soit menee KML perpendiculaire à GI , & soient tirees les lignes GK , GB , GC , GL . Donc puis que les perpendiculaires GM , GH sont egales, les lignes KL , FE seront egalelement distantes du centre par la 4. def. 3. & partant egales entr'elles par la prop. precedente. Derechef, puis que GK , GL sont plus grâdes que KL par la 20. p. 1. & icelles GK , GL sont egales au diametre AD ; iceluy diametre AD sera aussi plus grand que KL ou FE . Par mesme raison AD sera demonstre plus grand que toutes autres lignes.

Item des triangles GKL & GBC , les costez GK , GL , GB , GC , sont egaux par la definition du cercle, & l'angle KGL est plus grand que BGC , & par la 24. p. 1. la base KL , ou son egale FE , sera plus grande que la base BC ; & ainsi des autres.

THEOR. 15. PROP. XVI.

Si à l'extremité du diametre d'un cercle on leue vne ligne perpendiculaire, icelle tombera dehors le cercle; & entre icelle perpendiculaire & la circonference ne tōbera pas vne autre ligne droicte; & l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.

Du cercle ABC , soit le centre D , le diametre AC , sur l'extremité duquel A soit leuec la ligne perpendiculaire AE , par la 11. p. 1. Je dis premierement qu'icelle ligne AE tombe hors le cercle.



Car si elle tomboit dans iceluy, ainsi que AB' , estant tirée DB , les deux angles DAB , DBA , seront égaux par la 5. p. 1. Mais DAB est droit par la construction, DBA sera donc aussi droit : ce qui est absurde, puis que par la 17. p. 1. deux angles d'un triangle sont moindres que deux droits. Donc la perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la mesme raison, elle ne tombera pas aussi en la circonférence, mais dehors, comme est AE .

Maintenant ie dis que de A ne peut tomber entre la perpendiculaire AE , & la circonférence AB , vne autre ligne droite. Car s'il est possible que quelque ligne droite y tombe comme AF , de D soit menée sur icelle la perpendiculaire DG , coupant la circonférence en H , laquelle tombera nécessairement de la part de l'angle aigu DAF par le corol. de la 17. p. 1. Veu donc qu'au triangle DAG , les deux angles DAG , DGA , sont moindres que deux droits par la 17. p. 1. & par la construction DGA est droit, l'angle DAG sera moindre qu'un droit : & partant la ligne DA , ou son égale DH , sera plus grande que DG , par la 19. p. 1. la partie que le tout : ce qui est absurde. Entre la perpendiculaire AE , & la circonférence AB ne tombera donc pas vne autre ligne droite.

Ie dis finalement, que tout l'angle du demy cercle BAC contenu du diam AC , & circonférence AB , est plus grand que tout angle rectiligne aigu ; & que celui qui ieste BAE contenu de la ligne droite AE , & circonférence AB , est plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puisque CAE est angle droit diuisé par la seule circonférence AB ; & qu'entre icelle circonférence AB & la ligne droite AE ne peut tomber vne autre ligne droite, l'angle BAE ne peut estre diuisé par aucune ligne droite, ainsi ne sera diminué par aucune ligne droite ; ny par consequent l'angle BAC ne sera augmenté par aucune ligne droite.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste qu'une ligne droite tirée perpendicu-

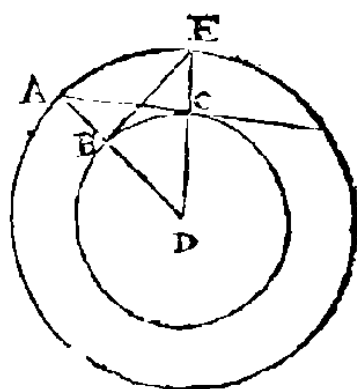
lairement de l'extrémité du diamètre, touche le cercle en un seul point. Car il a esté démontré qu'elle tombe hors le cercle: parquoy elle le touche seulement au point extrême du diamètre. Parquoy s'il estoit requis tirer une ligne droite par le point *A* donné en la circonférence du cercle, laquelle touche le cercle en *A*, nous tirerions de *A* au centre *D* la ligne droite *AD*, & sur icelle seroit élevée la perpendiculaire *AE*, laquelle touchera le cercle en *A*, comme il a esté démontré.

PROBL. 2. PROP. XVII.

D'un point donné, mener vne ligne droite qui touche vn cercle donné.

Soit le point donné *A*, duquel il faut mener vne ligne droite qui touche le cercle donné *BC*, dont le centre est *D*.

Soit menée la ligne *AD* coupant le cercle *BC* en *B*: puis du centre *D*, & interval *DA*, soit décrit le cercle *AE*. Et apres auoir leué la perpendiculaire *BE* au bout du demy diamètre *BD* par la 11. p. 1. Soit menée la ligne *ED* coupant le cercle *BC* au point *C*, & du point donné *A*, à iceluy point *C*, soit menée la ligne *AC*, ie dis qu'elle touche le cercle au point *C*.



Car les deux triangles *ACD* & *EBD* ayans deux costez égaux, & l'angle *D* commun, la base *AC* sera égale à la base *EB*, & l'angle droit *ACD* égal à l'angle *EBD*, qui sera aussi droit. Et par le corol. de la preced. prop. la ligne *AC* touchera le cercle *BC* au seul point *C*.

S C H O L I E.

Nous auons enseigné en nostre Geometrie pratique Prob. 20. vne autre maniere beaucoup plus facile que celle cy dessus.

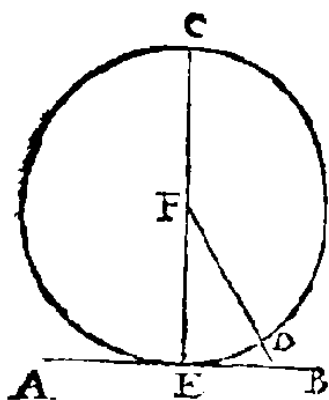
THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droite touche vn cercle, & du

centre à l'attouchement on mène vne ligne droite, elle sera perpendiculaire à la touchante.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE au point E , & d'iceluy point soit menée la ligne EC passant par le centre F . Je dis qu'elle sera perpendiculaire à AB .

Car si elle ne l'est, soit menée FG perpendiculaire à AB coupant la circonférence en D . Veu donc qu'au triangle EFG les deux angles FEG , FGE sont moindres que deux droicts par la 17. p. 1. & FGE est droict par la construction FEG sera moindre qu'un droict; & par la 19. p. 1. la ligne FE , ou FD son égale sera plus grande que FG , la partie que le tout: ce qui est absurde. Donc FE est perpendic. à AB .

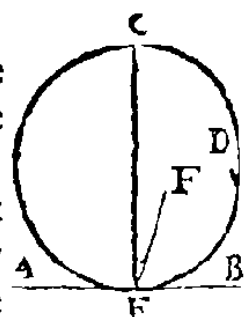


THEO. 17. PROP. XIX.

Si vne ligne droite touche vn cercle, & au point de l'attouchement est leuee vne perpendiculaire; en icelle sera le centre du cercle.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE , au point E , & sur iceluy soit leuee la perpendiculaire EC . Je dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne.

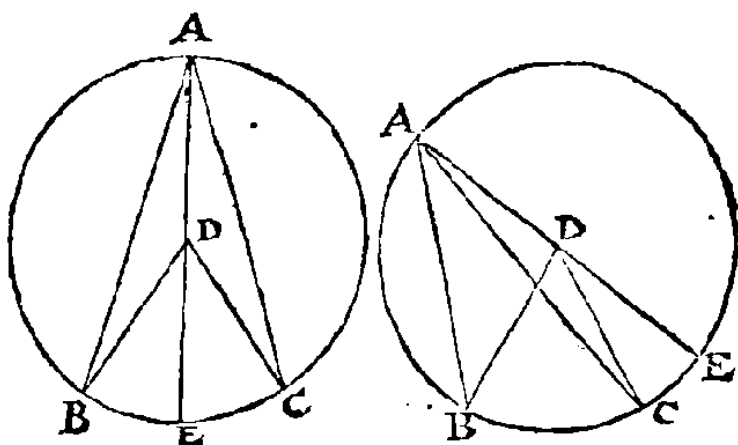
Autrement il sera dehors icelle ligne; soit donc au point F , s'il est possible, & d'iceluy point soit menée la ligne EF au point de l'attouchement E , elle sera aussi perpendiculaire à AB par la 18. p. 3. ce qui est impossible: car les deux angles AEC , & AEE , seroient droicts, & égaux, la partie au tout: partant le centre du cercle n'estoit pas hors de la ligne EC , ains dedans.



THEOR. 18. PROP. XX.

Dans le cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonference quand iceux angles ont vne mesme circonference pour base.

Dans le cercle ABC , soient les 2. angles, sçavoir BAC en la circonference, & BDC au centre, ayant mesme circonfere-



ce BC , pour base. Je dis que BDC sera double de BAC .

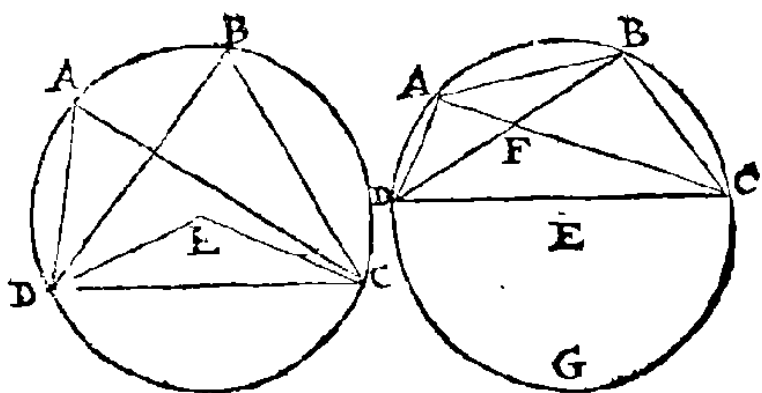
Car premierement si les lignes AB , AC enclorent les lignes DB , DC , comme en la premiere figure par le centre D estant menee la ligne droicte ADE , & les lignes DA , DB , & DC estans egales, les deux triangles ADB , & ADC seront Isosceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles egaux sur les bases AB , & AC . Mais l'angle exterieur BDE par la 32. p. 1. est egal aux deux angles interieurs DAB , & DBA , qui sont egaux: partant il sera aussi double du seul DAB , par mesme discours EDC se trouuera double de DAC ; & par cōsequent les deux ensemble BDC seront doubles des deux ensemble BAC .

Que si l'angle de la circonference A est comme en la seconde figure, il s'ensuivra tousiours le mesme, sçavoir que BDC sera double de BAC .

Car apres avoir mené la ligne ADE , tout ainsi comme cy dessus par la 32. p. 1. l'angle exterieur BDE sera egal aux deux opposez interieurs ABD , & DAB , & double du seul DAB estant le triangle Isoscele, par mesme discours CDE sera double de CAD , & par les com. sent Si de BDE double de BAE on oste CDE , double de CAE , le demeurant BDC fera double du demeurant BAC .

THEOR. 19. PROP. XXI.

Dans le cercle, les angles qui sont en vne mesme section sont egaux entr'eux.



Toute section est ou plus grande ou plus petite que le demy cercle. Soit donc premierement au cercle ABCD, le centre duquel est E, vne plus grande section DABC, en laquelle soient les angles DAC & DBC. Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Car si du centre E on mene les deux lignes ED, & EC; l'angle du centre DEC sera double de l'angle en la circonferen- ce DAC par la 20. p. 3. & par la mesme prop. il sera aussi double de l'autre angle DBC. Mais les choses qui sont moites d'une mesme, sont egales entr'elles; ainsi les angles A, & B seront egaux entr'eux.

Soit maintenant la section, plus petite que le demy cercle, cōme en la 2. figure. Je dis que les deux angles DAC, DBC estans en la mesme section DABC sont egaux.

Car si on mene la ligne AB, il se fera vne section BGA plus grande que le demy cercle; & comme nous auons demon- stré cy dessus les deux angles ADB & BCA, qui sont en vne mesme section AGB seront egaux; pareillement aux deux triangles DAF, & CBF, les angles opposez au point F sont egaux par la 15. p. 1. & par ce qui a esté demonstré à la 32. p. 1. le troisieme angle DAF sera egal au troisieme angle CBF, et qui estoit à prouuer.

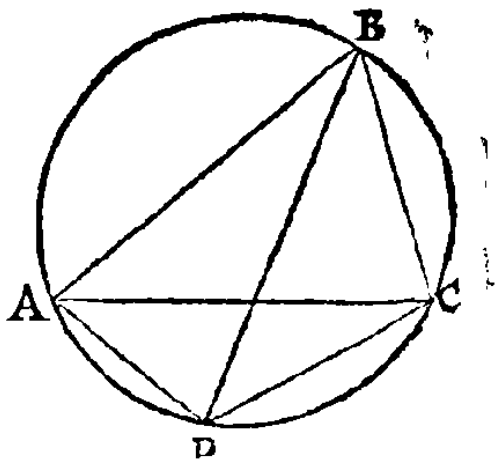
PROBL. 20. PROP. XXII.

Les figures de quatre costez inscrites au
cerc.

cercle, ont les angles oppoſez egaux à deux angles droits.

Soit la figure de quatre coſtez inſcrite au cercle ABCD. Je diſ que les angles oppoſez ABC, ADC, item BAD, BCD, ſont auſſi egaux à deux droits.

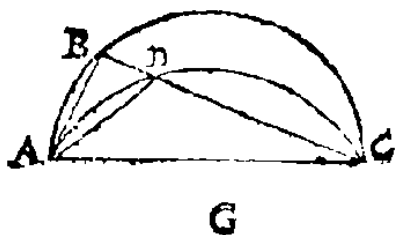
Car ſi on mene les deux lignes AC, & BD, les deux angles ACD, & ABD eſtans en vne meſme ſection ABCD, ſeront egaux par la 21. p. 3. Pareillemēt DBC, & CAD, eſtans en vne meſme ſection DABC, ſeront egaux : donc les deux angles ſous le point B ſeront egaux aux deux DAC, & DCA, leſquels avec les deux du point D, ſont egaux à deux droits par la 32. p. 1. partant auſſi les deux ſous le point B avec les deux ſous le point D, c'eſt à dire le total ABC, avec le total ADC ſeront egaux à deux droits. Nous demonſtrerons en la meſme maniere, que les deux angles BAD, BCD, ſont egaux à deux droits. Car derechef les deux angles ABD, ACD, ſont egaux. Item les deux BCA, BDA ; & partant tout l'angle BCD ſera egal aux deux ABD, ADB, leſquels avec BAD ſont egaux à deux droits par la 32. p. 1. Donc auſſi les deux BCD, BAD ſeront egaux à deux droits.



THEO. 21. PROP. XXIII.

Deux ſections de cercles ſemblables & inegales, ne ſe mettront pas deſſus vne meſme ligne droite, & de meſme part.

Car ſi faire ſe peut ſoient deux ſections de cercles ſemblables, & inegales ABC, & ADC ſur la ligne droite AC, & de meſme coſté. Il eſt euident qu'elles ſeentre-couperont ſeulement eſ



Poinçts A & C, puis que par la 10. p. 3. vn cercle ne coupe pas vn cercle en plus de deux poinçts ; & partant la circonferen-
ce d'une section sera toute dehors la circonferen-
ce de l'autre. Soit donc menee la ligne droite CB coupant les circonfe-
rées en D & B, & tirées les deux lignes BA, & DA: par la de-
finition des semblables sectiōs, les deux angles ABC, & ADC
seront egaux, ce qui est absurde: car par la 16. p. 1. l'angle ex-
terieur ADC doit estre plus grand que l'opposé interieur B
donc les deux sections ABC, & ADC estans semblables, &
inegales, ne se pouuoient mettre sur la mesme ligne AC, &
de mesme part.

THEOR. 22. PROP. XXIII.

Semblables sections de cercle estans con-
stituees sur lignes droictes egales, sont egales
entr'elles.

Soient deux sections de
cercles semblables ABC, &
DEF constitues sur lignes
egales AC, & DF. Je dis
qu'elles sont egales.



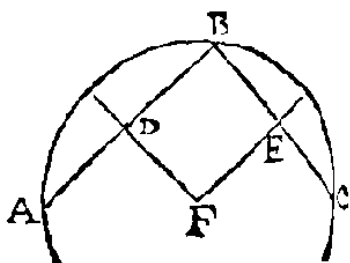
Autrement, si elles estoient inegales, il s'enfuiroit que 2
sections semblables & inegales pourroient estre posees sur li-
gnes droictes egales contre la 23. p. 3. donc les deux sections
seront egales.

PROB. 3. PROP. XXV.

La section d'un cercle estant donnee, descrire
le cercle duquel elle est section.

Soit la section de cercle ABC, de
laquelle il faut trouuer le cētre pour
acheuer le cercle d'icelle section.

Soient pris trois poinçts à l'aduan-
ture en icelle section A, B, C: & apres
auoir mené les deux lignes AB & BC
& icelles coupees en deux egalemēt
en D & E, d'iceux poinçts soient le-



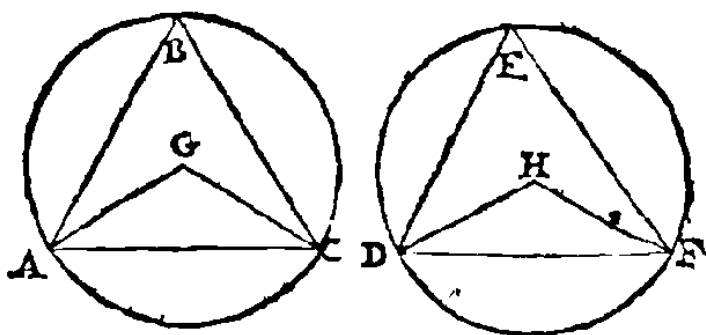
uees les perpendiculaires DF, & EF se rencontrans au point F. Je dis que F est le centre cherché pour acheuer le cercle.

Car par le corol. de la 1. p. 3. le centre sera à la ligne DF. Il sera aussi en EF : ce sera donc au point F, qui leur est commun.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient les cercles egaux A B C & D E F, desquels les centres sont G & H, & les angles dans iceux egaux, sçavoir aux circonférences, B egal à



E, & aux centres, G egal à H. Je dis que les circonferences AC, & DF, sur lesquelles iceux angles s'appuyent, sont egales.

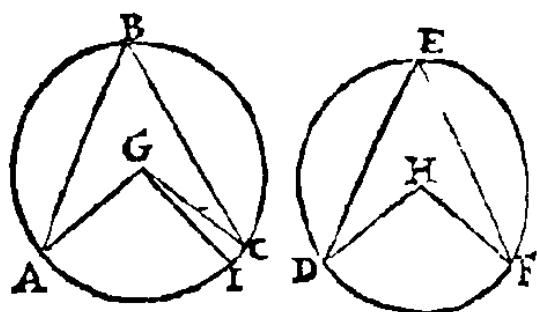
Car d'autant que les cercles sont egaux, les lignes tirees du centre à la circonférence seront egales par la 1. d. 3. Ainsi les 2. triangles AGC, & DHF ont deux costez egaux à 2. costez, chacun au sien, & l'angle G egal à l'angle H, & par la 4. p. 1. la base AC sera egale à la base DF. Pareillement l'angle B estant egal à l'angle E, la section ABC sera semblable à la section DEF, par la 10. def. 3. & par la 24. p. 3. elles seront egales; & qui de cercles egaux oste sections egales, sçavoir ABC & DEF, le demeurant AC sera egal au demeurant DF : ainsi les angles egaux s'appuyeron sur circonferences egales.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

Aux cercles egaux, les angles qui s'appuyent

dessus circonferences egales, sont egaux entr'eux, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient deux cercles egaux ABC & DEF , les centres desquels s'ont G & H , & sur les circonferences egales AC & DF soient les angles ABC & DEF tous deux en la circonferance. Item AGC & DHF au centre; ie dis que les angles G & H seront egaux.



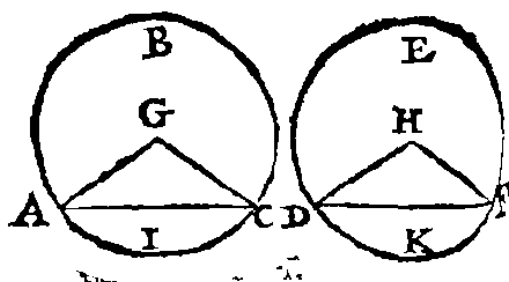
Autrement l'un d'iceux sera plus grand ou plus petit. Soit donc AGC plus grand que DHF , s'il est possible, il faudra par la 23 p. 1. sur AG faire l'angle AGI egal à DHF , & par la 26 p. 3. les circonferences AI & DF seront egales: ce qui est contre nostre hypothese; car nous auions posé AC egale à DF . Il faudroit doncques que AG & AI fussent egales contre la 8. commune sentence. Donc l'angle AGC n'estoit point plus grand que l'angle DHF .

L'egalité des angles du centre estant prouuee, les angles de la circonferance sont entédus egaux, puis qu'ils sont moietiez d'iceux par la 20. p. 3.

THEOR. 25. PROP. XXVIII.

Aux cercles egaux les lignes droictes egales prennent circonferences egales, sçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.

Soient les deux cercles egaux ABC , & DEF , desquels les centres soient G & H , & dans iceux deux lignes droictes egales AC , & DF . Ie dis que les circonferances qu'elles coupent sont egales,



ſçavoir la petite AIC à la petite DKF, & la grande ABC, à la grande DEF.

Qu'il ne ſoit ainſi, des centres G, & H, ſoient menees les lignes GA, GC, HD, HF, qui ſeront egales par la premiere def. 3. eſtant les cercles egaux, & la ligne droite AC eſtant egale à la ligne droite DE, les deux triangles AGC, & DHF auront les 3. coſtez egaux aux 3. coſtez, chacun au ſien, & par la 8. p. 1. l'angle G ſera egal à l'angle H, & par la 26. p. 3. ils ſ'appuyeront deſſus circonferences egales AIC, DKF, & qui de cercles egaux oſte icelles circonferences egales, reſteront les circonferences ABC, DEF auſſi egales.

THEOR. 26. PROP. XXIX.

Aux cercles egaux, les circonferences egales ſouſtendent lignes droictes egales.

Es cercles egaux ABC, & DEF (en la precedente figure) deſquels les centres ſont G & H, ſoient les circonferences ABC DEF egales ſouſtendues des lignes droictes AC & DF. Je diſ qu'icelles ſouſtendantes ſont egales.

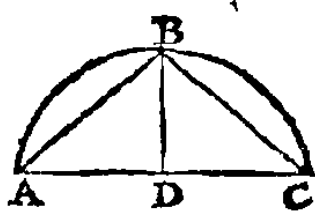
Qu'ainſi ne ſoit, des centres G, & H ſoient menees les lignes droictes GA, GC, HD, HF. Or d'autât que l'on poſe les circonferences ABC, DEF egales les angles G & H (qui ſ'appuyent deſſus circonferences egales, ſeront egaux par la 27. p. 3. pareillement les coſtez GA, & GC, eſtans egaux aux coſtez HD & HF, par la 1. def. 3. la baſe AC ſera egale à la baſe DF, par la 4. p. 1. ce qui eſtoit à prouver.

PROB. 4. PROP. XXX.

Côpper vne circonference en deux egale-
ment.

Soit la circonference donnee ABC, laquelle il faut couper en deux egale-
ment.

Soit menee la ligne droite AC, laquelle ſoit couppee en deux egale-
ment au point D, duquel point il faut mener la



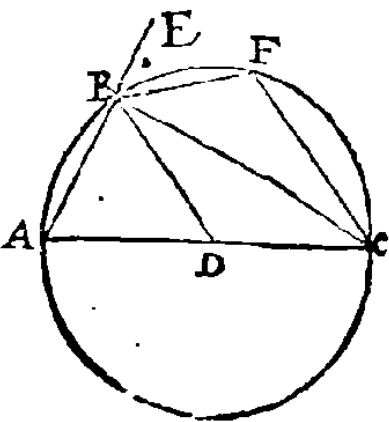
perpendiculaire DB. Je dis que la circonférence ABC est coupée en deux également en B.

Qu'il ne soit ainsi il faut mener les lignes AB, & BC, & pour autant que les deux costez AD, & DB du triangle ADB sont égaux aux deux costez CD, & DB du triangle CDB, & les deux angles au point D égaux par la 4. p. 1. la base AB sera égale à la base BC, & par la 28. p. 3. les circonférences AB, & BC seront égales.

THEOR. 27. PROP. XXXI.

Au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit: & celui qui est en la plus grande section est plus petit qu'un droit: Mais celui qui est en la plus petite est plus grand qu'un droit. Et d'auantage l'angle de la plus grande section est bien plus grand qu'un droit: mais l'angle de la plus petite section est plus petit qu'un droit.

Au cercle ABC duquel D est centre & AC diametre, soit constitué l'angle ABC, dans le demy cercle ABC; & en la plus grande section BAC, l'angle BAC; mais en la moindre section BFC, l'angle CFB. Je dis en premier lieu que l'angle ABC au demy cercle est droit.



Car apres auoir mené la ligne BD & continué AB iusques en E, il est euident que les triâgles ABD, & CBD sont Isoſceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles sur la base égaux, ſçauoir BAD à ABD, & CBD à BCD; & partant les deux ensemble ABD & CBD seront égaux aux deux ensemble BAD & BCD. Mais par la 32. p. 1. l'exterieur CBE est égal à iceux deux angles BAD, BCD: & partant les deux au point B, faifans le seul ABC, feront aussi égaux à l'exterieur CBE, & par la 10. def. 1. ABC & CBE seront tous deux angles droicts.

Je dis en second lieu que l'angle BAC qui est en la plus grande section CAB est plus petit qu'un droit : ce qui est aisé à prouver par la 32. p. 1. d'autant que l'angle ABC, étant droit, les deux autres ensemble ne vaudront qu'un droit; ainsi l'angle BAC est plus petit qu'un angle droit, & ainsi des autres.

Je dis tiercemét que l'angle BFC qui est en la petite section CFB est plus grand qu'un droit: car par la 22. p. 3. la figure de 4. costés ABFC inscrite au cercle, à les deux angles opposez égaux à deux droicts; sçavoir A & F. Mais nous auons prouvé A estre plus petit qu'un droit, par consequent F sera plus grand.

Je dis en quatriesme lieu que l'angle de la plus grande section, compris de la ligne droite BC, & de la periphère BAC est plus grand qu'un angle droit: ce qui est evident, car l'angle droit ABC n'est que partie d'iceluy angle mixte CBA.

Finablement ie dis que l'angle de la petite section, compris de la ligne droite BC & circonference BFC, c'est à dire l'angle mixte CBF, est moindre qu'un droit, car iceluy n'est que partie de l'angle droit CBE.

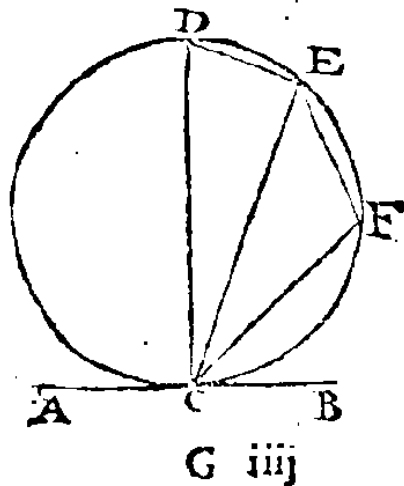
C O R O L L A I R E.

De ce que dessus est manifeste qu'un angle d'un triangle étant égal aux deux autres, est droit.

T H E O R. 28. P R O P. XXXII.

Si quelque ligne droite touche le cercle, & de l'attouchement on mene quelque ligne droite couppant le cercle: les angles qu'elle fait à la touchante sont égaux à ceux qui sont aux sections alternes du cercle.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE, au point C, & d'iceluy point soit menee CE, couppant le cercle en deux sections inégales. Je dis que l'angle ECB est égal à tout angle qui peut estre fait en la plus grande section CDE, & que ECA est égal à tout angle qui peut estre fait en la plus petite section CFE.



Qu'il ne soit ainsi, apres auoir mené par le centre le diamètre CD, soient menees les lignes DE, EF, FC. Maintenant par la 31. p. 3. l'angle BEC dans le demy cercle est droit, & par la 32. p. 1. les deux autres D, & ECD soyent egaux à vn droit: c'est à dire à DCB, lequel est droit par la 18. p. 3. desquels si on oste l'angle commun ECD, le demeurant ECB sera egal au demeurant D. Pareillement par la 22. p. 3. la figure de 4. costez inscrite au cercle CFED aura les angles opposez F, & D egaux à deux droits: c'est à dire aux deux ECA, ECB, desquels si on oste choses egales, c'est à sçauoir les angles D, & ECB egaux, les demeurans F, & ECA seront egaux.

Que si la ligne couppant le cercle estoit le diamètre d'iceluy, tous les angles tant en l'un qu'en l'autre demy cercle, seroient droits par la 31. p. 3.

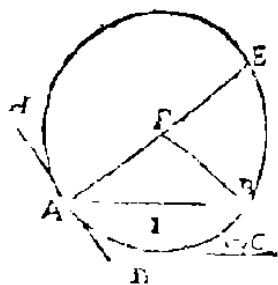
PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Dessus vne ligne droite donnee, descrire la section d'un cercle capable d'un angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnee AB, & l'angle rectiligne C, il faut sur icelle ligne descrire vne section de cercle comprenant vn angle egal à l'angle donné C.

Soit construit l'angle BAD egal à l'angle donné C par la 23. p. 1. & du point A l'enté la perpendiculaire AE, sur la ligne AB, & au point B, soit fait l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23. p. 1. rencontrant la perpendiculaire AE au point F: donc par la 6. p. 1. FA, FB seront egaux: Partant le cercle décrit du centre F & interval FA passera aussi par le point B; & apres auoir mené la ligne BE, l'angle BAD qui est egal à l'angle C, sera egal à l'angle E, décrit dans la section AEB; par consequent l'angle E sera egal à l'angle C, ainsi nous auons décrit vne section de cercle sur la ligne donnee AB, capable d'un angle egal à vn angle donné C.

Que si l'angle donné eust esté obtus comme G, il eust fallu construire l'angle BAH egal à iceluy, & chercher le centre F comme dessus, pour descrire le cercle AEBI, & par la 32. p.



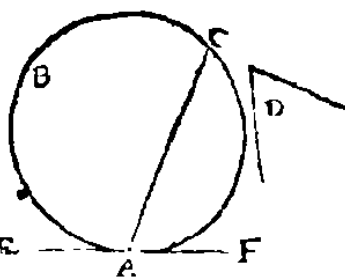
la plus petite section AIB eust compris vn angle egal à l'angle G.

Que si l'angle donné eust esté droict, ne falloit que descrire vn demy cercle sur la ligne donnée.

PROBL. 6. PROP. XXXIV.

D'un cercle donné, oster vne section capable d'un angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC, duquel il faut oster vne section capable d'un angle rectiligne egal à l'angle donné D.



Soit menée la ligne droicte EF touchant le cercle en A: puis par la 23. p. 1. soit fait sur icelle ligne, & au point A l'angle rectiligne FAC egal au donné D: faisant que la ligne droicte AC coupe le cercle en deux sections. Je dis que tout angle qui sera fait en la section ABC, sera egal au donné D. Car il sera egal à l'angle FAC par la 32. p. 3. lequel est egal à D par la construction.

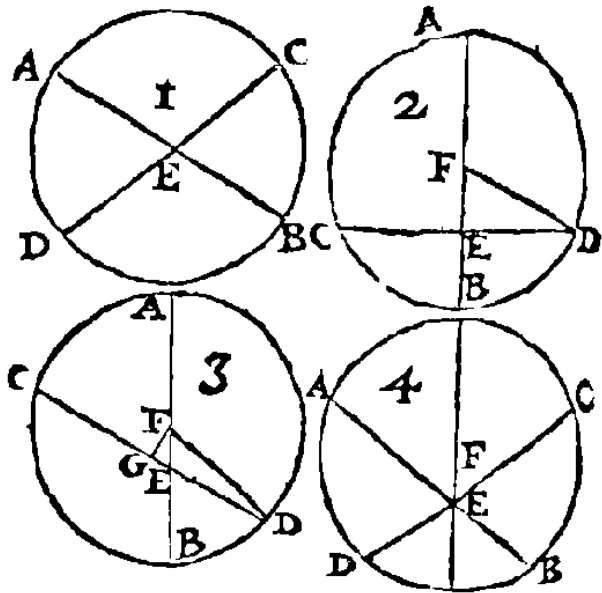
THEO. 29. PROP. XXXV.

Si dans vn cercle deux lignes droictes se coupent l'une l'autre, le rectangle contenu des deux pieces de l'une, est egal au rectangle compris des deux pieces de l'autre.

Soient deux lignes droictes AB, CD dans le cercle ACBD, s'entre-coupant en E. Je dis que le rectangle compris des deux pieces AE, & EB, est egal au rectangle contenu des deux pieces CE & ED.

Or les lignes qui se coupent dans le cercle, ou elles pas-

sent toutes deux par le centre, ou bien l'une d'icelles seulement, ou ny l'une ny l'autre. Que si elles passoient toutes deux par le centre, comme en la première figure, les quatre parties seront égales, & par ainsi la proposition est évidente.



Que si la seule AB , passe par le centre F , & diuise DC en deux également comme en la 2. figure; elle la diuifera aussi à droicts angles, par la 3. p. 3. Et apres auoir mené FD , il est evident par la 5. p. 2. que le rectangle de AE & EB avec le quarré de EF , seront égaux au quarré de FB ou FD , (car la ligne AB est couppee en deux également au point F , & en deux inégalement en E) & par la 47. p. 1. le quarré de FD estant égal aux deux quarrés de FE & ED , en ostant le quarré commun de FE , le demeurant rectangle de AE & EB se trouuera égal au quarré de ED , comme il a esté démontré à la 14. p. 2. ou au rectangle de CE , ED .

Que si ligne AB passant par le centre F (comme en la troisième figure) (diuise inégalement CD , ne passant point par le centre, il s'ensuira la mesme chose. Car apres auoir mené la perpendiculaire FG , & la ligne droicte FD : pourautant que AB est couppee en deux également en F , & en deux inégalement en E , le rectangle de AE & EB avec le quarré de EF , sera égal au quarré de FB , ou de son égale FD par la 5. pro. 2. Mais le quarré de FE est égal aux deux de FG , & GE par la 47. p. 1. Pareillemēt le quarré de FD est égal aux deux de FG & GD par la 47. p. 1. Donc aussi le rectangle de AE & EB , avec les deux quarrés de FG & GE sera égal aux deux quarrés de FG , & GD : & partant en ostant le quarré commun de FG , le demeurant quarré de GD sera égal au rectangle de AE & EB , & quarré de GE . Par mesme discours & par la mesme 5. p. 2. le quarré de GD est égal au rectangle de CE & ED , & quarré de GE , en ostant donc le quarré commun de GE , le rectangle de AE & EB se trouuera égal au rectangle de CE , & ED .

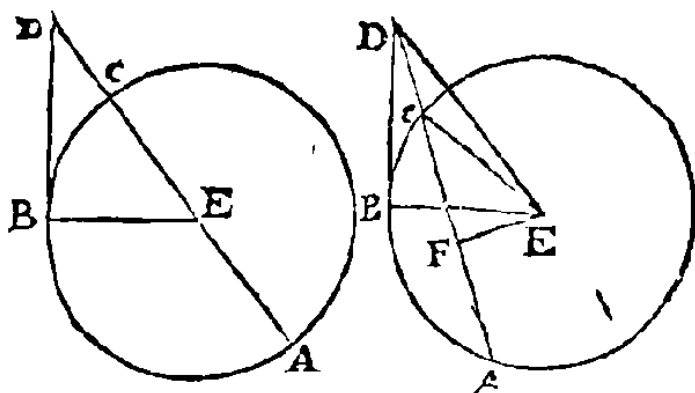
Que si ny l'une ne l'autre des deux lignes ne passe par le centre F , il s'ensuira le mesme: car si on mene le diamètre HI , passant par le point commun E de la 4. figure, le re-

l'angle de IE & EH, sera egal au rectangle de CE, & ED, cōme cy dessus a esté dit ; & par mesme raison aussi au rectangle de AE & EB ; & par la 1. com. sent. les deux rectangles de AE & EB, item de CE & ED seront egaux.

THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle on prend quelque poinct, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droictes, l'une desquelles coupe le cercle & l'autre le touche ; le rectangle contenu de toute la coupante, & de sa partie prise dehors entre le poinct & la circonference conuexe, est egal au quarré de la touchante.

Hors le cercle A
EC soit pris le point
D, duquel soit menee la ligne DA, coupant le cercle en C
& la ligne DB touchant iceluy cercle en B. Je dis que le rectangle de la route



AD, & de la partie CD prise entre le poinct donné, & le cercle, est egal au quarré de la touchante BD.

Qu'il ne soit ainsi : du centre E au poinct d'attouchement B, soit menee la ligne EB, laquelle par la 18. p. 3. sera perpendiculaire à icelle touchante BD : & pour autant que la ligne AC est couppee en deux egalemeut au poinct E, & à icelle est adioustee directement CD, le rectangle de la totale AD, & de sa partie CD avec le quarré de CE, ou BE son egale, est egal au quarré de DE par la 6. p. 2. ou aux deux de DB & BE par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de BE, le demeurant quarré de BD sera egal au demeurant rectangle de AD, & CD par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passoit par le centre du cercle propose comme en la seconde figure, faudra demōstrer en ceste sor-

re: Du centre E soient menées les lignes EB, EC, ED, & la perpendiculaire EF, laquelle coupera AC en deux également par la 3. p. 3. Et par la 6. p. 2. comme cy dessus, le rectangle de AD & CD avec le carré de CF, sera égal au carré de DE. Desquelles choses égales si on adiouste le carré commun de CE, le rectangle de AD & DC avec les deux carrés de CF, & FE ou le seul de CE, par la 47. p. 1. sera égal aux deux carrés de DF, & FE, ou au seul de DE par la 47. p. 1. ou aux deux de DB & BE par la même 47 p. 1. Que si on ôte les carrés égaux de CE, & BE, les demeurans carré de DB, & le rectangle de AD & CD seront égaux.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste que si d'un point pris hors le cercle tirées plusieurs lignes coupant le cercle; les rectangles compris de chacune d'icelles & sa partie extérieure, seront égaux entr'elles. pource que chacun de ces rectangles sera égal au carré de la ligne touchante.

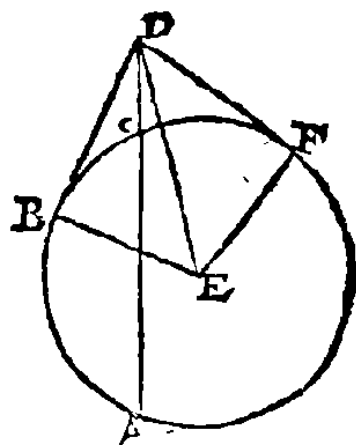
Appert aussi que deux lignes droites tirées d'un même point, & touchant le cercle, sont égales entr'elles: puis que le carré de chacune d'icelles sera égal au rectangle de la ligne tirée du même point & coupant le cercle, & de la partie extérieure d'icelle.

Est aussi évident que d'un même point pris hors le cercle peut estre seulement tirées deux lignes droites qui touchent le cercle: Car il faudroit qu'elles fussent toutes égales entr'elles; & partant le point D pourroiet estre menées plus de deux lignes égales de part & d'autre de DE, contre la 8. p. 3.

THEOR. 31. / PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy point tombent deux lignes droites au cercle, l'une desquelles coupe le cercle, & l'autre l'atteint: Si le rectangle compris de toute la coupante, & de la partie prise entre le point & la circonférence concave, est égal au carré de celle qui atteint celle qui atteint touchera le cercle.

Hors le cercle ABC soit pris le point D, & d'iceluy soit menee la ligne droite DA qui coupe le cercle au point C, & la ligne DB qui atteint le cercle au point B; & soit le rectangle de la route AD, & de la partie CD, egal au quarré de DB. Je dis que DB, touche le cercle en B.



Car du point D estant menee la ligne DF touchant le cercle au point F, & du centre E les lignes EB, ED, EF. par la 36. p. 3. le quarré de DF sera egal au rectangle de AD & CD. Mais par hypothese le quarré de DB, est aussi egal à iceluy rectangle: & partant les quarrés & les lignes DF & DB seront egales. Item EF, & EB sont aussi egales par la def. du cercle, & ED à soy-mesme: ainsi les deux triangles DBE, & DFE, ayans les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, les angles B, & F seront egaux par la 8. p. 1. & F estant droit par la 18. p. 3. aussi B sera droit; & par le coroll. de la 16. p. 3. la ligne DB touchera le cercle.

Fin du troisieme Element.



ELEMENT

QVATRIESME.

DEFINITIONS.



Ne figure rectiligne se dict estre inscrite en vne figure rectiligne, lors qu'un chacun des angles de la figure inscrite, touche vn chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

2 Semblablement aussi la figure se dict estre circonscrite à vne figure, quand vn chacun costé de la circonscrite touche vn chacun angle de l'inscrite.

3 Mais la figure rectiligne se dit estre inscrite au cercle, quand vn chacun angle de la figure inscrite, touche la circonference du cercle.

4 Et la figure rectiligne se dit estre circonscrite au cercle, quand vn chacun des costez de la figure circonscrite, touche la circonference du cercle.

5 Semblablement aussi le cercle se dit estre

inscrit en vne figure reſtiligne, quand la circonſerence du cercle touche vn chacun coſté de la figure en laquelle il eſt inscrit.

6 • Mais le cercle ſe dit eſtre circonſcrit à vne figure, quand la circonſerence du cercle touche vn chacun des angles d'icelle figure à l'entour de laquelle il eſt deſcrit.

7 Vne ligne droiſte ſe dit eſtre accômodee dans le cercle, quand les extremittez d'icelle ſont en la circonſerence du cercle.

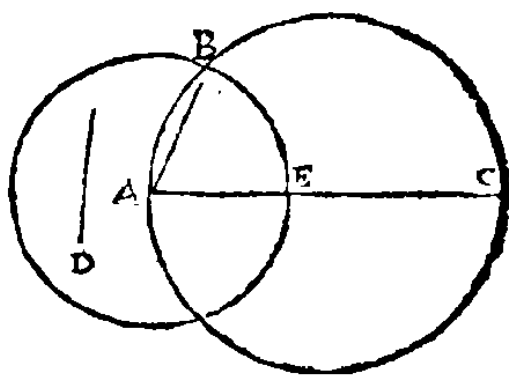
PROBL. I. PROP. I.

Au cercle donné, accommoder vne ligne droiſte egale à vne ligne droiſte donnée, laquelle ne ſoit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut accommoder vne ligne droiſte egale à la ligne droiſte donnée D, qui n'eſt pas plus grâde que AC diametre d'iceluy cercle.

Soit du diametre AC coupee AE portion egale à la ligne D. En apres du centre A, & interval AE ſoit deſcrit le cercle BE coupant le cercle donné au poinſt B, & ſoit mence la ligne droiſte AB. Je diſ que AB eſt egale à D.

Car par la deſ. du cercle AB & AE ſont egales, & par la cōſtruction icelle AE eſt egale à D, & par la 1. com. ſent. AB & D ſeront egales.

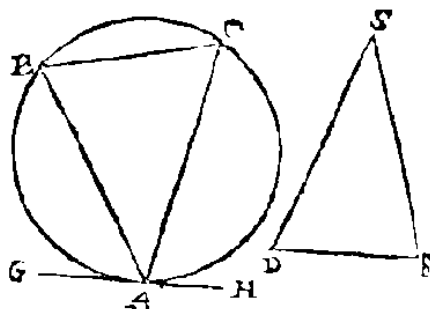


PROB. 2. PROP. II.

Dans vn cercle donné inscrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire vn triangle equiangle au donné DSF.

Soit menee la ligne GH, qui touche le cercle au point A, auquel point soient faits les deux angles GAB egal à l'angle D, & HAC egal à l'angle F par la 23.p.



1. Puis soit mené BC. Je dis que le triangle inscrit ABC est equiangle au donné DSF.

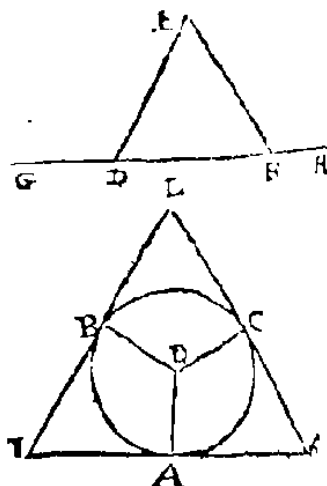
Car puis que la ligne AB coupe le cercle en deux sections, l'angle C en la grande section sera egal à l'angle de l'attouchement GAB; & par consequent à l'angle D par la 32.p.3 & par la mesme raison, la ligne AC coupant le cercle, l'angle B se trouuera aussi egal à l'angle F, & par la 32.p.1. le troisieme A sera aussi egal à l'angle S; & par consequent les triangles seront equiangles.

PROB. 3. PROP. III.

A l'entour d'un cercle donné, descrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire vn triangle equiangle au triangle donné DEF.

Soit prolongé le costé DE de part & d'autre iusques en G, & H, & du centre D soit menee à l'aduanture la ligne DA, sur laquelle au point D soient construits les deux angles ADB egal à EDG, & ADC egal à l'angle HFE par la 23.p.1 & aux trois lignes DA, DB, DC, soient menees les trois lignes perpendiculaires IK, IL, KL, lesquelles toucheront le cercle es points A, B, C, par le coroll. de la 16.p.3 & icelles



& icelles se rencontrant aux trois poinçts I, K, L, feront le triangle IKL, lequel ie dis estre le triangle demandé.

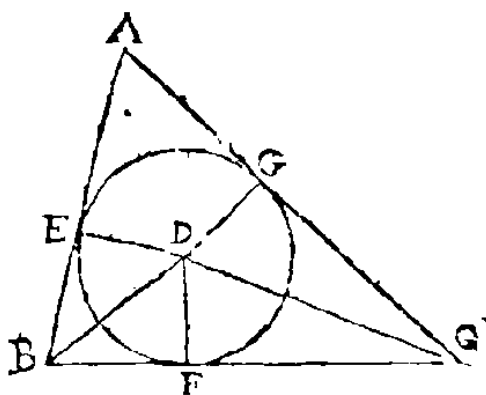
Car il appert desia qu'il est circonscrit au cercle, puis que tous les costez d'iceluy le touchent és poinçts A, B, C. Et d'autant que toute figure de quatre costez a les quatre angles egaux à 4. angles droicts (comme nous auons demonstré à la 32.p.1.) le traptze A D B I aura les 4. angles egaux à quatre droicts. Mais les deux A & B estans droicts par la constructiõ, les deux autres D & I seront egaux à 2. droicts c'est à dire egaux aux deux GDE & FDE, qui sont egaux à deux angles droicts par la 13.p.1. & par construction ADB est egal à GDE : donc l'angle I sera egal à l'angle EDF. Par mesme discours l'angle K se trouuera egal à l'angle DFE. Et par la 32.p.1. le troisieme L sera egal au troisieme E: ainsi les triangles circonscrits & donnez seront equiangles.

PROBL. 4. PROP. IIIL.

Dans vn triangle donné descrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, dans lequel il faut descrire vn cercle.

Soient les deux angles B & C coupez en deux également par la 9.p.1. par les deux lignes BD & CD, se rencontrans au poinçt D: Item d'iceluy poinçt de rencontre D, soient menees les trois



perpendiculaires DE, DF, DG, par la 12.p.1. & du centre D, & interval DE soit descript le cercle EFG. Je dis qu'iceluy cercle est inscrit au triangle donné ABC.

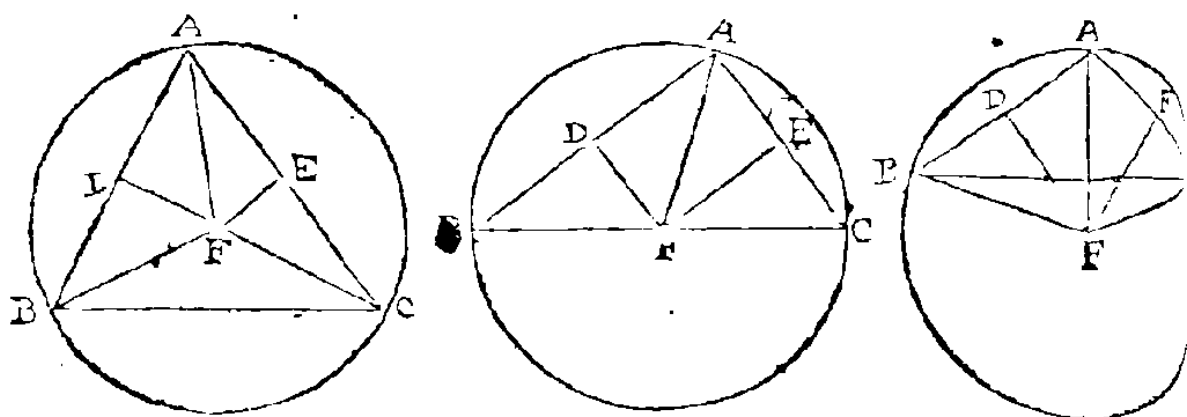
Car l'angle DEB estant droit, il sera egal à l'angle DFB, qui est pareillemēt droit, & le total B estant couppé en deux également, les deux DEB & DBE, seront egaux aux deux DFB, & FBD, & le costé DB estant commun, le costé FD sera egal au costé DE par la 26. p. 1. Par mesme discours DG se prouuera egal à DF, & par la 1.com. sent les trois lignes DE, DF, DG, seront egales : ainsi le cercle EFG descript de l'intervalle DE, sera aussi de l'intervalle des deux autres: & partāt il passera par les poinçts E, F, G, & en iceux touchera les trois

costez du triangle par le corol. de la 16. p. 3. pource qu'à iceux costez sont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5. d. 4. le cercle EFG sera inscrit au triangle donné: ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. V.

A l'entour d'un triangle donné, descrire un cercle.

Soit le triangle donné A B C, à l'entour duquel il faut descrire un cercle.



Soient coupez également les deux costez AB au point D & AC au point E par la 10. p. 1. & par la 11. p. 1. d'iceux points D, & E soient leuees les perpendiculaires DF, EF, se rencontrans au point F, lequel sera ou dans le triangle, ou au costé BC, ou hors le triangle: & apres auoir mené les trois lignes FA, FB, FC, les deux triangles A D F, B D F auront les costez AD & BD egaux, & DF commun, & les deux angles au point D egaux, pour estre droicts. donc les bases AF, BF seront egaux par la 4. p. 1. par mesme discours AF, CF s'ront aussi egaux, & par la 1. com. sent. les trois lignes FA, FB, FC, seront egaux: & partant le cercle descript de F & interuale FA, passera aussi par les points B & C. Nous auons donc descript un cercle a l'entour du triangle donné: ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste que si le centre tombe dans le triangle les trois angles sont aigus: car ils sont tous en une grande s^emi-circonférence: mais s'il tombe en l'un des costez, l'angle opposé à iceluy

droict : si finalement il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus, car il sera en une moindre section de cercle.

Et au contraire est evident que si le triangle est oxigone, le centre tombera dedans iceluy : mais s'il est rectangle, il tombera au costé opposé à l'angle droict : & finalement s'il est ambligone, le centre tombera dehors.

S C H O L I E.

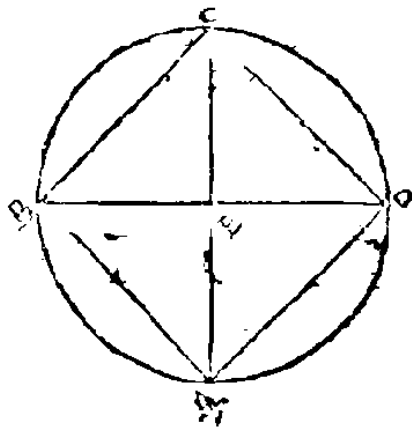
On peut aussi colliger de ce probl. la maniere de descrire un cercle par trois poinçts donnez, lesquels ne soient en une ligne droite. car ayant ioint iceux poinçts par lignes droictes, on aura un triangle, à l'entour duquel faudra descrire un cercle comme est enseigné en ce Prob. Cely se pratique a : si plus facilement, comme nous auons enseigné en nostre Geometrie pratique Prob. 21.

PROB. 6. PROP. VI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut descrire vn quarré.

Soient menez les deux diametres AC, & BD se couppans au centre E en angles droicts, & soient menées les quatre lignes AB, BC, DC, & DA. Je dis que A B C D est quarré inscrit au cercle donné.



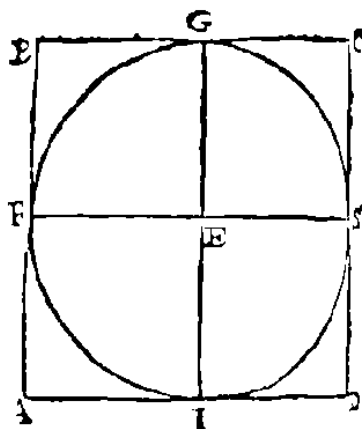
Car d'autant que les 4. angles au poinçt E sont droicts & egaux par la construction, les quatre arcs auxquels ils insistent seront egaux par la 26. p. 3. & partant les lignes droictes soustendās iceux seront aussi egaux par la 29. p. 3. donc tous les costez du quadrilatre A B C D seront egaux entr'eux. Mais les angles d'iceluy sont aussi droicts par la 31. p. 3. puis qu'ils sont tous au demy cercle : donc le quadrilatre A B C D est quarré inscrit au cercle proposé.

PROB. 7. PROP. VII.

À l'entour d vn cercle donné, descrire vn quarré.

• Soit le cercle donne FGS I, à l'entour duquel il faut descrire vn quarré.

Soient menéz les deux diametres FS & GI se couppans au centre E à droiçts angles, & sur les poinçts G & I, soient menees les deux lignes BC, AD paralleles a FS: Itē par les deux poinçts F & S soient menees les deux lignes AB, DC paralleles à GI par la 31. p. 1. icelles quatre lignes paralleles se rencontraus aux poinçts A, B, C, D. Je dis que le quadrilatere ABCD est le quarré demandé.



Car en premier lieu il est euident par la construction que cest parallelogrāme, & par la 34. p. 1. les quatre costez seront egaux, estans egaux a l'un ou l'autre des deux diametres FS & GI, qui sont egaux entr'eux. Pareillement par la mesme p. 1. les 4. angles A, B, C, D, sont egaux aux quatre qui sont au poinçt E chacun à son opposé, d'autant que ce sont parallelogrāmes. Mais iceux estans droiçts, aussi les quatre A, B, C, D seront chascun droiçts; & par consequent le parallelogrāme ABCD, aura les 4. costez egaux, & les quatre angles droiçts & sera quarré, les costez duquel touchent le cercle és poinçts F, G, S, I, par le corol. de la 16. p. 3.

PROBL. 8. PROP. VIII.

Dans vn quarré donné, descrire vn cercle

Soit le quarré donné ABCD, dans lequel il faut descrire vn cercle.

Soient les quatre costez coupez en deux egalements au poinçt F, G, S, I: & apres auoir mené les deux lignes IS & FE se rencontraus au poinçt E, d'iceluy poinçt E, & intervalle FI on décrit vn cercle, ce sera le demandé.

Car par la 33 p. 1. IG sera egale & parallele à AB: & FS à DC: ainsi le quarré donné sera diuisé en quatre parallelogrāmes, lesquels par la 34. p. 1. auront les costez opposés egaux, & AF & IE seront egaux; Item FE, & AI; FB & EG; ID & ES: mais toutes icelles moities des costez du quarré sont egales.

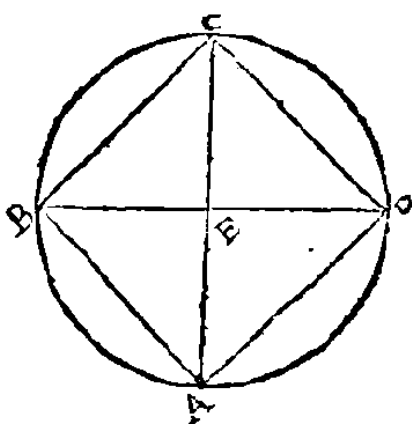
partant EF, EG, ES, EI, seront aussi égales, & comme elles touchent le quarré aux poinçts F, G, S, I, aussi le cercle décrit de l'interval de l'une d'icelles, touchera le quarré aux mesmes poinçts.

PROBL. 9. PROP. IX.

A l'entour d'un quarré donné, descrire un cercle.

Soit le quarré donné ABCD, à l'entour duquel il faut descrire un cercle.

Soient menees les deux diagonales AC & BD, s'entrecouppans au poinçt E, & du centre E, & interval EA soit décrit le cercle ADCB. Je dis qu'il sera le demandé: c'est à dire qu'il touchera les quatre angles du quarré.

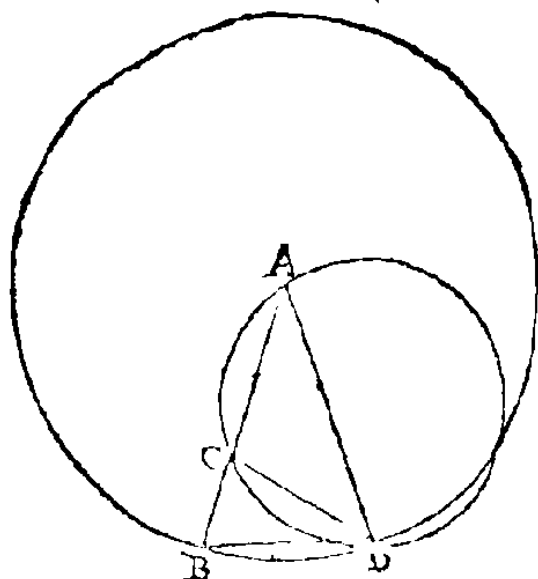


Car le costé AB estant égal à AD, le triangle BAD sera Isoscele, & par la 5. p. r. les angles sur la base BD seront égaux & seront chacun demy droicts par la 32. p. r. estant l'angle BAD droit. Par mesme discours nous démonstrerons que tous les autres angles des poinçts A, B, C, D, seront aussi demy droicts: & partant égaux entr'eux; ainsi les deux angles EAD & EDA seront égaux, & par consequent les lignes EA, ED aussi égales par la 6. p. r. & par mesme discours ED sera égal à EC, & EC à EB: & les 4. lignes EA, ED, EC, EB; estans égales, il est aisé de conclurre comme aux précédentes, que le cercle décrit de l'interval de l'une d'icelles, passera par l'extrémité des autres, qui sont les angles du quarré donné.

THEOR. 10. PROP. X.

Descrire un triangle Isoscele, ayant un chacun des angles de la base double de l'autre.

Soit la ligne AB , coup-
pée en C , comme ensei-
gne la 11. p. 2. & du centre
 A & intervalle AB soit des-
crit un cercle dans lequel
soit accommodée la li-
gne DB égale à AC , & a-
pres soit menée la ligne
 AD . Je dis que ABD est
le triangle Isocele de-
mandé.



Car apres auoir mené
 CD , si à l'entout du tri-
angle ACD , on décrit le
cercle ACD comme il a esté enseigné cy. dessus; puisque la li-
gne AB a esté couppee en C , comme enseigne la 11. p. 2. le re-
ctangle de AB & BC , sera egal au quarré de CA , ou de son égale
 DB ; & par la 37 p. 3. la ligne DB touchera le cercle en D , &
l'angle CAD sera egal à l'angle CDB , par la 32. p. 3. & si à
iceux on adiouste l'angle commun ADC , les tous seront e-
gaux, sçauoir le total ADB , aux deux CAD & ADC ; mais l'an-
gle extérieur DCB , est aussi egal aux deux CAD & ADC , par
la 32. p. 1. partant il sera aussi egal à l'angle ADB , ou à son egal
 ABD par la 5. p. 1. (car le triangle est Isocele) & par la 6. p. 1.
le triangle de DCB sera aussi Isocele, & le costé DC egal à D
 B , partant aussi egal à CA ; & le triangle DCA estant Isocele,
il aura les deux angles sur la base AD egaux par la 5. p. 1. &
l'angle extérieur DCB (qui est egal a tous les deux) sera dou-
ble du seul A : aussi sera son egal B ; & partant aussi son autre
egal ADB : voila donc ABD triangle Isocele ayant les angles
de la base doubles du troisieme.

C O R O L L A I R E.

Pour ce qu'il les trois angles du triangle ABD s'ont egaux à deux droi-
ts, c'est à dire à 180. cinq parties de deux droi-
ts: Il s'ensuit que l'angle
 A est la 5. partie de deux droi-
ts, & chacun des autres B & D , la
deux cinquieme parties: & en A est le
deux cinquieme d'un droit
chacun & en B & D est le quatre
cinquieme d'un droit: & par
ce que tous les trois sont egaux à
deux droi-
ts, c'est à dire à 180. quintes, d'un droit.

SCHOLIE.

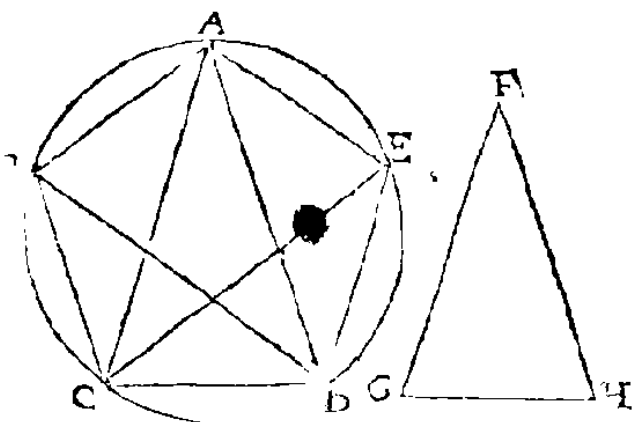
Or par quelle maniere on doit construire un triangle Iſoſcele, ayant un chacun des angles de la baſe, non ſeulement double de l'autre, comme faiſt icy Euclide, mais auſſi ſelon quelconque raiſon donnee, nous l'auons enſeigné (apres Pappus & Clavius) en noſtre Geometrie pratique Prob. 37. & Scholie du 126.

PROBL. II. PROP. XI.

Dans vn cercle donne, deſcrire vn pentagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donne ABCDE, dans lequel il faut inſcrire le pentagone demande.

Dans iceluy cercle il faut inſcrire le triangle ACDequiangle au triangle FGH, lequel ait eſté conſtruit ſelon le requis de la precedente propoſition; & apres a-



uoir mené les deux lignes CE & DB coupant les deux angles ACD & ADC, en deux également par la 9. p. 1. ſoient menées les lignes CB, BA, AE, ED. Je diſ que ABCDE, eſt le pentagone inſcrit equiangle & equilateral.

Car puis que le triangle FGH a eſté conſtruit ſelon le precepte de la precedente propoſition, les deux angles ſur la baſe GH ſeront doubles au troiſieſme F, & par conſequent le triangle ACD qui eſt equiangle à iceluy FGH aura auſſi chacun des angles de deſſus la baſe CD double du troiſieſme A, leſquels eſtans coupez en deux également par les lignes CE & DB, les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ACE ſont egaux, & par la 26. p. 3. ils auront circonferences egales pour baſes, mais les egales circonferences comprennent lignes droites egales par la 29. p. 3. donc tous les cinq coſtez eſtans egaux, le pentagone ſera equilateral.

Aussi sera-il bien aisé de prouver qu'il est equiangle par la 27.p.3. d'autant que chacun angle est soustenu de circonferences egales, sçavoir de trois arcs comprenans trois costez du pentagone, veu que nous auôs prouué que tous iceux arcs sont egaux.

COROLLAIRE.

De cecy il s'ensuit que l'angle du pentagone equilateral & equiangle comprend les trois cinquiesmes parties de deux droicts, ou 6. quintes d'un droict. Car puis que les trois angles BAC, CAD, DAE sont egaux par la 27.p.3. & CAD est le quint de deux droicts ou les deux quintes d'un droict; Car puis que les trois angles sont egaux par la 27.p.3. le total BAE sera les trois quintes de deux droicts, ou les 6. quintes d'un droict.

SCHOLIE.

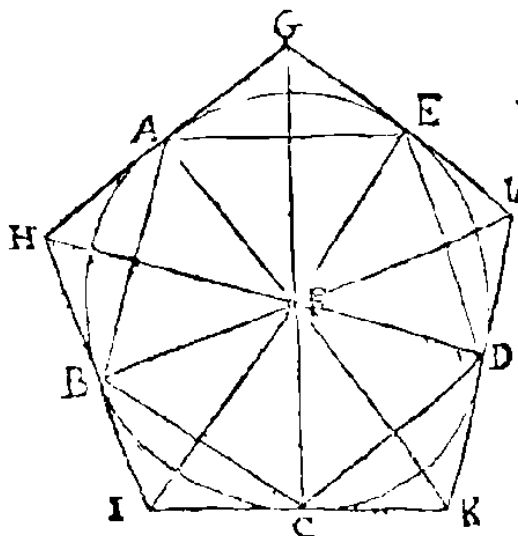
Clavius enseigne en ce lieu cy deux manieres pour descrire un pentagone equilateral & equiangle sur une ligne droite donnee & terminee; la plus facile desquelles nous auons enseignee en nostre Geometrie pratique Prop. 38. c'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROB. 12. PROP. XII.

Al'entour d'un cercle donne, descrire un pentagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donne $AB CDE$, à l'entour duquel il faut descrire le pentagone demande.

Dans iceluy soit descript le pentagone $ABCDE$ par la precedete; & apres auoir mené du centre F les cinq lignes FA, FB, FC, FD, FE , soient menées sur icelles les cinq lignes perpendiculaires GH, HI, IK, KL, LG par la 11.p.1. se rencontrans aux cinq poincts G, H, I, K, L . Le



dis que GHIKL est le pentagone demandé equiangle, & equilateral.

Car il est euidentement circonscrit, puis que par le coroll. de la 16. p. 3. les lignes GH, HI, IK, KL, LG touchent le cercle es poinçts A, B, C, D, E: en apres si on meine les cinq lignes FG, FH, FI, FK, FL; d'autant que les angles FAG, FEG sont droicts par la 47. p. 1. le quarré de FG sera egal aux deux quarréz de FA, AG, il sera aussi egal aux deux de FE, EG, & par consequent les deux quarréz de FA, AG, seront egaux aux deux de FE, EG. Mais les quarréz de FA, FE sont egaux: (estans descrits sur lignes egales:) Donc ceux de AG & EG serót aussi egaux, & les lignes AG & EG seront egales: donc les deux costez AF, FG du triangle AGF sont egaux aux deux costez EF, FG du triangle EGF, chacun au sien, & la base AG egale à la base GE: & par la 8. p. 1. les angles AFG, EFG serót egaux; & AFE double de AFG. Par mesme discours aussi AFG egal à AFB, (car ils ont egales circonferences pour bases) sera double de AFH, & par consequent AFG & AFH seront egaux: Donc les triangles AGF, AHF ont deux angles egaux chacun au sien, & le costé AF commun: & par la 26. p. 1. AG sera egale à AH. Par mesme discours GE & EL se trouuerót egales: mais AG & EG estans egales, aussi leurs doubles GE & CL seront egales. Par mesme discours on prouuera tous les autres costez estre egaux, & le pentagone sera equilateral.

Qu'il soit aussi equiangle, il est euident: car nous auons moustré que les angles des triangles AGF, EGF sont egaux: sçauoir est les angles AGF, EGF: Item AGF, AHF: & qu'on en pouuoit dire autant des autres: donc les deux angles sous le poinçt G, seront egaux aux deux angles sous le poinçt H: ainsi des autres, par ainsi le pentagone sera equiangle & equilateral.

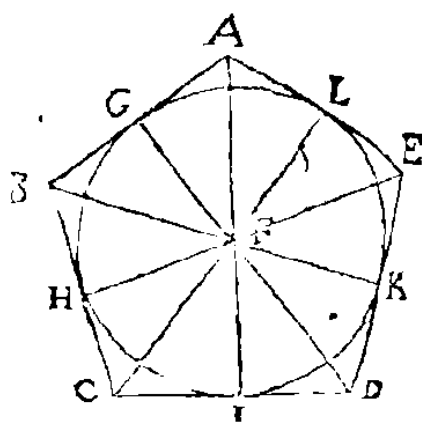
PROB. 13. PROP. XIII.

Dans vn pentagone equiangle & equilateral, descrire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle & equilateral ABCDE, dans lequel il faut inscrire vn cercle.

Soient coupez en deux également chacun des angles A,

& B, par les lignes AF, & BF par la 9. p. r. se rencontrans au point F, & par la 12. p. r. du point F soient menées les perpendiculaires FG, FH, FI, FK, FL, & du centre F, & interval FG soit décrit le cercle GHIKL. Je dis que c'est le cercle demandé.



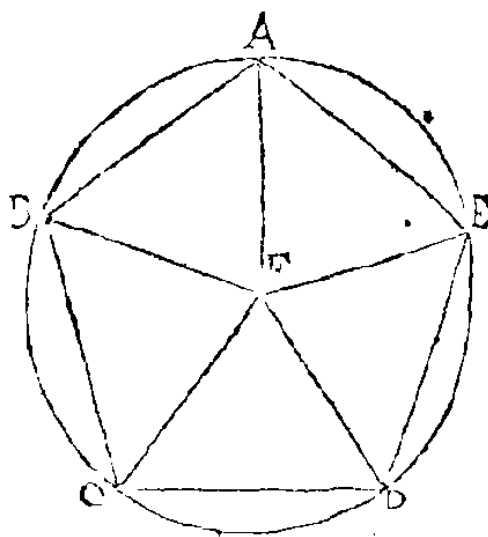
Car puisque par construction les deux angles sous le point A sont égaux, ayant esté le total coupé en deux également, & l'angle droit G égal à l'angle droit L, & le costé FA commun aux deux triangles AGF, ALF, par la 26. p. r. les deux autres costez seront égaux, sçavoir AG à AL, & FG à FL : par mesme discours FH, FI, FK, se trouveront égales : & partant le cercle décrit de F & intervalle FG passe par les points G, H, I, K, L, esquels il touche les costez du pentagone proposé par le coroll. de la 16 p. 3. le cercle GHIKL est donc inscrit au pentagone donné.

PROB. 14. PROP. XIII.

A l'entour d'un pentagone equiangle & equilateral, descrire un cercle.

Soit le pentagone equiangle & equilateral ABCDE, à l'entour duquel il faut descrire un cercle.

Soient coupez les cinq angles A, B, C, D, E, en deux également par la 9. p. r. avec les lignes AF, BF, CF, DF, EF se rencontrans au point F, & d'iceluy point F & interval de l'une d'icelles cinq lignes, soit décrit le cercle ABCDE. Je dis qu'il sera circonscrit au pentagone.



Car puis que le pentagone est equiangle, & chacun angle d'iceluy coupé en deux également, les deux angles sur la base

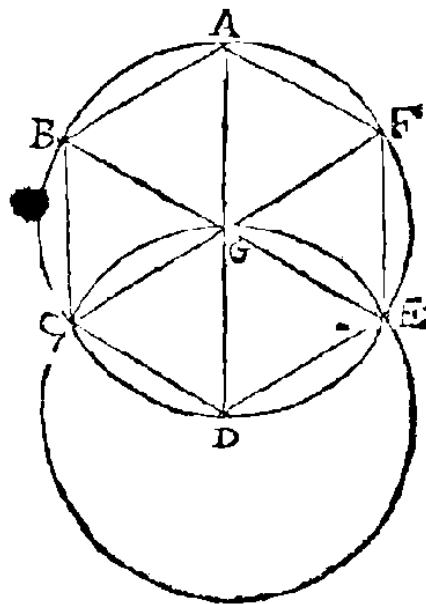
BA serót egaux, & par la 6 p. 1. les deux costez AF & BF, serót aussi egaux, & par le mesme discours BF, & FC seront aussi egaux, ainsi des autres, & par la 1. commune sentence il est euident qu'icelles cinq lignes seront egaux entr'elles, & que partant le cercle décrit de l'interval de l'une d'icelles passera par les extremitéz des autres, qui sont aussi les cinq angles du pentagone donné.

PROB. 15. PROP. XV.

Dans vn cercle donné, inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDEF, dans lequel il faut inscrire l'hexagone demandé equiangle & equilateral.

Soit mené le diametre AD, & du centre D & interval DG, soit décrit vn autre cercle GCE coupant le donné aux poincts C & E, desquels poincts soient menees les deux lignes CGF, EGB : Finablement soient menees les lignes AB, BC, CD, DE, EF, FA. Je dis que ABCDEF est l'hexagone demandé,



Car il est euident en démontrât comme en la 1. p. 1. que les deux triangles CDG, DEG sont equilateraux, & par le corol. de la 5. p. 1. ils seront aussi chacun equiangles, & par la 32. p. 1. vn chacun de leurs angles voudra le tiers de deux angles droicts, & l'angle AGB par la 15. p. 1. vaudra le tiers de 2. angles droicts: ainsi par la 13. & 15. p. 1. tous les angles au poinct G, seront egaux, valant chacun vn tiers de deux angles droicts, partant les six bases AB, BC, CD, DE, EF, FA, seront egaux, & les angles sur icelles aussi egaux par la 4. p. 1. Donc l'hexagone sera equilateral, & aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont egaux, les deux du poinct A seront egaux aux deux du poinct B; & ainsi des autres.

COROLLAIRE.

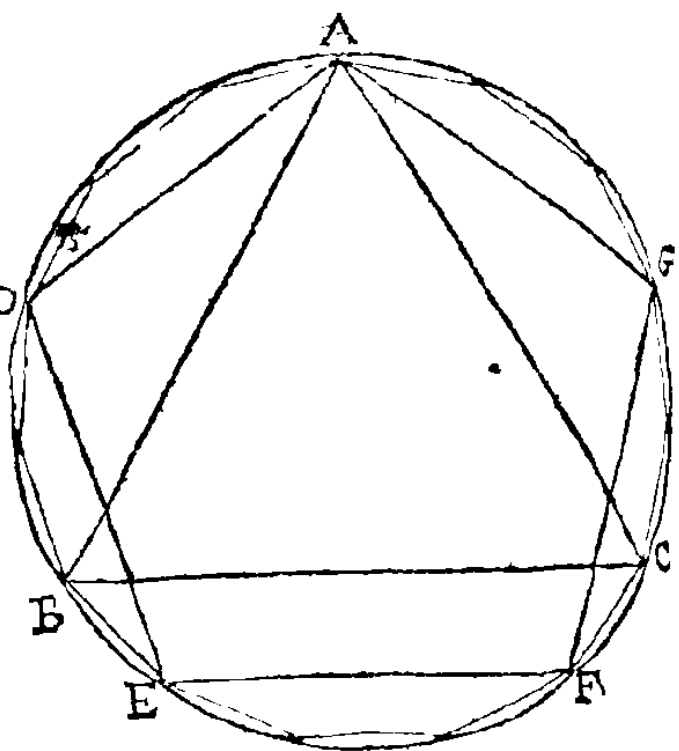
Par cecy est manifeste que le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle : car le costé de l'hexagone DC, est egal au semi-diametre DG par la def. du cercle.

PROB. 16. PROP. XVI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut inscrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit premiere-ment descript dans iceluy le triangle equilateral A B C par la 2. p. 4. les 3. costez estés egaux, la circonference sera diuisee en trois également par les 16. & 18. p. 3. pareillement, soit en iceluy



luy cercle inscrit le pentagone ADEFG par la 11. p. 4. ayant l'un des angles sur le point A. Je dis que ayant mené la ligne droite BE, ce sera le costé du quindecagone demandé.

Car comme il a esté dit, l'arc ADB est le tiers de la circonference, partant doit contenir cinq costez du quindecagone. Item AD costé du pentagone soustient l'arc AD cinquieme partie de la circonference; partant doit contenir trois costez du quindecagone, & les deux arcs AD, & DE contiendront six costez du quindecagone. Mais l'arc ADB en contient cinq : donc l'arc BE sera la quinzieme partie de toute

circonference; partant la ligne droicte BE sera le costé du quindec. & si par la 1.p. 4. on accommode au cercle encores quatorze lignes egales à icelle BE, sera inscrit au cercle vn quindecagone equilateral; & aussi equiangle, puis que tous ces angles soustendent arcs egaux, c'est a sçauoir composez de 13. arcs egaux.

Pareillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze poincts des diuisions egales du cercle, nous tirons des lignes droictes qui se touchent, se descrira vn quindecagone equilateral & equiangle à l'entour dudit cercle; & d'auantage nous descrirons & circonscrirons vn cercle à vn quindecagone equilateral & equiangle donné, suyuant la mesme methode praticquee au pentagone.

Fin du quatriesme Element.





E L E M E N T

CINQVIESME.

DEFINITIONS.



Partie est vne grandeur tiree d'une plus grande, lors que la plus petite mesure la plus grande.

C'est à dire que lors qu'une grandeur en mesure une autre plus grande, elle est dite partie d'icelle, comme *A* qui est contenu 3. fois en *B*, est dit partie d'iceluy. Or entre les *Ala hemati-* *A. B. C.* ciens il y a de deux sortes de parties: car il y en a une qui 3. 9. 7. mesure son tout; comme *A*, lequel repeté 3. fois constitue son tout *B*: & l'autre sorte ne mesure pas son tout, mais prise se n. sçay cobien de fois excède iceluy, ou deffaut au mesme, comme *A*, lequel e'ût pris 3. fois excède *C*, mais e'ût pris seulement 2. fois il est excédé par le mesme *C*. Or la premiere est dite partie aliquote, & l'autre partie aliquate de ce là seulement par le icy *Euclide*, puis que ceste-cy ne mesure son tout, & aussi ne l'appelle-il pas partie au 7. liure, mais parties.

2. Multiplice est vne grandeur plus grande qu'une plus petite, quand la plus grande est mesurée de la plus petite.

C'est à dire que si A est mesurée par B moindre grandeur qu'icelle A , est dite multipliee de B . Ainsi aussi C , qui est mesuré 4. fois par D , est dictée multipliee d'icelle D . $A 12. B 4. C 20. D 5.$

Or quand deux moindres grandeurs en mesurent également deux autres plus grandes, c'est à dire qu'une moindre est contenue autā de fois en une plus grande, qu'une autre moindre en une autre plus grande, ces deux plus grandes-là sont dictes equemultipliees d'icelles moindres. Et le mesme se doit entendre, si plusieurs moindres mesurent également plusieurs grandes.

3. Raison, est vne habitude de deux grandeurs de mesme genre, comparees l'une à l'autre selon la quantité.

C'est à dire que quand deux quantitez de mesme genre, comme deux nombres, deux lignes, deux superficies, deux solides, &c. sont comparez entr'eux selon la quantité, c'est à dire selon que l'une est plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale, telle comparaison est appelée raison, & par quelque proportion. Parquoy on ne peut pas dire qu'il y ait quelque raison d'une ligne à une superficie; ou d'un nombre à une ligne, puis que ny la ligne, & superficie, ny le nombre & la ligne ne sont pas quantitez de mesme genre. Semblablement si on compare une ligne avec une ligne selon la qualité, c'est à dire selon que l'une est blanche, & l'autre noire, ou bien que l'une est chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'une & l'autre soient de mesme genre, ceste comparaison n'est pas dictée raison, pource qu'elle n'est pas faite selon la quantité.

Or j'ajoit que la raison se trouve proprement ex seules quantitez, si est ce toutesfois que toutes autres choses, qui en quelque maniere prennent la nature de la quantité, come sont les tēps, les sons, les voix, les lieux, les mouuemēts, les pois, & les puissāces, sont aussi dictes avoir raison si l'habitude d'iceux est considérée selon la quantité, come quand nous disons un temps estre plus grand qu'un autre temps, ou moindre, ou deux temps estre egaux, &c. telle habitude sera dite raison: pource qu'alors les temps sont considerez ainsi que certaines quantitez.

En toute raison ceste quantité-là, qui est referée à une autre, est dite par Euclide & autres Geometres, antecedant de la raison, & celle là à laquelle elle est referée, est dictée consequent d'icelle raison: Comme en la raison de A à B ; A est dict antecedant de la raison, &

B consequent : Que si au contraire B est comparé à A. B sera appelle antecedant, & A consequent. A. B.
8. 10.

Or ceste raison d'finie par Euclide est diuisee en raison rationnelle, & irrationnelle.

La rationnelle est celle qui se peut exprimer en nombres : comme la raison d'une ligne de 10. pieds à une autre de 5. pieds, laquelle est exhibee par ces nombres 10. & 5. Mais l'irrationnelle est ceste raison là qui ne se peut exprimer en nombres : comme la raison du diametre d'un quarré au costé d'iceluy, laquelle ne se peut trouuer ny exprimer en nombre, comme est demonstreté par Euclide, en la dernière proposition du 10. liure.

Autres disent que la raison ou proportion rationnelle, est celle qui a les deux quantitez commensurables, c'est à dire qui ont une commune partie aliquoté, ou bié qui sont mesurees par une mesme commune mesure: comme la raison d'une ligne de 20. pieds à une autre de 8. pieds: car une ligne de 4. pieds ou de 2. est partie aliquotée l'une & l'autre, & par consequent mesure icelles. Mais la raison ou proportion irrationnelle, est celle (disent ils) qui a les deux quantitez incommensurables, c'est à dire qui n'ont nulle partie aliquotée, ou desquelles on ne peut trouuer aucune commune mesure. Comme la raison du costé d'un quarré à sa diagonalle, & de plusieurs autres lignes dont est traité au 10. liure.

Ceste raison se diuise aussi en raison d'egalité, & d'inegalité : La raison d'egalité est quana deux quantitez egales se comparent entr'elles, comme 10. à 10; une ligne de 12. pieds à une ligne de 12. pieds, &c. Mais la raison d'inegalité, est quand deux quantitez inegales se comparent entr'elles, comme 10. à 4. est raison d'inegalité telle est aussi celle de 5. à 9; celle d'une ligne de 7. pieds à une autre de 15. pieds, &c.

Ceste raison d'inegalité est subdivisee en raison d'inegalité majeure, & d'inegalité mineure. La raison d'inegalité majeure, est quand la plus grande quantité est comparee à la moindre: comme la raison de 8. à 5. est dicte raison d'inegalité majeure : item la raison d'une ligne de 10. pieds à une de 4. &c. Mais la raison d'inegalité moindre, est quand on compare la moindre quantité à la plus grande: comme la raison de 7. pieds à 9 s'appelle raison de moindre inegalité item celle d'une ligne de 9. pieds à une de 12. pieds, &c.

La raison rationnelle d'inegalité majeure est diuisee en 5. genres. sçavoir raison multiple, superparticuliere, superpartiente, multiple superparticuliere, & multiple superpartiente, les trois premières desquelles sont simples, & les deux dernières composées d'icelles premières.

La raison multiple, est quand la plus grande quantité contient la moindre

moindre plusieurs fois précisémēt: & ceste raison contient sous soy diuers gēres. Car si la plus grāde quantite cōtient la moindre deux fois précisémēt, elle est dite double: si trois fois, triple: si 4. quadruple: si dix, decuple: &c. Comme la raison de 20. à 4. est dite quintuple, pour ce que 20 contient 4. cinq fois; & la raison d'une ligne de 18. pieds à une de 3. pieds est dite sextuple, d'autant que 18. contient 3. six fois, & ainsi des autres.

La raison superparticuliere, est quand la plus grande quantité cōtient la moindre une fois, & en outre une partie aliquote d'icelle moindre: & ceste raison a diuers genres. Car si ceste partie aliquote est moitié d'icelle moindre quantité, est constituée une raison sesquialtere, comme la raison de 3. à 2. en laquelle 3. majeure quantité cōtient la moindre 2. une fois & encore $\frac{1}{2}$ d'icelle; si elle est tierce partie, sesquiterce: si une quarte partie, sesquiquarte, &c. commençant toujours le nom de ladite raison par celui qui, & se terminant par le denominateur de la partie aliquote.

La raison superpartien e, est quand la plus grande quantité contient la moindre une fois, & en outre plus d'une partie aliquote d'icelle: & a aussi ceste raison plusieurs especes. Car si la plus grande quantité contient la moindre une fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'icelle, est constituée une raison superbipartiente tierces, comme la raison de 10. à 12 en laquelle le nombre 20. contient 12. une fois & $\frac{2}{3}$ d'iceluy si $\frac{2}{3}$ sera constitué une raison supertripartiente quarte, comme la raison d'une ligne de 63 pieds à une de 36. & ainsi des autres, le nom d'icelles commençant toujours par super, & prenant à son milieu le numerateur de la partie aliquote, & le denominateur à la fin d'iceluy.

La raison multiple superparticuliere, est quand la plus grāde quantité contient la moindre plusieurs fois, & encore une partie aliquote d'icelle: ceste-cy est composee de la premiere & de la deuxiesme; & tout ainsi que chacune d'icelles cōtient plusieurs genres, aussi fait celle-cy. Car si la plus grande quantité contient la moindre 2. fois, & encore $\frac{1}{2}$ d'icelle, ceste raison sera appelée double sesquialtere, comme la raison de 5. à 2. en laquelle 5. contient 2. deux fois & $\frac{1}{2}$ d'iceluy: si $\frac{1}{3}$ d'icelle, comme celle d'une ligne de 7. pieds à une de 3. pieds, ceste raison s'appellera double sesquiterce: & la raison de 29. à 7. s'appellera quadruple sesquiseptuple, d'autant qu'en 29. 7. est contenu 4. fois & $\frac{1}{7}$ d'iceluy, & ainsi des autres.

La raison multiple superpartiente, est quand la plus grāde quantité contient la moindre plusieurs fois & plusieurs parties aliquotes d'icelle: ceste raison est composée de la 1. & 3. & tout ainsi que chacune d'icelles contient sous soy plusieurs genres, aussi fait ceste-cy; comme si la plus grande quantité contient la moindre 2. fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'icelle.

le, ceste raison sera appelée double superbipartiente tierce, comme est la raison de 8. à 3. mais si elle la contient 3. fois. & encore $\frac{1}{4}$ d'icelle elle s'appellera triple supertripartiente quarte, comme est la raison de 15. à 4. si elle la contient 4. fois & encore $\frac{1}{5}$ d'icelle, elle sera dite quadruple supersextupartiente septuple, comme est la raison de 34. à 7 & ainsi des autres.

Or tout ce qui a esté dit cy dessus des 5. especes de raison rationnelle d'inegalité maiere, se doit aussi entendre aux 5. especes de l'inegalité mineure, excepté qu'il faut tousiours apposer ceste syllabe sub, disant submultiple au lieu de multiple, subsuperparticuliere, au lieu de superparticuliere, & ainsi des autres.

Pour ce que les denominateurs des raisons rationnelles cy dessus exposées sont utiles, nous enseignerons icy par quels nombres elles se denominent. Nous appellons denominator le nombre qui exprime distinctement & apertement l'habitude ou raison d'une quantité à l'autre : comme le denominator de la raison quintuple est 5. pource que ce nombre là monstre que la quantité maiere contient 5. fois la mineure. Semblablement le denominator de la raison sesquiquarte est $1\frac{1}{4}$. pource qu'iceluy nombre signifie que la plus grande quantité contient la moindre une seule fois & $\frac{1}{4}$ d'icelle : & ainsi des autres. C'est pourquoy, comme i'estime Euclide au 6. liure, & autres Mathematiciens, appellent le denominator de quelconque raison la quantité d'icelle ; car il denomme, comme nous auons dit, combien une quantité est en une autre avec laquelle elle est conferee, ainsi qu'il apert par les exemples proposez.

Or de ces choses on peut facilement colliger le denominator de quelconque raison. Car le denominator de la raison multiple, est le nombre entier contenant autant d'unitéz, que la plus grande quantité de la raison contient la moindre. Comme le denominator de la raison double est 2. de la sextuple, 6. de la centuple, 100. &c. Mais le denominator de quelconque raison submultiple, est un nombre rompu, duquel le numerateur est tousiours l'unité : mais le denominator est le nombre denommant la raison multiple correspondant. Comme le denominator de la raison subdouble est $\frac{1}{2}$: de la subsextuple, $\frac{1}{6}$: de la subcentuple $\frac{1}{100}$, &c. Il est donc facile de trouuer le denominator de quelcōque raison multiple ou submultiple, puis que la prolotion monstre le denominator de la raison, comme il est euident par les exemples proposez.

Le denominator de quelconque raison superparticuliere est l'unité avec la partie aliquote que la maiere quantité doit comprendre outre la moindre. Comme le denominator de la raison sesquiquarte est $1\frac{1}{4}$: de sesquitierce $1\frac{1}{3}$, &c. Il n'est donc pas difficile de trouuer le denominator d'une raison superparticuliere, puis que la pr

lation d'icelle raison exprime le denominateur, par sa partie aliquote, comme il appert par les exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere est un nombre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur seulement d'une unité. Comme le denominateur de la raison subesquialtere, est $\frac{2}{3}$; subesquiterce, $\frac{3}{4}$, &c. Donc le denominateur de telle raison sera aisément trouué: car il n'y a qu'à prendre pour numerateur de la fraction, le denominateur de la partie aliquote; & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'unité. Comme le denominateur de la raison sesquiquinte est $\frac{5}{6}$.

Le denominateur de quel que raison superpartiente, est une unité avec les parties aliquotes que la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison supertripartiente quarte est $1\frac{1}{4}$; de superquadripartiente quintes, est $1\frac{1}{5}$. Les denominateurs de telles raisons sont faciles à trouuer, pource que la prolation de la raison exhibe le propre denominateur, comme il apert es exemples cy dessus. Mais le denominateur de quelconque raison subsuperpartiente, est un nōbre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur, d'autant d'unitex, que la plus grande q^{te} d^{te} contient de parties aliquotes par dessus la moindre. Comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quarte est $\frac{7}{8}$; de subsuperquadripartiente quinte, est $\frac{9}{10}$, &c. On trouuera donc le denominateur de telles raisons, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes exprimees en la raison, auquel si on adioust le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction. comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quinte, est $\frac{7}{8}$, pource que le munerateur de ceste fraction est le nombre denommant les quintes, sçauoir 5. auquel est adiousté le nombre 3. des trois parties, afin de faire 8. denominateur de la fraction.

Le denominateur de quelconque raison multiple superparticuliere est le nombre entier, denommant la multiple raison, avec la partie que la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison triple sesquisepiesme est $3\frac{1}{3}$; de quadruple sesquiquinte, $4\frac{1}{5}$, &c. Le denominateur de telle raison est aisé à exhiber, pourceque la prolation de la raison exprime distinctement tant le denominateur de la multiple raison, que la partie aliquote, omme se voit es exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison submultiple superparticuliere est une fraction dōt le numerateur est le nombre denōmant les parties aliquotes obtenue en la raison. Cōme le denomn de la raison subtriple sesquiquinte est $\frac{4}{3}$; de subquadruple sesquisepiesme, $\frac{5}{4}$, &c. On trouue a ce denominateur de telle raison, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur

de la partie aliquote, Et iceluy estant multiplié par le denominateur de la raison multiple, si on adiouste 1. au produit, on aura le denominateur de la fraction, comme il est manifeste par les exemples cy-dessus.

Le denominateur de quelconque raison multiple superpartiente, est nombre entier, denommant la raison multiple obtenue en icelle, avec les parties aliquotes que doit comprendre la plus grande quantité de moindre. Comme le denominateur de la raison triple superbispartiente tierces, est $3\frac{2}{3}$ de quadruple supertripartiente quintes, $4\frac{3}{4}$, &c. Il est facile de trouver le denominateur de telles raisons, pour ce que la prolation exprime distinctement, tant le denominateur de la raison multiple, que les parties aliquotes, comme apert en exemples cy-dessus, Et le denominateur d'une raison submultiple superpartiente, est une fraction, dont le numérateur, le nombre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le denominateur de la raison subtriple superbispartiente tierces, est $\frac{3}{11}$ de subquadruple subtripartiente quintes, est $\frac{5}{23}$ &c. Le denominateur de telles raisons sera trouvé, si pour le numérateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes: lequel estant multiplié par le denominateur de la raison multiple, & au nombre produit adiouste le nombre des parties aliquotes, viendra le denominateur de la fraction, ainsi qu'il appert en exemples posés cy-dessus.

Finablement le denominateur de la raison d'égalité est toujours l'unité pour ce que les quantitez d'icelle raison sont égales entr'elles; & passant l'une contient l'autre une fois précisément.

4. Proportion, est vne similitude de raisons

Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles est dite raison, ainsi la comparaison de deux ou plusieurs raisons entr'elles, est dite proportion: comme si la raison de A à B, est semblable à la raison de C à D, l'habitude d'entre ces raisons sera dite A. B. C. D. proportion. Or ceste proportion est continue ou discrete: la continue est celle de laquelle les grandeurs entre-moyennes sont prises deux fois, tellement qu'il ne se fait nulle interruption de raisons, ains chaque quantité entre-moyenne est antecedant & consequent, sçavoir antecedant de la quantité subsequente, mais consequent de la quantité antecedante: comme si on dict, que telle qu'est la raison A à B, telle est celle de B à C, où la quantité B est antecedant de la quantité C, mais consequent de la quantité A. Mais proportion discrete ou non continue, est celle en laquelle chaque quantité est prise seulement une fois, tellement qu'il se fait interruption de raisons, & aucune quantité n'est antecedant & consequent, mais seulement antecedant ou consequent: comme si on dict que la raison de A à B, est comme celle de C à D.

5. Les grandeurs sont dictes auoir raison l'une à l'autre, lesquelles estans multipliées se peuuent excéder l'une l'autre.

Euclide ayant en la 3. def. appellé raison l'habitude de deux grandeurs de mesme genre, il explique en ceste cy quelle chose requierent deux quantitez de mesme genre, afin qu'elles soient dites auoir raison, sçavoir est que l'une ou l'autre d'icelles estant multipliée, elle s'augmente en sorte, que finalement elle surpasse l'autre: ainsi il y a raison entre le costé d'un quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le costé multiplié par 2. c'est à dire pris deux fois, excède le diametre. Car d'autant que deux costez du quarré & le diametre constituent un triangle Isoscele, par la 20. p. 1. les deux costez du quarré seront plus grands que le diametre. Ainsi pareillement entre la circonférence d'un cercle & le diametre d'iceluy il y a raison (laquelle toutefois n'est encore cogneüe) puis que le diametre multiplié par 4. c'est à dire pris 4. fois, excède la circonférence: car toute la circonférence, comme il est démontré par Archimede, ne contient que trois fois le diametre, & encore une particule peu moindre qu'une septiesme partie d'iceluy diametre. Mais il s'en suit de ceste def. qu'une ligne finie n'aura raison à une infinie, encores qu'elles deux lignes soient de mesme genre de quantité: car en quelque sorte que soit multipliée la ligne finie, elle ne pourra surpasser l'infinie. S'ensuit aussi qu'il n'y a point de raison entre un angle rectiligne, & un angle contingent. Car il apert de la 16. p. 3. qu'iceluy angle contingent, ne peut jamais excéder un angle rectiligne.

6. Les grandeurs sont dictes estre en mesme raison, la premiere à la seconde, comme la troisieme à la quatrieme, quand les equemultiplices de la premiere & troisieme, aux equemultiplices de la seconde & quatrieme, en quelque multiplication que ce soit, defaillent ensemble, sont egales, ou excèdent, vn chacun à vn chacun, prenant celles-là qui s'entre-respondent.

Ayant esté dit par Euclide que c'est que raison, & quelles grandeurs sont dites auoir raison l'une à l'autre, maintenant il declare quelle con-

dition requierent les grandeurs pour estre en mesme raison, sçauoir est que les equemultiplices de la premiere & troisieme grandeur excèdent, soient egales, ou defaillent aux equemultiplices de la 2. & 4. en quelque multiplication que soient prises icelles equemultiplices; comme appert en ces 4. quantitez A, B, C, D , où les equemultiplices de A , & C premiere & 3. sont $E, & F$, & les equemultiplices de B & D . 2. & 4. quantitez sont $G, & H$; tellement qu'il se voit qu'ayant mult plié A , & C , par un mesme nombre & B, D par quel onque mesme nombre; si la multiplie E excède la multiplie G qui luy correspond, aussi la multiplie F excède la multiplie H ; si elle est egale, l'autre sera aussi egale; si elle defaut, aussi fera l'autre, & ce en quelque multiplication qu'on prenne les equemultiplices: & partant il y a mesme raison de A premiere quantité à B seconde, que de C 3. à D 4.

$A. B. C. D.$
6. 3. 4. 1.

$E. G. F. H.$
24. 15. 16. 10.
30. 10. 20. 12.
12. 21. 8. 14.

Par la conuerse de ceste def. s'il y a telle raison de la premiere à la seconde, que de la 3. à la 4. il s'ensuit que les equemultiplices de la 1. & 3. excèdent, sont egales, ou defaillent aux equemultiplices de la 2. & 4. engendrees de quelque multiplication que ce soit.

Et aussi s'il n'y a mesme raison de la premiere à la 2. que de la 3. à la 4. il s'ensuura que les equemultiplices de la 1. & 3. n'excederont, ne seront egales, ou ne defailliront aux equemultiplices de la 2. & 4. produites de quelque multiplication que ce soit.

Or ce qui est dit icy de 4. grandeurs se doit aussi entendre de trois, prenant celle du milieu 2. fois, afin qu'il y en ait 4.

7. Les grandeurs qui sont en mesme raison, sont appellees proportionnelles.

Comme si des grandeurs A, B, C, D , il y a mesme raison de A à B , que de C à D , icelles grandeurs sont dites proportionnelles.

$A. B. C. D.$
12. 8. 6. 4.

Et les grandeurs E, F, G , lesquelles sont en proportion continue, sont aussi dites continuellement proportionnelles.

$E. F. G.$
12. 6. 3.

8. Quand des equemultiplices, celui de la premiere grandeur excède celui de la seconde, & le multiplie de la troisieme n'excede celui de la quatrieme, lors il y aura plus grande raison de la premiere grandeur à la seconde, que de la troisieme à la quatrieme.

Euclide declare icy quelle condition doivent auoir 4 grandeurs, afin que la premiere soit dite auoir plus grande raison à la secõde que la tierce à la 4. disant qu'ayant pris les equemultiplices de la premiere & de la 3. & les equemultiplices de la 2. & 4. si la multipliee $A. B. C. D.$ de la premiere excede la multipliee de la 2. mais la multipliee de la 3 n'excede la multipliee de la 4 il y aura plus grande raison de la premiere à la seconde, que de la 3. à la 4. comme il appert en l'exemple icy posé, auquel sont prinsees $E.$ & $F.$ doubles de A & C , 1. & 3. grandeur, mais G & H triples de B & D 2. & 4. grandeur : & pource que E multipliee de A 1. est plus grande que G multipliee de B 2. & F multipliee de C 3. n'est pas plus grande que H multipliee de D 4. la raison de A premiere grandeur à B 2. est dite plus grande que la raison de C 3. à D 4.

Or afin que quatre grandeurs soient dites estre en mesme raison, il est necessaire que les equemultiplices d'icelles, prises selon quelconques multiplications, excèdent, soient egales, ou defaillent, comme il a esté exposé en la 6. def. Mais afin que la premiere grandeur soit dictée auoir plus grande raison à la 2. que la 3. à la 4. c'est assez, que des equemultiplices prises selon quelque multiplication, celle de la 1. grandeur excede celle de la 2. & la multipliee de la 3 n'excede celle de la 4. encore que selon plusieurs autres multiplications ces equemultiplices ne soient telles. Parquoy pour conclure en quelque demonstration, qu'il y a plus grande raison d'une grandeur à une autre, que d'une 3. à une 4. il suffira de demonstrier que selon quelque multiplication, la multipliee de la 1. grandeur excédât celle de la seconde, la multipliee de la 3. n'excede celle de la 4.

Et couuertissant ceste 8. def. s'il y a plus grande raison de la premiere grandeur à la 2. que de la 3. à la 4. la multipliee de la 1. excédant celle de la 2. il se peut faire quelque multiplication par laquelle la multipliee de la 3. n'excede celle de la 4.

Que si au contraire d'icelle def. la multipliee de la premiere grandeur ne surmonte celle de la 2. & la multipliee de la 3. excede celle de la 4. la premiere grandeur sera dite auoir moindre raison à la 2. que la 3. à la 4. La conuerse a aussi lieu.

9. Proportion ne peut estre constituee sur moins de trois termes.

Puis qu'il a esté dit en la 3. def. que raison est l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4. def. est une similitude de deux ou plusieurs raisons: il s'ensuit qu'il n'y peut auoir moins de trois quantitez ou termes en une proportion, si elle est proportion continuë.

mais en faut quatre au moins, si elle est proportion discrète.

10 Quand trois grandeurs sont proportionnelles, la premiere est dite auoir à la troisieme la raison doublee de la premiere à la seconde: s'il y en a quatre; la premiere est dite estre à la quatriesme, en raison triplee de la premiere à la seconde: & tousiours d vn mesme ordre vne plus, iusques à ce que la proportion soit acheuée.

Comme si les grandeurs A, B, C, D, E , sont continuellement proportionnelles, la premiere quantité A est dite auoir à la 3. quantité C , la raison doublee de celle de A à la seconde B , pource qu'entre A & C sont deux raisons, qui sont egales à la raison de A à B , sçauoir est la raison de A à B , & celle de B à C , tellement $A. B. C. D. E$ que la raison de A à C prend par ce moyen la raison doublee de A à B , c'est à dire posée deux fois d'ordre Mais la raison de la premiere grandeur A à la 4. D , est dictée triplee de celle de A à B , pource qu'entre A & D se trouuent trois raisons, lesquelles sont egales à celle de A à B : c'est à sçauoir la raison de A à B , celle de B à C , & celle de C à D : & partant la raison de A à D encloist par ce moyen la raison triplee de A à B , c'est à dire posée trois fois d'ordre. Et ainsi pareillement la raison de A à E , est dictée quadruplee de la raison de A à B , pource qu'entre A & E sont encloses 4. raisons qui sont egales à celle de A à B , &c.

Dounot a retranché de ceste def. ces mots: Et tousiours d'un mesme ordre vne plus, iusques à ce que la proportion soit finie,

11. Les grandeurs sont dites homologues, ou de semblables raisons, les antecedans aux antecedans, & les consequens aux consequens.

C'est à dire que si plusieurs quantitez sont proportionnelles, comme A, B, C, D , sçauoir que comme A est à B , ainsi C est à D , les quantitez A , & C , antecedantes de chaque raison, seront dictes Homologues, ou de semblable raison, com-

$A. B. C. D.$
4. 2. 6. 3.

meauffi les quantitez consequentes B & D . *Ainsi pareillement si les quantitez E, F, G , sont proportionnelles aux quantitez $E. F. G. H, I, K$; les termes $E, & H$, seront dictz Homologues 2. 4. 8. ou de semblable raison: comme auffi le terme F sera dict Homologue au terme I : & auffi G à K : ainsi les costez 3. 6. 12. des figures estans comparez entr'eux, on entend quels costez doiuent estre antecedans des raisons, & quels consequens.*

12. Raison alterne, est prendre l'antecedant comparé à l'antecedant, & le consequent au consequent.

Euclide explique en ceste def. & es suivantes, aucuns moyens d'argumenter es proportions, desquels l'usage est fort frequent en la Geometrie. Il dist donc icy que la raison alterne ou permuee, est quand de 4. grandeurs proportionnelles proposees, comme A, B, C, D , sçavoir que comme A est à B , ainsi C est à D ; on vient à conclure $A. B. C. D.$ qu'il y a mesme raison de l'antecedant A à l'antecedant C , que du consequent B au consequent D : & ceste maniere d'argumenter se conche ordinairement ain: comme A est à B , ainsi C est à D ; donc en permutant, comme A sera à C , ainsi B à D . Or il est necessaire qu'en ceste maniere d'argumenter, les 4. grandeurs soient de mesme genre. Car le nombre A estant au nombre B , comme une superficie E est à une superficie F ; de vouloir inferer comme a fait Dounot en plusieurs endroits, & notamment es 17. p. 5. 29. 48 & 85. p. 10. qu'en permutant le nombre A est à la superficie E , comme le nombre B à la superficie F , c'est se mocquer; puis qu'il n'y a nulle raison du nombre à la superficie, comme il apert par les 3. & 5. def. Ceste maniere d'argumenter est demonstree en la 16. p. de celiure.

13. Raison inuerse ou transposée, est lors qu'on prend le consequent comme antecédant pour le comparer à l'antecedant, comme si c'estoit le consequent.

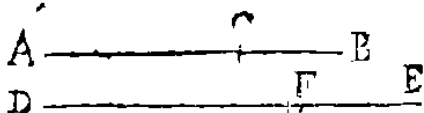
Comme si A est à B , ainsi que C à D , nous infererons que par raison inuerse, comme B est à A , ainsi D est à C , c'est à $A. B. C. D.$ dire les consequens aux antecédans. En ceste sorte d'argumenter les auteurs parlent presque ainsi: comme A est à B , ainsi C est à D ; donc en changeant, ou au contraire, B sera à A , comme D à C .

Ceste maniere d'argumenter sera demonstrée au coroll. de la 4. p. de ce liure.

Ceste def. a esté tellement traduicte par Dounot, que le sens d'Euclide n'y peut estre recognu.

14 Composition de raison, est lors qu'on prend l'antecedent avec le consequent, comme vne seule chose pour le comparer au mesme consequent.

Comme si AC est à CB , comme DF à FE : Et on veut à conclure que la toute AB est à CB , comme la toute DE à FE ; c'est à dire que la composée de l'antecedant AC & du consequent CB , est au mesme consequent CB , comme la composée de l'antecedant DF & du consequent FE est à iceluy consequent FE : ceste maniere d'argumenter sera dicté composition de raison: & se prononce ainsi: comme AC est à CB , ainsi DF à FE : donc en composant AB sera à CB , comme DE à FE : laquelle sorte d'argumentation sera demonstré en la 18. p. de ce liure.



A ce moyen d'argumenter, par la composition de raison, en peuvent estre adioustez deux autres: le premier peut estre dict composition conuerse de raison: sçauoir quand on prend l'antecedent & consequent comme un seul, pour le comparer à l'antecedant. Comme si AC est à CB , comme DF à FE ; Et nous inferons, donc comme AB composée de l'antecedant, & du consequent, est à l'antecedant AC , ainsi DE composée de l'antecedant & du consequent est à l'antecedant DF : laquelle argumentation nous demonstrerons estre valide sur la 18. p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dict composition contraire de raison; c'est à sçauoir quand l'antecedant est comparé à l'antecedant & consequent comme un seul. Comme si AC est à CB , ainsi que DF à FE , & nous inferans par composition contraire de raison: donc comme AC l'antecedant sera à la toute AB composée de l'antecedant & du consequent, ainsi DF antecedant sera à la toute DE composée de l'antecedant & du consequent. Nous demonstrerons sur la 18. p. de ce liure que ceste forme d'argumentation est valable.

15. Diuision de raison est lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent, pour le comparer à iceluy mesme consequent.

Comme si on dit qu'il y a l'excez de AB à CE , si le verbe luy p...

cedente figure) que de DE à FE : donc aussi AC excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent, sera à CB consequent, comme DF excez par lequel l'antecedant excède le consequent, sera à FE consequent. Or les auteurs concluent ordinairement avec ceste raison ainsi: comme AB est à CB , ainsi DE est à FE : donc en diuisant AC sera aussi à CB , comme DF à FE . Ce qui sera demonstrez en la 17. p. de ce liure.

A ce moyen d'argumenter en peuuent aussi estre adioustez deux autres: le premier peut estre appelé diuision conuerse de raison, c'est à sçauoir quand le consequent est compare à l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent. Comme si AB est à CB , comme DE à FE , ~~Et~~ nous inferons: donc aussi par diuision conuerse de raison, comme CB consequent sera à AC excez, par lequel l'antecedant surmonte le consequent, ainsi FE consequent sera à DF excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent: laquelle maniere d'argumentation nous demonsturons pouuoir estre sur la 17. p. Il est manifeste qu'en l'une & l'autre d'celles argumentations, par diuision de raison, l'antecedant doit estre plus grand que le consequent.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit diuision contraire de raison, c'est à sçauoir quand l'antecedant est conseré à l'excez par lequel le consequent excède l'antecedant. Comme quand on dit, AC estre à AB , comme DF à DE : Donc aussi par diuision contraire de raison AC antecedant sera à CB , excez par lequel le consequent surmonte l'antecedant, comme DF antecedant sera à FE , excez par lequel le consequent surpasse l'antecedant: lequel moyen d'argumenter nous demonsturons sur la 17. p. de ce liure.

Il est euident qu'en ceste diuision contraire de raison, le consequent doit estre plus grand que l'antecedant.

16. Conuerfion de raison est comparer l'antecedant à l'excez, par lequel l'antecedant surpasse le consequent.

Comme si on dit, que comme AB est à CB , EF ainsi DE à: & on vient à conclure que AB antecedant sera aussi à AC , soit venue la figure, par lequel il surmonte le consequent, comme D re de la 14. def. E antecedant sera à DF , excez par lequel l'antecedant excède le consequent, cela sera dit conuerfion de raison. En ceste sorte d'argumenter les auteurs parlent ordinairement ainsi: comme AB est à CB ainsi DE est à FE : Donc par conuerfion de raison AB sera à AC , comme DE à DF : laquelle sorte d'argumenter sera demonstree au coroll. de la 19. p. de ce liure. Ceste 16. def. a esté retranchée par Dounot.

17. Raison egalle est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'un costé, & autant de l'autre en

multitude, prise de deux en deux en mesme raison, & que la premiere des premieres grandeurs, est à la derniere des mesmes, comme la premiere des secondes est à la derniere des mesmes.

Autrement c'est lors qu'on prend les extremes par la soustraction des moyennes.

Comme s'il y a d'un costé quatre quantitez, A, B, C, D ; Et d'autre d'un autre E, F, G, H lesquelles soient prises deux à deux en mesme raison, c'est à dire que A soit à B comme E à F ; Et B à C , comme F à G ; Et C à D comme G à H . si on infere que cõme A est à D premiere & derniere des premieres, ainsi E à H premiere & derniere des secondes. Ceste maniere d'argumentation est dite raison egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que ceste maniere d'argumenter se prend ordinairement en deux sortes sçavoir est, quãt les valeurs qui sont en mesme raison sont prises d'ordre, & quant l'ordre est perverti. Euclid. expose es deux def. suivantes que c'est que proportion ordonnée & perturbée.

18. Proportion ordonnée est quand l'antecedent est au consequent comme l'antecedant est au consequent de l'autre: & ainsi que l'un des consequens est à quelque autre, l'autre consequent soit aussi à quelque autre.

Ce y est aisé à entendre par l'exemple de la def. precedente, où nous posé A estre à B cõme E à F , A à B cõme F à G ; Et C à D , comme G à H . Car ainsi les termes des 4. premieres quantitez sont pris d'un mesme ordre, que ceux des quatre dernieres; & par tant ceste proportion est dite ordonnée. Or que le moyen d'argumenter par raison d'egalité, la proportion d'ordre est à observer, soit bon, il sera démontré en la 22. p. de ce livre.

19. Proportion troublée est quand trois

grandeurs estans d'un costé, & autant d'un autre, la premiere est à la seconde, comme la cinquiesme à la sixiesme, & comme la seconde à la troisieme; ainsi la quatriesme à la cinquiesme.

Comme si *A* est à *B*, ainsi que *E* est à *F*; & comme *B* est à *C*, ainsi *D* à *E*: ceste proportion sera dictetrou-
blee ou perturbée d'autant qu'un mesme ordre n'est pas
gardé en la comparaison des premieres grandeurs
entr'elles, qu'es secondes aussi entr'elles. Car les premieres quantitez, la
premiere est comparee à la seconde, & ceste cy à la 3. mais es secondes
quantitez la 2. est comparee à la 3. & la premiere à la 2. Or que le
moyen d'argumenter par raisonnement, la proportion troublee estant gar-
dée, soit bon, il sera démontré en la 23. p. de ce livre.

A. B. C.

12. 8. 4.

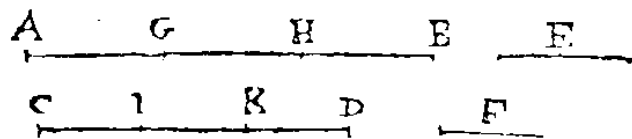
D E F.

12. 6. 4.

THEOR. I. PROP. I.

S'il y a tât de grandeurs qu'on voudra equemultiplices d'autant d'autres grandeurs, chacune à la sienne, comme l'une sera multi-
plice de l'une, ainsi les toutes seront multipli-
ces des toutes.

Soient tant de gran-
deurs qu'on voudra
AB & *CD*, equemul-
tiplices d'autant d'au-



tres grandeurs *E* & *F*. Je dis que les grandeurs *AB* & *CD* en-
semble, seront autant multiplies de *E* & *F* ensemble, comme
AB est de *E* ou *CD* de *F*.

Car puis que *AB* est multiplie de *E* *E* mesurera *AB* cer-
tain nombre de fois par la 2. def. 5. qu'elle la mesure donc
trois fois, & soit icelle *AB* coupee en trois parties egales *AG*
GH, *HB*, qui seront chacune egale à *E*. Le mesme se peut di-
re de la grandeur *CD*, laquelle on coupera aussi en trois
parties egales *CI*, *IK*, *KD*, estant chacune d'icelles egale à
F; mais qui à choses egales, sçavoir à *AG*, & *E* adouste cho-

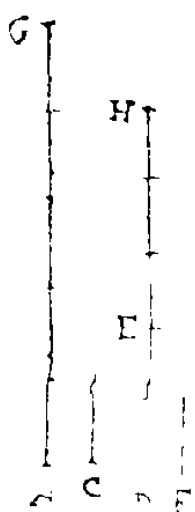
ses egales, sçavoir CI, & F, les toutes AG, CI ensemble, seront egales aux toutes E & F ensemble. Par mesme raison C H & IK ensemble, seront egales a icelles E & F ensemble pareillement HB & KD, aux mesmes E & F. Autant donc qu'il y a de grandeurs en AB, egales a E; & en CD egales a F; autant y en a-il en AB & CD prises ensemble, qui sont egales à E, & F prises ensemble: Parquoy les deux AB & CD ensemble, seront triples des deux ensemble E & F, comme la seule AB est triple de la seule E, ou la seule CD de la seule F ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere est autant multipliee de la seconde, que la troisieme de la quarte; & la cinquiesme autant multipliee de la seconde, que la sixiesme, de la quarte; la composee de la premiere & cinquiesme sera autant multipliee de la seconde, comme la composee de la troisieme & sixiesme, de la quarte.

Soit la premiere grandeur AB, autant multipliee de la seconde C, comme la 3. DE l'est de la 4. F. & soit la 5. BG autant multipliee de la 2. C, comme la 6. EH, de la 4 F: Je dis que la 1. & 5. ensemble AB, & BG, seront autant multipliees de la 2. C. comme la 3. & 6. DE & EH ensemble, seront de la 4 F.

Car puis que AB est autant multipliee de C, cōme DE de F, il y a en AB autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DE d'egales a F. Par mesme raison, il y aura aussi en BG autant de grandeurs egales a C, comme il y en a en EH d'egales a F. Il y aura donc en AG autant de grandeurs egales a C, qu'il y en a en DH d'egales a F. Parquoy AG composee de la premiere & est autant multipliee de la seconde C, comme DH composee de la 3 & 6. l'est de la 4. F. ce qu'il falloit demonstrier.

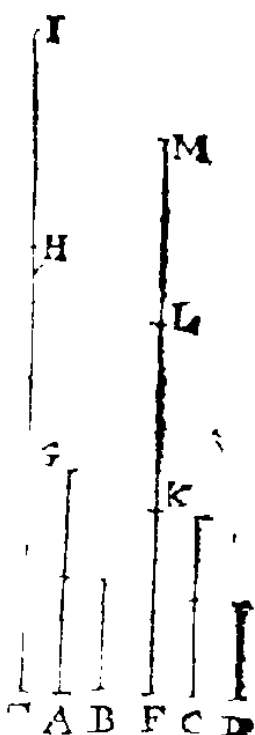


THEOR. 3. PROP. III.

Si la premiere est autant multipliee de la seconde, comme la tierce de la quarte ; & on prend des equemultiplices de la premiere, & troisieme : la multipliee de la premiere sera aussi autant multipliee de la seconde, que la multipliee de la 3. le sera de la quarte.

Soit A autant multipliee de B, comme C est de D, & de la 1. & 3. A & C, soient prises les equemultiplices E & F. Je dis que E sera autant multipliee de B, que F. de D.

Car puis que E est autant multipliee de A, que F l'est de C; E contiendra autant de parties egales a A, comme F de parties egales a C. Soit donc E diuisee en EG, GH, & HI, chacune egale a A; Item F diuisee en FK, KL & LM chacune egale a C; & d'autant que EG & FK sont egales a A & C, lesquelles sont equemultiplices de B & D par l'hypothese; aussi EG & FK seront equemultiplices des memes B & D. Par mesme raison GH & KL, item HI & LM seront equemultiplices d'icelles B & D. Veü donc que EG premiere grandeur est autant multipliee de la seconde B, que FK 3. l'est de D. 4. item GH 5. autant multipliee de la mesme seconde B, que KL 6. de la 4. D; aussi EH composee de la 1. & 5. sera autant multipliee de la 2. B, que FL composee de la 3 & 6 l'est de la 4. D par la precedente prop. Derechef puis que EH premiere grandeur est autant multipliee de la seconde B. que FL 3 l'est de D 4. & HI 5. est aussi autant multipliee de la seconde B, que LM 6. l'est de la 4. D; EI composee de la 1. & 5. sera aussi autant multipliee de la 2. B, que FM composee de la 3 & 6. l'est de D 4. par la 2. p. 5. ce qu'il falloit demonstrier.



THEOR. 4. PROP. IIII.

Si la premiere est à la seconde, en mesme

raison que la tierce à la quarte : aussi les equemultiples de la premiere & tierce auront mesme raison aux equemultiples de la seconde & quarte, en quelque multiplication que ce soit, si elles sont prises ainsi qu'elles s'entre-respondent.

Soit A à B en mesme raison que C à D, & soient prises E & F equemultiples de A premiere & C 3. Item G & H equemultiples de B 2. & D 4. selon quelque multiplication que ce soit. Je dis qu'il y a mesme raison de E à G, que de F à H.

Car si on prend I & K equemultiples de E & F; pareillement L & M equemultiples de G & H; d'autant que E premiere est autant multiple de A 2. que F 3. l'est de C 4. & I, K sont prises equemultiples d'icelles E, F premiere & tierce, aussi par la 3. p 5. I, & K seront equemultiples de A, & C seconde & quarte. Par mesme raison L & M seront aussi equemultiples de B & D : & puis que A est à B comme C à D; & d'icelles A & C 1. & 3. ont esté démontrées I & K equemultiples, mais de B & D 2. & 3. autres equemultiples L & M, par la conuerse de la 6. def. 5. si I deffaut est egal, ou plus grâde que L, aussi K deffaudra, sera egal, ou plus grande que M, selon quelcoiques multiplications qu'icelles equemultiples soient prises. Et pour autant que I & K, sont equemultiples de E & F; pareillement L & M de G & H, par la mesme def. 5. il y aura mesme raison de E à G, comme de F à H, qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

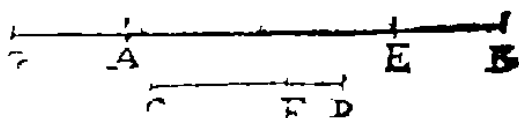
Par cecy est manifeste la preuue de la raison inuerse, qu'Euc a expliquée en la 13. def. de ce liure, sçavoir est, que si 4. grandeurs sont proportionnelles, elles le seront aussi estans prises à rebours.

à dire que E estant à G comme F à H, aussi en changeant G sera à H comme H à F. Car puis qu'il a esté démontré que si I défaut, est égale, ou plus grande que L, aussi K défendra, sera égale, ou plus grande que M; selon quelconque multipli. Il apert aussi que si L défaut, est égale, ou plus grande que I, aussi M défendra, sera égale ou plus grande que K, selon quelconque multiplication: Et partant par la 6. def. il y aura mesme raison de G à E que de H à F.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne grandeur est autant multipliee d'vne grandeur, que la retranchee de la retranchee; aussi le reste sera autant multipliee du reste, que la toute de la toute.

Soit la toute AB, autant multipliee de la toute CD, comme la retranchee AE, de la retranchee CF: Je dis que le reste EB, sera autant multipliee du reste FD, que la toute AB est de la toute CD.



Car AG estant faicte autant multipliee de FD, comme AE est de CF, ou comme la toute AB l'est de la toute CD: d'autant que AE, AG sont equemultiplices de CF, FD: par la 1. p. 5. la toute GE, sera autant multipliee de la toute CD, comme AE, de CF: Mais aussi AB, estoit autat multipliee de CD cōme AEd: CF: donc GE: AB, sont equemultiplices de CD; & partant egales entr'elles par la 6. com. sent. Parquoy en ostāt ce qui est de cōmun AE, demeureront egales GA, EB; & partant equemultiplices de FD, puis que GA a esté posée multipliee d'icelle FD, & autant comme AB de CD: donc aussi le reste EB sera autant multipliee du reste FD, que la toute AB l'est de la toute CD, ce qu'il falloit démonstrier.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont equemultiplices de deux autres grādeurs, & d'icelles on retranche

che des equemultiplices : ou les restes seront
egaux aux mesmes, ou equemultiplices d'icelles.

Soient les grandeurs AB, CD, equemultiplices
des grandeurs E, F ; & les retranchées AG, CH
aussi equemultiplices des mesmes E, F. Je dis que
les restes GB, HD seront ou egales aux mesmes
E, F, ou equemultiplices d'icelles.

Car d'autant que AB & CD, sont equemulti-
plices de E & F en AB il y aura autant de grandeurs
egales à E comme en CD de grandeurs egales à
F. Pareillement d'autant que la retranchée AG est
autant multiple de E, que la retranchée CH
est de F; AG contiendra autant de grandeurs ega-
les à E, que CH de grandeurs egales à F, par la
1. & 2. def. 5. Si donc d'egales multitudes de
grandeurs AB, & CD, on oste egales multitudes
de grandeurs AG, CH, les multitudes demeurante
GB, HD seront egales: c'est à dire que GB contiendra autant
de fois E, comme HD contiendra F, ou bien si GB est egale
E, aussi HD sera egale à F, & si BG est multiple de E, aussi
HD sera autant multiple de F.



THEOR. 7. PROP. VII.

Les grandeurs egales ont mesme raison à
vne meime; & ceste-cy aura mesme raison aux
grandeurs egales.

Soient deux grandeurs

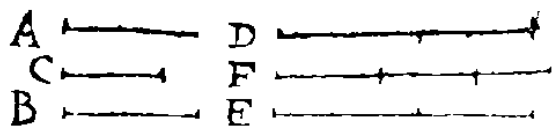
egales A & B, & vne autre

quelle qu'elle soit C. Je

dis que A & B ont mesme

raison l'une que l'autre à C; & que C aura mesme raison à A

que à B



Qu'il ne soit ainsi; soient pris D & E equemultiplices de A
& B, soit aussi pris F quelconque multiple de C; donc
pour autant que D est autant multiple de A, que E est mul-
tiplice de B, & que A & B sont egales; aussi D, & E seront ega-

les par la 6. com. sent Si donc D est plus grande, egale, ou plus petite que F, aussi E sera plus grande, egale, ou plus petite que la mesme F, & par la 6. def. 5. il y aura telle raison de A à C, comme de B à la mesme C.

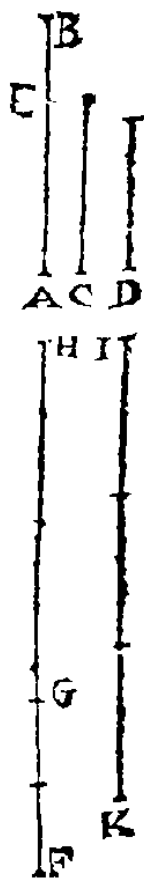
Quant à l'autre partie, elle se prouue tout de mesme par la 6. def. 5. en prenant les mesmes equemultiplices, & montrant l'excez, &c. ou bien plus facilement par la raison inverse. Car puis qu'il a esté démontré que A est à C, comme B à C, en changeant C sera à A, comme C à B par le corol. de la 4. p. 5.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Des grandeurs inegales, la plus grande a plus grande raison à vne mesme, que la plus petite; & vne mesme a plus grande raison à la plus petite, qu'à la plus grande.

Soient deux grandeurs inegales AB, & C, desquelles AB est la plus grande, & vne troisieme quelle qu'elle soit D. Je dis que AB a plus grande raison à la troisieme D, que non pas C, item, que D a plus grande raison à C, qu'à AB.

Qu'il ne soit ainsi; soit entendue AB premiere grandeur, D 2. C 3. D. 4. & d'autant que AB est plus grande que C, soit retranchée AE egale à icelle C, & soient trouuées les equemultiplices, à sçavoir FG de BE, & GH de EA, en sorte que FG, & GH soient plus grandes chacune que D: & puis que les deux FG, GH, sont equemultiplices des deux BE, EA, par la 1. p. 5. HF sera autant multiplie de AB, comme HG de AE, ou de C son egale: Maintenant soit prise IK aussi multiplie de D, en sorte qu'elle soit plus petite que HF, mais plus grande que HG (ce qui est facile, d'autant que D est plus petit que ny FG, ny GH; si bien qu'il faut seulement adiouter tant de fois la grandeur D, iusques à ce que l'on ait ce que l'on cherche) d'autant que FH, GH sont equemultiplices de AB premiere, & C troisieme, si IK est prise pour l'equemultiplie, tant de D seconde, qu'a



D quatriesme, il est evident que HF multiplie de AB premiere, estant plus grande que IK multiplie de D 2. HG multiplie de C 3. n'est pas plus grande que IK multiplie de D 4. & partant par la huitiesme def. 5. il y aura plus grande raison de AB à D, que de C a la mesme D.

Quant a la seconde partie, dautant que IK multiplie de la premiere D (car il faut maintenant poser D premiere & troisieme, & C seconde, & AB quatrieme) est plus grande que H G multiplie de la seconde C, & I K multiplie de la troisieme D, est moindre que FH multiplie de AB quatrieme; Il y aura plus grande raison de D a C, que de D a AB par la 8. def. 5.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les grandeurs qui ont mesme raison à vne mesme, sont egales entr'elles: & celles là aussi sont egales, auxquelles vne mesme grandeur a mesme raison.

Soient premierement deux grandeurs A & B, lesquelles ont mesme raison l'une que l'autre à la troisieme C. Je dis qu'elles sont egales entr'elles.

Car si elles n'estoient egales, il faudroit que l'une ou l'autre fust plus grande: & par la 8. p. 5. icelle plus grande auroit plus grande raison à C, que la plus petite: ce qui est contre l'hypothese: donc A & B ne sont pas inegales, mais egales.



Soient maintenant A & B, à chacune desquelles C a vne mesme raison. Je dis qu'icelles A & B sont aussi egales entr'elles. Car autrement il faudroit que l'une fust plus petite que l'autre: & par la 8. p. 5. à icelle plus petite, C auroit plus grande raison qu'à la plus grande: ce qui est contre l'hypothese: & B ne sont donc pas inegales, mais egales.

THEOR. 10. PROP. X.

Des grandeurs qui ont raison à vne mesme grandeur, celle qui a plus grande raison est la plus grande: & celle à laquelle la mesme a plus

grande raison, est la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C, & la raison de A à B soit plus grande que de B à la mesme C. Je dis que A sera plus grande que B: itē si C a plus grande raison à B que non pas à A. Je dis que B sera plus petite que A.

Autrement pour la premiere partie: si A n'estoit plus grande que B, elle seroit egale, ou plus petite; ce qui est impossible. car si elles estoient egales, elles auroient mesme raison l'une que l'autre à C, par la 7. p. 5. ce qui seroit contre la supposition; si aussi elle estoit plus petite, elle auroit plus petite raison à C que non pas B, par la 8. p. 5. ce qui est pareillement contre l'hypothese. Donc A sera plus grande que B.

Quant à la seconde partie, si B n'estoit moindre que A, elle seroit egale ou plus petite, ce qui est impossible: car si elles estoient egales, C auroit mesme raison à l'une qu'à l'autre par la 7. p. 5. ce qui est contre nostre hypothese: si aussi elle estoit plus grande, C auroit plus grande raison à A qu'à B par la 8. p. 5. ce qui est aussi contre l'hypothese. Donc B sera moindre que A.



THEOR. II. PROP. XI.

Les raisons qui sont de mesme à vne, sont aussi de mesme entr'elles.

Soit A à B, comme C à D; & comme C à D, ainsi E à F: Je dis que comme A à B, ainsi E fera à F.

Qu'il ne soit ainsi, de toutes les antecedantes A, C, E, soient prises quelcōques equemultiplices, G, H, I: Pareillement des

G	H	I
A	C	E
B	D	F
K	L	M

consequentes B, D, F, quelconques equemultiplices, K, L, M. Pour autant donc que A est à B comme C à D, par la conuerse de la 6. def. 5. si G multiplie de A est egale, plus grande, ou plus petite que K multiplie de B; aussi H multiplie de C,

sera egale, plus grande, ou plus petite que L. multiplie de D. Item puis que comme C a D, ainsi E à F, si H multiplie de C est egale, plus grande, ou plus petite que L, multiplie de D, aussi I multiplie de E sera egale, plus grande, ou plus petite que M multiplie de F: Parquoy si G multiplie de A premiere est plus grande, egale, ou plus petite que K multiplie de B 2. aussi I multiplie de E 3. sera plus grande, egale, ou plus petite que M multiplie de F 4. & par la 6. def. 5. comme A sera à B, ainsi E sera à F.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles; comme l'une des antecedantes sera à l'une des cōsequentes, ainsi toutes les antecedantes seront à toutes les consequentes.

Soient six grandeurs proportionnelles A, B, C, D, E, F, sçavoir que A soit à B comme C est à D, & E à F: Je dis que comme l'une des antecedantes est à une des consequentes, sçavoir est A à B, ainsi toutes les antecedantes ensemble A, C, E, seront à toutes les consequentes ensemble B, D, F.

G	_____	H	_____	I	_____
A	_____	C	_____	E	_____
B	_____	D	_____	F	_____
K	_____	L	_____	M	_____

Car estant prises de A, C, E, les equemultiplices G, H, I: item de B, D, F, les equemultiplices K, L, M; toutes les trois multiplices ensemble G, H, I, seront autant multiplices des trois ensemble A, C, E, comme la seule G est multiplie de la seule A par la 1. p. 5. Pareillemēt par la mesme raison toutes les trois K, L, M ensemble, seront autant multiplices des trois B, D, F ensemble, comme K sera multiplie de B: Partant puis que A, B, C, D, E, F sont proportionnelles, si G equemultiplie de A premiere, est plus grande, egale, ou plus petite que H, equemultiplie de C 3. aussi K equemultiplie de B deuxiesme, sera plus grande, egale, ou plus petite que L, equemultiplie de D quatriesme, par la conuerse de la 6. def. 5. & ainsi des deux autres: Partant si G est plus grande, egale, ou plus petite que

K, le composé des trois G, H, I, sera aussi plus grand, égal, ou plus petit que le composé des trois K, L, M. Donc par la même 6. def. 5. comme A sera à B, ainsi les trois A, C, E, ensemble seront aux trois B, D, F ensemble: ce qui estoit à prouver.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si la première est à la seconde comme la tierce à la quarte; mais la tierce a plus grande raison à la quarte que la cinquième à la sixième; aussi la première aura plus grande raison à la seconde, que la cinquième à la sixième.

Soit A premier à B 2. (en la précédente figure) comme C 3. à D 4. & qu'il y ait plus grande raison de C 3. à D 4. que de E 5. à F 6. Je dis qu'il y aura aussi plus grande raison de A 1. à B 2. que de E 5. à F 6.

Car estant prises de A, C, E, les equemultiplices G, H, I, & de B, D, F aussi les equemultiplices K, L, M, pour autant que A est à B comme C à D, si G multiple de A est égale, plus grande, ou plus petite que K multiple de B, aussi par la converse de la 6. def. 5. H multiple de C, sera égale, plus grande ou plus petite que L multiple de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raison de C à D, que de F à F si H multiple de C, est plus grande que L multiple de D, il n'est pas nécessaire que I multiple de E, excède M multiple de F, par la 8. def. 5. conuertie: donc aussi si G excède K, il n'est pas nécessaire que I excède M, & partant par la 8. def. 5. il y a plus grande raison de A à B, que de E à F.

S C H O L I E.

Que si la tierce C a moindre raison à la quarte D que la cinquième E à la 6. F; aussi la 1. A aura moindre raison à la seconde B, que la 5. E à la sixième F. Car si la raison de C à D est moindre que celle de E à F, c'est à dire, que la raison de E 1. à F seconde estant plus grande que celle de C 3. à D 4. si I excède M, il n'est pas nécessaire que H excède L, car quelques fois elle defaut, ou est égale à icelle par la 8. def.

5. conuertie. Mais si H defaut ou est egale a L , aussi G defaudra, on sera egale a K par la 6. def 5. conuertie, parce qu'on a pose C 1. estre a D 2. comme A 3. a B 2. Parquoy si I excède M , il n'est pas necessaire que G excède K : En partant par la 8. def 5 il y aura plus grande raison de E a F que de A a B , c'est a dire que la raison de A a B sera moindre que de E a F , ce qui estoit propose.

En la mesme mainere sera demonstre, que s'il y a plus grande raison de la 1. a la seconde, que de la tierce a la quarte; mais la tierce a plus grande raison a la quarte, que la 5. a la 6. pareillement la 1. aura beaucoup plus grande raison a la seconde que la 5. a la 6.

Que si la 1. a moindre raison a la 2. que la 3. a la quarte, & la tierce a moindre raison a la 4. que la 5. a la 6. Aussi la 1. aura beaucoup moindre raison a la seconde, que la cinquiesme a la sixiesme.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Si la premiere est a la seconde, comme la tierce a la quarte; & que la premiere soit plus grande que la tierce, aussi la seconde sera plus grande que la quarte: & si egale, egale: si plus petite, plus petite.

Soit A a B , comme C est a D , & que A premiere soit plus grande, egale, ou plus petite que C 3. Je dis que B 2. sera aussi plus grande, egale, ou plus petite que D 4.

Soit premierement A plus grande que C : il y aura donc plus grande raison de A a B , que de C a la mesme B , par la 8. p. 5. & par consequent plus grande raison de C a D que de C a B , estant i-e-l-le la mesme raison que de A a B , & par la 10. p. 5. B sera plus grande que D .

Soit puis apres A egale a C ; & par la 7. p. 5. A sera a B , comme C a B , & puis que les raisons de C a D , & C a B , sont les mesmes que de A a B ; les raisons de C a D , & de C a B , seront de mesme entr'elles par la 11. p. 5. & partant par la 9. p. 5. B & D seront egales. Finablement soit A moindre que C ; & par la 8. p. 5. il y aura plus grande raison de C a D , que de A a D ; & par consequent plus grande raison de A a B .

B, que de A à D, puis qu'il y a mesme raison de A à B, que de C à D, & par la 10. p. 5. B sera moindre que D.

S C H O L I E.

Què si la seconde est plus grande, ou egale, ou moindre que la quatrième aussi la premiere sera plus grande, ou egale, ou moindre que la tierce. Car puis que A est à B comme C à D, en changeant B sera à A comme D à C par le coroll. de 4. p. 5. Donc si B est plus grande, ou egale, ou moindre que D, aussi A sera plus grande, ou egale, ou moindre que C par la 14. p. 5.

Or Euclide n'a pas démontré que si la premiere est plus grande, egale, ou plus petite que la seconde; aussi la tierce sera plus grande egale, ou moindre que la quarte. pource que cela est evident a cause de la similitude des raisons. Ce que nous pourrions neantmoins démontrer apres Commandin; mais d'autant que sa demonstration ne compete qu'aux grandeurs de mesme genre, nous nous tiendrons à ce que la nature de proportions nous monstre, encore que les grandeurs soient de diuers genres.

THEOR. 15. PROP. XV.

Les grandeurs sont entr'elles, comme sont leurs equemultiplices entr'elles.

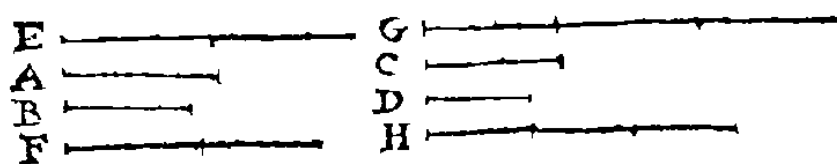
Soit AB autant multiplie de C comme DE est multiplie de F. Je dis que AB sera à DE, cōme C à F. Car puisque AB & DE sont equemultiplices, il y aura en AB autant de parties egales à C, comme DE contient de parties egales à F, soit donc diuisee AB ez parties AG, GB, egales à C, & DE és parties DH, HE egales à F; & par la 7. p. 5. vne chacune partie de AB, sera à vne chacune partie de DE, comme C est à F, & par la 12. p. 5. toutes les antecedentes AB, seront à toutes les consequentes DE, comme AG l'une des antecedentes, est à DH, l'une des consequentes, c'est à dire comme C à F, puis que c'est la mesme raison.



THEOR. 16. PROP. XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles le feront aussi estans permutees.

Soit A à B, comme C à D. Je dis qu'en permutant A sera



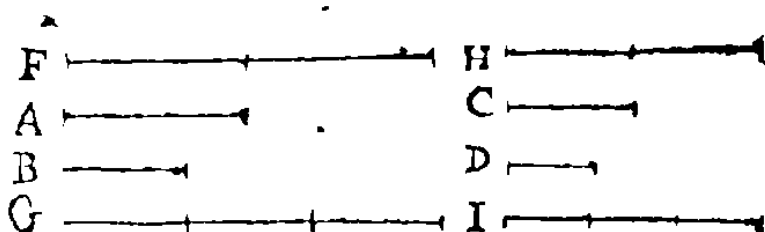
à C, comme B à D. Car si on prend E & F equemultiples de A & B, item G & H equemultiples de C & D; E sera à F, comme A à B par la propo. precedente, & G à H comme C à D; & par consequent E estant à F, & C à D, en mesme raison que A à B, elles sont de mesme entr'elles par la 11. p. 5. Recherchez puis que les raisons de E à F, & G à H sont les mesmes que de C à D, elles seront aussi de mesme entr'elles par la 11. p. 5. c'est à dire, que comme E premiere est à F seconde, ainsi sera G tierce à H quarte: parquoy par la 14. p. 5. si E premiere est plus grande, egale, ou moindre que G tierce, aussi F seconde sera plus grande, egale, ou moindre que H quatriesme, en quelconque multiplication que soient prises les equemultiples; & par la 6. def. 5. A sera à C, comme B à D (puisque E & F sont equemultiples de A premiere & B troisieme; & G & H equemultiples de C seconde & D 4. & celles la defaillent, sont egales, ou excèdent celles-cy, &c.) : ce qui estoit à prouver.

SCHOLIE.

Or la demonstration de ceste proposition a seulement lieu quand les quatre grandeurs sont de mesme genre. Car si les deux A & B estoient d'un genre, & les deux C & D d'un autre; aussi les equemultiples E & F seroient d'un genre, sçavoir est duquel sont A & B; & les equemultiples G & H d'un autre genre, c'est à sçavoir de celui auquel sont C & D: Parquoy on ne pourroit pas dire E est

plus grande, egale ou moindre que G; & partant rien ne se concludroit par la 6. def. de ce liure. La raison permutee a donc seulement lieu quand les 4. grandeurs sont d'un mesme genre: Ce que Dounot n'a pas reconnu, puis qu'il usurpe icelle, les grandeurs estans de diuers genres, en plusieurs propositions, tant de ce liure que du 10.

Ledit Dounot a aussi reietté ceste demonstration des anciens, & au lieu d'icelle s'est imaginé la suivante. Soit A a B comme C est a D. Je dis aussi, que A sera alternativement a C comme



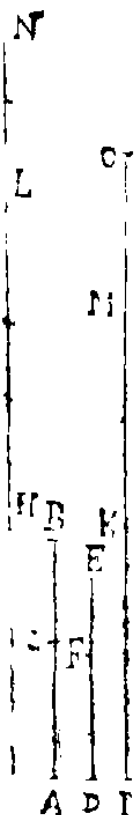
est a D. Car si on prend F & H equemultiples de A & C, item G, & I equemultiples de B & D, par la 4. p. 5. F, G, H, I, seront proportionnelles, & par la 14. p. 5. comme F, sera plus grande, egale, ou plus petite que G; aussi H sera plus grande, egale, ou plus petite que I: (ce qui ne se peut prendre de ladite 14. p. 5. car par icelle la premiere F estant plus grande &c. que H 3. la seconde G seroit plus grande &c. que I 4. mais bien pouuoit-il tirer cela de la nature des proportions, comme nous auons dit au scholie de ladite 14. p. 5.) Et par la 6. def. 5. A sera a C comme B a D: ce qui est euidentement faux: car pour estre A a C comme B a D, il faudroit, selon ladite 6. def. 5. que F & G multiplies de A premiere & B troisieme, item H & I multiplies de C 2. & D. 4. fussent equemultiples, & elles ne le sont pas. Dounot n'a donc peu rien conclure de la 6. def. 5. & partant la pretendue demonstration de ceste 16. prop. doit estre rejettée, & celle des anciens suiuite.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs composees sont proportionnelles, icelles diuisees seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs composees AB , CB & DE , FE proportionnelles, c'est à dire que AB soit à CB , comme DE à FE . Je dis que les mesmes diuisees sont aussi proportionnelles, c'est à dire que comme AC est à CB , ainsi DF est à FE .

Car d'icelles AC , CB , DF , FE soient prises les equemultiples GH , HL , IK , KM , chacune à chacune, & par la 1. p. 5. GL sera autant multipliee de AB , que GH de AC , c'est à dire comme IK de DF . Mais icelle IK est autant multipliee de DF , que IM de DE par la mesme 1. p. 5. donc GL , IM sont equemultiples de AB , DE . Derechef soient prises LN , MO equemultiples de CB , FE . Pour autant que HL premiere est autant multipliee de CB 2. que KM tierce de la quarte FE , & LN 5. autant multipliee de CB 2. que MO 6. de la quarte FE , par la 2. p. 5. HN sera autant multipliee de CB 2. que KO de FE 4. Et puisque AB est à CB comme DE à FE : & ont esté prises GL , IM equemultiples de AB , DE : mais HN , KO de CB , FE , par la 6. d. 5. conuertie si GL multipliee de AB premiere excède, est egale ou moindre que HN multipliee de CB 2. aussi IM , multipliee de DE 3. excèdera, sera egale ou moindre que KO multipliee de FE 4. ostant donc les choses communes HL , KM , si GH excède LN , aussi IK excèdera MO . & si egale, egale; & si moindre, moindre. Et d'autant que GH , IK sont equemultiples de AC premiere & DF tierce. Item LN , MO equemultiples de CB 2. & FE 4. & il a esté demonstré (e. quelcōque multiplicatiō qu'ayēt esté prises icelles equemultiples) que les equemultiples de la premiere & 3. excèdent, sont egales, ou moindres que les equemultiples de la 2. & 4. par la 6. d. 5. AC sera à CB , comme DF à FE : ce qui estoit prouuer.



SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy ce moyen-là d'argumenter, lequelen 15. d. nous auons dict conuerse de la raison diuisee: c'est à dire que si AB est à CB , comme DE à FE : aussi CB sera à AC , cōme FE à DF . Car d'autant que comme AB à CB , ainsi DE à FE , en diuisant par la 17 p. 5. cōme AC sera à CB , ainsi DF à FE : & en changeant, cōme CB sera à AC , ainsi FE sera à DF : ce qui estoit proposé.

Par mesme maniere sera demonst^ré ce moyen-là d'argut^renter, lequel en la mesme 15. def. nous auons appellé contraire diuision de raison : c'est à dire que si AC est à AB, comme DF à DE : aussi AC sera à CB, ainsi que DF à FE. Car puis que AC est à AB come DF DE : en changeant comme AB sera à AC, ainsi DE à DF : donc en diuisant par la 17. p. 5. comme CB à AC, ainsi FE à DF : & en changeant derechef, comme AC à CB, ainsi DF à FE : ce qui estoit à demonst^rer.

THEO. 18. PROP. XVIII.

Siles grandeurs diuisees sont proportionnelles, icelles composees seront aussi proportionnelles.

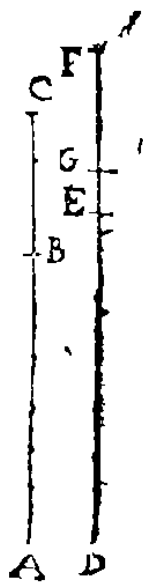
Soient les grandeurs diuisees AB, BC, & DE, EF proportionnelles. Je dis qu'en composant AC est à CB comme DF à EF

Car si comme AC est à BC, ainsi DF n'est à EF, DF aura à quelque grandeur moindre ou plus grande que EF, mesme raison que AC à BC. Soit donc premierement DF à GF moindre que EF, en mesme raison que AC à BC, s'il est possible: & en diuisant par la 17. p. 5. DG sera à GF comme AB à BC. Mais comme AB à BC, ainsi DE est à EF: donc aussi comme DG sera à GF, ainsi DE sera à EF par la 11. p. 5. Mais DG premiere est plus grande que DE 3. donc par la 14. p. 5. GF seconde sera aussi plus grande que EF quatriesme, la partie que le tout, ce qui est absurde Il n'y aura donc pas de DF à GF moindre que EF, mesme raison que de AC à BC.

Par mesme discours on demost^rera que DF n'aura pas à vne grandeur plus grande que EF, mesme raison que AC à BC. Donc comme AC est à BC, ainsi DF est à EF, puisque DF ne peut estre à vne grandeur moindre ou plus grande que EF, comme mesme raison que AC à BC.

S C H O L I E.

Donnot s'estant licentié de changer la 17. p. à la 18. & aussi rejetté



cette demonstration des anciens, laquelle a lieu en toutes sortes de grandeurs, soit qu'elles soient de mesme genre ou non : & celle qu'il a mise au lieu d'icelle, a seulement lieu quand les grandeurs sont de mesme genre, d'autant qu'en icelle il usurpe la raison permutée, laquelle nous auons monstré au scholie de la 16. p. 5. ne pouuoir conuenir que aux grandeurs de mesme genre : & partant doit estre preseruee la demonstration uniuerselle des anciens a la particuliere de Donnott.

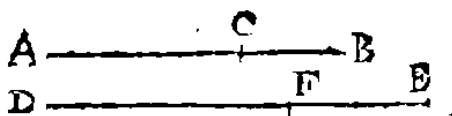
Nous demonsturerons icy ces deux moyens là d'argumenter es proportions, lesquels nous auons descrits en la 4. def 5. Quant au premier que nous auons nommé conuerse composition de raison : soit comme AB a BC ainsi DE a EF. Je dis, que comme AC est a AB, ainsi DF a DE. Car puis que comme AB est a BC, ainsi DE a EF, en changeant comme BC sera a AB, ainsi EF a DE : donc en composant par la 18. p. 5. comme AC sera a AB, ainsi DF a DE : ce qu'il falloit prouuer.

Quant a l'autre moyen que nous auons appelé contraire composition de raison : soit derechef comme AB a BC, ainsi DE a EF : Je dis que par le contraire de composition de raison, comme AB a AC, ainsi DE a DF. Car puis que comme AB est a BC, ainsi DE a EF, en changeant comme BC sera a AB, ainsi EF a DE : donc aussi en composant par la 18. p. 5. comme AC sera a AB, ainsi DF a DE : & partant en changeant derechef comme AB sera a AC, ainsi DE sera a DF : ce qui estoit proposé a prouuer.

THEO. 19. PROP. XIX.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché, le reste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

Soit la toute AB, a la toute DE, comme le retranché AC, au retranché DF. Je dis que le reste CB est au reste FE, comme la toute AB a la toute DE.



Car puisque AB est a DE, comme AC a DF, aussi en permutant par la 16. p. 5. AB sera a AC, comme DE a DF : & par la 17. p. 5. en diuisant comme CB a AC, ainsi FE a DF : parquoy en permutant derechef par la 16. p. 5. CB sera a FE, comme AC a DF, c'est a dire comme la toute AB a la toute DE, puis que A, B DE, & AC, DF ont esté posés en mesme raison.

S C H O L I E.

Nous démontrerons icy ce moyen-la d'argumenter es proportions, qui est pris par la conversion de raison. Car soit comme AB a CB , ainsi DE a FE . Je dis par conversion de raison AB estre aussi a AC comme DE a DF . Car puisque comme AB a CB , ainsi DE a FE , en divisant par la 17^e p. 5. comme AC a CB , ainsi DF a FE : donc aussi en changeant comme CA a AC , ainsi EF a DF : & partant en composant par la 18^e p. 5. comme AB a AC , ainsi DE a DF , ce qui estoit proposé.

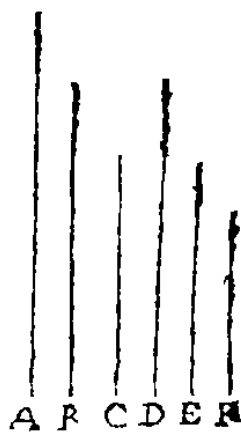
THEO. 20. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'un costé, & trois d'un autre, estans prises de deux en deux, sont en mesme raison, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisieme, aussi la quatrieme sera plus grande que la sixieme; & si egale, egale; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C , & trois d'un autre D, E, F , & comme A a B , ainsi D a E , & comme B a C , ainsi E a F : & que A soit plus grande que C . Je dis que D sera plus grand que F .

Car puisque A est plus grande que C , il y aura plus grande raison de A a B que de C a B par la 8. p. 5. Mais comme A a B ainsi D a E , & par la 9. p. 5. il y aura plus grande raison de D a E , que de C a B . Item comme C est a B , ainsi F a E (car puisque B est a C , comme E a F , en changeant comme C sera a B , ainsi F a E) Il y aura donc aussi plus grande raison de D a E , que de F a E , & par la 10. p. 5. D sera plus grande que F .

Que si A est egale a C , je dis aussi que D sera egale a F . Car puisque A est egale a C , par la 7. p. 5. A sera a B comme C a B , Mais comme A est a B , ainsi D a E : & par la 11. p. 5. D sera a



E, comme C a B : & comme C est a B, ainsi F a E. Donc D sera aussi a E comme F a E ; & partant D & F seront égales par la 9. p. 5.

En troisieme lieu, si A est moindre que C, ie dis aussi que D est moindre que F. Car puisque A est moindre que C, il y aura moindre raison de A a B, que de C a B par la 8. p. 5. Mais comme A est a B, ainsi D est a E ; il y aura donc aussi moindre raison de D a E, que de C a B, par la 13. p. 3. Mais en changeant comme dessus, C est a B, comme F a E. Il y a donc pareillement moindre raison de D a E, que de F a E ; & partant par la 10. p. 5. D sera moindre que F.

THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'un costé, & trois d'un autre, prises de deux en deux sont en mesme raison, estant leur proportion sans ordre, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisieme, aussi la quatrieme sera plus grande que la sixieme ; & si egale, egale, si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, (en la precedente figure) & trois d'un autre D, E, F, lesquelles prises de deux en deux soient en mesme raison, estant leur proportion troisieme sçavoir que comme A a B, ainsi E a F, & comme B a C, ainsi D a E. Ie dis que comme A sera egale, plus grande, ou plus petite que C, aussi D sera egale, plus grande, ou plus petite que F.

Car si A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A a B, que de C a B par la 8. p. 5. Mais comme A a B ainsi E a F, il y aura donc plus grande raison de E a F, que de C a B par la 13. p. 5. Et d'autant que comme B est a C, ainsi D est a E, en changeant comme C sera a B, ainsi E a D. Il y aura donc aussi plus grande raison de E a F, que de E a D : partant par la 10. p. 5. D sera plus grande que F.

On peut prouver comme en la precedente, si A est egale, ou plus petite que C, D estre aussi egale, ou moindre que

THEOR. 22. PROP. XXII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, lesquelles estant prises de deux en deux soient en mesme raison; icelles en raison egale seront proportionneles.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & soit A à B comme D à E, & B à C, comme E à F. Je dis qu'en raison egale, comme A à C, ainsi D à F.

Car estans prises G, H equemultiplices de A, D: item I, K, equemultiplices de B, E: Item L, M equemultiplices de C, F: puis-que A est à B, comme D à E, aussi G multi-
 plice de A premiere sera à I multiplie de B
 2. comme H multiplie de D 3. a K multi-
 plice de E 4. par la 4. p. 5. Par mesme rai-
 son I sera a L, comme K a M. Veu d'oc que
 les trois grâdeurs G, I, L, & les trois autres
 H, K, M, estans prises de deux en deux sont
 en mesme raison, par la 10. p. 5. si G excede
 L, aussi H excedera M; & si egale, egale, &
 si plus petite, plus petite: & partant puis-que G,
 H, equemultiplices de A & D deffaillet, s'ont
 egales ou excèdent L, M, equemultiplices
 quelconques de C & F, par la 6. d. 5. A sera à
 C, cōme D à F: ce qu'il falloit prouver.

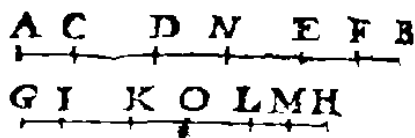


Maintenant soient plus de trois grandeurs, tellement que C soit aussi a N, comme F a O. Je dis que A est encore à N, comme D à O. Car puisque nous venons de demonstrier que A est a C, comme D à F; & on a posé C à N, comme F à O, il y aura trois grandeurs A, C, N, & trois autres D, F, O, lesquels sont pris de deux en deux en mesme raison. Donc comme il a esté demonsté és trois grandeurs cy dessus, A sera dore-
 cher à N, comme D à O. En la mesme maniere sera demon-
 stré en tant de grandeurs qu'on voudra.

S C H O L I E.

Le tres-docte Steuin en la 19. def. de ses prob. geomet. explique un sorte d'argumenter és proportions, qu'il appelle proportion transformee, qui peut estre reduite en un tel theoreme que le suiuant.

S'il y a deux grandeurs, desquelles chacune soit couppee en tant de parties qu'on voudra, egales en multitude, & proportionnelles: la composee de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur sera à la composee des parties restantes, en mesme raison que la composee d'autant de parties de la posterieure grandeur sera à la composee des parties restantes d'icelle. Et si quelconque partie de l'une est couppee en deux autres parties, & la partie de l'autre correspondante a ceste partie là, est aussi couppee en deux autres parties proportionnelles à ces deux là: les totales grandeurs seront aussi couppees proportionnelement.



Soit une grandeur AB couppee en tant de parties qu'on voudra AC, CD, DE, EF, FB; & une autre grandeur GH, couppee en tant de parties que AB, sçavoir est és cinq GI, IK, KL, LM, MH, proportionnelles à celles-là de AB. Je dis que AD composee des deux parties AC, CD, est à DB composee des trois parties restantes, comme GK composee des deux parties GI, IK, est à KH composee des trois autres parties restantes. Car puis que comme AC est à CD, ainsi GI est à IK en composant par la 18. p. 5. AD sera à CD, comme GK à IK. Mais comme CD à DE, ainsi IK à KL: donc par la 22. p. 5. en raison egale, comme AD sera à DE, ainsi GK sera à KL. Derechef, pource qu'en changeant, BF est à FE, comme HM à ML, aussi en composant BE sera à FE, comme HL à ML. Mais FE est à ED, comme ML à LK: donc en raison egale, BE sera à ED, comme HL à LK; & en composant, BD sera à ED, comme HK à LK, & en changeant, DE à DB, comme KL à KH. Parquoy puis qu'il a esté demonsté que AD est à DE, cōme GK à KL, & DE est à DB, comme KL à KH, par la 22. p. 5. en raison egale comme AD sera à DB, ainsi GK sera à KH.

Nous demonstrerons en la mesme maniere que comme AC est à CB ainsi GI est à IH. Car derechef en changeant, composant, & par egalité de raison, comme BC sera à DC, ainsi HI, à KI: & en changeant, comme CD sera à CB, ainsi IK sera à IH. Veu donc que comme AC est à CD, ainsi GI est à IK, & comme CD à CB, ainsi IK à IH: en raison egale, comme AC sera à CB, ainsi GI sera à IH.

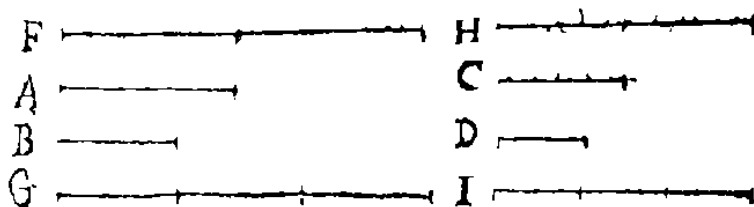
Par mesme raison, comme AF sera à FB , ainsi GM sera à MH . Car derechef en composant, & par égalité de raison, comme AF sera à FB , ainsi GM sera à MH . Car derechef en composant, & par égalité de raison, comme AF sera à E , ainsi GM sera à LM . Mais aussi comme EF est à FB , ainsi LM à MH : Donc en raison égale, comme AF est à FB , ainsi GM est à MH , & ainsi des autres : appert donc ce qui estoit premierement proposé.

Maintenant soit couppee, (comme pour exemple) la troisième partie DE en deux quelconques parties DN, NE ; & aussi la 3. KL en deux parties KO, OL proportionnelles à celles-là. Je dis que comme AN à NB , ainsi GO à OH . Car en changeant, comme IN sera à ND , ainsi LO à OK ; & en composant par la 18. p. 5. comme ED sera à DN , ainsi LK à KO . Parquoy puisque comme CD est à Dt , ainsi IK à KL ; & comme DE à DN , ainsi KL à KO : par la 22. p. 5. en raison égale, comme CD sera à DN , ainsi IK à KO : ainsi les parties AC, CD, DN sont proportionnelles aux parties GI, IK, KO . Derechef pource qu'en changeant, comme FE est à D , ainsi ML à LK . & en composant comme DE à NE , ainsi KL à OL : en raison égale, comme E sera à EN ainsi ML à LO , & en changeant, comme NE à EF , ainsi OL à LM : & partant toutes les parties AC, CD, DN, NE, EF sont proportionnelles à toutes les parties GI, IK, KO, OL, LM, MH . Donc comme il a esté démontré en la première partie, AN sera à NB , comme GO à OH : appert donc ce qui estoit proposé en second lieu.

Clavius demonstre encore en ce lieu cy le theoreme suyvaut.

Si la première est à la seconde en mesme raison que la tierce à la quarte : les equemultiples de la première & troisième auront aussi vne mesme raison à la seconde & 4. Item les equemultiples de la seconde & quatrième auront vne mesme raison à la première & 3. Et au contraire la seconde & 4. auront vne mesme raison aux equemultiples de la première & 3. Item la première & 3. auront vne mesme raison aux equemultiples de la 2. & 4.

Soit A à B comme C à D , & soient F, H equemultiples de A ,



Et item G, I , equemultiples de B, D . Je dis que F est à B , comme H à D : item que G est à A , comme I à C . Et au contraire que B est à F comme D à H : item A à G , comme C à I . Car puisque F est autant

multiplie de A , que H l'est de C , comme F est a A , ainsi H a C , & par l'hypothese A est a B , comme C a D ; donc en raison egale par la 22. p. 5. comme F sera a B , ainsi H sera a D . Derechef, pource que G est a B , comme I a D , & comme B a A , ainsi D a C : (car puisque A est a B come C a D par l'hypothese, en changeant comme B a A , ainsi D a C) en raison egale, comme G sera a A , ainsi I a C par la 22. p. 5.

Maintenant pource que B est a A , comme D a C par raison inu. se. & comme A a F , ainsi C a H : en raison egale, comme B sera a F , ainsi D a H . Derechef puis que A est a B , comme C a D : & comme B est a G , ainsi D a I : en raison egale, comme A sera a G , ainsi C a I , par la 22. p. 5. ce qui estoit propose.

Par cecy est manifeste un moyen d'argumenter, dont les Geometres s'aident souuent, principalement Archimedes, Apolonius Pergeus, & autres: sçauoir est comme A a B , ainsi C est a D : donc comme F double, ou triple, ou quadruple &c. de A , est a B , ainsi aussi H double, ou triple, ou quadruple &c. de C , est a D : Item comme A est a B , ainsi C a D : donc comme A est au double, triple, ou quadruple &c. de B , sçauoir est a G , ainsi aussi C sera au double, triple, ou au quadruple &c. de D , sçauoir est a I .

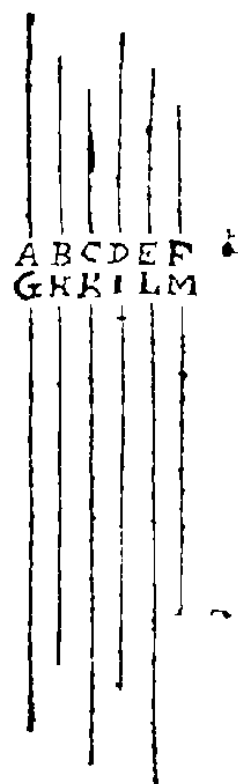
THEOR. 23. PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en mesme raison, & en proportion troublee: icelles en raison egale seront proportionneles.

Soient trois grandeurs A, B, C , & trois autres D, E, F , & soient prises de deux en deux en mesme raison, estant la proportion troublee, sçauoir que comme A a B , ainsi E a F , & comme B a C , ainsi D a E . Je dis que A sera a C , comme D a F .

Car estans prises G, H, I equemultiples de A, B, D , & K, L, M , quelconques autres equemultiples de C, E, F . Par la 15. p. 5. comme A sera a B , ainsi G a H , puisque G, H , sont equemultiples d'icelles A, B . Mais comme A a B , ainsi est A a F : donc par la 11. p. 5. comme G est a H , ainsi E est a F . Mais comme E est a F , ainsi aussi L est a M par la 15. p. 5. pource que L, M , sont equemultiples d'icelles E, F : donc aussi comme G est a H , ainsi L est a M , par la 11. p. 5. & puisque comme

est a C, ainsi D a E, par la 4. p. 5. comme H multi-
 plice de la premiere B, sera a K multiplie de
 la seconde C, ainsi I multiplie de la 3. D, sera a
 L multiplie de la 4. E : donc les trois grâdeurs
 G, H, K, & les trois autres I, L, M, estans prises
 de deux en deux sont en mesme raison, & la
 proportion d'icelles sans ordre, puis qu'il a esté
 demonsté que comme G est a H, ainsi L est a
 M, & comme H est a K, ainsi I a L ; & partant
 par la 21. p. 5. si G est plus grande, egale, ou
 moindre que K, aussi I sera plus grande, egale,
 ou moindre que M, & par la 6. def. 5. comme
 A sera a C, ainsi sera D a F : ce qu'il falloit de-
 monstrer.

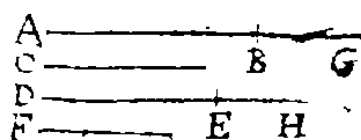


THEOREME 24.

PROP. XXIII.

Si la premiere est à la seconde, comme la
 troisieme à la quatrieme, & la cinquieme à la
 seconde, comme la sixieme à la quatrieme ;
 la composee de la premiere & cinquieme, sera
 à la seconde, comme la composee de la troi-
 sieme & sixieme, sera à la quatrieme.

Soit la premiere AB a la 2. C, comme
 la 3. DE est a la 4. F ; & la 5. BG a la 2.
 C, comme la 6. EH a la 4. F. Je dis
 que la toute AG, sera a C, comme la
 toute DH a F.



Car puisque comme BG a C, ainsi EH a F, aussi en chan-
 geant, comme C sera a BG, ainsi F a EH. Veut donc que AB
 est a C, comme DE a F, & Ca BG, comme F a EH, en raison
 egale, AB sera a BG, comme DE a EH, par la 22. p. 5. & en cõ-
 posant, comme la toute AG sera a BG, ainsi la route DH sera
 a EH, par la 18. p. 5. & derechef puis que AG est a BG, com-
 me DH a EH, & BG a C, comme EH a F, en raison egale, AG
 sera a C, comme DH a F : ce qui estoit a prouver.

THEOR. PROP. XXV.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles; la plus grande & la plus petite, sont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles AB, CD, E, F. Je dis que la plus grande & la plus petite AB & F ensemble, sont plus grandes que les 2. autres CD & E ensemble.

Car si de AB on retranche AG égale a E, & de CD on retranche CH égale a F: AG sera a CH, comme E a F, c'est a dire comme AB a CD, & par la 19. p. 5. le reste GB sera plus grand que le reste HD, comme le tout AB est plus grand que le tout CD. Et pour autant que AG & F, sont égales a E & CH; si on adiouste a icelles les grandeurs inégales GB & HD, il est evident que AB & F ensemble, seront plus grandes que E & CD ensemble, puis que GB est plus grande que HD. Ce qu'il falloit demonstrier.



Fin du cinquiesme Element.



E L E M E N T

SIXIESME.

DEFINITIONS.



Emblables figures rectilignes, sont celles qui ont les angles egaux, vn chacun au sien, & les costez qui sont au long des angles egaux proportionnaux.

2. Les figures sont reciproques, quand les termes antecedans & consequens des raisons, sont en l'une, & en l'autre figure.

C'est à dire que s'il y a deux figures semblables ou non, dont le premier & dernier des termes proportionnaux soient en l'une des figures, & le second & 3. en l'autre; icelles figures seront dictes reciproques.

3 Vne ligne droicte est dite estre diuisee en la moyenne & extreme raison, quand la toute est au plus grand segment, comme le plus grand segment est au moindre.

4 La hauteur d'une chacune figure, est la perpendiculaire tiree du sommet à la base.

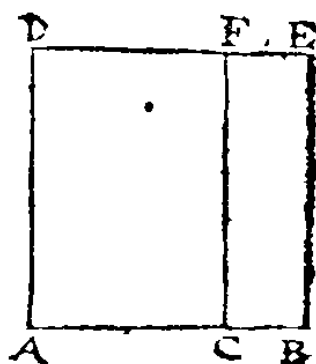
5 Vne raison est dite estre composee de raisons, quand les quantités des raisons multipliees entr'elles font quelque raison.

C'est à dire que quand les quantitez de deux ou plusieurs raisons multipliees entr'elles, produisent quelque quantité de raison : icelle raison est dite estre composée de celles là. Or la quantité d'une raison est le denuminateur d'icelle : tellement que la quantité de la raison triple est 3; mais de la subtriple, c'est 1, &c. Ainsi la raison trigecuple se dit estre composée des double, triple, & quintuple. Car les denuminateurs d'icelle, sçavoir est 2 3 & 5. multipliés entr'eux produisent 30. denuminateur d'icelle raison trigecuple. Pareillement la raison double se dit estre composée de la sesquialtere, & de la sesquiterce, pource que les denuminateurs d'icelle, sçavoir est 1² & 1³, estant multiplies entr'eux produisent 2. denuminateur de la raison double. Parquoy estant posees tant de grâdeurs qu'on voudra par ordre, la raison des extremes fera composée des raisons des moyènes: comme pour exemple. soit A à B en raison sesquialtere; B à C en raison double, & C à D en raison superbipartiente tierce: Il est evident que multipliant le denuminateur de la raison de A à B par celui de B à C sçavoir 1² par 2. viendront 3. & partant A est à C en raison triple, & multipliant 3 par le denuminateur de la raison de C à D prouiennent 5, Et partant A est à D en raison quintuple.

Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles, tant les 27. 28. Et 29 propo. de ce liure, que plusieurs du 10. adion/ ent icy ceste des

6. Vn parallelogramme appliqué selon quelque ligne droicte, est dict defaillir d'un parallelogramme, lors qu'il ne peut occuper entierement la ligne; mais excéder, quand il occupe vne plus grâde ligne que celle selon laquelle il est appliqué; en telle sorte toutesfois que le parallelogramme defaillant, ou excédant ait vne mesme hauteur que le parallelograme appliqué, & constitué avec iceluy vn seul parallelogramme.

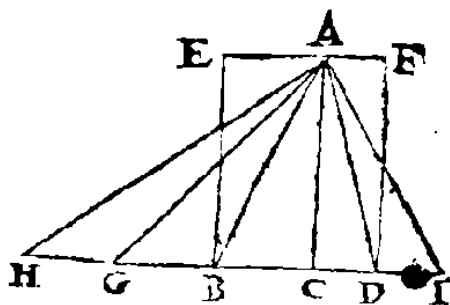
Comme le parallelogramme AF appliqué selon la ligne AB , est dit defaillir du parallelogramme CE , lequel est appelé défaut : Mais le parallelogramme AE appliqué selon la ligne AC , est dit excéder du parallelogramme CE , lequel est dit l'excès.



THEOR. I. PROP. I.

Les triangles, & les parallelogrâmes de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux triangles ABC & ACD , de mesme hauteur, sur les bases BC & CD : soient aussi deux parallelogrammes CE , CF de mesme hauteur, les bases desquels soient les mesmes BC , CD .



Je dis premierement que le triangle ABC , est au triangle ACD , comme la base BC , est a la base CD : c'est à sçavoir que si on pose pour premiere grandeur la base BC , pour seconde la base, pour troisieme le triangle ABC , pour quatrieme le triangle ACD ; les equemultiples de la premiere & troisieme seront plus petites, egales, ou plus grandes que les equemultiples de la seconde & quatrieme, ainsi que le requiert la 6. definition.

Qu'il ne soit ainsi; qu'on prolonge BD de part & d'autre, & apres avoir coupé BG & GH , egales à BC d'un costé: item DI , egale à CD de l'autre, soient menées les lignes AG , AH , AI . Donc par la 38. p. 1. les trois triangles ABC , ABG , AGH , estans sur bases egales & entre mesmes paralleles, seront egaux; aussi par les mesmes raisons les deux triangles ACD & ADI seront egaux; ainsi il est evident qu'autant de fois que la base HC contiendra BC , autant de fois le triangle ACH contiendra le triangle ABC . Pareillement autant de fois que CI contiendra CD , autant de fois le triangle ACI

contiendra le triangle ACD . Que si la base CH est égale à CI , le triangle ACH sera égal au triangle ACI , par la 38. p. 1. Que si la base est plus grande, il sera plus grand; si plus petite, plus petit; & par la 6. def. 5. comme la base BC , à la base CD , ainsi le triangle ABC , sera au triangle ACD : ce qui estoit à démontrer pour la première partie.

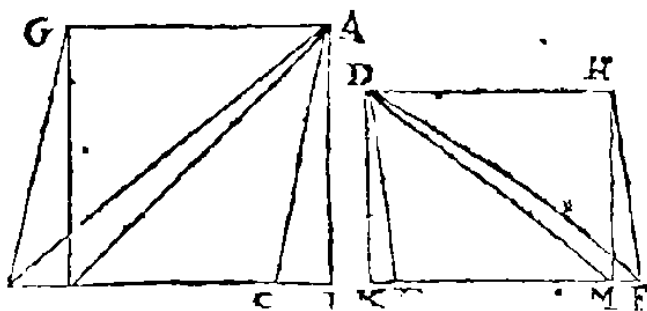
Quant à la seconde partie touchant les parallelogrammes CE , CF ; le mesme se peut dire que des triangles, parce que iceux parallelogrammes sont doubles des triangles ABC , ACD par la 41. p. 1. & par la 15. p. 5. ce qui est prouvé d'iceux triangles s'entendra des parallelogrammes.

SCHOLIE.

Commandin adiouste en ce lieu cest autre theoreme.

Les triangles & parallelogrammes, desquels les bases sont égales, ou vne mesme, sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient deux triangles ABC , DEF , & les parallelogrammes $AGBC$, $DEFH$, ayant les bases BC , EF égales Je dis que le triangle ABC est



au triangle DEF , & le parallelogramme $AGBC$ au parallelogramme $DEFH$, cōme la hauteur AI est à la hauteur DK . Car si on prend les lignes LI , KM égales aux bases BC , EF , & on tire les lignes LA , MD le triangle ALI sera égal au triangle ABC par la 38. p. 1. puisqu'ils sont sur base égales LI , BC , & entre mesmes paralleles AG , IB . Par mesme raison le triangle de DKM sera égal au triangle DEF . Parq. 107 par la 7. p. 5. comme ABC sera à DEF , ainsi ALI sera à DKM . Mais par la 1. p. 6. comme ALI est à DKM , ainsi AI à DK . (car si AI , DK sont posees les bases, les lignes droictes égales LI , KM seront les hauteurs.) Donc aussi AB sera à DEF , comme AI à DK .

Et d'autant que par la 15. p. 5. comme ABC est à DEF , ainsi le parallelogramme $AGBC$ au parallelogramme $DEFH$; (car iceux parallelogrammes sont doubles des triangles par la 41. p. 1.) aussi $AGBC$ sera à $DEFH$, comme AI à DK . Le mesme s'ensuivra si les triangles, & les parallelogrammes ont vne mesme base.

THEOR. 2. PROP. II.

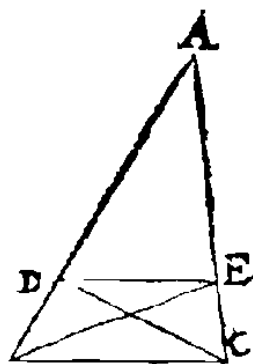
Si l'on mene vne ligne parallele à l'un des costez d'un triangle; icelle coupera les autres costez d'iceluy triangle proportionnelement: & si les costez sont coupeez proportionnelement, la ligne couppante sera parallele à l'autre costé.

Soit le triangle ABC, dans lequel soit menee DE parallele a BC, couppant les deux autres costez AB & AC aux poinçts D, & E. Je dis que AD sera a DB, comme AE, a EC.

Car estant menees les deux lignes BE & CD, par la 39. p. 1. les deux triangles DEB & EDC, estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux, & par la 7. p. 5. ils auront mesme raison l'un comme l'autre au troisieme ADE. Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB, & DEA estans de mesme hauteur, sont l'un a l'autre comme la base BD, a la base DA; & par la mesme proposition, le triangle CDE, estant de mesme hauteur que le triangle EDA, ils seront l'un a l'autre comme CE est a EA; & partant par la 11. p. 5. BD sera a DA, comme CE a EA (puisque ces deux raisons sont les mesmes que du triangle BED au triangle DEA, & du triangle CDE au mesme triangle DEA.) Ce qui estoit propose.

Pour la seconde partie: ie dis que si DB est a DA, comme CE a EA, qu'aussi DE sera parallele a BC.

Car les triangles DEB, & DEA, seront par la 1. p. 6. l'un a l'autre, comme DB a DA. Item les deux autres CDE, EDA, seront aussi l'un a l'autre, comme CE, a EA; & par la 11. p. 5. le triangle DEB sera au triangle DEA, comme le triangle CDE est au mesme triangle DEA; & par la 9. p. 5. les deux triangles BED, & EDC seront egaux, lesquels estans sur mesme base DE, par la 39. p. 1. ils seront entre mesmes paralleles; & partant DE sera parallele a BC.

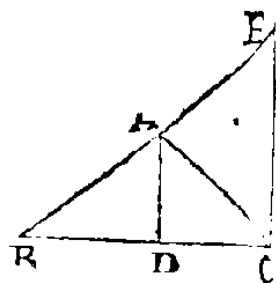


THEOR. 3. PROP. III.

Si l'angle d'un triangle est coupé en deux également par vne ligne droite, laquelle coupe aussi la base; les segmens de la base seront l'un à l'autre comme les autres costez du triangle: Et si les segmens de la base sont l'un à l'autre comme les autres costez; la ligne-droite tirée du sommet à la section de la base, coupe l'angle en deux également.

Au triangle ABC, soit l'angle BAC coupé en deux également par la ligne AD le dis qu'il y a mesme raison de BD à DC, comme de AB à AC.

Qu'il ne soit ainsi: apres avoir du point C mené CE parallele à DA, soit continuée BA directement iusqu'à ce qu'elle rencontre CE (Or BA, CE se rencontreront, d'autant que les deux angles B & BCE sont moins que deux droicts, estans egaux aux deux B & BDA, qui sont moins que deux droicts par la 17. p. 1.) & parce que DA & CE sont paralleles, l'angle CAD sera egal à son alterne ACE par la 29. p. 1. Et si l'exterieur DAB sera egal à l'oppo. interieur AEC. Mais BAD, CAD estans egaux par l'hypothese, aussi par les com. sent. AEC, ACE seront egaux; & partant par la 6. p. 1. les costez AE & AC seront egaux. Mais par la 1. p. 6. BA est à AE, comme BD à DC. (estant AD parallele à CE & par consequent BA sera aussi à AC (egale à AE) comme BD à DC.



Pour la seconde partie: ie dis que si BA est à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB sera coupé en deux également par la ligne droite AD

Car apres avoir construit comme dessus, BA sera à AE, comme BD à DC, par la precedente prop. Et partant par la 11. p. 1. BA sera à AE, comme le mesme BA à AC, & par la 9. p. 5. AE & AC seront egaux; & partant par la 5. p. 1. les deux angles AEC, ACE, seront aussi egaux; & par la 29. p. 1. ils sont egaux.

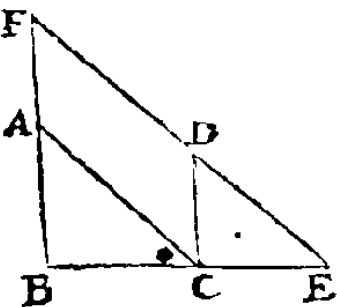
l'un a DAB, & l'autre a DAC, lesquels par ce moyen seront aussi egaux; ce qui estoit à prouver.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Des triangles equiangles, les costez qui sont au long des angles egaux, sont proportionaux; & les costez qui soustiennent les angles egaux, sont de mesme raison.

Soient deux triangles ABC, DCE, equiangles: c'est à dire que l'angle ABC soit egal a l'angle DCE, & l'angle ACB a l'angle E, & le troisieme au troisieme. Je dis que comme A Ba BC, ainsi DC a CE, & comme BC a CA, ainsi CE a ED, & finalement comme AB a AC, ainsi DC a DE. Car ainsi les costez d'alentour les angles egaux, sont les proportionaux, & les costez homologues, sont ceux la qui soustiennent les angles egaux, c'est a dire que tous les antecedans, & semblablement les consequens regardent les angles egaux.

Soient constituez les costez BC, CE selon vne ligne droite, tellement que l'angle externe DCE soit egal a l'interne ABC, & pareillement l'externe ACB a l'interne DEC: & d'autant que par la 17. p. 1. les deux angles ABC, ACB sont moindres que deux droicts, & l'angle DEC est egal a l'angle ACB, aussi les angles BF & E seront moindres que deux droicts; & partant les lignes BA & ED estans produictes de la part de A & D, se rencontreront: Qu'elles soient donc prolongees & conuient en F. Il est evident que l'angle externe ECD, estant, par l'hypothese egal a son oppose interieur CBA; DC sera parallele a FB par la 28. p. 1. Pareillement l'angle externe ACB estant egal a son oppose interieur DEC, aussi par la mesme 28. p. 1. CA, & EF, seront paralleles. Partant ACDF sera parallelogramme, & par la 34. p. 1. il aura les angles, & les costez opposez egaux. Mais AC estant parallele a EF par la 2. p. 6. AB sera a AF, ou CD sont egale, comme BC a CE, & en changeant par la 16. p. 3. AB sera a BC, come DC a CE. Pareillemēt CD estant parallele a BF, comme BC sera a CE, aussi FD, ou



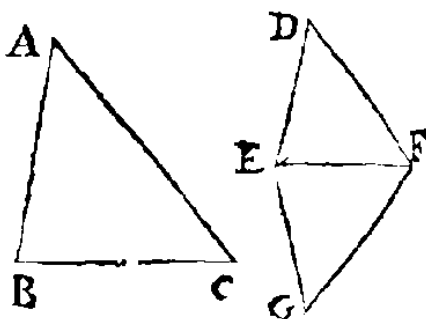
CA son egale, sera a ED par la 2. p. 6. & en changeant BC sera a AC, comme CE a ED.

Veu donc que AB est a BC, comme DC a CE, & BC a CA comme CE a ED, aussi en raison egale AB sera a AC, comme DC a ED. ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 5. PROP. V.

Si deux triangles ont les costez proportionnaux, ils seront equiangles, & auront les angles egaux, sous lesquels les costez de mesme raison seront subtendus.

Soient deux triangles ABC, & DEF, ayans les costez proportionnaux, & soit AB a BC comme DE a EF, & BC a CA comme EF a FD, & encore AB a AC comme DE a DF. Je dis que les triangles sont equiangles, sçavoir l'angle A estre egal a l'angle D, & l'angle B a l'angle E, & l'angle C a l'angle F; car ainsi les angles egaux regardent les costez de mesme raison.



Qu'il ne soit ainsi: sur la ligne EF, & aux deux poincts E, & F soient construits les deux angles FEG egal a B, & EFG egal a C, & conuenient les lignes EG, FG en G: par la 2. p. 1. le troisieme angle G sera egal au tiers A: & partant les triangles ABC, GEF sont equiangles; parquoy comme AB a BC, ainsi GE a EF par la 4. p. 6. Mais comme AB a BC, ainsi a esté posé DE a EF: donc par la 11. p. 5. comme GE a EF, ainsi DE a la mesme EF: & partant par la 9. p. 5. GE, DE seront egales. Et d'autant que par la 4. p. 6. comme BC a CA, ainsi EF a FG, & par l'hypothese comme BC a CA, ainsi EF a FD; par la 11. p. 5. comme EF sera a FG, ainsi la mesme EF sera a FD; & par la 9. p. 5. FG, FD seront egales. Veu donc que les costez EG, FG du triangle GEF sont egaux aux costez DE, DF du triangle DEF, chacun au sien, & la base EF commune, les angles G & D seront egaux par la 8. p. 1. & partant par la 4. p. 1. les autres angles GEF, GFE seront aussi egaux aux autres DEF, DFE, chacun au sien. Parquoy l'angle G estant egal a l'angle A, aussi

l'angle D fera egal au mesme angle A : & ainsi l'angle DEF fera egal à l'angle B, & l'angle DFE à l'angle C. Ce qu'il falloit prouver.

THEO. 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d iceux angles egaux proportionaux; ils seront equiangles, & auront les angles egaux soubz lesquels les costez de mesme raison sont subtendus.

Soient les deux triangles ABC & DEF (en la figure de la precedente proposition) ayās l'angle B egal à l'angle E & cōme AB à BC, ainsi DE à EF. Je dis que les triangles sont equiangles, sçavoir que l'angle A est egal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F.

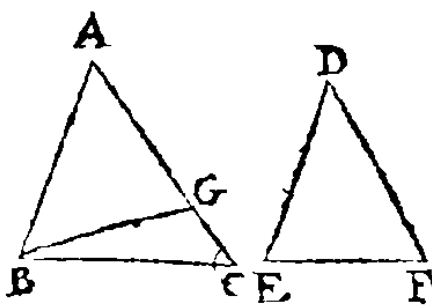
Qu'il ne soit ainsi; sur la ligne EF soit construit, comme en la precedente, le triangle GEF, equiangle au triangle ABC: & par la 4 p. 6. GE sera $\propto$ EF, cōme AB à BC, ou DE à EF, (car ils sont en la mesme raison) & par la 9. p. 5. GE & DE (qui ont une mesme raison à EF) seront egales; & les deux triangles GEF & DEF, auront deux costez egaux à deux costez, sçavoir GE, EF, à DE, EF, & les deux angles au point E, egaux (car ils sont chacun egal à l'angle B) & par la 4. p. 1. ils auront la base egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien, & seront equiangles. Mais l'un d'iceux triangles GEF est equiangle à ABC par construction; aussi sera donc l'autre DEF, par les communes sentences.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'un autre angle, proportionaux, estans les troisiemes angles de mesme espee: Iceux triangles seront equian-

gles, & auront les angles egaux, au long desquels les costez seront proportionaux.

Soient deux triangles ABC, & DEF, desquels les deux angles A & D soient egaux, & les costez AB, BC d'alentour l'angle ABC, proportionaux aux costez DE, EF d'alentour l'angle E, c'est à



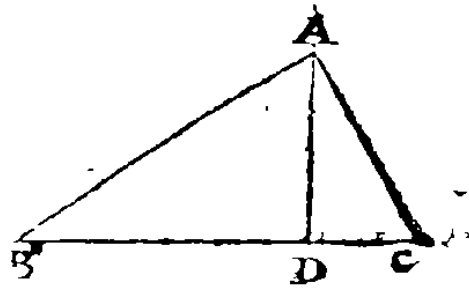
dire que cōme AB est à BC, ainsi DE soit à EF; mais les autres angles C & F soient de mesme espee, c'est à dire aigus, droits, ou obtus, & soient premierement aigus. Je dis que les triangles sont equiangles, sçavoir les angles ABC & E à l'entour desquels sont les costez proportionaux, & les angles C & F estre egaux.

Car l'angle B sera egal, ou non à l'angle E; si egal, au par la precedente les triangles seront equiangles. Si inegal, comme si B estoit plus grand que E, soit fait ABG egal a E par la 23. p. 1. le troisieme angle AGB, sera egal au troisieme F, & partat aigu comme iceluy, & les deux triangles ABG, & DEF seront equiangles; & par la 4. p. 6. comme AB, a BG, ainsi DE à EF. Mais par l'hypothese, comme AB à BC, ainsi DE à EF donc par la 11. p. 5. comme AB sera à BG, ainsi la mesme AB sera à BC; & partat par la 9. p. 5. BG, BC seront egales; & par la 5. p. 1. les deux angles C & BGC sur la base CG serōt egals & tous deux aigus, & par consequent l'angle AGB sera plus grand qu'un droit, puis que par la 13. p. 1. les deux BGC, & GB sont egals à deux droits: Mais l'angle AGB a este demōstré egal a l'angle F: donc F seroit aussi plus grand qu'un droit, & on l'a posé aussi moindre: ce qui est absurde. Maintenant tant l'angle C, que F ne soit aigu; & comme de l'angle C sera egal a l'angle BGC; & partat iceluy BGC ne sera aussi aigu, & les deux C & BGC ne seroiēt moindres que deux droits, mais egals ou plus grands que deux droits: ce qui est absurde: car par la 17. p. 1. ils sont moindres que 2. droits. Les angles ABC & E ne sont donc pas inegaux, ains egals & partant par la 32. p. 1. le troisieme C sera aussi egal au F. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on tire une perpendiculaire sur la base, les triangles au long de la perpendiculaire sont semblables au tout, & entr'eux.

Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droit A, duquel soit menée à la base BC la perpendiculaire AD. Je dis que les triangles ABD, & ADC sont equiangles au total BAC, & entr'eux, & par conséquent semblables.



Qu'ainsi ne soit: d'autant que AD est perpendiculaire, l'angle BDA est droit, & égal à l'angle droit BAC, du triangle total, & l'angle B est commun à tous les deux triangles BAD & BCA, & par la 32. p. 1. le troisieme angle BAD, est égal au troisieme angle ACB: & partant les deux triangles BAD, & BAC, seront equiangles; & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux, c'est à dire, que comme CB sera à AB, ainsi AB à BD; & comme BA à AC, ainsi BD à DA; & comme BC à CA, ainsi BA à AD; & partant par la 1. d. 6. les triangles ABC, ABD seront semblables. ¶

Par mesme discours on prouvera que les deux triangles BAC & ADC, sont aussi equiangles, & semblables: car l'angle C est commun à tous les deux, & l'angle droit égal à l'angle droit, le troisieme CAD sera égal au troisieme B, par la 32. p. 1. & par la 4. p. 6. comme BC sera à CA, ainsi CA est à CD; & comme CA à AB, ainsi CD à DA; & comme CB à BA, ainsi CA à AD.

On démontrera en la même manière les triangles ADB, ADC estre semblables entr'eux, puisque les angles au point D sont droits, & les angles ABD, CAD, & BAD, ACD ont esté demonstrez egaux; & partant par la 4. p. 6. comme BD ainsi DA à DC; & comme DA à AB, ainsi DC à CA; & comme AB à BD, ainsi CA à AD.

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste que la perpendiculaire tirée de l'angle droit d'un triangle rectangle à la base, est moyenne proportionnelle entre les deux segments de la base : & chaun des costez comprenant l'angle droit, est aussi moyen proportionnel entre toute la base & le segment qui le touche.

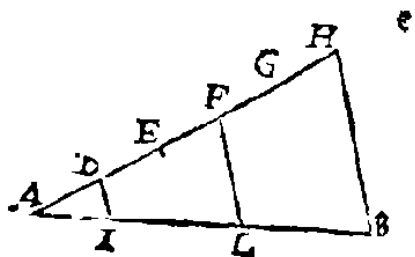
Car il a esté démontré que comme BD est à DA , ainsi DA à DC , & partant DA est moyenne prop. entr. BD & DC ; item que comme CB est à BA , ainsi BA à BD , & par ainsi BA est moyenne prop. entre CB , & BD : finalement que comme BC à CA ainsi CA à CD , & partant CA estre moyenne proportionnelle entre BC & CD .

P R O B. I. P R O P. IX.

D'une ligne droite donnée, oster la partie demandee.

Soit la ligne donnée AB , de laquelle il faut oster la cinquième partie, ou telle autre qu'on voudra.

Du point A soit menée la ligne AC , faisant angle avec AB , & en icelle AC , soient prises à l'aduanture cinq parties égales (car il faut qu'icelle ligne soit tant grande qu'il sera de besoin) & soient icelles AD, DE, EF, FG, GH , & apres auoir mené la ligne BH , du point D soit menée DI , parallele à HB : Je dis que AI est la cinquième partie de AB .



Car puis qu'au triangle ABH , la ligne DI est parallele au costé HB , par la 2. p. 6. comme HD sera à DA , ainsi BI à IA : & en composant par la 18. p. 5 comme HA sera à DA , ainsi BA à IA : mais par la construction HA est quintuple de AD : donc aussi BA sera quintuple de AI : & partant AI sera la cinquième partie de AB , laquelle auoir esté demandee.

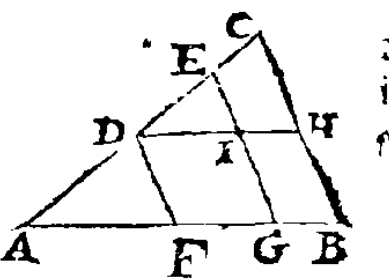
S C H O L I E.

Que si de AB il falloit oster plusieurs parties, comme pour exemple les trois cinquiemes, il est evident par ce qui a esté d monstré qu'estant tirée la ligne FL parallele a HB , le segment AL sera les trois cinquiemes de AB , tout ainsi que AF est les trois cinquiemes de AH .

PROBL. 2. PROP. X.

Couper semblablement vne ligne droicte donnee non coupee, à vne autre ligne droicte donnee & coupee.

Soient donnees les lignes droictes AB AC , desquelles AC est coupee en D & E : & il faut couper AB en parties semblables & proportionneles a celles de AC .



Soient accommodees icelles lignes AB AC donnees en sorte qu'elles fassent l'angle BAC ; & apres avoir mené BC , de D & E , soient menees DF , EG paralleles a icelle BC par la 31. p. 1. Je dis que la ligne AB est semblablement coupee en F & G , comme est coupee AC en D & E . Car par la 2. p. 6. comme AD est a DE , ainsi AF a FG . Que si on tire DH parallele a AB couppant EG en I . Recherchez par la 2. p. 6. comme DE sera a EC , ainsi DI a IH , c'est a dire ainsi, FG a GB , pource que par la 34. p. 1. FG est egale a DI & GB a IH . Parquoy les parties FG , GB seront aussi proportionneles aux parties DE , EC . Les trois parties AF , FG , GB , sont donc proportionneles aux trois parties AD , DE , EC : & partant AB est coupee semblablement a AC , ainsi qu'il falloit faire.

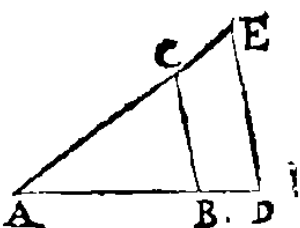
PROB. 3. PROP. XI.

A deux lignes droictes donnees, trouver la

troisième proportionnelle.

Soient deux lignes données AB , & AC , auxquelles il faut trouver la troisième proportionnelle.

Soient disposées icelles lignes en un angle CAB ; & après avoir prolongé AB jusques en D , soit faite BD égale à AC & après avoir mené CB du point D , soit tirée DE parallèle à BC rencontrant AC prolongée en E . Je dis que CE est la troisième proportionnelle, c'est à dire que comme AB est à AC , ainsi AC à CE . Car puis qu'au triangle ADE , la ligne droite BC est parallèle au côté DE , par la 2. p. 6. comme AB sera à BD , ainsi AC à CE : mais par la 7. p. 5. comme AB est à BD , ainsi la même AB est à AC égale à icelle BD . Donc comme AB est à AC , ainsi AC à CE .



PROB. 4. PROP. XII.

A trois lignes droites données, trouver la quatrième proportionnelle.

Soient les trois lignes données (en la précédente figure) AB , BD , AC , auxquelles il faut trouver la quatrième proportionnelle.

Soient disposées les deux premières AB , BD , selon une ligne droite AD ; & la 3. AC face avec la première AB un angle A : puis après soit menée BC , & de D , la ligne DE parallèle à icelle BC , rencontrant AC prolongée en E . Je dis que CE est la 4. proportionnelle requise. Car par la 2. p. 6. comme AB est à BD , ainsi AC est à CE .

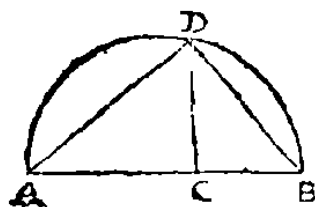
PROB. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droites données, trouver la moyenne proportionnelle.

Soient les deux lignes données AC & CB , auxquelles il faut

trouver la moyenne proportionnelle.

Soient icelles disposées en vne ligne droite AB, sur laquelle soit décrit vn demy cercle ADB; & apres auoir du point C lené la perpendiculaire CD; Je dis que icelle est la moyenne proportionnelle demandee.



Car estans menees les deux lignes AD & BD, l'angle ADB dans le demy cercle sera droit par la 31. p. 1. Veu donc que de l'angle droit ADB du triangle rectangle AD B, est tiree DC perpendiculaire à la base AB, par le corol. de la 8. p. 6. CD sera moyenne proportionnelle entre AC, CB.

S C H O L I E.

De cecy est eu dent qu'une ligne droite tiree perpendiculairement de quelconque point du diametre d'un cercle, iusques à la circonférence, est moyenne proportion, entre les segmens du diametre faicts par icelle perpendiculaire. Car de quelque point pri au diametre AB, estant tiree une perpendiculaire iusques à la circonférence, par les mesmes raisons que dessus, icelle perpend. sera moyenne propo. entre les deux segmens du diametre AB.

THEOR. 9. PROP. XIV.

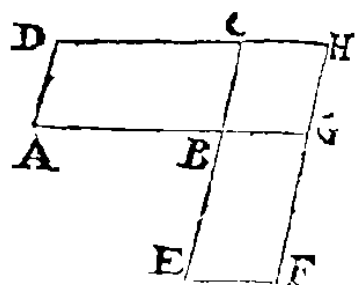
Des parallélogrâmes egaux qui ont vn angle egal a vn angle; les costez au long des angles egaux sont reciproques : & les parallélogrammes qui ont vn angle egal a vn angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.

Soient deux parallélogrammes egaux ABCD, & BEFG; desquels les deux angles ABC & EBG soient egaux : Je dis que les costez qui sont au long d'iceux angles egaux sont reciproques : c'est à dire que AB est a BG, comme EB a BC.

Car les parallélogrâmes AC, BF, estans disposez de telle façon que AB & BG, fassent vne ligne droite, soient prolongez

gez DC, FG, iufques à ce qu'ils fe rencontrent en H. Puis donc que les deux parallelogrammes AC, EG font egaux, ils auront vne mefme raifon au parallelogrâme BH, par la 7.p.5. Mais la raifon des parallelogrâmes AC, BH, eft par la 1.p.6. comme celle de la bafe AB à la bafe BG. Item celle des parallelogrammes EG, BH eft comme celle de EB à BC; & partant par la 11.p.5. comme AB à BG, ainfi EB à BC.

Pour la feconde partie, fi AB eft à BG, comme EB à BC, & que les angles ABC & EBG foient egaux: Je dis que les parallelogrammes AC & EG feront auffi egaux.

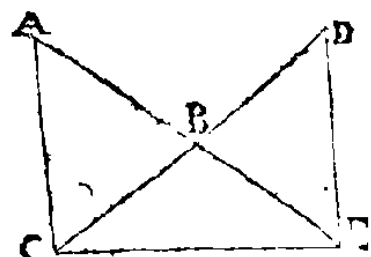


Car demeurant la mefme construction, on prouuera par la 1.p.6. & 11.p.5. qu'il y a mefme raifon du parallelogramme AC, au parallelogrâme BH, que de la bafe AB à BG: pareillement qu'il y a mefme raifon du parallelogrâme EG, au parallelogramme BH, que de EB à BC: mais les raifons des bafes font pofees semblables: donc auffi les raifons des parallelogrâmes AC & EG, au troifieme BH feront semblables par la 11.p.5. & partant par la 9.p.5. ils feront egaux.

THEO. 10. PROP. XV.

Les triangles egaux ayans vn angle egal à vn angle; ont les costez au long des angles egaux reciproques: & les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, & les costés au long des angles egaux reciproques, font auffi egaux.

Soient deux triangles egaux ABC & DBE, ayans les angles au point B egaux. Je dis que les costez qui font au long des angles egaux font reciproques: c'est à dire que comme AB à BE, ainfi DB à BC.



Car les triangles estans disposez en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, soit menee la li-

gne CE. Pour autant que les deux triangles ABC & DBF ſoient
egaux, ils auront vne meſme raiſon au triangle BEC par la 7.
p. 5 mais par la 1. p. 6. la raiſon du triangle ABC, au triangle
EBC, (eſtant de meſme hauteur) eſt comme de la baſe AB a
la baſe BE; pareillement par la meſme 1. p. 6. le triangle DBE
ſera au triangle ECB, comme DB a BC; & partant par la 11. p.
5. AB ſera a BE, comme DB a BC.

Pour la ſeconde partie elle ſe prouuera comme en la prece-
dente, en retrogradant par la 1. p. 6. 11. p. 5. & 9. p. 5.

THEOR. II. PROP. XVI.

Si quatre lignes ſont proportionnelles; le re-
ctangle compris des extremes, eſt egal à celuy
des moyennes; & ſi le rectangle compris des
extremes, eſt egal au rectangle compris des
moyennes; les quatre lignes ſont proportion-
nelles.

Soient quatre li-
gnes proportiō-
nelles AB, FG, F
BC, ſçauoir eſt
que AB ſoit a FG
comme EF a BC
& ſoit le rectan-
gle ABCD compris des extremes AB, BC; & le rectangle EF
GH compris ſous les moyenes EF, FG. Je diſ que les rectan-
gles AC, EG ſont egaux.

Car puis que les angles droicts B & F ſont egaux; & com-
me AB eſt a FG, ainſi EF a BC; les coſtez au long des angles
egaux B & F, ſeront reciproques par la 2. def 6. & partant par
la 14. p. 6. les parallelogrammes AC & EG ſeront egaux.

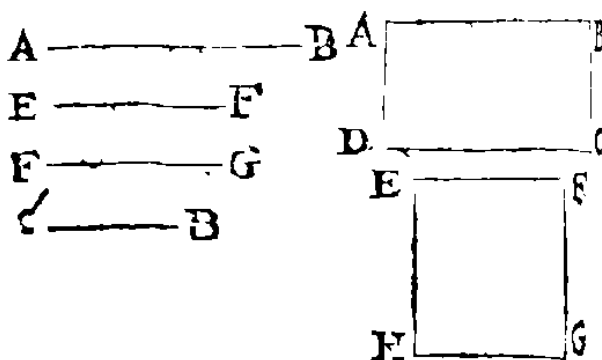
Quant a la ſeconde partie, ſoient les rectangles AC, EG
egaux. Je diſ que les quatre lignes AB, FG, EF, BC, ſont pro-
portionnelles; c'eſt a dire que comme AB eſt a FG, ainſi EF eſt
BC. Car puis que les rectangles ſont egaux, & ont les an-
gles B & F auſſi egaux, ſçauoir droicts, ils auront les coſtez
aulong d'iceux angles egaux reciproques par la 14. p. 6. ſça-

voir est que comme AB est à FG ainsi EF à BC : ce qu'il fa-
loit prouver.

THEOR. 12. PROP. XVII.

Si trois lignes droictes sont proportionnelles, le rectangle compris des extremes, sera egal au quarré fait de la moyenne : & si le rectangle compris des extremes est egal au quarré décrit de la moyenne; les trois lignes seront proportionnelles.

Soient trois lignes proportionnelles AB, EF, BC; & soit le rectangle ABCD compris sous les extremes AB, BC, & le quarré de la moyenne EF soit EFGH. Je dis que le rectangle AC est egal au quarré EG.



Car étant prise FG egale à EF, les quatre lignes AB, EF, FG, BC, seront proportionnelles, & le quarré EG sera compris sous les moyennes EF, FG, à cause de l'egalité d'icelles. Parquoy par la precedēte pro. le rectangle AC compris des deux extremes AB, BC est egal au quarré EG, c'est à dire au rectangle des moyennes EF, FG.

Pour la seconde partie, le rectangle AC soit egal au quarré EG. Je dis que comme AB est à EF, ainsi EF à BC. Car puisque les rectangles AC, EG sont egaux, par la 16. p. 6. comme AB sera à EF, ainsi FG à BC : mais par la 7. p. 5. comme FG est à BC, ainsi EF egale à icelle FG, est à la mesme BC : & partant comme AB est à EF, ainsi EF est à BC : ce qu'il falloit demonstrez.

COROLLAIRE.

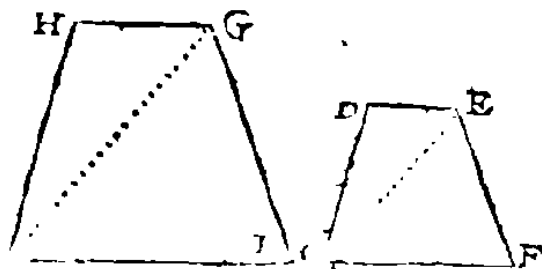
Il est manifeste par la dernière partie de ce theoreme, qu'une ligne

droite est moyenne proportionnelle entre deux autres lignes droites, qui comprennent un rectangle égal au carré d'icelle ligne. Car pour ce que le rectangle de AB , BC est égal au carré de EF , il a esté démontré, que comme AB a EF , ainsi EF a BC ; & partant EF est moyen prop. entre AB & BC .

PROBL. 6, PROP. XVIII.

Sur vne ligne droite donnee, descrire vne figure rectiligne semblable, & semblablement posée à vne figure rectiligne donnee.

Soit la ligne droite donnée AB , sur laquelle il faut construire vne figure semblable, & semblablement posée à la figure rectiligne donnée $CDEF$.



Soit divisée la figure donnée en deux triangles, par la ligne CE : & apres avoir par la 23. p. 1. décrit sur la ligne AB , & aux points A & B , les deux angles BAG , ABG , égaux, l'un à l'angle FCE , & l'autre à l'angle CFE . Il est évident par la 32. p. 1. que le troisieme sera égal au troisieme, & les triangles CEF , AGB seront equiangles, & auront les costez au long des angles égaux proportionnaux par la 4. p. 6. Pareillement sur la ligne AG , & aux deux points A & G , soient décrits les deux angles HAG , & AGH , égaux aux deux DCE & CED , chacun au sien; aussi par la 32. p. 1. le troisieme H sera égal au troisieme D , & les triangles CDE & AHG seront equiangles, & par la 4 p. 6 ils auront les costez au long des angles égaux proportionnaux: ainsi l'angle D étant égal à l'angle H , & l'angle F à l'angle B , les deux de C aux deux de A , & les deux de E aux deux de G ; les deux figures $CDEF$, $ABGH$, seront equiangles: & pour autant qu'elles sont composées de triangles equiangles, lesquels ont les costez au long des angles égaux proportionnaux, comme CF sera à FE , ainsi AB a BG : item comme CF est à CE , ainsi AB à AG , & comme CE à CD , ainsi AG à AH , & en raison égale comme CF sera à CD , ainsi AB sera à AH ; ainsi les costez au long des angles égaux $FC D$, BAH , seront aussi proportionnaux, & ainsi des autres. Par-

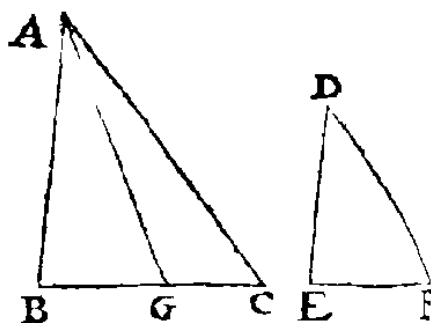
quoy les figures C D E F, A H G B seront semblables, & semblablement descrites.

Que si la figure donnee auoit plus de 4. costez, il la faudra diuiser en plusieurs triangles, & operer sur chacun triangle, comme il a esté dit cy dessus.

THEOR. 13. PROP. XIX.

Les triangles semblables, sont l'un à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison.

Soient deux triangles semblables ABC & DEF. Je dis qu'ils seront l'un à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison BC & EF: c'est à dire que si à BC & EF on trouue la troisieme proportionnelle BG; le triangle ABC sera au triangle DEF, comme la ligne BC est à la troisieme proportionnelle BG: car telle est la raison doublee par la 10. def. 5.



Car estant tiree la ligne AG; d'autant que les triangles ABC, DEF sont semblables, & que comme AB est à BC, ainsi DE est à EF; en changeant par la 16. p. 5. comme AB sera à DE, ainsi BC sera à EF: mais comme BC est à EF, ainsi EF est à BG par la construction. Donc comme AB sera à DE, ainsi EF sera à BG par la 11. p. 5. & par ainsi les deux triangles ABG, DEF auront les costez au long des angles égaux B & E, reciproques; & par la 15. p. 6. iceux triangles ABG, DEF, seront égaux entr'eux, & partant cōme le triangle ABC sera au triang. DEF, ainsi sera le mesme triang. ABC au triang. ABG par la 7. p. 5. Mais comme le triangle ABC est au triangle ABG de mesme hauteur, ainsi est la base BC à la base BG par la 1. p. 6. Donc cōme le triangle ABC est au triangle DEF, ainsi est BC à BG. Mais BC, EF, BG estans continuellement proportionnelles, BC est à BG en raison doublee de BC à EF par la 10. def. 5. dōc aussi le triangle ABC est au triangle DEF en raison doublee du costé BC au costé EF. ce qu'il falloit démonstret.

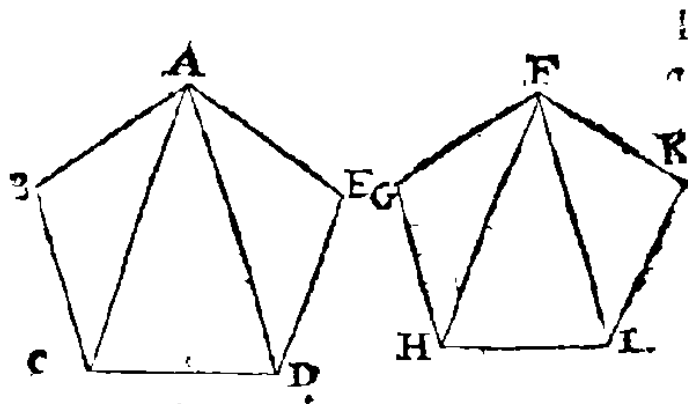
C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste, qu'estant trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere sera a la troiesieme, ainsi le triangle descript sur la premiere sera au triangle semblable, & semblablement posé sur la seconde. Car il a esté démontré que comme BC est a BG , ainsi le triangle ABC au triangle DEF .

THEOR. 14. PROP. XX.

Les polygones semblables peuvent estre diuisez en nombre egal de triangles semblables entr'eux, & proportionaux à leur tout: & les polygones sont l'un à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison.

Soient deux polygones semblables $ABCDE$ & $FGHIK$. Je dis premierement qu'ils peuvent estre diuisez en nombre egal de triâgles semblables:



Car apres auoir mené les lignes AC, AD, FH, FI , il est euident que l'une des figures est diuisée en autant de triangles que l'autre. Et pour autant que les figures sont semblables, l'angle B sera egal a l'angle G , & comme BA sera a BC , ainsi GF sera a GH , & par la 6. p. 6. les triangles ABC & FGH seront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionaux, & seront semblables: par mesme discours, les triangles AED & FKI , seront aussi semblables. Pareillement par ce qui a esté dit cy dessus AC est a CB , comme FH a HG : mais BC est a CD comme GH a HI : car ce sont costez de figures semblables; donc en raison egalle par la 22. p. 5. AC sera a CD , comme FH a HI : & d'autât que les angles BCD , GHI sont egaux, & les angles BCA , GHF aussi egaux; iceux estâs ostez, les restans ACD , FHI , seront pareillement egaux; &

partant par la 6 p. 6. les triangles ACD & FHI, seront égaux, & par conséquent semblables.

Je dis secondement, qu'iceux triangles sont proportionaux à leur tout. Car les trois triangles de l'une des figures estans semblables aux trois triangles de l'autre, chacun à sien, & par la 19. p. 6. ils sont l'un à l'autre, en raison doublee de leurs costez de mesme raison; les triangles ABC, & FGH, seront l'un à l'autre en raison doublee de AC à FH: aussi la mesme raison doublee seront les triangles ACD, FHI: & troisieme AED estant au troisieme FKI, en raison doublee de AD à FI, qui est la mesme que de AC à FH, estans costez de triangles semblables; aussi les triangles AED, FKI, seront l'un à l'autre en raison doublee de AC à FH: & par la 12. p. tous les triangles du premier polygone, seront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'un des triangles de l'un d'iceux, à son respondant de l'autre.

Je dis tiercement, que le polygone est au polygone, en raison doublee des costez CD & HI: car puisque toute la figure ABCDE, est à toute la figure FGHIK, comme l'un des triangles de l'une ACD, est à l'un des triangles de l'autre FHI lesquels par la 19. p. 6. sont en raison doublee de CD à HI par la 11 p. 5 le polygone sera au polygone, en raison doublee des costez de mesme raison CD & HI.

C O R O L L A I R E.

Par cecy est manifeste qu'estans trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere sera à la tierce, ainsi sera le polygone de sur la premiere au polygone semblable & semblablement descript sur la seconde; puis qu'il a esté démontré que les polygones sont entr'eux en raison doublee de leurs costez de mesme raison, c'est à dire comme le costé du premier est à une troisieme proportionnelle auxdits costez, mesme raison.

THEOR. 15. PROP. XXI.

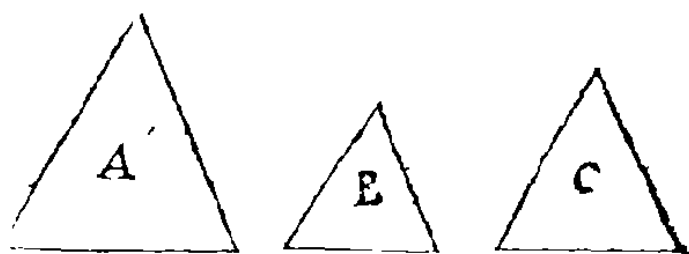
Les figures rectilignes semblables à un sont aussi semblables entr'elles.

Soit la figure A semblable à la figure B, & la figure C à

blable aussi à la mef-
me B : Je dis que A,
& C seront sembla-
bles entr'elles.

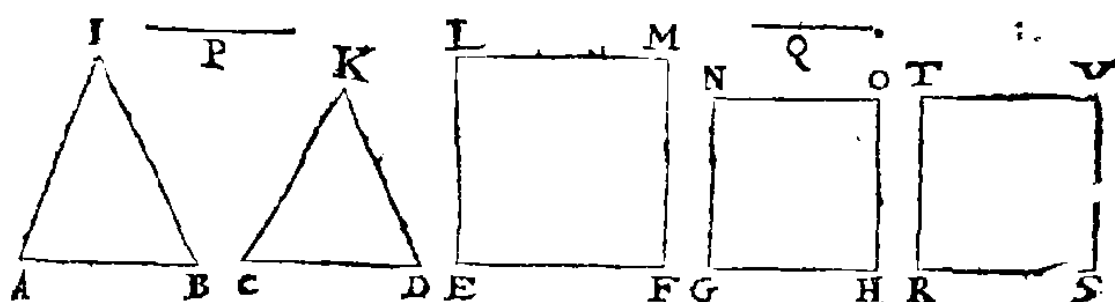
Car d'autant que
chacune d'icelles A
& C est semblable à

B, elle a les angles egaux aux angles de B par la 1. d. 6. & partāt
par la 1. com. sent les angles de A, seront aussi egaux aux an-
gles de C, & par la 4. p. 6. A & C auront les costez au long des
angles egaux proportionnaux ; & par la 1. def. 6. elles seront
semblables : ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOR. 16. PROP. XXII.

Si quatre lignes ſont proportionneles; les fi-
gures rectilignes ſemblables, & ſemblablement
deſcrites ſur icelles, ſeront proportionneles: &
ſi icelles figures ainſi deſcrites ſont proportiō-
neles; icelles lignes ſeront auffi proportion-
neles.



Soient 4. lignes proportionneles AB, CD, EF, GH ; & ſur
AB, & CD ſoient conſtituees deux quelconques rectilignes
ABI, CDK ſemblables, & ſemblablement deſcrits : item ſur
EF & GH deux autres quelconques rectilignes ſemblables &
ſemblablement deſcrits EFML, GHON. Je dis premiere-
ment que ces 4. rectilignes ſont proportionnaux, c'eſt à dire
que comme ABI eſt à CDK, ainſi EFML à GHON.

Qu'il ne ſoit ainſi : aux deux lignes AB, & CD, ſoit trouuee
P troiſieſme proportionnele par la 11 p. 6. & aux deux EF, &
GH, ſoit trouuee Q auffi troiſieſme proportionnele : & d'au-
tant que AB eſt à CD, comme EF eſt à GH. Item CD à P,

comme GH à Q : en raison egale AB sera à P, comme EF à Q par la 22. p. 5. Mais comme AB est à P, ainsi le rectiligne ABI est au rectiligne CDK par le corol. de la 19. ou 20. p. 6. Item comme EF est à Q, ainsi le rectiligne EM est au rectiligne GO. Donc comme ABI est à CDK, ainsi EM est à GO par la 11. p. 5.

Je dis pour la seconde partie, que si icelles figures semblables, & semblablement descrites sont proportionnelles, que les lignes sur lesquelles elles sont descrites, seront aussi proportionnelles.

Car soit trouuée RS 4. proportionnelle aux trois AB, CD, EF; puis sur icelle RS décrit le rectiligne RV semblable au rectiligne EM & semblablement posé par la 18. p. 6. & partant aussi semblable au rectiligne GO par la 21. p. 6. & d'autant que comme AB est à CD, ainsi EF est à RS, comme il a esté démontré cy dessus le rectiligne ABI sera aussi rectiligne CDK, cōme le rectiligne EM au rectiligne RV. Mais comme ABI est à CDK, ainsi aussi a esté posé EM à GO : donc par la 11. p. 5. cōme EM sera à RV, ainsi EM sera à GO; & partant par la 9. p. 5. RV, GO seront egaux; lesquels estans semblables & semblablement descrits, consistent necessairement (comme nous demonsturerons incontinent) sur lignes droictes egales RS, GH. Parquoy par la 7. p. 5. comme EF sera à RS, ainsi EF sera à GH. Mais par l'hypothese EF est à RS, comme AB à CD : donc par la 11. p. 5. cōme AB sera à CD, ainsi aussi EF sera à GH. ce qu'il faisoit demonstrier.

LEMM E.

Or que les rectilignes egaux semblables & semblablement descrits tels que sont GO, RV, consistent sur lignes droictes egales, on le prouuera ainsi. Si les lignes GH, RS peuvent estre inegales, soit GH la plus grande: & puis que les rectilignes sont semblables, cōme GH est à HO, ainsi RS à SV, & GH ayant esté posée plus grande que RS, par la 14. p. 5. HO sera aussi plus grande que SV; & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV; puis que cestuy cy peut estre constitué dans celui-là : ce qui est absurde, ayans esté posez egaux. Les lignes GH, RS ne sont donc pas inegales, mais egales : ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

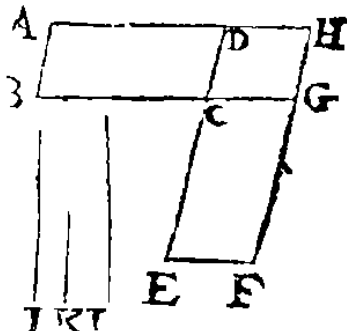
Il est euident, que s'il y a aussi trois lignes droictes proportionnelles

les rectilignes semblables, & semblablement descrites sur icelles, seront pareillement proport. &c. Car la ligne moyenne & son rectiligne estant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles, donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a esté cy dessus démontré. Veu donc que le rectiligne qui sera décrit sur la seconde ligne, sera égal à celui décrit sur la 3. est manifeste: ce qui estoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes equiangles sont l'un à l'autre en raison composée de leurs costez,

Soient deux parallelogrâmes equiangles ABCD, & CEF G, ayant les deux angles BCD, ECG égaux: Je dis que la raison de l'un à l'autre est composée de leurs costez, sçavoir est composée de la raison que BC a à CG & de celle que DC a à CE.



Car ayant disposé les deux parallelogrammes, en sorte que BC, & CG, se puissent rencontrer directement, & ne fassent qu'une ligne droicte, comme aussi DC, CE vne autre ligne droicte, soit paracheué le parallelogrâme DCGH; & soit prise quelcôque ligne droicte I; puis aux 3. BC, CG & I, soit trouué la 4. proport. K. Ité aux 3. DC, CE, & K, la 4. prop. L. Veu d'oc que par la 1. p. 6. cōme BC est à CG, ainsi AC à DG; & comme BC à CG, ainsi aussi I est à K par l'hypothese; pareillement comme AC sera à DG, ainsi sera I à K par la 11. p. 5. Le mesme se peut dire de DG à CF, qu'ils sont l'un à l'autre comme K à L, par la 2. p. 6. & 11. p. 5. Donc en raison égale comme AC sera à CF, ainsi I sera à L par la 22. p. 5. Mais la raison de I à L est composée de la raison de BC à CG, & de celle de DC à CE par la 5. def. 6. Donc aussi est composée d'icelles raisons, la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF: ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

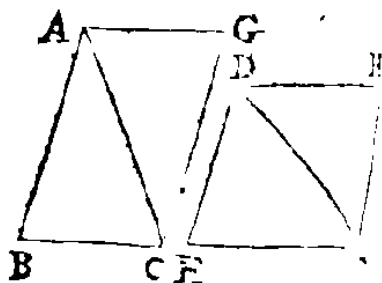
Il est facile à colliger de ceste demonstration comment on compose

une raison de deux ou de d'avantage. Car des raisons de BC à CG , & de DC à CE a esté composée la raison de 1 à L . Que s'il faut composer une raison de trois, ayant trouvé cel e composée d deu, d'icel & de la 3. nous en composerons une autre en la mesme maniere, laquelle sera composée de trois : & ainsi c nsequemment des autres.

Clavius demonstre en ce lieu cy (apres Commandin) quelques autres propositions assez utiles : c'est pourquoy nous les ioyons icy.

Les triangles ayans vn angle egal à vn angle, sont en raison composée des costez comprenant l'angle egal.

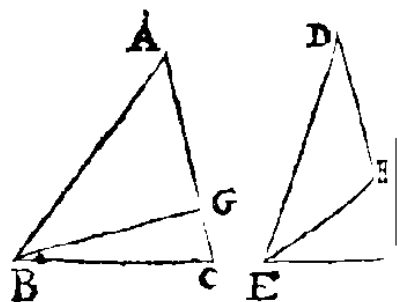
Soient les triangles ABC , DE F ayans l'angle B egal à l'angle E . Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF en raison composée des costez cōprenāt les angles B & E . Car ayāt acheué les parallelog. BG , EH , ils serōt equiangles; & partant par la 23 p.6.



la raison d'iceux sera composée de celle de leurs costez. Veu donc les triangles ABC , DEF , desquels ils sont moitié par la 34 p.1. en la mesme raison qu'iceux par la 15. p.5 aussi iceux triangles sont l'un à l'autre en icelle raison composée des costez.

Les triangles qui ont vn angle a vn angle, sont l'un à l'autre, en la mesme raison que les rectangles compris sous le costez qui contiennent l'angle egal.

Soient les triangles ABC , DEF ayans l'angle A egal à l'angle D . Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF , comme le rectangle de AB , AC est au rectangle de DE , EF . Car estans tirées sur AC , DF , les perpendiculaires BG , EH ; les triangles ABG , DEH seront equiangles, comme ap-



pert par le corol. de la 32. p.1. donc par la 4. p.6. comme GB est à EH ainsi HE à ED . Mais par la 1. p.6. comme GB à BA , ainsi e rectangle de BG , AC , au rectangle de BA , AC , pource q. e posant GB la bases, la hauteur d'iceux rectangles sera une mesme, scavoir. Semblablement comme HE à ED , ainsi est le rectangle de EH , EF au rectangle de DE , DF . Donc par la 11. p.5. le rectangle de BG , AC est au rectangle de AB , AC , comme, le rectangle de EH , DF au rectangle de DE , DF ; & en permutant le rectangle de BG , AC , au rectangle de EH , DF , comme le rectangle de AB , AC au rectangle de DE , DF . Mais le rectangle de BG , AC est au rectangle de EH ,

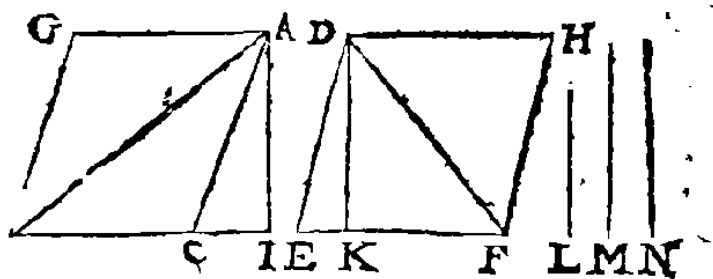
ainsi que le triangle ABC , au triangle DEF par la 15 p. 5. pource que ces triangles sont moitiez d'iceux rectangles par la 41. p. 1. (Car ils ont mesmes bases qu'iceux AC, DF ; & mesmes hauteurs BG, EH ; & partant entre mesmes paralleles) donc aussi le triangle ABC sera au triangle DEF , comme le rectangle de AB, AC , est au rectangle de DE, DF : ce qui estoit propose.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que les parallelogrammes equiangles sont aussi entr'eux, en la mesme raison que les rectangles compris sous les costez des angles egaux, puis qu'ils sont doubles d'iceux triangles.

Les triangles & les parallelogrammes sont entr'eux en la raison composee de la raison des bases, & de celle des hauteurs.

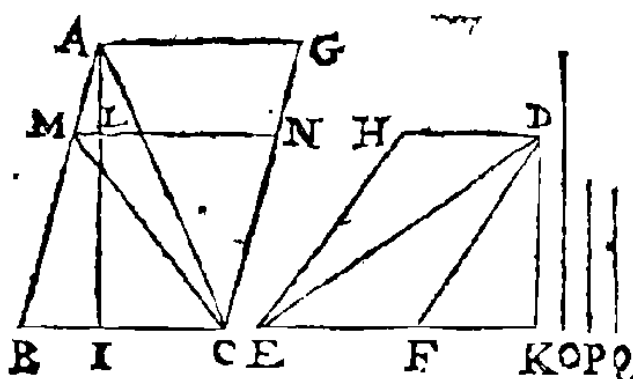
Soient les triangles ABC, DEF ; & les parallelogrammes CG, EH , les hauteurs d'iceux soient AI, DK . Le dls que la raison d'iceux triangles, & parallelo-



grammes est composee de la raison de la base BC à la base EF , & de celle de la hauteur AI à la hauteur DK . Car premierement soient les hauteurs egales, mais les bases ou aussi egales, ou inegales: & soit fait comme BC à EF , ainsi L à M ; & comme AI à DK , ainsi M à N ; lesquelles seront egales, puis que AI, DK sont posees egales: & partant par la 7. p. 5. L sera à N comme L à M , c'est à dire comme BC à EF . Mais par la 1. p. 6. comme BC est à EF , ainsi est le triangle ABC , au triangle DEF ; & le parallelograme CG au parallelograme EH ; Donc par la 11. p. 5. come L sera à N , ainsi le triangle au triangle & le parallelograme au parallelograme: Mais la raison de L à N est composee de la raison de L à M , c'est à dire de la raison de BC à EF , & de la raison de M à N , c'est à dire de AI à DK : donc la raison du triangle ABC au triangle DEF , & du parallelog. CG au parallelog. EH , est composee des mesmes raisons.

Soient maintenant les hauteurs AI, DK inegales, & AI la plus grande, mais les bases BC, EF ou egales, ou aussi inegales. Soit fait comme AI à DK , ainsi O à P ; & comme BC à EF , ainsi P à Q : & ayant coupe IL egale à DK , par L soit tiree MN parallele à BC , & joind CM . D'autant que le triangle ABC est au triangle MBC ; &

le parallelogramme BG au parallelog. BN , comme la hauteur AI à la hauteur IL ou DK qui li y est egale, c'est à dire comme O à P par le Scholie de la 1. p. 6. & comme le triangle ABC au triangle DEF , & le paral-

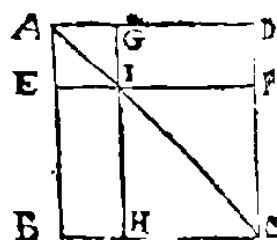


lelogramme BN au parallelog FH , ainsi est la base BC à la base EF , (pource qu'ils sont de mesme hauteur) c'est à dire ainsi P à Q en raison egale ABC sera à DEF , & BG à FH , comme O à Q . Parquoy puis que la raison de O à Q est composee de la raison de O à P , c'est à dire de AI à DK , & de la raison de P à Q , c'est à dire de la base BC à la base EF : la raison du triangle ABC au triangle DEF , & du parallelog. BG au parallelog. FH , sera composee des mesmes raisons. Ce qui estoit propose.

THEOR. 18. PROP. XXIII.

En tout parallelogramme; les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, ayans vn angle commun au total, sont semblables entr'eux, & au total.

Soit le parallelogramme $ABCD$, duquel le diametre est AC : Je dis que les deux parallelogrammes GE & FH descripts sur iceluy diametre, ayans les angles A & C communs avec le total, sont semblables entr'eux, & au total $ABCD$.



Car d'autant que les lignes AD, EF, BC sont paralleles, sur lesquelles tombent AC & GH , elles feront les angles alternativement egaux, par la 29. p. 1. ainsi les triangles $AI G$, & $IC F$, seront equiangles entr'eux, & au total ACD , & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux. Le mesme se peut dire des trois autres triangles AIE , ICH & ACB , lesquels sont egaux aux trois premiers, chacun au sien par la 34. p. 1. ainsi le parallelogramme EG , ayant les costez AE & EI proportionnaux à AB & BC

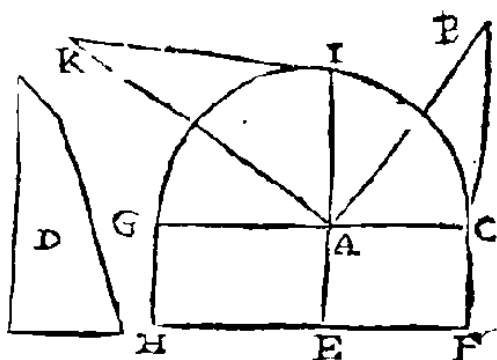
coſtez du parallelogramme BD, & aux coſtez IH & HC du parallelogrāme FH &c. Il eſt euidēt par la 1. d. 6. qu'iceux parallelogrammes EG, HF, ſeront ſemblables entr'eux, & au tout BD.

PROB. 7. PROP. XXV.

Deſcrire vne figure rectiligne, ſemblable à vne autre donnee, & egale à vne autre propoſee.

Soient deux figures rectilignes ABC, & D : il faut faire vne autre figure rectiligne egale à D, & ſemblable à ABC.

Sur la ligne AC, ſoit fait le rectangle ACFE egal à la figure ABC : Item ſur la ligne AE, ſoit conſtruit GE rectangle e-



gal à la figure donnee D, le tout par la 44. & 45. p. 1. & apres auoir trouuē AI, moyenne proportionnelle entre GA & AC, Sur icelle AI, ſoit deſcrite la figure AIK ſemblable & ſemblablement poſee à la figure ACB, par la 18. p. 6. Je diſ qu'elle ſera auſſi egale à la figure donnee D.

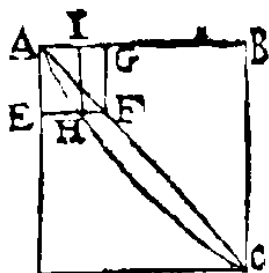
Car puiſque par la conſtruction le rectangle GE eſt egal à D, & AF à ABC, & que par la 1. p. 6. AF eſt à GE, comme CA à AG: Pareillement que les deux figures ſemblables ABC & AIK, ſont l'une à l'autre en raiſon doublee de AC à AI, par le corol. de la 19. ou 20. p. 6. ſçaũoir comme CA à la 3. proport. AG, auſſi par la 11. p. 5. ACB ſera à IKA, comme AF à GE : & en changeant ACB, ſera à AF, comme IKA à GE, par la 16. p. 5. & partant ACB eſtant egal à AF, auſſi IKA ſera egal à GE, & par conſequent egal à D ; & par la conſtruction, iceluy rectiligne IKA eſt auſſi ſemblable & ſemblablement poſe au rectiligne ABC. Neſt donc le requis.

THEQR. 19. PROP. XXVI.

Si d'un parallelogrāme on oſte vn paral-

lelogrāme semblable & semblablement posé au tout, ayant vn angle commun avec le tout; l'osté fera avec le tout sur vn mesme diametre.

Soit le parallelogramme $A B C D$, duquel on retranche $A E F G$ parallelogramme qui luy est semblable & semblablement posé, ayans l'angle A commun avec le total : Je dis qu'ils sont sur mesme diametre $A F C$.

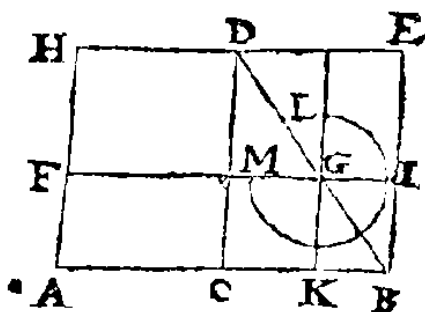


Autrement s'ils ne sont sur mesme diametre, soit vn autre diametre $A H C$, qui ne soit commun à tous les deux parallelogrammes, puis coupe le costé $E F$ en H , & d'iceluy point soit mené $H I$ parallele à $A E$, par la 31. p. 1. donc le parallelog. $I E$ estant sur vn mesme diametre avec le total, sera semblable a iceluy, par la 24. p. 6. auquel total $G E$ est aussi semblable par hypothese; & partant par la 21. p. 6. $G E$ & $I E$ seront semblables, & par la 1. p. 6. $A E$ sera à $E F$, comme $A E$ à $E H$: mais $A E$ estant egale a soy-mesme, il faudroit aussi par la 14. p. 5. que $E F$ 2. fust egale à $E H$ 4. & c. ce qui est absurde; donc les parallelogrāmes $B D$ & $G E$, total & retranché, estoient sur mesme diametre; car il aduient Ira tousiours mesme absurdité, si on dict que le diametre de $B D$ passe par quelconque autre point, soit du costé $E F$ ou $F G$, du parallelogramme retranche $G E$.

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrāmes appliquez selon vne mesme ligne droicte, & defaillans à icelle, de parallelogrāmes semblables & semblablement posés à vn autre descrit sur la moitié de la mesme ligne; le plus grand est celuy qui est descrit sur l'autre moitié de la ligne, & semblable au defaillant.

Soit la ligne AB couppee en deux également en C, & sur CB moitié d'icelle soit constitué le parallelogramme BCDE, duquel le diametre est BD. Si donc on accomplit tout le parallelogramme ABEH, le parallelog. AD estant sur la moitié AC appliqué selon la ligne AB, sera



defaillant du parallelogramme CE & semblable à iceluy CE. Je dis que de tous les parallelogrammes appliquez sur icelle ligne AB, & defaillans d'une figure semblable a CE, le plus grand est AD, qui est descript sur la moitié AC, & defaillant du parallelog. CE.

Car estant pris au diametre BD quelconque point G, & tirées par iceluy point les lignes FGI, KG, paralleles aux lignes AB, BE, le parallelogramme AKGF appliqué selon la ligne AB, sera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 4. p. 6. est semblable & semblablement posé à CE. Et d'autant que par la 43. p. 1. les complemens CG, GE, sont egaux, si on leur adioust KI commun, aussi CI, KE seront egaux. Mais CI, CF estans sur bases egales, sont pareillement egaux par la 36. p. 1. donc aussi CF, KE seront egaux, & leur adioustant CG commun, le parallelogramme AG sera egal au gnomon LM. Parquoy puisque CE est plus grand qu'iceluy gnomon, LM (car CE outre le gnomon contient encore le parallelog. DG) aussi AD qui est egal à CE par la 36. p. 1. sera plus grand que le parallelogramme AG, du mesme parallelog. DG. Et en la mesme maniere sera demonstéré que AD est plus grand que tous autres parallelog. qui seront apliquez selon la mesme ligne droište AB, & defaillans de figures parallelogrammes semblables à CE.

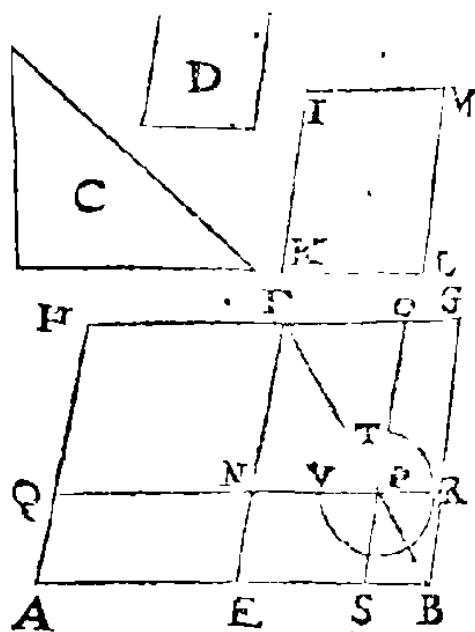
PROB. 8. PROP. XXVIII.

Sur vne ligne droište donnee, appliquer vn parallelogrâme egal à vne figure rectiligne donnee, & defaillant d'un parallelogrâme semblable à vn autre donné; mais il faut

que la figure rectiligne donnée ne soit plus grande que le parallelogramme, qui estant appliqué sur la moitié de la ligne donnée, est semblable au parallelogramme donné,

Soit la ligne donnée AB, sur laquelle il faut appliquer un parallelogramme egal a la figure rectiligne donnée C, defaillant d'un parallelogramme semblable au parallelog. donné D.

Ayant couppe AB en deux également en E, sur la moitié EB soit décrit le parallelogramme EFGB semblable & semblablement posé à iceluy D, par la 18. p. 6. Puis apres avoir acôply le parallelog. AH GB, soit tirée la diagonale BF.



- Maintenant si AF est egal à C, on a ce que l'on demande: car il est apliqué sur AB & defaut du parallelog. EG. Mais si C est plus petit que AF (car par l'hypothese il ne peut estre plus grand) il sera aussi plus petit que EG egal à iceluy AF: soit donc trouué l'excez de EG par dessus C (cette egalité ou inegalité & excez sera cogneue par ce que nous auons dit à la 45. p. 1.) lequel excez par la 25. p. 6. soit reduit en parallelog. IK LM, semblable & semblablement posé a EG: & veu que EG est plus grand que KM, il est euident que les costez EF, FG seront aussi plus grands que les costez KI, IM; parquoy diceux EF, FG soient coupez FN, FO, egaux a iceux KI, IM, afin qu'estant accompli le parallelog. NFOP, il soit egal à KM, & semblable & semblablement posé au mesme KM; & partant aussi à EG; & par consequent qu'estant tiré le diametre BF, iceux parallelog. EG, NO, soient au long d'iceluy diametre par la 26. p. 6. & apres auoir continué les costez NP OP, tant qu'il sera de besoin: Je dis que AP est le parallelog. demandé.

Car il est defaillant du parallelog. SR, lequel par la 24. p. 6 est semblable à EG, partant aussi à D. Ité puis que IL est l'excez par lequel EG excède C, & qu'à iceluy excez est egal NO Il est euident que le gnomon TV sera egal à la figure C. Mai

ioustant donc LP commun, AN sera egal au gnomon QR, lequel est egal au rectiligne C. (car puisque HK, c'est à dire LM est egal au rectiligne C & à EG ensemble: si on oste EG cōmun, resteront le gnomon QR & le rectiligne C egaux) donc aussi AN sera egal au rectiligne C. A la ligne droite AB a donc esté appliqué le parallelogramme AN egal au rectiligne C, excedant du parallelogramme OP, qui est semblable a vn autre donné D: ce qu'il falloit faire.

PROB. 10. PROP. XXX.

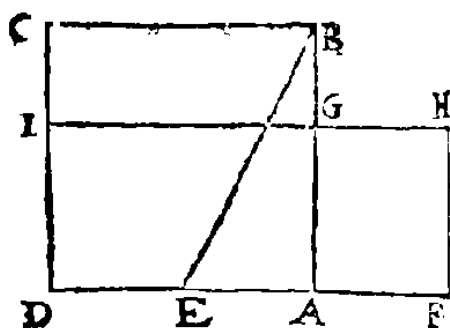
Couper vne ligne droite donnee en la moyenne & extreme raison.

Soit la ligne droite dōnee AB laquelle il faut couper en la moyēne & extreme raison.

Soit donc icelle coupee au point G, de telle façon que le quarré de la partie AG soit egal au rectangle de la toute AB, & de la partie GB; comme il a esté enseigné en la 11.

p. 1. Je dis que en G, AB sera coupee en la moyenne & extreme raison.

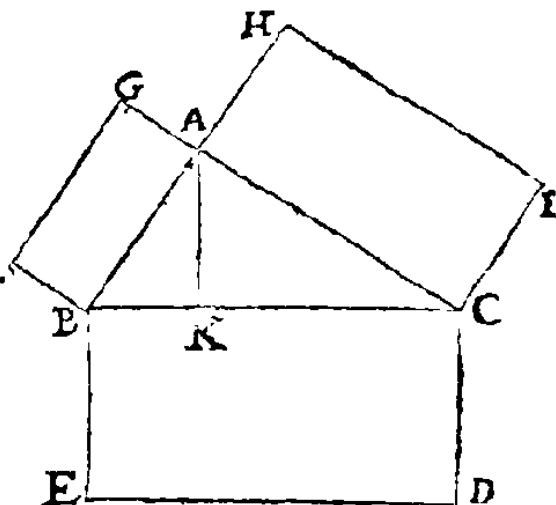
Car puis que le quarré de AG est egal au rectangle de AB & GB, les trois lignes AB, AG, & GB, serōt continuellement proportionnelles, par la 17. p. 6. c'est à dire que la toute AB sera au plus grand segment AG, comme AG au plus petit segment GB; & par la 3. d. 6. AB est coupee en G, en la moyenne & extreme raison.



THEOR. 21. PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure descrite sur le coste qui soustient l'angle droit, est egale aux deux autres figures qui luy sont semblables, & semblablement posées sur les deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC, ayant l'angle BAC droit. Je dis que la figure descrite sur le costé BC qui soustient l'angle droit, est egale aux deux autres figures semblables, & semblablement posees sur les deux autres costez AB, & AC.

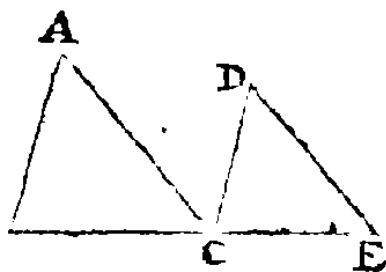


Car si du point A, qui fait l'angle droit, on mene la perpendiculaire AK, par la 8. p. 6. elle fera deux triangles equiangles entr'eux, & au total: ainsi les trois triangles BAK, CAK, & ABC seront semblables par la 4. p. 6. & 1. d. 6. & par la 19. p. 6. ils seront l'un à l'autre en raison doublee des costez de mesme raison AB, BC, CA. Pareillement par la 20. p. 6. les trois figures AF, BD & AI estant semblables & semblablement posees, elles seront aussi l'une à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison AB, BC, CA, qui sont les mesmes costez des triangles, & par la 11. 5. les rectilignes AF, BD, AI, seront entr'eux, comme les triangles BAK, BAC, CAK entr'eux: mais le triangle BAC, est egal aux deux autres: donc la figure BD descrite sur BC, sera aussi egale aux deux autres: ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ont deux costez proportionaux à deux costez, & sont disposez faisant vn angle, tellement que les costez de mesme raison soient parallelz; les deux autres costez se rencontreront directement.

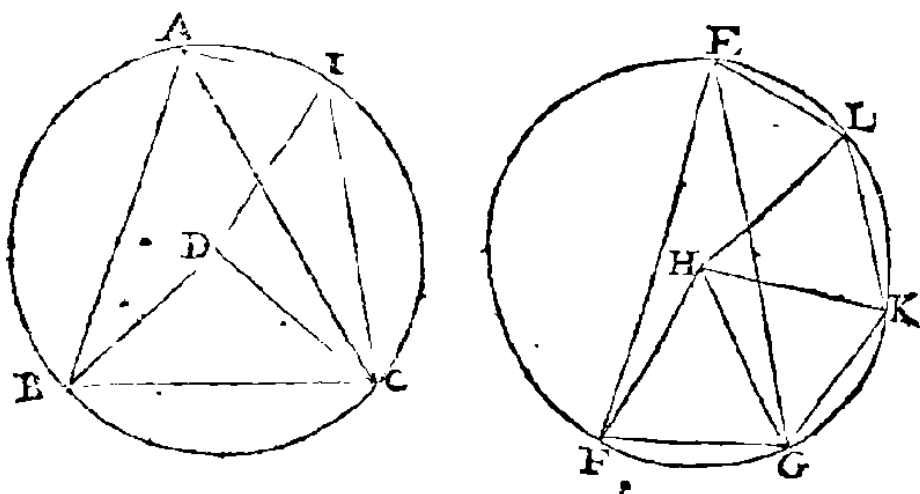
Soient deux triangles ABC, & CDE, ayans les costez BA & AC proportionaux aux costez CD & DE, disposez de telle façon qu'ils facent l'angle ACD, & que BA soit parallele à CD, & AC à DE: je dis que BC & CE se rencontreront directement.



Car BA & CD estans paralleles, l'angle ACD sera egal à son alterne A, par la 29. p. 1. aussi AC estant parallele à DE, l'angle D sera egal à son alterne ACD : ainsi l'angle D sera egal à l'angle A, & par la 6. p. 6. les deux triangles seront equiangles; donc l'angle ACD estant egal à l'angle A, l'angle DCE à l'angle B, il est evident que les trois angles au point C, seront egaux aux trois angles du triangle BAC, c'est à dire à deux droits par la 32. p. 1. & par la 14. p. 1. les deux lignes BC, CE se rencontreront directement : ce qu'il falloit prouver.

THEO. 23. PROP. XXXIII.

Aux cercles égaux, les angles tant au centre qu'en la circonference, sont entr'eux, comme les circonférences qui les soustienent. Les secteurs sont aussi de même entr'eux.



Soient deux cercles égaux ABC, & EFG, desquels les centres sont D, & H, & soient les deux angles au centre BDC, & FHG, ou en la circonference BAC, & FEG; ie dis que comme la circonference BC est à la circonference FG, ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG, & l'angle BAC à l'angle FEG.

Qu'il ne soit ainsi, soient pris les deux arcs GK & KL égaux à FG: item CI egal à BC, & soient menées les lignes IA, ID, KH, HL, KE, LE, les trois angles FHG, GHK & KHL sont égaux entr'eux, par la 27. p. 3. ainsi l'arc FGK est

autât multiplie de l'arc FG, cōme l'angle FHL l'est de FHG: & par le mesme discours, l'arc BCI est autant multiplie de l'arc BC, comme l'angle BDI, l'est de BDC: partant si l'arc BCI est egal a l'arc FGKL, l'angle BDI sera egal à l'angle FHL par la 27. p. 3. si plus grand, plus grand, si plus petit plus petit; & par ainsi BCI, BDI estans equemultiplices de BC premiere grandeur, & BDC 3. & FGKL, FHL equemultiplices de FG, FHG 2. & 4. par la 6. d. 5. comme l'arc BC à l'arc FG, ainsi l'angle BDC a l'angle FHG: le mesme discours est des angles en la circonference.

Pour la seconde partie. Je dis aussi, que le secteur BDC est au secteur FHG, comme l'arc BC est a l'arc FG.

Car on prouvera aisement (demeurant la mesme construction) que les deux arcs BC, CI estans esgaux que leurs cordes seront egalles, & les deux sections egalles: mais les deux triangles BDC, CDI sont aussi egaux par la 4. p. 1. l'un adjoûtant donc les deux segmens egaux; par les communes sentences, les deux secteurs BDC, CDI seront egaux, & l'arc BCI sera autant multiplie de l'arc BC, que le secteur BDI le sera du secteur BDC: & par mesme discours, l'arc FGKL sera autât multiplie de l'arc FG que le secteur FHL le sera du secteur FHG; la cōclusion est aisée par la 6. d. 5. comme en la premiere partie.

COROLLAIRE.

De cecy s'ensuit que comme le secteur est au secteur, ainsi l'angle est à l'angle. Car l'une & l'autre à la mesme raison que l'arc a l'arc; & partant par la 11. p. 5. ils seront aussi entr'eux en la mesme raison.

Il est aussi evident que comme un angle au centre, est a quatre angles droits, ainsi est l'arc soustendant iceluy angle, a toute la circonference, & au contraire que comme quatre angles droits sont à un angle au centre, ainsi toute la circonference est a l'arc soustendant iceluy angle.

Car comme un angle au centre est a un angle droit au centre, ainsi l'arc qui soustient iceluy angle, est au quadrant qui soustient l'angle droit par la 33. p. 6. Parquoy comme l'angle au centre sera au quadruple de l'angle droit, c'est a sçavoir a 4. angles droits, ainsi l'arc soustendāt iceluy angle, sera au quadruple du quadrant, sçavoir est a toute la circonference, par les choses que nous avons demor-

strées a la fin du scholie de la 22. p. 3. Puis apres d'autât qu'un angle au centre est a quatre angles droits, comme l'arc qui soustient icelui angle, est a toute la circonference; aussi en permutant comme quatre angles droits seront a un angle au centre, ainsi toute la circonference fera a l'arc soustendant l'angle du centre: ce qui a esté prop sé.

Fin du sixiesme Element.





E L E M E N T

S E P T I E S M E .

D E F I N I T I O N S .



Unité, est selon laquelle toutes choses qui sont, est appelée vne.

Euclide ayant traitéés 6. liurès precedents de la premiere partie de Geometrie, sçauoir est de celle là qui considere les plans, auparauant que venir à l'autre partie, laquelle traite des solides; il explique en ce 7. liure & es deux suivans les proprietéz & affections des nombres, pour puis apres traiter au 10. liure des lignes commensurables & incommensurables, necessaires pour auoir entiere & parfaicte cognoissance des proprietéz des solides. Euclide definit donc icy que c'est qu'unité, & dict que c'est cela selon quoy toute chose qui est se nomme vne: & est à noter que tout ainsi que en la Geometrie le poinct n'a aucune partie, aussi es nombres l'unité ne reçoit aucune diuision.

2. Nombre, est vne multitude d'vnitez assemblees.

C'est à dire qu'estans assemblees plusieurs vnitez ensemble, leur aggrégé s'appelle nombre.

3. Partie est vn petit nombre tiré d'vn plus

grand, lors que le petit mesure le plus grand

C'est à dire que lors qu'un nombre en mesure un plus grand, il est dit partie d'iceluy : Et ceste partie est appelée aliquotte ; tellement que 2. est dit partie aliquote de 4. Et se nomme $\frac{1}{2}$; Et 5. est dit $\frac{1}{5}$ de 15. pource que 5. mesure 15. par 3. ainsi 4. qui mesure 28. par 7. est dit $\frac{1}{7}$, &c.

4. Et parties, est lors que le plus petit ne mesure pas le plus grand.

C'est à dire que lors qu'un petit nombre n'en mesure pas un plus grand, il n'est pas dit partie d'iceluy, mais parties Comme 6. est dit parties de 9 : Car il ne le mesure pas précisément, mais est 2. parties d'iceluy, sçavoir est $\frac{2}{3}$, ainsi 12. est parties de 16. sçavoir $\frac{3}{4}$ pource que 4. qui mesure l'un & l'autre nombre est 3. fois en 12. Et 4. fois en 16. aussi 15. est parties de 24. sçavoir est $\frac{5}{8}$, puis que 3. qui est comme mesure, est 3. fois en 15. Et 8. fois en 24. &c.

5. Multiplie, est vn grand nombre composé d'un petit, lors que le plus petit mesure le plus grand.

6. Nombre pair, est celuy qui peut estre diuisé en deux également.

7. Mais l'impair, est celuy qui ne peut estre diuisé en deux également : ou bien celuy qui est different du nombre pair de l'unité.

8. Nombre parement pair, est celuy qu'un nombre pair mesure par vn nombre pair.

Comme 32. lequel 8. mesure par 4. est dit nombre parement pair.

9. Et parement impair, est celuy qu'un nombre impair mesure par vn nombre pair.

Comme 42. lequel 7. mesure par 6. est dit nombre parement impair.

10. Mais nombre impairement impair, est celuy qui est mesuré d'un nombre impair par un nombre impair.

Comme 15. lequel est mesuré de 5. par 3. est dit nombre impairement impair.

11. Nombre premier, est celuy qui est mesuré par la seule unité.

*C'est à dire, que si un nombre n'est mesuré par aucun autre nombre, mais seulement par l'unité, il est nombre premier, & tels sont tous ceux-
2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Car la seule unité mesure iceux.*

12. Nombres premiers entr'eux, sont ceux-là qui n'ont autre commune mesure que l'unité.

13. Nombre composé, est celuy qui est mesuré par quelque nombre.

14. Mais les nombres composez entr'eux, sont ceux-là qui ont autre commune mesure que l'unité.

15. Un nombre est dit multiplier un autre, lors que le multiplie est autant de fois composé, qu'il y a d'unités au multipliant.

16. Lors que deux nombres se multiplient l'un l'autre, le produit est appelé plan, & les multipliers sont les costez d'iceluy plan.

17. Lors que trois nombres se multiplient l'un l'autre, le produit est appelé solide, & les multipliers sont les costez d'iceluy.

17. Nombre quarré, est celuy qui est également egal : ou bien c'est le produit de deux nombres egaux.

19. Nombre cube, est celuy qui est egalem^{ent} egal: ou bien c'est le produit de trois nombres egaux.

20. Les nombres sont proportionnaux, lors que le premier est autant multiplie, ou mesme partie, ou mesmes parties du second, comme le troisieme du quatrieme.

Selon ceste vulgaire def. d'Euclide ne sont point compris es nombres prop. ceux qui sont en raison superparticuliere, superpartiente multiple superparticuliere, & multiple superpartiente. Car en toutes ces proportions, le premier nombre n'est pas autant multiplie du second, que le 3. du 4. ny aussi mesme partie, ou parties: Mais le premier contient autant le 2. que le 3. le 4. & en outre une mesme partie ou parties d'iceluy: comme il est evident par les choses que nous auons enseignees à la 4. d. 5. C'est pourquoy Clavius (& à bon droit) a estimé que ceste vulgaire def. d'Euclide a esté corrompue, puis qu'elle manque & imparfaite: laquelle imperfection Dounot a encore augmentee en sa traduction, en ostant equemultiplie, tellement qu'en se'lon sa dite traduction, on ne peut pas conclurre que les nombres qui sont en raison multiple soient proportionnaux, comme veut la vulgaire def. Pour donc rendre ceste 20. def. gener. le a tous genres de proportions, comme a fait Clavius, nous la poserons telle que l'on fait. Les nombres sont proportions, lors que le premier est autant multiplie, ou bien mesme partie, ou mesmes parties du 2. que le 3. du 4. Ou bien quand le premier contient egalem^{ent} le 2. & le 3. le 4. & en outre une mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy. Ainsi ces nombres 6. 2. 9. 3. sont proportionnaux, puis que le premier est autant multiplie du second que le 3. l'est du 4. c'est à sçauoir triple: Item ceux cy 4. 12. 3. 9; car le premier est la mesme partie du second que le 3. du 4. sçauoir est le tiers: item ceux cy 6. 8. 9. 12. parce que le premier est mesmes parties du second que le 3. du 4. Sont au proportionnaux ces nombres cy 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 1. 10. & 12. 5. 24. 10. Car au premier exemple le premier & 3. nombre contient une seule fois le 2. & 4. & en outre une mesme partie, sçauoir est $\frac{1}{2}$: mais au second; une seule fois & en outre mesmes parties sçauoir est les $\frac{1}{2}$: & au 3. deux fois, & encores une mesme partie, sçauoir est $\frac{1}{2}$: & au dernier, deux fois, & encores mesmes parties sçauoir est les $\frac{1}{2}$. Que si le premier nombre n'est autant multiplie ou mesme partie

me partie; ou parties du second que le 3. du 4. Ou bien que le premier ne contienne autant de fois le second que le troisieme contient le 4. Et en outre une mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy; les nombres proposez ne pourront estre appellez proportionnaux. Parquoy si 4. nombres sont posez proportionnaux, il est necessaire d'accorder que le premier est autant multiple, &c.

Or Euclide definit seulement les nombres proportionnaux, qui ont une mesme raison d'inegalité: Car de la raison d'egalité, il est euident que le premier estant egal au second, aussi le 3. doit estre egal au 4. afin que les nombres soient dits proportionnaux.

Or de ceste def. resulte apertement, que les nombres egaux ont mesme raison à un mesme, & au contraire qu'un nombre a aussi mesme raison à deux egaux: item que les nombres ayant mesme raison à un mesme, ou auxquels un mesme nombre à mesme raison, sont egaux. Car puis que les nombres egaux sont, ou equemultiplices, ou mesme partie, ou mesmes parties d'un mesme nombre; ou contiennent egaleement un mesme nombre, & en outre une mesme partie, ou parties d'iceluy. Item qu'un mesme nombre est ou equemultiplices, ou mesme partie, ou mesmes parties de nombres egaux; ou bien qu'il les contient egaleement, & en outre une mesme partie, ou parties d'iceux: il est euident par ceste def. que les nombres egaux ont mesme raison à un mesme nombre, ou un mesme à des egaux. Ce qui a esté démontré es grandeurs à la 7. p. 5.

De rechef pource que les nombres ayans mesme raison à un mesme nombre, sont ou equemultiplices d'iceluy, ou mesme partie, ou parties; ou bien ils le contiennent egaleement, & en outre une mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy: Item puis que un mesme nombre ayant mesme raison à quel u'uns, est ou equemultiplice d'iceux, ou la mesme partie, ou parties; ou bien il les contient egaleement, & en outre une mesme partie, ou mesmes parties d'iceux; selon ceste def. il est manifeste que les nombres qui ont mesme raison à un mesme nombre, ou auxquels un mesme nombre à mesme raison, sont egaux entr'eux. Ce qui a aussi esté démontré en toutes sortes de grandeurs en la 9. p. 5.

Par mesme raison on collige, que de deux nombres inegaux, le plus grand a plus grande raison à un mesme nombre, que le plus petit: & au contraire qu'un mesme nombre à plus grande raison à un petit nombre, qu'à un plus grand. Item que des nombres inegaux, celui qui a plus grande raison à un mesme, est le plus grand: & celui auquel un mesme nombre a plus grande raison, est le plus petit: Toutes lesquelles choses sont claires, & euidentes, si ceste def. est bien entendue. Cery a aussi esté démontré es grandeurs au 5. liure prop. 8, & 10.

21. Les nombres semblables plans ou solides, sont ceux qui ont les costez proportionnaux.

Comme 24. & 6 sont nombres plans semblables, pource que 6. & 4. costez de cestuy là sont proportionnaux à 3. & 2. costez de celuy cy ainsi aussi 192. & 24. sont nombres solides semblables, pource que 8. 6. 4. costez de cestuy-là sont prop. à 4. 3. 2. costez de celuy cy.

22. Nombre parfait, est celuy qui est egal à toutes ses parties aliquotes.

Comme 6. est dict nombre parfait, pource que les parties aliquotes d'iceluy l, sçavoir 1. 2. 3. prises ensemble, luy sont egales. Ainsi aussi 28. duquel les parties aliquotes, sçavoir est 1. 2. 4. 7. 14. estans prises ensemble, luy sont egales; sera dict nombre parfait.

COM M V N E S S E N T E N C E S.

1. **L** Es nombres equemultiplices de nombres egaux, ou d'un mesme nombre, sont egaux entr'eux.
2. Et ceux desquels un mesme nombre est equemultiplice, ou desquels les equemultiplices sont egaux, sont aussi egaux entr'eux.
3. Mais les nombres qui sont vne mesme partie, ou mesmes parties de nombres egaux, ou d'un mesme, sont egaux entr'eux.
4. Et ceux desquels un mesme nombre, ou nombres egaux, sont mesme partie, ou mesmes parties; sont aussi egaux entr'eux.
5. L'unité mesure tout nombre par les unittez qui sont en iceluy, c'est à dire par le mesme nombre.

6. Tout nombre mesure soy-mesme par l'vnité.
7. Si vn nombre multipliant vn nombre, en produit quelqu'un, le multipliant mesurera le produit par le multiplié : mais le multiplié par le mesme multipliant.
8. Si vn nombre mesure vn nombre ; aussi celuy par lequel il le mesure, mesurera le mesme par les vnitez^{es} qui sont au mesurant, c'est à dire par iceluy nombre mesurant.
9. Si vn nombre mesurant vn nombre, multiplie celuy par lequel il le mesure, ou est multiplié par iceluy, fera produit celuy lequel est mesuré.
10. Le nombre qui en mesure deux ou d'auantage, mesure aussi le composé d'iceux.
11. Mais celuy qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré.
12. Et celuy qui mesure le tout, & le retranché, mesure aussi le reste.

THEOR. I. PROP. I.

Si de deux nombres inegaux proposez, on soustraiçt tousiours alternatiuemēt le plus petit du plus grand, & que le petit residu ne mesure iamais le plus grand iusques à ce qu'on ait pris l'vnité; les nombres proposez au commencement, seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inegaux AB, & CD, si on soustraiet continuellement le plus petit du plus grand, & que le plus petit residu ne mesure iamais le plus grand, iusques a ce qu'on ait pris l'vnité: Je dis qu'iceux nombres AB, & CD seront premiers entr'eux.

A....5 F..2 G..1
C...3 H..2 D
E..2

Autrement s'ils ne sont premiers, ils seront composez, & par la 14. d. 7. ils seront mesurez par quelque nombre: soit iceluy E commune mesure à tous les deux: ainsi CD plus petit nombre estant soustraiet de AB, soit le reste FB plus petit que CD. Item FB estant soustrait de CD, soit le reste HD plus petit que FB. Pareillement HD estant soustrait de FB, soit le reste GB, vnité. Puis donc que E mesure CD, il mesurera aussi AF; & d'autant qu'il mesure le tout AB, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le residu FB, lequel mesure CH; & partant par la 11. com. sent. E mesurera aussi CH; & puis qu'il mesure le tout CD, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste HD, & par consequent FG: mais il mesure aussi FB; E mesurera donc pareillement l'vnité restante GB, sçauoir le tout la partie: ce qui est impossible. Donc AB & CD ne peuvent estre mesurez par aucun nombre, ains par l'vnité seulement: & partant ils sont nombres premiers entr'eux par la 12. d. 5.

S C H O L I E.

Commandin ayant demonstté la conuerse de ceste prop. vient à suiuant.

Estans proposez deux nombres composez entr'eux, soit soustrait tousiours alternatiuement le moindre du plus gr. la soustraction ne paruiendra iusques à l'vnité.

Ce qui est euidet, car si on paruenoit à l'vnité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux, comme il a esté demonstre en la prop. cy dessus: Et ils sont posez composez.

Or il est manifeste par ces choses, qu'estans proposez deux nombres, nous cognoissons facilement s'ils sont premiers entr'eux, ou non. Car estant faite la soustraction, comme dit est, si on parvient iusques à l'vnité, esdits nombres proposez seront premiers entr'eux: mais si on parvient, ils seront composez.

PROB. I. PROP. II.

Trouuer la plus grande commune mesure

de deux nombres proposez non premiers entr'eux.

Soient deux nombres non premiers AB, & CD, desquels il faut trouver la plus grande commune mesure.

Soit soustrait le plus petit CD, tant A..... 9 E..... 6 B
de fois que faire se pourra du plus grand C..... 6 F... 3 D
AB: s'il reste quelque chose comme EB, G.... 4

soit soustraict continuellement le plus petit du plus grand, iusques a ce qu'on parviene à vn nombre qui mesure le precedent; ce qui aduiendra necessairement: car si on paruenoit iusques à l'vnité, les nombres AB, CD, par la 1. p. 7. seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Donc FD mesurant EB, il ne reste rien. Je dis que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD.

Qu'ainsi ne soit. Je dis en premier lieu que FD mesure AB, & CD: Car mesurant EB, il mesure aussi CF; & d'autant qu'il se mesure soy-mesme par la 10. com. sent. il mesure le tout CD: Pareillement il mesurera AE; & puis qu'il mesure aussi EB, il mesurera le tout AB; ainsi il mesure tous les deux AB, & CD.

Je dis secondement que FD est la plus grande commune mesure de AB, & CD. Autrement soit vn plus grand nombre, sçavoir G, qui mesure tous les deux nombres AB, & CD: & puis qu'il mesure CD, il mesurera aussi AE, & mesurant le tout AB par la 12. com. sent. il mesurera aussi le residu EB; & par consequent il mesurera CF. Item mesurant le tout CD, il mesurera aussi le reste FD, sçavoir vn plus grand nombre mesurera vn plus petit: ce qui est impossible. Donc FD est la plus grande commune mesure entre AB, & CD.

C O R O L L A I R E.

De cecy est euident que qui mesure deux nombres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure, puis qu'il a esté demonsté que si G mesure AB & CD, il mesurera aussi FD leur plus grande commune mesure.

S C H O L I E.

Par les choses cy dessus dictes, nous cognoissons facilement si trois

ou d'avantage de nombres sont premiers entr'eux, ou non. Car soit les trois nombres A, B, C . Premièrement donc soit ven par ce qui est dit à la 1. p. 7. si les deux nombres A & B sont premiers entr'eux, ou non : Que s'ils sont premiers, il est evident que les trois nombres A, B, C , ne se ront composez entr'eux. Mais si A & B estoient composez entr'eux, soit trouuee par la 2. p. 7. leur plus grande commune mesure D , que si elle mesure aussi le nombre C , il est manifeste que les trois nombres A, B, C sont composez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune mesure.

Que si D plus grande commune mesure de A & B , ne mesure C ; C & D seront premiers entr'eux, ou non: S'ils sont premiers, les trois nombres A, B, C , ne seront composez entr'eux, mais premiers : Car s'ils estoient composez, ils auroient une commune mesure, laquelle mesurerait aussi le nombre D plus grande commune mesure de A & B , par le corol. de ceste prop. & partant C & D ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Mais si C & D ne sont premiers entr'eux, les trois nombres A, B, C seront composez entr'eux. Car estant trouuee par la 2. p. 7. E plus grande commune mesure de C & D ; iceluy nombre E mesurera aussi A & B par la 11. com. sent. puis que D les mesure. Parquoy veu que le mesme E mesure aussi C ; il mesurera les trois A, B, C ; & partant iceux seront composez entr'eux. Ce qui estoit proposé.

En la mesme maniere sera cogneu si d'avantage de nombres que trois sont premiers entr'eux ou non. Car s'il y a 4. nombres donnez, il en faudra esprouver premierement trois; si cinq, quatre. &c. & acheuer comme nous au. ns dict, de trois nombres proposez.

PROB. 2. PROP. III.

Trouuer la plus grande commune mesure de trois nombres proposez, non premiers entr'eux.

Soient trois nombres non premiers entr'eux A, B, C , desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure.

A 12	D ...4
B 8	E ...2
C 6	F ...3

Soit tirée la plus grande commune mesure des deux A, & B, par la 2 p. 7. sçavoir D. Si D mesure aussi C, nous auons ce que nous demandons : Car si vn plus grand nombre que D mesure A, B, C; par le corol. de la prop. preced. il mesurerait aussi D, plus grande mesure de A, & B, sçavoir est vn grand nōbre, vn moindre: ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'hypothese que par le corol. de la 2 p. 7. donc par icelle mesme proposition soit trouuee E plus grande commune mesure entre C & D. Il est euident par la 11. com. sent. que E mesurera tous les trois nombres, A, B, C, d'autant qu'elle mesure C, & D, lequel mesure B, & A. Je dis d'auantage que E est aussi la plus grande mesure cōmune. Autremēt si elle n'est la plus grande, en soit vne autre plus grande, sçavoir F s'il est possible: Or mesurant A, & B, elle mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure par le corol. de la 7. p. 7. & par la mesme raison mesurant C, & D, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure E, sçavoir le plus grand, le plus petit, ce qui est impossible. Donc E sera la plus grande commune mesure des trois nombres A, B, C.

C O R O L L A I R E.

Par cecy est manifeste qu'un nombre qui en mesure trois, mesurera aussi la plus grande commune mesure d'iceux.

En la mesme maniere, estans donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux, sera trouuee leur plus grande commune mesure, & aura aussi lieu le mesme corol.

T H E O R. 2. P R O P. I I I I.

Tout nombre moindre, est partie ou parties de tout nombre plus grand.

C'est à dire que de deux nombres inegaux le plus petit est partie aliquote, ou aliquante du plus grand.

Soient deux nombres A, & B inegaux.

Je dis que B plus petit, est ou partie aliquote, ou aliquante de A.

A.....6 B.....4

B...3 B.....5

Car ou B mesure A, ou non. S'il le mesure, il est partie ali-

quote par la 3. d. 7. s'il ne le mesure pas, ou bien A & B, seront entr'eux composez, ou premiers: si composez, ils auront une commune mesure par la 4. d. 7. si premiers, ils auront l'unité pour commune mesure par la 12. d. 7. ainsi B contiendra certain nombre d'unités semblables aux unités qui sont en A.

THEOR. 3. PROP. V.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart; le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

Soient quatre nombres A, B, C, D & EF, desquels A est telle partie de B, C, que D est de EF. Je dis que A & D ensemble sont telle partie de B, C & E, F ensemble, comme A l'est de B, C.

A... 3
B. 3 G... 3 C
D... 4
E... 4 H... 4

Car puis que A est telle partie de B, C, que D de E, F, B, C contiendra A autant de fois, comme E, F contiendra D par la 3. d. 7. Soit donc B, C divisé en autant de parties qu'il contient de fois A, sçavoir en B, G & G, C; E, F se divisera aussi en autant de parties égales à D, sçavoir en E, H & H, F: & d'autant que B, G est égal à A, & E, H à D; si à choses égales on adiouste choses égales, sçavoir A & B, G, à D & E, H; A & D ensemble, seront égaux à B, G & E, H ensemble: le mesme se dira de A, G, C, D, & H, F; & partant autant de fois que B, C contient A, autant de fois B, C & E, F ensemble, contiendront A & D ensemble: ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second que le tiers du quart; le premier & tiers ensemble, seront telles parties du second & quart ensemble, que le

premier du second.

Soient quatre nombres AB, C, DE, & F A ... 3 G ... 3 B
desquels le premier AB contient autant de C 9
parties du second C, que le 3. DE est du 4. F. D ... 4 H ... 4 E
Je dis que AB, & DE ensemble, contiennent F 12
autant de parties de C & F ensemble, que AB de C.

Car pour autant que AB contient telles parties de C, que DE en contient de F ; estans AB & DE diuisez aux parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la 5. p. 7. AG, & DH ensemble, seront telle partie de C & F ensemble, comme AG est de C. Item GB & HE ensemble, seront telle partie de C & F ensemble, comme GB seul est de C seul ; ainsi AE & DE seront ensemble deux fois telle partie de C, & F ensemble, comme AB estoit de C : ce qu'il falloit démonstrer.

THEO. 5. PROP. VII.

Si vn nombre est telle partie d'un autre nombre, que le retranché du retranché ; le reste sera aussi telle partie du reste, comme le tout est du tout.

Soit AB telle partie de CD, que le A 4 E .. 2 B
retranché AE est du retranché CF. G 4 C 8 F 4 D
Je dis que le reste EB, sera telle partie du reste FD, que le tout AB est du tout CD.

Car estant pris le nombre GC, de telle façon que telle partie du retranché AE est du retranché CF, telle partie le reste EB soit d'iceluy GC, par la 5. p. 7. les deux AE & EB ensemble seront telle partie de GC & CF ensemble, qu'est AE de CF, c'est à dire qu'est le tout AB du tout CD : & partant puisque AB est telle partie du nombre GF que de CD : iceux nombres GF, CD seront egaux entr'eux par la 4. com. sent. en ostant donc le nombre commun CF, les demeurans GC & FD seront egaux ; & partant le reste EB sera telle partie du reste FD, que de GC : c'est à dire que le tout AB du tout CD, puisque EB a esté posé telle partie de GC, que AE de CF, qui par l'hypothese est la mesme que AB de CD.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si vn nombre contient telles parties d'un autre nombre, que le retranché du retranché, aussi le reste contiendra telles parties du reste, que le tout du tout.

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD, que le retranché AE du retranché CF: Je dis que le reste EB contiendra telles parties du reste FD, que le total AB, du total CD.

Car si on pose GA contenir telles parties de FD, que AE de CF, ou AB de CD, par la 6. p. 7. les deux nombres GA, AE ensemble seront telles parties des deux CF, FD ensemble (c'est à dire le tout GE du tout CD) que GA de FD, ou AB de CD: & partant puis que GE & AB contiennent telles parties de CD, l'un que l'autre, ils seront égaux; parquoy en ostant le nombre commun AE, resteront GA & EB égaux. Mais GA contient telles parties de FD, que AB de CD: Donc aussi EB contiendra telles parties d'iceluy FD, que AB de CD, ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second que le tiers du quart, aussi en changeant le premier sera telle partie, ou telle parties du tiers, que le second du quart.

Soit A telle partie de BC que D est de EF. Je dis qu'en changeant, A sera telle partie, ou contiendra telles parties de D, que BC de EF, pourueu que A & BC soient plus petits que D & EF chacun au sien.

Car d'autant que par l'hypothese A est telle partie de BC comme D de EF; BC contiendra autant de parties égales à

A... 3
B...3 G...3 C
D... 4
E...4 H...4

que EF d'egales à D: soit donc diuisé le nombre BC en parties BG, GC egales a A; & le nombre EF en parties EH, HF egales a D. Et puis que A est posé moindre que D, par la 4. p. 7. A est partie de D, ou contient parties d'iceluy, & consequemment tous les autres BG de EH, & GC de HF: mais parce que BG est egale a GC, & EH à HF; BG sera telle ou telles parties de EH, que GC de HF; & partant par la 5. ou 6. p. 7 BG, GC ensemble, c'est a dire BC, sera telle ou telles parties de EH, HF ensembles, sçauoir EF, que BG de EH, c'est à dire que A de D. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart, aussi en changeant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient 4. nombres A B, C, D E, & F, desquels AB contienne telles parties de C, que DE de F. Je dis qu'en changeant, AB sera telle ou telles parties de D E, que C est de F, moyennant que AB & C soient plus petits que DE & F, comme en la precedente.

A..2 G..2 B
C..... 6
D.....5 H.....5 E
F 15

Car AB estant diuisé en AG, GB parties de C; & DE en D H, HE parties de F; AB sera diuisé en autât de parties que DE, & tant AG que GB sera telle partie de C, que DH & HE de F: Donc en changeant par la 9. p. 7. AG sera telle partie ou parties de DH, & GB de HE, que C de F; & partant AG sera telle partie, ou parties de DH, que GB de HE. Donc par la 5. ou 6. p. 7. AG, GB ensemble, sçauoir est AB, sera aussi telle partie, ou parties de DH, HE ensemble, c'est à dire DE, que C de F: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9. PROP. XI.

Si le tout est au tout, comme le retranché au

retranché; aussi le reste sera au reste, comme le tout au tout,

Si le tout AB est au tout CD, comme le A....4 E...2 B
retranché AE est au retranché CF: ie dis que C.....6 F...; D
le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB au tout CD.

Car puis que AB est à CD, comme AE, à CF; AB la plus petite, sera telle ou telles parties de CD, que AE de CF, & par la 7. ou 8. p. 7. le reste EB sera telle ou telle parties du reste FD, que le tout du tout: & partant par la 20. d. 7. le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB au tout CD. ce qu'il falloit prouver.

PROB. 10. PROP. XII.

Si autant de nombres qu'on voudra sont proportionaux; comme l'un des antecedans sera à l'un des consequens, ainsi tous les antecedans seront à tous les consequens.

Soient tant de nombres qu'on voudra A.....6 C....4 E.
proportionaux A, B; C, D; E, F; B.....9 D.....6 F.;
c'est à sçavoir qu'il y ait telle raison de A à B, que de C à D
& que de E à F. Je dis que tous les antecedans A, C, E, ensemble, seront à tous les consequens B, D, F ensemble, comme A l'un des antecedans à B l'un des consequens.

Car puis que les susdits nombres sont proportionaux, & A C, E, sont moindres que B, D, F; par la 10. d. 7. A sera telle, ou telles parties de B, que C de D, & E de F; & par la 5. ou 6. p. A & C ensemble seront telle, ou telles parties de B & D ensemble, que A de B, ou E de F. Derechef puis que A, C ensemble comme vn seul, est telle partie, ou parties de B, D, ensemble comme vn seul, que E de F, aussi par les mesmes prop. A, C ensemble avec E, seront telle ou telles parties de B, D ensemble avec F, que A de B; parquoy par la 20. d. 7. tous les antecedans A, C, E ensemble, auront mesme raison à tous les consequens B, D, F ensemble, que A à B. ce qu'il falloit prouver.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si quatre nombres sont proportionnaux :
aussi en changeant ils seront proportionnaux.

Soient 4. nombres proportionnaux A, B, C, D, sçavoir qu'il y ait telle raison de A à B, que de C à D : Je dis qu'en changeant, il y aura telleraison de A à C, que de B à D.

A.....	12
B.....	8
C.....	9
D.....	6

Car puis que comme A est à B ainsi C à D par la 10. d. 7. D plus petit sera telle ou telles parties de C, que B est de A, & partant en changeant par la 9. ou 10. p. 7. D. sera telle ou telles parties de B, que C est de A, & par la 20. d. 7. convertie, il y aura mesme raison de A à C que de B à D. Ce qu'il falloit démonstrer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un costé, & autant d'un autre, qui se prennent deux à deux, & en mesme raison ; iceux en raison egale, seront aussi en mesme raison.

Soient d'une part tant de nombres qu'on voudra A, B, C, & autant d'autre part D, E, F, & que de deux en deux il y ait telle raison de A à B, que de D à E, & de B à C que de E à F. Je dis qu'en raison egale, il y aura telle raison de A à C, que de D à F.

A.....	9	D...	6
B.....	6	E....	4
C...3		F...2	

Car puis que comme A est à B, ainsi D à E, en changeant par la 13. p. 7. comme A sera à D, ainsi B à E : semblablement aussi puis que comme B est à C, ainsi E à F, en changeant comme B sera à E, ainsi C à F. Donc comme A sera à D, ainsi C sera à F (car puis que A est à D, & C à F, en mesme raison que B à E, aussi A sera à D en la mesme raison que C à F, comme seraincontinent démontré) & partant en changeant, comme A sera à C, ainsi D sera à F : ce qu'il falloit prouver,

L E M M E.

Or que A estant à D , & C à F , en mesme raison que B à E , ils soient de mesme raison entr'eux, nous le demonst rerons ainsi. D'autant que comme A est à D , ainsi B à E ; E plus petit sera telle ou telles parties de B , que D de A : Derechef puis que comme B à E , ainsi C à F ; F moindre sera telle, ou telles parties de C , que E de B : parquoy F sera aussi telle ou telles parties de C , que D de A & partant par la 20.d.7. conuertie, com ne A sera à D , ainsi C sera à F . Donc les raisons des nombres qui sont de mesme a une, sont aussi de mesme entr'elles.

S C H O L I E.

Ce Lemme respond à la 11.p.5. Dounot se sert d'icelle 11.p.5. & d'autres prop du mesme liure pour appuyer les demonstrations des 7. 8. & 9. liures: mais il est euident qu'Euclide a voulu distinguer le nombre d'avec la grandeur, puis que plusieurs propositions demonstrees es grandeurs au 5.liure, sont derechef demonstrees en nombres 7.8.& 9.liures: & partant ne se doiuent appuyer les demonstrations des prop.de ceux cy sur celles de celuy-là. Ce qu'a bien aussi reconnu Dounot sur la premiere prop.du 7.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si l'vnité mesure quelque nombre autant de fois qu'un tiers mesure un quart; aussi en changeant le second mesurera le quart autant de fois que l'vnité mesure le tiers.

Soit l'vnité A mesurant autant de fois BC , que D mesure EF : Je dis qu'en changeant BC mesurera EF , comme A mesure D .

$A. 1$
 $B. 1 G. 1 H. 1 C$
 $D. 2$
 $E. 1 I. 2 K. 1 F$

Car par l'hypothese BC estant diuise par vnitez, & EF par la partie de D , icelle partie D sera autant de fois en EF , com-

me A en BC, & chacune partie de EF sera egale a D, cōme chacune de BC a l'vnité, donc l'vnité BG est à la partie EI, comme GH à IK, & HC à KF : & partant par la 12. p 7. tous les antecedents BC seront à tous les consequents EF, cōme BG à EI, ou leur egaux A à D: ce qui estoit a prouuer.

THEO. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre; leurs produits seront egaux entr'eux.

Soient deux nombres A, & B, & que A multipliant B produise C, & B multipliant A produise D : Je dis qu'iceux deux produits C & D sont egaux entr'eux.

Car puis que A multipliant B produit C : B sera autant dans C, que l'vnité est en A, par la 15. d. 7. & par la 15 p 7 en changeant A sera autant de fois dans C, que l'vnité est en B Item B multipliant A, & produisant D; A sera autant de fois dedans D, qu'il y a d'vnitez en B par la mesme 15. d. 7. & nous auons prouué que A estoit autant en C, que l'vnité en B; donc A est autant en C qu'en D; & partant par la 4. com sent. C & D seront egaux entr'eux : ce qu'il falloit demoustrer.

Vnité.	
A... 3	B.... 4
C..... 12	
D..... 12	

THEOR 15. PROP. XVII.

Vn nombre multipliant deux autres, les produits seront entr'eux en mesme raison que les multipliez.

Soit le nombre A lequel multipliant les nombres B & C fasse D & E: Je dis que les deux produits D, & E, sont entr'eux, comme B à C.

Vnité.

A.. 2	
B... 3	C.... 4
D..... 6	
E..... 8	

Car par la 15. def. 7. B multiplié par A est autant de fois dans son produit F D, que l'unité est en A, & C dans son produit E comme la mesure unitaire en A : par conséquent il y aura telle raison tant de B à D, que de C à E comme de l'unité à A. Par quoy par le Lemme de la 14 p. 7. B sera à D, comme C à E, & en changeant par la 13 p. 7. comme B sera à C, ainsi D sera à E. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Deux nombres multipliant vn autre, le produit sera entr'eux, en mesme raison que les multipliers.

Soient deux nombres A & B, multipliant C, & soient les deux produits D & E: Je dis qu'iceux D & E seront l'un à l'autre comme A est à B.

A.. 3 B.. 4
C.. 2
D.....6 E.....8

Car puisque A multipliant C produit D, aussi C multipliant A produira le mesme D par la 16. p. 7. & par la mesme raison puisque B multipliant C produit E, aussi C multipliant B produira le mesme E: ainsi A & B multipliant C, c'est comme si multiplioit A & B. Or C multipliant A & B, les deux produits D & E, seront l'un à l'autre comme A est à B, par la 17 p. 7. qui estoit à prouver.

S C H O L I E.

Cela a été accommodé (après Campanus) tant ceste proposition que precedente à tant de nombres qu'on voudra; en ceste sorte.

Si vn nombre multiplie tant de nombres qu'on voudra, & quelconques nombres en multipliant quelque autre; les produits seront entr'eux en mesmes raisons que les multipliers ou multipliers.

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou étant multiplié par iceux, soient produits les nombres E, F, G. Je dis que E, F, G, sont entr'eux

A... 3
B.. 2 C... 4 D... 6
E..... 6 F..... 8 G..... 12

comme les nombres multipliez ou multiplians B, C, D; c'est à dire qui comme B est à C, ainsi E à F; & comme C à D, ainsi F à G. Car puis que E, F sont produits de A multipliant B, C, ou de B, C, multipliez par A, comme B sera à C, ainsi E sera à F par la 17. ou 18. p. 7. Semblablement pource que F, G, sont produits de A en C, D, ou de C, D par A, aussi comme C sera à D, ainsi F à G, & ainsi des autres.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres sont proportionnaux; le produit du premier & quart, sera egal au produit du second & tiers. Et si le produit du premier & quart, est egal au produit du second & tiers; iceux quatre nombres sont proportionnaux.

Soient 4. nombres proportionnaux A, B, C, D, & que le premier A multiplie par le dernier D produise E, & le second B par le tiers C produise F. Je dis que E & F sont egaux.

A 6 B 4
C ... 3 D .. 2
E 12
F 12
G 18

Qu'ainsi ne soit. Soit multiplié A par C, & le produit soit G; d'autant que A multiplié par C & D, produit G & E, il y aura telle raison de G à E, que de C à D, par la 18. p. 7. Pareillement d'autant que C multipliant A & B, produit G & F, il y aura telle raison de G à F, que de A à B, par la 17. p. 7. ou de C à D, qui sont en mesme raison que A & B. Parquoy G est à E, & G à F en mesme raison que C à D, par le lemme de la 14. p. 7. cōme G sera à E, ainsi G sera à F; parquoy G aura mesme raison à E qu'à F; & partant E & F seront nombres egaux, ainsi que nous auons dit en la 20. def.

Pour la seconde partie, soit E produit de A multiplié par D, egal à F, produit de B multiplié par C: Je dis que A est à B comme C est à D.

Car si G est produit de A multiplié par C; E & F nombres egaux auront mesme raison à G, comme nous auons dit en la 20. def. Mais il y a telle raison de G à E, comme de C à D, par la 18. p. 7. & telle raison de G à F, comme de A à B, par la 17. p. 7. & partant par le lemme de la 14. p. 7. A sera à B, comme
P

C à D : ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si trois nombres sont proportionnaux, le produit des extremes est egal au produit du milieu : & si le produit des extremes est egal à celui du milieu ; iceux trois nombres seront proportionnaux.

Cette proposition est aisée à démontrer : car en posant le nombre du milieu deux fois , afin qu'il y ait 4. nombres proportionnaux, desquels le second & tiers soient égaux ; par la précédente le produit du premier & quart, sera egal au produit du second & tiers, c'est à dire au produit du second par soy même &c.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la même raison avec iceux , mesurent également les nombres qui ont la même raison, sçavoir le plus grand , le plus grand , & le plus petit, le plus petit.

Soient deux nombres les plus petits en leur raison A & B, & deux autres nombres plus grands C & D en même raison qu'iceux A & B : Je dis que de même façon que A mesure C, aussi B mesure D.

A ... 3 B ... 4
C ... 6 D ... 8

Car puisque iceux A, B, C, D, sont proportionnaux, ils le seront aussi en changeant par la 13. p. 7. A sera donc à C, comme B à D & A & B plus petits que C & D, & par la 20. d. 7. seront même partie ou parties d'iceux C & D. Or ils ne peuvent être parties : car ils ne seroient les plus petits nombres de leur raison, comme il est aisé de prouver par la 20. def. & 13. p. 7.

Donc A est mesure partie de C, que B de D: & partant A mesure C, autant de fois que B mesure D: ce qu'il falloit démontrer.

THEO. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'un costé, & autant d'un autre, lesquels pris de deux en deux soiēt en mesme raison, la proportion estant troublée; en raison egale, ils seront proportionaux.

$$\begin{array}{ll} A \dots 4 & D \dots\dots\dots 12 \\ B \dots 3 & E \dots\dots\dots 8 \\ C \dots 2 & F \dots\dots\dots 6 \end{array}$$

Soient trois nombres d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & qu'en proportion troublée A soit à B, comme E à F, & B à C, comme D à E: Je dis qu'en raison egale A sera à C, comme D à F.

Car A étant à B, comme E à F, le produit de A multiplié par F, sera egal au produit de B multiplié par E, par la 19. p. 7. Item B étant à C, comme D à E, le mesme produit de B multiplié par E, sera egal au produit de C multiplié par D, par la mesme prop. & partant le produit de A par F, sera egal au produit de C par D, & par la 19. p. 7. il y aura telle raison de A à C, comme de D à F: ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

D'autant que de six moyens d'argumenter des proportions, l'Euclide a expliqué en grandeur, & démontré au 5. livre, il en démontre en celui-cy seulement deux en nombres. Il ne sera hors de propos de démontrer aussi en nombres les 4. autres moyens, comme on fait plusieurs Interprètes.

I.

Si quatre nombres sont proportionaux; par raison inverte, ou en changeant, ils seront aussi proportionaux.

Soit A à B comme C à D. Je dis qu'en changeant comme B à A, ainsi D à C. Car

$$\begin{array}{ll} A \dots\dots 6. & C \dots 3 \\ B \dots 4 & D \dots 2 \\ P & 1) \\ & 1 \end{array}$$

puis que comme A à B , ainsi C à D , en permutant par la 13. p. 7. comme A sera à C , ainsi B à D . Derochef puis que B est à D comme A à C , par la mesme prop. B sera à A comme D à C . Ce qui estoit propose.

II.

Si les nombres composez sont proportionnaux; iceux diuisez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à CB comme DE à FE . Je dis A 6 C 12
qu'aussi en diuisant comme AC à CB , ainsi D 4 F 8
 DF à FE . Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE . en permutant par la 13. p. 7. comme le tout AB au tout DE , ainsi le retranché CB au retranché FE : & partant par la 11. p. 7. comme le tout AB au tout DE , ainsi le reste AC sera au reste DF : c'est à dire AC à DF comme CB à FE : donc en permutant comme AC sera à CB , ainsi DF sera à FE . Ce qui estoit propose.

Par la mesme maniere nous demonsturerons comme au liure 5. l diuision conuerse & contraire de ra son. Car soit premierement comme AB à CB , ainsi DE à FE . Je dis que par diuision conuerse de ra son, comme CB à AC , ainsi FE à DF . Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE : en diuisant comme AC sera à CB , ainsi DF à FE : & en changeant comme CB sera à AC , ainsi FE sera à DF .

Soit maintenant comme AC à AB , ainsi DF à DE . Je dis par diuision contraire de ra son, que comme AC est à CB , ainsi DF à FE . Car puis que comme AC à AB , ainsi DF à DE : en changeant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF . Donc en diuisant comme C à AC , ainsi FE à DF : & en changeant comme AC sera à CB , ainsi DF à FE . Ce qui estoit propose.

III.

Si les nombres diuisez sont proportionnaux: iceux composez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à BC , comme DE à EF . Je dis qu'en A 6 B 12
composant comme AC est à BC , ainsi DF à EF . D 4 E 8
Car puis que comme AB à BC , ainsi DE à EF : en permutant par la 13. p. 7. comme AB à DE , ainsi BC à EF : & partant par la 12. p. 7. comme AB , BC ensemble à DE , EF ensemble, c'est à dire la toute AC à la toute DF , comme BC à EF : & en permutant par la 13. p. 7. comme AC à BC , ainsi DF à EF . Ce qui estoit propose.

Semblablement nous demonsturerons icy comme au 5. liure la composition conuerse & contraire de ra son. Car soit premierement comme AB à BC , ainsi DE à EF . Je dis par composition conuerse de ra son, que comme AC est à AB , ainsi DF à DE . Car veu que AB à BC , comme DE à EF : en changeant comme BC sera à AB , ainsi EF à DE : & en composant comme AC sera à AB , ainsi DF sera à DE .

Maintenant soit derech f AB a BC , comme DE a EF . Je dis que par composition contraire de raison comme AB est a AC , ainsi DE a DF : car puisque comme AB a BC , ainsi DE a EF : en changeant comme BC sera a AB , ainsi EF a DE . Donc en composa : comme AC a AB , ainsi DF a DE , & en changeant comme AB sera a AC , ainsi DE a DF .

IIII.

Si les nombres composez sont proportionnaux ; ils le seront aussi par conuersion de raison.

Soit comme AB a CB , ainsi DE a FE . Je dis que par conuersion de raison, comme AB est a AC , ainsi DE a DF . Car puis que comme AB a CB , ainsi DE a FE : en permutant par la 13. p. 7. comme le tout AB sera au tout DE , ainsi le retranché CB sera au retranché FE : & partant par la 11. p. 7. comme le tout AB au tout DE , ainsi le reste AC , au reste DF . Donc en permutant comme AB sera a AC , ainsi DE a DF . ce qui estoit proposé.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison avec iceux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B . Je dis qu'ils sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison qu'eux.

Car s'il n'est ainsi, soient C & D plus petits en la mesme raison, s'il est possible, par la 21. p. 7. ils mesureront A & B , l'un comme l'autre : qu'ils les mesurent donc par le nombre E . Donc E sera commune mesure entre A & B : ainsi ils ne seroient point premiers entr'eux, mais composez contre l'hypothese. A & B sont donc les plus petits de tous ceux qui sont en mesme raison qu'eux.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont vne mesme raison, sont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison : Je dis qu'ils sont premiers entr'eux.

A 6 D..

C..

B 5 E...

Autremēt s'ils ne sont premiers, que C les mesure tous deux s'il est possible, sçauoir A autant de fois qu'il y a d'vnitez en D ; & B autant de fois qu'il y a d'vnitez en E. Veu donc que C mesure A par les vnitez qui sont en D ; & B par les vnitez qui sont en E ; C multipliant D & E, produira A & B par la 9. com. sent. Parquoy par la 17. p. 7. il y aura mesme raison de A & B que de D à E : & partant puis que D & E sont parties d'icent A & B, ils sont moindres : ainsi A & B ne seront pas les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison : ce qui est contre nostre hypothese. A & B sont donc nombres premiers entr'eux.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, celuy qui en mesurera l vn iera premier à l autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, l'un ou l'autre desquels, sçauoir A, soit mesuré par le nombre C. Je dis que C est premier à l'autre B.

A.....6 B.....

C...3 D...2

Autrement si B & C ne sont premiers entr'eux, que D les mesure tous deux, s'il est possible. Veu donc que D mesure C, & C mesure A, par la 11. com. sent. D mesurera aussi A : mais il mesure pareillement B. Donc A & B ne sont premiers entr'eux, contre l'hypothese. C est donc premier à B. Si quelque nōbre mesure B, on prouuera en la mesme maniere qu'il sera premier à l'autre A.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre, le produit des deux sera premier à cet autre.

Soient deux nombres A & B, tous deux premiers à C; & que A multiplié par B produise D. Je dis que D est premier à C.

Autrement si D & C ne sont premiers entr'eux, qu'ils soient composez, & que E les mesure tous deux, sçavoir D par le nombre F: Donc E multipliant F, produit D par la 9. com. sent. côme aussi A par B: ainsi A, E, F, B, seront proportionaux par la 19. p. 7. Item A & C sont premiers: donc E mesurant C sera premier à A par la 25. p. 7. & par la 23. p. 7. A & E estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison: ainsi ils mesureront F & B qui sont en la même raison, sçavoir A mesurera F, & E mesurera B par la 21. p. 7. Mais il mesure aussi C: B & C ne seroient donc pas premiers, contre l'hypothese. D sera donc premier à C.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le produit de l'un d'iceux multiplié par soy, est premier au restant.

Soient deux nombres premiers A, & B, & que l'un ou l'autre d'iceux sçavoir est A, multiplié par soy produise C. Je dis que B, & C sont premiers entr'eux.

Car si on prend D, egal à A; B sera aussi premier à D. Ainſi A & D estans premiers à B, par la 26. p. 7. A multiplié par D, c'est à dire par soy-mesme, produira C premier au même B. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres sont premiers à deux autres; (l'un & l'autre à l'un & à l'autre) leurs produits seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres A, & B premiers à deux autres C, & D, & que E soit le produit de A, mul-

A.. 2 B... 4
C... 3 D 5
E..... 8 F 12
P 111

multiplié par B, & F produict de C multiplié par D: Je dis que E, & F sont premiers entr'eux.

Car A, & B estans premiers à C, leur produict E sera aussi premier au mesme C: par la 26 p. 7. par le mesme discours E sera aussi premier à D; ainsi C & D estans premiers a E, leur produict F sera aussi premier à E par la 26.p.7.

THEOR. 2.7 PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux sont multipliez chascun par soy; leurs produicts seront premiers entr'eux: Et si iceux deux produicts sont encore multipliez par les nombres premiers proposez au commencement; les produicts sont encores premiers entr'eux, & tousiours enuiron les extremes aduiendra la mesme chose.

A...2	B...3
C....4	D.....9
E.....8	F.....27
G 16	H 81.

Soient deux nombres premiers entr'eux A, & B, & que A multiplié par soy mesme produise C, mais B multiplié par soy produise D. Je dis que C, & D, seront premiers entr'eux. Item si A multipliant C produict E; & B multipliant D produict F. Je dis que E & F seront premiers entr'eux.

Car par la 2. p. 7. A & B estans premiers, C produict de A multiplié par soy, sera premier a B restant: par la mesme raison B & C estans premiers entr'eux, D sera aussi premier à C. De rechef puis que A & B sont premiers, par la 27. p. 7. C sera aussi premier à B; & D à A: Mais il a esté demonsté que C est aussi premier à D: parquoy l'un & l'autre nōbre A, C, sera premier a l'un & a l'autre nombre B, D; & partant par la 28 p. 7. E produict de A en C sera premier a F produict de B, par D.

Que si encore A multipliant E produict G; & B multipliant F produict H: G & H seront aussi premiers entr'eux. Car par

que A & C sont premiers à B, leur produit E sera aussi premier à B par la 26. p. 7. Par la mesme raison F sera aussi premier à A. Ainsi les deux A, E, seront premiers aux deux B, F, sçavoir l'un & l'autre, à l'un & à l'autre; & partant par la 28. p. 7. G produit de A en E, sera aussi premier à H produit de B en F, & ainsi à l'infiny.

THEOR. 28. PROPO. XXX.

Si deux nombres premiers entr'eux sont adioustez ensemble; le produit sera premier à tous deux: & si le produit est premier à iceux deux nombres; ils seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux AB, & BC: Je dis que le composé des deux AC, sera premier à tous deux.

Car s'ils ne sont premiers, soit D leur commune mesure s'il est possible: si dōc
 $A \dots 3 \quad B \dots 4 \quad C$
 $D \dots 2$
 D mesure le tout AC, & la partie AB; il mesurera aussi le reste BC, par la 12. com. sent. ainsi AB, & BC ne seroient premiers entr'eux contre l'hypothese.

Secondement, si le tout AC est premier à AB, & à BC. Je dis que AB, & BC seront premiers entr'eux. Autrement que D les mesure s'ils ne sont premiers; il mesurera aussi le composé des deux AC, par la 10. com. sent. ainsi AC ne seroit premier à AB, & BC, ce qui est contre l'hypothese. AB & BC sōt donc premiers entr'eux.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cecy que si un nombre composé de deux, est premier à l'un d'iceux, il sera aussi premier à l'autre. Car si AC est premier à AB; AB, BC seront premiers entr'eux par la seconde partie de ceste propo. Donc aussi AC sera premier à BC par la premiere partie de la mesme prop. ce qui a esté proposé.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Tout nombre premier est premier à tout autre qu'il ne mesure pas.

Ceste proposition est aisée à démontrer : car s'ils n'étoient premiers, ils auroient une commune mesure autre que l'unité ; ainsi pas un des deux ne seroit premier contre l'hypothèse.

THEO. 30. PROP. XXXII.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, & que quelque nombre premier mesure leur produit ; il mesurera aussi l'un d'iceux deux nombres.

Soient deux nombres A, & B, de la multiplication desquels fait produit C, & que D nombre premier mesure iceluy C.

A 4 B 6

C 24 D... 3 E 8

Je dis qu'il mesurera aussi l'un ou l'autre de A ou B.

Autrement s'il ne mesure l'un ny l'autre, qu'il mesure C par le nombre E : Si donc D ne mesure A, par la 31. p. 7. il sera premier à iceluy, & par la 23. p. 7. ils seront les plus petits de leur raison. Mais pour autant que D par E fait C, aussi bien que A multiplié par B, par la 19. p. 7. A sera à D, comme E, à B, & par la 21. p. 7. D mesurera B ; ce qui étoit à prouver.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par

quelque nombre premier.

Soit le nombre composé A. Je dis qu'il sera mesuré par quelque nombre premier,

A 8

B 4

Car puis qu'il est composé, il sera me-

C ..2

suré de quelque nombre par la 13. p. 7. & soit de B, lequel sera composé ou non : s'il est premier, la prop. est manifeste : mais s'il est composé, il sera mesuré par vn autre nombre, & soit C, lequel sera premier ou non : s'il est premier, puis qu'il mesure B, & B mesure A, aussi C mesurera A par la 11. com. sent. Mais si C est composé, il sera mesuré par quelque autre nombre : Et pource qu'un nombre ne se diminue infiniment, nous viendrons finalement à quelque nombre que nul autre ne mesurera ; & partant à vn nombre premier, lequel mesurât tous les precedents, mesurera aussi le composé A. Ce qu'il fa-
loit prouver.

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre est premier, ou bien mesuré par quelque nombre premier.

Cette demōstration est euidente: car si vn nombre n'est premier, il est composé, & par la precedente tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier.

PROB. 3. PROP. xxxv,

Tant de nombres qu'on voudra estans donnez, trouuer les plus petits de tous ceux qui auront mesme raison.

Soient donnez tant de nombres qu'on voudra A, B, C : & faut trouuer les plus petits en la mesme raison.

A.....6 B....4 C.....8

D.. 2

E...3 F.. 2 G....4

H..2 I.. K... L..

Si A, B, C sont premiers entr'eux, on a ce que l'on cherche par la 23. p. 7. s'ils sont composez, soit trouué D plus grande

commune mesure d'iceux A, B, C , par la 3. p. 7. laquelle mesure A selon E ; B selon F , & C selon G . Je dis que E, F & G sont les plus petits nombres qui soient en la raison de A, B , & C .

Car il est euident qu'iceux E, F, G sont és mesmes raisons que A, B, C , d'autant que D mesurant iceux A, B, C par les nombres E, F, G ; D multipliant iceux E, F, G , seront produits A, B, C , par la 9. com. sent. & par ce que nous auons demonsté ala 18. p. 7. E, F, G , auront la mesme raison que les multipliez A, B, C . Et qu'ils soient les plus petits, on le demonstera ainsi. S'ils ne sont tels, soient H, I, K les plus petits nombres ayans mesme raison qu'iceux A, B, C : ils les mesureront donc également par la 21. p. 7. & soit par le nombre L , ce qu'estant, par la 9. com. sent. L multipliant H, I, K , seront produits les nombres A, B, C . Veu d'oc que D multipliât E , fait A ; & L multipliât H , faict le mesme A ; par la 19. p. 7. il y aura telle raison de D à L , que de H à E : mais H est moindre que E : donc D sera aussi moindre que L : Et puis que H, I, K mesurēt A, B, C , par L , L mesurera aussi iceux A, B, C , par la 8. cō. sent. & ainsi D ne sera la plus grande commune mesure d'iceux A, B, C : ce qui est contre l'hypothese. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G , qui soient en mesme raison, que les proposez A, B, C .

COROLLAIRE.

Il appert icy que la plus grande commune mesure de quelconques nombres, mesure iceux par les nombres qui sont les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison qu'iceux proposez.

SCHOLIE.

Par ces choses appert le moyen de trouuer les deux plus petits nombres qui ont la mesme raison, que tant de nombres qu'on voudra donner continuellement proportionaux. Comme si on propose les nombres A, B, C , continuellement proport. nous trouuerons les deux moindres en la mesme raison, si par ce prob. nous prenons E & F en la mesme raison des deux A & B , c'est à sauoir ces nombres là, par lesquels D plus grande commune mesure d'iceux A & B , mesure iceux. Et par le corol. cy dessus, E & F seront les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison qu' A à B : c'est à dire en la raison des continuellement proportionaux A, B, C .

PROBL. 4. PROP. XXXVI.

Trouuer le plus petit nombre que peuuent mesurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & B : il faut
trouuer le plus petit n^obre mesuré par iceux. A...3 B....4
C.....12
Si le plus petit mesure le plus grand, iceluy
plus grand sera le nombre que nous cherch^os ; D.....10
E...F.. \

que si l'un ne mesure l'autre, ou A & B seront premiers entre eux, ou non; si premiers, soit C produit de A, multiplié par B: le d^s que C est le plus petit nombre mesuré par A, & par B. Car par la 7. com. sent. il est euident que C sera mesuré par l'un & par l'autre; & s'il n'est le moindre nombre mesuré par iceux A, B; en soit vn autre plus petit D, s'il est possible, lequel A mesure selon le nombre E; & B selon le nombre F. Ce qu'estant, D sera produit tant de A multiplié par E, que de B par F par la neuuesme commune sentence, & partant par la 19. p. 7. A sera à B c^ome F à E. Item A, & B, estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison par la 23. p. 7. & A mesurera F par la 22. p. 7. & d'autant que B multipliant A produict C, & multipliant F produict D, il y aura telle raison de C à D, que de A à F, par la 17. p. 7. Mais nous auons monstré que A mesureroit F. donc C mesurera aussi D, sçauoir le plus grand mesurera le plus petit, ce qui est impossible. C estoit donc le moindre nombre que peuuent mesurer A & B.

Soient maintenant les deux nombres A, & B composez, & par la 35. p. 7. soient trouuez C, & D les plus petits nombres de la mesme raison; par la 19. p. 7. E produit de A multiplié par D, sera egal au produict de B multiplié par C: ainsi E sera mesuré par B, & par A; & par le mesme discours de la precedente demonstration, on monstrera qu'il est le plus petit nombre mesuré par A, & par B.

THEOR. 33. PROP. XXXVII.

Si deux nombres mesurent vn autre nombre: le plus petit qu'ils mesurent, mesurera aussi iceluy autre.

Soient deux nombres A, & B qui mesurent vn autre CD, & que le plus petit nombre qu'ils mesurent soit E. Je dis que E mesurera aussi CD.

A...2 B...3
C.....7 F.....5 D
E.....6

Autrement, si E ne mesure CD; apres auoir mesuré CE, qu'il laisse FD plus petit que soy: A & B mesurans E, ils mesureront aussi CE par la 11. com. sen. Mais ils mesureront le tout CD par la 12. com. sen. ils mesureront donc aussi le reste FD plus petit que C; ce qui est impossible, estant le plus petit qu'ils mesurent. Parquoy E mesurera CD: ce qu'il falloit prouuer.

PROB. 5. PROP. xxxviii.

Trouuer le plus petit nombre que peuvent mesurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez A, B, C, il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils mesurent.

B...2 B...3 C.....4
D.....6
E....

Soit trouué D plus petit nombre que peuvent mesurer A & B, par la 36. p. 7. Or C mesure aussi D, ou il ne le mesurera pas: s'il le mesure: ie dis qu'il est aussi le plus petit qu'iceux A, B, C peuvent mesurer: car s'il ne l'est, en soit quelque autre plus petite E, s'il est possible, lequel tous les trois A, B, C mesurent. D'autant que A & B mesurent E moindre que D, iceluy D, ne sera le moindre que A & B mesurent, ce qui est contre l'hypothese. D est donc le moindre nombre que peuvent mesurer les nombres proposez A, B, C.

Que si D n'est aussi mesuré par C: par la mesme 36. p. 7. soit trouué E plus petit nombre mesuré par C & D: Je dis que E sera le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

A...2 B...C...3 4
D.....6
E 12
F

Car premierement E est mesuré par A, B, C: d'autant que C, & D, le mesurent & A & B mesurant D, par la 11. com. sen. ils mesureront aussi E mesuré par D. Que si E n'est le plus petit mesuré par A, B, C, soit F plus petit, s'il est possible: A & B donc mesurant F; D le plus petit mesuré par eux, mesurera aussi F par la 37. p. 7. Mais C mesure aussi F; (car A, B, & C le mesurent) donc C, & D mesureront F. Et par la 37. p. 7. E plus petit mesuré par C & D, mesurera aussi F; le plus grand va

plus petit ce qui est impossible. Donc E estoit le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

C O R O L L A I R E.

De mey est manifeste, que si trois nombres en mesurent quelque autre le plus petit qu'ils mesureront, mesurera aussi cest autre. Car il a esté démontré que A, B, C, mesurant F; aussi E le plus petit mesuré par A, B, C, mesure le mesme nombre F.

S C H O L I E.

Par me me raison estans donnez plus de trois nombres, nous trouverons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si 4. nombres sont donnez, il faudra trouver le moindre que trois mesurēt: si 5. il faudra trouver le plus petit que 4. mesurēt &c. procedant au reste tout ainsi qu'il a esté dict de trois nombres.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si vn nombre mesure vn autre nombre; le mesuré aura vne partie denommée par le mesurant.

Vnité.

Soit le nombre A, lequel mesure le A...3 B.....6 C...2 nombre B. Je dis que iceluy B contiendra vne partie denommée par A.

Qu'ainsi ne soit; que A mesure B selon C, c'est à dire autant de fois qu'il y a d'vnitez en C; par la 15. p. 7. C mesurera B autant de fois, que l'vnité mesure A; & C sera telle partie de B que l'vnité de A. Mais l'vnité est vne partie de A, denommée par iceluy A, comme nous auons dict en la 2. d. 7. donc aussi C sera vne partie de B denommée par A.

THEOR. 35. PROP. XL.

Si vn nombre a vne partie quelle elle soit; le nombre nommant ceste partie le mesurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B denom- A 11
me par le nombre C. Je dis que C mesure A. B...3 C....4

Car puis que B est partie denommée par C ; & l'unité est
partie de C. denommée par le mesme C ; comme l'un é me-
sure C, ainsi B mesure A : & par là 5. p. 7. en changeant comme
l'unité mesurera B, ainsi C mesurera A.

PROB. 6. PROP. XLI.

Trouver le plus petit nombre qui ayt les
parties donnees.

Soient les parties données A, B, C; A deuxiesme D. 1
il faut trouver le plus petit nombre qui B tiers E. 3.
ait icelles parties. C quart. F... 4

Soient pris les trois nombres, D, E, F, G..... 12
denommez par icelles parties A, B, C; H.....
& par la 38 p. 7. soit trouué G, le plus petit nombre que peu-
uent mesurer D, E, F: Je dis que D contient les parties A, B, C

Car puis que D, E, F mesurent G; par la 39. p. 7. G aura les
parties denommees par D, E, F, c'est a dire les parties A, B, C.
Je dis aussi que G est le plus petit nombre qui ait icelles par-
ties. Car s'il ne l'est, soit H plus petit, s'il est possible, ayant
icelles parties Et H sera mesuré par les nombres D, E, F de-
nommées par les parties A, B, C par la 40. p. 7. & partant puis
que H est moindre que G; iceluy nombre G mesurera le plus
petit que peuvent mesurer les nombres D, E, F, contre l'hy-
pothese. G est donc le moindre nombre ayant les parties do-
nees A, B, C.

Fin du septiesme Element.

HVICTIESME



E L E M E N T H V I C T I E S M E .

T H E O . I . P R O P . I .

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux , & les extremes sont premiers entr'eux ; ils seront les plus petits de leur raison.



SOIENT A . 4 . B . 6 . C . 9 .
trois nombres continuellement proportionnaux
A, B, C, & que les extremes A, & C, soient
premiers entr'eux: Je dis que A, B, C, sont
les plus petits qui soient en la mesme raison.

Autrement soient D, E, F, plus petits en la mesme raison, s'il est possible. En raison egale, D sera à F, comme A est à C par la 14. p. 7. & par ce que A, & C sont premiers entr'eux, ils seront les plus petits de leur raison, par la 23. p. 7. & par la 22. p. 7. ils mesureront D, & F: ce qui est impossible, pour estre plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, estoient les plus petits en la mesme raison.

P R O B . I . P R O P . I I .

Trouver tant de nombres qu'on voudra

continuellement proportionnaux, les plus petits en la raison donnée.

Soiét les deux nombres A, & B les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison: il faut trouver le requis.

Que A multiplié par soy produise C; A par B produise D; B par soy produise E. Je dis premierement que C, D, E, sont continuellement proportionnaux en la raison de A

à B. Car puis que A multipliat A & B a produit C & D; comme A sera à B, ainsi C à D par la 17. p. 7. De rechef, puis que B multipliant A & B produit D & E, comme A sera à B, ainsi D sera à E: Parquoy C, D, E, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits d'icelle raison donnée. Car parce que par la 24. p. 7. A & B sont premiers, aussi par la 29. p. 7. C, & E seront premiers: & par la 1. p. 8. C, D, E, seront les plus petits en la raison donnée de A à B.

Que si on en vouloit quatre. Que A multiplié par C produise F; A par D produise G; B par D produise H; B par E produise I: Je dis que F, G, H, I sont les nombres requis. Car par le mesme discours de la 17. & 18. p. 7. les nombres seront continuellement proportionnaux, & par la 24. & 29. p. 7. F & I seront premiers entr'eux: & par la 1. p. 8. F, G, H, I, seront les plus petits qui ayent la mesme raison qu'iceux extremes F & I. Et en ceste façon on en trouuera tant que l'on voudra.

C O R O L L A I R E.

Il résulte de cecy que trois nombres continuellement proportionnaux, estant les plus petits de leur raison; les extremes seront quarrés: s'il y en a quatre qu'iceux extremes seront Cubes. Car des trois C, D, E, les extremes C, & E, ont esté produits de A & B multiplié par eux mesmes, & des 4. F, G, H, I, les extremes F & I ont esté produits de la multiplication de A & B par leurs quarrés C & E.

Il résulte encore que le extremes des nombres continuellement proportionnaux trouvez selon ceste prop. sont premiers entr'eux. Car il a esté démontré par les 24 & 29 p 7 que les extremes C, E, & F, I, sont premiers entr'eux.

THEOR. 2. PROP. III.

Si tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, sont les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison: les extremes seront premiers entr'eux.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison, A, B, C, D: Je dis que les extremes A, & D sont premiers entr'eux.

A. 8.		L. 8.
		H. 4.
B. 12.	F. 2.	M. 12.
		I. 6.
C. 18.	G. 3.	N. 18.
		K. 9.

Car soient trouvez par la 35. p. 7. les plus petits qui soient en la raison de A à B, sçavoir F, & Gils serot premiers entr'eux, par la 23. p. 7. & cōme il a esté enseigné en la preced. soient trouvez 4. nōbres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de F à G, sçavoir premierement les trois H, I, K. Puis apres les quatre L, M, N, O. Iceux estās les plus petits en la raison de F à G, ils seront egaux aux quatre A, B, C, D, qui sont aussi les plus petits en la mesme raison. Et comme les extremes L, & O sont premiers entr'eux par le corol. de la preced. seront aussi premiers entre eux A, & D. Ce qu'il falloit prouver.

PROB. 2. PROP. IIII.

Estans données tant de raisons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raisons, trouver tant de nombres qu'on voudra les plus petits continuellement proportionnaux selon les raisons donnees.

Soient donnees les deux raisons de A à B, & de C à D, aux

Q ij

plus petits termes d'icelles : il faut trou-
uer trois nombres en continuelle pro-
portion, les plus petits de ceux qui sont
selon les raisons donnees.

Soit trouué F le plus petit nombre qui
soit mesuré par B, & par C, par la 36. p. 7.
en apres soit trouué G, autant de fois
mesuré par A que F, par B. Pareillement H autant de fois me-
suré par D que F par C. Je dis que les trois nombres G, F, H,
sont les nombres requis.

Car il est euident qu'ils sont continuellement proportio-
naux en la raison donnee, d'autant que A mesure autant de
fois G, que B mesure F ; & par consequent A & B multiplians
vn mesme nombre (sçauoir celuy par lequel ils mesurent G
& F) ont produict G & F : par la 18. p. 7. G est à F, en mesme
raison que A à B. Et par mesme discours F sera à H, comme
C à D.

On prouera aussi qu'ils sont les plus petits, selon les rai-
sons donnees : d'autant que s'il n'est ainsi, en soient trouues
de plus petits L, M, N, s'il est possible, & qui respondent aux
raisons donnees comme les trois G, F, H : il est euident que B
& C doiuent mesurer M, à cause des semblables raisons, par
la 21. p. 7. Mais F est le plus petit nombre mesuré par B & par
C, & par la 37. p. 7. F mesurera M, sçauoir est, le plus grand, le
plus petit : ce qui est impossible. Partant G, F, H, estoient les
plus petits selon les raisons donnees.

Que si trois raisons estoient
donnees aux plus petits termes A
à B ; C à D, & F à G, selon lesquel-
les il fallut trouuer quatre nom-
bres tels que requiert la propo-
sition : on procedera en ceste sorte.

Soient trouuez les trois nom-
bres I, H, K, cōme dessus : ce faict ou
F mesurera K, ou non. S'il le mesu-
roit, faudroit prendre L autant de
fois mesuré par G, que K par F ; & par la precedente demon-
stration, il est euident qu'on auroit satisfait. Que si F ne me-
sure K, soit trouué O le plus petit nombre mesuré par F, & par
K, par la 36. p. 7. Et que G mesure autant de fois P, que F me-
sure O. Item que comme K mesure O, ainsi H mesure N ; &
I mesure M. Je dis que M, N, O, P sont les quatre nombres
requis.

A. 2.

G. 8. L. 7.

B. 3.

E. 12. M. 11.

C. 4.

H. 15. N. 13.

D. 5.

A. 1.

I. 8. M. 16

B. 3.

H 12. N. 24

C. 4.

K. 15. O. 30

D. 5.

F. 6.

L. P. 35

G. 7.

La demonstration se fera de mesme que la precedente.
En la mesme maniere sera procedé si 4. ou d'avantage de
raison sont donnees aux plus petits termes.

THEOR. 3. PROP. V.

Les nombres plans sont l'un à l'autre en raison
composee de leurs costez.

Soient les deux nombres plans A, & B,
les costez de A, soient C, & D, & les co-
stez de B, soient E, & F. Je dis que le plan
A est au plan B, en raison composee de
C à E, & de D à F.

Qu'il ne soit ainsi. Que D multiplié
par E produise G. Donc D multipliant
C & E, produira A & G en mesme raison que C & E, par la 17.
p. 7. Et par mesme raison E multipliant D & F, produira G &
B en mesme raison que D & F : ainsi la raison de A à G, & de
G à B, sera comme de C à E, & de D à F. Et par la 5. d. 6. la rai-
son de A à B estant composee de A à G, & de G à B, la raison
du nombre plan A au nombre plan B, sera composee de la rai-
son des costez C à E, & D à F : ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 4. PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra con-
tinuellement proportionnaux, & que le pre-
mier ne mesure le second, ny pas un autre ne
mesurera pas un autre.

Soient tant de nombres que
l'on voudra continuellement pro-
portionnaux A, B, C, D; Et que le premier A, ne mesure point
le second B. Je dis que pas un autre n'en mesurera pas un au-
tre,

Car premierement, comme A ne mesure point B, ainsi B

ne mesurera C; ny C ne mesurera D, d'autant qu'ils sont en mesme raison: que si on vouloit dire qu'en passant quelqu'un, les extremes se pourroient mesurer, comme si A pouvoit mesurer C, soient trouvez trois nombres E, F, G, les plus petits en la raison de A, B, C par la 37 p. 7. ainsi A estant à B comme E à F, & comme B à C, ainsi F à G: en raison egale A sera à C comme E à G, par la 14. p. 7. & comme E ne mesure point G, estans iceux premiers par la 3. p. 8. aussi A ne mesurera point C. Par le mesme discours on prouvera de tous les autres.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres qu'on A. 3. B. 9. C. 12. D. 24.
voudra continuellement propor-
tionnaux A, B, C, D, & que le premier A mesure le dernier D. Je dis qu'il mesurera aussi le second B.

Car par la précédente, si A ne mesuroit B, aussi pas un autre ne mesureroit pas un autre, & par consequent A ne mesureroit pas D, contre l'hypothese. A mesurera donc B: ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux; il en tombera autant entre deux autres estans en la mesme raison.

Soient les nombres A & B, entre A 3. C 9. D 27. B 81.
lesquels tombent C & D continuel- G 1. H 3. I 9. K 27.
lement proportionnaux: & qu'il y E 2. L 6. M 18. F 54.
ait telle raison de E à F, que de A à B. Je dis qu'entre E & F
se trouveront autant de nombres moyens continuellement
proportionnaux, qu'entre A & B.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouvez par la 2. p. 8. les quatre nombres, G, H, I, K, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A, B, C: en raison egale comme A sera à D, ou E à F (car c'est la mesme raison) ainsi G à K par la 14. p. 7. Mais G & K s'ont premiers entr'eux par la 3. p. 8. & par la 21. p. 7. ils mesureront egaleement E & F. Que si autāt de fois que G & K mesureront E & F; H & I mesurent autres nombres L & M, tellement que les nombres G, H, I, K, mesurent egaleement les nombres E, L, M, F, par la 9. com. sent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, produisent iceux E, L, M, F, lesquels seront entr'eux cōme G, H, I, K, ainsi que nous auons demonstřé à la 18. p. 7. Mais G, H, I, K sont continuellement proportionnaux: donc aussi E, L, M, F, seront continuellement prop. & partant puis que la multitude E, L, M, F, est egale à la multitude A, C, D, B. il tombera autant de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B: ce qu'il falloit prouuer.

S C H O L I E.

De ceste demonstration appert non seulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E & F, qu'entre A & B, mais aussi, que la proportion des nombres E, L, M, F, est la mesme que des nombres A, C, D, B. Car il a estē demonstřé que la proportion de E, L, M, F, est la mesme que celle des nombres G, H, I, K: Mais iceux sont par la construction en la mesme prop. que A, C, D, B. donc aussi E, L, M, F, sont en mesme proportion que A, C, D, B.

Il appert aussi de ce theoreme, qu'entre nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne peut tomber un nombre moyen proportionnel. Car puis que la raison double, es moindres nombres, est trouuēe entre le binaire & l'unitē; mais la superparticuliere, entre nombres differens seulement de l'unitē; & la superbipartiente, entre les nombres, desquels la difference est le binaire: si entre deux nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, tombe un moyen prop. il en tombera pareillement un (par ce theor.) entre le binaire & l'unitē, ou entre les nombres differens de la seule unitē, ou du binaire; c'est à sçauoir entre les plus petits nombres qui ont la mesme raison que ceux-là, ce qui est impossible. Car il est tout euident qu'entre le binaire & l'unitē, ny entre 2. nombres differens seulement de l'unitē, ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens seulement du binaire, tombe seulement un nombre, qui differe à l'un & à l'autre de l'un.

té : lequel nous démontrerons ne pouvoir estre milieu prop. entre iceux. Soient les nombres $A B$, & $C D$, $A \dots 6 G B$ $A . G B$, differens du binaire, entre lesquels tombe $E \dots 5 H . F$ $E . H F$. le nombre $E F$ moindre que $A B$ de l'unité, $C \dots 5 D$ $C . D$ mais plus grand que $C D$, aussi de l'unité. Je dis que $E F$ n'est moyen prop. entre $A B$, $C D$. Car si on dit que comme $A B$ à $E F$, ainsi $E F$ à $C D$: estant osté de $A B$, le nombre $A G$ egal à $E F$, afin qu'il reste l'unité $G B$; & de $E F$, le nombre $E H$ egal à $C D$, afin qu'il reste aussi l'unité $H F$; pareillement comme $A B$ sera à $E F$, ainsi le retranché $A G$ sera au retranché $E H$. Donc aussi le reste $G B$ sera au reste $H F$; c'est à dire l'unité à l'unité, comme le tout $A B$ au tout $E F$, le plus grand au moindre : Ce qui est absurde; donc $E F$ n'est pas moyen prop. entre $A B$ & $C D$.

Parquoy entre les nombres de raison triple ne peut tomber un nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit aussi un entre 3 & 1. les plus petits nombres de la raison triple qui different entr'eux du binaire : Ce qui est impossible comme nous venons à démonstrer.

Par mesme raison, ne peut aussi tomber un moyen prop. entre deux nombres de quintuple raison. Car s'il y en tomboit un, il en tomberoit aussi un (par ce theor.) entre 5 & 1. les petits nombres de la raison quintuple: ce qui ne se peut faire. Car s'il est possible qu'entre le quinaire $A B$ & l'unité C , tombe un moyen prop. binaire, ou ternaire D ; tellement que $A B$ soit à D , comme D à C : en $A \dots B E$ changeant C sera à D comme D à $A B$. Et pource que $D \dots D \dots$ l'unité C mesure D , aussi D mesurera $A B$. Mais le C , binaire, ou ternaire D mesure pareillement le senaire $A E$: donc D mesurera le tout $A E$, & le retranché $A B$; & partant par la 11. com. sent, aussi D mesurera le reste unité $B E$. Ce qui est absurde. La mesme absurdité aduendra tousiours, si on dit qu'un nombre quaternaire soit moyen prop. entre icelux quinaire $A B$, & l'unité C . Il ne tombera donc point de milieu prop. entre 5 & 1. & par conséquent entre quelconques nombres de raison quintuple.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, autant de nombres continuellement proportionnaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chascun d'iceux, & l'unité.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, entre lesquels tombent quelques nombres continuellement proportionnaux C & D. Je dis qu'entre chacun d'iceux A, B, & l'vnité, il tombera autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

A.8.	C.12.	D.18	B.27.
	<i>Vnité.</i>		
	E 2.	F 3.	
	G 4.	H 6.	I 9.
K 8.	L 12.	M 18.	N.27

Car ayant posé l'vnité, soient pris E & F, les plus petits nombres qui soient en la raison de A à C, par la 35.p.7. puis par la 2.p.8. soient trouvez les trois plus petits en la mesme raison G, H, I : puis les quatre K, L, M, N ; & ainsi consequemment iusques à ce que la multitude des pris soit egale à la multitude A, C, D, B. D'autant que les extremes A, B, sont premiers entr'eux, par la 1.p.8. A, C, D, B, seront les plus petits en la raison de E a F : Mais leurs egaux en multitude K, L, M, N, sont aussi les plus petits en la mesme raison par la constructiō. Donc K, L, M, N, sont egaux à iceux A, C, D, B, chacun au sien, comme K à A & N a B. Et pource que (comme il appert par la demonstration de la 2.p.8.) E multipliât soy mesme a produict G ; & multipliant G a faict K, par la 7.com. sent. E mesurera G par E ; & G iceluy K par le mesme E ; mais par la 5.com. sent. l'vnité mesure iceluy E par E, Donc l'vnité mesurera egalelement E ; & E iceluy G ; & G iceluy K : & partant l'vnité sera mesme partie de E, que E de G, & G de K. Donc par la 20.d.7. l'vnité & les nombres E, G, K, sont continuellement proport. Par mesme discours l'vnité & les trois nombres E, I, N, seront aussi prouuez continuellement proportionnaux. Er puis que tant la multitude E, G, K, que F, I, N, avec l'vnité, est egale à la multitude K, L, M, N, ou A, C, D, B ; il s'ensuyura qu'entre l'vnité & le nombre K ou A, qui luy est egal ; & aussi entre l'vnité & le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité &

chacun de deux nombres proposez; autant en tombera-il entre iceux deux nombres.

Soient deux nombres proposez
A & B, & qu'entre l'vnité C, & cha-
cun d'iceux, tombent quelques nō-
bres continuellement proportion-
naux, comme D & E, entre C & A:

A 8. I 12. K 18. B 27

E 4. H 6. G 9.

D 2. F 3.

C 1.

Item F, & G, entre C & B. Je dis qu'aussi il en tombera deux continuellement proportionnaux entre A & B.

Car si on acheue a multiplier comme en la 2. p. 8. pour trou-
uer les trois nombres, H, I, K, c'est a sçauoir que H soit le
produit de D multiplié par F; I le produit de D, par H; &
K, le produit de F par H. Puisque comme C à D, ainsi D à E,
& E à A; & que par la 5. cō. sen C vnité mesure D, par les vnitez
qui sont en D; aussi D mesurera E, par les vnitez qui sont en
D, & E mesurera A, par les mesmes vnitez de D; ainsi il est
euidēt que B multiplié par soy-mesme produit E; & E multiplié
par B, a produit A. Par mesme discours se prouuera que F
par soy-mesme, a produit G, & que G par F a produit B.

Maintenant puis que D multiplié par soy-mesme, & par F a
produit E & H, par la 17. p. 7. comme D à F, ainsi E à H. Pa-
reillement F multiplié par D, & par soy-mesme, produit H
& G; aussi H sera à G comme D à F: Parquoy les trois nom-
bres E, H, G, seront en continuelle proportion. D'auantage
D multipliant E, & H, produit A & I; comme E sera a H,
ainsi A sera à I: & puis que D, & F multiplient H, & produi-
sent I & K; I sera à K, comme D à F. Par mesme discours K
sera à B à la mesme raison, estans les produits de H, & G
multipliez par F, le tout par la 17. & 18. p. 7. Il est donc euidēt
que A, I, K, B, sont continuellement proportionnaux, & que
partant les deux nombres I & K sont tombez en continuelle
proportion entre A & B: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9. PROP. XI.

Entre deux nombres quarrez tombe vn
moyen proportionnel; & le quarré est au
quarré en raison doublee du costé au co-
sté.

E L E M E N T.

251

Soient deux nombres quarez A_4 E_6 B_9
 $A \& B$, desquels les costez soiēt C_2 D_3 .
 $C \& D$. Je dis qu'entre iceux tombera vn moyen proportion-
 nel.

Car puis que C est le costé de A ; C multiplié par soy-
 mesme produira A : pareillement D par soy-mesme produira
 B . Maintenant soit trouué E , produit de C multiplié par D :
 Et par la 17. p. 7. comme C à D , ainsi A à E , & E à B . Partant
 E est moyen proportionnel entre $A \& B$.

Pour la seconde partie. il est euident que le quarré A , est au
 quarré B en raison doublee du costé C au costé D . Car A, E ,
 Bestans continuellement proportionnaux, A est à B en raison
 doublee de A à E par la 10. d. 5. qui est la mesme raison de C
 à D .

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent deux
 moyēs proportionnaux: & le cube est au cube
 en raison triplee du costé au costé.

Soient deux nombres A_{27} H_{36} I_{48} B_{64} .
 cubas $A, \& B$, desquels les E_9 G_{12} F_{16}
 costez soient $C \& D$. Je dis C_3 D_4 .
 que entre iceux tomberont deux moyens proportionnaux.

Qu'il ne soit ainsi. Que C se multipliant soy-mesme pro-
 duise E ; D par soy produise F ; mais $C \& D$ l'un par l'autre pro-
 duise G ; & iceluy G multiplié par l'un & l'autre $C \& D$, produi-
 set $H \& I$. Puis que $A, \& B$ sont cubes, ils seront les produits
 de C multiplié par E , & de D multiplié par F : il est donc eu-
 idēt que la construction est semblable à celle de la 2. p. 8. & par
 la demonstration de la mesme, A, H, I, B seront cōtinuellement
 proportionnaux selon la raison de C à D . Partant $H \& I$, se-
 ront deux moyens proportionnaux entre les nombres cubes
 $A \& B$.

Quant à la seconde partie, que le cube A , est au cube B en
 raison triplee du costé C au costé D , ou de A à H : (car c'est
 la mesme raison) cela est clair par la 10. d 5.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux ; iceux estans multipliez chascun par soy, leurs produicts seront aussi continuellement proportionnaux : & si chascun multiplie encores son produit ; les derniers produicts seront aussi continuellement proportionnaux : & cela aduiendra tousiours enuiron les extremes.

Soiēt trois
nombres
continuel-
lement proportionnaux A, B, C : Et qu'iceux se multiplier chascun par soy produisent D, E, F. Item que les mesmes multiplians chascun son produit facent G, H, I. Je dis que D, E, F, & G, H, I, sont entr'eux continuellement proportionnaux.

Qu'il ne soit ainsi : Que N soit le produit de A multiplié par B ; & O, de B par C : Pareillement que P soit le produit de A par N ; Q, de A par E ; R, de B par O ; S, de B par F par la 18. p. 7. A se multipliant, & multipliant B, les produicts D & N seront en la mesme raison de A à B : & par mesme discours B multipliant A & soy-mesme, les produicts N, & E seront aussi en la mesme raison, & ainsi des autres : Partant D, N, E, O, F, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B ainsi D, N, E ; & E, O, F, sont continuellement prop. en une mesme raison ; & en raison egalle comme D sera à E, ainsi E à F : parquoy D, E, F, seront continuellement proportionnaux.

Pareillement d'autant que A multipliant D, N, E a fait G, P, Q : par ce que nous auons demonstté à la 18. p. 7. G, P, Q seront entr'eux, comme les proportionnaux D, N, E c'est adire comme A à B. Item pource que A & B multipliant E ont produit Q & H, par la 18. p. 7. comme aussi A sera à B, ainsi Q à H. Donc G, P, Q, H, sont proportionnaux en la raison de A à B. Par mesme discours H, R, S, I, seront prouuées propor-

tionaux en la mesme raison de A a B : & partant en raison egale comme G sera a H ainsi H à I : parquoy G, H, I seront continuellement proportionnaux : ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré; aussi le costé mesurera le costé: que si le costé mesure le costé, aussi le quarré mesurera le quarré.

A 4. E 12. B 36.

C 2. D 6.

Soit le nombre quarré A qui mesure le nombre quarré B, & d'iceux quarréz les costez soient C, & D. Le dis que le costé C mesurera aussi le costé D. Car ayant multiplié C par D, il est euidēt par la 11. p. 8. que le produit E est moyen proportionnel entre A & B, en la raison de C à D : mais l'extreme A mesure B : donc par la 7. p. 8. il mesurera aussi E. Parquoy puis que cōme A à E, ainsi C à D : aussi le costé C mesurera le costé D.

Pour la seconde partie : Si le costé C mesure le costé D, aussi le quarré A mesurera le quarré B. Car comme dessus A, E, & B seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D : Et puisque C mesure D, aussi A mesurera E ; & E mesurera B ; & par cōsequēt A mesurera aussi B, parce que qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré, par la 11. com. sent.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si vn nombre cube mesure vn nombre cube: aussi le costé mesurera le costé : & si le costé mesure le costé; aussi le cube mesurera le cube.

Ceste demonstration est aisée : d'autant que par la 12. p. 8. entre deux cubes y a deux moyens proportionnaux ; & le cube est au cube en raison triplee du costé au costé, c'est à dire que le costé est au costé comme l'un des cubes est à son prochain moyen proportionnel, lequel il mesurera par la 7. p. 8. & par consequent le costé mesurera aussi le costé. Pour la seconde partie, si le costé mesure le costé, aussi le cube mesurera son prochain moyen prop. lequel mesurera l'autre moyen prop. & iceluy l'autre cube ; & par consequent le cube mesurera l'autre cube, par la 11. com. sent. reperee,

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si vn nombre quarré ne mesure pas vn nombre quarré; aussi le costé ne mesurera le costé: que si le costé ne mesure le costé, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Ceste demonstration se faict par l'impossible de la 14. p. 8. Car par icelle, si le costé mesuroit le costé, aussi le quarré mesurerait le quarré. Pour la secõde partie. Si le quarré mesuroit le quarré; aussi le costé mesurerait le costé par la susdite 14. p. 8.

THEO. 15. PROP. XVII.

Si yn nombre cube ne mesure point vn nombre cube; aussi le costé ne mesurera le costé: que si le costé ne mesure le costé, aussi le cube ne mesurera le cube.

Ceste demonstration se faict aussi par l'impossible de la 15. p. 8. Car par icelle, si le costé mesuroit le costé, aussi le cube mesurerait le cube. Et pour le second. Si le cube mesuroit le cube, aussi le costé mesurerait le costé.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a vn moyen proportionnel: & le plan est au plá en raison doublee des costez de semblable raison.

Soient les deux nombres plans semblables A & B, & leurs costez soient C, D, & E, F. Je dis qu'entre iceux plans A & B se trouuera vn

A 12. G 18. B 17
C 6. D 1. E 9. F 3.

moyen proportionnel; & que A est a B en raison doublee de C a E, costez de mesme raison.

Car puis que les plans A & B sont semblables, C sera a D comme E par F; & si A sera le produit de C par D. Item B le produit de E par F, par la 17. d. 7. Maintenant que D multipliant E produise G, par la 17. p. 7. puis que D multipliant C & E produise A, & G; A sera a G, comme C a E, ou D a F (car puis que comme C a D, ainsi E a F; en changeant comme C a E, ainsi D a F.) Item E multipliant D, & F; produit G & B; iceux seront l'un a l'autre comme D a F; ainsi A, G, B seront continuellement proportionnaux, & G sera un moyen proportionnel entre A & B.

THEO. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, tombent deux moyens proportionnaux: & le solide est au solide, en raison triplee des costez de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A & B, de lesquels les costez soient C, D, E, & F, G, H. Je dis qu'entre A, & B, on trouuera deux moyens proportionnaux; & que A est a B en raison triplee de C a F costez de mesme raison.

Car I soit le produit de C multiplié par D; K le produit de F par G; L le produit de F par D; & M & N produits de L par E & H.

Maintenât puisque C, D, E, sont l'un a l'autre come F, G, H: aussi en changeant, comme C sera a F, ainsi D sera a G, & E a H. Et par la 17 p. 7. puis que D multipliant C & F, produit I & L, iceux I & L seront l'un a l'autre comme C a F, c'est a dire comme D a G, ou E a H. Par mesme discours F multipliant D & G, produit I & K, iceux seront aussi l'un a l'autre comme D a G; & partant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D a G, ou C a F, ou E a H. Pareillement puis que le solide A est le produit des trois nombres C, D, E; & I, le produit de C par D, aussi A sera le produit de I par

E: & par mesme discours B sera le produit de K par H; & par la 17. p. 7. E multipliant I, & L, produit A & M, en la raison de I à L: & par mesme discours L multipliant E, & H, produit M & N en la raison de E à H, qui est la mesme que de I à L; aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront aussi en la raison de L à K, qui est la mesme que de I à L. Et partant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est à dire de C à F; & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

Pour la seconde partie elle est evidente, puis que les quatre nombres ont esté prouvez continuellement proportionnaux en la raison de C à F (estant A à B en raison triplee de A à M par la 10. d. 5) A estre à M, comme C à F.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si entre deux nombres, tombe vn moyen proportionnel: iceux seront nōbres plans semblables.

Soient deux nombres A, & B, entre lesquels tombe C, moyen proportionnel. Je dis que A & B sont nombres plans semblables.

Car ayant pris D, & E les plus petits termes en la raison de A, C, B; iceux D, & E mesureront A & C l'un comme l'autre, par la 21. p. 7. Ils mesureront aussi egaleme^{nt} C & B, qui sont en la mesme raison. Donc que D & E mesurent A, & C selon le nombre F; & qu'ilz mesurēt aussi C, & B selon le nōbre G. Parquoy F multipliant D & E sera produit A & C, par la 9. com. sent. Item G multipliant les mesmes D & E, sont produits C & B. Veu donc que E multipliant F & G faict C & B comme C sera à B, ainsi F à G par la 17 p. 7. Mais comme C est à B, ainsi estoit D à E. Donc comme D sera à E, ainsi F sera à G; & en changeant comme D sera à F, ainsi E à G. Et puis que F multipliant D, a faict A; iceluy A sera vn plan duquel les costez sont D, F. Item pource que G multipliant E a faict B; sera le plan duquel E, G sont costez. Mais ces costez ont esté
demon

demonstrez proportionnaux, c'est à dire D estre à F, comme E à G. Donc par la 1. d. 7. A & B seront plans semblables : ce qui estoit à prouver.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux; iceux seront nombres solides semblables.

Soient les deux nombres A & B, entre lesquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux C & D. Je dis qu'ils sont nombres solides semblables.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouvez par la 2. p. 8. les trois nombres E, F, G, les plus petits en la raison de A, C, D, B. Veut donc qu'entre E & G tombe un moyen proportionnel F, par la 10. p. 8. E & G seront plans semblables : Soient leurs costez H, I, & K, L, lesquels seront proportionnaux par la 1. d. 7. & puisque E, F, G sont les plus petits en la raison de A, C, D ils les mesureront également par la 1. p. 7. soit selon le nombre M : c'est à dire que E, F, G, estés multipliez par M produisent A, C, D : item par le mesme discours E, F, G, mesureront également les trois nombres C, D, B, chacun le sien : soit selon le nombre N, c'est à dire que N multipliant E, F, G, produise C, D, B. Il est donc evident, que A & B sont nombres solides, desquels les costez sont H, I, M, & K, L, N. Mais pour autant que M, & N multiplians F, produisent C & D, par la 18. p. 7. M sera à N en la raison de C à D : & C est à D en mesme raison que E à F par la 17. p. 7. pour ce que N multipliant E & F a produit iceux C & D ; mais aussi E est à F en la mesme raison que H à K, ou I à L. Donc aussi H sera à K, ou I à L comme M à N ; & en changeant H à I, comme K à L ; & I à M comme L à N : & partant les costez H, I, M sont proportionnaux aux costez K, L, N, & par la 1. d. 7. A & B seront nombres solides semblables : ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellement pro-

portionnaux, & que le premier soit quarré, le troisieme sera aussi quarré.

Ceste demonstration est aisee : car par la 20. p. 8. les extremes seront plans semblables, & l'un d'iceux quarré, parait aussi l'autre.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit cube, aussi le quart sera cube.

Ceste demonstration est aussi aisee: car par la 21. p. 8. les extremes seront solides semblables : mais l'un est cube, & par tant aussi sera l'autre.

THEOR. 22. PROP. XXIII.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, & que l'un d'iceux soit quarré, aussi sera l'autre.

Soient deux nombres A & B, lesquels A 16. F 24. B 36
soient entr'eux, comme le quarré C au C 4. E 6. D;
quarré D, & soit A quarré. Je dis que B est aussi quarré.

Car puisque A est à B comme C à D ; & par la 11. p. 8. il y a be entre C & D , vn moyen proportionnel, sçavoir est E. il en tombera aussi vn entre A & B, par la 8. p. 8. & soit F. Veut donc que les trois nombres A, F, B, sont continuellement proportionnaux ; & le premier A est quarré ; aussi le troisieme B sera quarré : ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

Il appert des choses cy dessus dictes, que la raison de quelque nombre quarré que ce soit à quelconque nombre non quarré, ne peut est

exhibée en deux nombres quarrez: Car si elle y estoit exhibée, par la 24.8. p. les deux premiers nōbres ayant la mesme raison que les quarrez de la raison exhibée seroient aussi quarrez, puis que l'un est posé quarré. Ce qui est absurde: car l'un est posé non quarré. D'où vient que les nombres ayant la raison double, ne sont comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres cy 4. 8. 16. 32. &c. seroient quarrez; d'autant que 4. estant quarré, par la 24.8. p. aussi 8. seroit quarré: donc aussi 16. & 32. &c. ce qui est absurde. Car entre 4. & 8. & entre 8. & 16.; & entre 16. & 32. &c. tomberoit un moyen prop. s'ils estoient quarrez par la 11. p. 8. & nous avons démontré au Scholie de la 8. p. 8. qu'il ne peut tomber de moyen prop. entre quelconques nombres de la raison double.

Semblablement les nombres en raison quintuple, ne sont aussi comme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y estoient, par la 11. p. 8. il tomberoit entre iceux un milieu propo. donc aussi entre 5. & 1. les plus petits nombres de la raison quintuple par la 8. p. 8. Ce qui est impossible, comme nous avons démontré au Scholie de la 8. p. 8.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube; & que l'un d'iceux soit cube, aussi sera l'autre.

Ceste demonstration est aisée: d'autant que par la 8. p. 8. il tombera deux moyens proportionnaux entre iceux deux nōbres, ainsi qu'entre les cubes de semblable raison, par la 12. p. 8. & par la 23. p. 8. l'un d'iceux nombres estant cube, aussi sera l'autre.

C O R O L L A I R E.

Il appert aussi des choses cy dessus, que la raison de quelque nombre cube que ce soit à quelconque nombre non cube, ne se peut exhiber par deux nombres cubes.

THEO. 24. PROP. XXVI.

Nombres plans semblables, sont l'un à l'autre

tre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient les deux nombres plans semblables A & B . Je dis que A sera à B comme nombre quarré à nombre quarré.

A 10. C 30. B 40.
 D 4. E 6. F 9.

Car par la 18 p. 8. il tombera entre A & B vn moyen prop. & soit C : si donc on prend les trois nombres D, E, F , les plus petits en la raison continue de A, C, B , les extremes D & F seront quarez par le corol. de la 2. p. 8. Parquoy puis qu'en raison egale A est à B , comme D à F , il est manifeste que A est à B comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à sçauoir comme le nombre quarré D au nombre quarré F .

S C H O L I E.

Clavius a démontré la conuerse de ceste propo. c'est à sçauoir. Que les nombres qui sont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, sont plans semblables.

Car les nombres A & B estans entr'eux, comme les quarez D & F : par la 11. p. 8. Il tombera un moyen prop. entre iceux quarez & aussi un entre A & B , par la 8. p. 8. & partant A & B sont plans semblables. Et par icy est manifest. que les nombres plans qui ne sont semblables, ne sont entr'eux, comme nombre quare à nombre quare.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Nombres solides semblables, sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient les nombres solides semblables A , & B . Je dis que A sera à B , comme nombre cube à nombre cube.

A 16. C 14. D 16. B 4
 E 8. F 12. G 18. H 27

Car par la 16. p. 8. tomberont entre A & B deux moyens proportionnaux, & soient iceux C & D . Que si on prend les plus petits termes de la raison de A à C , & qu'en la raison de ceux on trouue, par la 2. p. 8. les quatre nombres en cõtinu. le proportion E, F, G, H ; les extremes E & H seront cube par le corol. de la 2. p. 8. & en raison egale comme E à H , ainsi A à B : ce qui estoit à demonstrier.

SCHOLIE.

Clavius demonstre aussi la conuerse de ceste prop. sçavoir est:

Queles nōbres qui sont l'un à l'autre comme nombre cube à nōbre cube, sont solides semblables. Car les nombres A & B, estans entr'eux, comme les cubes E & H; par la 11. p. 8. Il tombera deux moyens prop. entre les nombres cubes E & H. Il en tombera aussi deux entre A & B par la 8. p. 8. & partant par la 21. p. 8 A & B sont solides semblables.

Il est euident par toutes les choses cy dessus dictes, qu'aucuns nombres ayans raison double, ou superparticulicre, ou superbipartiente, ne sont plans, ou solides semblables. Car s'ils estoient plans semblables, par la 18. p. 8. un moyen prop tomberoit entr'eux, ce qui ne se peut faire, comme il a esté démontré au Scholie de la 8. p. 8. Ils ne seront aussi solides semb'ables, puis qu'entre iceux ne peuvent tomber deux moyens prop car autrement il en tomberoit aussi deux entre les plus petits nombres d's mesmes raisons par la 8. p. 8. Ce qui ne se peut faire, pource qu'iceux sont seulement distans entr'eux de l'unité ou du binaire, comme il a esté dict au susdit Scholie, entre lesquels il est certain, que deux nombres moyens prop. ne peuvent tomber.

Semblablement deux nombres premiers, quels qu'ils soient, ne peuvent estre plans, ou solides semblables, pource qu'ils ne peuvent auoir les costez proportionnaux. Car quelque nombre plan que ce soit étant nombre premier, a seulement soy-mesme & l'unité pour costez, encore improprement. Comme ces nombres plans 7. & 13. desquels les costez sont 7. 1. & 13. 1. puis qu'ils sont produits de la multiplication d'iceux costez, lesquels appert n'estre proportionnaux. Et le nombre solide, qui aussi est nombre premier, a seulement pour costez soy mesme, & deux unitez, & par consequent il est manifeste qu'ils ne peuvent estre prop.

Pareillement deux nombres premiers entr'eux, n'estans quarrez, ou cubes, ne peuvent estre plans ou solides semblables: Car s'ils estoient ls, par la 18. ou 19. p. 8. tomberoit entre iceux, un ou deux moyens prop. & puis que les extremes sont posez premiers entr'eux; tous les trois, ou les quatre seront premiers entr'eux, pource que aucun nombre ne sera commune mesure d'iceux, les extremes n'en ayans point. Parquoy il est euidē par la 23. p. 7. qu'ils seront les plus petits en leur prop. Et partant par le corol de la 2. p. 8. les deux extremes seront quarrez, ou cubes. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez n'estre quarrez ny cubes.

De ces choses s'ensuit que s'il y a deux nombres plans, ou solides semblables, desquels le moindre soit premier, il mesurera le plus grand. Car autrement par la 31. p. 7. iceux deux nombres proposez seroient premiers entr'eux: & partant (comme nous venons de prouver) ils ne seroient plans ou solides semblables. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez tels.

De cecy est evident que deux nombres premiers entr'eux, desquels le moindre est premier; ne peuvent estre plans, ou solides semblables. Car s'ils l'estoient, le moindre mesureroit le plus grand, comme appert cy-dessus. Veu donc qu'il se mesure aussi soy mesme, il ne seroient premiers entr'eux, mais composez: Ce qui est contre l'hypothese.

Parquoy il est facile de trouver deux nombres plans, ou solides non semblables. Car si on prend deux nombres ayans raison double, ou superparticulièr, ou superbipartiente; ou certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, desquels l'un ny l'autre soit quarré, ou cube; il est evident parce que dessus, qu'ils seront plans, ou solides dissemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, desquels l'un soit quarré, & l'autre non quarré, comme 16. & 20. ils ne sont plans semblables. Car autrement par la 26. p. 8. ils seroient comme quarré à quarré: & 16. estant quarré, par la 24. p. 8. 20. seroit aussi quarré, contre l'hypothese. Par mesme raison, si de deux nombres, l'un est cube, & l'autre ne l'est pas; comme 27 & 40. ils ne sont pas solides semblables. Car s'ils l'estoient, par la 27. p. 8. ils seroient comme cube à cube & 27. estant cube par la 25. p. 8. 40. seroit aussi cube, contre l'hypothese.

Fin du huitiesme Element.



ELEMENT NEVFIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

Si deux nombres plans semblables se multiplient l'un l'autre, le produit sera quarré.

Soient deux nombres plans semblables A & B, lesquels se multiplient mutuellement, produisent C. Je dis que C est quarré. Car A se multipliant soy-mesme produit D quarré. Et puisque A multipliant A & B a produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à C, par la 17. p. 7. Mais A & B estans plans semblables, il tombera entr'eux un moyen proportionnel par la 18. p. 8. Il en tombera donc aussi un entre D & C, par la 8. p. 8. & soit E. Et puisque des trois nombres continuellement proportionnaux D, E, C, le premier D est quarré par la construction; le tiers C sera aussi quarré par la 22. p. 8. ce qui estoit à prouver.

A 4. B 9
D 16. E 14. C 36.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre produisent un nombre quarré; iceux seront plans semblables.

Soient deux nombres A & B qui se multiplians l'un l'autre, produisent C quarré. Je dis que A & B sont plans semblables.

A 4. B 9.
D 6. C 36.

Car que A se multipliant soy-mesme produise D quarré. Veu donc que A multipliant A & B a produit D & C, comme A sera a B, ainsi D a C par la 17. p. 7. Et par la 11. p. 8. entre les quarrés D & C tombe vn moyen proportionnel; Il en tombera donc aussi vn entre A & B, par la 8. p. 8. & partant par la 20. p. 8. A & B seront plans semblables; ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vn nombre cube se multiplie soy-mesme; le produit sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel se multipliant soy-mesme produise B. Je dis que B est nombre cube.

A 8.
E 6. D 4.
F 54. C 1.
B 64 Vnité.

Car soit C costé du cube A: & de C multiplié en soy, soit produit D; il est manifeste que C multipliant D, produit le cube A. Veu donc que C multipliant soy-mesme a fait D, par la 7. com. sent. C mesurera D par C. Mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure aussi C par . L'vnité sera donc mesme partie de C, que C de D; & partant comme l'vnité est a C, ainsi C a D par la 20. d. 7. derechef puisque C multipliant D a fait A par la 7. com. sent. D mesurera A par C. Mais aussi C mesure D par C. Donc C est mesme partie de D, que D de A; & partât comme C a D, ainsi D a A: mais comme C a D, ainsi estoit l'vnité a C. Donc comme l'vnité a C, ainsi C a D, & D a A: ainsi entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Derechef pource que A mesure B par A (car B a esté fait de A multiplié en soy) & que l'vnité mesure aussi A par A; l'vnité sera mesme partie de A, que A de B: & partant comme l'vnité sera a A, ainsi A sera a B. Parquoy puis qu'entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D, par la 8. p. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux E & F. Et veu que les 4 nombres A, E, F, B sont continuellement proportionnaux, & que A premier est cube; aussi B quatriesme sera cube: ce qui estoit a prouuer.

THEOR. 4. PROP. III.

Si vn nombre cube multiplie vn nombre cube; le produict sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produise C. Je dis que C est aussi nombre cube.

A. 8. B. 27.
D. 64. C. 216.

Car si on prend D, produict de A multiplié par soy mesme par la 3. p. 9. il sera cube; & pource que A multipliant B, & soy mesme, a produict C & D; il y aura telle raison de D a C, que de A à B par la 17. p. 7. Et par la 1. p. 8. il tombera deux moyēs proportionnaux entre A & B: il en tombera donc aussi deux entre D & C, par la 8. p. 8. Et partant D estant cube, par la 23. p. 8. C sera aussi cube: ce qui estoit a prouuer.

THEO. 5. PROP. V.

Si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, produict vn nombre cube; le multiplié sera aussi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produise le nombre cube C. Je dis que B multiplié est aussi nombre cube.

A. 8. B. 27.
D 64. C. 216.

Car si on prend D, produict de A multiplié par soy mesme, comme en la precedente: A sera a B comme D a C, & par la 8. p. 8. entre A & B se trouueront deux moyēs proportionaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 23. p. 8. B multiplié sera nombre cube: ce qu'il falloit demonstren.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vn nombre se multipliant soy mesme

produict vn nombre cube ; iceluy nombre sera aussi cube.

Soit le nombre A , lequel multiplié par soy-mesme produise le nombre cube B. Je dis que A est aussi nombre cube.

Car si on prend C, produict de A multiplié par B, il sera cube par la definition de nombre cube; & par la 5.p.9. A sera aussi cube.

THEOR. 7. PROP. VII.

Vn nombre composé estant multiplié par quelque autre; le produict sera solide.

Soit le nombre composé A, lequel estant multiplié par quelque nombre B, produise C. Je dis que C est nombre solide,

Car puisque A est composé, quelque nombre outre l'vnité le mesurera par la 13.d.7. Que D mesure d'oc A par E. Ce qui estant posé, D multipliant iceluy E produira A par la 9. comment. Et puisque B multipliant A a produict C ; iceluy C sera Procréé de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B ; & partant par la 17.d.7. il sera nombre solide, duquel les costez sont D, E, B : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROPO. VIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux ; le troisieme depuis l'vnité fera quarré, & tous les autres qui en laisseront vn: Mais le quatrieme fera cube, & tous les suyans qui en laisseront deux: & le septiesme fera cube & quarré ensemble, & tous les suiuanz qui en laisseront cinq.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux depuis l'vnité, A, B, C, D, E, F. Je dis que le troisieme B sera quarré, ensemble tous les autres qui en laisseront vn de l'ordre, comme D & F: en apres que le quatriesme C est cube, & tous les autres en laissant deux nombres, comme E. Pareillement que le septiesme F est cube & quarré enséble, & d'autres qui pourroient suiure en laissant cinq nombres.

Pour la premiere partie: puis que les nombres sont continuellement proportionaux, comme l'vnité mesure A selon les vnitez qui sont en A, par la 5. cō. sent. ainsi chacun mesurera son suiuant selon les vnitez de A: partant B troisieme qui sera en ce faisant le produit de A multiplié par soy, sera quarré: & par la 22. p. 8. puis que B, C, D, sont continuellement proportionaux, & B est quarré, aussi D sera quarré. Par mesmes discours F sera quarré; & ainsi de tous les autres.

Pour la seconde partie; puis que A multiplié par soy produit B, & B par A produit C; Il est euident par les definitions du 7. que C sera cube, & par la 13 p. 8. C, D, E, F, estans continuellement proportionaux, F sera aussi cube. Ainsi de tous les autres en laissant deux.

Pour la troisieme partie. Il est euident par les deux precedentes parties que F a esté prouué & quarré & cube; il en sera ainsi de tous les autres.

THEOR. 9. PRO. IX.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, & que celuy qui suit l'vnité soit quarré; aussi tous les autres seront quarrés: que s'il estoit cube: aussi les autres seront cubes.

vnité	A.	B.	C.	D.	vnité.	A.	B.	C.	D.
1.	4.	16.	64.	256.	1.	8.	64.	512.	4096.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement

proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D. Je dis que si le premier A est quarré, que tous les autres seront aussi quarrés: Que si le premier A est cube, que tous les autres seront aussi cubes.

Pour la premiere partie: il est euident comme en la precedente, que puis que les nombres sont continuellement proportionnaux, comme l'vnité mesurera A par les vnitez qui sont en A, ainsi A mesurera B par les vnitez qui sont en A; & par consequent B sera nombre quarré: mais A est aussi quarré par l'hypothese; & par la 22.p.8. C sera aussi quarré: & par la mesme raison B estant quarré, aussi sera D. Et ainsi de tous les autres

Pour la seconde partie: Si A est cube, aussi tous les autres seront cubes: Car il est euident que A mesurera B par soy-mesme comme en la premiere partie: C'est à dire que A multiplié par soy produira B, lequel estant cube, B sera aussi cube par la 3.p.9 Mais tous les suivans sont en la raison de A à B, & par la 25.p.8. Ils seront tous cubes.

THEOR. 10. PROP. X.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré: aussi pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisieme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent vn. Que si celuy qui suit l'vnité n'est nombre cube: aussi pas vn autre ne sera cube, sinon le quatrieme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent deux.

Soient tant de Vnité. A. B. C. D. E. F.
nombres qu'on 1.^{er} 3. 9. . 27. 81. 243. 729
voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D, E, F, & que A qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré. Je dis pour la premiere partie, que pas vn autre ne sera quarré,

Don le troisieme B, ou D, ou F en laissant C & E.

Car par la 8. p. 9. B, D, F sont quarréz: Que si quelqu'un veut dire qu'il y en ayt d'autres comme C, il faudroit par la 22 p. 8. que A fust aussi nombre quarré (estans C, B, A, continuellement proportionnaux & C quarré) ce qui est contre l'hypothese. Par mesme discours on monstrera que pas vn autre ne peut estre quarré sinon ceux qui ont esté exceptez.

Pour la seconde partie: si A n'est cube; aussi pas vn autre sera cube, sinon C & F, & tous les autres qui en laisseront deux.

Car par la 8. p. 9. C & F sont cubes: que si quelqu'un veut dire que D soit aussi cube; il faudroit par la 23. p. 8. que A le soit, contre l'hypothese. Par mesme deduction on monstrera tous ceux qui ne peuvent estre cubes.

THEOR. II. PROP. XI.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux: le plus petit mesure le plus grand selon quelqu'un de ceux qui sont entre les proportionaux.

Depuis l'unité A soient tant de nombres A. B. C. D. E. F.
qu'on voudra continuellement propor- 1. 3. 9. 27. 81. 243.
tionnaux, B, C, D, E, F. Je dis que B mesurera F par le nombre E.

Ceste demonstration est aisée. Car en raison egale l'unité A sera à E, comme B est à F. Et par les def du 7. comme l'unité A mesure E par E: ainsi B mesurera F par E.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si depuis l'unité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux: Autant de nombres premiers mesureront le nō-

bre d'apres l'vnité, qu'il y en aura qui mesureront le dernier.

Soient depuis l'vnité A, tant de nombres **A.B.C.D.E.F.**
qu'on voudra continuellement propor- **1. 3. 9. 27. 81. 3.**
tionnaux, B, C, D, E. Je dis qu'autant de nombres premiers se
trouueront mesurer le dernier E, qu'il y en a qui mesurent B,
lequel suit l'vnité

Car si F nombre premier mesurant E dernier, ne mesure pas
aussi B; B & F seront premiers par la 31. p. 7. Et d'autant que B
multiplié par soy produict C; C & F seront premiers par la 17.
p. 7. Item B multipliant C produict D; D & F seront premiers
par la 26. p. 7. Pareillement B multipliant D produict E; par-
tant E & F seroient aussi premiers contre l'hypothese; Donc
F mesuroit aussi B.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on
voudra continuellement proportionnaux,
& que celui qui suit l'vnité soit premier: Le
plus grand ne sera mesuré par aucun autre nom-
bre, sinon par ceux qui sont entre les propor-
tionnaux.

Depuis l'vnité **A.1. B.3. C.9. D.27. E.81.**
A soient tant de **K.100. L.100. H.100. G.80.**
nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B,
C, D, E, & que B qui suit l'vnité soit premier. Je dis que le
plus grand E ne sera mesuré par aucun autre que l'un d'eux
B, C, D.

Autrement, s'il est possible, que G mesure E; G ne peut es-
tre autre nombre premier que B, autrement il faudroit par la
12. p. 9. qu'il mesurast B, qui a esté posé nombre premier; G se-
ra donc composé, & mesuré par quelque nombre premier par
la 33. p. 7. qui ne peut estre autre que B; d'autant qu'il mesure-
ra E, par la 11. com. sent. & par la 12. p. 9. Il faudroit qu'il me-

fuſſſt auſſi B nombre premier : ce qui eſt abſurde. Il n'y a d'oc point d'autre nôbre premier que B, qui meſure G. Que maintenant B meſure G par H : & puis que B multipliant D & H produit E & G, par la 17. p. 7 comme E à G, ainſi D à H: mais G meſure E; donc auſſi H meſurera D. On prouvera comme deſſus, qu'il ne peut eſtre premier ny meſuré par vn autre nôbre premier que B: Car ſi H eſtoit premier, meſurant D, il meſureroit auſſi B : ce qui ne ſe peut faire, ayant eſté poſé premier. Que ſi H eſt compoſé, celui nombre premier qui le meſurera ſera B, ou ſi c'eſt vn autre, ceſt autre meſurera auſſi D, & celui qui meſure D, c'eſt à ſçavoir B, par la 11. com. ſent. ce qui eſt abſurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui meſure H; & poſant que ce ſoit par le nombre I. On prouvera auſſi comme deſſus, que comme H meſure D, ainſi I meſure C, & que I ne peut eſtre nombre premier, ny meſuré par aucun autre nombre premier ſinon B. Donc que I meſure C par le nombre K: par meſmes raiſons, comme I meſure C, ainſi K meſurera B nombre premier; il faut donc qu'à tout le moins il luy ſoit egal; ce qui eſt impoſſible; d'autant que B eſt moyen proportionnel entre K & I, par la 20. p. 7. puis que C'eſt produit de K multiplié par I, & qu'il eſt auſſi le produit de B multiplié par ſoy-meſme. Partant aucun nombre ne meſurera E, ſinon B, C, D, qui le meſurent, par la 11. p. 9. ce qu'il falloit prouver. •

THEO. 14. PROP. XIII.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent eſtre meſurez par certains nombres premiers, ne ſera meſuré par aucun autre nôbre premier, que ceux qui le meſuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre de tous A. B. C. D. E. F.
ceux qui peuvent eſtre meſurez par les 3. 30. 2. 3. 5. 00. 00,
nombres premiers B, C, D. Je dis qu'aucun nombre premier autre que B, ou C, ou D ne meſurera A.
Autrement, ſ'il eſt poſſible que E autre nombre premier meſure A par F : donc E multiplié par F produira A, lequel eſt

mesuré par B, C, & D ; & par la 32. p. 7. B, C, D, mesureront l'un ou l'autre de E, ou F : Ils ne mesureront pas E autre nombre premier que pas un d'iceux , ils mesureront donc F, lequel estant plus petit que A, iceluy A ne seroit le plus petit de ceux qui peuvent estre mesurez par B, C, D. Donc E ne pouuoit mesurer A.

SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy (apres Commandinus & Clavius) en nombres, les 10 premiers theoremes, lesquels sont demonstrez en lignes au second liure :

I.

S'il y a deux nombres, l'un ou l'autre desquels soit couppe en tant de parties qu'on voudra ; le nombre plan compris sous iceux deux nombres, est egal aux nombres plans contenus du nombre indiuise & de chaque partie de celuy qui est couppe.

Soient deux nombre AB & C desquels AB est diuise en AD, DE, & B ; & soit fait F, de C en AB : Item GH, de C en AD ; & HI, de C en DE ; & IK, de C en EB. Je dis que F est egal aux nombres GH, HI, IK, c'est à dire à tout le nombre GK composé d'iceux. Car puis que C multipliant AB, a produit F : AB mesurera F par C, c'est à dire que AB sera la partie de celuy F, denomnee par C. Par la mesme raison AD sera la partie de GH : & DE de HI : & EB de IK, d'nomnee par C, sçavoir est la mesme que AB de F. Mais il est euident par la 5 p 7. que AB est la mesme partie de GK, que AD de GH parquoy aussi AB sera mesme partie de GK, que AB de F : & partant par la 4. com sent. F & GK sent egal entr'eux. Ce qui est it proposé.

II.

Si un nombre est couppe en deux parties ; les nombres pris compris sous le tout , & vne chacune partie, sont egaux au nombre quarré du tout.

Car le nombre AB soit diuise en AC, CB. Je dis que les nombres qui seront produits du total AB, & des parties AC, CB, seront ensemble egaux au quarré de AB. Car est pris le nombre D egal à AB, par le 1. theo le nombre fait de D, c'est à dire de AB en AB, sçavoir est le quarré de celuy AB, sera egal aux nombres qui seront produits de D, c'est à dire de AB en AC, & en CB : ce qui estoit proposé.

Le mesme sera demonstre, si AB est couppe en plus de deux parties

comme on peut veoir par la seconde figure apposee. $A...C..D..B$
 Car par la mesme raison, le nombre faict de E , c'est $E.....$
 à dire de AB en AB , c'est à sçavoir le quarré de AB sera egal aux nō-
 bres, qui seront produicts de E , c'est à dire de AB , en chasque partie
 AC, CD, DB .

III.

Si un nombre est couppe en deux parties ; le nombre plan
 compris du total , & de l'une des parties , est egal à celuy-là
 contenu des parties , & au quarré faict d'icelle partie premie-
 rement prise.

Soit le nombre AB diuisé en AC, CB . Je dis $A....C.....B$
 que le nombre pla produit de AB en la partie AC , $D....$
 est egal à celuy faict des parties AC, CB , & au quarré d'icelle partie A
 C . Car estant pris le nombre D egal à AC, CB , & au quarré d'icelle
 partie AC . Car estant pris le nombre D egal à AC ; par le 1. theo le
 nombre faict de D , c'est à dire de AC en AB ; ou (qui est le mesme) de
 AB en AC , sera egal aux nombres faits de D , c'est à dire de AC en C
 B , & de D , c'est à dire de AC en AC , sçavoir est le quarré de AC . Cq
 qui estoit proposé.

IIII.

Si un nombre est diuisé en deux parties ; le quarré faict du
 tout est egal aux deux quarréz faicts des deux parties , & a
 deux fois le nombre plan contenu d'icelles parties.

Soit le nombre AB diuisé en AC, CB . Je dis que le $A....., C....B$
 nombre quarré faict de AB , est egal aux quarréz des parties AC, CB ,
 avec deux fois le nombre plan faict de AC en CB . Car par le 1. theo.
 le nombre quarré de AB , est egal aux nombres faicts de AB en AC ,
 & en CB . Mais par le 3. theo. le nombre faict de AB en AC , est egal
 au nombre produit de AC en CB , & au quarré d'iceluy AC : Item
 le nombre produit de AB en CB est par mesme raison egal au nōbre
 produit de AC en CB , & au quarré de CB . Donc le nombre quarré
 faict de AB , est pareillement egal aux nombres quarréz des parties A
 C, CB , & a deux fois le nombre faict de AC en CB . Ce qui estoit pro-
 posé.

V.

Si une ligne droicte est diuisee en deux parties egales , &
 en deux inegales; le nombre plan contenu des parties inega-
 les, avec le quarré du nombre qui est entre les deux sections,
 est egal au quarré faict de la moitié du nombre total.

Soit le nombre AB , couppe en deux parties egales AC, CB , & en
 deux inegales AD, DB . Je dis que le nombre plan compris des parties
 inegales AD, DB , avec le quarré du nombre CD , est egal au quarré
 du nombre BC . Car puisque par le theo. pre- $A..... C...D.. B$

ced. le nombre quarré de CB, est egal aux quarréz des parties CD, DB, avec deux fois le nombre fait de CD, DB; Et par le 3. theo. le nombre plan compris de CD, DB, ensemble avec le quarré de DB, est egal au nombre produit de CB en DB; sera fait que si ce nombre fait de CB, en DB, est pris pour le quarré de DB, avec le nombre fait de CD en DB, aussi le nombre quarré de CB, est egal à l'autre quarré de CD, ensemble à l'autre nombre fait de CD, en DB, Et au nombre produit de CB, c'est à dire de AC en DB: Et partant par le 1. theor. le nombre fait du total AD en DB, est egal à x nombres produits de CD en DB, Et de AC en DB. Donc le quarré de CB, sera egal au quarré de CD, Et au nombre fait de AD en DB. Ce qui estoit proposé.

V I.

Si un nombre est diuisé en deux parties égales, & à iceluy est adioulté quelque autre nombre; le nombre qui est fait du tout avec l'adioulté en l'adioulté, avec le quarré de la moitié du nombre, est egal au quarré du nombre composé de la moitié de l'adioulté.

Soit le nombre AB couppe en deux parties égales A...C., B. D AC, CB; Et à iceluy soit adiouste le nombre BD. Je dis que le nombre fait du tout AB Et de l'adiouste BD, comme un seul, sçavoir est de AD, en l'adiouste BD, avec le quarré de la moitié CB, est egal au quarré fait de la moitié CB Et adiouste BD, comme un seul, c'est à dire au quarré de CD. Car puis que par le 4. theo. le quarré de CD est egal aux quarréz des parties CB, BD, avec deux fois le nombre plan compris de CB, BD, c'est à dire à x quarréz des parties CB, BD, Et aux nombres contenus de CB, BD, Et de AC, ED: Mais par le premier theo. le nombre fait de AD en BD est egal aux nombres contenus sous CB, BD, Et sous AC, BD, Et sous AD, BD c'est à dire au quarré de BD. Donc prenant le nombre fait de AD, en DB, pour le quarré de la partie BD, avec les nombres faits de CB en BD, Et de AC en BD; le quarré de CD sera egal à l'autre quarré de CB, ensemble avec le nombre fait de AD en BD: c'est à dire que le nombre fait de AD en BD, avec le quarré de CB, est egal au quarré de CD: ce qui estoit proposé.

V I I.

Si un nombre est diuisé en deux parties; le quarré du tout avec le quarré de l'une des parties, est egal à deux fois le nombre fait du tout en icelle partie, ensemble avec le quarré de l'autre partie.

Soit le nombre AB couppe es parties AC, CB. Je dis que le quarré de AB, avec celui de la partie CB, est egal à deux fois le nombre fait de AB en CB, ensemble avec le quarré de la partie

partie AC . Car puisque par le 4. theor. le quarré de AB est egal aux quarréz des parties AC , CB , & a deux fois le nombre fait d'icelles AC , CB ; si on adiouste le commun quarré de CB , les quarréz de AB , CB , seront ensemble egaux aux quarréz de AC , CB , DB , avec deux fois le nombre produit de AC en CB : mais par le 3. theor. le nombre fait de AC en CB avec le quarré de CB , est egal au nombre produit de AB en CB ; & partant le double de l'un est egal au double de l'autre. Donc si pour le double du nombre fait de AC en CB , & quarré de CB , on prend le double du nombre produit de AB en CB , les quarréz des nombres AB , CB seront ensemble egaux à deux fois le nombre de AB en CB , avec le quarré de l'autre partie AC . Ce qui estoit proposé.

VIII.

Si un nombre est diuisé en deux parties; quatre fois le nombre fait du tout en vne partie, avec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré du nombre composé du tout & de la partie premierement prise.

Soit le nombre AB couppeé es parties AC , CB . $A....C...B...D$
 Je dis que le nombre fait de AB en la partie CB , ensemble avec le quarré de l'autre partie AC , est egal au quarré du nombre composé de AB & de la partie CB . Car estant adiouste le nombre BD egal à CB , par le 4. theor. le quarré du tout AD est egal aux quarréz des nombres AB , BD , ensemble avec le nombre double de AB en BD ; c'est à dire aux quarréz des nombres AB , CB , ensemble avec deux fois le nombre de AB en CB : Mais par le 7. theor. les quarréz de AB , CB , sont egaux à deux fois le nombre contenu de AB , CB , avec le quarré de AC : donc si pour les quarréz de AB , CB , on prend le nombre double de AB en CB , & le quarré de AC ; le quarré fait de AD est egal à 4 fois le nombre fait de AB en CB , ensemble avec le quarré de l'autre partie AC : ce qui estoit proposé.

IX.

Si un nombre est couppeé en deux parties egales, & en deux inegales; les quarréz faits des parties inegales, sont doubles des quarréz faits de la moitié, & de la section du milieu.

Soit le nombre AB diuisé es parties egales AC $A.....C...D..B$
 CB ; & es inegales AD , DB . Je dis que les quarréz des parties inegales AD , DB , sont doubles des quarréz de la moitié AC , & du nombre entre-moyen CD . Car puisque par le 4. theo. le quarré du nombre AD est egal aux quarréz des nombres AC , CD ensemble avec deux fois le nombre fait de AC en CD ; si on adiouste le commun quarré de DB , les quarréz des parties AD , DB , seront egaux aux quarréz des parties AC , CD , DB , ensemble avec deux fois le nombre produit

de AC en C , D c'est à dire de CB en CD . Mais par le 7. theor. les quarréz de CB , c'est à dire de AC , & CD sont égaux au quarré de DB & a deux fois le nombre de CB en CD . Donc si pour le quarré de DB , & deux fois le nombre faict de CB en CD ; on prend les quarréz de AC, CD , les quarréz de AD, DB seront égaux au double des quarréz des parties AC, CD ; & partant ces quarréz la sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.

X.

Si vn nombre est diuisé en deux parties égales, & a iceluy on adiouste quelque autre nombre; le quarré du nombre composé d'iceux, & le quarré de l'adiouste, sont ensemble doubles des quarréz de la moitié, & de celuy faict du nombre composé d'icelle moitié & de l'adiouste.

Soit le nombre AB diuisé en deux parties égales $A.....C....B...D$ gales AC, CB , & à iceluy soit adiouste le nombre BD . Je dis que le quarré du nombre AD compose du tout AB , & de l'adiouste BD , & le quarré d'iceluy nombre adiouste BD , sont ensemble doubles des quarréz faicts de la moitié AC , & de CD composé de la moitié CB & de l'adiouste BD . Car puisque par le 4. theo le quarré de AD est égal aux quarréz de AC, CD , & a deux fois le nombre produit de AC , c'est à dire de CB en CD ; si on adiouste le commun quarré du nombre BD , les quarréz des nombres AD, BD seront égaux aux quarréz des parties AC, CD, BD , ensemble avec deux fois le nombre produit de CB en CD . Mais par le 7. theor. les quarréz de CB , ou AC , & CD sont égaux au quarré de BD , & a deux fois le nombre faict de CB en CD . Donc si pour le quarré de BD , & deux fois iceluy nombre produit de CB en CD , on prend les quarréz des nombres CB, CD , c'est à dire des nombres AC, CD : les quarréz des nombres AD, BD seront égaux a deux fois les quarréz des nombres AC, CD ; & partant ceux-la sont doubles de ceux-cy: ce qui estoit proposé.

THEOR. 15. PROP. XV.

Si trois nombres sont continuellement proportionaux, & les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison avec iceux: le composé de deux tels que l'on voudra, sera premier à l'autre.

Soient les trois nombres continuellement A. 9. B. 12. C. 16. proportionaux A, B, C, les plus petits qui D. 3. E. 4. soient en la mesme raison : Je dis que les deux ensemble A & B sont premiers a C; ou bien A & C sont premiers a B.

Car si on prend D & E les plus petits qui soient en la mesme raison par le scholie de la 35. p. 7. il est evident par ce qui a esté demonsté à la 2. p. 8. que A & C sont les quarrés de D & E, & que B est le produict de D multiplié par E: & par le 3. theo. du scholie precedent D & E comme vn seul nombre multiplié par D, produira A & B cōme vn seul nombre. Mais D & E estans premiers entr'eux par la 24. p. 7. aussi tous deux ensemble, seront premiers au seul E, par la 30. p. 7. ou à son carré C, par la 27. p. 7. Et par la mesme proposition D sera premier a C, & par la 26. p. 7. le produict de D & E comme vn seul nombre multiplié par D (sçavoir A & B ensemble) sera premier a D. Par mesme discours on prouuera que B & C ensemble sont premiers a A.

Pour la seconde partie, ie dis que A & C ensemble sont premiers a B produict de D multiplié par E. Car D & E estans premiers entr'eux par la 24. p. 7. & premiers au composé des deux par la 30. p. 7. leur produict B sera premier au composé des deux par la 26. p. 7. & par la 27. p. 7. le produict de D & E cōme vn seul nōbre, multiplié par soy, sera premier a B. Mais par le 4. theo. du scholie precedent, iceluy produict de DE comme vn seul nombre multiplié en soy, est egal à A & C & deux fois B ensemble: donc A & C avec deux fois B, sont premiers a B. Or en ostant les deux fois B; il est manifeste que le reste A & C sera premier a B. Car autrement ils seroient composez & leur commune mesure mesureroit aussi deux fois B; & par consequent aussi le composé de A & C & deux fois B, qui ne seroit en ce faisant premier a B, contre ce qui a esté demonsté cy dessus. Donc le composé de A & C est premier a B, ce qu'il estoit a prouuer.

THEO. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, il ne sera pas cōme le premier au second, ainsi le second à quelque autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux. $A.3. B. C. 00.$
 $A \& B.$ Je dis que cōme A est à B , ainsi B n'est pas à quelque autre, c'est à dire qu'à A , & B on ne peut trouver vn troisieme proportionnel.

Autrement, s'il est possible, soit comme A à B ainsi B à vn autre, c'est à sçauoir a $C.$ Par la 23. p. 7. $A \& B$ estans premiers, ils seront les plus petits qui soient en la mesme raison, & par la 21. p. 7. A mesurera B , & B mesurera $C.$ Mais aussi A mesure soy mesme; donc A mesure iceux $A \& B$: Ainsi $A \& B$ ne seroient premiers, contre l'hypothese. Donc il n'est pas cōme A à B , ainsi B à $C.$ Par mesme raison, il ne sera pas cōme B à A , ainsi A , à quelque autre.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, desquels les extremes soient premiers entr'eux; il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C continuellement proportionnaux, desquels les extremes $A \& C$ soient premiers entr'eux. Je dis qu'il ne se peut faire que comme A est à B , ainsi C soit à quelque autre. $A.3. B.4. C.5. D.00$

Car s'il est possible, comme A est à B , ainsi soit C à $D.$ En changeant comme A sera a C , ainsi B à D : & par la 23 p. 7. $A \& C$ estans premiers, ils seront les plus petits en leur raison: & par la 21. p. 7. ils mesureront egaleme^{nt} $B \& D$; sçauoir est A iceluy B , & C iceluy $D.$ Et pource que comme A à B , ainsi B à C ; & A mesure B , aussi B mesurera C : & par la 11. com. sent. A mesurera aussi C ; & iceluy A mesurant soy-mesme; il mesurera iceux $A \& C$ premiers entr'eux: ce qui est absurde. A n'est donc pas a B , comme C à $D.$ Par mesmes raisons, il ne sera pas comme C à B , ainsi A à quelque autre.

PROB. 1. PROP. XVIII.

Deux nombres estans donnez, considerer

l'on pourra trouver vn troisieme proportionnel à iceux.

La demonstration de ceste proposition est aisée. Car il n'y a qu'à considerer si le produit du second nombre multiplié par soy mesme, peut estre mesuré, c'est à dire diuisé par le premier: car s'il peut estre mesuré ou diuisé, il est euidēt par la 20. p. 7. que le quotient sera troisieme nombre proportionnel; siuō, on n'en trouuera point, puis que par la susdite 20. p. 7. trois nombres estans prop. le produit des extremes doit estre egal au produit du milieu.

PROB. 2. PROP. XIX.

Estans donnés trois nombres, consideret l'on pourra trouver vn quatrieme proportionnel à iceux.

La demonstration de ceste pro. est aussi aisée. Car il faut seulement considerer si le produit des second & troisieme peut estre mesuré par le premier; s'il peut estre mesuré ou diuisé, il est euidēt par la 19. p. 7. que le quotient sera 4. prop. si non, on n'en trouuera point, puis que par la susdite 19. p. 7. 4. nombres estans prop. le produit du second & troisieme doit estre egal au produit du premier & quatrieme.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, il s'en trouuera encores d'autres.

Soit multitude quelcōque de nombres premiers A, B, C. Je dis qu'il s'en trouuera encores d'autres.

A...2. B...3 C.....5
D.....E.F.
G.....

Car si l'on trouue le nombre DE le plus petit de tous ceux

qui peüent estre mesurez par les trois nombres A, B, C, par la 38. p. 7. & a iceluy on adiouste l'vnité EF, le tout DF sera premier ou non : S'il est premier, on a vn autre nombre premier que pas vn des proposez : s'il n'est premier, il sera mesuré par quelque nombre premier, par la 34. p. 7. Soit donc mesuré par G : il est euident que G ne peut estre pas vn des trois A, B, C : car s'il estoit quelqu'un d'iceux, il mesureroit DE, & le tout DF : Partant par la 12. com. sent. il mesureroit aussi l'vnité EF, luy qui est vn nombre. Donc G est autre nombre premier que pas vn des proposez. Et en ceste façon on en trouuer ainfiuement d'autres.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra sont adioustez, le tout sera pair.

Ceste demonstration est aisée : d'autant que, par la 6. d. 7. le nombre pair peut estre diuisé en deux parties égales; partant les moictiez de chacun des proposez feront ensemble la moitié du tout : Et par consequent le tout sera pair, puis qu'il peut estre diuisé en deux également, par la susdicte 6. d. 7.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si plusieurs nombres impairs sont adioustez, & que le nombre d'iceux soit pair; le tout sera pair.

Ceste demonstration est aussi aisée : d'autant que si de chacun d'iceux nombres impairs on oste l'vnité, on les rendra pairs, & par la 21. p. 9. leur tout sera pair : Et pour autant que leur multitude est en nombre pair, les vnitez retranchees feront vn nombre pair, lequel avec tout le reste, qui est de la même nature, le tout sera pair par la 21. p. 9.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si plusieurs nombres impairs sont adioustez,

& que le nombre d'iceux soit impair ; le tout sera impair.

Ceste demonstration est aussi aisee . Car si on retranche vn nombre impair , tout le reste fera vn nombre pair par la precedente : Et si du restant impair on oste l'vnité ; ce qui restera sera pair , lequel adiousté à tout le reste fera vn nombre pair par la 21. p. 9. Partant il est euident, que si on adiouste l'vnité restant, que le tout sera impair.

THEO. 22. PROP. XXIII.

Si d'un nombre pair , on oste vn nombre pair , le reste sera pair.

Ce qui est euident : Car si le reste n'estoit pair , en ostant l'vnité on le rendroit pair : Et le retranché avec iceluy feroit aussi vn nombre pair par la 21. p. 9. & partant adioustant l'vnité otee, le tout seroit impair , ce qui est absurde ; puis qu'il a esté posé pair.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si d'un nombre pair, on oste vn nombre impair , le reste sera impair.

Cela est euident : Car si le reste estoit pair , & le tout aussi pair, le retranché ne pourroit estre impair par la 24. p. 9.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si d'un nombre impair, on oste vn nombre impair , le reste sera pair.

La demonstration de ceste prop. est aussi euidente: Car si le reste estoit impair ; le reste & le retranché feroient vn nombre pair par la 22. p. 9. contre l'hypothese.

THEOR. 25. PRO. XXVII.

Si d'un nombre impair on oste un nombre impair, le reste sera impair.

Cecy est aussi ayse à demonstrier : Car si le reste estoit pair, le reste & le retranché feroient un nombre pair, par la 21. p. 9. contre l'hypothese.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si un nombre impair multiplie un nombre pair, le produit sera pair.

La demonstration de ceste prop. est aussi euidente: Car par les def. de 7. le produit contiendra autant de fois le multipliant, qu'il y a d'vnitez au multiplié nombre pair : Et par ainsi le produit sera la somme de plusieurs nombres impairs, desquels la multitude est en nombre pair, & partant par la 22. p. 9. le produit sera pair.

S C H O L I E.

On demonstrera en la mesme maniere, que si un nombre pair multiplie un nombre pair; le produit sera aussi pair.

THEOR. 27 PROP. XXIX.

Si un nombre impair multiplie un nombre impair; le produit sera impair.

Cela est aussi euident: Car comme en la precedente, le produit sera vne addition de plusieurs nombres impairs, desquels la multitude sera en nombre impair; & partant par la 23. p. 9. le tout, ou le produit sera impair.

S C H O L I E.

Clavius demonstre en cest endroit apres Campanus les deux theoremes suivans.

Vn nombre impair mesurant, vn nombre A... 3. C... 2.
pair, il se mesure par vn nombre pair. B..... 6.

Soit le nombre impair A, lequel mesure le nombre pair B par C. Je dis que C est pair. Car s'il est impair; B produict de A impair multiplié par C impair, sera impair, par la 29. p. 9. ce qui est absurde: car il a esté posé pair. Donc C est pair.

Vn nombre impair mesurant vn nombre A... 3 O..... 5
impair, il le mesure par vn nombre impair. B..... 15

Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre impair B par C. Je dis que C est impair. Car s'il est pair; B faict de A impair par C pair, sera pair par la 28. p. 9. ce qui est contre l'hypothese, donc C est impair.

Tout nombre qui mesure vn nombre impair, est aussi impair. A..... 15
B..... 5 C... 3

Soit le nombre impair A, lequel B mesure par C. Je dis que B est impair. Car C estant multiplié par B produira A par la 9. com. sent. & si B n'est impair, mais pair, le produict A sera pair par la 28. p. 9. ce qui est absurde, puis qu'il a esté posé impair. Donc B qui mesure A impair, n'est pas nombre pair, mais impair.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si vn nombre impair mesure vn nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre pair B. Je dis qu'il mesurera aussi sa moitié C. A... 3 D... 4 E... 2
B..... 12
C..... 6

Car puis que A mesure B, soit par le nombre D; iceluy sera pair: d'autant que s'il estoit impair, estant multiplié par A impair, leur produict seroit aussi impair par la 19. p. 9. contre l'hypothese; D sera donc pair; & partant se pourra diuiser en deux également par la 9. def. du 7. E soit donc la moitié de D. Parquoy comme D sera à sa moitié E, ainsi B sera à sa moitié C: & en changeant, comme D sera à B, ainsi E sera à C. Mais A mesurant B par D: aussi D mesurera B par A par la 8. com.

sent. & partant D sera la partie de B denommee par A: dōc
aussi E sera la partie de C denommee par le mesme A: & par-
tant A mesurera C, par la 47.p.7. ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si vn nombre impair est premier à quelque
nombre, il sera aussi premier à son double.

Soit le nombre impair A, premier à quel-
que nombre B, duquel le double soit C. Je
dis que A est aussi premier à C. Car si A & C ne sont premiers
entr'eux, quelque nombre mesurera iceux, & soit D, lequel
sera impair, comme nous auons démontré au scholie de la
29.p.9. Et puis qu'il mesure le nombre pair C (car C est pair,
puis qu'il a moitié B) il mesurera aussi sa moitié B par la prop.
precedente. Mais il mesure aussi A. Donc D mesure iceux A
& B, premiers entr'eux: ce qui est absurde. Il n'y aura donc
point de nombre qui mesure A & C; & partant ils seront pre-
miers entr'eux.

A ... 3 B... 4
C..... 8 Doo

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui suiuent le binaire
en progression double, sont seulement paire-
ment pairs.

Soient depuis le binaire
A tant de nombres qu'on
voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en rai-
son double. Je dis qu'ils sont tous pairement pairs, & qu'il n'y
en a point d'autres.

Vnité. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'vnité, & puisque depuis l'vnité
A, B, C, D, E, sont cōtinuellement prop. le plus petit mesurera
le plus grand selon quelqu'un de ceux qui sont entre les prop.
port. par la 11.p.9 lesquels estans tous pairs, il est euident par
les def. du 7. que B, C, D, E, seront pairement pairs, & tous les

autres qui pourroient suivre en la mesme progression. Mais pour autant que A prochain de l'vnité, est nombre premier, par la 13. p. 9. aucun autre nombre ne mesurera aucun de tous ceux qui sont en la progression, sinon ceux de la mesme progression, lesquels estans tous pairs, iceux nombres seront pairement pairs seulement.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impair, iceluy nombre sera seulement pairement impair.

Soit le nombre A duquel la moitié B est impair, je dis que A sera pairement impair seulement.

Car puisque B est moitié de A, il le mesurera par C nombre binaire, & par les def. 7. A sera pairement impair: Mais qu'il soit seulement pairement impair on le prouuera ainsi. S'il estoit pairement pair, un nombre pair comme D le mesurerait par quelque nombre pair, comme E. Et par la 9. com. sent. A est fait de D en E: mais le mesme A est aussi fait de la moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19. p. 7. le produit de C par B, estant egal au produit de E en D, comme C sera à E, ainsi D à B. Mais C nombre binaire mesure E: il faudroit donc aussi que D pair mesurast B, qui est un nombre impair: ce qui est impossible. Donc A estoit nombre pairement impair seulement.

A. 30.

B. 15.

C. 2.

D. 60.

E. 30.

Si un nombre pair n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire, & que sa moitié ne soit nombre impair, il sera pairement pair, & pairement impair.

Cette demonstration est aisée. Car sa moitié étant pair, il sera mesuré par un nombre pair selon le binaire qui est aussi pair. Et pour autant qu'il n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire; si on le diuise tousiours en deux également, on viendra à une moitié impaire auparavant que paruenir ius-

ques au binaire, & par consequent il sera mesuré par vn nombre impair: & par les def. 7. il sera pairement pair, & pairement impair.

THEOR. 33. PROP. XXXV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que du second & dernier on soustraiet le premier; cōme le reste du second sera au premier, ainsi le reste du dernier sera à tous les precedens.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux A, B, C, D, & du second B on retranche FG egal au premier A: Et du dernier D l'on retranche KL aussi egal à A: Je dis que comme le reste BF sera à A,

A 8
B 4 F 8 G
C 18
D 9. H 6. I 4. K 8. L

ainsi l'autre reste DK sera à tous les trois A, B, C ensemble.

Car si de DL on retranche LI egal à BG, il est euident que KI sera egal à BF, (estant KL egal à FG) & si on retranche LH egal à C; comme les quatre nombres D, C, B, A, sont continuellement proportionnaux, aussi seront leurs egaux DL, HL, IL, KL & en diuisant DH sera à HL, cōme HI à IL, ou IK à KL; & partant par la 12. p. 7. tous les antecedans DH, HI, IK, (c'est à dire DK) seront à tous les consequens HL, IL, KL, (c'est à dire A, B, C,) commel'vn des antecedans IK, est à l'vn des consequens KL, ou leurs egaux BE à A, ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Si depuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raison double, iusques à ce que le tout soit nombre premier: iceluy tout multiplié par le dernier produira vn nombre parfait.

Soient depuis l'vnité A, B, C, D, continuellement doubles, la somme desquels & de l'vnité soit E nombre premier. Je dis que si E est multiplié par le dernier D, que le produit F G sera nombre parfait.

Car si on prend HI double de E; K double de HI, & L double de K, ainsi des autres; E, HI, K, L, seront continuellement proportionnaux en la raison de A, B, C, D; & en raison egale A sera à D comme E à L, & par la 19. p. 7. A multiplié par L, sera le produit de D par E, sçavoir F G : mais A étant binaire, FG sera double de L; ainsi E, HI, K, L, FG, seront continuellement proportionnaux. Maintenant de HI soit retranché HM égal à E; & de FG soit retranché FN, aussi égal à E : par la 35. p. 9. comme HM est égal à E (d'autant que HI estoit double de E) ainsi NG sera égal à E, HI, K, L ensemble. Mais FN égal à E, est aussi égal à l'vnité & à A, B, C, D ensemble: Et par conséquent FG sera égal à l'vnité, & à A, B, C, D, E, HI, K, L, ensemble: & puis que FG a été fait de E multiplié par D, par la 7. com. sent. D mesurera FG, & partant par la 11. com. sent. l'vnité, & les nombres A, B, C, qui par la 11. p. 9. mesurent D, mesureront le mesme FG. Derechef puis que L mesure FG; aussi par la 11. com. sent. les nombres E, HI, K, lesquels par la 11. p. 9. mesurent L à cause de la raison double; mesureront le mesme FG: ainsi l'vnité & tous les nombres A, B, C, D, E, HI, K, L mesurent iceluy FG. Parquoy si FG ne peut estre mesuré par aucun autre nombre que ceux-cy, par la 22. def. du 7. Il sera nombre parfait étant égal à toutes ses parties aliquotes.

Questi on pense qu'il puisse estre mesuré par quelque autre nombre autre que les deuant dits; que D le mesure s'il est possible, selon P: donc D multipliant P produira FG par la 9. com. sent. Mais le mesme FG est aussi produit de E en D. Donc le mesme nombre est fait de E premier par D 4. & de P second en O 3; & partant comme E à P, ainsi O à D par la 19. p. 7. & puis que A, B, C, D depuis l'vnité sont continuellement proportionnaux, & A proche de l'vnité est premier, par la 13. p. 9. nul autre nombre que A, B, C, mesurera le dernier D: & O est posé n'estre le mesme qu'aucuns d'iceux A, B, C; O ne mesurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D, ainsi estoit E à P: Donc aussi E ne mesurera P: & puis que E est premier, par la 31. p. 7. E & P seront premiers entr'eux; & partant les moindres en leur raison par la 23. p. 7. & par la 21. p. 7. E mesu-

Vnité.

A...2

B...4

C.....8

D.....16

E. 31.

H. 31. M 31 I

K. 124.

L 248.

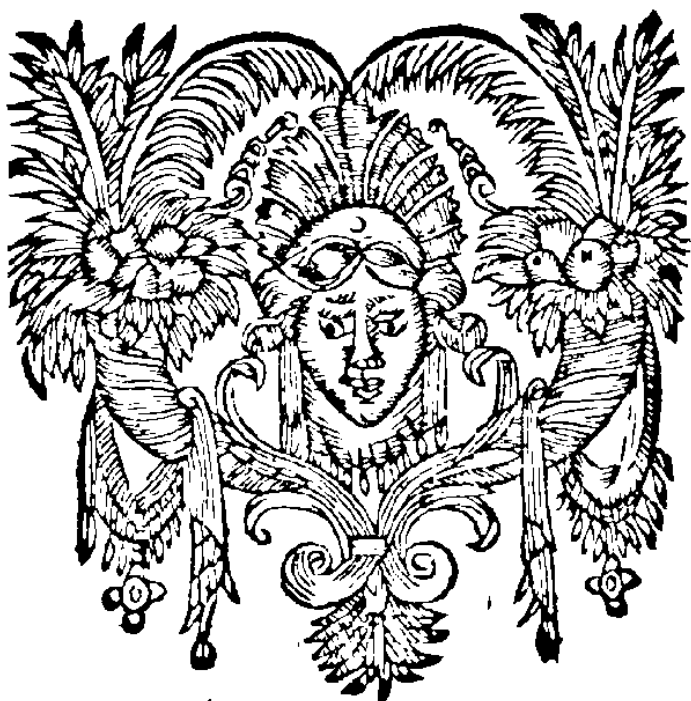
F. 31. N. 465. G

O 00. P. 00.

288 - NEUVIESME ELEMENT.

rera O, comme P mesurera D. Mais nul autre que A, B, C mesure iceluy D. Donc P sera le mesme que l'un d'iceux A, B, C. Soit donc le mesme que B: & d'autant que B, C, D, & E, H, I, K, sont continuellement proportionnaux en raison double, par raison egale comme B sera à D, ainsi E à K, & partant par la 19. p. 7. le produit de B par K, sera egal au produit de D en E. Mais le produit de D en E est egal a iceluy de P en O. Donc un mesme nombre sera fait de P en O, que de B en O, & partant par la 19. p. 7. comme P sera à B, ainsi K à O. Mais P estoit le mesme que B: Donc aussi K sera le mesme que O. Ce qui est absurde, car O a esté posé autre que tous ceux cy, A, B, C, D, E, H, I, K, L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A, B, C, D, E, H, I, K, L qui mesurent FG. Iceluy est donc nombre parfait, ainsi qu'il a esté démontré.

Fin du neufiesme Element.





SOMMAIRE

DE L'ALGEBRE.

*Que c'est qu'Algebre ; qui en est l'inventeur ; de
quelles figures & caracteres on se sert
en icelle , & leur signification.*

CHAPITRE. I.



L G E B R E est vne Arithmetique de nombres figurez : ou bien parlant plus intelligiblement ; c'est vne science par laquelle on peut rendre manifeste & cogneue vne quantité incogneue.

Quant a l'inventeur de ceste science, il est incertain : car les vns l'attribuent à Geber Arabe ; les autres à vn Mahomet fils de Moyse Arabe ; & les autres a Diophante d'Alexandrie.

E: quant aux figures d'icelle science ; outre les figures numerales de l'Arithmetique vulgaire, il y a plusieurs autres figures & caracteres, dont on se sert en ceste science, lesquels sont figurez, & nommez diuersement par les auteurs qui ont escrit d'icelle science: mais entre ceste diuersité de caracteres, nous auons choisi les suiuaus, les iugeant plus propres & aises à représenter ce qu'ils signifient qu'aucuns autres.

N. R. q. c. qq. β . qc. b β . qqq. cc. q β . q β .
qqc. d β . qb β . &c.

Le premier caractère N, à l'appellation du nombre absolu & simple, tellement que le nombre auquel ledict caractère sera apposé, est absolu & simple: comme 4 N, ne signifie autre chose que 4 vnitez simples; toutesfois ce caractère N de-faut le plus souuent aux nombres simples, c'est pourquoy les nombres auxquels est apposé ledict caractère N, ou bien auxquels il n'y a aucun signe doiuent estre pris pour simples & absolus.

Le second caractère R. s'appelle racine; tellement que le nombre auquel est apposé ledict caractère, sera denommé par racine, comme 7 R. signifient 7 racines.

Le 3. caractère q. represente quarré; tellement que 5 q signifient 5 quarez.

Le 4. caractère c. signifie cube; comme 7 c. signifient 7 cubes.

Le 5. caractère qq. signifient quarré de quarré, comme 8 qq. s'appellent 8 quarez de quarré.

Le 6. β . denotte sursolide; tellement que 4 β . signifient 4 sursolides.

Le 7. caractère qc. denotte quarré de cube, comme 7 qc. signifient 7 quarez de cube.

Le 8. b β . s'appelle second sursolide, tellement que 4 b β . signifient 4 second sursolide.

Le 9. caractère qqq denotte quarré quarré de quarré: comme 3 qqq. signifient trois quarrés de quarré de quarré.

Le 10. cc. signifie cube de cube; tellement que 8 cc. signifient 8. cubes de cube. Et ainsi faut il entendre des autres caractères en l'ordre cy-dessus, lesquels sont appelez signes ou caractères coſsiques.

Il y a encore ce caractère $\sqrt{}$, par lequel sont notez certains nombres qu'on appelle radicaux, irradicaux, ou sourds, dont sera parlé cy-apres; comme aussi de quelques autres signes ou caractères.

Des nombres coſsiques ou denommez.

CHAP. II.

LEs nōbres vſitez en l'Algebre ſont de trois genres: Ceux du premier genre ſont nommez nombres coſsiques ou

denommez; ceux du second sont appelez nombres radicaux, ou irrationaux : & les troisièmes sont nommez nombres radicaux cossiques. Quant aux nombres cossiques ou denommez; ce sont tous nombres de quelconque progression geometrique, commençant à l'unité : pour l'intelligéce desquels doivent estre diligemment considerées les deux progressions suivantes, au milieu desquelles sont posez les caracteres cossiques cy-dessus declarez.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	&c.
N.	R.	q.	c.	qq.	β.	qc.	bβ.	qqq.	cc.	qβ.	cβ.	qqc.	&c.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.	&c.

Le premier ordre est la progression naturelle des nombres commençant à 0, lesquels s'appellent exposans tant des signes cossiques descrits au dessous, que des termes de la progression geometrique commençant à l'unité; tellement que le premier terme de ladite progression naturelle, qui est 0, au dessous duquel est N & 1. est exposant du nombre simple, & absolu : Le second terme 1, au dessous duquel est R & 2, montre le second terme de la progression geometrique, estre la premiere denomination és nombres cossiques; & s'appelle racine : Le tiers terme 2, expose que le tiers nombre de la progression geo. est la seconde denomination, & s'appelle quarré : ainsi pareillement 6 demontre la sixiesme denomination estre le nombre quarré de cube; & ainsi des autres.

Puis apres les mesmes nombres exposans de la progression naturelle des nombres enseignent combien il y a de raisons entre chacun nombre de la prog. geo. & l'unité, comme 1 qui est au dessus de R & 2, signifie qu'entre 2, ou bien la racine de la prog. geo. & l'unité il y a la seule raison de 2 à 1. & 2 qui est au dessus de q & 4, montre qu'entre 4, ou bien le quarré, & l'unité doivent estre 2 raisons, comme 4 a 2, & 2 a 1: de mesme 3 qui est au dessus de c & 8, montre qu'entre le cube, ou 8 & l'unité, sont les trois raisons 8 a 4; 4 a 2; & 2 a 1; & ainsi des autres.

D'avantage chascun deux nombres exposans multipliez entr'eux, produisent l'exposant du caractere cossique qui sera composé des caracteres desdits deux exposans multipliez entr'eux, comme 2 estant multiplié par 3 faict 6. exposant du caractere qc. qui est composé de q. & de c. De mesme, 4 estant multiplié par 3 faict 12. exposant du caractere qqc, qui est composé de qq. & de c. & ainsi des autres.

Pareillement estant diuisé quelque nombre exposant par vn autre moindre, le quotient monstrera, s'il est nombre entier, l'exposant du caractère cossique qui restera, si du caractère du nombre exposant diuisé, est osté le caractère du nombre exposant par lequel est faict la diuision: comme si 6. exposant du caractère *qc.* est diuisé par 2. exposant du caractère *q.* le quotient sera 3. exposant du caractère *c.* qui restera si du caractère *qc.* exposant de 6, est osté le caractère *q.* de l'exposant 2. De mesme si le 12. nombre exposant du caractère *qqc.* est diuisé par 4. exposant du caractère *qq.* le quotient sera 3. exposant du caractère *c.* lequel restera si de *qqc.* est osté *qq.* & ainsi des autres.

Derechef ceste figure 2 qui est posée sur 4 & *q.* enseigne que le quarré, ou bien la 2. denomination est produicte de la multiplication de la racine deux fois posée: car si la racine 2 est posée deux fois, en ceste maniere 2. 2. & soit faite la multiplication de 2 par 2, sera procréé le quarré 4. En la mesme maniere ceste figure 3, qui est posée sur 8 & *c.* signifie le cube, ou bien la 3. denomination estre produicte de la racine, 3 fois posée & multipliée: Car si la racine 2, est posée 3 fois comme icy 2. 2. 2. & soit fait la multiplication de 2 par 2, & du nombre produict par 2, viendra le cube 8. & y a mesme raison de tous les autres.

Or par ces choses seront facilement definis les nombres cossiques. Car si pour exemple est demandé que cest que vn nombre second surfolide, nous dirons estre vn nombre, lequel est engendré par quelque nombre sept fois posé & multiplié, comme 128, est engendré de la multiplication de ceste racine 2, posée 7 fois en ceste maniere 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. Semblablement le quarré de quarré sera vn nombre, lequel est engendré par quelque nombre, quatre fois posé & multiplié, comme 16 est procréé de la multiplication de la racine 2; 4 fois posée, ainsi 2. 2. 2. 2. & ainsi des autres. Mais tousiours le nombre tant de fois posé, lequel engendre quelque nombre par sa multiplication, est dict racine du nombre produict, comme 2 estant posé 6 fois en ceste maniere 2. 2. 2. 2. 2. 2. & multiplié, faict ce nombre 64, qui est *qc.* partant 2 est dict racine quarrée cubique de ce nombre 64. & ainsi faut-il entendre des autres.

Or non seulement sont quelquesfois produicts les nombres de la progression geo. posez par la multiplication de la racine, comme est cy dessus dict, mais aussi par la multiplication des autres nombres entr'eux, ainsi que les signes coss

ques d'iceux demonstrent: comme ce nombre quarré de sur-
solide 1024. est procréé de la racine 10 fois posée en ceste ma-
niere 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2. ainsi que montre son exposant 10:
toutesfois pource que son signe cassique $q\beta$ est composé de
ces deux signes cassiques q & β , les exposans desquels sont 2
& 5. partant si la mesme racine 2 est deux fois posée en ceste
maniere 2, 2, à cause de 2 exposant du signe q , & soit multiplié,
afin que 4 soit produit, & ce produit 5 fois posé en ceste
maniere 4, 4, 4, 4, 4, à cause de 5, exposant du signe β , soit mul-
tiplié; sera procréé le mesme nombre 1024. Par la mesme
maniere si la racine 2, est posée 5 fois, à cause du signe β , & pa-
reillement multiplié, & le nōbre 32 produit, soit posé deux
fois, à cause du signe q , sera procréé le mesme nombre: Car la
racine ainsi multipliée 2, 2, 2, 2, 2, faict 32: mais ce nombre cy
ainsi multiplié 32, 32 procreé 1024. Le mesme doit estre dict
des autres, si les signes cassiques d'iceux sont composez de
plusieurs signes cassiques.

Pareillement es superieures progressions, est bien confi-
derable que l'addition des nombres de la progression Arith.
respond à la multiplication des nombres de la progression
geo. & la subtraction à la diuision. Car pour exemple, ainsi
que 2 & 5 font 7, si on les adiousté ensemble, ainsi pareillemēt
 q & β , desquels 2 & 5 sont exposans, c'est à sçauoir 4 & 32, estās
multipliez entr'eux produisent 128, c'est à dire $b\beta$, l'exposant
duquel est 7. Item ainsi que 3 & 9 adioustez ensemble font
12, ainsi aussi c & cc : c'est à sçauoir 8. & 512. les exposans des-
quels sont 3 & 9, multipliez entr'eux produisent 4096, c'est à
dire qqc , duquel l'exposant est 12: & ainsi des autres.

Derechef tout ainsi qu'en substrayant 5 de 7 reste 2, ainsi
en diuisant $b\beta$, c'est à sçauoir 128, duquel 7 est exposant, par
 β , c'est à dire par 32, duquel l'exposant est 5, prouient 4: c'est
à sçauoir q , duquel l'exposant est 2. semblablement ainsi qu'en
soustrayant 3 de 12 restent 9, ainsi aussi en diuisant qqc , c'est à
dire 4096, duquel l'exposant est 12. par c . c'est à dire par 8, du-
quel l'exposant est 3, prouiet c : c'est à sçauoir 512, duquel l'ex-
posant est 9. & ainsi des autres.

Or ce qui a esté dict iusques à present de la progression
geometrique de double proportion qui commence à l'vnité,
le mesme doit estre entēdu en quelque autre progression geo-
metrique que ce soit, le commencement de laquelle est l'v-
nité.

Reste à monstrier par quelle raison tous les nombres pro-
posez de quelconque progression geo. commençant à l'vni-

ré, doivent estre denommez, ou (ce qui est le mesme) quels signes cossiques doivent estre attribuez & inscrits ausdits nombres: ce que nous monstrerons facilement, si premierement nous denommons les nombres, desquels les exposans sont nombres premiers; de laquelle sorte sont les suyvens avec leurs caracteres cossiques.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. &c.
q. c. β. bβ. cβ. dβ. eβ. ffβ. gβ. hβ. iβ. kβ. lβ. mβ. nβ. oβ. pβ. &c.

Or les lettres de l'alphabet apposees aux caracteres de β sont au lieu de chiffres, comme *bβ* signifie 2 β ; *cβ*, 3 β ; *dβ*, 4 β &c. & ce d'autant qu'iceux chiffres apporteroient de la confusion.

Sçachant donc ainsi que dessus les nombres premiers, & leurs caracteres, nous trouuerons les caracteres des autres nombres cossiques, desquels les exposans ne sont nombres premiers, ains composez, en resoluant l'exposant du nombre composé, dont la denomination & caractere est desirée en ses parties aliquottes incomposees, lesquelles estans multipliees par ordre entr'elles, constituent & produisent iceluy, ce que vous ferez en ceste maniere.

Diuisez premierement le nombre composé donné par le moindre nombre premier, par lequel il se peut diuiser, semblablement le quotient, s'il est nombre composé; & derechef soit diuisé ce quotient par le moindre nombre, & ainsi consequemment soit faite continuellement la diuision, iusques à ce que le quotient soit nombre premier, c'est à sçauoir n'ayât aucune partie aliquotte; & tous les diuiseurs, ensemble le dernier quotient, seront parties aliquottes incomposees, lesquelles estans multipliees par ordre entr'elles produiront le nombre composé donné, & les caracteres de chacune d'icelles parties aliquottes ioincts ensemble, feront le caractere dudit nombre composé donné. Comme pour exemple, si vous voulez trouuer le caractere de ce nombre composé 24. vous diuiserez iceluy par 2, qui est le moindre nombre premier, & viendra 12 au quotient, lequel quotient vous diuiserez derechef par 2, & viendra 6 au quotient, que vous diuiserez encore derechef par 2, & viendra 3 au quotient, qui est nombre premier: tellement que vous aurez pour les parties incomposees de 24, ces quatre nombres 2, 2, 2, 3. dont les caracteres sont *q. q. q. c.* & partant le caractere appartenant à ce nombre composé 24 sera *qqqc.* Et cest exposant 30. (duquel les parties incomposees sont 2. 3. 5) fera ce signe *qcfβ*, & ainsi des autres.

On fera encore la mesme chose, prenant deux quelconques nombres qui multipliez entr'eux, produisent le nombre exposant proposé : car les signes cossiques d'iceux, composent le signe cossique dudit nombre exposant proposé. Comme 3 & 4, desquels les signes cossiques sont *c.* & *q.* multipliez entr'eux produisent 12, dont le signe cossique sera *qqc.*

Or le contraire de ce que dessus, se fera rendant a chaque caractere incompos   son exposant; puis multipliant iceux exposans ensemble. Comme pour exemple, si nous voulons avoir l'exposant de *qqc.* nous rendrons a chaque caractere son exposant particulier, c'est a sçavoir 1, 1, 3, lesquels multipliez ensemble font 12, qui sera l'exposant dudit signe cossique *qqc.* & ainsi faut-il entendre des autres.

De la numeration des nombres cossiques.

CHAP. III.

LA numeration des nombres cossiques est facile, les choses cy-deuant dictes estans bien entendues : Car quand ils sont posez seuls, comme 5 *R.*, ou 8 *q.* ou 20 *c.* & c. ils s'expriment ainsi, 5 racines ou 8 quarrez, ou 20 cubes & c; mais qu  t ils sont proposez c  oinctz entr'eux par ce signe + au milieu, ou par celui cy —; c  me 5 *R.* + 8 *q.* ou 8 *q.* — 5 *R.* ou 20 *c.* + 8 *q.* — 5 : lesquels deux signes + & — ont leur signification c  traire: car cestuy cy +, est dict signe d'adiouster, & signifie plus; mais celui cy —, est appelé signe de soustraire, & denote moins; & les nombres auxquels est interposé le signe +, sont dictz c  posez; mais ceux auxquels interuient le signe —, sont nommez diminuez; & finalement ceux auxquels l'un & l'autre signe est interposé, sont appelez mixtes, ja soit que tous pourtoient estre dits composez: Partant donc ce composé 5 *R.* + 8 *q.* s'exprime 5 racines plus 8 quarréz; mais ce diminue   8 *q.* — 5 *R.* 8 quarréz moins 5 racines: & ce myxte cy 20 *c.* + 8 *q.* — 5 20 cubes plus 8 quarréz moins 5 vnitez: car comme il a esté dict, le nombre qui n'a point de caractere cossique apres soy, signifie vn nombre absolu composé d'vnitez.

Or ces signes + & — sont tousiours referez aux nombres qui les suivent, & le nombre qui precede n'est a l'un ny a l'autre.

tre desdits signes. Or le sens des nombres composez, diminuez, ou mixtes est facile : car quād nous disōs $5 R + 8 q$. nous entendons 5 racines ensemble avec 8 quarrez, c'est à dire 42 unitez, si la racine est 2 , & le quarré 4 . ainsi aussi quand nous disons $8 q - 5 R$ nous entendons que de 8 quarrez, sont osterz 5 racines ; c'est à dire que le nombre proposé est 12 unitez, si la racine est 2 , & le quarré 4 . & le mesme faut-il dire des autres.

De l'addition & soustraction des nombres coſſiques.

C H A P. III.

QUand il faut adiouter vn nombre coſſique à vn nombre coſſique d'autre denomination ou caractère, l'addition se faiet mettant ce signe $+$ au milieu, & vient vn nombre composé ; comme ces deux nombres $6 R$, & $8 c$ adioutez ensemble font $6 R + 8$. de mesme $6 R$ & $8 c$. font $6 R + 8 c$. &c.

Mais quand il faut adiouter vn nombre coſſique à vn autre nombre coſſique de mesme appellation ou caractère, les nombres se doiuent adiouter, & à la somme apposer le mesme caractère coſſique : comme ces nombres $4 q$ & $9 q$ adioutez ensemble, font $13 q$; de mesme $5 R$ & $4 R$, font $9 R$ &c.

Par mesme raison quand il faut soustraire vn nombre co. d'un nombre co. d'autre denomination, la soustraction se fait mettant ce signe $-$ au milieu, & faiet vn nombre diminué : comme pour exemple ce nombre $6 R$ osté de $8 q$, reste $8 q - 6 R$; de mesme 12 de $6 R$, restent $6 R - 12$. &c.

Mais quand il faut soustraire vn nomb. co. d'un autre nomb. co. de mesme caractère, on doit soustraire le nomb. du nombre, & au reste apposer le mesme caractère : comme $4 R$ de $9 R$, restent $5 R$; & $9 c$. de $20 c$. restent $11 c$ &c.

Mais quand il faut adiouter des nombres coſ. composez, diminuez, & mixtes, ou oster l'un de l'autre, il les faut poser l'un au dessous de l'autre, tellement que les nomb. de mesme appellation se respondent entr'eux. Que si en l'un ou l'autre d'iceux n'est trouué vn nomb. respondant à quelqu'un, sera

posé au lieu de la figure 0, avec le signe +, & estans ainsi cō-
stituez, seront adioustez les nombres de mesme appellation,
ou ostez l'un de l'autre, & les sommes, ou nōbres restez, souf-
frits en leurs propres lieux, avec les mesmes signes + ou —,
qui seront trouvez és nombres adioustez, ou soustraits.

Exemples d'Additions.

R.	N.	q.	R.	N.	c.	N.	q.
6 +	8.	7. +	8 —	5.	7. +	8 —	3
7 +	10.	3. +	9 —	8.	4 +	11 —	5
13 +	18.	10 +	17. —	13.	11 +	19 —	8

c.	q.	R.	N.	β.	qq.	R.	N.	q.
4 +	11 +	0 —	6.	7 +	0 +	8 —	5 +	4.
3 +	0 +	8 —	4.	4 +	9 +	6 —	9 +	0.
7 +	11 +	8 —	10.	11 +	9 +	14 —	14 +	4.

Exemples de soustraction.

c.	q.	R.	N.	c.	N.	q.
7 +	11 +	8 —	10.	11 +	19 —	8.
3 +	0 +	8 —	4.	4 +	11 —	5.
4 +	11 +	0 —	6.	7. +	8 —	3.
β.	qq.	R.	N.	q.	R.	N.
11 +	9 +	14 —	14 +	10 +	17. —	13.
7 +	0 +	8 —	5 +	7 +	8 —	5.
4 +	9 +	6 —	9 +	3 +	9 —	8.

Quand il reste + 0, ou — 0, il n'en faut tenir compte, cō-
me au premier exemple où il reste 4 c + 11 + 0 — 6 N, sera
seulement 4 c + 11 q — 6.

Que si en l'addition ou soustraction, l'un des nombres a-
voit le signe +, & l'autre —, il faut changer d'espece, c'est

à dire qu'en l'addition, il faut soustraire le moindre du plus grand, & au nombre restant donner le signe du plus grand nombre duquel a esté faite la soustraction.

Exemples. }

q. 6 + 8. 2 — 10	R. 8.	qc. 7 + 0 + 8 + 0	β. 7 + 5	qq. 11 — 11	c. 11 + 0 + 0	R. 4 + 8.	N. 0
8 — 2.		14 + 5 — 3 — 11 — 4 + 8.					

Mais s'il falloit adiouster ces deux nombres 6q — 8 R, & R — 3q, il les faudroit poser comme ensuit.

+ 6.	— 8.
— 3	+ 11
3 + 4.	

Mais en la soustraction, il faut adiouster les nombres ensemble, & donner à la somme le signe du nombre supérieur, duquel doit estre faite la soustraction.

Exemples.

q. 8 — 2. 6 + 8.	R. 2.	qc. 14 + 5 — 3	β. 7 + 0 + 8 + 0	qq. 11 — 11	c. 11 + 0 + 0	R. 4 + 8.	N. 0
2 — 10.		7 + 5 — 11 — 11 — 0 + 0.					

Que s'il aduenoit qu'és deux nombres de la soustraction fussent mesme signe, & que le nombre à soustraire fust plus grand que celui duquel il faut soustraire, il faudroit faire la soustraction du petit du plus grand, & au reste donner le signe contraire, comme il appert és exemples suyans.

l.	R.	q.	R.	N.	c.	q.	N.
6	+	8.	9.	+	4	—	5.
2	+	10.	4	+	7	—	8.

4 — 2. 5 — 3 + 3. — 1 + 4 — 7. qui se doive écrire 4q — 1 c.

d'autant que le signe — n'est pas bien disposé au premier nombre.

Or tous les preceptes de l'addition & soustraction enseignez cy dessus, au regard des signes + & —, peuvent estre retenus en memoire par les deux regles suivantes.

1. A mesmes signes on doit poser le mesme signe; sinon en la soustraction, quand les nombres sont posez à rebours: car alors le supérieur est soustrait de l'inférieur, & de + est fait —: mais de — est fait +.

2. Les signes diuers changent l'espece de l'operation: & en l'addition est posé le signe du plus grand nombre: mais en la soustraction est posé le signe du nombre supérieur.

Quant à la preuve de l'addition & soustraction, elle se fait en deux manieres: la premiere, l'addition preuve la soustraction, & la soustraction l'addition, tout ainsi qu'on fait es nombres absolus.

Exemples de la preuve des trois dernieres additions & soustractions.

l.	R.	qc.	sc.	qq.	c.	R.	N.	q.	R.
8	—	2.	14	+	5	—	3	—	11
2	—	10.	7	+	5	—	11	—	11
6	+	8.	7	+	0	+	8	+	0
			7	+	0	+	8	+	0
			7	+	0	+	8	+	0

Preuve de la soustraction.

l.	R.	q.	R.	N.	c.	q.	N.
4	—	2.	5	—	3	+	3.
2	+	10	4	+	7	—	8.
6	+	8.	9	+	4	—	5.
			6	—	5	+	3.

Pour faire autrement ladicte preuve, il faut construire vne table avec quelques progressions geo. commençant a l'vnité, comme il appert cy dessous.

N	R.	q.	c.	qq.	β	qc.	$b\beta$	qqq.
1	2	4	8	16	32	64	128	256
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$

Par apres il faut resoudre les nombres cossiques à adiouster selon aucunes d'icelles progressions en nombres absolus, puis les adiouster ensemble, ou soustraire l'un de l'autre, selon les signes + ou —, & puis apres soient semblablement resouls, les nombres cossiques de la somme recueillie; & si l'addition a esté bien faicte, lefdits nombres resouls de la somme recueillie, seront egaux aux nombres resouls à adiouster ensemble; comme pour exemple, nous auons trouué cy deuant que $6q + 8R$ adioustez avec $2q - 10R$ font $8q - 2R$ pour en faire donc la preuve, nous resoudrons en nombres absolus les deux nombres à adiouster, sçauoir est $6q + 8R$, & $2q - 10R$, & prenant la resolution en la progression dont la racine est 2, $6q$ font 24, & $8R$ font 16, lesquels 24 & 16 joints ensemble, à cause du signe + font 40: de mesme $2q$ font 8, qui adioustez à 40 (car le signe + est toujours entendu estre au nombre qui n'a nul signe apposé) font 48, & $10R$ font 10, qui soustrais de 48, à cause du signe —, reste pour la somme de l'addition 28. & resoluant $8q - 2R$, qui est la somme recueillie de l'addition, viendront aussi 28: & partant l'addition a esté bien faicte.

Quant à la preuve de la soustraction, elle se fait en la mesme maniere: car les nombres cossiques d'icelles estans reduits en nombres absolus, & les nombres à soustraire, estans adioustez aux restans, doiuent estre egaux aux nombres dont la soustraction a esté faicte: comme pour exemple, nous auons cy deuant trouué que $7c - 9q + 10N$. soustrais de $6c - 11q$

+3 N. laissent $4q - 1c - 7N$. donc $7c - 9q + 10N$, resouls en nombres absolus selon la progression dont la racine est 3, font 118; & $4q - 1c - 7$, font 2, qui adioustez à 118, font 120; & $6c - 5q + 3N$ font aussi 120: & partant la soustraction a esté bien faicte.

*De la multiplication & diuision des nombres
cossiques.*

CHAP. V.

Quand vn nombre cossique est multiplié, ou diuisé par vn nombre absolu, le produict a mesme denomination cossique; comme pour exemple, $4R$ ou $8q$ estans multiplié par 3, prouiennent $12R$. ou $24q$ &c. Item $12q$. ou $24R$. estans diuisé par 4. viennent, q . ou $6R$.

Mais quant le nombre cossique est multiplié, ou diuisé par vn nombre cossique, le produict est d'autre denomination, sçauoir est de celle qui se faict des exposans joints ensemble, quant a la multiplication: comme pour exemple $4R$ multipliez par $7R$ font $28q$ car l'exposant de R est l'vnité. Donc les 2 sont exposans de q , & $4R$ multipliez par $5q$ font $20c$. car 1 est exposant de R , & 2 de q , lesquels adioustez ensemble, font 3 exposans de c . Et quant a la diuision, le quotient a la denomination du nombre restant, l'exposant du diuiseur estant osté de l'exposant du diuisé: Comme pour exemple $36q$, diuisé par $4qq$ le quotient est $9q$. Car 4 exposant de qq estant osté de 6 exposant de q . reste 2 exposant de q . & $18qq$. par $3c$, vient $6R$: & $8q$ par $8q$, vient 1 N, &c.

Quand le nombre cossique composé ou diminué, est multiplié ou diuisé par vn nombre absolu ou cossique, tant simple que composé ou diminué, outre ce qui est dict cy dessus, il faut sur tout auoir egard aux signes + & - : Car quand les nombres se multiplias ou diuisans ont vn mesme signe, il faut apposer au produict le signe +; mais quand l'vn d'iceux est +, & l'autre -, il faut donner au produit le signe -. Ce qui est aisé à retenir en memoire par la regle suiuite.

Aux signes semblables faut poser + mais aux dissemblables faut poser —.

Exemples de la multiplication.

$\begin{array}{r} 7q - 4R. \\ 9. \\ \hline 63q - 36R. \end{array}$	$\begin{array}{r} 7q + 4R. \\ 9N. \\ \hline 63q + 36R. \end{array}$	$\begin{array}{r} 7q - 4R. \\ 9R. \\ \hline 63q - 36q. \end{array}$
$\begin{array}{r} 8q + 9. \\ 8q + 9. \\ \hline 72q + 81. \\ 64qq + 72q \\ \hline 64qq + 144q + 81. \end{array}$	$\begin{array}{r} 8q - 9. \\ 8q - 9. \\ \hline -72q + 81. \\ 64qq - 7q \\ \hline 64qq - 144q + 81. \end{array}$	
$\begin{array}{r} 6q + 8R - 6N. \\ 2q - 4N. \\ \hline -24q - 32R + 24N. \\ 12qq + 16c - 12q. \\ \hline 12qq + 16c - 36q - 32R + 24N. \end{array}$	$\begin{array}{r} 9q + 8N - 3R. \\ 7c - 4qq - 8q \\ \hline -72qq - 64q + 144 \\ -36qc - 32qq + 12q. \\ \hline 63\beta + 56c - 21qq. \end{array}$	
$\begin{array}{r} -36qc + 75\beta - 125qq + 80c - 64q. \end{array}$		

Et d'autant que comme il a déjà esté dict, le signe — n'est bien au commencement, on doit colloquer le produit ainsi

$$75\beta - 36qc - 125qq + 80c - 64q.$$

Exemples de la division.

Diviser $34R + 24$ [$9R + 6$
par 4 4

Plus $45c + 34q + 27R$ [$5q + 4R + 3N$
par $5R$ $5R$ $5R$

Plus $45c + 34q - 27R$ [$5\frac{1}{2}q + 4\frac{1}{2}R - 3N$
par $8R$ $8R$ $8R$

$$\begin{array}{l} \text{Plus } 38q - 58R + 24. [6R - 8N. \\ \text{par } 5R - 3N \\ 5R - 3N. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Plus } 22qq + 25c - 35q - 32 + 24N [6q + 8R - 6N \\ \text{par } 2q + 8R - 4N \\ 2q + 8R - 4N. \\ 2q + 8R - 4N. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Plus } 1c + 0q + 8R + 1 [1q - 1R + 1. \\ \text{par } 1R + 1 \\ 1R + 1 \\ 1R + 1 \end{array}$$

Et conuient noter qu'en toutes diuisions des nombres cof-
fiques, les denominations doiuent estre cōtinuées d'ordre; &
parrant quand il y a quelque denomination de māque, il faut
poser 0 au lieu d'icelle, comme il appert és deux precedentes
exemples, la dernière desquelles i'ay faict en ceste maniere:
I'ay pose $1R + 1$ au deffoubs de $1c + 0q$, & trouue que $1R$ est
en $1c$; $1q$ que ie pose au quotient, & multiplie ledit $1q$ par mon
diuiseur, & vient $1c + 1q$ que i'oste de $1c + 0q$, & reste de tout
le nombre à diuifer $-1q + 0R + 1$: puis apres i'aduāce mon
diuiseur fous $-1q + 0R$. & trouue qu'il y est $-1R$, que
ie pose au quotient, & multiplie ladite $1R$ par ledit diuiseur,
& vient $-1q - 1R$, que ie soustrais de $-1q + 0R$, & reste
de tout le nombre à diuifer $1R + 1$, fous lequel ie pose le
diuiseur, & trouue qu'il y est $1N$ precisément.

Or quand le diuiseur est nombre composé ou diminué, &
qu'il ne peut diuifer precisément, alors il faut seulement in-
terposer vne ligne entre-deux, ainsi qu'és fractions, comme
és deux exemples suyans.

$$8\beta \text{ par } 2q + 4N \quad 8q - 9R. \text{ par } 4R + 3N$$

Les quotiens sont

$$\begin{array}{r} 8\beta. \\ \hline 2q + 4N \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8q - 9R \\ \hline 4R + 3N \end{array}$$

Il faut faire en la mesme maniere, quand vn nombre cossique simple ou composé doit estre diuisé par vn nombre cossique simple de plus grande denomination : comme $8q$ diuisez

par $2qc$ constituent ceste fraction $\frac{8q}{2qc}$ De mesme $9q + 4$ estés

diuisez par $3c$. font $\frac{9q+4}{3c}$ &c.

Reste à enseigner à faire la preuue de la multiplication & diuision : laquelle se faiét en deux manieres. Premièrement la diuision preuue la multiplication ; & la diuision se preuue par la multiplication, tout ainsi qu'en l'arithmetique vulgaire.

L'autre sorte de preuue se faiét par la resolution des nombres cossiques, selon quelque racine des progressions geometriques contenuës au chapitre precedent. Car les nombres cossiques resouts, estans multipliez entr'eux, doiuent produire vn mesme nombre que le produict des nombres cossiques aussi resolt selon la mesme racine : & le nombre cossique qu'il faut diuiser resolt, doit produire autant diuisé par le diuiseur resolt, que le quotient aussi resolt. Côme pour exemple nous auons trouué cy-deuant que $6q + 8x - 6N$ multipliez par $2q - 4N$, produisent $12qq + 16c - 36q - 32x + 24N$. pour en donc faire la preuue, nous resoudrons les deux nombres cossiques en nombres absolus, & viendront (selon la progression dont 2 est racine) 34, & 4, qui multipliés entr'eux produisent 136 : mais la resolution du produict $12qq + 16c - 36q - 32x + 24N$, est aussi 136 : & partant la multiplication a esté bien faiète. Nous auons aussi trouué que $1x + 1$, diuisez par $1x + 1$. Le quotient est $1q - 1x + 1$, lequel quotient donne 3 par la resolution de la progression dont la racine est 2 : mais les deux nombres cossiques resolus par la mesme progression, sont 9 & 3 ; & 3 diuisant 9, le quotient est aussi 3 : & partant la diuision a esté bien faiète.

Des fractions des nombres cossiques.

CHAP. VI.

EN l'Algorithme des fractions cossiques, les operations sont presque sēblables qu'es fractions vulgaires : il n'y a
qu'a

qu'à adioufter ce qui concerne les caractères coſſiques, & les ſignes + & —. Et premierement quand a la numeration, ce-

ſte fraction $\frac{3}{8R}$ ſignifie 3 vnitez eſtre diuiſees par 8 R; & — de

notre 7 quarrez eſtre diuiſez par 9 vnitez: Item $\frac{999 + 89}{60}$.

ſignifie que ce nombre $999 + 89$ eſt diuiſé par 60. &c.

L'abbreuiation ſe faiſt en deux manieres: Car ou les nombres ſeront abbreuiez, comme és fractions vulgaires, ſans toucher aux caractères coſſiques; ou bien ſeront auſſi abbre-

uiez les caractères coſſiques: comme ceſte fraction $\frac{15}{5R}$, quād

aux nombres, elle ſera reduicte à ceſte-cy $\frac{3}{18}$: Item $\frac{99 + 36}{81}$.

ſera reduicte à $\frac{19 + 4}{9}$; Item $\frac{35R + 28}{79 + 14}$ ſera reduicte à $\frac{5R + 4}{19 + 2}$.

Item $\frac{189 - 9R}{6R + 39}$ ſera reduicte à $\frac{69 - 3R}{2R + 19}$ &c.

Et quand a l'abbreuiation des caractères coſſiques, elle eſt faiſte ſouſtraiant l'expoſant du moindre caractère, des expoſans des autres caractères; car ſi aux nombres reſtans, ſont poſez les propres caractères, l'abbreuiation ſera acheuée

quād aux caractères. Comme ceſte fraction $\frac{89}{290}$ quād aux

caractères, ſera reduicte en celle-cy $\frac{8}{299}$; puis apres quād aux

nombres, a ceſte-cy $\frac{4}{199}$: Item $\frac{189 - 9R}{6R + 39}$ quād aux nom-

bres & caractères, ſera reduicte à $\frac{2 + 18R}{6R + 39}$, &c.

Quand à la reduction des fractions coſſiques à vn meſme denominateur, elle s'obtient multipliant en croix les numérateurs par les denominateurs, & les denominateurs entr'eux;

tout ainsi qu'ès fractions vulgaires : comme ces fractions

$$\frac{384}{49} \text{ \& } \frac{4^c}{1563^{59^c}}$$

$$\text{ront } \frac{20999}{20999} \text{ \& } \frac{163}{20999} \text{ \& c.}$$

Que s'il faut reduire quelque nombre entier, & vne fraction a meisme denomination ; il faudra supposer l'vnité estre de-
nominator du nombre entier, & poursuivre ainsi que dessus.

$$\text{Comme } 6 \text{ \& } \frac{484}{79} \text{ seront posez ainsi } \frac{6}{79} \text{ \& } \frac{484}{79}; \text{ puis estans reduites}$$

$$\text{comme dessus, elles feront } \frac{429}{79} \text{ \& } \frac{484}{79} : \text{ Item } \frac{59}{1} \text{ \& } \frac{4^c}{39} \text{ se}$$

$$\text{ront reduictes a } \frac{1599}{1599} \text{ \& } \frac{4^c}{1599} \text{ \& c.}$$

Mais si aux entiers est ioincte quelque fraction, il faudra
premierement reduire les entiers en icelle fraction ; ce qui se
fait multipliant les entiers par le denominator de la fraction,
& adioustant au produit le numerateur. Comme si nous vou-

$$\text{lons reduire } 49 + \frac{284}{10} \text{ \& } \frac{39}{15} \text{ a vne meisme denomination, nous}$$

multiplierons premierement 49 par 10, afin que nous ayés ces

$$\text{deux fractions } \frac{490 + 284}{10} \text{ \& } \frac{39}{15} \text{ lesquelles nous reduirons à ces}$$

$$\text{deux cy } \frac{490 + 290}{1999} \text{ \& } \frac{39}{1999}; \text{ \& ainsi des autres.}$$

Quant aux autres 4 operations des fractions cossiques,
sçauoir est, addision, soustraction, multiplication & diuision,
elles ne different à celles que nous auons enseignees és fra-
ctions de nostre Arithmetique, sinon à raison des caracteres
cossiques, & des signes + & — Parquoy nous mettrons seu-
lement icy des exemples de chaque operation.

Exemples de l'addition.

$$\text{Adioustant } \frac{384}{2} \text{ avec } \frac{49}{36} \text{ viendront } \frac{2999 + 89}{66}, \text{ c'est à}$$

DE L'ALGÈBRE.

$9q + 8^{\circ}$ 48 48 $192q + 576R$
 dire ———: Item ——— avec ——— font ———: Itē
 $6R$ $7q$ $12R \rightarrow 3q$ $84c \rightarrow 21qq$
 $9R + 2q$ $21qq - 8q$ $21qq - 6q + 9R$
 adiouſtez avec ——— font ——— quire—
 $36c$ $36c$ $36c$
 $7c \rightarrow 2q + 3$ $5q \rightarrow R$ $3c + 1$
 puis font ———: Item ——— adiouſtez avec ———
 $12q$ $7c \rightarrow 2$ $2qq + 4R$
 $3qc \rightarrow 6\beta + 21c \rightarrow 12q \rightarrow 2$
 font ———
 $146\beta + 24qq - 8R$

Exemples de la soustraction.

$$\begin{array}{ccccccc} & 3R & & 99q+8q & & 16q & \\ \text{Sion oste} & \text{---} & \text{de} & \text{---} & \text{resteront} & \text{---} & , \text{c'est \`a dire} \\ & 2N & & 6c & & 12c & \\ \\ 4 & 1 & 3R & & 6c-4 & & 2R-3 \\ \text{Item} & \text{---} & \text{de} & \text{---} & \text{resteront} & \text{---} & \text{Item} & \text{---} \\ 3R & 2q & 4N & & 8q & & 4N \\ 4 & & 25-4q & & 99+8R & & 11c+16q+8R \\ \text{de} & \text{---} & \text{resteront} & \text{---} & \text{Item} & \text{---} & \text{de} & \text{---} \\ 2R+3 & & 8R+2 & & 2c-6N & & 2c-6N \\ \\ & 11c+7q & & & & & \\ \text{resteront} & \text{---} & & & & & \\ & 2c-6N & & & & & \end{array}$$

Exemples de la multiplication.

Multipliant $\frac{3}{4R}$ par $\frac{1}{2R}$ viennent $\frac{3}{8q}$: Item $\frac{1}{2q}$
 $\frac{1R}{1R}$, viennent $\frac{1R}{3R}$ par $\frac{1q}{2q}$, viendront $\frac{3c}{8f}$: Item
 $\frac{4}{2R}$ $\frac{8q}{2q}$ $\frac{4f}{2q}$ $\frac{2c}{10R}$ $\frac{3R+2}{3R+2}$
 $\frac{1}{2R}$ par $\frac{1R}{2R}$, viendront $\frac{1}{2R}$: Item $\frac{4q-1R}{4q-1R}$
 $\frac{2R-4}{6q-8R+8}$ $\frac{7q+8R}{7q+8R}$
 $\frac{1q-3}{4q-1R+12q-3R}$ $\frac{5c-1f}{5c-1f}$
 V ij

$$\text{par } \frac{4R}{59} \text{ --- } 8N, \text{viendront } \frac{329-18099-1926}{25\beta-559}.$$

Exemples de la diuision.

$$\begin{aligned} &\text{Diuisant } \frac{3}{89} \text{ par } \frac{1}{2R}, \text{viendront } \frac{6R}{89} \text{ ou } \frac{3}{4R} : \text{Item} \\ &\frac{1R}{89} \text{ par } \frac{1}{4R}, \text{viendront } \frac{49}{89} \text{ ou } \frac{3}{8\beta} : \text{Item } \frac{3R}{89} \text{ par } \frac{1}{2R}, \\ &\text{viendront } \frac{12\beta}{2490} \text{ ou } \frac{1}{2R} : \text{Item } \frac{19-10R}{3} \text{ par } \frac{2R}{3}, \text{vien-} \\ &\text{dront } 1R-5 : \text{Item } \frac{69-8R+8}{499-16+129-3R} \text{ par } \frac{2R-4}{19+3}, \text{vien-} \\ &\text{dront } \frac{3R+2}{49-1R}. \end{aligned}$$

Quant à la preuue de ces 4 operations, elle se faiet en la me sme maniere que celle des entiers.

De la regle d'Algebre.

CHAP. VII.

Estant proposee quelque question, soit posé pour le nombre inconnu $1R$, (on peut aussi quelquesfois poser plusieurs racines, comme deux ou trois, ou d'auantage pour la commodité de la question proposee) laquelle soit examinée selon l'extencur de la question, iusques à ce qu'on ait trouué quelque equation: Soit icelle reduicte, s'il en est besoing puis apres par le nombre du plus grand caractere cossique soit diuise l'autre nombre de l'equation. Car ou le quotient sera le nombre qu'estoit cherché; sçauoir est la valeur de la racine posée au commencement.

en quelque racine du quotient rendra connu le nombre cherché. Or le diviseur démontrera par son caractère coſſique, quand & quelle racine il faudra extraire du quotient.

Ceſte regle à 4 parties, dont il y en a ſeulement deux du tout neceſſaires: ſçavoir eſt la premiere & troiſieſme: & quant aux deux autres, il n'en eſt pas toujours beſoyn. Et avant que de traiter particulièrement de chacune d'icelles, nous les expoſerons icy, propoſant ce probleme.

Trouver un nombre, duquel la tierce & quarte partie eſtans oſtez, le nombre reſtant ſoit 10.

Je poſe le nombre incogneu eſtre $1x$; c'eſt à dire que je poſe $1x$ eſtre egale au nombre incogneu que nous cherchons. J'examine donc $1x$ ſelon la teneur de la queſtion, c'eſt à dire que je prends d'icelle $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, ſçavoir eſt $\frac{1}{3}x$ & $\frac{1}{4}x$, qui ſont enſemble $\frac{7}{12}x$, que j'oſte de $1x$, & reſtent $\frac{5}{12}x$. Maintenant je ratiocine ainſi: puſque $1x$ eſt poſee egale à tout le nombre incogneu, $\frac{1}{3}x$ ſera egal au tiers d'iceluy, & $\frac{1}{4}x$ egal au quarré du meſme; & puſque la tierce & quarte partie du nombre total eſt ſouſtraict, le nombre reſtant eſt 10, il ſ'enſuit que $\frac{1}{3}x$ & $\frac{1}{4}x$, c'eſt à dire $\frac{7}{12}x$, eſtans oſtez de $1x$, le nombre reſtant $\frac{5}{12}x$ eſtre egal au nombre reſtant 10, pource que ſi de choſes egales ſont oſtees choſes egales, les reſtes ſont egaux. Eſt donc trouuee equation, ou bien egalité entre $\frac{5}{12}x$ & ce nombre 10: car equation n'eſt autre choſe qu'une egalité de valeur entre deux quantitez, ou choſes diuerſement denommees; & voila quant à la premiere partie de la regle cy deſſus. Et pour le regard de la ſeconde partie, qui eſt la reduction, il n'en eſt beſoyn en l'equation de noſtre exemple: mais nous monſtrerons cy apres, quand & comment l'equation ſe doit reduire. Et pour le regard de la diuiſion, qui eſt la 3. partie de la regle: en noſtre equation trouuee entre $\frac{5}{12}x$ & 10 N, le plus grand caractère coſſique eſt x : c'eſt à dire que x à plus grand expoſant que N: parquoy je diuiſe ce nombre 10 par $\frac{5}{12}$, reſte du caractère x , & vient au quotient 24, qui eſt le nombre cherché. Parquoy la 4. partie de la regle d'Algebre n'a lieu en noſtre exemple; mais quand, & quelle racine du quotient manifeſtera le nombre incogneu, il ſera enſigné cy-apres. Maintenant ſi du nombre trouué 24 on prend $\frac{1}{3}$, ſçavoir eſt 8: puis $\frac{1}{4}$, ſçavoir eſt 6: icelles deux parties ſont enſemble 14, qui oſtez des 24, reſte le nombre 10, ainſi qu'il eſtoit requis en la propoſition.

De la réduction d'equation.

CHAP. VIII.

Pour l'intelligence de la réduction des equations, est à noter, que si on adiouste ou soustraiçt choses egales de chasque terme de l'equation, ou bien qu'on les multiplie ou diuise par vn mesme nombre, qu'il y aura pareillement equation entre les produicts. Comme pour exemple, s'il y a equation entre $12x$, & 72 ; ostant $4x$ de chasque terme, restera encore equation entre $8x$, & $72 - 4x$: car puisque $12x$ sont egales à 72 ; $1x$ sera egale à 6 , & partant $8x$ seront egales à 48 , & $4x$ à 24 , qui ostez de 72 , restera aussi 48 . Item si à chasque terme de l'equation d'entre $8x$, & $72 - 4x$, on adiouste 10 , viendra equation entre $8x$, + 10 , & $82 - 4x$. Car il est manifeste que chasque terme vaut 58 . Item s'il y a equation entre $3x + 12$, & $72 - 7x$; multipliant chasque terme par 2 , viendra aussi equation entre $6x + 24$, & $144 - 14x$: car l'un & l'autre terme faict 60 . Ainsi aussi si nous diuison par 6 chasque terme de ceste derniere equation, sera produict equation entre $1x + 4$, & $24 - 1x$: car l'un & l'autre terme faict 10 .

Maintenant quand en la solution de quelque question on est paruenue à l'equation; si le plus grand caractère coëffique, par le nombre duquel (selon la regle d'Algebre) on doit diuiser l'autre terme de l'equation n'est posé seul en l'un & l'autre terme d'icellè equation, ou qu'estant seul en l'un il ne le soit en l'autre, alors la diuision ne se peut faire. Comme pour exemple si l'equation est trouuee entre $9x + 12$, & $78 - 2x$; la diuision ne se peut faire, pource qu'en chasque terme est trouué ce caractère x , & cestuy-cy N : Semblablement si l'equation est trouuee entre $9x - 12$, & 42 : tu vois que la diuision ne se peut faire par 9 nombre du plus grand caractère coëffique x , pource que $9x$ ne sont pas posées seules, ains $9x - 12$.

Ainsi aussi si l'equation est trouuee entre $9x$, & $72 - 1x$: Item entre $19 - 3x$, & 108 : Item entre $19 - 48$, & $8x$: Item entre $108 + 8x$, & $19 - 12x + 60$, &c. en toutes lesquelles il est manifeste que la diuision ne se peut faire comme requiert la regle d'Algebre. Parquoy aduenant semblables equations,

elles doivent estre reduictes en autres, esquelles le plus grand caractere cossique soit seul en vn terme de l'equation, & ne soit repeté en l'autre, & esquelles aucun caractere cossique ne soit posé deux fois. Or ceste reduction se fera ainsi qu'il ensuit :

Si vne particule de l'equation a le signe —, il la faut transporter, c'est à dire adiouster à l'autre terme : comme si vne equation est trouuee entre $9R - 12$, & 42 : nous adiousterons 12 à 42 , & nous aurons l'equation entre $9R$, & 54 : Item l'equation estant trouuee entre $9R$, & $72 - 3R$, adioustant $3R$ à chaque terme, nous aurons l'equation entre $12R$, & 72 : item l'equation estant entre $29 - 3R$, & 104 , adioustant $3R$ à chaque terme, l'equation sera entre 29 , & $3R + 104$: Item l'equation estant entre $59 - 40$, & $10R$, adioustant -40 , nous aurons vne equation entre 59 , & $10R + 40$. Mais quand vne particule a le signe +, il la faut soustraire : comme si l'equation est trouuee entre $11R + 12$, & 78 , nous soustrairons $+ 12$, & restera l'equation entre $11R$, & 66 : Item l'equation estant trouuee entre $3R + 6$, & 24 , ostant $+ 6$, restera l'equation entre $3R$, & 18 : Item si vne equation est trouuee entre $59 + 20$, & 100 , nous osterons $+ 20$, & restera l'equation entre 59 , & 80 : Item vne equation estant entre $39 + 2R$, & 56 , ostant $+ 2R$, l'equation restera entre 39 , & $56 - 2R$. Que si l'un & l'autre signe + & — sont en vne equation, il faut adiouster la particule du signe —, mais soustraire celle du signe +. Comme si vne equation est trouuee entre $9R + 12$, & $78 - 2R$: nous adiousterons premierement $- 2R$, & l'equation sera entre $11R + 12$, & 78 ; puis soustrayant d'icelle $+ 12$, restera l'equation entre $11R$, & 66 : Item si vne equation est entre $59 - 3R$, & $39 + 20$, nous adiousterons $3R$, & l'equation sera entre 59 , & $39 + 3R + 20$; & ostant de ceste-cy 39 restera l'equation entre 29 , & $3R + 20$: Item si vne equation est trouuee entre $108 + 8R$, & $29 - 12R + 60$, nous adiousterons premierement $12R$, & l'equation viendra entre $108 + 20R$, & $29 - 60$; & d'icelle estans oster 60 , restera l'equation entre 29 , & $20R + 48$. Que s'il aduient quelque equation, comme entre $6R - 10$, & $10R - 14$, en laquelle les nombres 10 , & 34 ont mesme signe —, il faut oster 10 de chaque terme, & restera l'equation entre $6R$, & $10R - 14$; & d'autant qu'en icelle les nombres $6R$ & $10R$ ont aussi vn mesme +, il faut oster le moindre $6R$ du plus grand $10R$, & restera l'equation entre $0R$, & $4R - 24$; & adioustant 24 à chaque terme d'icelle, viendra l'equation entre 24 , & $4R$. Soit derechef equation entre $54 + 4R$, & $19 - 6R + 30$;

Premierement pource que $+4R$, & $-6R$ ont signes diuers, il faut adiouter $4R$ a $6R$, & viendront $-10R$, & sera equation entre 54 , & $19-10R+30$; puis apres d'aurant que 54 , & 30 , ont vn mesme signe $+$, il faut soustraire 30 de 54 , & restera equation entre 24 , & $19-10R$: tiercement ie transpouse $-10R$, afin que l'equation soit entre 19 , & $10R+24$; & ainsi des autres.

Quant à la reduction des equations qui sont trouuees en fractions, elle se faict la reduisant en equation d'entier par la multiplication en croix. Comme si vne equation est trouuee

entre $\frac{3R+12}{5}$ & $\frac{369-198R}{3R}$; multipliant ces fra-

ctions en croix, sçauoir est le numerateur de la premiere par le denominateur de la 2. mais le numerateur de la 2. par le denominateur de la premiere, sera faict equation entre $99+36R$, & $1809-990R$; c'est à dire entre $1R+4$, & $20R-110$, qui estant reduite, comme dit est cy de flus, l'equation sera entre $19R$, & 114 : Item vne equation estant trouuee entre

$\frac{4R+18}{1R}$, & $\frac{12R-58}{2}$; estant reduite par la multiplica-

tion en croix, viendra equation entre $8R+36$, & $129-58R$, qui reduite par transposition sera entre $66R+36$, & 119 .

Que si vne equation est trouuee entre vne fraction, & quel-

que autre chose: comme entre $\frac{5}{4+1R}$, & vn escu, ou vn degré,

ou vne heure, ou vne minutte &c. Il faut poser vne vnté pour

ceste chose, ainsi $\frac{5}{2}$, afin que l'equation soit entre $\frac{5}{4+1R}$, &

$\frac{5}{2}$, laquelle par la multiplication en croix, sera reduite a l'equation d'entre 5 , & $4+1R$.

Quant à la reduction d'equation d'entre nombres cossiques irrationaux, & nombre absolu, nous l'enseignerons à la fin du chapitre 23.

S'il se rencontre aussi quelque equation en laquelle il n'y ait aucun nombre absolu, il faudra abbreuier les caracteres cossiques: Comme pour exemple, l'equation d'entre $2q$, & $11R$ sera reduite a l'equation d'entre $2R$ & 12 : Item l'equation d'entre $19a$, & $1\beta+199$ sera reduite à l'equation d'entre 19 , & $1R+2$, &c. Mais ceste reduction n'est du tout neces-

faire deuant l'extraction des racines des nombres coſſiques ſimples, comme nous dirons au chap. 10.

De la diuiſion que requiert la regle d'Algebre.

CHAP. IX.

La reduction eſtant faiſte, la regle d'Algebre dict que par le nombre du plus grand caractere coſſique (laiſſant icy caractere) on diuiſe l'autre nombre de l'equation : comme ſi l'equation eſt trouuee entre $7x$ & 42 ; diuiſant 42 par 7 , nombre du caractere coſſique x , viendra au quotient 6 , qui ſera la valeur d'une racine : Item vne equation eſtant trouuee entre $12q$, & $66x+36$: diuiſant $66x+36$ par 12 , le quotient donnera $5\frac{1}{2}x+3$, pour la valeur d'un quarré : Item ſi vne equation eſt entre $\frac{1}{3}q$, & $6x+13\frac{1}{3}$, nous diuiſerons $6x+13\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{3}$, & le quotient donnera $18x+40$, pour la valeur d'un quarré : Item vne equation eſtant entre $3qc$, & $9c+120$, nous diuiſerons $9c+120$ par 3 , & le quotient donnera $3c+40$ pour la valeur d'un quarré de cube &c.

De l'extraction des racines dont faiſt mention la regle d'Algebre.

CHAP. X.

Ayant faiſt la reduction des caracteres coſſiques, ſi le plus grand caractere coſſique eſt x , le quotient de la diuiſion mentionnee cy deſſus manifeſtera le nombre que vaut vne ſeule racine, comme il a eſté dict au chap. precedent : ou bien routes & quantefois que le nombre coſſique de la plus grade denomination ſera egal au nombre coſſique de la plus prochaine moindre denomination, eſtat diuiſé le nombre de la moindre denomination par le nombre de la plus grande, le quotient donnera la valeur d'une ſeule racine, encore que l'abbreuiation des caracteres ne ſoit faiſte. Comme ſi 5β ſont egaux à $30q$; 30 eſtans diuiſez par 5 , le quotient 6 ſera la va-

leur d'une seule racine. Mais si le plus grand caractère coëssique, étant seul d'une part de l'équation, est plus grand que racine, & de l'autre part soit un nombre absolu, il faudra extraire du quotient la racine qu'iceluy caractère signifie: cōme si le caractère est q , il faudra extraire la racine quarree; si c , la cubique; si qq , la quarree de quarree, &c. laquelle sera la valeur d'une seule racine. Comme pour exemple, si une équation est entre $5q$, & 520 ; ayant fait la diuision, il faudra chercher la racine quarree du quotient 144 : Item si $10c$ sont egaux à 270 , il faudra ayant fait la diuision extraire la racine cubique du quotient 27 : Semblablement si $8c$ sont egaux à $24R+144$, il faudra trouuer la racine cubique du quotient. Et afin qu'on sçache generalement quelle racine il faut tirer du quotient, quand deux nombres coëssiques non collateraux sont egaux entr'eux, desquels l'un ny l'autre est nombre absolu, il faut abbreuier les caractères, afin que l'équation se face entre N , & nombre coëssique: comme si une équation est entre $10qc$, & $80q$, soit reduicte icelle à l'équation d'entre $10q$, & 80 : étant donc fait la diuision, il faudra tirer la racine cubique du quotient 8 , & ainsi des autres.

Or la maniere d'extraire les racines des nombres absolus est enseignée en plusieurs Arithmetiques vulgaires: c'est pourquoy nous enseignerons seulement icy la maniere d'extraire les racines des nombres coëssiques. Si donc il faut extraire quelque racine d'un nombre coëssique simple, soit prise la racine d'iceluy nombre, delaisant le caractère, l'exposant duquel soit diuisé par l'exposant du caractère qui denomme la racine qu'il faut extraire, & viendra l'exposant du caractère par lequel sera denommé la racine cherchée. Comme s'il faut trouuer la racine quarree de ce nombre $144q$ ayant pris la racine quarree d'iceluy nombre 144 , qui est 12 , soit diuisé l'exposant de ce caractère q , par l'exposant du caractère q , sçauoir est 2 par 2 , & viendra 1 , qui est exposant du caractère R : $12R$ est donc racine quarree du nombre $144q$. Car si ce nombre $12R$ est multiplié en soy sera produit le nombre proposé $144q$.

Derechef qu'il faille trouuer la racine quarree de $144qc$: ayant pris la racine quarree d'iceluy, qui est 12 , soit diuisé l'exposant de ce caractère qc , sçauoir est 6 , par l'exposant de racine quarree, qui est 2 , & viendra 3 , exposant du caractère c : donc $12c$ est racine quarree du nombre $144qc$. Ainsi aussi la racine cubique de ce nombre $64c$, sera $4R$. Car la racine cubique du nombre 64 est 4 , & l'exposant du caractère cube,

ſçavoir eſt 3, eſtant diuiſé par 3, produict l'vnité, expoſant de 3.

Item la racine quarrée de ce nombre 2599, ſera 59.

Et la racine quarrée de quarrée de ce nombre 16999, ſera 29.

Et la racine ſurſolide de ce nombre 3299, ſera 29.

Mais la racine quarrée de quarrée de ce nombre 8199, ſera 39, &c.

Que ſi vn nombre n'a la racine cherchée, ou par la diuiſion des expoſans, n'eſt produict vn nombre expoſant entier, le nombre coſſique propoſé n'a pas la racine deſirée.

Quand à l'extraction des racines de nombres coſſiques compoſez & diminuez, il eſt à noter qu'on n'a point encore trouué (au moins que ie ſçaché) de maniere certaine pour ce faire, ſinon que les expoſans des trois nombres coſſiques de l'equation ayent vn meſme excez entr'eux, c'eſt à dire qu'ils ſoient en proportion Arithmetique; telles ſont les equations ſuiuantes.

19. 6R+72.	les expoſans ſont	2.	1.	0.
19. 71—6R.	les expoſans ſont	2.	0.	1.
19. 14R—48.	les expoſans ſont	2.	1.	0.
199. 189+648	les expoſans ſont	4.	2.	0.
199. 725—49.	les expoſans ſont	4.	0.	2.
199. 4339—41616.	les expoſans ſont	4.	2.	0.
19c. 200c+3455.	les expoſans ſont	6.	3.	0.
19c. 5120—16c.	les expoſans ſont	6.	0.	3.
19c. 800c—156751.	les expoſans ſont	6.	3.	0.
1999. 200099+185076881.	les expoſans ſont	8.	4.	0.
1999. 214651701—2099.	les expoſans ſont	8.	0.	4.
1999. 2000099—7846119.	les expoſans ſont	8.	4.	0.
199. 809+39609.	les expoſans ſont	10.	5.	0.
199. 7424—2009.	les expoſans ſont	10.	0.	5.
199. 20009—999424.	les expoſans ſont	10.	5.	0.
&c.				

Quand les expoſans gardant la progression Arithmetique ſont tous plus grands que 0, il les faut abbreuier par la ſouſtraction du moindre nombre expoſant. Comme les ſuiuantes equations.

1c9. 725b9—4cc.	les expoſans ſont	11.	7.	9.
1c9. 2000999+34569	les expoſans ſont	11.	8.	5.
199. 2009c+143369.	les expoſans ſont	10.	6.	2.

Seront reduites à celles-cy.

199. 725—49.	les expoſans ſont	4.	0.	2.
19c. 200c+3459.	les expoſans ſont	6.	3.	0.

1.999. 20099+14336. les exposans sont 8. 4. 0.

Et ainsi faut-il faire de toutes autres, afin de cognoistre qu'elle racine il faut extraire.

Or pour extraire la racine quarree de tels nombres cossiques; prenez premierement la moitié du nombre des racines; puis au quarré d'icelle moitié, adioustez-y le nombre absolu, s'il a le signe +, ou l'ostez s'il a le signe —: & finalement à la racine quarree de ce produit, adionstez la moitié du nombre des racines, si elles ont le signe +, ou l'ostez si elles ont le signe —: & ce qui viendra donnera l'estimation & valeur d'une seule racine quarree. Comme pour exemple, vne equation estant trouuee entre 19. & $72-6x$; la diuision estant faicte de $72-6x$, par 1, comme veut la regle d'Algebre, vient le mesme nombre pour la valeur d'un quarré, duquel il faut trouuer la racine. Premierement donc ie prend la moitié du nombre des racines, sçauoir 3; puis au quarré d'icelle moitié, sçauoir est a 9, i'adiouste le nombre absolu 72, à cause du signe + & viennent 81; dont ie prend la racine quarree, qui est 9; & d'icelle l'oste 3, moitié du nombre des racines, & reste le nombre 6, pour la valeur de la racine cherchee.

Soit derechef vne equation trouuee entre 19. & $6x+72$ & il faut trouuer la racine quarree de ce nombre $6x+72$.

Ie prends premierement la moitié du nombre des racines, sçauoir est 3; puis au quarré d'icelle moitié, qui est 9, i'adiouste 72 à cause du signe +, & font 81: dont la racine quarree est 9, à laquelle i'adiouste 3 moitiés du nombre des racines, & font 12, qui est la valeur d'une racine.

Soit encore vne equation entre 19. & $18x-72$: & il faut trouuer la racine d'iceluy nombre $18x-72$.

Ie prends donc la moitié des racines, sçauoir est 9; puis du quarré d'icelle moitié qui est 81, ie soustrais 72, à cause du signe —, & restent 9, dont la racine quarree est 3, à laquelle i'adiouste la moitié des racines, sçauoir est 9, à cause du signe +, & font 12 pour la valeur d'une racine.

Mais il est a noter que tels nombres cossiques diminuez, esquels le nombre absolu a le signe —, ont double racine, sçauoir est, l'une grande & l'autre petite; la grande est trouuee comme dit est cy-dessus: mais on aura la moindre, si la racine quarree du reste de la soustraction est ostee de la moitié du nombre des racines: comme au dernier exemple proposé, si 3, racine quarree du reste 9, est osté de 9 moitié du nombre des racines, resteront 6, pour l'autre & moindre racine d'iceluy nombre cossique $18x-72$. Et faut noter que l'une &

L'autre racine n'est pas toujours propre à la solution d'un problème, ains seulement l'une ou l'autre : c'est pourquoy aduenant tels nombres, si l'examen faict par l'une d'icelles racines ne respond à la question, il faudra prendre l'autre racine.

Or il y a encore vne autre maniere d'extraire la racine des nombres cossiques composez, laquelle est fort commode, quand le nombre des racines est impair ou rompu : laquelle extraction se faict ainsi : Au quarré du nombre des racines, adioustez le quadruple du nombre absolu, s'il a le signe +, ou l'ostez s'il a le signe — : puis à la racine quarrée de ce produit adioustez ou soustraiez le nombre des racines, selon qu'il sera noté, & viendra l'estimation ou valeur du double de la racine quarrée, parquoy la moitié sera la valeur d'une seule racine. Comme pour exemple, qu'il faille extraire la racine de ce nombre cossique $72-6R$: Au quarré du nombre des racines, qui est 36, l'adiouste 288, quadruple du nombre absolu 72, & viennent 324, dont la racine quarrée est 18 ; de laquelle i'oste le nombre des racines, sçauoir est 6, & restent 12, pour la valeur de deux racines ; & partant vne racine vaudra 6.

Pour le regard de l'extraction des racines des nōbres cossiques, qui constituent equation, ayans les exposans constitués en telle progression Arith. que ceux-cy, 4, 2, 0 ; ou 4, 0, 2 ; ou 6, 3, 0 ; ou 6, 0, 3 ; ou 8, 4, 0 ; ou 8, 0, 4 ; ou 10, 5, 0 ; ou 10, 0, 5, &c. esquels le plus grand caractère est toujours composé de 4, & d'un autre caractère cossique : il faut premierement extraire la racine quarrée, à cause du caractère 4, selon qu'il est enseigné cy dessus, accommodant au nombre qui est affecté au caractère cossique, en ceste partie-là de l'equation, de laquelle il faut tirer la racine, tout ce que nous auons dict du nombre des racines, comme si l'equation estoit entre trois nombres cossiques affectez aux caractères q , R , & N . puis apres de ceste racine quarrée trouuee, soit qu'elle soit rationnelle ou irrationnelle, il en faut tirer vne autre racine selō l'autre partie du plus grand caractère cossique, ce caractère q estant osté. Comme si vne equation est trouuee entre $19q$, & $18q-648$. Il faudra extraire la racine quarrée de ce nombre $18q-648$, à cause de la premiere partie du signe cossique q , tout ainsi que si l'equation estoit trouuee entre $1q$, & $18R-648$. laquelle racine quarrée sera 36 ; & d'icelle il faut derechef tirer la racine quarrée qui sera 6 : parquoy 6 sera la racine du nombre cossique proposé.

En la mesme maniere, si vne equation est entre $19c$, & $512c$

— 166 : il faudra prendre la racine quarrée du nombre 5120—166; & de ceste-cy prendre la racine cubique. Ainsi aussi, si l'equation est entre 1999, & 1000097—7846119. il faudra premierement prendre la racine quarrée : & puis apres de ceste-cy la racine quarrée de quarrée. Et ainsi des autres.

Des secondes racines.

CHAP. II.

D'Autant qu'en plusieurs operations sont cherchez deux, ou trois, ou d'avantage de nombres sous vne proportion incertaine, il est necessaire pour euitier confusion, qu'ayant posé $1R$ pour le premier nombre, on ne pose derechef $1R$ pour le second, & encore $1R$ pour le 3. C'est pourquoy on a excogité les secondes racines, lesquelles sont nommees, & figurees diuersement par les auteurs; mais suivant Stifel, Pelletier & Clavius, nous retiendrons le nom de secondes racines, & les noterons ainsi: $1A$, signifie $1R$ seconde; $1B$, denotte $1R$ tierce; $1C$, signifie $1R$ quarte; &c. Et quand vn nombre a deux signes, il faut entendre que le nombre avec le premier signe a esté multiplié par l'vnité du signe postérieur. Comme $1R A$, signifie $1R$ multipliée par $1A$; & $3R A$, signifie $3R$ multipliées par $1A$: ainsi $19Aq$, monstre que 19 a esté multiplié en $1Aq$; &c.

Or ces racines ont leur Algorithme particulier, aussi bien que les premieres racines. Et premierement quand à l'addition elle est aisée: car si elles sont de mesme genre, faut seulement adiouster les nombres entr'eux, & au produit apposer le mesme caractere d'icelles racines. Comme $3A$, & $4A$, font ensemble $7A$: Item $5B$, & $3B$, font $8B$. Mais quand icelles racines ne sont de mesme genre l'addition se fait par le signe +. Comme $3A$, & $4B$, font $3A + 4B$: Item $3R$, & $4A$, font $3R + 4A$.

La soustraction est aussi aisée: Car quand les racines sont de mesme genre, il n'y a qu'à soustraire vn nombre de l'autre, & apposer au reste le mesme caractere. Comme $3A$ ostez de $5A$, restent $2A$: Item $2B$ ostez de $5B$, restent $3B$. Mais quand icelles sont de genres differens, la soustraction se fait

par le signe —: comme 3 A ostez de 4 B, restent 4 B — 3 A.

Pour le regard de la multiplication elle se fait ainsi: Si vn nombre de racine premiere, doit estre multiplié avec vn nombre de racine seconde, ayant seulement la lettre A ou B &c. Il faut multiplier les nombres entr'eux, & apposer au produit les mesmes signes. Comme 2 R multipliez par 2 A, font 4 RA; c'est à dire 4 R multipliez par 1 A: Item 2 A par 2 R, font 4 AR; c'est à dire 4 A multipliez par 1 R: Item 3 q multipliez par 4 B, font 12 q B; c'est à dire 12 q multipliez par 1 B.

Mais quand vn nombre absolu est multiplié avec vn nombre de seconde racine, il faut apposer au produit le signe de la seconde racine. Comme 6 multipliant 4 B, le produit est 24 B: Item 5 C multipliant 7, le produit est 35 C.

Que si vn nombre de seconde racine doit estre multiplié par vn nombre de seconde racine de mesme lettre, il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produit apposer la mesme lettre avec le caractere q. - Comme 3 A multipliez par 4 A, feront 12 A q.

Quand vn nombre de seconde racine est multiplié en soy quarrément, ou cubiquement, &c. Il faut apposer au produit la mesme lettre avec le caractere q, ou c, &c. Comme 2 A multipliez en soy quarrément, le produit est 4 A q; mais cubiquement est produit 8 A c: Item 2 R A par 2 R A, font 4 q A q; c'est à dire 4 q de premiere racine multipliez par 1 q de seconde racine.

Mais quand vn nombre de seconde racine est multiplié en vn autre de la mesme racine seconde, qui a aussi vn caractere cossique; il faut imaginer que le premier nombre ait pareillement le signe cossique R. Comme 1 A multiplié par 1 A q, le produit est 1 A c: Item 3 B, par 4 B c, font 12 B q q.

Que si vn nombre cossique simple sans lettre de seconde racine, doit estre multiplié avec vn nombre marqué de lettre, & signe cossique; il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produit apposer les mesmes signes. Comme 2 c multipliez par 4 A q, feront 8 c A q; c'est dire 8 c multipliez en 1 A q: Item 1 c multiplié par 1 R A q, fait 1 q q A q; c'est à dire 1 q q multiplié par 1 A q: Autant fait aussi 1 q A multiplié en soy: Car 1 q multiplié en soy fait 1 q q; & 1 A en soy fait 1 A q.

Quand vn nombre ayant apres la lettre de seconde racine vn signe cossique, est multiplié par vn nombre qui a pareillement apres la lettre de seconde racine vn signe cossique, le produit doit auoir outre la lettre, ou les lettres de seconde racine, le caractere cossique que donnent les exposans des ca-

raâcteres. Comme $2Aq$, en $5Ac$, produisent $10A\beta$; Item $3A$ multipliez par $4Bc$, feront $12AB\beta$.

Mais vn n^{bre} ayant vn caractere cossique apres la lettre de seconde racine, est multiplié par vn nombre, qui apres le caractere cossique a aussi la lettre de seconde racine, il faut apposer au produict le dernier caractere cossique, suiuy par la lettre de sec^{de}de racine puis aussi du caractere cossique produit du premier caractere cossique multiplié par la lettre de sec^{de}de racine, comme si elle auoit ce signe $\Re$. Comme $1Ac$ multiplié par $1qA$, fera $1qAqq$: qui sera aussi produict de $1\Re Aq$ multipliee en soy: Item $3Aq$ multipliez par $4cA$, feront $12cAc$, c'est a dire $12c$. multipliez par $1Ac$.

Quant à la diuision des secondes racines: soit fait premierement reduction des signes cossiques par la soustraction des signes semblables. Comme pour diuiser $8cAq$ par Aq : le soustrait les signes semblables Aq , & restent $8c$, & 4 : puis ie diuise $8c$ par 4 , & viennent $2c$, pour le quotient de $8cAq$ diuisez par $4Aq$: ainsi $8cAq$ diuisez par $4c$, le quotient est $2Aq$.

Mais diuisant vn nombre $\Re$ par vn nombre des secondes racines, le quotient sera nombre rompu. Comme $2\Re$ diuisees

$$\begin{array}{r} 2\Re \\ \text{par } 4A, \text{ le quotient est } \frac{\quad}{4A} \end{array}$$

Quant à l'extraction des racines, il faut tirer la racine du nombre s'il en a, & apposer à icelle la lettre de seconde racine, reiettant le caractere cossique. Comme la racine quarrée du nombre $25Aq$, est $5A$: Item la racine cubique du nombre $27Ac$, est $3A$; & la racine quarrée du nombre $16Dqq$, est $2D$.

Mais si le nombre n'a telle racine, ou le caractere n'est de mesme appellation que la racine qu'il faut extraire. Il faut seulement apposer à iceluy nombre, lettre & caractere, le signe radical. Comme la racine cubique du nombre $3Aq$, est $\sqrt[3]{c}3Aq$. Item la racine quarrée du nombre $4Ac$, est $\sqrt{c}4Ac$.

Quant à la preuue des operations de cest Algorithme des secondes racines, elle se fera tout ainsi qu'és premieres racines; sçauoir est que l'addition & soustraction, se prouueront l'une l'autre: comme aussi la multiplication & diuision: ou bien plus intelligiblement par les progressions geometriques commençant à l'vnité, mises à la page 300. prenant celle de la raison double pour les premieres racines: mais celles de la raison triple pour les secondes racines: tellement que $\Re$ uale 2 : mais $1A$, 3 ; $1q$, 4 ; $1Aq$, 9 ; $1Ac$, 27 ; $1\Re A$, 6 ; $1\Re Aq$, 18 ; &c.

Des nombres irrationaux, ou sourds.

CHAP. XII.

Nombres irrationaux ou sourds sont les racines des nombres, lesquelles ne se peuvent exprimer par nombres; tellement que pour expliquer telles racines on se sert de ces signes $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[6]{}$, &c. Comme la racine quarree de 5, est dictée sourde ou irrationnelle, pource qu'on ne peut trouver aucun nombre qui multiplié en soy produise 5: tellement que ceste racine quarree de 5, sera marquée ainsi, $\sqrt{5}$: ou ainsi $\sqrt{q5}$. Item la racine cubique de 7 sera marquée ainsi $\sqrt[3]{7}$. Item la racine quarree de quarree de 12, ainsi $\sqrt{\sqrt{12}}$. ou ainsi $\sqrt{q12}$. & ainsi des autres.

Est toutesfois à noter que tout nombre qui a le signe $\sqrt{}$, n'est pas pourtant irrationnel: car quelquesfois pour la commodité de l'operation, au lieu de tirer la racine de quelque nombre, on luy appose seulement le signe de la racine requise.

Or il y a deux genres de racines sourdes: car les vnes sont simples: comme $\sqrt{q}$. de quelque nombre non quarré: $\sqrt[3]{c}$ de quelque nombre non cube &c. & ces racines simples sont aussi appellees par quelqu'vns nombres mediaux. Les autres racines sourdes, sont composees par l'interpositiō des signes + & —: & icelles sont appellees par aucuns multinomies radicales; & par d'autres nombres irrationaux composez, ou diminuez: composez quand les nombres sont liez par le signe +, comme $\sqrt{7 + \sqrt{10}}$: mais diminuez quand les nombres sont liez par le signe —: comme $\sqrt{5 - \sqrt{13}}$, ou $\sqrt{10 - \sqrt{c7}}$.

De la reduktion des racines simples à vne mesme denomination.

CHAP. XIII.

A Fin que les simples racines sourdes se puissent multiplier & diuiser entr'elles, il est necessaire qu'elles soient redui-

tes en vne meſme denomination, ſi elles ſont de diuerſes : ſa-
 quelle reduction ſe faiét preſque en la meſme maniere, que
 la reduction des fractions de diuerſes denominations à vne
 meſme : Car ayant poſé les ſignes radicaux, chacun ſous leur
 nombre, il faut multiplier vn chacun nombre en ſoy, ſelon
 le ſigne radical de l'autre : puis apres multiplier les expoſans
 des ſignes entr'eux, afin d'auoir l'expoſant du ſigne commun.
 Comme pour exemple, ſoiēt les deux racines $\sqrt{7}$, & $\sqrt[3]{6}$. qu'il
 faut reduire en racines de meſme eſpece. Ayant poſé ces deux
 racines ainſi qu'il appert icy ; ie multiplie 7 cubiquement à
 cauſe du ſigne $\sqrt[3]{}$ & viennent 343 au lieu de 7 ;
 puis ie multiplie 5 quarrément à cauſe du ſi-
 gne $\sqrt{}$ du nombre 7, & viennent 25, pour & au
 lieu de 5 : & finalement ie multiplie les expoſans
 des ſignes $\sqrt{}$ & $\sqrt[3]{}$ entr'eux : ſçauoir eſt 2, par
 3, & viennent 6, qui eſt expoſant du caractere
 q : tellement que $\sqrt{7}$, & $\sqrt[3]{6}$ ſeront reduites à
 $\sqrt[6]{343}$, & $\sqrt[6]{25}$. Ainſi auſſi $\sqrt[3]{12}$, & $\sqrt[4]{3}$. eſtā
 reduictes à meſme eſpece ou denomination, ſe-
 rōt $\sqrt[12]{32}$, & $\sqrt[12]{27}$, cōme il appert en ceſte fig.

$$\begin{array}{r} 343 \cdot 25 \\ \hline \sqrt{7} \times \sqrt[3]{6} \\ 2 \times 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \cdot 27 \\ \hline \sqrt[3]{12} \times \sqrt[4]{3} \\ 3 \times 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

Il y a quelques abbreviations en ceſte o-
 peration, comme quand il faut reduire vn
 nombre abſolu, & vn radical en meſme eſpe-
 ce : car alors il n'y a qu'à multiplier en ſoy
 quarrément ou cubiquement &c. le nombre
 abſolu, & au produict appoſer le ſigne radi-
 cal de la racine. Comme 6, & $\sqrt{5}$, eſtans re-
 duicts à meſme eſpece ſeront $\sqrt{36}$, & $\sqrt{5}$. Item 2 & $\sqrt[3]{14}$, ſerōt
 $\sqrt[3]{28}$, & $\sqrt[3]{14}$.

Item voulant reduire ces deux racines $\sqrt[3]{8}$, & $\sqrt[4]{25}$. Je preſ-
 de 8 la racine cubique 2 : puis apres la racine quarrée de 25,
 qui eſt 5, à laquelle i'appoſe le ſigne radical reſtant $\sqrt{}$, ainſi $\sqrt{5}$.
 J'ay donc maintenant pour les deux racines propoſees vn
 nombre abſolu 2, & vn nombre radical $\sqrt{5}$, qui reduis comme
 dict eſt cy deſſus, ſont $\sqrt{4}$ & $\sqrt{5}$.

Item voulant reduire ces deux racines $\sqrt[3]{12}$ & $\sqrt[4]{36}$, en meſ-
 me eſpece ie multiplie 2 en ſoy quarrément à cauſe du ſigne
 q , qui eſt en l'autre racine outre le ſigne $\sqrt[3]{}$, & faiét 4. auquel
 i'appoſe le ſigne q , & ſera faiète la reduction à $\sqrt[6]{48}$, & $\sqrt[6]{36}$.

Itē voulant reduire $\sqrt[3]{19}$, & $\sqrt[4]{3}$ en meſme denomination. Je
 multiplie le nōbre de la moindre denomination, ſçauoir eſt 3,
 en ſoy quarrémēt, à cauſe du ſigne $\sqrt{}$, qui eſt en la plus grāde
 denomination outre $\sqrt[3]{}$, & viennent $\sqrt[12]{19}$, & $\sqrt[12]{9}$ pour la re-

duction en mesme espece des deux racines proposees. Ainsi $\sqrt{qc8}$, & $\sqrt{9}$, seront reduites a $\sqrt{qc8}$, & $\sqrt{qc729}$. multipliant le nombre 9 de la moindre denomination en soy cubiquement, à cause du caractere c , qui outre q , est en la plus grande denomination.

Orauparavant que venir à l'Algorithme d'icelles racines sourdes, il est necessaire que nous enseignions le probleme suivant.

Cognoistre si deux racines sourdes sont commensurables, ou incommens. & quelle raison elles ont entr'elles.

Soit diuisé le nombre de la plus grande racine, par celuy de la moindre, (icelles estans reduictes en mesme espece si elles n'y sont) & si au quotient vient vn nombre qui ait la racine denotee par le signe radical d'icelles racines proposees, elles serót commens. entr'elles, autrement non : & aurót telle raison l'une à l'autre, que le quotient à l'vnité, ou si le quotient est vne fraction, elles seront entr'elles comme le numerateur au denominateur. Comme $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$, sont commens. entr'elles. Car 12 estans diuisez par 3, le quotient est 4, dont la racine quarrée est 2, & seront l'une à l'autre comme 2 à 1. Item $\sqrt{320}$ & $\sqrt{135}$ sont commens. car 320 estans diuisez par 135, le quotient est $2\frac{10}{27}$ ou $\sqrt{c\frac{64}{27}}$, c'est à dire $\frac{4}{3}$: & leur raison est comme 4 à 3. Item $\sqrt{qc64}$ & $\sqrt{c27}$ sont commens. & leur raison est comme 3 à 2 : car icelles estans reduictes en mesme espece, seront $\sqrt{qc64}$ & $\sqrt{qc729}$, & la diuision faicte le quotient sera $\sqrt{qc\frac{25}{64}}$ ou $\sqrt{qc\frac{729}{64}}$, c'est à dire $\frac{3}{2}$.

De la multiplication & diuision des racines simples.

CHAP. XIV.

Quand deux racines de mesme genre doiuent estre multipliees ou diuisees entr'elles, il faut multiplier ou diuiser les nombres entr'elles, il faut multiplier ou diuiser les nombres entr'eux, & apposer au nombre produit le mesme signe radical. Comme pour exemple voulant multiplier $\sqrt{7}$. par $\sqrt{10}$. le multiplie 7 par 10, & viennent 70, auxquels j'appose le signe radical, & sont $\sqrt{70}$. Ainsi $\sqrt{3}$ par $\sqrt{12}$, produit $\sqrt{36}$, c'est

à dire 6. Ainsi $\sqrt{2}$ par $\sqrt{8}$, le produit est $\sqrt{18}$. Ainsi $\sqrt{3}$ par $\sqrt{7}$, viennent $\sqrt{21}$. Ainsi $\sqrt{4}$, par $\sqrt{8}$, viennent $\sqrt{32}$. Mais pour diuifer $\sqrt{70}$, par $\sqrt{10}$. Je diuise 70 par 10, & viennent 7, auxquels i'appose le signe radical, & sont $\sqrt{7}$. Ainsi $\sqrt{18}$ par $\sqrt{8}$ le quotient sera $\sqrt{2}$, c'est à dire $\frac{1}{2}$ ou $1\frac{1}{2}$. Ainsi $\sqrt{21}$ par $\sqrt{3}$, le quotient sera $\sqrt{7}$.

Mais quand les deux racines proposees sont de differente espece, il les faut reduire à vne mesme : puis apres faire la multiplication ou diuision comme dessus. Comme pour exemple, voulant multiplier $\sqrt{3}$ par 4. Je reduis le nombre absolu 4, & sont $\sqrt{16}$: puis ie les multiplie comme dessus, & viennent $\sqrt{48}$. Ainsi $\sqrt{5}$ multipliee par $\sqrt{10}$. le produit sera $\sqrt{50}$. Ainsi aussi $\sqrt{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt{\frac{2}{3}}$, produit $\sqrt{\frac{2}{12}}$. Mais diuisant $\sqrt{48}$ par 4, le quotient sera $\sqrt{3}$. Ainsi $\sqrt{50}$ diuisee par $\sqrt{10}$, le quotient sera $\sqrt{5}$.

Mais si quelque racine doit estre multipliee en soy quarrément, ou cubiquement &c. selon le signe radical qui luy sera appose, il faut seulement prendre le mesme nombre pour le produit, delaisant le signe radical. Comme $\sqrt{3}$ estant multipliee quarrément produira 3. Et $\sqrt[3]{6}$ multipliee en soy cubiquement fera 6.

De l'addition des racines simples.

CHAP. XV.

SI les racines sont commensurables ; ayant diuise la plus grande par la moindre, soit adiousté vne vunité au quotient rationel, & la somme estant multipliee par la moindre racine, sera donnee la somme de l'addition des deux racines proposees. Comme pour exemple, soient proposees à adiouter $\sqrt{18}$ & $\sqrt{8}$. Diuisant la plus grande par la moindre, le quotient est $\sqrt{2}$, c'est à dire $\frac{1}{2}$, & adioustant 1, c'est $\frac{3}{2}$, qui multipliez par $\sqrt{8}$, le produit est $\sqrt{50}$, pour la somme des deux racines proposees. Ainsi $\sqrt{12}$ adioustez à $\sqrt{3}$, la somme est $\sqrt{27}$. Item $\sqrt{320}$ adioustee à $\sqrt{135}$, fait la somme $\sqrt{1715}$. Item $\sqrt{4}$ adioustee à $\sqrt{8}$, fait 4. Item $\sqrt{\frac{1}{2}}$ adioustee à $\sqrt{\frac{2}{3}}$, fait $\sqrt{\frac{4}{12}}$.

Que si les racines proposees sont incommens. faut seulement interposer entre deux le signe + ; comme $\sqrt{6}$ adioustee à $\sqrt{11}$, fait $\sqrt{6+11}$.

Où il y a encore plusieurs autres manieres d'adiouster les racines cōmens. desquelles la suivante me sēble aīsee. Ayant trouuē raison des racines proposees, soit posē au premier terme d'une regle de trois, l'un des nombres d'icelle raison; au second terme, la somme d'iceux nombres de la raison; & au . la racine correspondante au terme de la raison posē au premier terme; & faisant la regle comme il appartient, le quatriesme nombre qui viendra sera la somme des racines proposees. Orme au premier exemple cy dessus, la raison des racines, a estē trouuee comme 3 à 2: posant donc 3, ou 2 au premier terme de la regle de trois, mais 5 au second, & $\sqrt{8}$, ou $\sqrt{8}$ au 3. le 4. sera $\sqrt{50}$: & se faict la regle de trois ainsi qu'il appert cy dessous.

Si 3 donnent 5 que donneront $\sqrt{18}$. ou si 2 donn. 5 combien $\sqrt{8}$.

25	$\sqrt{4}$	$\sqrt{25}$
<u>90</u>		<u>8</u>
36		200
<u>450</u>		
		222 $\sqrt{50}$.
		**

0
~~550~~ $\sqrt{50}$. somme des racines $\sqrt{18}$ & $\sqrt{8}$. propo. à adiouster.
 99

De la soustraction des racines simples.

CHAP. XVI.

Si les racines sont incommens. il n'y a qu'à interposer le signe —. Comme $\sqrt{3}$ ostee de $\sqrt{10}$, restera $\sqrt{10} - \sqrt{3}$. Item $\sqrt{20}$, ostee de $\sqrt{50}$, reste $\sqrt{50} - \sqrt{20}$.

Mais quand les racines sont commens. Ayant diuisē la plus grande par la moindre, soit ostē du quotient rationnel vne partie; puis le reste soit multipliē par la moindre racine, & le produit sera le reste desirē. Comme pour exemple. qu'il faille soustraire $\sqrt{8}$ de $\sqrt{50}$. Je diuise donc 50 par 8, le quotient est 6, dont la racine quarrēe est 2, de laquelle i'oste vn entier, & reste 3, que ie multiplie par $\sqrt{8}$, & vient $\sqrt{18}$, pour le reste

desiré. Item qui de $\sqrt{27}$ oste $\sqrt{3}$, reste $\sqrt{12}$. Ainsi qui de $\sqrt{171}$ osté $\sqrt{310}$, reste $\sqrt{135}$. Ainsi aussi qui de $\sqrt{\frac{64}{16}}$ oste $\sqrt{\frac{1}{2}}$, reste $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Ceste operation se faict aussi par la regle de trois, mettant au premier & 3. terme les nombres specifiez au chap. preced. mais au 2. la difference des termes de la raison, comme il appert cy dessous.

Si 5 donnent 3 combien $\sqrt{50}$: ou si 2 donnent 3, combien $\sqrt{8}$.

$\sqrt{35}.$	$\sqrt{9}.$	9	$\sqrt{4}.$	$\sqrt{9}.$	9
		450			72
		*			
		28			
		450 [$\sqrt{18}$			
		255			
		2			
		.			
			3		
			72 [$\sqrt{18}$ reste; $\sqrt{8}$ estant		
			** osté de $\sqrt{50}$.		

*De l'addition des nombres irrationaux
composez, & diminuez.*

CHAP. XVII.

POur adiouter nombres irrationaux composez & diminuez, il les faut disposer l'un au dessous de l'autre; puis adiouter chascunes racines simples, comme il a esté dict en l'Algorithme precedant, obseruat les regles de + & —, que nous auons enseigné au chap. 4; c'est a sçauoir qu'aux signes semblables il faut adiouter sans chager le signe; mais qu'aux dissemblables, il faut soustraire, & poser le signe du plus grand nombre.

Or d'autant qu'il ne se faict rien en ceste operation, qui n'ait desia esté enseigné cy deuant, la chose sera assez manifeste par exemples sans d'auantage de discours.

$6 + \sqrt{18}.$	$\sqrt{27} + \sqrt{8}.$	$\sqrt{162} - 2.$	$\sqrt{50} + 3.$
$4 + \sqrt{8}.$	$\sqrt{12} + \sqrt{2}.$	$\sqrt{100} - 3.$	$\sqrt{32} - 5.$
$10 + \sqrt{50}.$	$\sqrt{75} + \sqrt{18}.$	$\sqrt{722} - 5.$	$\sqrt{162} - 2.$

$$\begin{array}{cccc}
 \sqrt{50}-3. & 8-\sqrt{50}. & \sqrt{50}+6. & \sqrt{216}-\sqrt{\sqrt{405}}. \\
 \sqrt{32}+5. & \sqrt{242}-12. & 24-\sqrt{242}. & \sqrt{664}-\sqrt{\sqrt{80}}. \\
 \hline
 \sqrt{162}+2. & \sqrt{72}-4. & 30-\sqrt{72}. & 10-\sqrt{\sqrt{3125}}.
 \end{array}$$

$\sqrt{256}-\sqrt{27}.$ Et est à noter pour briefuete, que les deux
 $\sqrt{81}+\sqrt{6} 8.$ particules d'un nombre composé, se rencô-
 $7-1.$ trant totalement egales aux deux particules
 d'un nombre diminué, il n'y a qu'à doubler
 la premiere particule de l'un d'iceux nombres. Comme pour
 adiouter $15+\sqrt{8}$ à $15-\sqrt{8}$: Je double seulement 15 & font 30.
 pour la somme de l'addition. Item $\sqrt{20}+6$ adiustez à $\sqrt{20}$
 -6 font $\sqrt{80}$. & ce d'autant que les dernieres particules se
 destruisent l'une l'autre à cause des signes + & -.

*De la soustraction des nombres irrationnaux
 composez & diminuez.*

CHAP. XVIII.

Pour soustraire tels nombres, il les faut disposer l'un au-
 dessus de l'autre, puis soustraire chascunes racines comme
 il a esté dict au chap. 16. observant les regles des signes + &
 - enseignées au chap. 4. sçavoir est qu'aux signes sembla-
 bles, il faut soustraire, (si faire se peut) sans changer le signe:
 mais si on ne peut soustraire, il faudra oster le supérieur de
 l'inférieur, & changer le signe. Mais aux signes dissemblables
 il faut adiouter, & aposer le signe supérieur.

Ceste operation peut estre facilement entendue par les e-
 xemples suivans, sans autres preceptes.

$$\begin{array}{cccc}
 \sqrt{50}-5 & \sqrt{\sqrt{1875}}+\sqrt{\sqrt{1250}}. & \sqrt{50}+2. & \sqrt{50}-2. \\
 \sqrt{8}-2 & \sqrt{\sqrt{243}}+\sqrt{\sqrt{162}}. & \sqrt{18}+4. & \sqrt{18}-4. \\
 \hline
 \sqrt{18}-3 & \sqrt{\sqrt{48}}+\sqrt{\sqrt{32}}. & \sqrt{8}-2. & \sqrt{8}+2. \\
 & & \text{X} & \text{iiij}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{162} + 2. & \sqrt{162} - 2. & \sqrt{72} - 4. & 30 - \sqrt{72}. & \sqrt{0} + 16. \\ \sqrt{50} - 3. & \sqrt{50} + 3. & 8 - \sqrt{50}. & \sqrt{50} + 6. & \sqrt{320} - 8. \\ \hline \sqrt{32} + 5. & \sqrt{52} - 5. & \sqrt{242} - 32. & 24 - \sqrt{242} & 24 - \sqrt{320}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{\sqrt{2401}} - \sqrt{c1}. & \sqrt{c1000} + \sqrt{\sqrt{3125}}. & \sqrt{180} + 0 \\ \sqrt{\sqrt{256}} - \sqrt{c27}. & \sqrt{c216} - \sqrt{\sqrt{405}}. & \sqrt{320} - 8 \\ \hline \sqrt{\sqrt{81}} + \sqrt{c8}. & 4 + \sqrt{\sqrt{20480}} & 8 - \sqrt{20} \end{array}$$

Et est à noter pour briefueté, que les deux particules d'un nombre composé se rencontrans du tout egales à deux particules d'un nombre diminué, il faut seulement doubler la dernière particule de l'un des nombres. Comme pour soustraire $\sqrt{12} - 5$, de $\sqrt{12} + 5$. Je double la dernière particule 5, & vient le nombre 10, pour reste de la soustractiō. Ainsi $10 - \sqrt{4}$, ostez de $10 + \sqrt{4}$ resteront $\sqrt{16}$, c'est à dire 4 : Item $\sqrt{1} - \sqrt{5}$ ostez de $\sqrt{12} + \sqrt{5}$, restent $\sqrt{20}$. Et ce d'autant que $+$ destruit $+$; mais $+$ & $-$ se doiuent adiouter.

*De la multiplication des nombres irrationaux
composez & diminuez.*

CHAP. XIX.

Pour faire ceste operation, & aussi la suivante, il faut retenir la regle de $+$ & $-$ enseignée au chap. 5. sçavoir est qu'aux signes semblables faut poser $+$, mais aux dissemblables $-$. Ayant donc posé l'un des deux nombres au dessous de l'autre, soit faite la multiplication comme es nombres absolus, observant toutesfois ce que nous auons dict au chap. 14. de la multiplication des racines simples, & au chap. 15. de l'addition & soustraction des mesmes racines. Ce qui sera enseigné es exemples descrits cy dessous. Comme en l'exemple suyuant $-\sqrt{45}$ en $-\sqrt{20}$, faict $+\sqrt{900}$, c'est à dire $+30$. & $-$

$\sqrt{45}$ par $+$ 6, c'est à dire en
 $+$ $\sqrt{36}$, faict $-\sqrt{1620}$. & $-\sqrt{20}$ par $+$ 8, c'est à dire par
 $+$ $\sqrt{64}$, faict $-\sqrt{1280}$. Et
 finalement $+$ 8 en $+$ 6, faict
 $+$ 48 : Et partant tout
 le nombre produict sera 48
 $-\sqrt{1280} - \sqrt{1620} + 30$, qui reduit par additiõ de $+$ 48 à 30;
 & de $-\sqrt{1280}$ à $\sqrt{1620}$; sera 78 $-\sqrt{5780}$.

Multiplicande 6 $-\sqrt{20}$.
 Multiplicateur 8 $-\sqrt{45}$.

$$\begin{array}{r} \hline \text{Pr. } 48 - \sqrt{1280} - \sqrt{1620} + 30 \\ \hline \end{array}$$

qui par reduction sera 78 $-\sqrt{5780}$.

En cest autre exem-
 ple, ie multiplie $-\sqrt{\sqrt{648}}$ par $-\sqrt{\sqrt{162}}$, &
 vient $+\sqrt{\sqrt{104976}}$, c'est
 à dire $+$ 18 : & $+\sqrt{\sqrt{288}}$
 par $-\sqrt{\sqrt{162}}$, faict $-\sqrt{\sqrt{46656}}$, c'est à dire $-\sqrt{216}$: & $-\sqrt{\sqrt{648}}$ par $+$ $\sqrt{\sqrt{128}}$, faict $-\sqrt{\sqrt{82944}}$, c'est à dire $-\sqrt{288}$: & finalement $+\sqrt{\sqrt{288}}$ par $+\sqrt{\sqrt{128}}$ faict $+\sqrt{\sqrt{36864}}$, c'est à dire $+\sqrt{192}$; & partant tout le nombre produict sera $\sqrt{192} - \sqrt{288} - \sqrt{216} + 18$. ou bien $18 + \sqrt{192} - \sqrt{288} - \sqrt{216}$.

Multiplicande $\sqrt{\sqrt{288}} - \sqrt{\sqrt{648}}$.
 Multiplicateur $\sqrt{\sqrt{128}} - \sqrt{\sqrt{162}}$.

$$\begin{array}{r} \hline \text{Produit } \sqrt{192} - \sqrt{288} - \sqrt{216} + 18. \\ \hline \end{array}$$

ou $18 + \sqrt{192} - \sqrt{288} - \sqrt{216}$.

En cest exemple nous
 reduisons premieremēt
 $\sqrt{36}$, & $\sqrt{3}$ en vne mes-
 me denomination, c'est
 à sçauoir à $\sqrt{936}$, &
 $\sqrt{9243}$, & ces deux nombres multipliez entr'eux, le produit
 est $+\sqrt{938748}$: puis après nous reduisons $\sqrt{67}$, & $\sqrt{3}$ à $\sqrt{9649}$
 & $\sqrt{9627}$ de mesme espee, & ces deux-cy estans multipliez
 entr'eux, le produit est $\sqrt{961323}$.

Multiplicande $\sqrt{67} + \sqrt{36}$.
 Multiplicateur $\sqrt{3}$.

$$\begin{array}{r} \hline \text{Produit } \sqrt{961323} + \sqrt{938748}. \\ \hline \end{array}$$

Au premier de ces
 deux exemples est
 multiplié vn nō-

$$\begin{array}{r} 7 + \sqrt{5} \qquad 7 - \sqrt{5}. \\ 7 + \sqrt{5} \qquad 7 - \sqrt{5}. \\ \hline \end{array}$$

bre composé en 49 $+$ $\sqrt{245}$ $+$ 245 $+$ 5. 49 $-$ $\sqrt{245}$ $-$ 245 $+$ 5.
 soy, dont le pro-
 duit est 49 $+$ $\sqrt{245}$ $+$ $\sqrt{245}$ $+$ 5, c'est à dire 54 $+$ $\sqrt{980}$, pource
 que 49 & $+$ 5, font 54, & $\sqrt{245}$ avec $\sqrt{245}$, c'est à dire le dou-
 ble de $\sqrt{245}$, faict $\sqrt{980}$. Mais au 2. exemple est multiplié vn
 nombre diminué en soy, dont le produit est 49 $-$ $\sqrt{245}$ $-$ 245
 $+$ 5, c'est à dire 54 $-$ $\sqrt{980}$. Or pour briefuement faire telle
 multiplication, c'est à dire multiplier vn nombre composé

en soy, ou par vn autre egal, il ne faut qu'adiouster ensemble les quarrez des particules, puis à ceste somme adiouster le double du produit d'une particule en l'autre. Comme és deux exemples cy dessus, les quarrez des particules font 54, & le produit d'une particule en l'autre est $\sqrt{245}$, ou $\sqrt{145}$, dont le double est $\sqrt{980}$, ou $\sqrt{980}$. Tout le produit est donc $54 + \sqrt{980}$, ou $54 - \sqrt{980}$.

Mais multipliant vn nombre composé, comme $6 + \sqrt{8}$ par son respondant contraire, c'est à dire par $6 - \sqrt{8}$, viendra au produit vn simple nombre 28, comme il

appert en l'operation. Car $+ \sqrt{188}$ ruine $- \sqrt{288}$; & partant reste $36 - 8$, qui sont 28. Ce produit sera encore trouué plus facilement & promptement. Car 8, quarré de la derniere particule $\sqrt{8}$, estant osté de 36, quarré de la premiere particule 6, restera le mesme produit 28.

Ainsi aussi $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ estant multiplié par son respondant contraire $\sqrt{10} - \sqrt{2}$, le produit sera $10 + \sqrt{20} - \sqrt{20} - 2$, c'est à dire 8: lequel nombre 8 est aussi produit par la soustraction de 2, quarré de la derniere particule, de 10 quarré de la premiere particule.

Pareillement si on multiplie $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$, par son respondant $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$, où tu vois que le signe $+$ de la derniere particule est changé en $-$, le produit sera $4 + \sqrt{24}$: lequel produit estant derechef multiplié par son respondant contraire $-4 + \sqrt{24}$, donne produit simple nombre 8. Ce dernier produit sera eneo-

re trouué plus facilement & promptement comme ensuit. Soient multipliees les deux premieres particules entr'elles, & seront $\sqrt{6}$, qui doublee fera $\sqrt{24}$; puis de la somme des deux nōbres d'icelles particules, scauoir est 5, soit osté le nōbre de la derniere particule, & restera 4, dont le quarré 16 soit osté du nōbre 24, & resteront 8 comme dessus.

Ainsi aussi si on multiplie $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$ par son respondant

$$6 + \sqrt{8}.$$

$$6 - \sqrt{8}.$$

$$36 + \sqrt{188} - \sqrt{288} - 8$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1.$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1.$$

$$- \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$$

$$+ \sqrt{6} + 2 + \sqrt{2}$$

$$3 + \sqrt{6} + \sqrt{3}$$

$$\text{produit } 4 + \sqrt{24}$$

$$- 4 + \sqrt{24}$$

$$- 16 - \sqrt{384} + \sqrt{384} + 24$$

$\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{6}$, sera produit $\sqrt{60} + 2$ qui multipliez par $\sqrt{60} - 2$, le produit sera simple nombre 56: lequel produit on aura aussi avec la mesme briefueté que dessus

Et par ceste maniere peuvent estre reduits tous tels nombres composez en simple nom: sçauoir est multipliant toujours par le respondant contraire, ainsi que dict est cy dessus, iusques à ce que l'on soit paruenue à vn simple nombre.

*De la diuision des nombres irrationaux
composez & diminuez,*

CHAP. XX.

Pour diuiser vn nombre irrationel composé par vn simple nombre radical, il faut diuiser chascue particule par le dit simple nombre radical, obseruant la regle de $+$ & de $-$. Comme pour diuiser $\sqrt{24} + \sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, ie diuise chascue particule du diuidende par le diuiseur 6, & le quotient est $\sqrt{4} + \sqrt{\frac{9}{6}}$, ou $2 + \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

$$\frac{\sqrt{24} + \sqrt{9}}{6} = \left[\sqrt{4} + \sqrt{1\frac{1}{2}} \right]$$

Ainsi diuisant $\sqrt{28} + \sqrt{20}$ par $\sqrt{4}$, vient au quotient $\sqrt{7} + \sqrt{5}$.

Mais pour diuiser vn simple nombre par vn composé; comme pour exemple, 42 par $\sqrt{25} + \sqrt{4}$, il faut multiplier l'un & l'autre nombre par $\sqrt{25} - \sqrt{4}$, le respondant contraire du diuiseur, & viendront $\sqrt{44100} - \sqrt{7056}$, & 21 ou $\sqrt{441}$; puis apres soit diuisé $\sqrt{44100} - \sqrt{7056}$ par $\sqrt{441}$, & viendront $\sqrt{100} - \sqrt{16}$, c'est à dire 6, qui sera le quotient de 42 diuisé par $\sqrt{25} + \sqrt{4}$.

Que si tant le diuidande que diuiseur, sont nombres composez, il faut reduire le diuiseur en simple nombre, comme il a esté dict au chap. precedent: puis multiplier le diuidande par les mesmes nombres par lesquels on aura multiplié le diuiseur pour le conuertir à simple nombre, & ce qui viendra soit diuisé par le simple nombre trouué comme dict est cy dessus, & ainsi qu'il appert en l'exemple cy dessous.

Soit proposé à diuifer $\sqrt{41} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$ par $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Multipliant le diuiseur $\sqrt{5} + \sqrt{2}$
par $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

Le produit sera 3.

Multipliant le diuidande $\sqrt{41} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$.
par $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

Le produit sera $\sqrt{205} + \sqrt{15} - \sqrt{10} - \sqrt{6} + \sqrt{4}$. Lequel il faut diuifer par 3. c'est à dire par $\sqrt{9}$. & le quotient sera $\sqrt{22\frac{7}{9}} + \sqrt{1\frac{6}{9}} - \sqrt{1\frac{1}{9}} - \sqrt{9\frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{6}{9}} + \frac{2}{3}$, ou bien $\sqrt{\frac{205}{9}} + \sqrt{\frac{15}{9}} - \sqrt{\frac{10}{9}} - \sqrt{\frac{6}{9}} + \sqrt{\frac{4}{9}}$.

Or il est à noter que les particules estans denommees de diuerfes racines, il les faut reduire à vne mesme denomination auparauant que proceder à l'operation.

Est pareillement à noter que l'on peut donner le quotient de la diuision en fraction, faisant numerateur le nombre diuidande; & denominateur le nombre diuiseur. Comme le quotient de la derniere operation cy dessus, se peut donner

ainsi $\frac{\sqrt{41} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$. Séblablement s'il faut diuifer $\sqrt{48} + \sqrt{6}$

par $\sqrt{15} + \sqrt{6} - \sqrt{3}$, le quotient sera ceste fraction $\frac{\sqrt{48} + \sqrt{6}}{\sqrt{15} + \sqrt{6} - \sqrt{3}}$.

Or d'autant qu'il est quelquefois necessaire de cognoistre quel de deux nombres irrationaux composé est le plus grand, nous enseignerons icy la maniere de ce faire, lors que la chose sera douteuse. Soit pour exemple les deux nombres composés $3 + \sqrt{8}$, & $8 - \sqrt{5}$, le plus grand desquels ie desire sçauoir. Je soustrais 3 de chaque nombre, & restent $\sqrt{8}$; & $5 - \sqrt{5}$, desquels ie prend les quarez, & sont 8; & $30 - \sqrt{500}$, de chacun desquels i'oste 8, & restent 0; & $22 - \sqrt{500}$; & à chacun d'iceux i'adionste $\sqrt{500}$, & viennent $\sqrt{500}$; & 22, c'est à dire $\sqrt{484}$, qui sont moindre que $\sqrt{500}$; & partant ie dis que $3 + \sqrt{8}$ est plus grand que $8 - \sqrt{5}$.

Des racines vniuerselles, & de leur Algorithme.

CHAP. XXI.

LA racine d'un nombre composé ou diminué est appelée *Racine vniuerselle* : Comme la racine quarree de ce nombre composé $\sqrt{9+22}$, est dictée racine vniuerselle, d'autant que de tout le nombre il faut extraire la racine, laquelle sera 5; car $\sqrt{9}$, qui est 3 estant adioustee à 22 faict 25, dont la racine quarree est 5. Ainsi aussi par la racine vniuerselle de cest autre nombre composé $10+\sqrt{7}$, il faut entendre que la racine quarree du nombre 7, si elle se peut auoir, estant adioustee à 10, on doit prendre la racine de tout nombre.

Or ces racines sont notees diuersement par les auteurs; mais nous les figurerons apposans le signe radical $\sqrt{}$, ou $\sqrt{c}$ au deuant du nombre dont la racine deura estre extraicte, & enfermant tout ledict nombre entre deux parentheses, en ceste maniere, $\sqrt{(\sqrt{9+22})}$ ou ainsi qui est le mesme, $\sqrt{(22+\sqrt{9})}$. Itē $\sqrt{(10+\sqrt{7})}$. Item $\sqrt{(49+18\sqrt{2})}$. Item $\sqrt{10+\sqrt{16+3+\sqrt{64}}}$. Item $\sqrt{c(\sqrt{25}-\sqrt{4+24})}$. Itē $\sqrt{(10+\sqrt{36})+\sqrt{(70+\sqrt{121})}}$, laquelle vaut 13.

Or le quarré de la racine quarree de quelque nombre composé, est le mesme nombre, estant delaislé le signe radical $\sqrt{}$. Comme le quarré de $\sqrt{(11+\sqrt{9}+\sqrt{4})}$ est $11+\sqrt{9}+\sqrt{4}$, c'est à dire 16; tellement qu'icelle racine valoit 4. Le quarré de $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{27})}$ est $\sqrt{216}+\sqrt{27}$, c'est à dire 9, dont la racine est 3. Le quarré de $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{27})}$ est $\sqrt{216}-\sqrt{27}$, c'est à dire 3, & la valeur de la racine est $\sqrt{3}$. Et semblablement le cube de la racine cubique d'un nombre composé est le mesme nombre, estant osté le signe radical $\sqrt{c}$. Comme le cube de $\sqrt{c}(\sqrt{25}+\sqrt{9})$ est $\sqrt{25}+\sqrt{9}$, c'est à dire 8, tellement que ceste racine là valoit 2. Le cube de $\sqrt{c}(\sqrt{25}-\sqrt{9})$ est $\sqrt{25}-\sqrt{9}$, c'est à dire 2, & la racine d'iceluy est $\sqrt{c}2$. Le cube de $\sqrt{c}(\sqrt{64}+\sqrt{27})$ est $\sqrt{64}+\sqrt{27}$, c'est à dire 7, dont la racine est $\sqrt{c}7$. Et faut entendre le mesme de quarré de quarez, & sursolides &c. En ceste maniere on multiplie la racine de quelconque nombre composé en soy, c'est à dire qu'on a le produit de son quarré ou cube &c.

Mais pour multiplier la racine d'un nombre composé, par une racine simple, ou par un nombre simple, ou composé, ou finalement par une autre racine de nombre composé, il faut réduire l'un & l'autre nombre à carré ou cube; puis faire la multiplication comme dit est cy dessus. Comme pour exemple soit $\sqrt{7+ \sqrt{3}}$ qu'il faut multiplier par 4. Les quarrés sôt $7+ \sqrt{3}$; & 4. Multipliant donc 7 par 4

$$\begin{array}{r} 7+ \sqrt{3}. \\ 4. \\ \hline 28+ \sqrt{48}. \end{array}$$

viendront 28; mais $\sqrt{3}$ par 4, c'est à dire par $\sqrt{16}$, viendront $\sqrt{48}$. Donc tout le nombre produit est $\sqrt{28+ \sqrt{48}}$. Item $\sqrt{c}(\sqrt{c64+ \sqrt{c27}})$ multipliée par 2, le produit est $\sqrt{c}(\sqrt{c32768+ \sqrt{c13824}})$ ou $\sqrt{c}(32+ \sqrt{24})$ c'est à dire $\sqrt{c56}$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{c64+ \sqrt{c27}}. \\ 8. \\ \hline \sqrt{c32768+ \sqrt{c13824}} \\ 7+ \sqrt{4} \\ 9 \\ \hline 63+ \sqrt{324} \end{array}$$

Item soit $\sqrt{7+ \sqrt{4}}$ qu'il faut multiplier par $\sqrt{9}$. Les quarrés des nombres sont $7+ \sqrt{4}$; & 9. Je multiplie donc $\sqrt{4}$ par 9, c'est à dire par $\sqrt{81}$, & vient $\sqrt{324}$; puis 7 par 9, & font 63. Donc le nombre produit sera $\sqrt{63+ \sqrt{324}}$ c'est à dire $\sqrt{81}$, ou 9.

Soit aussi $\sqrt{6+ \sqrt{9}}$ qu'il faut multiplier par le nombre composé $\sqrt{4+ \sqrt{16}}$. Le carré du premier nombre est $6+ \sqrt{9}$; & du postérieur $4+ \sqrt{16}$. Estant donc faite la multiplication, comme il se voit icy, le produit sera $\sqrt{9216+ \sqrt{1304216+ \sqrt{3600+ \sqrt{2304+ 120}}}}$ c'est à dire $\sqrt{324}$, ou 18.

$$\begin{array}{r} 6+ \sqrt{9} \\ \sqrt{4+ \sqrt{16}} \\ \hline \sqrt{9216+ \sqrt{1304216+ \sqrt{3600+ \sqrt{2304+ 120}}} \end{array}$$

Item qu'il faille multiplier $\sqrt{13+ \sqrt{9}}$ par $\sqrt{16}$ c'est à dire 4 par 3. Les quarrés des nombres sont $13+ \sqrt{9}$, & $5+ \sqrt{16}$; & multipliant $\sqrt{9}$ par $\sqrt{16}$, est fait $\sqrt{144}$; & 13, c'est à dire $\sqrt{169}$ par $\sqrt{16}$, vient $\sqrt{2704}$; puis après $\sqrt{9}$ par 5, c'est à dire par $\sqrt{25}$, est fait $\sqrt{225}$; & 13 par 5, donnent 65. Donc tout le nombre produit est $\sqrt{2704+ \sqrt{225+ 77}}$ c'est à dire 2. Car la racine de $\sqrt{2704}$ est 52, & celle de $\sqrt{225}$ est 15; & ces trois nombres 77, 52 & 15 adioustez ensemble font 144, dont la racine quarrée est 12.

$$\begin{array}{r} 13+ \sqrt{9}. \\ 5+ \sqrt{16}. \\ \hline \sqrt{2704+ \sqrt{144}}. \\ 65+ \sqrt{225}. \\ \hline \sqrt{2704+ \sqrt{225+ 77}} \end{array}$$

Or quand il faut multiplier la racine quarrée d'un nombre composé ensemble avec la racine quarrée d'un nombre diminué semblable en soy-mesme, cōme $\sqrt{12+\sqrt{6}} + (12-\sqrt{6})$; soit posé le nōbre 2 fois, ainsi qu'il appert icy, & soiēt pris les quarez des parties, lesquels seront $12+\sqrt{6}$, & $12-\sqrt{6}$, qui font ensemble 24 (car $+\sqrt{6}$ ruine $-\sqrt{6}$.) Et soit multipliee vne partie par l'autre, & sera fait $\sqrt{138}$, (pource que 6, quarré de $\sqrt{6}$, osté de 144, quarré du nombre 12, reste 138, auquel faut apposer le signe $\sqrt{}$) dont le double est $\sqrt{552}$: & $24+\sqrt{552}$ sera le nombre produit cherché. Or la racine de ce produit est aussi la somme des deux racines $\sqrt{12+\sqrt{6}}$ & $\sqrt{12-\sqrt{6}}$ recueillie en vne seule somme. Car quand là somme de deux nombres est multipliee en soy, la racine quarrée du nombre produit est la somme des mesmes deux nombres: & partant puisque les deux racines proposees ensemble, multipliees en soy, font $24+\sqrt{552}$, la racine de ce produit, sçavoir est $\sqrt{24+\sqrt{552}}$ sera la somme de ces deux racines-là. Ce que nous rendrons manifeste par vn autre exemple en nombres rationaux. Soit $\sqrt{10+\sqrt{36}} + \sqrt{10-\sqrt{36}}$ c'est à dire 6, qu'il faut multiplier en soy. Il esteuident que le nombre qui sera produit doit estre 36.

Soient donc trouuez les quarez des parties, lesquels seront $10+\sqrt{36}$, & $10-\sqrt{36}$, qui adioustez ensemble font 20 & soit multipliee vne partie en l'autre, & viendra $\sqrt{64}$, dont le double sera $\sqrt{256}$, c'est à dire 16: & partant le nombre produit est $20+16$, c'est à dire 36. & la racine de ce nombre, sçavoir est 6, est pareillement la somme de l'additiō de ces deux racines là proposees, comme il est manifeste.

Or quand il faut multiplier vn nombre composé de racine simple, & de racine vniuerselle, par vn nombre diminué semblable; à aussi lieu le compendium que nous auons enseigné au chap. 19. Comme pour exemple, s'il faut

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{12+\sqrt{6}} + \sqrt{12-\sqrt{6}} \\
 \sqrt{12+\sqrt{6}} + \sqrt{12-\sqrt{6}} \\
 \hline
 12+\sqrt{6} + 12-\sqrt{6} \\
 \sqrt{138} \\
 \sqrt{138} \\
 \hline
 \sqrt{552} \\
 24+\sqrt{552}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{10+\sqrt{36}} + \sqrt{10-\sqrt{36}} \\
 \sqrt{10+\sqrt{36}} + \sqrt{10-\sqrt{36}} \\
 \hline
 10+\sqrt{36} + 10-\sqrt{36} \\
 \sqrt{64} \\
 \sqrt{64} \\
 \hline
 \sqrt{256} \\
 20+\sqrt{256}
 \end{array}$$

multiplier le nombre $\sqrt{20} + \sqrt{(20 - 5)}$ par le nombre $\sqrt{20} - \sqrt{(20 - 5)}$: Il n'y a qu'à soustraire $20 - 5$, carré de la dernière particule du nombre composé ou diminué, de 20 carré de la première particule, & le reste 5 , sera le produit de la multiplication.

Semblablement s'il faut multiplier $\frac{1}{2}\sqrt{99} + \sqrt{[\frac{1}{2}99 + 19]}$ par $\frac{1}{2}\sqrt{99} - \sqrt{[\frac{1}{2}99 - 19]}$: Il n'y a qu'à soustraire le carré de la dernière particule, du carré de la première particule, sçavoir est $\frac{1}{2}99 + 19$, de $\frac{1}{2}99$, & le reste -19 , sera le produit de la multipl.

Pour faire la division des racines vniuerselles, soit réduit à carré, tant le nombre diuidande que diuiseur: puis apres soit faite la diuision comme il a esté enseigné cy deuant, & la racine du nombre produit sera le quotient. Comme pour exemple, soit $\sqrt{13 + \sqrt{7}}$ qu'il faut diuiser par $\sqrt{5}$. Les quarrés des nombres sont $13 + \sqrt{7}$, & 5 . Je diuise donc 13 par 5 , & vient $2\frac{3}{5}$: & $\sqrt{7}$ par 5 , c'est à dire par $\sqrt{25}$, & vient $\sqrt{\frac{7}{25}}$: tellement que tout le quotient est $\sqrt{(2\frac{3}{5} + \sqrt{\frac{7}{25}})}$.

Ité soit $\sqrt{432 + \sqrt{7776}}$ qu'il faut diuiser par 6 . Les quarrés des nombres sont $432 + \sqrt{7776}$, & 36 . estans diuisez 432 par 36 , viennent 12 : & $\sqrt{7776}$ estant diuisee par 36 , c'est à dire par $\sqrt{1296}$, vient $\sqrt{6}$: & par tant tout le quotient sera $\sqrt{(12 + \sqrt{6})}$.

Item soit $\sqrt{15}$, qu'il faut diuiser par $\sqrt{(3 + \sqrt{5})}$. Afin de trouuer vn nouveau diuiseur nous multiplierōs $\sqrt{(3 + \sqrt{5})}$ par $\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$ & viendra vn nouveau diuiseur $\sqrt{4}$. Que si le diuidende $\sqrt{15}$, est aussi multiplié par $\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$ nous aurons vn nouveau diuidande $\sqrt{(45 - \sqrt{1125})}$: le carré d'iceluy sera $45 - \sqrt{1125}$, & le carré du nouveau diuiseur sera 4 . Si donc on diuise 45 par 4 , le quotient sera $11\frac{1}{4}$: & si nous diuisons $-\sqrt{1125}$, par 4 , c'est à dire par $\sqrt{16}$, le quotient sera $-\sqrt{70\frac{5}{16}}$. Donc tout le quotient est $\sqrt{(11\frac{1}{4} - \sqrt{70\frac{5}{16}})}$.

Item soit diuisé 20 par $(10 - \sqrt{5})$. Nous multiplierons l'un & l'autre nombre par $\sqrt{(10 + \sqrt{5})}$ afin d'auoir vn nouveau diuidende $\sqrt{(4000 + \sqrt{800000})}$ & vn nouveau diuiseur $\sqrt{95}$. les quarrés d'iceux nombres sont $4000 + \sqrt{800000}$, & 95 . Si donc on partit 4000 par 95 , seront donnez $42\frac{2}{19}$: & de la diuision de $\sqrt{800000}$ par 95 , c'est à dire par $\sqrt{9025}$, sera produit $\sqrt{88\frac{242}{361}}$. Donc tout le quotient de la diuision est $\sqrt{(42\frac{2}{19} + \sqrt{88\frac{242}{361}})}$.

Item

Item soit diuisee $\sqrt{c}$ ($\sqrt{c} 3268 + \sqrt{c} 13824$) par 2. Les cubes de ces nombres sont $\sqrt{c} 32768 + \sqrt{c} 13814$, & 8. Je diuise dōc $\sqrt{c} 32768$ par 8, c'est à dire par $\sqrt{c} 512$, & vient au quotient $\sqrt{c} 64$: & de la diuision de $\sqrt{c} 13824$ par 8, c'est à dire par $\sqrt{c} 512$, vient $\sqrt{c} 27$. Tout le quotient est donc $\sqrt{c}$ ($\sqrt{c} 64 + \sqrt{c} 27$) c'est à dire $\sqrt{c} 7$.

Item soit $\sqrt{c}$ ($588 + \sqrt{c} 34848$) qu'il faut diuiser par $\sqrt{c}$ ($12 + \sqrt{c} 8$) Les quarréz des nōbres sont $588 + \sqrt{c} 34848$, & $12 + \sqrt{c} 8$. Nous multiplierons l'un & l'autre nombre par $12 - \sqrt{c} 8$, afin d'auoir nouveau nombre diuidende, & diuiseur : le diuidende sera $\sqrt{c}$ ($7056 + \sqrt{c} 5018112 - \sqrt{c} 2765952 - \sqrt{c} 278784$), ou plustost par réduction $\sqrt{c}$ ($6528 + \sqrt{c} 332928$), & le diuiseur sera 136. Si donc on diuise 6528, par 136, viendront 48 : & $\sqrt{c} 332928$ par 136, c'est à dire par $\sqrt{c} 18496$, viendront $\sqrt{c} 18$: & partant tout le quotient sera $\sqrt{c}$ ($48 + \sqrt{c} 18$).

Nous auons dit cy dessus comment il faut adiouster vne racine vniuerselle à vne semblable ayant le signe contraire : comme $\sqrt{c}$ ($2 + \sqrt{c} 3$) avec $\sqrt{c}$ ($2 - \sqrt{c} 3$) dont la somme est $\sqrt{c} 6$. Mais telles racines se peuuent encore adiouster ensemble cōme ensuit.

Le quarré de la dernière particule de l'une ou l'autre d'icelles racines soit osté du quarré de la première particule, & à la racine quarrée du reste soit adioustee la première particule; puis soit doublé ce qui viendra, & la racine de ce double-là, sera la somme de l'addition. Comme en l'exemple cy dessus, le quarré de la dernière particule est 3, lequel i'oste de 4 quarré de la première particule, & reste 1, que i'adiouste à icelle première particule, & font 3, dont le double est 6, & la racine de 6, est $\sqrt{c} 6$, & autant est la somme de l'addition des deux racines proposees.

Mais quand les deux racines qu'il faut adiouster sont dissimilaires, il faut diuiser la plus grande par la moindre; & au quotient adiouster par regle vne vnitè; (sinon que lesdites racines fussent incommens. car alors l'addition d'icelles se fera plus commodément par l'interposition du signe +) puis par le produit soit multipliée la plus petite racine; & le produit de la multiplication sera la somme de l'addition. Comme pour exemple : soit $\sqrt{c}$ ($8 + \sqrt{c} 48$) à laquelle il faut adiouster $\sqrt{c}$ ($2 + \sqrt{c} 3$). Je diuise celle là par ceste cy, & vient au quotient 4, c'est à dire 2, auquel i'adiouste 1, & font 3, par lesquels je multiplie $\sqrt{c}$ ($2 + \sqrt{c} 3$) & vient $\sqrt{c}$ ($18 + \sqrt{c} 243$) pour la somme des deux racines proposees a adiouster.

Item soit $\sqrt{c}$ ($10 + \sqrt{c} 36$) qu'il faut adiouster à $\sqrt{c}$ ($11 + \sqrt{c} 25$)

Je diuise ceste-cy par celle-la, & vient 1 au quotient, auquel i'adiouste vne vnité, & sont 2, par lesquels ie multiplie $\sqrt{10 + \sqrt{36}}$ & vient $\sqrt{64}$, c'est à dire 8, pour la somme de l'addition des deux racines proposees.

Maintenant si d'une racine vniuerselle de nombre composé, il   n faut soustraire vne autre semblable de nombre diminué: Le quarré de la derniere particule soit osté du quarré de la premiere, & la racine du reste soit ostee d'icelle premiere particule; puis soit doublé ce dernier residu, & la racine de ce double sera le reste requis. Comme pour exemple, soit $\sqrt{(12 + \sqrt{6})}$ de laquelle il faut soustraire $\sqrt{(12 - \sqrt{6})}$. Le quarré de la premiere particule   st 144, duquel i'oste 6, quarré de la derniere particule, & reste 138, dont la racine est $\sqrt{138}$, que $\sqrt{}$ soustrais de la premiere particule 12, & reste $12 - \sqrt{138}$, que ie double, & viennent $24 - \sqrt{552}$, dont la racine est $\sqrt{(24 - 155)}$ qui est le reste requis.

Mais si les racines sont dissemblables; pour faire la soustraction, il faut diuiser la plus grande par la moindre, & du quotient oster 1 par regle; (sinon que les racines proposees fussent incommens. Car alors la soustraction se fera plus commodement par l'interposition du signe—.) Puis par le reste soit multipliee la moindre racine, & le produit sera le reste requis. Comme pour exemple, soit $\sqrt{(2 + \sqrt{3})}$ qu'il faut soustraire de $\sqrt{(8 + \sqrt{48})}$. Je diuise ceste cy par celle-là, & vi  t au quotient $\sqrt{4}$, c'est à dire 2, dont i'oste vne vnité, & reste 1, par lequel ie multiplie la moindre racine $\sqrt{(1 + \sqrt{3})}$ & vient la même $\sqrt{(3 + \sqrt{3})}$ pour le reste de la soustraction.

Item soit $\sqrt{(486 - \sqrt{162})}$ de laquelle faut soustraire $\sqrt{(16 - \sqrt{2})}$ ie diuise celle-la par celle-cy, & vi  t au quotient $\sqrt{9}$, c'est à dire 3, dont i'oste 1, & reste 2, par lesquels ie multiplie la moindre racine $\sqrt{(6 - \sqrt{2})}$ & vient au produit $\sqrt{(496 - \sqrt{32})}$ pour le reste de la soustraction requis.

Des fractions des nombres irrationaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXII.

LA numeration d'icelles fractions est facile: Car quand le signe radical est posé deuant le milieu de la fraction, icelle

signe est referé à l'un, & à l'autre terme, c'est à sçavoir, tant au numérateur, qu'au dénominateur. Comme ceste fraction $\sqrt{\frac{9}{16}}$, signifie $\sqrt{9}$ estre diuisee par $\sqrt{16}$; & vaut $\frac{3}{4}$. Ainsi $\sqrt{\frac{8}{27}}$, signifie $\sqrt{8}$ estre diuisee par $\sqrt{27}$; & icelle equiualet à $\frac{2}{3}$. Ainsi aussi $\sqrt{\frac{6}{80}}$, denote $\sqrt{6}$ estre diuisee par $\sqrt{80}$.

Mais quand le signe radical est posé deuant vn nombre entier avec la fraction, il faut reduire tout le nombre à une seule fraction, afin de pouuoir exprimer sa valeur. Comme $\sqrt{c \frac{192}{125}}$ sera reduit à $\sqrt{c \frac{192}{125}}$, & signifie $\sqrt{c 192}$ estre diuisee par $\sqrt{c 125}$.

125, c'est à dire par 5, & peut estre representee ainsi $\sqrt{\frac{c 192}{5}}$, tellement qu'il signifie $\sqrt{c 192}$ estre diuisee par 5. Que si les termes de ceste fraction $\sqrt{c \frac{192}{125}}$ sont multipliez par vn mesme nombre, c'est à sçavoir par $\sqrt{c 192}$, sera produit la fraction $\sqrt{c \frac{16 \times 192}{125}}$ equiualet à la fraction $\frac{192}{125}$. Et si de rechef les termes produits de la fraction sont multipliez par la mesme $\sqrt{c 192}$, sera produit la fraction $\sqrt{c \frac{7077888}{4608000}}$.

192
c'est à dire $\sqrt{\frac{4608000}{192}}$, & signifie le cube 192 (qui est produit de $\sqrt{c 192}$ multiplié en soy cubiquement) estre diuisee par $\sqrt{c 4608000}$; pource que la racine cubique du numérateur 7077888 est 192. De rechef la fraction $\sqrt{c \frac{16}{25}}$, signifie $\sqrt{16}$, c'est à sçavoir 4, estre diuisee par $\sqrt{64}$, c'est à dire par 8; & est equiualet à $\frac{1}{2}$. Et la fraction $\sqrt{\frac{16}{64}}$ signifie $\sqrt{16}$, c'est à dire 4 estre

diuisee par 64; & est equiualet à $\frac{4}{64}$, ou $\frac{1}{16}$. Ainsi $\sqrt{\frac{16}{64}}$, signifie que le nombre 16 est diuisee par $\sqrt{64}$, c'est à dire par 8; & est equiualet au nombre 2.

Quand la raison des numérateurs aux dénominateurs est la mesme, les fractions sont egales, tout ainsi qu'es fractions

vilgaires: Parquoy toutes ces fractions $\sqrt{\frac{64}{2}}, \sqrt{\frac{64}{16}}, \sqrt{\frac{64}{4}}$, sont de mesme valeur; pource qu'en toutes le numérateur est quadruple du dénominateur.

Les fractions irrationnelles se reduisent à minimas termes quand elles peuvent estre reduites, tout ainsi qu'es fractions

vulgaires. Comme ceste fraction $\sqrt[4]{q c^{\frac{1}{2}}}$ se réduira à ceste-cy $\sqrt[4]{q c^{\frac{1}{2}}} : \& \sqrt[4]{\frac{1+4}{36}}$ à $\sqrt[4]{\frac{1}{7}}$. Elles peuvent aussi estre quelquesfois reduites à moindres signes radicaux; Comme $\sqrt[4]{q c^{\frac{1}{2}}}$ se réduit

à $\frac{\sqrt[4]{c 2}}{\sqrt[4]{2}}$. Pource que le numerateur 4 à racine quarree 2, mais

elle n'a pas racine cubique: Et le denominateur 8 à racine cubique 2, mais elle n'a pas la quarree. Or que ces fractions

$\sqrt[4]{q c^{\frac{1}{2}}}$ & $\frac{\sqrt[4]{c 2}}{\sqrt[4]{2}}$ soient egales, on le peut prouver par la multipli-

cation en croix.

Or l'addition & subtraction se fait en ceste maniere. Si le denominateur est vn mesme, soient adioustez les numerateurs, comme il a esté dict cy deuant, ou soit soustrait l'un de l'autre, & à la somme, ou au reste, soit appose le denominateur commun, ainsi qu'il appert és exemples suiuaus.

Addition	Subtraction
$\sqrt[4]{4}$ $\sqrt[4]{9}$	$\sqrt[4]{4}$ $\sqrt[4]{9}$
— adioustez à —	— ostee de —
7 7	7 7
$\sqrt[4]{25}$	$\sqrt[4]{1}$
font — ou $\frac{5}{7}$	reste — ou $\frac{1}{7}$
7	7

Mais quand les denominateurs sont diuers, soit faicte la reduction à vn mesme denominateur par la multiplication en croix, ainsi qu'és fractions vulgaires: puis soit faict comme dessus, comme apert és formules cy dessus,

Reduction	Addition	Subtraction
$\sqrt[4]{144} \cdot \sqrt[4]{196}$	$\sqrt[4]{\frac{1+4}{4+1}} \& \sqrt[4]{\frac{196}{4+1}}$	$\sqrt[4]{\frac{1+4}{4+1}}$ de $\sqrt[4]{\frac{196}{4+1}}$
$\sqrt[4]{\frac{16}{49}} \& \sqrt[4]{\frac{1}{9}}$	font $\sqrt[4]{\frac{676}{4+1}}$ ou $1 \frac{1}{4+1}$	reste $\sqrt[4]{\frac{1}{4+1}}$ ou $\frac{1}{11}$
$\sqrt[4]{441}$		

En la mesme maniere s'il faut adiouster $\sqrt[4]{504} - \sqrt[4]{c 24} \sqrt[4]{c 24} + \sqrt[4]{8}$ à $\frac{5}{1}$

on reduira premierement icelles fractions à mesme denomi-

nation, c'est à sçavoir à $\frac{\sqrt{200} + \sqrt{619}}{10}$ & $\frac{\sqrt{63000} + \sqrt{200}}{10}$: puis

apres adioustâr les numerateurs on aura $\frac{\sqrt{800} + \sqrt{68232}}{10}$: Mais

on soustraict la moindre d'icelles fractions de la plus gran-

de restera $\frac{\sqrt{648}}{10}$.

Quand les numerateurs sont incommensurables, l'addition d'iceux se fait par l'interposition du signe +, mais la subtraction par l'interjection du signe —. Comme la somme de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}}$ est $\sqrt{\frac{7}{8}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$. Et $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ostee de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ reste $\sqrt{\frac{7}{8}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$.

En la multiplication & diuision des fractions irrationnelles il faut seulement les reduire à mesme signe radical, & acheuer

comme és fractions vulgaires. Parquoy multipliant $\frac{\sqrt{3}}{7}$ par

$\frac{\sqrt{6}}{7}$ viendra $\frac{\sqrt{18}}{28}$. Et $\frac{\sqrt{36}}{3}$ diuisee par $\frac{\sqrt{127}}{2}$ fera $\frac{2}{3}$: & aussi $\frac{\sqrt{3}}{4}$ di-

uisee par $\frac{\sqrt{6}}{7}$, viendra $\sqrt{\frac{142}{196}}$ c'est à dire $\sqrt{1\frac{51}{98}}$.

Quant à la preue de chacune de ces operations, elle se fait par la contraire, c'est à dire que l'addition se preue par la subtraction, & la subtraction par l'addition, &c.

Des nombres coſſiques irrationaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXIII.

Tout ainſi que les nombres absolus ſe ſont irrationaux, eſtans precedez de ſignes radicaux : comme de 5, ſe fait

V 680. Ainsi aussi les nombres coſſiques ſe font irrationaux, quand on leur prepoſe quelqu'un d'iceux ſignes radicaux: Comme de 20 R, ſe faiſt $\sqrt{20} R$, nombre coſſique irrationel, qui ſe prononce, la racine quarree de 20 racines: Item de 6 c, ſe faiſt $\sqrt{6} c$; qui ſignifie, la racine quarree de 6 c. Item de 9 R, ſe faiſt $\sqrt{9} R$. &c. Or tels nombres peuvent eſtre quelques-fois rationaux, & quelquesfois irrationaux ſelon la valeur d'une racine. Car ſi 10 R vaut 5, 10 R vaudront 100, duquel la racine quarree eſt 10: partant $\sqrt{20} R$ eſt un nombre rationel equiuaillant 10: Et $\sqrt{c} 20 R$ ſera irrationel, puis que 100 n'a pas racine cubique. Il eſt donc euident qu'on ne peut iuger ſi tels nombres ſont rationaux ou irrationaux, inſques à ce que l'eſtimation & valeur d'une ſeule racine apparoiſſe.

Or l'addition & ſouſtraction d'iceux nombres ſe faiſt par l'interpoſitiō des ſignes + & — Comme $\sqrt{36} R$ adiouiſtée à $\sqrt{129}$, faiſt $\sqrt{36} R + \sqrt{129}$, ou $\sqrt{129} + \sqrt{36} R$. Et 36 eſtant oſtez de $\sqrt{36} R$, reſtera $\sqrt{36} R - 36$: & ainſi des autres.

Que ſi les ſignes coſſiques ſont ſemblables, & les nombres irrationaux (conſiderez ſans leurs ſignes coſſiques) ſont cōmenſurables; l'addition & ſubtraction ſe feront en la meſme maniere des racines ſimples, enſeignee ès chap. 15 & 16. appoſant apres l'operation le meſme ſigne coſſique. Ainſi $\sqrt{8} R$ adiouiſtée à $\sqrt{18} R$, fera $\sqrt{50} R$. Mais oſtant $\sqrt{8} R$ de $\sqrt{18} R$, reſtera $\sqrt{2} R$.

La preuue ſera facile & euidente, ſi on poſe la valeur d'une ſeule racine eſtre quelque nombre, comme 2. Car 8 R ſeront 16, dont la racine quarree eſt 4: & 18 R ſeront 36, dont la racine quarree eſt 6: Or 4 & 6 ſont 10: comme auſſi $\sqrt{50} R$, puis que 50 R ſont 100, dont la racine eſt 10. Mais 4 oſtez de 6, reſte 2, valeur de $\sqrt{2} R$, puis que 2 R ſont 4, dont la racine eſt 2.

Mais afin que les nōbres coſſiques irrationaux ſoiēt multipliez entr'eux, ou diuiſez, ils doiuent eſtre premierement reduits à meſme ſigne radical, comme nous auons enſeigné au chap. 13. Comme ſ'il faut multiplier $\sqrt{c} 4 R$ par $\sqrt{8} R$: icelles eſtans reduites à meſme ſigne radical, ſeront $\sqrt{qc} 16 q$, & $\sqrt{qc} 512 c$: leſquels deux nombres multipliez entr'eux produiſent $\sqrt{qc} 8192 \beta$: mais $\sqrt{qc} 512 \beta$ diuiſec par $\sqrt{qc} 16 q$, le quotient ſera $\sqrt{qc} 32 R$.

La preuue ſe fera, poſant la valeur d'une racine, comme dict eſt cy-deſſus: ou bien chaſque operation par la contraiſe.

Quant aux autres nōbres rompus, il n'eſt beſoin d'en trai-

des particulièrement, pource qu'ils suivent l'Algorithme de leurs entiers, joint à celui des nombres communs.

Or vne equation se rencontrant entre vn nombre cossique irrationnel & vn nombre absolu, il la faudra reduire en ceste maniere. Soit pour exemple vne equation entre $\sqrt{24R}$ & 12. Il y aura pareillement equation entre $24R$ & 144 leurs quarez : soit donc diuisé 144 par 24, & sera produit 6 au quotient pour la valeur d'une racine : ce qui est manifeste, puis que $24R$ font 144, dont la racine quaree est 12.

Item s'il y a equation entre $\sqrt{109}$ & 20 : il y aura aussi equation entre 109. & 400 : diuisant donc 400 par 10, viendront 40 pour la valeur d'une racine. Finalement si vne equation est trouuee entre $\sqrt{129}$ & 30 : il y aura aussi equation entre 129 & 27000, les cubes d'iceux : parquoy diuisât 27000 par 12, viendront 2250 pour la valeur d'une seule racine.

Que si quelqu'un proposoit vne equation estre $\sqrt{8}$ & 3, il y auroit aussi equation entre leurs cubes 8 & 27. Ce qui est impossible. Parquoy en ces equations il est necessaire que le nombre absolu soit la racine du nombre avec lequel est le signe radical : telle qu'est l'equation d'entre $\sqrt{8}$ & 2. Item entre $\sqrt{64}$ & 4 : Item entre $\sqrt{81}$ & 9. &c. Autrement l'equation sera impossible.

De l'extraction des racines des binomes

& residus.

CHAP. XXIIII.

Quand deux quelconques nombres sont conioincts par le signe +, ils sont ordinairement nommez Binome : comme $\sqrt{12} + \sqrt{3}$: & $\sqrt{18} + \sqrt{8}$. Mais estans accouplez par le signe —, ils sont appelez Apoteme ou Residu : Comme $\sqrt{12} - \sqrt{3}$: & $\sqrt{18} - \sqrt{8}$. Et plus de deux nombres ainsi accouplez, sont nommez Trinome, Quatrinome, &c. Comme $\sqrt{17} + \sqrt{10} + \sqrt{3}$: ou $\sqrt{17} - \sqrt{10} + \sqrt{3}$, sont dicts Trinome : & $\sqrt{17} + \sqrt{10} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$: ou $\sqrt{17} - \sqrt{10} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$, sont appelez Quatrinome, &c. Mais Euclide au 10. liure prop. 37 & 74 appelle seulement Binome, ou residu, quand les deux nombres conioincts par le signe + ou —, sont rationels commensurables en puissance seulement : il constitue de six sortes de binome, & autant de residu : chacun desquels il definit, & enseigne à trouuer au mesme liure. Or pour extraire la racine quaree

mes & residus, il y a diuerses manieres, ceux de-
s enseignerons icy, & au prealable le probleme

*un nombre donné en deux parties, telles que le nombre
elles soit egal à un nombre donné, qui ne soit plus grand
de la moitié d'iceluy nombre proposé à diuiser, ou (qui
que la quatriesme partie du quarré dudit nombre.*

Ille couper le nombre 20 en deux parties, telles
dees entr'elles, leur produit soit 75, qui est moi-
n, quart du quarré d'iceluy nombre proposé 20,
de 100, quarré de la moitié de 20, & resteront 25,
is la racine quarrée, laquelle sera 5, & soit icelle
10, moitié du nombre proposé à diuiser, & vien-
dra le plus grand nombre cherché, mais icelle ra-
cine ostée d'icelle moitié 10, resteront 5, qui sera le
nombre requis: tellement donc que les deux nom-
bres, sont parties du nombre 20, telles que multipliees
elles produisent 75, ainsi qu'il estoit requis.

uant soit le binome $38 + \sqrt{288}$, duquel il faut ex-
traire la racine quarrée. Soit coupé le plus grand nom-
bre en deux parties, telles que leur produit soit le nombre 72
partie du quarré du moindre nom, sçauoir de 188,
deux parties seront trouuees par le prob. cy dessus, estre
ceux deux nombres soient prises les racines quar-
rées, lesquelles seront 6 & $\sqrt{2}$, qui conioinctes par le signe +
seront $6 + \sqrt{2}$, qui sera la racine quarrée du binome proposé.
Les racines 6 & $\sqrt{2}$ estans accouplees par le signe -
seront $6 - \sqrt{2}$, qui sera la racine quarrée du residu $38 - \sqrt{288}$.
La racine quarrée du binome $\sqrt{32} + \sqrt{24}$, sera trouuee en
cette maniere estre $\sqrt{\sqrt{18} + \sqrt{2}}$. Car $\sqrt{32}$ plus grand nom-
bre estant coupé en deux parties, telles que l'une
soit 6, quatriesme partie de 24, quarré du moindre
des parties seront trouuees estre $\sqrt{18}$, & $\sqrt{2}$, dont
conioinctes par le signe +, sont $\sqrt{\sqrt{18} + \sqrt{2}}$.

Ensuite pour extraire la racine quarrée du binome $38 + \sqrt{288}$,
il faut du quarré du plus grand nom, oster le quarré du
moindre nom, & resteront 1756, desquels soit pris le quart,
439, duquel soit pris la racine quarrée, laquelle sera
21, sur laquelle soit adiouster, & soustraire de la moitié du plus grand
nom, soit de 19, & viendront 36, & 2, desquels deux nom-
bres soient prises les racines quarrées, & seront 6, & $\sqrt{2}$, qui
conioinctes par le signe +, feront $6 + \sqrt{2}$ pour la racine quar-
rée du binome $38 + \sqrt{288}$, comme deuant. Par la mesme ma-

siere la racine quarrée du residu $\sqrt{60} - \sqrt{12}$ sera trouuee est^{re} $\sqrt{15} + \sqrt{12} - \sqrt{15 - \sqrt{12}}$.

Quant à la preuue, elle se faict comme en l'extraction des nombres absolus, sçauoir est multipliant la racine trouuee par soy-mesme.

Or voila sommairement les operations vsitées en l'Algebre: Et afin de donner à l'apprenty tant plus de cognoissance en la pratique d'icelles operations, nous finirons ce traité par quelques questions, & solutions d'icelles.

1. *Trouuer deux nombres, desquels l'excez soit donné, & en raison donnée.*

Soit donné l'excez 20, & la raison quintuple donnée. Soit posé le moindre nombre estre $1x$. Donc le plus grand sera $5x$, sçauoir est le quintuple d'iceluy: l'excez d'iceux est $4x$. Il y a donc equation entre $4x$. & 20. & diuisant 20 par 4, viendra 5 pour $1x$. Parquoy le moindre sera 5, & le plus grand 25, qui est quintuple d'iceluy 5, & l'excede de 20.

2. *Estans donnez deux nombres, en trouuer vn autre, auquel estant adiousté l'un des donnez, & soustrait l'autre, la somme soit au reste en raison donnée.*

Les nombres donnez soient 100 & 20: & il faut premiere-ment trouuer vn nombre auquel si on adioust 100, & du mesme on oste 20, la somme soit triple du reste. Soit posé ce nombre là estre $1x$. & la somme sera $1x + 100$: mais le reste $1x - 20$. Afin donc que ceste somme là soit triple de ce residu, l'equation sera entre $1x + 100$. & $3x - 60$. Et adioustant à chacun 60, elle sera entre $1x + 160$, & $3x$. & ostant $1x$, icelle equation sera entre 160 & $2x$. Diuisant donc 160 par 2, sera trouue 80 pour $1x$, qui est le nombre cherché. Car si à iceluy on adioust 100, on aura 180; mais si on en oste 20, resteront 60; & 180 est à 60 en raison triple.

Qu'il faille maintenant trouuer vn nombre, auquel si on adioust 20, & du mesme on soustrait 100, ceste somme-là soit triple de ce reste cy. Soit posé ce nombre là estre $1x$, & sera faict la somme $1x + 20$, & reste $1x - 100$. Afin donc que ceste somme soit triple de ce reste, l'equation sera entre $1x + 20$. & $3x - 300$. Et adioustant 300 à chacun, elle sera entre $1x + 320$. & $3x$. & ostant $1x$ de chacun, l'equation sera entre 320. & $2x$. Diuisant donc 320 par 2, viendra pour $1x$. 160, nombre cherché. Car si à iceluy on adioust 20, on aura 180, & si on oste 100, resteront 60, & entre 180 & 60 est la raison triple.

3. *Trouuer deux nombres en raison donnee, & qui multipliez en-*

rr'eux facent un nombre ayant raison donnée à la somme d'iceux.

Qu'il faille donc trouver deux nombres en raison sesquialtere, tels que leur produit soit duodecuple de la somme d'iceux. Soient posez les deux nombres estre $4R$, & $6R$. qui est raison sesquialtere. Estans multipliez entr'eux ils font $24q$. & leur somme est $10R$. Afin donc que $24q$. ayant raison duodecuple à $10R$; l'equation sera entre $24q$. & $120R$. Divisant donc 120 par 24 , viendra 5 pour la valeur de R . pource que les denominations cossiques q . & R . sont collaterales. Veu donc que le premier nombre a esté pose $4R$, & le second $6R$ celui-là sera 20 , & cestuy-cy 30 , & iceux multipliez entr'eux font 600 , qui est duodecuple de 50 somme d'iceux.

4. *Trouver deux nombres tels que le nombre produit de la multiplication d'iceux, estant diuisé par leur difference, le quotient soit egal à un nombre donné.*

Qu'il faille trouver deux nombres, tels que leur produit estant diuisé par leur difference, le quotient soit 30 . Soit posé pour le moindre nombre, quelconque nombre moindre que le quotient donné 30 , sçavoir est 20 , & soit posé le plus grand estre $20 + 1R$. afin que la difference d'iceux soit $1R$. de 20 , en $20 + 1R$. sera fait le nombre $400 + 20R$ lequel diuisé

par $1R$ difference d'iceux, le quotient est $\frac{400 + 20R}{1R}$, egal

au nombre proposé 30 . Ceste equation sera reduicte par la multiplicatiō en croix, à l'egalité d'entre $30R$. & $400 + 20R$. ostant donc $20R$ de chacun, l'equatiō sera entre $10R$ & 400 . & 400 estans diuisez par 10 , viendront 40 pour la vailleur de $1R$ difference des nombres cherchez. veu donc que le moindre est 20 , le plus grād sera 60 , c'est à sçavoir $20 + 1R$. Maintenant 60 multipliez par 20 , font 1200 , qui diuisez par 40 difference d'iceux nombres, le quotient est 30 .

5. *Estans donnez deux nombres inegaux, en trouver deux autres en raison donnée, tels que le plus grand osté du plus grand donné, & le moindre du moindre, les restes soient egaux.*

Soient deux nombres donnez 100 . & 60 . & il en faut trouver deux autres en raison septuple, & que le plus grand osté de 100 , & le moindre de 60 , les restes soient egaux.

Soient posez pour les nombres en raison septuple, $1R$. & $7R$. Les nombres egaux restans seront $100 - 7R$ & $60 - 1R$. Adioultant donc $7R$ à chacun, l'equation sera entre 100 . & $60 + 6R$. & ostant 60 de chacun, elle sera entre 40 . & $6R$. Et diuisant 40 par 6 , viendra pour $1R$, $6\frac{2}{3}$ moindre nombre, & le

plus grand septuple de cestuy-cy sera $46\frac{2}{3}$. Et ostant celuy-là de 60, & celuy-cy de 100 : les nombres restans seront égaux, sçavoir $53\frac{1}{3}$.

6. *Trouuer deux nombres en raison donnée, & que le quarré du plus grand soit au moindre aussi en raison donnée.*

Que les nombres cherchez ayēt la raison triple, & le quarré du plus grand ait au moindre la raison sextuple. Soit posé le moindre $1x$. & le plus grand $3x$. Le quarré du plus grand, sçavoir $9x$. doit auoir raison sextuple au moindre $1x$: Donc l'equation sera entre $9x$. & $6x$. Et diuisant 9 par 6, viendra $\frac{3}{2}$ pour $1x$. pource que les nombres cossiques sont collateraux. Les nombres cherchez sont donc $\frac{3}{2}$ & 2, ayans raison triple, & le quarré du plus grand, sçavoir 4, est en raison sextuple au moindre, sçavoir à $\frac{2}{3}$.

7. *Estant donné un nombre composé de deux quarez, le diuiser en deux autres quarez.*

Soit le nombre donné 34, composé des deux quarez 9 & 25, qu'il faut diuiser en deux autres quarez. Les costez des quarez dōnez sont 3 & 5 : soit posé le costé du premier quarré cherché estre $1x+3$, sçavoir vne racine plus que le costé du premier quarré donné : mais le costé du second quarré cherché, soit posé quelconque nombre de racines moindre que le costé du second quarré donné, sçavoir $2x-5$. Les quarez d'iceux costez seront $1x+6x+9$. & $4x-20x+25$, qui adioustez ensemble font $5x+34-14x$. egal au nombre donné 34. adioustant donc $14x$ à chacun, l'equation sera entre $1x+34$. & $14x+34$. & ostant 34 de chacun, restera l'equation entre $5x$ & $14x$. Diuisant donc 14 par 5, viendront $\frac{14}{5}$ pour $1x$, pource que les nombres cossiques sont collateraux. Donc le costé du premier quarré, lequel nous auons posé estre $1x+3$, sera $\frac{29}{5}$: & le costé du second quarré, lequel a esté posé de $2x-5$, sera $\frac{22}{5}-5$, c'est à dire $\frac{7}{5}$. Les quarez d'iceux costez trouuez sont $\frac{841}{25}$ & $\frac{49}{25}$, qui font ensemble $\frac{890}{25}$, c'est à dire 34 nombre donné.

8. *Coupper un nombre donné en trois parties, telles que la premiere diuisee par un nombre donné; & la seconde multipliee par un autre nombre donné: & la tierce diuisee par quelque autre nombre, produisent trois nombres égaux.*

Soit le nombre donné 178, qu'il faut diuiser en trois parties, telles que la premiere diuisee par 5, vienne autant que de la seconde multipliee par 8, & autant que de la tierce diuisee par 6. Soit posé la premiere partie $1x$, laquelle diuisee par 5, le quotient sera $\frac{1}{5}x$. Et pource que la seconde partie en 8, doit estre autant, nous diuiserons $\frac{1}{5}x$ par 8. Car le quotient $\frac{1}{40}x$

sera la 2. partie, qui multipliee par 8 faict $\frac{1}{2}R$. Et pource que la 3. partie diuisee par 6 doit faire autant, nous multiplierons $\frac{1}{2}R$ par 6; & le produit $3R$, sera icelle 3. partie, qui diuisee par 6, le quotient est $\frac{1}{2}R$. Maintenant reste que ces trois parties $1R$, $\frac{1}{2}R$ & $3R$, fussent 178 nombre donné. Or elles font $2\frac{1}{2}R$. D'oc l'equatiō sera entre 178. & $2\frac{1}{2}R$. Et si on diuise 178 par $2\frac{1}{2}$, viendra 80 pour $1R$, qui est la premiere partie; & la seconde sera 2, & la tierce sera 96. lesquelles parties font 178 nombre donné: & la premiere diuisee par 5, mais la seconde multipliee par 8, & la tierce diuisee par 6, est toujours produit vn mesme nombre 16.

9. *Diuiser vn nombre donné en trois parties continuellement proportionnelles, telles que le produit de la premiere en la tierce ait une raison donnée au produit de la premiere en la seconde.*

Soit le nombre donné 30, qu'il faut diuiser en trois parties continuellement proport. tellement que le produit de la premiere multipliee par la tierce, soit au produit d'icelle premiere en la seconde, en raison quadruple. Soit posé la seconde partie estre $1R$: & partant la somme de la premiere & tierce $30 - 1R$. Et pource que $1R$ en soy faict 19 la premiere en la tierce sera aussi 19. Ven donc que ce produit doit estre quadruple du produit de la premiere en la seconde, sera produit $\frac{1}{4}q$ de la premiere en la seconde, sçauoir en $1R$. Si donc on diuise $\frac{1}{4}q$ par $1R$, le quotient sera $\frac{1}{4}R$, qui multiplié par $1R$ nombre diuisant, faict $\frac{1}{4}q$ nombre diuisé: & partant la premiere partie sera $\frac{1}{4}R$, qui avec la seconde faict $1\frac{1}{4}R$, laquelle somme ostee du nombre donné 30, restera la tierce partie $30 - 1\frac{1}{4}R$. Maintenant pource que la premiere en la tierce doit faire 19, c'est à sçauoir vn nombre egal à celuy de la moyenne $1R$ en soy-mesme: si on diuise 19. par la premiere, c'est à dire par $\frac{1}{4}R$, le quotient sera 4R, qui multiplié par $\frac{1}{4}R$, produit 19. & partant la tierce partie sera 4R. egales à l'autre tierce partie trouuee $30 - 1\frac{1}{4}R$. Adioustant donc $1\frac{1}{4}R$ à chacun, l'egalité sera entre $5\frac{1}{4}R$. & 30. & diuisant 30 par $5\frac{1}{4}$, viendra $5\frac{1}{5}$ pour la valeur de $1R$. sçauoir est pour la seconde partie: donc la premiere partie, laquelle nous auons trouuée estre $\frac{1}{4}R$, sera $1\frac{1}{5}$: & la tierce partie, qui a esté trouuee de $30 - 1\frac{1}{4}R$, sera $22\frac{6}{5}$. Et ces trois parties $1\frac{1}{5}$, $5\frac{1}{5}$, $22\frac{6}{5}$ sont ensemble 30 nombre donné: & la premiere $1\frac{1}{5}$ multipliee par la tierce $22\frac{6}{5}$, fait $32\frac{32}{25}$, qui est quadruple de $8\frac{8}{25}$, faict de la premiere partie en la seconde. Et il est euident qu'icelles trois parties sont continuellement prop. puis qu'un mesme nombre est produit de la premiere en la tierce, que de la moyenne en soy, c'est à sçauoir $32\frac{32}{25}$.

10 *Trouver trois nombres continuellement proportionnaux, en une raison donnée, desquels les quarez ensemble fassent un nombre donné.*

Qu'il faille trouver trois nombres continuellement en raison lesquiterce, desquels les quarez fassent 4329. Soient posés les nombres cherchez estre 9x. 12x. 16x. qui sont en proportion lesquiterce. Les quarez d'iceux, sçavoir 81x. 144x. 256x. font ensemble 481x. egaux à 4329. Divisant donc 4329 par 481, viendra 9 pour la valeur de x, & par conséquent 12x sera 36. & le tiers 48, desquels les quarez 729. 1296. 2304. font ensemble 4329.

11 *Estant donnez deux nombres, en trouver un autre, qui adiouste à l'un d'iceux, & la somme multipliee par iceluy trouué, produise le carré de l'autre nombre donné.*

Soient les deux nombres donnez 10 & 12; & il en faut trouver un autre qui adiouste au premier 10, fasse un nombre, qui multiplié par iceluy adiouste, produise le carré de l'autre nombre 12, sçavoir 144. Soit posé le nombre cherché 1x. Adioustant à 10, viendra 1x + 10, qui multiplié par 1x, fait 1x + 10x, lequel doit estre egal à 144. Ostant donc 10x de chacun, l'equation sera entre 1x. & 144 — 10x. laquelle se résoudra ainsi: La moitié du nombre des racines 5, fait le carré 25, auquel adioustant 144, vient 169, dont la racine quarrée est 13, de laquelle soit ostée la susdite moitié 5, à cause du signe —, & restera la valeur de 1x, sçavoir 8 nombre cherché. Car iceluy estant adiouste à 10, fait 18, qui multiplie par 8, le produit est 144, carré de l'autre nombre 12.

12. *Couper un nombre donné en deux parties, telles que le nombre produit de l'une en l'autre, multiplié par le carré du nombre donné, fasse un autre nombre donné.*

Soit le nombre donné 20, qu'il faut couper en deux parties, telles que le nombre procréé de la multiplication d'icelles, estant multiplié par 400, carré du nombre donné soit 300. Soit posé l'une d'icelles parties estre 1x, & l'autre 20 — 1x. icelles multipliees entr'elles, viendra 20x — 1x²: & ce nombre multiplié en 400, fait 8000x — 400x². qui doit estre egal à 300. adioustant 400x² à chacun, l'equation sera entre 8000x. & 300 + 400x². & ostant 300, restera equation entre 400x². & 8000x — 300. & divisât par 400, l'equation sera entre 1x. & 20x — $\frac{3}{4}$. La moitié des racines est 10, dont le carré est 100, ou $\frac{100}{4}$ desquels ostant $\frac{3}{4}$ resteront $\frac{327}{4}$, qui adioustez à la susdite moitié 10, la plus grande racine sera 10 + $\sqrt{\frac{327}{4}}$; & ostant les mesmes $\frac{327}{4}$ d'icelle moitié, restera la moindre racine 10 — $\sqrt{\frac{327}{4}}$, qui s'ot

les parties requises. Car l'une multipliee par l'autre fait $\frac{3}{4}$; & $\frac{4}{3}$ en 400, quarré du nombre donne 20. fait $\frac{1200}{4}$, c'est à dire 300.

Or és 12 questions cy dessus, les nombres sont abstraits de la matiere, mais és 12 suivantes les nombres sont accordez aux choses materielles.

13. *Il y a un rectangle duquel les costez sont en raison septuple, & les quarez d'iceux pris ensemble, ont raison centuple à la somme d'iceux costez: Trouver les costez, l'aire & le diametre dudit rectangle.*

Soit pose le moindre costé 1R. & le plus grand 7R. desquels la somme sera 8R. & leurs quarez 19 & 49. adioustez ensemble feront 50. centuple de 8R. Donc l'equation est entre 50. & 800R. Et diuisant 800 par 50, viendra 16, pour 1R. moindre costé: le plus grand qui est en raison septuple sera donc 112. & l'aire sera 1792 produit d'un costé par l'autre. Et le diametre sera $\sqrt{12800}$. Car les quarez des costez sont 256, & 12544, la somme desquels est 12800, centuple de 128. qui est la somme d'iceux costez, & partant le quarré du diametre sera 12800, d'oit la racine quarrée, sçauoir est $\sqrt{12800}$ sera ledit diametre.

14. *Il y a une colonne quadrangulaire rectangle, de laquelle la base a les costez en raison sesquiterce, & sa hauteur est au plus grand costé de la base en raison double superbipartiente tierce; & la solidité d'icelle colonne cōtient 93312 toises: il faut trouuer chacune dimensions.*

Le moindre costé de la base soit pose 3R. & le plus grand 4R. mais la hauteur $10\frac{2}{3}$ R. afin qu'elle soit au plus grand costé 4R. en raison double superbipartiente tierce, & le plus grand costé au moindre en raison sesquiterce. Ces trois nombres multipliez entr'eux produisent 1280. egal a 93312 solidité de la colonne Diuisant donc 93312 par 128. viennent 726 pour 10. & 9 pour 1R. donc le moindre costé de la base, lequel nous auons pose estre 3R. sera 27. & le plus grand 4R. sera 36. & la hauteur $10\frac{2}{3}$ R. sera 96. Et ces trois dimensions multipliees entr'elles produisent la solide 93312.

15. *Il y a un rectangle duquel l'aire est 30, & les costez d'iceluy sont en raison sesquialtere, il faut trouuer iceux costez, & le diametre.*

Soit pose le moindre costé 2R. & partant le plus grand 3R. sesquialtere a iceluy: de la multiplication des costez entr'eux, sera produit 60. egau à 30 aire donné. Diuisant donc 30 par 6, 19 sera 5. & 1R. $\sqrt{5}$. Et pource que nous auons pose le moindre costé estre 2R. iceluy sera $\sqrt{20}$, nombre double de

15. & le plus grand costé $3R$. sera $\sqrt{45}$. nombre triple de $\sqrt{5}$. Et pource que les quarrez des costez 20 & 45, sont ensemble egaux au quarré du diametre : le quarré d'iceluy diametre sera 65, & iceluy dia. $\sqrt{65}$.

16. Il y a une armee composee de François, Allemans & Anglois : les François sont 25000 : les Allemans sont moitié des François & Anglois. & les Anglois sont la 8. partie des François & Allemans : Il faut trouver le nombre des Allemans & des Anglois : & combien il y a d'hommes en toute l'armee.

Soit posé $1R$ pour les Allemans : donc les François & les Anglois ensemble seront $2R$. & toute l'armee sera $3R$. Et puis que les Anglois sont la 8 partie des François, & des Allemans ensemble : & que les Allemans & François sont ensemble $1R + 25000$: les Anglois seront $\frac{1}{8}R + 3125$. Parquoy veu que les François sont 25000 ; les Allemans $1R$. & les Anglois $\frac{1}{8}R + 3125$. toute l'armee sera $1\frac{1}{8}R + 28125$ egale a $3R$. Ostant donc $\frac{1}{8}R$ de chacun l'equation sera entre 28125, & $1\frac{7}{8}R$. & diuisant 28125 par $1\frac{7}{8}$, le nombre 15000 sera la valeur de $1R$, qui est le nombre des Allemans ; & partant les François & Allemans seront ensemble 40000, dont la 8 partie est 5000 pour le nombre des Anglois : & toute l'armee sera de 45000 hommes.

17. Il y a un quarré duquel le diametre, & le costé ensemble sont 65 : trouver iceux costé & diametre.

Soit posé le costé $1R$. & partant le diametre $6 - 1R$. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du costé : & le quarré du costé est $1q$. & le quarré du diametre est $36 - 12R + 1q$, il y aura equation entre $1q$ & $36 - 12R + 1q$. & ostant $1q$ de chacun demeurera equation entre $1q$. & $36 - 12R$. maintenant la moitié, du nombre des racines est 9, dont le quarré est 36 qui adioustez à 36, viennent 72, dont la racine est $\sqrt{72}$, de laquelle estant ostée la susdite moitié 6, restera $\sqrt{72} - 6$. pour la valeur de $1R$ & autant sera le costé du quarré : lequel ostant de 6, restera $12 - \sqrt{72}$ pour le diametre.

18. Il y a un quarré duquel le diametre surpasse le costé de 3 : trouver lesdits costé & diametre.

Le costé soit posé de $1R$. & partant le diametre sera $1R + 3$. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du costé ; & le quarré du costé est $1q$. & le quarré du diametre $1q + 6R + 9$. L'equation sera entre $1q$. & $1q + 6R + 9$. & ostant $1q$ de chacun, restera l'equation entre $1q$ & $6R + 9$. La moitié du nombre des racines est 3, dont le quarré est 9, qui adiouste a 9, fait 18, dont la racine est $\sqrt{18}$, à laquelle soit adiouste la susdite moitié 3, & sera $\sqrt{18} + 3$ valeur de $1R$ qui

est pour le costé : & partant le diametre sera $\sqrt{18+6}$.

19. Il y a un quarré duquel le costé multiplié par le diametre fait 30 : trouuer lesdits costé & diametre.

10

Soit posé le costé de 18. & partant le diametre sera—. Car

10

18

18 multipliee par—fait 10 : lequel nombre est quotient, &

18

10 est diuise par 18. Et ainsi le quotient multiplié par le diuiseur 18, produit le nombre diuise 10. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du costé, sçauoir est de 9 &

100

le quarré du diametre est—. Il y aura equation entre 29,

100

18

&—, laquelle par la multiplication en croix sera reduite à

18

celle d'entre 299. & 100. Diuisant donc 100 par 2, viendra sa valeur de 199, & 18 sera $\sqrt{50}$. pour le costé. Et pource que

10

le diametre a esté posé —, c'est à dire 10 diuisez par 18 : si on

18

diuise 10 par $\sqrt{50}$, sçauoir est par la valeur de 18, viendra au quotient $\sqrt{200}$ pour le diametre.

20. Il y a un rectangle, duquel l'aire est 80, & la difference des costez est 2 : trouuer le diametre, & les costez d'iceluy rectangle.

Soit posé le moindre costé de 18 ; & partant le plus grand de 18+2. Ces costez multipliez entr'eux font l'aire 19+18, egal à l'aire donné 80. Ostant donc 18 de chacun, l'equation sera entre 19. & 80—28. La moitié du nombre des racines est 3, dont le quarré est 1, qui adiousté à 80, sera 81, dont la racine quarrée est 9, de laquelle ostant la susdite moitié 1, restera 8, estimation de 18. pour le moindre costé. Donc le plus grand sera 10, excédant iceluy de 2. Iceux costez multipliez entre-eux produisent 80 aire donné, & les deux quarrés des costez sont 64 & 100, egaux au quarré du diametre : & partant le quarré du diametre sera 164, & iceluy dia. $\sqrt{164}$.

21. Il y a un rectangle duquel le diametre est 30, & la somme des costez 42 : trouuer iceux costez, & l'aire du rectangle.

Soit posé yn costé de 18. & partant l'autre 42—18. Leurs quarrés seront 19. & 1764—84+19 qui sont ensemble egaux au quarré du diametre. Parquoy l'equation sera entre 19+1764—84 & 900. Et adioustant 84 à chacun, elle sera entre 84+900, & 19+1764. Et ostant 900 de chacun, restera equa-

ra equa-

l'equation entre $84R$. & $29. + 864$. Et derechef ostant 864 de chacun, elle sera entre 29 . & $84R - 864$. Et diuisant tout par 2 , l'equation viendra entre 19 . & $42R - 432$. La moitié du nombre des racines est 21 , dont le quarré est 441 , duquel ostant 432 , restera 9 , dont la racine quarrée est 3 , qui adioustée à la susdite moitié 21 , viendra 24 pour le plus grand costé : & partant restera 18 pour le moindre : & iceux costez multipliez entr'eux produisent 432 pour laire du rectangle.

21. Il y a un quarré duquel le costé multiplié par la difference d'entre iceluy costé, & le diametre fait 15 : trouuer le diametre, & le costé dudit quarré.

Soit posé le costé de $1R$, & partant la difference d'entre le costé & le diametre sera $\frac{15}{1R}$, laquelle est trouuee diuisant 15

par $1R$, sçauoir est afin que le quotient multiplié par le diuiseur $1R$ produise le nombre diuisé 15 par $1R$; sçauoir est afin que le quotient multiplié par le diuiseur $1R$, produise le nombre diuisé 15 . Et pource que le diametre excède le costé de

cette difference, le diametre sera $1R + \frac{15}{1R}$. Et d'autant que le quarré du diametre est double du quarré du costé; & le quarré d'iceluy costé est 19 , & le quarré du dia. est $\frac{199 + 309 + 225}{19}$.

Il y aura equation entre 29 , & $\frac{199 + 309 + 225}{19}$ qui par multi-

cation en croix sera reduite à l'equation d'entre 299 . & $199 + 309 + 225$. Ostant donc 199 . de chacun, l'equation sera entre 199 . & $309 + 225$. La moitié du nombre des quarez est 15 , dont le quarré est 225 , qui adiousté à 225 , vient 450 , dont la racine quarrée est $\sqrt{450}$, à laquelle adioustant la susdite moitié 15 , viendra $\sqrt{450} + 15$ pour 19 , & partant $1R$. sera $\sqrt{450} + 15$ & autant est le costé requis, dont le quarré $\sqrt{450} + 15$. estant doublé donnera $\sqrt{1800} + 30$, quarré du diametre; & partant iceluy diametre sera $\sqrt{(\sqrt{1800} + 30)}$ duquel estant soustrait le costé, restera la difference $\sqrt{(\sqrt{1800} + 30)} - \sqrt{450} + 15$ qui multipliee par le costé $\sqrt{450} + 15$ sera produit le nombre 15 .

22. Deux hommes metrans leur argent ensemble, la somme est 200 luy, mais diuisant l'argent du second par celui du premier le quo-

tient est $1\frac{1}{2}$: Il faut trouver l'argent de chacun.

Soit posé $1R$ pour le premier, & pour le second $1A$: il faut donc résoudre la seconde racine en première, ainsi. Pource que les deux ensemble ont 200 escus; il y aura equatiō entre $1R + 1A$, & 200. Ostant $1R$ de chacun restera l'equation entre $1A$, & $200 - 1R$. donc $1A$ sera reduite en $200 - 1R$. Parquoy ie pose derechef le nombre du premier estre $1R$, & celui du second $200 - 1R$, qui font ensemble 200 escus. Je diuise maintenant le nombre du second par celui du premier, & viēt

$$\frac{200 - 1R}{1R} \text{ egal } 2\frac{1}{2}, \text{ laquelle equation par la multiplica-}$$

tion en croix sera reduite à l'equation d'entre $400 - 2R$. & $3R$. Et adioustant $2R$ à chacun, l'equation sera entre 400 & $5R$. diuisant dōc 400 par 5, le quotient sera 80 pour le nombre du premier. & partant le second aura 120, qui diuisez par 80, le quotient est $1\frac{1}{2}$.

24. Trois hommes ayans de l'argent, le premier dict aux deux autres, que s'il auoit encore 100 escus, il auroit autant qu'eux : le second dit aussi aux deux autres, que s'il auoit encore 100 escus, il auroit le double de leur argent : pareillement le troisieme dit aux deux autres, que s'il auoit encore 100 escus, il auroit le triple de leur argent : sçauoir combien à chacun.

Soit posé l'argent du premier estre $1R$. donc avec 100, il aura $1R + 100$, & autant sera la somme du second & tier, & tous les trois auront $2R + 100$. Soit posé la somme du second estre $1A$. Donc avec 100 il aura $1A + 100$, lequel nombre est double de la somme du premier & tier, laquelle est $2R + 100 - 1A$. (Pource que ayans tous trois $2R + 100$, si on oste $1A$, c'est à sçauoir l'argent du second, restera $2R + 100 - 1A$ pour la somme du premier & tier; & partant il y aura equation entre $1A + 100$, & $4R + 200 - 2A$. Et adioustant $2A$ à chacun, l'equation sera entre $3A + 100$. & $4R + 200$. & ostant 100 de chacun, demeurera l'equation entre $3A$, & $4R + 100$. Si donc les tous sont diuisez par 3, l'equation viendra entre $1A$, & $\frac{4}{3}R + \frac{100}{3}$: & partant puis que le second est posé auoir $1A$, sa somme sera $\frac{4}{3}R + \frac{100}{3}$ finalement la somme du tier soit posé estre $1B$. Donc avec 100, il aura $1B + 100$, qui est nombre triple de la somme du premier & second, laquelle est $1R + \frac{4}{3}R + \frac{100}{3}$, composee de $1R$ somme du premier, & $\frac{4}{3}R + \frac{100}{3}$ somme du second: Il y aura donc equation entre $1B + 100$ & $\frac{7}{3}R + \frac{100}{3}$, c'est à dire entre $1B + 100$, & $7R + 100$, & ostant 100 de chacun, l'equatiō sera entre $1B$, & $7R$. & partant

la somme du tier qui a esté posée 18 sera $7R$. Parquoy puis que le premier à 18. le second $\frac{1}{3}R + \frac{100}{3}$, & le tier $7R$. tous les trois ensemble auront $9\frac{1}{3}R + \frac{100}{3}$. Mais tous les trois avoient aussi $18 + 100$: Il y a donc equation entre $9\frac{1}{3}R + \frac{100}{3}$ & 118 : & ostant $2R$ de chacun, restera equation entre $7\frac{1}{3}R + \frac{100}{3}$, & 100 : & ostant derechef $\frac{100}{3}$, c'est à dire $33\frac{1}{3}$ de chacun, demeurera equation entre $7\frac{1}{3}R$ & $66\frac{2}{3}$: divisât d'oc $66\frac{2}{3}$ par $7\frac{1}{3}$, viendra $9\frac{1}{11}$ pour 18 s'omme du premier: & le second avat $1\frac{1}{3}R + 33\frac{1}{3}$, aura $45\frac{1}{11}$: & le tier ayant $7R$, aura $63\frac{7}{11}$. Car ainsi le premier avec 100 aura $109\frac{1}{11}$, egale à la somme du second & tier; & le second avec 100, aura $145\frac{1}{11}$, qui est le double de la somme du premier & tier: & finalement le tier avec 100, aura $163\frac{7}{11}$, qui est le triple de la somme du premier & second.

Fin du sommaire de l'Algebre.





ELEMENT

DIXIESME.

DEFINITIONS.

1.



COMMENSURABLES grandeurs, sont celles mesurees par vne mesme mesure.

2.

Incommensurables grandeurs, sont celles qui n'ont aucune commune mesure.

Telles grandeurs sont le diamettre de quelque quarré, & le costé d'iceluy ; car icelles n'ont nulle commune mesure, comme sera démontré à la dernière prop. de ce liure. Il y a encores plusieurs autres lignes incommensurables, sçavoir est ausquelles on ne peut donner aucune commune mesure, beaucoup desquelles seront expliquées en ce liure ; & enseigné par quelles manieres elles peuvent estre trouuées : de rechef, les superficies sont dictes incommensurables, & les solides incommensurables, qui n'ont aucune commune mesure.

3. Lignes droites commensurables par puissance, sont celles desquelles les quarez peuvent estre mesurez par vne mesme superficie.

4. Lignes droictes incommensurables en puissance, sont celles desquelles les quarez n'ont aucune commune superficie qui les puisse mesurer.

5. Cela estant ainsi, il est euident que à toute ligne droicte proposee, on trouuera infinies lignes droictes commensurables, & infinies incommensurables: les vnes en longueur & puissance, les autres en puissance seulement. Or vne ligne droicte proposee, est appelée rationele,

Si on propose quelque ligne droicte de grandeur cogneuë & determinée, icelle est appelée rationele, pource que c'est selon elle que nous ratiocinons.

Donnor a estimé que ceste definition ne debuoit auoir lieu; & partant l'a reiettee. Ce que i' estime qu'il n'a deub faire, veu qu'il se sert presque à tous propos de ceste ligne rationelle mentionnee en ceste definition.

6 Les lignes commensurables à vne ligne rationele, soit en longueur & puissance, soit en puissance seulement, sont appelées rationeles.

7 Et les lignes incommensurables à vne ligne rationele, sont irrationeles,

Si cōparant quelque ligne droicte, à la ligne prinse pour rationele, & sur laquelle nous ratiocinons. elle est trouuee commensurable à icelle rationele, soit en longueur & puissance, soit en puissance seulement, telle ligne est aussi dictée rationele; mais si elle est incommensurable à icelle ligne rationele proposee, tant en longueur qu'en puissance, ceste dictée ligne est appelée irrationele.

8. Le quarré descrit sur vne ligne rationele, est appelé rationel.

Tout ainsi que ceste ligne là, laquelle est cognüe & determinee de certaine quantité est dite rationele; ainsi aussi le quarré décrit sur icelle ligne, est appelé rationel, pour ce qu'iceluy est certain & cognu: & les superficies comparees à iceluy quarré, sont aussi dictes rationeles, ou bien irrationeles, selon quelles seront trouuees commensurables à iceluy quarré rationel, ainsi qu'il est dit es deux definitions suivantes.

9. Les figures commensurables au quarré rationel, sont aussi rationeles.

10. Et celles qui sont incommensurables au quarré rationel, sont irrationeles & sourdes.

11. Et les lignes qui peuuent icelles figures irrationeles, sont irrationeles & sourdes.

Or une ligne est dictée pouuoir une figure quand le quarré décrit sur icelle est egal à icelle figure, d'autant que tout quarré est la puissance de sa racine ou de son costé. Ainsi il a esté dit cy-dessus que deux lignes sont commensurables en puissance, lors que non pas les lignes, mais les quarréz d'icelles lignes, peuuent estre mesurez par une mesme superficie.

Or a ces definitions nous adiouterons (apres Clavius) une demande, & quelques communes sentences, dont l'usage sera trouué en ce liure.

DEMANDE.

Qu'on puisse multiplier quelconque grandeur tant de fois qu'elle excède quelconque grandeur de mesme genre.

COMMUNES SENTENCES.

1. Une grandeur mesurant tant de grandeurs qu'on voudra, mesure aussi la composee d'icelles.

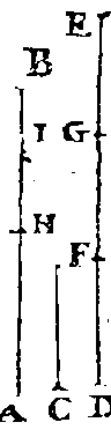
2. Vne grandeur mesurant quelconque grandeur, mesure pareillemēt toute grandeur que celle-là mesure,
3. Vne grandeur qui mesure toute vne grandeur, & vne ostee, mesure aussi le reste.

THEOR. I. PROP. I.

Estans proposees deux grandeurs inegales, si on retranche de la plus grande plus de la moitié, & encores du residu plus de la moitié, & en continuāt tousiours ainsi: Il demeurera à la fin vne grandeur plus petite que la plus petite des deux proposees.

Soient proposees deux grandeurs inegales AB & C, estant C la plus petite: Je dis que si on retranche plus de la moitié de AB, & du residu encores plus de la moitié, & en continuant tousiours ainsi, on trou-

uera à la fin vn residu plus petit que C.
 Qu'il ne soit ainsi. Soit la grandeur C multipliee tant de fois qu'elle excede la plus grande AB, & soit la produite d'icelle multiplication DE, laquelle sera multipliee de C, & plus grande que AB: qu'elle soit donc diuisee en parties egales à C, comme en DF, FG, & GE: Item soit osté de AB plus de la moitié, sçauoir AH, & du residu HB plus de la moitié, sçauoir HI, & en continuant tousiours cecy iusques à ce que AB soit diuisee en autant de parties que DE, sçauoir en AH, HI, & IB, comme DE est diuisee en DF, FG, & GE. Pour autant que DE est plus grande que AB, & que le retranché DF n'est plus grand que la moitié de DE; comme le retranché AH est plus grand que la moitié de AB, le reste FE sera plus grand que le reste HB: semblablement si du plus grand residu FE, on oste FG, qui n'est pas plus que la moitié, & du plus petit residu HB on oste plus de la moitié HI; le reste IB sera plus petit que le reste GE egal à C; & par consequent IB derniere partie de



AB, sera plus petit que C; ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 2. PROP. II.

Si de deux grandeurs inegales proposees, on retranche tousiours alternatiuement la plus petite de la plus grande, sans que le residu mesure la grandeur precedente; telles grandeurs sont incommensurables

Soient proposees deux grandeurs inegales AB & CD: si on retranche continuellement & alternatiuement la plus petite de la plus grande, & que le residu ne mesure iamais sa grandeur precedete, c'est à dire que le plus petit residu ne mesure iamais le plus grand residu; Je dis que AB & CD sont incommensurables.

Autrement il faudra qu'elles soient commensurables: Partant aussi qu'elles ayent vne commune mesure, soit donc icelle E, s'il est possible. Maintenant, de la plus grande CD soit retranchee CF egale à AB, Et s'il se peut faire, soit continué ce retranchement iusques à ce que le reste DF soit plus petit que AB. Donc E commune mesure, mesurera la toute CD & la retranchee CF, egale à AB, ou multipliee d'icelle, par la 2. com. sent. & elle doit aussi mesurer le reste DF par la 3. com. sent. Item soit retranchee DF de AB tant de fois que faire se pourra, iusques à ce que le reste GB soit plus petit que E, qui mesure FD, & par consequent sa multipliee AG, par la 2. com. sent. donc aussi le reste GB, par la 3. com. sent. ce qui est absurde. Partant AB & CD n'auoient point de commune mesure; partant incommensurables; ce qu'il falloit demonstrier.



PROBL. I. PROP. III.

Estans donnees deux grandeurs commensurables, trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient donnees deux grandeurs commensurables AB, CD, & il faut trouver leur plus grande commune mesure. Or AB, qui est moindre que CD, mesurera icelle, ou elle ne la mesurera point : si elle la mesure, il est evident qu'elle sera la plus grande commune mesure. Si elle ne la mesure point, soit alternativement retranchée la plus petite de la plus grande iusques à ce que le reste mesure le reste : (ce qui doit advenir d'autant que les grandeurs donnees sont commensurables) donc que AB soit retranchée de CD, & que le reste ED mesure AB. Je dis qu'icelle ED sera la plus grande commune mesure d'icelles grandeurs AB, CD.

Car puis qu'elle mesure AB, elle mesurera aussi CE son egale : & se mesurant soy-mesme, elle mesurera aussi la route BE, par la 1. com. sent. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçavoir G, (s'il est possible) donc par les com. sent. G mesurera AB, CD, & le retranché CE egal a AB, & par consequent le reste FG, qui est plus petit : ce qui est impossible : donc vne plus grande grandeur que ED, n'est commune mesure d'icelles AB, CD ; Partant ED estoit la plus grande commune mesure.



C O R O L L A I R E.

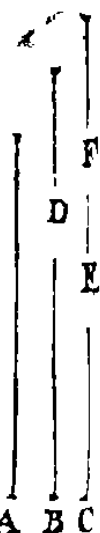
De cecy est manifeste que si une grandeur mesure deux grandeurs, qu'elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté démontré que si G mesure AB & CD, qu'elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure ED.

P R O B L. 2, P R O P. I I I I.

Trois grandeurs commensurables estans donnees, trouver la plus grande cōmune mesure d'icelles.

Soient donnees trois grandeurs, commensurables A, B, C, desquelles il faut trouver la plus grande commune mesure. Soit trouuee D plus grāde commune mesure entre A & B par

la 3. p. 10. Si D mesure aussi C, il est manifeste que D est la plus grande commune mesure de toutes les trois grandeurs A, B, C. Car si vne plus grande grandeur que D mesure les grandeurs A, B, C, par le coroll. de la precedente prop. elle mesurera aussi la plus grãde commune mesure d'icelles A & B, c'est à dire D, qui est moindre grandeur, ce qui est impossible. Que si D ne mesure pas C, au moins D, C, seront commensurables: car veu que A, B, C sont cõmensurables, quelque mesure commune d'icelles, mesurera D plus grande mesure d'icelles A, B, par le corol. de la 3. p. 10. mais ceste mesme mesure la mesurera aussi C: donc D & C, seront commensurables. Soit donc trouuee par la 3. p. 10 E plus grande commune mesure d'icelles D, C: & icelle E sera la plus grande mesure des grandeurs donnees A, B, C. Car d'aurant que E mesure D & C; & D mesure A & B, par la 2. com. A B C sent. E mesurera aussi icelles A & B. Mais elle mesure aussi C: donc E est mesure commune d'icelles A, B, C. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir F, s'il est possible. Donc puis que F mesure A & B, par le corol. de la 3. p. 10. elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure D. Mais elle mesure aussi C: donc F mesurant D & C, mesurera pareillement E plus grande mesure d'icelles: ce qui est absurde. Donc vne plus grande grandeur que E ne mesure pas les grandeurs A, B, C: & partant E est la plus grande commune mesure d'icelles.



COROLLAIRE.

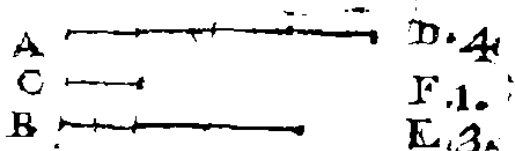
Par cecy est euident que si vne grandeur mesure trois grandeurs, qu'elle mesure aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté démontré que si F mesure A, B, C, qu'elle mesurera pareillement E plus grande commune mesure d'icelles.

Par semblable maniere, estans donnees plus de trois grandeurs commensurables, nous trouuerons leur plus grande commune mesure: & ce mesme corollaire aura lieu.

THEOR. 3. PROP. V.

Grandeurs commensurables, sont entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs com-
mensurables A & B. Je dis qu'el-
les sont entr'elles comme nom-
bre à nombre.



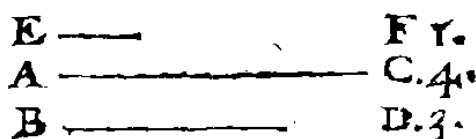
Car puis qu'elles sont commē-

surables, elles auront vne commune mesure, soit icelle C: donc C mesurera A selon quelque nombre, comme selon D: il mesurera aussi B selon quelque autre nombre, comme selon E: ainsi puis que C est autant de fois en A, comme l'vnité F est en D, & C en B, comme F en E. A, C, B, seront l'vne à l'autre comme D, F, E, & en raison egale A sera à B, comme le nombre D est au nombre E, par la 22. p. 5. ce qu'il falloit demon-

THEO. 4. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont l'vne à l'autre comme
nombre à nombre, elles seront commen-
surables.

Soient deux grandeurs A & B,
qui soient l'vne à l'autre com-
me le nombre C est au nombre
D: Je dis qu'elles seront com-
mensurables.



Car soit diuisee A en autant de parties egales qu'il y a d'vnitéz au nombre C, & l'vne d'icelles parties soit egale à E: donc E est à A, ainsi que l'vnité est au nombre C. Mais par l'hypothese A est à B, comme le nombre C est au nombre D. donc en raison egale, E sera à B, comme l'vnité à D, par la 22 p. 5. Mais l'vnité mesure D; donc aussi E mesure B: mais E mesure pareillement A. Donc E est commune mesure de A & B; & partant par la deff- de ce liure A & B sont commensurables, ce qu'il falloit demonstrier.

COROLAIRE.

Par cecy est euident qu'estant proposez deux nombres comme C & D, & vne ligne droicte comme A qu'il sera aise de trouuer vne au-

tre ligne droicte, à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D : Car diuisant A en autant de parties egales qu'il y a d'unités au nombre C ; & on prend une ligne droicte B , contenant autant d'icelles parties qu'il y a d'unités au nombre D : alors A sera à B , comme le nombre C au nombre D , ainsi qu'il est manifeste parce qu'il a esté demonstté.

De cecy appert derechef, par quelle maniere on peut (estans donnez deux nombres, & une ligne droicte,) trouuer une autre ligne droicte, le quarré de laquelle soit au quarré de la donnée comme nombre à nombre. Car s'il faut trouuer une ligne droicte, au quarré de laquelle soit le quarré de la ligne A , comme le nombre C est au nombre D ; Il faudra trouuer ainsi que dessus la ligne B , à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D , puis soit trouuee par la 1.^e p. 6. la moyenne prop. entre icelles A & B : & le quarré de A sera au quarré d'icelle moyenne prop. comme le nombre C au nombre D , Car le quarré de A sera (par le corol. de la 20. p. 6.) au quarré de la dite moyenne prop. comme A à B ; & partant comme le nombre C au nombre D .

THEOR. 5. PROP. VII.

Grandeurs incommensurables, ne sont entr'elles comme nombre à nombre.

Ceste demonstration est aisée. Car si les grandeurs données estoient entr'elles comme nombre à nombre, elles seroient commensurables par la 6. p. 10. ce qui est contre l'hypothese.

THEOR. 6. PROP. VIII.

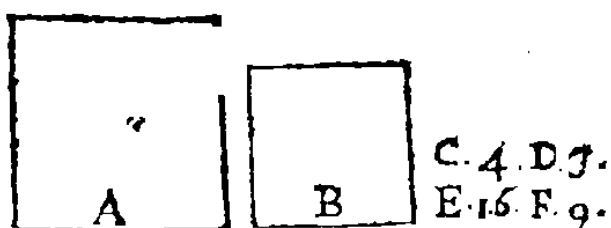
Si deux grandeurs ne sont entr'elles comme nombre à nombre, elles seront incommensurables.

Ceste demonstration est aussi facile. Car si les grandeurs données estoient commensurables, il faudroit qu'elles fussent comme nombre à nombre par la 5. p. 10. ce qui est contre nostre hypothese.

THEOR. 7. PROP. IX.

Les quarez descrits sur lignes commensurables en longitude, sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarez qui sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez commensurables en longitude. Mais les quarez descrits sur lignes incommensurables en longitude, ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarez n'estans entre eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez incommensurables en longitude.

Soient les lignes A & B commensurables en longitude: Je dis que leurs quarez sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.



Car puis que les lignes A & B sont commens. en longitude, elles seront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. p. 10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D, & les quarez d'iceux C & D soient E & F. Or les quarez de A & B sont en raison doublee de leurs costez, par la 20. p. 6. Ité les nombres quarez E & F sont aussi en raison doublee de leurs costez, par la 11. p. 8. Donc le quarré de A est au quarré de B, comme le nombre quarré E est au nombre quarré F: C'est à sçavoir en raison doublee des costez A & B, ou des nombres C & D, qui sont en la mesme raison que les lignes A & B.

Pour la seconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré E au nombre quarré F: Je dis que les lignes A & B seront commens. en longitude. Car par la 10. p. 6. & 11. p. 8. la raison des quarez aux quarez, est la raison doublee de leurs costez, & partant cōme le costé A au costé B, ainsi le nombre C au nombre D, puis que leurs raisons doublees sont egales. Donc par la 6. p. 10. A & B sont commensurables en longitude.

Pour la 3. partie soient les lignes droictes A & B incommens.

mesurables en longueur. Je dis que leurs quarrés ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Car si les quarrés de A & B estoient ainsi que nombre quarré à nombre quarré, icelles A & B seroient commensurables en longueur contre l'hypothèse.

Finablement les quarrés de A & B n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Je dis qu'elles sont incommensurables en longueur. Car autrement leurs quarrés seroient (par la première partie) comme nombre quarré à nombre quarré, contre l'hypothèse.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par les choses cy dessus demonstrees, que les lignes commensurables en longueur, le sont aussi en puissance: mais que celles qui sont commensurables en puissance, ne le sont pas toujours en longueur. Que les incommensurables en longueur, ne le sont pas pourtant en puissance: & que celles incommens. en puissance, le sont aussi en longueur.

Car d'autant que les quarrés d'icelles lignes commens. en longueur sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à dire simplement comme nombre à nombre: iceux quarrés seront commensurables par la 6. p. 10. & parant les lignes commensurables en longueur sont aussi en puissance.

Puis apres veu que les lignes dont les quarrés ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré, ains seulement comme nombre à nombre, sont commens. en puissance (car leurs quarrés sont commens. par la 6. p. 10.) & non en longit. comme il a esté demonsté: il appert que les lignes commens. en puissance, ne le sont pas pourtant en longueur, sinon que les quarrés d'icelles lignes soient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

Derechef puis que les lignes desquelles les quarrés ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, mais toutesfois comme nombre à nombre sont incommensurables en long. & commensurables en puissance: il appert que les lignes incommens. en longit. ne le sont pas toujours en puissance: ains qu'il n'y a que celles dont les quarrés ne sont entr'eux comme nombre à nombre, qui soient aussi incommens. en puissance, veu que leurs quarrés sont incommens. par la 8. p. 10.

Finablement est manifeste que les lignes incommens. en puissance, le sont aussi en longueur: car si elles estoient commens. en long elles le seroient aussi en puissance, comme appert par la première partie de ce corollaire qui est contre l'hypothèse.

S C H O L I E.

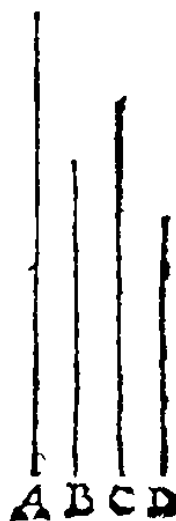
Il est à noter qu'ès deux premières parties de ceste proposition s'entend aussi des lignes inexplicables par nombres, pourueu qu'elles soient commensurables en longueur; comme si les quarez de A & B estoient 12 & 3. Leurs costez seroient $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$. qui sont inexplicables par nombres, toutefois commens. Car par la 20. p. 6. 12. seroit à 3. en raison double de $\sqrt{12}$. à $\sqrt{3}$. Mais 12. est quadruple de 3. Ainsi le costé A fera double du costé B, par la 10. d. 5. Car la double raison doublée est quadruple.

THEO. 8. PROP. X.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, & la premiere est commensurable à la secōde, la troisieme sera aussi commensurable à la quatrieme. Que si la premiere est incommensurable à la seconde, la troisieme sera aussi incommensurable à la quatrieme.

Soient quatre grandeurs proport. A, B, C, D: & A est commensurable à B, Je dis que C sera aussi commens. à D.

Car si A est commensurable à B, ils seront entr'eux comme nombre à nombre, par la 5. p. 10: Mais comme A à B, ainsi C à D; Partāt C est à D, comme nombre à nombre; & par consequent commens. par la 6 p. 10. Que si A estoit incommens. à B: Je dis que C seroit aussi incommensurable à D: Car A & B ne seroient pas comme nombre à nombre par la 7. p. 10. Mais comme A à B, ainsi C à D: donc C n'est pas à D comme nombre à nombre, & par consequent incommens. par la 8. p. 10.



L' E M M E.

Trouver deux nombres plans dissemblables, c'est à dire, qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Soit pris qu'conque nombre quarré A , & un $A. 16. B. 20$
 autre B non quarré. Je dis qu'iceux nombres A & B sont plans dis-
 semblables. Car s'ils estoient plans semblables, ils seroient comme
 nombre quarré à nombre quarré, par la 26. p. 8. & partant A estant
 nombre quarré, aussi B seroit quarré par la 24. p. 8. contre l'hypothè-
 se. Donc A, B , ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre
 quarré.

PROB. 3. PROP. XI.

Trouuer deux lignes droictes incommensu-
 rables à vne ligne rationele proposée, sçauoit
 vne en longitude seulement, & l'autre en lon-
 gitude & puissance.

Soit la ligne rationelle propo-
 sée A , à laquelle il faut trouuer A ————— $B. 20.$
 deux autres lignes incommensu- E —————
 rables, l'une seulement en longi- D ————— $C. 16.$
 tude, & l'autre en longitude &
 puissance.

Soient trouuez par le lemme precedent deux nombres E ,
 & C , qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre
 quarré : Item par le coroll. de la 6. p. 10. soit trouuée la ligne
 D , de laquelle le quarré soit au quarré de la ligne A , comme
 le nombre C est au nombre B . Or d'autant qu'iceux quarrés
 de A & D sont comme nombre à nombre, ils seront commensu-
 rables entr'eux par la 6. p. 10. Mais n'estans pas comme nombre
 quarré à nombre quarré, ils n'auront pas les costez A & D
 commensurables en longitude, par la 9. p. 10. Donc les lignes droi-
 ctes A & D sont commensurables en puissance seulement : la li-
 gne D est donc la premiere requise.

Maintenant soit trouuée la ligne E moyenne prop. entre A
 & D , par la 13. p. 6. & icelle E sera la seconde ligne deman-
 dée : car puis que par le coroll. de la 20. p. 6. le quarré de A est
 au quarré de E comme A à D , & icelles A & D sont incommensu-
 rables en longitude, comme il a esté démontré : le quarré de
 A sera aussi incommensurable au quarré de E , par la 10. p. 10.
 parquoy les lignes A & E sont incommensurables en puissance, &
 par le coroll. de la 9. p. 10. elles sont aussi incommensurables en lon-
 gitude.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Soit $A 5$. donc la ligne D sera $\sqrt{20}$, laquelle il appert estre incommens. en longitude à A , mais commens. en puissance. Mais E estant moyenne prop. entre $A 5$, & $D \sqrt{20}$: sera $\sqrt{500}$, qui est incommens. tant en longit. que puissance à $A 5$.

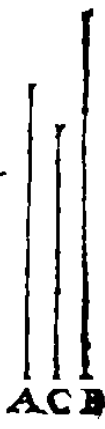
Douneor ayant delaisé le lemme precedent, se sert neantmoins d'ice-luy en la construction cy dessus.

THEOR. 9. PROP. XII.

Les grandeurs commeufurables à vne autre sont aussi commensurables entr'elles.

Soient les deux grandeurs A & B , commeuf. chacune à la grandeur C . Je dis qu'elles sont commensurables entr'elles.

Car puisque A & C sont commens. icelles seront comme nombre à nombre par la 5. p. 10. & soit comme le nombre D au nombre E . Derechef puis que C & B sont commens. C sera à B , comme nombre à nombre, & soit comme le nombre F au nombre G . Soient pris par la



$D, 10. E, 8.$
 $F, 2. G, 3.$
 $H, 5. I, 4. K, 6.$

4. p. 8 les trois nombres H, I, K , les plus petits continuellement proportionnaux, selon les raisons de D à E , & F à G : tellement que H soit à I comme D à E , c'est à dire comme A à C , & I à K comme F à G , c'est à dire comme C à B . Donc puis que A est à C , comme H à I ; & C à B , comme I à K , par raison egale A sera à B , comme H à K , c'est à dire comme nombre à nombre; & partant A & B sont commens. par la 6. p. 10. ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 10. PROP. XIII.

Si de deux grandeurs l'une est commensu-

nable à vne troisième, mais l'autre incommens. icelles grandeurs seront incommens. entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, (en la précédente figure) desquelles A soit commens. à C ; & B incommens. à la même C. Je dis que A & B sont incommens. entr'elles. Car si B estoit cōmens. à A, lequel A est posé aussi commens. à C, par la 11. p. 10. B & C seroient commens. contre l'hypothese. Donc A & B ne sont commens. ce qu'il falloit demonst. rer.

THEOR. II. PROP. XIV.

Si de deux grandeurs commens. l'une est incommens. à vne tierce, aussi sera l'autre à la même.

Soient deux grandeurs commens. A & B, & que A soit incommens. à la tierce C : Je dis que B & C sōt aussi incommensurables.

Autrement, si B est commens. à C, il sera aussi commens. à A, par la 12. p. 10 contre nostre hypothese : donc B est incommens. à C : ce qu'il falloit demonst. rer.



SCHOLIE.

Les Interpretes d'Euclide colligent de ceste prop. le theoreme suivant, utile aux choses demonstrees en ce liure.

Les grandeurs commensurables à des incommensurables, sont aussi incommens. entr'elles.

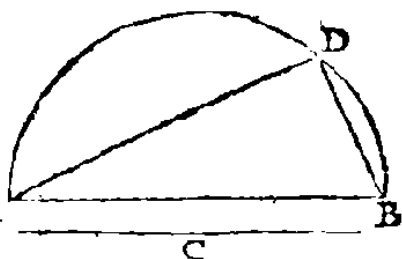
Soient deux grandeurs A & B incommensurables, auxquelles C & D soient commens. sçavoir est C à A, & D à B. Je dis que C & D sont incommens. entr'elles. Car puis que A & C sont posees commens. & A incommens. à B, l'autre C sera aussi incommens. à B par la 14. p. 10. De rechef puis que D & B sont posees commens. & B a esté demonstree incommens. à C; D sera aussi incommens. à la même C par la 14 p. 10. ce qui estoit proposé,



L E M M E.

Estans donnees deux lignes droictes inegales, trouver cō-
bien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soient donnees les deux lignes droi-
tes inegales AB & C , desquelles AB
est la plus grande : & il faut trouver
combien la ligne AB peut plus que la
ligne C . Soit descrit sur AB le demy A



cercle ADB , & dans iceluy soit accō-
modee AD egale à C , par la 1. p. 4. & soit menee DB . Je dis que AB
peut plus que C du quarré de BD . Car d'autant que l'angle D est
au demy cercle, il est droict par la 31. p. 3. & par la 47. p. 1. le quarré
de AB sera egal aux quarréz de AD , DB ; & partant AB pourra
plus que AD , c'est à dire que C , du quarré de BD .

Semblablement estans donnees deux lignes droictes, en
trouver vne autre pouuant icelles.

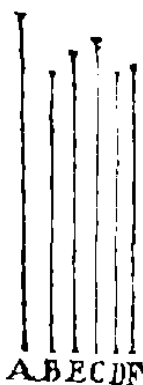
Soient donnees les deux lignes droictes AD , BD : & il faut trouver
vne ligne droicte qui puisse icelles. Soient posees icelles AD , BD à an-
gle droict D , & tiré AB . Il est evident qu'icelle AB peut AD & BD ,
puis que par la 47. p. 1. le quarré d'icelle AB , est egal aux quarréz de
 AD , BD .

THEOR. 12. PROP. XV. . .

Si quatre lignes sont proportionnelles, & la
premiere peut plus que la seconde du quarré
d'une ligne qui luy est cōmensurable en lon-
gitude: aussi la troisieme pourra plus que la
quatrieme du quarré d'une ligne qui luy sera
commensurable en longitude. Que si la pre-
miere peut plus que la seconde du quarré d'une
ligne qui luy soit incommensurable en lon-
gitude: aussi la troisieme pourra plus que la
quatrieme du quarré d'une ligne qui luy sera
incommensurable en longitude.

Soient 4. lignes proportion. A, B, C, D , & que A puisse plus que B du carré de E , & C plus que D du carré de F . Je dis que cōme A sera commens. ou incommens. à E , ainsi C sera commensurable, ou incommensurable à F .

Car puis que A, B, C, D , sont proportionnelles, comme le carré de A sera au carré de B , ainsi le carré de C sera au carré de D , par la 22. p. 6. Mais le carré de A est égal aux quarez de B, E , par l'hypothese, & le carré de C aux quarez de D, F : donc aussi les quarez de B, E , serōt au carré de B , comme les quarez de D, F , au carré de D : & en diuisant comme le carré de E sera au carré de B , ainsi le carré de F au carré de D ; & par la 22. p. 6. comme la ligne E sera à la ligne B , ainsi la ligne F à la ligne D ; & en changeant comme B à E , ainsi D à F . Donc puis que comme A à B , ainsi C à D , & comme B à E ainsi D à F , par raison egale comme A sera à E , ainsi C à F : Et par la 10. p. 10. si A est commens. ou incommens. à E , aussi C sera commens. ou incommens. à F : ce qu'il falloit demonst. r.



THEO. 13. PROP. XVI.

Si deux grandeurs commens. sont iointes, la composee sera commens. à chacune de ses parties: Et si la composee est commensurable à vne de ses parties, icelles seront commens. entr'elles.

Soient iointes deux grādeurs commens. AB & BC : Je dis que la composee AC , est commensurable à AB , & à BC parties d'icelle.



Car puis que AB & BC sont commensurables, elles auront vne commune mesure, laquelle mesurant AB & BC , mesurera aussi la toute AC , par la 1. com. sent. Partant la toute AC est commens. à ses parties.

Pour la seconde partie. Si la toute AC est commens. à vne de ses parties, icelles seront commensurables entr'elles. Car si AC & AB , sont commens., elles auront vne commune me-

sure, laquelle mesurant le tout & le retranché, mesurera aussi le reste par la 3. comm. sent. Partant le retranché & le reste seront commens. d'autant qu'ils ont vne commune mesure.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que si vne grandeur composee de deux, est commensurable à l'une d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC est commensurable à AB , elle le sera aussi à BC . Car par la seconde partie de ceste prop. AB, BC sont commens. donc par la premiere partie AC sera commens. a chasques parties AB, BC .

S C H O L I E.

Soit $AB \sqrt{18}$. & $BC \sqrt{8}$, lesquelles sont commens. La composee AC sera $\sqrt{50}$. laquelle est commens. tant à $\sqrt{18}$. que à $\sqrt{8}$. Car $\sqrt{50}$ est à $\sqrt{18}$. comme 5 à 3, & à $\sqrt{8}$, comme 5 à 2.

THEOR. 14. PROP. XVII.

Si on conioinct deux grandeurs incommensurables, la composee sera incommens. à chacune de ses parties: Et si la composee est incommens. à l'une de ses parties, Icelles parties seront incommens. entr'elles.

Soient conioinctes deux grandeurs incommens. AB & BC : Je dis que la toute AC est incommens. à vne chacune de ses parties.



Autrement, si AC estoit commens. à AB , elle le seroit aussi à BC , car la commune mesure qui mesureroit AC & le retranché AB , mesureroit aussi le reste BC , par la 3. comm. sent. Et par là AB & BC seroient commens. (ce qui est cōtre l'hypothese.) Donc AC & AB sont incommens. Il s'ensuivra le mesme incōvenient si on nie que AC & BC soient incommensurables.

Pour la seconde partie: Je dis que si AC & BC , sont incō-

mens. que AB & BC seront aussi incommens. Autrement si elles estoient commensurables. La route AC seroit aussi commensurables à sa partie BC par la 16. p. 10. contre nostre hypotese. Donc AB & BC sont incommens. Par mesme argument nous demonsturerons que si AC & AB sont incommens. que AB & BC sont aussi incommens.

COROLLAIRE.

Il resulta de ces choses que si une grandeur composee de deux, est incommensurable à l'une d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC composee de AB & BC est incommens. à AB , elle le sera aussi à BC . Car si AC estoit commens. à icelle BC , elle le seroit aussi à AB par le corol. de la preced. prop. ce qui est contre l'hypotese. Donc AC & BC ne sont commens. mais incommensurables.

SCHOLIE.

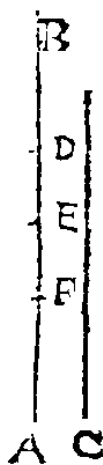
Soit AB 8, & BC $\sqrt{28}$. lesquelles sont incommensurables. La composee AC sera 8 + $\sqrt{28}$. Incommensurable à chacune d'icelles AB , BC $\sqrt{28}$.

THEOR. 15 PROP. XVIII.

Si il y a deux lignes droictes inegales, & sur la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, deffaillant d'une figure quarrée, & que le rectagle diuise icelle plus grande ligne en parties commens. en longitude; la plus grãde ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longitude: Et si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longitude, estât appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & de-

faillant d'une figure quarrée ; le rectangle divisera icelle plus grande ligne en parties commens. en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C , & par la 28. p. 6. sur la plus grande AB soit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C , defaillant d'une figure quarrée (c'est à dire d'une ligne egale à son autre costé.) Et soit iceluy rectangle contenu de AD & DB . Je dis que si AD & DB sont commens. en longitude, que AB pourra plus que C du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longitude.



Qu'il ne soit ainsi. Soit la ligne AB couppee en deux egalelement en E , & soit faicte EF egale à ED . Il est evident que AF sera egale à DB , puis que les toutes AE , EB sont egales, & aussi les retranchees EF , ED . Maintenant, puis que AB est couppee en deux egalelement en E , & en deux inegalelement en D , par la 5. p. 2. le rectangle de AD & DB avec le quarré de ED , seront egaux au quarré de BE , lequel n'estant par l'hypothese que le quart du quarré de AB , quatre fois le rectangle de AD & DB , & quatre fois le quarré de ED , sont egaux au quarré de AB . Mais quatre fois le rectangle de AD & DB valent le quarré de C , d'autant que par l'hypothese le rectangle de AD , & DB est le quart du quarré de C . Donc le quarré de AB est plus grand que le quarré de C , de quatre fois le quarré de ED , ou du seul FD egal à iceux, par le scholie de la 4. p. 2. puisque FD est double de ED . Il faut donc demonstrier que AB & FD sont commensurables en longitude: D'autant que AD & DB sont posees commens. en longitude, la toute AB sera aussi commens. en longitude à sa partie DB par la 16. p. 16. Et partant a son egale AF , & à toutes les deux ioinctes en vne: Et par consequent au reste de la ligne FD par la mesme 16. p. 10. Donc la ligne droicte AB peut plus que C , du quarré de FD qui luy est commensurable en longitude.

Pour la seconde partie, sans rien changer à la construction: si AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longitude. Je dis que AD & DB seront aussi commens. en longitude. Car il sera demonsté ainsi que dessus que AB peut plus que C du quarré de FD . Mais AB a esté posée pouvoir plus que C du quarré d'une ligne qui luy est com-

menf. en longitude: & partant AB fera commenf. en longitude à icelle FD. Et puis que AB compofée de FD, de AF, DB comme d'une, eft commenfurable en longitude à la partie FD; la mefine AB fera auffi commenf. en longitude à l'autre partie compofée de AF, DB par le coroll. de la 16. p. 10. Mais icelle compofée de AF, DB, eft auffi commenf. en longit. à DB, puis qu'elle eft double d'icelle: donc puis que chacune d'icelles AB, DB eft commenf. en longit. à la compofée de AF, DB; auffi AB, DB feront commenf. entr'elles en longitude par la 12. p. 10. & partant veu que la toute AB compofée de AD, DB eft commenf. en longit. à icelle DB; auffi icelles AD, DB feront commenf. en longit. entr'elles par la 16. p. 10. ce qu'il falloit demonftrer.

S C H O L I E.

Soit AB 30, & C 24. donc les fegmens AD, & DB, feront 24, & 6, defquels le produit, c'eft à dire le rectangle eft 144, qui eft egal au quart de 576, quarré de C 24, & deffaillant du quarré de DB 6, c'eft à dire 36: & font icelles parties AD 24, DB 6, commenf. en longitude: car l'une eft quadruple de l'autre. Ainfi ED, qui peut dans C le quarré de AB, fera 18: car le quarré de AB eft 900, & celui de C 576; & partant refte pour le quarré de FD 324, dont la racine quarrée eft 18, commenf. en longitude à AB. L'autre partie fera auffi evidente par l'addition des nombres cy deffus.

La propofition fuiuante fera auffi facilement entendue, foyt pofe AB 12, & C $\sqrt{96}$: car les fegmens AD, DB, feront 6 + $\sqrt{12}$, & 6 - $\sqrt{12}$; & FD $\sqrt{48}$, qui eft à 12 incommenf. en longit. &c.

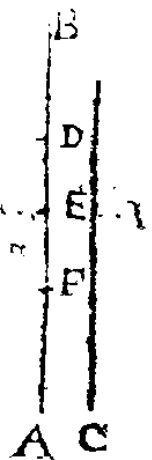
THEOR. 16. PROP. XIX.

Si l'y a deux lignes droictes inegales, & fur la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'une figure quarrée, & que le rectangle diuife icelle plus grande ligne en parties incommenf. en longitude; la plus grãde ligne pour-

la plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy sera incommens. en lōgitude. Que si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en lōgitude, estant appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'une figure quarrée; le rectangle diuifera la plus grande ligne en parties incommens. en lōgitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & sur la plus grande AB soit appliqué (par la 18. p. 6.) vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'une figure quarrée; & soit iceluy rectangle contenu sous AD, DB incommensurables en lōgitude. Je dis que AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en lōgitude. Car ayāt construit comme en la precedente prop. nous demonstrerōs semblablement que AB peut plus que AC du quarré de FD. Il faut donc demonstrier que AB & FD sont incommens. en lōgit. D'autant que les lignes AD, DB sont posces incommens. en lōgit. la toute AB sera aussi incommens. en lōg. à la partie DB par la 17. p. 10. Mais DB est commensurab. en lōgitude à la composee de AF, DB, veu que ceste-cy est double de celle-là: donc puis que de ces deux lignes commens. icelle DB est incommens. en lōgitude à AB; la composee de AF, DB sera aussi incommens. en lōg. à la mesme AB par la 14. p. 10. Et pour autant que AB composee de AF, DB comme vne, & de FD, est incommens. en lōg. à la composee de AF, DB; la mesme AB sera aussi incommens. en lōg. à FD, par le corol. de la 17. p. 10. Donc AB peut plus que C du quarré de FD, qui luy est incommens. en lōgitude.

Maintenant si AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en lōgitude, & sur icelle AB est appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, & defaillant d'une figure quarrée, lequel rectangle diuise AB es parties AD, DB. Je dis qu'icelles AD, DB sont incommens. en lōg.



Car nous demonstrerons comme deuant (les mesmes choses estans construiſtes) que AB peut plus que C du quarré de FD, & qu'icelles AB & FD ſont incommenſ. en longitude: & puis que AB eſt compoſee de FD & de AF, DB ioinctes en vne. icelle AB ſera auſſi incommenſ. en longitude à la compoſee de AF, DB par le corol. de la 17. p. de ce liure. Mais la compoſee de AF, DB eſt commenſ. en long. à icelle DB, puis que celle là eſt double de ceſte-cy. Donc puis que AB eſt incommenſ. en longit. à la compoſee de AF, DB, icelle AB ſera auſſi incommenſ. en longit. à DB, par la 14. p. 10. Et partant puis que AB compoſee de AD, DB eſt incommenſ. en long. à DB, icelles AD, DB ſeront auſſi incommenſurables en longitude entr'elles par la 17. p. 10. ce qu'il falloit demonſtrer.

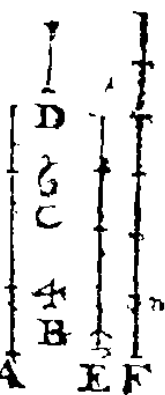
LE M M E.

Puis qu'il a eſté demonſtré que les lignes commenſ. en longitude, le ſont auſſi en puissance, mais que celles commenſ. en puissance ne le ſont pas toujours en longitude: il eſt manifeſte que ſ'il y a quelque ligne commenſ. en longitude à une propoſee rationele: elle doit eſtre appell. rationele & commenſurable à icelle, non ſeulement en longitude, mais auſſi en puissance: car les lignes commenſ. en long. le ſont toujours auſſi en puissance. S'il y a auſſi quelque ligne droicte commenſ. en puissance & longitude à l'expoſee rationele, elle ſera auſſi dite rationele commenſ. en longitude & puissance. Que ſi de reſcheſ il y a quelque ligne commenſ. en puissance à icelle, mais incommenſ. en longitude, elle ſera auſſi dite rationele commenſ. à icelle en puissance ſeulement.

SCHOLIE.

Il ſpport par ce que deſſus, qu'il y a de trois ſortes de lignes rationeles commenſ. entr'elles en longitude. Car de deux lignes rationeles commenſ. entr'elles en longitude, ou l'une eſt egale à l'expoſee rationele: & partant l'une & l'autre commenſ. en longitude à la rationele: ou l'une ny l'autre n'eſt egale à l'expoſee rationele, & toutes-fois commenſ. en longitude à icelle: ou finalement l'une & l'autre eſt commenſ. à l'expoſee rationele en puissance ſeulement. Or nous trouuerons ces trois genres de lignes rationeles en ceſte maniere. Soit une rationele propoſee A diuiſee en quatre parties egales: c'eſt à

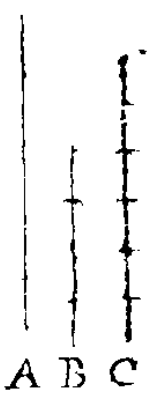
ſavoir en autant qu'il y a d'unités au nombre B: puis apres eſt pris quelque autre nombre C, la ligne D ſoit une partie de A; & autant de fois que D meſure A, autant de fois elle meſure quelque ligne E. Item autant de fois que l'unité eſt en C, qu'autant de fois la meſme D meſure quelque autre ligne F. Donc puis que A & E ſont compoſées de parties égales en nombre, qui ſont égales à D; elles ſeront égales. De rechef puis que D meſure toutes les trois lignes A, E, F; elles ſeront commens. en longitude, parquoy E & F ſont rationeles commens. en longitude à la rationele A: mais elles ont eſté demonſtrées eſtre auſſi commens. entr'elles en longitude. Nous avons donc trouvé deux rationeles E & F commens. en longitude, tant entr'elles qu'à la rationele expoſée A, & deſquelles une, ſavoir eſt E, eſt égale à A.



Or maintenant que D meſure deux lignes C & E par deux nombres F & G différens de B, tellement que l'une & l'autre ligne C & E ſoit inégale à A. Donc comme deſſus les trois lignes A, C, E, ayans D pour meſure commune, ſeront commens. en longitude; parquoy C & E ſont rationeles commens. en longitude à la rationele A: mais elles le ſont auſſi entr'elles. Nous avons donc trouvé deux rationeles C & E commens. en longitude, tant entr'elles qu'à la rationelle propoſée A, l'une ny l'autre deſquelles n'eſt égale à icelle A.

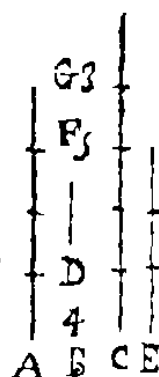


Finablement par la 11. p. 10. à l'expoſée rationele A, ſoit trouvée la ligne B, incommens. en longitude ſeulement laquelle ſoit coupée en tant de parties égales qu'on vaudra, & ſoit priſe C, compoſée de quelconque nombre, d'icelles parties de B: & icelles B & C ſeront commens. en longitude. Je dis qu'elles ſont auſſi commens. en puissance ſeulement à l'expoſée rationele A. Car puis que A & B ſont commens. en puissance; le quarré de A ſera commens. au quarré de B: Mais au meſme quarré de B, eſt auſſi commens. le quarré de C, pource que B, C eſtans commens. en longitude, elles le ſont auſſi en puissance. Donc par la 12. p. 10. les quarrés de A & C, ſont pareillement commens. entr'eux. Parquoy C eſt commens. en puissance à icelle A. Et pource que des deux lignes B & C commens. en longitude, B eſt incommens. en longitude à A; par la 14. p. 10. C ſera auſſi incommens. en longitude à la meſme A. Donc C eſt commens. à A ſeulement en puissance. Et pource que B & C, commens. en puissance à l'expoſée rationele A, ſont rationeles; elles ſeront deux rationeles commens. en longitude entr'elles, mais en



Puissance seulement à l'exposée rationelle A : elles sont donc les deux lignes requises à trouver.

Que si quelqu'un desire trouver tant qu'on voudra de lignes rationelles commens. en longitude entr'elles, cela se fera ainsi: Soit pris quelconque mesure D, & soient composées autant qu'on voudra de lignes A, C, E, d'autant de parties égales à icelle D, qu'il y a d'unités en autant de nombres inégaux B, F, G, car les lignes A, C, E ayant la commune mesure D, seront commens. en longitude.

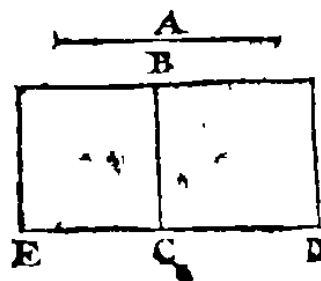


Or il est aussi évident que toutes lignes rationelles, sont commens. non seulement à une exposée rationelle, mais aussi entr'elles. Car par la 6. d. 10. les lignes rationelles sont celles qui sont commens. à l'exposée rationelle, soit en longitude & puissance, ou en puissance seulement, & que par la 12. p. 10. les commens. à une même, sont aussi commens. entr'elles; il est manifeste que toutes lignes rationelles, sont commens. entr'elles.

THEOR. 17. PROP. XX.

Le rectangle compris de deux lignes rationelles commens. en longitude selon quelque'une des manieres cy deuant dites, est rationel.

Soit une exposée rationelle A, & le rectangle BD compris sous BC, CD rationelles commens. en longitude, selon quelque'une des manieres cy dessus dites : Je dis qu'iceluy rectangle est rationel.



Car si sur BC on fait le quarré BE, il sera commens. au quarré de la rationelle A par la 3. d. 10. puis que BC est rationelle commens. à la rationelle exposée A, ou en longitude & puissance, ou en puissance seulement. Et puis que BC ou EC, CD sont commens. en longitude (car BC CD ont esté posées rationelles commens. en longit. entr'elles) & par la 1. p. 6. comme EC est à CD, ainsi EB à BD, par la 10. p. 10. EB, BD seront aussi commens. tellement donc que le quarré de A, & le rectangle BD sont commens. au quarré EB; & partant commens. entr'eux par la 12. p. 10. Mais le quarré de A est rationel par la 8. d. 10. Donc par la 9. d. 10. le rectangle BD sera aussi rationel: ce qu'il falloit demonst.

S C H O L I E.

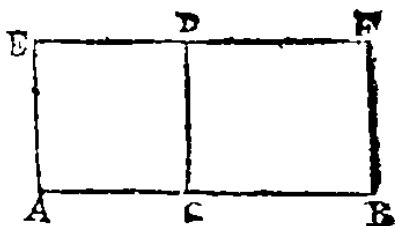
Soit $BC\ 3$. $CD\ 4$. donc le rectangle BD sera 12 . D'iceuf soit $BC\ \sqrt{3}$, & $CD\ \sqrt{12}$. Le rectangle BD sera $\sqrt{36}$. c'est à dire 6 . Et d'iceuf se BC est $\sqrt{8}$ & $CD\ \sqrt{18}$. Le rectangle BD sera $\sqrt{144}$. c'est à dire 12 . Ainsi iceluy rectangle est rationel.

THEOR. 18. PROP. XXI.]

Si vn rectangle rationel a l'un des costez rationel, il aura aussi l'autre costé rationel : & iceux seront entr'eux commens. en longitude.

Soit le rectangle rationel DB ayant le coste CD rationel : ie dis que BC sera aussi rationel commens. en longitude à CD .

Car sur DC , soit fait le quarré AD , lequel sera rationel par la 8. d. 10. Et comme le rectangle au quarré, ainsi CB à CA par la 1. p. 6. Mais le quarré & le rectangle sont rationaux, & partant commens. Donc par la 10. p. 10. CB & CA ou CD son egale, seront rationeles & commens. en longit.



S C H O L I E.

Soit le rectangle $DB\ 6$, & la ligne $CD\ \sqrt{3}$: BC sera donc $\sqrt{12}$. qui est commens. en longitude à $\sqrt{3}$. Car elle est double d'icelle. Soit d'iceuf $DB\ 12$, & la ligne droite $CD\ \sqrt{8}$, l'autre costé BC sera $\sqrt{18}$, qui est commens. en longitude à $CD\ \sqrt{8}$. Car si on diuise $\sqrt{18}$, par $\sqrt{8}$, prouiendra $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, c'est à dire $\sqrt{\frac{9}{4}}$ qui est $\frac{3}{2}$: & partant $\sqrt{18}$ est à $\sqrt{8}$. comme 3 à 2 , c'est à dire comme nombre à nombre ; & par consequent commens. en longitude.

L E M M E.

Trouuer deux lignes droictes rationeles commensurables en puissance seulement,

Soit trouué par la 11. p. 10. quelque ligne droite incommensurable en longueur seulement à une ligne droite rationelle proposée, & icelles seront les requises : car puis qu'elles sont commens. en puissance seulement par la construction, elles seront aussi rationelles par la 6. d. 10.

Que si à la ligne trouuee, on en trouue encore une autre, moindre ou plus grande que la proposée rationelle, il est manifeste par la 12. p. 10. que toutes les trois seront commens. entr'elles en puissance seulement, & partant rationelles.

THEOR. 19. PROP. XXII.

Le rectangle cõpris de deux lignes droites rationelles commens. en puissance seulement, est irrationnel; & la ligne droite qui peut iceluy est irrationelle. Soit icelle appelee Mediale.

Soit le rectangle CF, (en la figure de la prop. precedente) compris de deux lignes rationelles DC & BC commens. en puissance seulement. Je dis que le rectangle est irrationnel; & la ligne qui peut iceluy, pareillement irrationelle, qui doit estre appelee mediale.

Car si sur la rationelle CD on décrit le quarré AD, il sera rationel, & sera au rectangle CF, comme AC ou CD son egale, est à BC, par la 1. p. 6. Mais AC & BC sont incommens. en longueur: donc par la 10. p. 10. le quarré AD, & le rectangle CF seront incommens. Or le quarré est rationel: donc par la 10. d. 10. le rectangle sera irrationnel; & par la 11. d. 10. la ligne qui peut iceluy sera aussi irrationelle; & soit icelle ligne appelee mediale, pource que le quarré d'icelle est egal au rectangle compris sous les rationelles DC, CB commens. entr'elles en puissance seulement, & par consequent moyenne prop. entre icelles rationelles par la 17. p. 6.

SCHOLIE.

Pour donc facilement definir la ligne mediale, nous dirons icelle estre une ligne irrationelle, moyenne proportionelle entre deux lignes rationelles, entr'elles commensurables en puissance seulement. Ou bié

celle qui peut un rectangle contenu sous deux lignes rationeles commensurables entr'elles en puissance seulement.

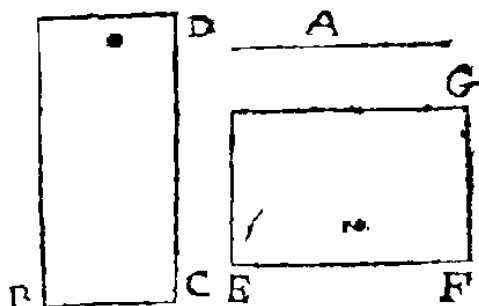
Et faut noter que le quarré d'icelle ligne mediale, ou le rectangle irrationel qu'elle peut, est aussi nomme medial, pour ce qu'il est moyē prop. entre les quarrez d'icelles lignes rationeles commens. entr'elles en puissance seulement, non qu'il faile pourtant entendre que tout rectangle medial soit toujours contenu sous deux lignes droictes irrationeles commens. en puissance seulement, tel qu'est le medial CF: car il en aduient quelquefois autrement, comme se verra cy-apres.

La ligne DC soit 2, & BC √ 8. Le rectangle BD sera 8, qui est irrationel; & sera dict medial, mais la ligne pouuāt iceluy est √ 32. laquelle on appelle mediale.

THEOR. 20. PROP. XXIII.

Le quarré d'une ligne mediale appliqué sur une ligne rationele, faict l'autre costé rationel commens. en puissance seulement à la ligne à laquelle se faict l'application.

Pour appliquer sur une ligne rationele un rectangle egal au quarré d'une ligne mediale autrement & plus facilement que par la 45. p. 1. Il faut en premier lieu poser quelconque ligne rationele, en second lieu la mediale, & chercher la tierce proportionnelle, laquelle sera l'autre costé du rectangle: car par la 17. p. 6. le quarré de la moyenne est egal au rectangle des extremes.



Soit la mediale A, le quarré de laquelle soit appliqué sur la ligne rationele BC, faisant le rectangle BD: Je dis que BC & CD, sont rationeles commens. en puissance seulement.

Car A étant mediale, elle peut un rectangle compris de deux lignes rationeles commens. en puissance seulement, autrement elle ne seroit dicté mediale: Soit donc iceluy rectangle EG, contenu sous les rationeles EF, FG commens. en puissance seulement. Et pource que A, par l'hypotese peut aussi le rectangle BD: Iceux rectangles BD, EG seront egaux,

& par la 14. p. 6. ils auront les costez reciproques, sçavoir que comme BC à EF, ainsi FG à CD, & par la 22. p. 6. les quarrés d'icelles lignes seront proport. Mais le quarré de BC ligne rationele, est commens. au quarré de EF aussi ligne rationele : donc par la 10. p. 10. le quarré de FG sera aussi commens. au quarré de CD ; & parant les lignes FG, CD seront commens. au moins en puissance, & le quarré de FG estant rationel, le quarré de CD sera aussi rationel ; & par consequent les lignes CB & CD seront rationeles. Or qu'icelles BC & CD soient commens. en puissance seulement. Il est euiden: par ce qui a esté demonsté à la 21. p. 10. Car si elles estoient commensurables en longitude, le rectangle BD seroit rationel, & nous l'auons posé medial, c'est à dire egal au quarré de la mediale A. Donc les lignes BC & CD sont incommens. en longitude.

S C H O L I E.

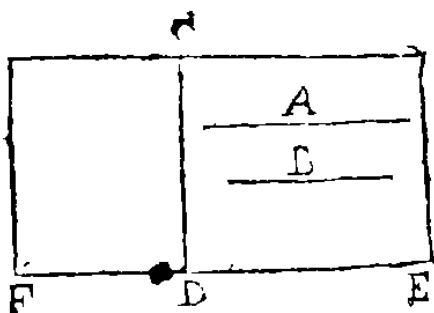
Soit le quarré de AB $\sqrt{40}$, mais BC soit 2. Si donc à BC on applique $\sqrt{40}$, l'autre costé CD sera $\sqrt{10}$. qui est incommens. en longitude à BC, mais commens. en puissance. Que si BC est $\sqrt{5}$: CD sera $\sqrt{8}$, aussi commens. en puissance seulement. Mais si la mediale A estoit $\sqrt{35}$, & BC $\sqrt{5}$: le quarré de A seroit $\sqrt{35}$: & CD $\sqrt{7}$. commens. en puissance seulement à BC.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Vne ligne droicte commensurable à vne ligne mediale, est aussi mediale.

Soit la mediale A, à laquelle soit commensurable la ligne droicte B. Je dis qu'icelle B est aussi mediale.

Car soit proposée la rationele CD, & sur icelle appliqué le rectangle CE egal au quarré de A: Item sur la mesme rationele CD soit appliquee le rectangle CF egal au quarré de B. D'autant que le quarré de la mediale A, est appliqué sur la rationele CD, l'autre costé DE est rationel commensurable en puissance



puissance seulement à CD, par la 13. p. 10. Mais A & B estans commensurables, leurs quarrés (ou leurs egaux rectangles CE, & CF) seront aussi commens. Mais par la 1. p. 6. comme C est à CF, ainsi la ligne droite ED est à la ligne droite DF: Donc par la 10. p. 10. ED, DF, seront commens. en longueur. Mais la ligne ED est rationelle, & incommens. en longueur à la ligne CD: donc aussi DF est rationelle & commens. en longueur à la même CD, par la 14. p. 10 & partant puis qu'icelles CD, DF sont rationelles, elles seront commensurables en puissance seulement, & par la 22. p. 10. le rectangle CF compris sous icelles CD, DF sera medial, & la ligne B qui peut iceluy rectangle, sera aussi mediale: ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que toute figure commensurable à une figure mediale, est aussi mediale: d'autant que les quarrés egaux à icelles figures seront aussi commensurables, & par consequent commens. les lignes qui les pourront, à tout le moins en puissance, & l'une d'icelle estant mediale, l'autre qui luy sera commens. sera aussi mediale par ceste proposition.

SCHOLIE.

Soit AVV 200. BVV 128, CD 4. Donc DE sera $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ & DF $\sqrt{8}$ commens. entr'elles: car elles sont comme 5 à 4. & DF est commens. en puissance seulement à CD: & par consequent le rectangle CF, qui est 128, est medial, & la ligne BV $\sqrt{128}$, qui peut iceluy, aussi mediale.

LEMME 1.

Or ce qui a esté dit des lignes rationelles au lemme de la 19. p. de ce livre, nous le dirons aussi des mediales: sçavoir est que les lignes droites commens. en long. à une mediale, est dite mediale, & com. à icelle, non seulement en long. mais aussi en puissance. Car universellement les lignes droites commens. en longit. le sont aussi en puissance. Et s'il y a quelque ligne com. en puissance & long. à une mediale, elle sera pareillement dite mediale, & à icelle commens. en long. & puissance. Que si de plus il y a quelque ligne commens. en puiff. à une mediale, mais incom. en long. elle sera aussi dite mediale com. à icelle en puissance seulement.

LEMME 2.

Trouuer deux lignes mediales commensurables en longueur: Item deux commensurables en puissance seulement.

Soient trouuees les deux lignes A & B commens. à la mediale C , c'est à sçauoir A en long & B en puissance seulement: & chacune d'icelles A & B seront aussi mediales par la 24 p. 10. Veu donc que A & C sont commens. en long. & B , C en puissance seulement, est manifeste ce qui estoit proposé.

Or il est à noter qu'encore que toute ligne droite commens. à une mediale, soit medial., neanmoins toute ligne mediale n'est pas commens. à quelque mediale que ce soit. Car deux mediales se peuuent donner incommens. en long. & puissance, comme apparoistra par la 36. p. de ce liure, où nous enseignerons aussi à trouuer deux telles lignes mediales.

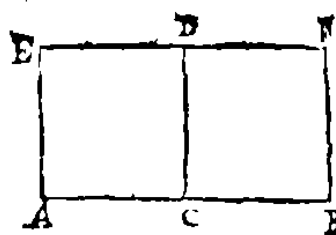


THEO. 22. PROP. XXV.

Le rectangle cōpris de deux lignes mediales commensurables en longueur, est aussi medial.

Soit le rectangle DB , compris des deux mediales commensurables en longueur DC & BC : Je dis qu'il est medial.

Car si sur la ligne DC on décrit le quarré DA , il sera medial estant décrit sur vne ligne mediale: & par la 1. p. 6. comme AC est à CB , ainsi AD à DB : mais CD , ou CA son egale est commensurable en longueur à BC : Partant par la 10. p. 10. le quarré medial AD , sera commensurable au rectangle DB : & par le corolaire de la 24. p. 10. iceluy rectangle sera medial: ce qu'il falloit demonstrez.



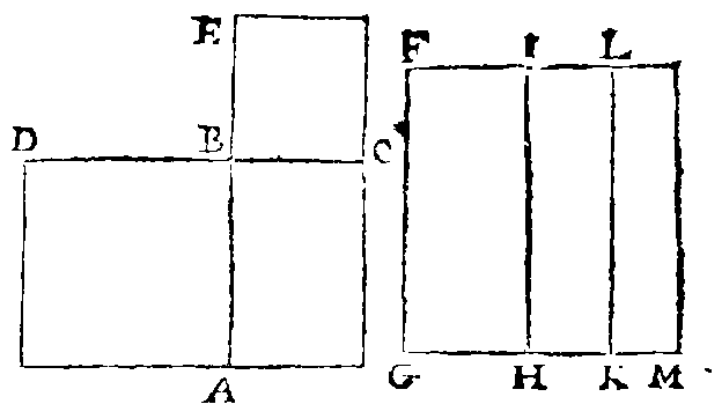
S C H O L I E.

Si les mediales DC, CB commens. en longueur sont $\sqrt{2}$ & $\sqrt{3}$; le rectangle d'icelles, savoir DB, sera $\sqrt{6}$. c'est à dire $\sqrt{8}$, qui est medial.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, est rationel ou medial.

Soient les deux mediales commensurables en puissance seulement AB & BC, comprenant le rectangle AC: Je dis qu'il est rectangle est rationel ou medial.



Qu'ainsi ne soit. Sur AB & BC soient faits les quarez AD & CE, lesquels comme estans faits sur lignes mediales seront mediaux. Maintenant soit proposee la ligne rationele FG, & sur icelle soient descrits les trois rectâgles FH, IK, LM, egaux aux trois figures AD, AC, CE, par la 45.p.1. Et d'autant que les quarez AD & CE sont mediaux, leurs egaux rectangles FH, LM seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationele FG, leurs autres costez GH & KM, seront rationaux commens. en puissance seulement à FG par la 23.p.10. Mais d'autant que les quarez AD & CE sont commens. (estans faits sur lignes commens. en puissance) leurs egaux rectangles FH & LM seront aussi commens. mais par la 1. p. 6. comme FH est à LM, ainsi la ligne droite GH est à la ligne droite KM: donc par la 10 p.10. GH & KM seront commens. en longueur; & par la 10.p. 10. le rectangle de GH & KM sera rationel. Et pource que AB, BD sont egales, & BC, BE aussi ega-

les, comme DB est à BC, ainsi AB à BE. Mais comme DB à BC, ainsi AD à AC par la 1.p.6. & comme AB est à BE, ainsi AC à CE : donc comme AD à AC, ainsi AC à CE. & partant AD, AC, CE sont proportionaux : & par conséquent leurs égaux FH, HL, LM seront aussi proportionaux. Mais par la 1.p.6. les lignes GH, HK, KM sont entr'elles, comme les rectangles FH, HL, LM : elles seront donc proportionnelles : & par la 17.p.6. le rectangle de GH, KM, sera égal au carré de HK. Or le rectangle d'icelles GH, KM a été démontré rationel. donc aussi le carré de HK sera rationel : & par conséquent la ligne HK sera aussi rationelle : & par la 6.d.10. elle sera pareillement commens. à la rationelle proposée FG, ou à son égale HI, soit en longueur & puissance, ou en puissance seulement : Si en longueur, le rectangle HL contenu sous icelles HI, HK, ou le rectangle AC qui luy est égal, sera rationel par la 20.p.10 : mais si HK est commens. en puissance seulement à HI, iceluy rectangle HL ou AC sera medial par la 22.p.10. ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Soient les mediales AB & BC, $\sqrt{8}$, & $\sqrt{2}$: (desquelles les puissances sont commensurables, car elles sont en raison double.) Le rectangle d'icelles AC sera $\sqrt{16}$, c'est à dire 4, qui est rationel. Mais si AB est $\sqrt{12}$, & BC $\sqrt{3}$, (desquelles les puissances sont comm. étant en raison double.) Le rectangle AC sera $\sqrt{36}$, c'est à dire 6, qui est medial.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

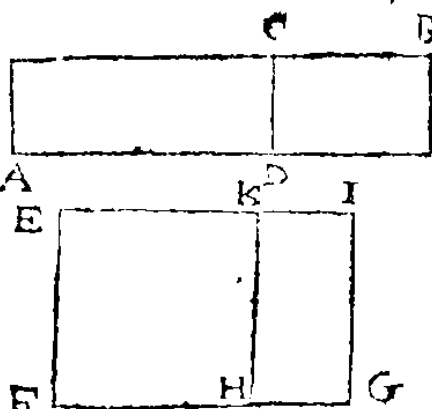
Vne figure mediale, n'est pas plus grande qu'une figure mediale, d'une figure rationelle.

Soit la figure mediale AB qui excède le medial AC du rectangle DB : ie dis que DB n'est pas figure rationelle.

Qu'il ne soit ainsi : Sur la proposée rationelle EF soient faits les rectangles EG & EH, égaux aux rectangles AB & AC par la 45.p.1. tellement que HI sera égal à DB : partant iceux rectangles EG, EH seront mediaux, lesquels estans appliquez sur la rationelle EF, les autres costez FG & FH se-

sont lignes rationelles commens. en puissance seulement à EF par la 23. p. 10.

Maintenant si on dit que HI est rationel ; estant appliqué sur la rationelle KH, l'autre costé GH sera rationel commens. en longueur à KH par la 21. p. 10. mais FH est incom. en long. à KH, ou EF: d'oc par la 14. p. 10. FH & GH



seront incom. en longueur: mais comme FH à GH, ainsi le rectangle de FH & GH au carré de GH par la 1. p. 6. (car ils sont de même hauteur) Partant par la 10. p. 10. le carré de GH est incommens. au rectangle de FH & GH. Il le sera aussi à deux fois le rectangle de FH & GH par la 14. p. 10. Item le même carré de GH est commens. au carré de FG qui est aussi rationel ; & par la 16. p. 10. les deux quarez de FH & GH, ensemble seront commens. au carré de GH: mais iceluy carré est incommensurable à deux fois le rectangle de FH & GH: donc par la 13. p. 10. les deux quarez de FH & GH seront incommens. à deux fois le rectangle de FH & GH. Mais, ceux deux quarez, & deux fois le rectangle de FH, & GH sont égaux au carré de FG par la 4. p. 2. donc par 17. p. 10. le carré de FG sera incommens. aux deux quarez de FH & GH ensemble: lesquels estans rationaux (car ils sont faits sur lignes rationelles) il faudra que le carré de FG soit irrationel, par la 10. d. 10. & par conséquent la ligne FG irrationelle; laquelle cy dessus nous avons montré estre rationelle. Ce qui est absurde: donc le rectangle HI, ou son egal DB n'estoit pas rationel.

S C H O L I E.

Soit le rectangle medial AB $\sqrt{50}$. & le rectangle AD $\sqrt{18}$: le rectangle restant DB sera $\sqrt{8}$. qui est medial. De rechef AB estant $\sqrt{32}$. & AD $\sqrt{10}$; le restant DB sera $\sqrt{32} - \sqrt{20}$. qui n'est pas rationel.

PROBL. 4. PROP. XXVII.

Trouver deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel.

Soient deux lignes rationnelles commens. en puissance seulement A & B, (trouvées par le lemme qui precede la 22. p. de ce liure) entre lesquelles (par la 13. p. 6) soit trouvée la moyenne proportionnelle C; puis (par la 12. p. 6.) aux trois A, B, C, soit trouvée la quatrième proportionnelle D: Je dis que C & D sont les deux lignes demandées.

Car puis que C est moyenne proport. entre A & B, le rectangle de A & C (lequel par la 22. p. 10. est medial) sera egal au quarré de C par la 17. p. 6. & par la 22. p. 10. C qui peut le rectangle medial, est mediale: Item puis que comme A a B, ainsi C a D, mais A est commens. en puissance seulement a B, aussi sera C a D. par la 10. p. 10. & par la 24. p. 10. D. sera ligne mediale (pour estre commens. en puissance a la mediale C) Voila donc les deux lignes commens. en puissance seulement qui sont trouvées. Reste a prouver que leur rectangle est rationel.

D'autant que comme A est a B, ainsi C a D, & en permutant comme A a C ainsi B a D; & comme A a C, ainsi C a B; pareillement comme C sera a B, ainsi B sera a D par la 11. p. 5. parquoy B est moyenne prop. entre C & D; & par la 17. p. 6. le quarré d'icelle B sera egal au rectangle de C & D. Mais iceluy quarré de B est rationel: donc le rectangle compris de C & D est aussi rationel. Nous avons donc trouvé C & D mediales commens. en puissance seulement qui comprennent vn rectangle rationel, ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit $A \sqrt{10}$, & $B \sqrt{12}$. donc la moyenne prop. C sera $\sqrt{240}$. & puis que come A a B, ainsi C a D; D sera $\sqrt{864}$. Or les puissances de $\sqrt{240}$. & $\sqrt{864}$ sont commens. car elles sont comme 5 a 3: & le rectangle contenu d'icelles est $\sqrt{20736}$, c'est à dire 12, egal au quarré de $\sqrt{12}$, qui est aussi 12. & partant iceluy rectangle de C & D commens. en puissance seulement est rationel.

PROB. 5. PROP. XXIX.

Trouver deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial,

Soient trois lignes rationeles commens. en puissance seulement A, B, C, trouuees comme il est enseigné au lemme qui precede la 12. p. 10. & par la 13. p. 6. entre A & B soit trouuee la moyenne proportionele D : puis par la 12. p. 6. soit fait comme B à C ainsi D à E: Je dis que D & E sont les deux mediales demandees.

Car en premier lieu, il est euident que D est mediale par la 12. p. 10. d'autant que par la 17. p. 6. elle peut le rectangle irrationel de A & B; mais comme B à C, ainsi D à E, & B est commens. en puissance seulement à C, aussi par la 10. p. 10. D sera commensurable en puissance seulement à E: Et par la 24. p. 10. D estant mediale, E sera aussi mediale commens. en puissance seulement à D.

D'auantage, ie dis que le rectangle des deux mediales D & E est aussi medial. Car puis que comme B à C, ainsi D à E, en changeant B sera à D comme C à E: mais B est à D comme D à A; partant comme D est à A, ainsi C est à E; & par la 16. p. 6. le rectangle des extremes D & E sera egal au rectangle des moyennes A & C. Mais le rectangle de A & C, rationeles commens. en puissance seulement, est medial par la 12. p. 10. Donc parce qui resulte de la 24. p. 10. le rectangle de D & E sera aussi medial.



S C H O L I E. I.

Soit A 20, B $\sqrt{200}$, & C $\sqrt{80}$. Donc la moyenne prop. D, sera $\sqrt{80000}$. Et puis que comme B à C, ainsi D à E; icelle E sera $\sqrt{12800}$. Or les puissances de D & E, sont commensurables, car elles sont comme 5 à 2: & le rectangle d'icelles est $\sqrt{1024000000}$, c'est à dire $\sqrt{32000}$, egal au rectangle de A & C; qui est $\sqrt{32000}$.

Or es choses suivantes nous aurons besoin de ce probleme cy.

Trouuer deux nombres plans semblables.

Soient pris quatre nombres proportionaux A A.6. C.12.
B, C, D, c'est à dire que comme A est à B, ainsi C B.4. D. 8.
soit à D. Mais A & B se multipliant entr'eux E.24. F.96.
fassent E: Item C & D se multipliant fassent F. Donc E & F seront
nombres plans semblables, puis qu'ils ont les costez proportionaux.

Or d'autant qu'il a esté demonstéré es 28. & 29. p. 9. que si on multiplie un nombre impair ou pair par un pair, est produit un nombre pair; mais un impair, si on multiplie un impair par un impair; il appert

par quelle maniere peuvent estre trouuez deux plans semblables, l'un & l'autre desquels soit pair ou impair; ou un seul pair, & l'autre impair: Car si les costez prins sont nombres pairs, les plans d'iceux seront aussi pairs; mais si les nombres sont impairs, les plans d'iceux seront aussi impairs. Que si les costez de l'un sont nombres impairs, mais de l'autre pairs, le plan de ceux là sera impair, mais de ceux cy pair: Semblablement les plans seront, si chacun à un costé nombre pair, mais l'autre impair, &c.

LEMME. I.

Trouuer deux nombres quarréz, tels que le composé d'iceux soit aussi quarré.

Soient trouuez par les choses cy-dessus $A..... E..... D..... B$
dictes deux plans semblables AB & C , un $C.....$
chacun desquels soit pair ou impair. Et d'autant que par les 24. & 26 p 9 si on oste d'un pair, un pair, ou bien un impair d'un impair, le reste est pair; estant osté BD égal AC de AB . Le reste AD sera pair; & iceluy AD estant diuisé en deux également en E ; le dis que le nombre faict de AB en BD (qui est un quarré par la 1. p. 9) avec le quarré du nombre ED , faict un quarré. Car puis que le nombre AD est diuisé en deux également en E , & à iceluy est adiousté DB ; le nombre qui est faict de AB en BD , ensemble avec le quarré du nombre DE , sera égal au quarré du nombre EB , par le 6. theo. de ceux que nous auons demonsté à la 14. p. 9. Parquoy les deux quarréz, sçauoir celui faict de AB en BD , & celui du nombre DE composez feront un quarré, sçauoir celui qui sera produict de BE . Ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

De ces choses est manifeste que quand AB & C sont semblables, estre trouuez en la même maniere les deux nombres quarréz des nombres BE , ED , desquels l'excez, sçauoir le nombre faict de AB en BD , est aussi quarré.

Que si les nombres AB & C ne sont prins semblables, l'un & l'autre toutesfois pair, ou impair, seront trouuez en la même maniere les deux quarréz des nombres BE , ED , desquels l'excez, sçauoir le nombre faict de AB en BD n'est quarré. Car s'il estoit quarré, par la 2. p. 9. les nombres AB , BD , c'est à dire AB & C , seroient plans semblables. Ce qui est absurde, puis qu'ils ont esté posez dissemblables.

SCHOLIE. 2.

Parquoy s'il faut trouuer deux nombres quarrez, desquels l'excez soit aussi nombre quarré, nous prendrons comme cy-dessus, deux plans semblables, desquels l'un & l'autre soit pair ou impair, sçavoir AB & C, & acheuerons comme il est dict au prochain lemme.

Que s'il faut trouuer deux quarrez, desquels l'excez ne soit quarré, il faudra prendre deux nombres plans dissemblables, & paracheuer comme dessus. Ce qu'on obtiendra plus facilement, diuisant un nombre quarré en deux nombres, l'un desquels soit quarré, & l'autre non. Comme 16 en 4 & 12; ou 36 en 16 & 20; & ainsi des autres.

LEMM E. 2.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le composé d'iceux ne soit quarré.

Soient deux nombres plans semblables AB, & C pairs, ou impairs, & soit
 A..H..I.E.F.G..D.....B
 C.....
 fait mesme construction qu'au lemme
 preced. tellement que le quarré fait de la multiplication des nombres
 semblables AB,DB entr'eux, ensemble avec le quarré de DE, soit egal
 au quarré de BE: en apres de DE soit ostee l'unité EF. Donc le quarré
 de DF sera moindre que le quarré de DE, à cause de l'inegalité
 des costez. Je dis que le nombre composé des nombres quarrez, desquels
 l'un est fait de AB en BD, & l'autre de DF en soy, n'est pas
 quarré. Car si ce composé estoit nombre quarré, il sera plus grand, ou
 egal, ou moindre que le quarré de BE: Soit premierement plus grand;
 & partant le costé d'iceluy sera plus grand que le costé BF; Donc le
 costé d'iceluy sera, ou egal, ou plus grand que le nombre BE: (car il ne
 sera moindre, pource qu'entre BE, BF, nombres differens de l'unité:
 ne tombe aucun milieu, & le su/dit costé seroit milieu entre iceux,
 s'il estoit posé plus grand que BF, mais moindre que BE) Si on dict
 qu'il est egal, tellement qu'au quarré de BE, soit egal le nōbre quar-
 re composé du quarré de AB en BD, & du quarré de DF, puis qu'au
 mesme quarré de BE, il a esté demonsté au lemme precedent, estre
 egal le nombre fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DE;
 celuy fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF, sera egal à
 celuy là fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DE. Ostant
 donc le commun fait de AB en BD, le reste quarré de DF, sera egal

au reste quarré de DE ; & partant le costé DF aussi egal au costé DE , la partie au tout: ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarréz, desquels l'un est fait de AB en BD , & l'autre de DE en soy, n'est pas egal au nombre BE . Mais il n'est pas plus grand. Car si faire se peut, le costé d'iceluy soit egal au nombre BI , qui est plus grand que BE . Donc puis que le quarré de BI plus grand costé, est plus grand que le quarré de BE moindre costé; pareillement le composé des quarréz, desquels l'un est fait de AB en BD , & l'autre de DF en soy, (puis que ce composé est posé egal au quarré de BI) sera plus grand que le quarré de BE . Mais au precedent lemme le quarré de BE a esté demonstre egal au nombre fait de AB en BD , ensemble au quarré de DE : ostant donc le commun nombre fait de AB en BD , restera le quarré de DE , plus grand que le quarré de DE ; & partant le costé DF plus grand que le costé DE , la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarréz, desquels l'un est fait de AB en BD , & l'autre de DF en soy, n'est pas plus grand que le costé BE : mais il a esté demonstre qu'il n'est pas aussi egal, ny moindre. Donc iceluy quarré composé n'est pas plus grand que le quarré de BF .

Soit maintenant si faire se peut, le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF , egal au quarré de BF ; & soit posé AH double de l'unité EF . Donc puis que le tout AD est double du tout ED , (car AD a esté divisé en deux également en E) & l'osté AH double de l'osté EF , aussi le reste HD sera double du reste FD par la 7. p. 7. & partant HD est divisé en deux également en F : Parquoy par le 6. theo. de ceux que nous auons demonstrez sur la 14. p. 9. le nombre fait de HB en BD , ensemble avec le quarré de DF , sera egal au quarré de BF : Mais au mesme quarré de BF , est posé egal le nombre fait de AB en BD ensemble avec le quarré de DF . Donc le nombre fait de HB en BD , ensemble avec le quarré de DF est egal à celuy fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF . Ostant donc le commun quarré de DF , restera le nombre fait de HB en BD , egal à celuy fait de AB en BD . Parquoy puis que HB, AB multiplians le mesme BD , produisent nombre egaux, & par la 18. p. 7. les multiplians ont mesme raison que les produis; HB sera egal à AB , la partie au tout. Ce qui est absurde. Dicit le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF , n'est pas egal au quarré de BF .

Soit finalement, si faire se peut, le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF , moindre que le quarré de BF ; & partant le costé d'iceluy, moindre que le costé BF , lequel soit BG , tellement que le nombre fait de AB en BD , ensemble avec le quarré de DF , soit egal au quarré de BG : Soit pris AI double d'iceluy EG . Donc puis que le tout AD est double du tout FD , & l'osté AI double de l'osté EG ; par la 7. p. 7. le reste ID sera aussi double du reste GD ; &

partant ID est diuisé en deux également en G. Parquoy par le 6. theor. demonstre sur la 14. p. 9. le nombre fait de IB en BD. ensemble avec le quarré de DG est egal au quarré de BG. Mais au mesme quarré de BG a esté posé egal le nombre fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF: Donc le nōbre fait de IB en BD, ensemble avec le quarré de DG est egal a celui fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF. Ostant donc les quarréz de DG & DF, desquels celui de DG est moindre, restera le nombre fait de IB en BD, plus grand que celui fait de AB en BD, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF, n'est pas moindre que le quarré de BF: mais il a esté demonsté qu'il n'est pas aussi plus grand, ny egal. Donc le nombre produit de AB en BD, ensemble avec le quarré de DF, n'est pas quarré. Ce qui estoit proposé à demonstter.

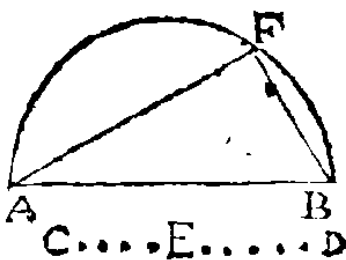
S C H O L I E. 3.

Par cecy nous trouuerons facilement deux nombres, tels que le composé d'iceux ne soit à l'un ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré. Car si par le Lemme precedent on trouue deux quarréz, tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ce composé non quarré ne sera à l'un ny à l'autre d'iceux, comme nombre quarré à nombre quarré. Nous obtiendrons le mesme, diuisant quelque nombre quarré en deux non quarréz: Car ainsi le quarré total ne sera à l'un ny à l'autre d'iceux nombres esquels il est diuise, en raison de nombre quarré à nombre quarré,

P R O B. 6 P R O P. XXX.

Trouuer deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soit proposée la rationele AB, & soient trouuees (comme il a esté enseigné au 2. scholie de la preced. prop.) les deux nombres quarréz CD, CE, l'excez desquels DE ne soit quarré: puis par le corol. de la 6. p. 10. soit trouuee AF, au quarré de laquelle soit le quarré



de AB, comme le nombre CD est au nombre DE; & apres auoir descrit vn demy cercle sur AB, soit accommodee en iceluy AF: & ioinct BF. Je dis que AB & AF sont les deux lignes requises.

Car d'autant que le quarré de AB est au quarré de AF comme nombre à nombre, ils seront commens. par la 6. p. 10. & partant aussi leurs costez AB & AF aumoins en puissance, mais AB est rationele, & par consequent aussi rationele AF qui luy est commens. mais les quarez de AB & AF n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. p. 10. les lignes AB & AF seront incommens. en longueur: elles seront donc rationeles commens. en puissance seulement.

Maintenant veu que l'angle F au demy cercle est droit par la 31. p. 3. le quarré de AB sera egal aux deux quarez de AF & FB, c'est a dire que la ligne AB peut plus que AF, du quarré de FB. Et d'autant que comme CD a DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AF, par conuersion de raison, comme le nombre quarré CD sera au nombre quarré CE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de FB. (car ainsi que CD excède DE du quarré de CE, ainsi aussi le quarré de AB surpasse le quarré de AF du quarré de FB) parquoy les lignes droictes AB, FB sont commens. en longueur par la 9. p. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commens. en puissance seulement, & la plus grande AB peut plus que AF du quarré de la ligne FB, qui luy est commens. en longueur: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 6: AF sera $\sqrt{20}$: & partant BF sera 4. commens. en longueur à AB.

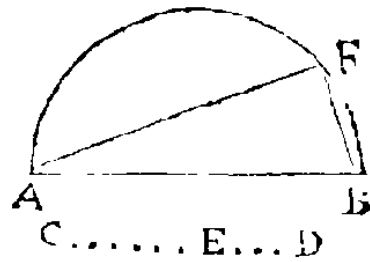
La construction & demonstration tant de ceste prop. que de plusieurs autres de ce liure, sont tellement deffectueuses en l'edition de Dounat, que ceux qui la verront pourront eux-mesmes (ayans bien entendu ce que nous auons dict iusques icy) recognoistre facilement les deffauts d'icelle: c'est pourquoy nous ne nous arresterons à les remarquer.

PROBL. 7. PROP. XXXI.

Trouuer deux lignes rationeles commens.

furables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soit exposée la rationelle AB & soient trouvez (comme il a esté enseigné au lemme 2. de la prop. 29. de ce livre) deux nombres quarréz tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ou plustost soit divisé quelque nombre quarré CD , en deux nombres non quarréz CE , ED , afin que le tout CD ne soit à l'un ou à l'autre d'iceux CE , ED , comme nombre quarré à nombre quarré: puis sur AB soit décrit le demy cercle AFB ; & par le corol. de la 6. p. 10. soit trouvez la ligne droicte AF , au quarré de laquelle soit le quarré de AB , comme le nombre CE au nombre CD : & finalement soit menée BF . Je dis que AB & AF sont les deux lignes demandées.



Car on prouvera tout ainsi qu'à la précédente, que AB & AF sont rationelles commens. en puissance seulement (d'autant que leurs quarréz ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré) & que AB peut plus que AF du quarré de BF . Et d'autant que comme CE est à CD , ainsi le quarré de AB est au quarré de AF : par conuersion de raison comme CE sera à DE , ainsi le quarré de AB sera au quarré de BF . Mais CE n'est pas à DE comme nombre quarré à nombre quarré: donc le quarré de AB ne sera pas aussi au quarré de BF comme nombre quarré à nombre quarré. Parquoy les lignes droictes AB , BF ne seront incommens. en longitude, par la 9. p. 10. Nous auons donc trouué deux rationelles AB , AF commens. en puissance seulement, tellement que la plus grande AB peut plus que AF , du quarré de la ligne BF , qui luy est incommens. en longitude: ce qu'il falloit faire.

S C H O R I E.

Si la rationelle AB est 3: AF sera $\sqrt{6}$, & BF 3.

P R O B. 8. P R O P. XXXII.

Trouuer deux mediales commensurables en

puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel; & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur.

Soient trouuees par la 30 p. 10 deux lignes rationeles A & B commens. en puissance seulement, & que la plus grande A puisse plus que la plus petite B du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longueur: Item, par la 13. p. 6. soit trouuee C moyenne proportionele entre A & B; & finalement par la 12. p. 6. aux trois lignes A, B, C, soit trouuee la 4. proportionele D. Je dis que C & D sont les deux lignes demandees.



Car puis que A & B sont rationeles commensurables en puissance seulement, par la 22 p. 10. le rectangle d'icelles A & B sera irrationel, & la ligne C pouuant iceluy (car elle est moyenne prop. entre A & B) sera mediale. Et d'autant que cōme A a B, ainsi C a D; & A est commens. en puissance seulement a B, aussi C sera commens. en puissance seulement a D, par la 10. p. 10. Mais puis que C est mediale, par la 24. p. 10. D sera aussi mediale. Et d'autant que comme A est a B, ainsi C a D: & en changeāt comme A a C, ainsi B a D: mais comme A est a C, ainsi C a B: pareillement comme C sera a B, ainsi B sera a D: & partant le rectangle de C & D sera egal au quarré de B, par la 17 p. 6. & puis que le quarré de la rationele B est rationel, le rectangle compris sous C & D sera aussi rationel. Et veu que comme A est a B, ainsi C a D; & A peut plus que B du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur, aussi par la 15. p. 10. C pourra plus que D du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longueur. Nous auons donc trouué C & D, deux mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, C pouuant plus que D du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur: ce qu'il falloit faire.

Qui si on vouloit que C peut plus que D du quarré d'une ligne qui luy fust incommensurable en longueur, il ne faudroit que trouuer A & B, telles qu'elles sont requises par la precedente prop au lieu que cy dessus, elles ont este trouuees par la 30. p. 10. & acheuer le tout comme dessus.

S C H O L I E.

Soit $AB, BV\ 28$: le rectangle d'icelles sera $V\ 1792$, & la ligne $CV\ 1792$, qui est med. ale. Et puis que comme AB , est à $BV\ 28$, ainsi $CV\ 1792$ est à D , icell. sera $V\ 343$: donc C & D sont deux mediales commens. en puissance seulement, & lesquelles contiennent un rationnel 28 . & la plus grande C peut plus que la moindre D , d'une ligne qui luy est commens. en longit. Car si du quarré d'.celle C , on oste le quarré de D , restera $V\ 567$, & seront commens. en long. les deux mediales $V\ 1792$ & $V\ 567$. Car elles sont comme 4 à 3 . Derechef soit $AB, BV\ 20$: le rectangle d'icelles sera $V\ 1280$, & la ligne $CV\ 1280$ & partant D sera $V\ 125$: donc C & D sont mediales comprenant un rationnel 20 , & C peut plus que D du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude.

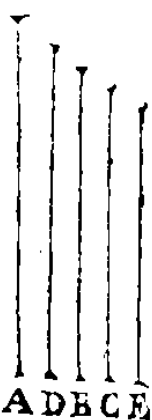
PROB. 9. PROP. XXXIII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grâde puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trouuees trois lignes rationeles commens. en puissance seulement A, B, C , (en la figure qui est de l'autre part) & que B puisse plus que du quarré d'une ligne qui luy soit cōmens. en longitude : (ce qu'on obtiendra trouuant premiere-ment par la 30. p. 10. les deux rationeles B & C commensurables en puissance seulement, & que B puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude & puis à C & B soit trouuee A commens. en puissance seulement par ce qui est enseigné au lemme qui precede la 22. p. 10.) Item par la 13. p. 6. soit trouuee D moyenne prop. entre A & B : puis par la 12. p. 6. soit fait comme B à D , ainsi C à E . Je dis que D & E sont les deux lignes demandees.

Car puisque D est moyenne prop. entre A & B , par la 17. p. 6. elle peut le rectangle d'icelles A & B , qui est irrationnel, & par consequent D est mediale par la 22. p. 10. Mais d'autant que

comme B à D, ainsi C à E, en changeant comme B à C, ainsi D à E, & B, C étant commensurables en puissance seulement, & par la 24. 10. D est une mediale, E le sera aussi. Et d'autant que comme B à D, ainsi C à E, & D à A; comme D à A, ainsi C sera à E, & par la 16. p. 6. le rectangle des extremes D & E sera égal au rectangle de moyens. Mais par la 22. p. 10. le rectangle de A & C rationnelles commensurables en puissance seulement est medial: Donc par le coroll. de la 24. p. 10. le rectangle de D & E sera aussi medial. Finalement puis que comme B à C, ainsi D à E; & B peut plus que C du carré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur, par la 15. p. 10. D pourra aussi plus que E du carré d'une ligne qui luy sera commensurable en longueur. Nous avons donc trouvé deux mediales D & E commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit faire.



Que si on trouve A, B, C rationnelles commensurables en puissance seulement, tellement que B puisse plus que C du carré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur, & on achève de construire comme dessus; on démontrera semblablement que D & E sont mediales, commensurables en puissance seulement comprenant un rectangle medial, & que la plus grande D, peut plus que E du carré d'une ligne qui luy est incommensurable en long.

SCHOLIE.

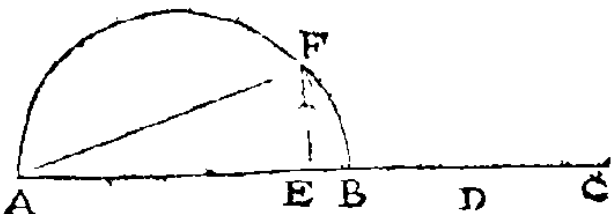
Soit AB. BV 48. & CV 28: le rectangle compris de A & B sera donc $\sqrt{3072}$. & la ligne droite DV $\sqrt{3072}$, qui est mediale, & étant à C, comme D à E, icelle sera $\sqrt{588}$. Donc D & E, sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un medial, & la plus grande D peut plus que la moindre E du carré d'une ligne, qui luy est commensurable en longueur. Car si du carré d'icelle D, on ôte le carré de E, le reste sera $\sqrt{972}$. qui est commensurable en longueur à icelle DV $\sqrt{3072}$. De rechef si A est 8, B $\sqrt{48}$, & C $\sqrt{20}$; D sera encore $\sqrt{3072}$, mais E sera $\sqrt{100}$. Donc D & E sont deux mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent un medial, & la plus grande D, peut plus que la moindre E, du carré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur.

PROB.

PROB. 10. PROP. xxxiv.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarrez rationel; mais le rectangle contenu d'icelles, medial.

Soient deux lignes rationnelles incommensurables en puissance seulement AB & BC, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quar



ré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur, trouuees cōme il a esté enseigné en la 31 p. 10. & apres auoir coupé en deux également CB au point D, soit appliqué un rectangle sur BA egal au carré de BD, defaillant d'une figure quarree par la 28, p. 6. & soit iceluy rectangle compris de AE & EB: & apres auoir fait le demy cercle sur la ligne BA, & mené la perpendiculaire EF, soient menées BF & FA: Je dis qu'icelles lignes sont les lignes demandées.

Car puis que AB & BC sont inégales, & que la plus grande AB peut plus que la plus petite BC du carré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur, & que le rectangle de AE, EB appliqué sur AB, & defaillant d'une figure quarree, est egal au quart du carré de BC (c'est à dire au carré de DB: car nous auons démontré au scholie de la 4. p. 2. que le carré de BC est quadruple du carré de BD.) les deux lignes AE & EB seront incommensurables en longueur par la 19. p. 10. Mais par le scholie de la 13. p. 6. EF est moyenne proportionnelle entre icelles AE, EB; & partant comme il a esté démontré à la 11. p. 10. elle sera incommensurable en puissance à EA. Mais cōme FE à EA, ainsi BF à FA par la 4. p. 6. (car iceux triangles sont equiangles par la 8. p. 6.) donc puis que FE, EA sont incommensurables en puissance, par la 10. p. 10. BF & FA seront aussi incommensurables en puissance. Item le carré de AB, est egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. lequel carré de BA est rationnel, estant la ligne AB rationnelle; partant le composé des quarrés de BF & FA, sera aussi rationnel. Et d'autant que par l'hy-

pothèse le rectangle de AE EB, est égal au carré de BD, & qu'il est aussi égal au carré de la moyenne proport. EF par la 17. p. 6. le carré de EF sera égal au carré de BD : partant EF égale à BD : & par la 16. p. 6. le rectangle de BF & FA sera égal au rectangle de BA & EF ou BD son égal, (car par la 8. & 4. p. 6. AB est à BF comme FA à EF.) Or par la 1. p. 6. le rectangle de AB & DC est double du rectangle de AB & BD, (car la base BC est double de la base BD.) Mais le rectangle de AB & BC est medial par la 22. p. 10. donc aussi sa moitié rectangle de AB & BD : & par conséquent medial son égal rectangle de BF & FA. Nous avons donc trouvé les deux lignes AF, FB, incommens. en puissance, qui font le composé de leurs quarrés rationel : mais le rectangle compris d'icelles, medial : ce qu'il falloit faire.

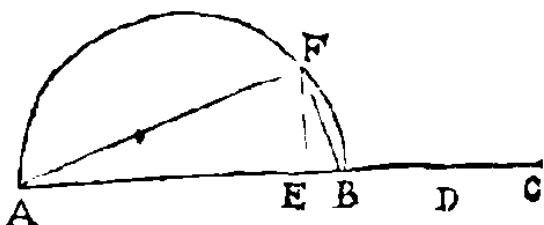
SCHOLIE.

Si AB est 6, & BC 12. BD ou DC sera $\sqrt{3}$: & par conséquent AE sera $3 + \sqrt{6}$, & EB $3 - \sqrt{6}$: & puis que le carré de AF est égal aux quarrés de AE, EF : ice^{te} AF sera $\sqrt{18 + \sqrt{216}}$: mais BF sera $\sqrt{18 - \sqrt{216}}$. Donc icelles AF, FB sont incommens. en puissance, & le composé de leurs quarrés, sçavoir est 36 est rationel, mais le rectangle compris d'icelles, sçavoir est $\sqrt{108}$, est medial.

PROB. II. PROP. XXXV.

Trouver deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarrés, medial : mais qu'elles comprennent vn rectangle rationel.

Soient deux mediales commens. en puissance seulement AB & BC, comprenant vn rectangle rationel, & que AB puisse plus que BC du carré



d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur trouvées comme il a esté enseigné en la 32. p. 10. & soit achevé

la construction comme en la precedente. Je dis que BF & FA sont les deux lignes demandees.

Carnous demonstrerons ainsi qu'en la precedente prop. qu'icelles BF & FA sont incommens. en puissance : & le quarré de BA est medial, estant descript sur vne ligne mediale, & egal aux deux de BF & FA par la 47. p. r. Partant le composé des deux quarrés de BF & FA est medial. Et d'autant que le rectangle de AB, BC (comme il a esté demonsté en la preced. prop.) est double du rectangle de AB, BD ; & qu'il est rationel par la construction, aussi iceluy rectangle de AB, BD sera rationel. Mais il a esté demonsté en la precedente qu'il est egal au rectangle de BF & FA : & par consequent iceluy est aussi rationel. Nous auons donc trouué deux lignes AF & BF incommens. en puissance, qui font le composé de leurs quarrés medial : mais le rectangle compris d'icelles rationel : ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Si AB est $\sqrt{432}$, & BC $\sqrt{48}$: BD ou EF sera $\sqrt{3}$, & AF $\sqrt{108 + 72}$, mais BF est $\sqrt{108 - 72}$: & partant icelles AF, BF sont incommens. en puissance, & le composé de leurs quarrés, sçavoir est 432, est medial : mais le rectangle compris d'icelles, sçavoir est 36, c'est à dire 6, est rationel.

P R O B. 12. P R O P. xxxvi.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarrés medial, & aussi le rectangle d'icelles, medial, & incommensurable au composé de leurs quarrés.

Soient deux mediales commens. en puissance seulement AB & BC, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en longueur, trouuees comme nous auons enseigné à la fin de la 33. P. 10. & apres auoir acheué la

construction comme en la 34. p. 10. Je dis que BF & FA sont les lignes demandees.

Car premierement elles sont incommensurables en puissance : comme en la demonstration de la 34. p. 10. & le carré de BA estant medial comme en la precedente, le composé des carrez de BF & FA sera aussi medial : Item le rectangle de AB & BC estant medial par hypothese, le rectangle de AB & BD (ou EF son egale) qui est sa moitié, sera aussi medial par ce qui resulte de la 24. p. 10. & par consequent medial le rectangle de BF & FA qui luy est egal, comme il a esté démontré en la 34. prop. 10. Et d'autant que par l'hypothese AB est incommensurable en longueur à BC, mais à icelle BC est commensurable en longueur sa moitié BD : Donc par la 13. p. 10. BD sera aussi incommensurable en longueur à AB, & par la 1. p. 6. le carré de AB sera au rectangle de AB & BD (d'autant qu'ils sont tous deux de la hauteur de AB) comme AB à BD, c'est à dire incommensurable, par la 10. q. 10. & par consequent le rectangle de BF & FA egal au rectangle de AB & BD, sera incommensurable au carré de BA, c'est à dire au composé des carrez de BF & FA. Nous auons donc trouué deux lignes droictes AF, BF incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs carrez, medial, & le rectangle contenu sous icelles medial, & incommensurable au composé d'iceux carrez : ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Si AB est $\sqrt{192}$, & BC $\sqrt{48}$; BD ou son egale EF sera $\sqrt{12}$, & AF $\sqrt{48 + 24}$ & BF $\sqrt{48 - 24}$ Parquoy icelles AF, BF sont incommens. en puissance, & le composé de leurs carrez, sçavoir est 192, est medial incommens. à $\sqrt{24}$, rectangle medial compris d'icelles AF, BF.

Or de ce probleme est manifeste le si uant.

Trouuer deux mediales incommensurables en longueur & puissance.

Car puis que tant le composé des carrez des lignes AF, BF, que le rectangle compris d'icelles, est medial, & qu'iceluy rectangle est incommensurable à ce composé, & si les lignes pouuans iceluy composé, & rectangle, seront pareillement mediales incommens. tant en longueur qu'en puissance. Car si elles estoient commens. en puissance, aussi les carrez d'icelles, c'est à dire le composé des carrez des lignes AF, BF, & le rectangle sous icelles AF, BF, seroient commensurables. Ce

qui n'est pas. Parquoy si on prend AB pouuant le compose des lignes AF, FB ; & une autre ligne pouuant le rectangle d'icelles AF, FB , c'est à dire une moyenne proportionnelle entre AF, FB , seront trouuees deux mediales incommens. en longueur & puissance.

I C Y C O M M E N C E N T L E S
sixaines des lignes irrationnelles par la
composition,

THEOR. 25. PROP. xxxvii. Six. 1.

Si deux lignes rationnelles commensurables en puissance seulement sont assemblees, la toute sera irrationnelle: soit icelle appelée Binome.

Soient assemblees deux lignes rationnelles commens. en puissance seulement AB & BC trouuees par le lemme qui precede la 22. p. 10. Je dis que la toute AC est irrationnelle.

Car par la 1. p. 6. le rectangle de AB & BC est au carré de BC , comme AB à BC : mais AB, BC sont incommens. en longueur par l'hypothese. Donc par la 10. p. 10. le rectangle de AB, BC sera incommens. au carré de BC : & partant par la 14. p. 10. deux fois le rectangle de AB & BC sera incommens. au carré de BC . Mais d'autant que les lignes AB, BC sont rationnelles commens. en puissance seulement, leurs quarrés seront commensurables entr'eux, & le composé de tous deux sera commensurable au seul de BC par la 16. p. 10. & partant par la 14. p. 10. les deux quarrés de AB & BC seront incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC , & par la 17. p. 10. le composé de deux fois le rectangle & des deux quarrés, c'est à dire le carré de la toute AC (car par la 4. p. 2. ce carré est egal aux quarrés de AB, BC , & deux fois le rectangle d'icelles AB, BC) est incommens. aux deux quarrés de AB & BC , lesquels estans rationaux, & le composé d'iceux rationel, le carré de AC qui luy est incommensurable sera irrationel, par la 10. d. 10. & par consequent la ligne AC irrationnelle: icelle sera donc appelée binome.

S C H O L I E.

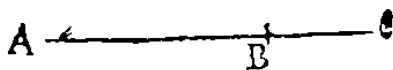
Soit $AB\ 2$, & $BC\ \sqrt{3}$: la toute AC sera $2+\sqrt{3}$, & son quarré est $7+\sqrt{48}$.

Or il appert de ce que dessus, que de deux lignes rationeles com. en puissance seulement, sont procrees deux lignes irrationeles. Car la ligne moyenne prop. entre icelles rationeles est irrationele par la 21. de ce liure, laquelle est appelée mediale. Et la compo,ee d'icelles, par la 37. p. 10. est une irrationele, qui est dite binome.

THEOR. 26. PROP. XXXVIII.

Si deux lignes mediales commensurables en puissance seulement; comprenant vn rectángle rationel sont assemblees, la toute sera irrationelle: soit icelle appelée bimediale premiere.

Soient assemblees deux mediales AB & BC commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, trouuees par la 28. p. 10. Je dis que la toute AC est irrationele.



Car par la mesme demonstration de la precedente prop. le quarré de AC se trouuera incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC : lequel estant rationel, (puis qu'un seul rectangle de AB , BC est rationel par hypothese) le quarré de AC qui luy est incommensurable par la 14. p. 10. sera irrationel par la 10. d. 10. & par la 11. d. 10. la ligne AC sera aussi irrationele, laquelle sera appelée bimediale premiere.

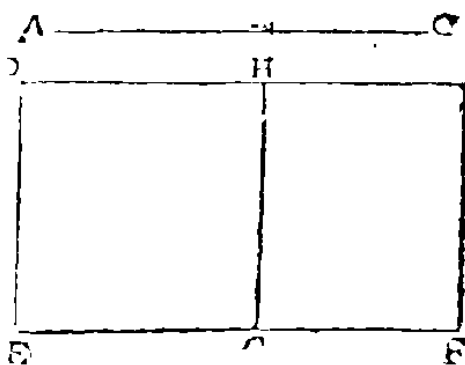
S C H O L I E.

Soit $AB\ \sqrt{5}$, & $BC\ \sqrt{2}$: La toute AC sera $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ irrationele nommée bimediale premiere,

THEOR. 27. PROP. XXXIX.

Si deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial sont assemblees, la toute sera irrationnelle: soit icelle appelee bimediale seconde.

Soient assemblees les deux mediales AB & BC commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, trouuees par la 29 p 10. Je dis que la toute AC est irrationnelle.



Car soit vne ligne rationelle proposee DE, sur laquelle soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AC, & le rectangle DG egal au composé des quarrés de AB & BC par la 45. p. 1. Et d'autant que par la 4. p. 2. le quarré de AC, c'est à dire le rectangle DF, est egal aux deux quarrés de AB, BC ensemble avec deux fois le rectangle de AB, BC; le rectangle HF sera egal à deux fois le rectangle de AB, BC: & puis que par l'hypothese le rectangle de AB, BC, est medial, par le coroll. de la 24. p. 10. le double rectangle de AB, BC, qui luy est commun. c'est à dire le rectangle HF, sera aussi medial. De rechef puis que les quarrés des mediales AB, BC sont commens. le composé d'iceux, c'est à sçauoir le rectangle DG sera aussi commun. à vn chacun d'iceux par la 16. p. 10. Mais chacun d'iceux quarrés des mediales AB, BC, est medial: Donc par le coroll. de la 24. p. 10. le rectangle DG sera aussi medial: Ainsi les deux rectangles DG & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationelle DE, (car GH est egale à la rationelle DE,) leurs autres costez EG & FG seront rationaux commensurables en puissance seulement à DH, par la 23. p. 10. Maintenant le rectangle de AB & BC est au quarré de BC comme AB est à BC, par la 1. p. 6. c'est à dire incommensurable par la 10. p. 10. & partant le double du rectangle de AB & BC sera aussi incommens. au quarré de BC: & les deux quarrés de AB & BC estans commensurables entr'eux, les

deux ensemble seront commensurables au seul de BC, par la 16.p.10. & par la 14.p. 10. les deux quarrés de AB & BC seront incommensurables a deux fois le rectangle de AB & BC : & par consequent aussi leurs egaux rectangles DG & HF : & par la 1.p.6.& 19.p.10. EG & FG lignes rationeles seront incommensurables en longueur : elles seront donc commensurable en puissance seulement ; (car autrement elles ne seroient rationeles si elles estoient incommensurables,) & par la 37.p. 10. la toute composee EF sera irrationele : & le rectangle DF sera irrationel : car s'il estoit rationel la ligne DE estant rationele , il faudroit par la 21.p. 10. que l'autre costé EF fut aussi rationel, ce qui n'est pas. DF est donc irrationel : & partant aussi irrationel son egal quarré de AC ; & par consequent la ligne AC irrationel, qui sera appelee bimediale seconde.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par cecy que le rect. ngle compris d'une ligne rationele & d'une irrationele est aussi irrationel. Car il a esté démontré que le rectangle DE compris de la rationele DE, & irrationele EF, ne peut estre rationel.

SCHOLIE.

Sait $AB\sqrt{18}$, & $BC\sqrt{8}$: La toute AC sera $\sqrt{18} + \sqrt{8}$. qui est irrationel appellee bimediale seconde.

THEOR. 28. PROP. XL.

Si deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, mais le compose de leurs quarrés est rationel sont assemblees , la toute sera irrationele : & soit icelle appelee ligne majeure.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC incommen-

furables en puissance, comprenant vn rectangle medial & le composé de leurs quarez rationel trouuees par la 34.p. 10. Je dis que la toute est irrationele.

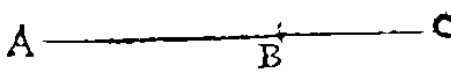
Car par hypothese le rectangle de AB & BC estant medial, deux fois le mesme rectangle sera aussi medial par le corollaire de le 24.p. 10. & partant irrationel. Mais par hypothese le composé des quarez de AB & BC est rationel: partant incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC. Et par la 17.p. 10. le composé des deux rectangles, & des deux quarez (qui est le quarré de AC par la 4.p. 2.) sera incommensurable au composé des deux quarez de AB & BC qui est rationel: partant le quarré de AC sera irrationel & son costé AC aussi irrationel: lequel sera appellé ligne majeure.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{18 + \sqrt{216}}$, & BC $\sqrt{18 - \sqrt{216}}$: La toute AC sera donc $\sqrt{18 + \sqrt{216}} + \sqrt{18 - \sqrt{216}}$, qui est irrationele nommee ligne majeure.

THEOR. 29. PROP. XLI.

Si deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarez medial, sont assemblees; la toute sera irrationele: soit icelle appelee ligne pouuant vn rationel & vn medial,

Soient assemblees les deux lignes AB & BC, de telle nature  que demande la propos. & qu'en seigne à trouuer la 35.p. 10. Je dis que la toute AC est irrationele.

Car puis que le composé des quarez de AB & BC est medial, & leur rectangle rationel, deux fois iceluy rectangle sera aussi rationel, & incommensurable au composé des quarez de AB & BC, lequel estant medial, par la 16.p. 10. le com-

pose des deux quarez, & des deux rectangles, sçavoir le quare de AC par la 4. p. 2. sera incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel est rationel : Ainsi par la 10. d. 10. le quare de AC sera irrationel : & par consequent la ligne AC aussi irrationele : laquelle sera appelée ligne pouuât vn rationel & vn medial.

S C H O L I E.

Soit $AB \sqrt{108 + \sqrt{72}}$, & $BC \sqrt{108 - \sqrt{72}}$ La toute AC sera donc $\sqrt{108 + \sqrt{72}} + \sqrt{108 - \sqrt{72}}$

THEOR. 30. PROP. XLII.

Si deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarez aussi medial, sont assemblees, la toute sera irrationelle : Soit icelle appelee ligne pouuant deux mediaux.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC (comme en la figure de la prop. 39.) de telle nature que demande la prop. & qu'enseigne à trouuer la 36. p. 10. Je dis que la toute AC est irrationele.

.Soit exposée la rationele DE, sur laquelle soit faite mesme construction qu'en la 39. p. 10. sçavoir que le rectangle DH soit egal au quarré de AC; DG aux deux quarez de AB & BC, lequel sera medial, comme le composé d'iceux quarez, & incommens. au rectangle HF, egal à deux fois le rectangle de AB & BC, aussi medial, ainsi qu'il a esté démontré en la 39. p. 10. & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. EG & GF seront aussi incommens. en longitude. Mais les deux rectangles DG & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationele DE, feront les deux autres costez EG & FG rationaux par la 23. p. 10. Ainsi EG & FG seront rationeles commens. en puissance seulement & par la 17. p. 10. la toute EF sera irrationele. Mais DE estant rationele, le rectangle DF sera irrationel par le coroll. de la

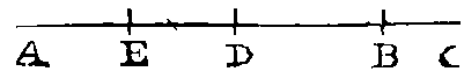
39, p. 10. Partant la ligne qui peut iceluy rectangle, ſçavoir AC ſera irrationnelle: laquelle on appellera ligne pouuant deux mediaux.

SCHOLIE,

Soit $AB \sqrt{(\sqrt{48} + \sqrt{24})}$ & $BC \sqrt{(\sqrt{48} - \sqrt{24})}$: Donc la longueur AC ſera $\sqrt{(\sqrt{48} + \sqrt{24})} + \sqrt{(\sqrt{48} - \sqrt{24})}$.

LEMME. I.

Si vne ligne droite eſt couppee en deux inegalement en vn poinct, & derechef en deux inegalement en vn autre poinct, & les parties de l'vne des diuiſions ſont inegales aux parties de l'autre diuiſion, chacune à la ſienne: les quarrez des deux lignes de la plus inegale diuiſion ſont plus grands, que les quarrez des lignes de la moins inegale.

Soit la ligne droite AC diuiſee  inegalement en B: & encores inegalement en E, & les premieres parties AB, BC ſoient plus inegales que les poſterieures CE, AE: (c'eſt à dire que AE ſoit plus grande que BC.) Je diſ que les quarrez de AB & BC, ſont plus grands que ceux de AE & EC.

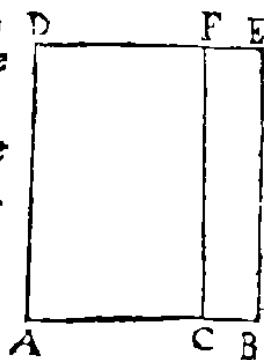
Car ſi AC eſt couppee en deux egalelement en D; d'autant que AB, & BC ſont plus inegales que CE, AE, & que AE eſt plus grande que BC, il appert que ED ſera plus petite que BD: or par la 5. p. 2. le rectangle de AB & BC, avec le quarré de DB, eſt egal au quarré de DC: Item le rectangle de AE & EC, avec le quarré de DE, eſt auſſi egal au quarré de DC: partant le rectangle de AE & EC avec le quarré DE, eſt egal au rectangle de AB & BC, avec le quarré de BD. Et en oſtant les quarrez inegaux des lignes inegales DE, BD, le rectangle de AE & EC demeurera plus grand que le rectangle de AB & BC: & partant ſon double ſera auſſi plus grand que le double du rectangle de AB & BC. Maintenant les deux quarrez de AB & BC, & deux fois le rectangle de AB & BC, ſont egaux au quarré de AC par la 4. p. 2. auquel ſont auſſi egaux les deux quarrez de AE & EC, & deux fois le rectangle de AE & EC: & par conſequent les compoſez des quarrez, & rectangles ſont egaux entr'eux: mais les deux rectangles de AE & EC, ont eſté demonſtrez plus grands que les deux de AB & BC: partant les deux quarrez de AB & BC ſont plus grands que les deux quarrez de AE & EC: Ce qui eſtoit propoſé.

LEMMME 2.

Vne figure rationele excède vne figure rationele, d'une figure rationele.

Soient les deux figures rationeles AE & AF , étant AE plus grande que AF de CE : Je dis que CE est figure rationele.

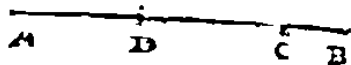
Car AE & AF estans rationeles, elles seront aussi commens. & par la 16. p. 10. AF & CF seront commens. entr'elles, & par consequent rationeles.



THEOR. 31. PROP. XLIII.

La ligne binome ne peut estre diuisee en ses noms, qu'en vn poinct seulement,

Soit le binome AB diuise en ses noms au poinct C : tellement que AC, CB , soient rationeles commens. en puissance seulement, comme veut la 37. p. 10. Je dis qu'on ne peut diuiser AB en ses noms en vn autre poinct, sçauoir est que les lignes soient rationeles commens. en puissance seulement.



Car s'il se peut faire, soit diuisee derechef AB en ses noms au poinct D . Or il appert que AB n'est coupee en deux également és poincts C & D . Car AC, CB , ou AD, DB seroient commens. en longit contre l'hypothese: il faut donc que AD & DB soient plus grandes ou plus petites que AC & CB , chacune à la sienne: car si elles estoient egales, elles seroient diuisees sur vn mesme poinct. Si AD & DB sont parties plus grandes que AC & CB , par le lemme qui suit la 42. p. 10. le composé des quarez de AC & CB sera plus grand que le composé des quarez de AD & DB : Et d'autant qu'iceux composez sont rationaux (car ce sont quarez bastis sur lignes rationeles) leurs excez sera aussi rationel par le lemme preced.

Or est il que le composé des quarez de AC & CB , avec deux

fois le rectangle de AC & CB, est egal au composé des quarrés de AD & DB, avec deux fois le rectangle de AD DB : (car iceux sont chacun egaux au quarré de AB par la 4. p. 2.) Il faudra donc que d'autant que les quarrés de AC & CB, sont plus grands que les quarrés de AD & DB, d'autant les rectangles de AC & CB, soient plus petits que les rectangles de AD & DB : mais il a esté démontré que l'excez des quarrés est rationel : donc l'excez des rectangles sera aussi rationel : (puis que ces excez sont egaux) qui est contre la 17. p. 10. Car iceux rectangles par la 22. p. 10. sont mediaux, d'autant que les lignes AC & CB, ou AD & DB, sont rationeles commens. en puissance seulement. Donc le bicaome AB n'a peu estre diuisé en ses noms qu'en C : car en quelque autre point qu'on le diuise, il s'en suiura la mesme absurdité.

S C H O L I E.

Il est à noter qu'és cinq sortes de lignes irrationeles qui suyuent, jamais les deux noms d'icelles ne peuuent estre egaux : car comme il a esté dict cy dessus, ils seroient commens. en longit. & ils ont esté demonstrez incommens. en long. faut aussi remarquer que quand on dict qu'icelles lignes ne peuuent estre diuisees en leurs noms qu'au point proposé, faut entendre que le contredisant apportant vne autre diuision, les parties d'icelle doivent estre inegales aux parties de la proposée.

THEOR. 32. PROP. XLIII.

La bimediale premiere est diuisee en ses noms en vn point seulement.

Soit la bimedialle premiere AB, diuisee en ses noms au point C en sorte que AC & BC soient mediales commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel, comme veut la 38. p. 10. Je dis qu'on ne la peut diuiser en ses nûs en vn autre point.

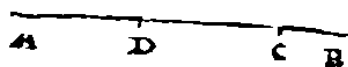
Car s'il se peut faire, soit AB derechef diuisee en D, sçauoir que AD & DB soient mediales commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel. Nous demonsturons tout ainsi qu'en la precedente proposition, que deux fois le rectangle de AD & DB sera autant plus grand que deux

fois le rectangle de AC & BC, que les quarez de AD & DB sont plus petits que les quarez de AC & BC: Or tous iceux rectangles sont rationaux par l'hypotese. Donc leur excez sera rationel par le lemme qui precede la 45. p. 10. & par consequent l'excez des quarez sera aussi rationel, ce qui est absurde: car iceux quarez estans descrits sur lignes mediales, sont mediaux, & par la 27. p. 10. l'excez d'iceux ne sera rationel. donc la ligne bimediale premiere AB ne pouuoit estre diuisee en ses noms, sinon au point C.

L E M M E 2.

Si vne ligne droicte est coupee inegalement, les quarez des deux parties seront plus grandes ensemble que deux fois le rectangle d'icelles parties.

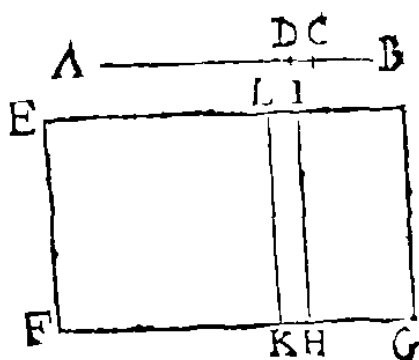
Soit la ligne droicte AB coupee inegalement en C: Je dis que les quarez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB. Car ayant pris CD egale à la moindre partie CB, par la 7. p. 2. les quarez de AC, CD, c'est à dire de AC, CB sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, (c'est à dire de AC, CB) avec le quarré de AD: & partant les deux quarez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, CB: ce qui estoit proposé,



THEOR. 39. PROP. XLV.

La bimediale seconde, est diuisee en ses noms en vn point seulement.

Soit la bimediale seconde AB diuisee en ses noms au point C, en sorte que AC & BC soient mediales commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, comme veut la 39. p. de ce liure; Je dis qu'elle ne peut estre diuisee en ses n^{os} en vn autre point.



Car si faire se peut qu'elle soit encore diuisee en AD & DB, en sorte que dessus: & soit vne ligne rationele proposee EF,

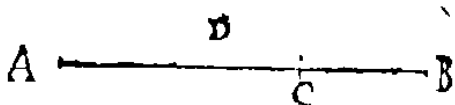
sur laquelle (par la 45. p. 1. soit construit le rectangle EG , egal au carré de AB . Item EH egal aux deux carrés de AC CB : le reste IG sera egal à deux fois le rectangle de AC , CB , puis que par la 4. p. 2. le carré de AB est egal aux deux carrés de AC , CB , avec deux fois le rectangle d'icelles AC , CB . En la même manière si sur EF on applique EK egal aux carrés de AD , DB : le reste LG sera egal à deux fois le rectangle de AD , DB . Et pour autant que les carrés de AC , CB , sont inegaux aux carrés de AD , DB : leurs egaux rectangles EH , EK seront aussi inegaux: & partant les lignes FH , FK , seront inegales. Et derechef puis que les carrés de AC , CB sont plus grands que deux fois le rectangle de AC , CB par le lemme precedent, EH sera aussi plus grand que IG : & partant EH plus grand que la moitié de EG : & consequemment la ligne FH plus grande que la moitié de la ligne FG . Nous demonstrerons par mêmes raisons que FK , est aussi plus grande que la moitié de FG . Donc les parties FH & HG , sont inegales aux parties FK , KG , chacune à la sienne. Et pource que AC , CB sont mediales, & commensurables en puissance; les carrés d'icelles seront aussi mediaux & commensurables, & par la 16. p. 10. le composé d'eux sera aussi commensurable à vn chacun d'eux; lesquels estant mediaux leur composé, c'est à sçavoir le rectangle EH sera aussi medial par le corol. de la 24. p. 10. Par même raison EK sera demonstré medial: parquoy EH , EK appliquez sur la rationele EF , auront les costez FH , FK , rationaux commensurables en puissance seulement à la rationele EF , par la 23. p. 10. Pareillement puis que le rectangle de AC , CB est posé medial; le double d'iceluy, sçavoir est IG , sera aussi medial par le corol. de la 24. p. 10. & estant appliqué sur la rationele HI , l'autre costé HG sera aussi rationel commensurable en puissance seulement à icelle HI , par la 23. p. 10. Et puis que AC , CB sont incommensurable en longueur, & par la 1. p. 6. comme AC est à CB , ainsi le carré de AC est au rectangle de AC , CB : (car ils ont AC pour hauteur;) par la 10. p. 10. le carré sera incommensurable au rectangle. Mais au carré de AC est commensurable le composé des carrés de AC , CB : (car d'autant que AC , CB sont commensurable en puissance, & partant les carrés d'icelles commensurable, le composé d'eux carrés sera aussi commensurable au carré de AC , par la 16. p. 10.) & le rectangle de AC , CB est commensurable à son double. Donc aussi le composé des carrés de AC CB , c'est à dire le rectangle EH est incommensurable au double

du rectangle de AC, CB, c'est à dire à IG, par le scholie de la 14 p. 10. & d'autant que par la 1. p. 6. comme EH est à IG, ainsi FH est à HG, par la 10. p. 10. icelle FH, HG seroient incommens. en longit. Mais elles ont esté demonstrees rationeles : Donc FH, HG sont rationeles commens. en puissance seulement. Et par la 37 p. 10. la route FG sera binome, & diuisee en ses noms au point H. En la mesme maniere nous demonstrerons aussi FG binome estre diuisee en d'autres noms à vn autre point K, ce qui est absurde : car par la 43. p. 10. elle ne peut estre diuisee en ses noms qu'en vn seul point. Donc AB bimediale seconde ne peut estre diuisee en ses noms qu'au point C.

THEOR. 34. PROP. XLVI.

La ligne maieure, est diuisee en ses noms, en vn point seulement.

Soit la ligne maieure AB, diuisee en ses noms au point C, En sorte que AC & BC soient incommens. en puissance : & le composé de leurs quarez soit rationel : mais le rectangle compris d'icelles, medial comme veut la 40 p. de ce liure. Je dis qu'on ne pourra diuiser icelle AB en ses noms en vn autre point que C.



Car si faire se peut, qu'elle soit diuisee en ses noms en vn autre point D. Donc en quelque lieu que soit le point D, nous demonstrerons tout a nsi qu'en la 43. p. de ce liure, que les composez des quarez de AC & BC, & de AD & DB ont vn mesme excez que les doubles rectangles de AC & BC, & de AD & DB. Mais d'autant que les composez quarez sont rationaux par l'hypothese ; & par consequent leur excez rationel. il faudroit donc que l'excez des doubles rectangles (lesquels sont mediaux par le corol. de la 24. p. 10.) fut rationel, ce qui est contraire à la 17 p. 10. Donc la ligne maieure AB, ne sera diuisee en ses noms en autre point qu'en C.

THEOR. 35. PROP. XLVII.

La ligne pouuant vn rational & vn medial, est diuisee en ses noms, en vn point seulement.

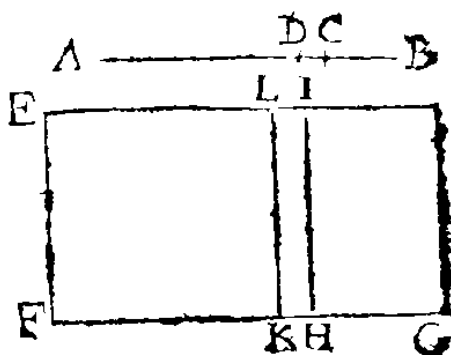
Soit la

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuisee en ses noms au point C, en sorte que AB & BC soient incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel; & que le composé de leurs quarez soit medial: mais le rectangle d'icelles, rationel, comme veut la 41. p. 10. Je dis qu'on ne pourra diuiser icelle AB en ses noms en vn autre point que C. Car il s'ensuyuroit mesme absurdité qu'en la prec. p. sçauoir que si on la diuisoit encores au point D, il s'ensuyuroit comme la, que l'excez des quarez & des rectangles, seroit rationel, & medial.

THEO. 36. PROP. XLVIII.

La ligne pouuant deux mediaux, est diuisee en ses noms, en vn point seulement.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuisee en ses noms au point C, en sorte que AC & BC soient incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial incommensur. au composé de deux quarez aussi medial, comme veut la 42. p. 10. Je dis qu'on ne peut diuiser icelle AB en ses noms en vn autre point que C.



Autrement, si faire se peut, soit diuisee au point D: & sur la rationelle proposée EF soit faite pareille construction qu'en la 45. p. 10. sçauoir est le rectangle EG égal au carré de AB, EH égal aux deux quarez de AC & CB: & partant IG égal au double du rectangle de AC & BC (comme il a esté démontré en ladite 45. p. 10.) & les deux rectangles EH & IG qui sont mediaux, feront les lignes FH & HG rationeles: mais le composé des quarez de AC & BC est incommensur. au double de leur rectangle: (car par l'hypothese il est incomm. à iceluy rectangle de AC, CB.) partant aussi les rectangles EG & EH feront incommens. Ainsi les lignes rationeles FH & HG seront commens. en puissance seulement: & par la 17. p. 10. AB sera binome diuise en ses noms au point H. Que si on veut dire que AB peut encores estre diuise en ses noms au point D: il s'ensuyura, comme en la 45. prop. 10. Que le binome FG, diuise en ses noms au point H, se pourroit encores

diuifer en ses noms au poinct K, contre la 42.p.10. Ainsi AB ne pouuoit estre diuisee en ses noms qu'au seul poinct C.

SECONDES DEFINITIONS.

Vne ligne rationele estant proposee, & le binome diuise en ses noms : lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude.

1. Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appelée Binome premier.
2. Mais si le plus petit nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appelée Binome second.
3. Que si ny l'un ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appelée Binome troiesme.

Et lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude.

4. Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appelée Binome quatriesme.
5. Mais si le plus petit nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appelée Binome cinquiesme.
6. Que si ny l'un ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appelée Binome sixiesme.

Il n'est rien dict icy des lignes, desquelles les deux noms soient commensurables en longueur à la rationelle proposée: parce que telles lignes ne sont binomes: car par la 37 p 10. tout binome est composé de deux lignes rationelles commens. en puissance seulement.

PROB. 13. PROP. XLIX. Six. 3.

Trouuer vn Binome premier.

Estans trouuez deux nombres $A.....C:....B$
 quarrez AB, CB (comme nous auons enseigné au scholie 2. de la 19.p.10.) desquels l'excez AC ne soit carré, afin que AB CB soient comme nombre carré à nombre carré, & AB, AC ne soient comme carré à carré: Soit vne rationelle proposée D, à laquelle soit pris EF commens. en longueur: & icelles D & EF seront rationelles commens. en long. En apres par le corol. de la 6.p.10. soit fait comme le nombre AB est à AC, ainsi le carré de EF au carré de FG. Iedis que la toute EG est binome premier.

Car puis que les quarrez de EF, FG qui sont entr'eux comme les nombres AB, AC sont commens. par la 6 p. 10. aussi les lignes EF, FG seront commensur. au moins en puissance: Et d'autant que EF est rationelle, aussi FG sera rationelle. Mais pource que AB, AC ne sont comme nombre carré à nombre carré, les quarrez d'icelles rationelles EF, FG ne sont comme nombre carré à nombre carré; & partant les lignes EF FG sont incommens. en longueur par la 9.p.10. elles sont donc rationelles commens. en puissance seulement: & par la 37.p.10 la toute EG sera binome. Je dis aussi qu'il est premier. Car puis que les quarrez de EF, FG sont entr'eux comme les nombres AB, AC; & AB est plus grand que AC, aussi le carré de EF sera plus grand que le carré de FG: soit donc du carré de H (trouué par le lemme qui suit la 14.p.10) Et puis que comme le nombre AB est à AC, ainsi le carré de EF au carré de FG: par conuersion de raison comme AB à CB, ainsi le carré de EF sera au carré de H. Mais AB est à CB comme nombre carré à nombre carré: donc le carré de EF sera au carré de H, comme nombre carré à nombre carré; & partant les lignes EF, H sont commens. en longueur.

par la 9 p. 10. Veu donc que EF plus grand nom est commens. en long. à la rationelle D, & peut plus que le moindre nom FG du quarré de H qui luy est commens. en longitude; EG sera binome premier par la 1. des secondes def.

S C H O L I E.

Soit la rationelle proposée D 8, & EF 6. faisant donc que comme A B 9. est à AC 5, ainsi 36. quarré de EF soit au quarré de FG; icelle FG sera $\sqrt{20}$: & partant la toute EG, sera $6 + \sqrt{20}$. qui est binome premier.

PROBL. 14. PROP. L.

Trouuer vn binome second.

Estans trouuez les deux nombres quarez AB, CB, comme en la prop. precedente, & pris FG commensurable en longitude à une rationelle proposée D: icelles D & FG seront rationelles commensurables: puis apres par le corol. de la 6. p. 20. soit fait comme le nombre AC au nombre AB, ainsi le quarré de FG au quarré de EF. Je dis que EG est binome second.

Car on demonstrera premierement tout ainsi qu'en la precedente que EG est binome. Et puis que come le nombre AC est au nombre AB, ainsi le quarré de FG au quarré EF: en changeant comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG. Mais AB est plus grand que AC: Donc aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG, & soit du quarré de H. Nous demonstrerons maintenant comme en la precedente prop. que H & EF sont commensurables en longitude. Et partant que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre nom FG du quarré de H qui luy est commensurable en longitude, & le moindre nom FG commensurable en longitude à la rationelle D: & par la 2. def. EG, sera binome second.

S C H O L I E.

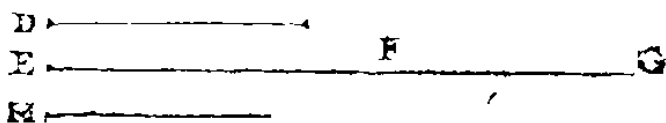
La rationelle proposée D, soit 7. & EG 5: faisant donc que comme AC 5. est à AB 9. ainsi 25. quarré de FG soit au quarré de EF; icelle EF sera $\sqrt{45}$. & partant la toute EG sera $5 + \sqrt{45}$. qui est binome second.

PROB. 15. PROP. LI.

Trouuer vn binome troisieme.

Estant trouuees deux nōbres AB, CB comme en la 49. p. 10. soit pris vn autre nombre I qui ne soit al'vn ny a l'autre d'iceux A, B, AC, cōme nombre quarré à nombre quarré (ce qui

A..... C.... B
I.....



se fait preuant I nombre non quarré prochainement plus grand que AC. Car puis qu'il n'est quarré. Il ne sera au quarré AB, comme nombre quarré a nombre quarré. Derechef puis qu'il est non quarré prochainement plus grand que AC, il differe d'iceluy par l'vnité, ou par le binaire: Parquoy il ne tombera entre I & AC vn moyen proportionel, comme nous auons demonstté au scholie de la 8. p. 8. Ils ne seront donc plans semblables; & partant ne serōt entr'eux comme nombres quarez) & apres auoir exposé la rationele D, par le corol. de la 6. p. 10. soit fait comme I à AB. Ainsi le quarré de D, au quarré de EF: ainsi les quarez de D, & EF, estans comme nombre à nombre seront commensurables par la 6. p. 10. & partant les lignes D, & EF aussi commensurables au moins en puissance. D estant donc rationele, EF sera aussi rationele. Mais parce que I n'est a AB, c'est à dire le quarré de D au quarré de EF, comme nombre quarré à nombre quarré; D & EF seront incommensurables en longitude par la 9. p. 10. Derechef soit fait par le susdit corol. comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG: & par la 6. p. 10. iceux quarez de EF, FG estans comme nombre quarré à nombre quarré, seront commens. & partant les lignes EF, FG aussi commensurables au moins en puissance; & EF estant rationele, FG le sera aussi. Et d'autant que AB n'est à AC. c'est à dire le quarré de EF au quarré de FG, comme nombre quarré à nombre quarré; les lignes EF, FG seront incommensurable en longitude par la 9. p. 10. & partant icelles EF, FG sont rationeles cōmensurables en puissance seulement: & par la 37. p. 10. la toute EG sera binome. Je dis aussi qu'elle est binome troisieme. Car d'autant que comme I est à AB, ainsi le quarré de D au quarré de EF; & comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG, par raison egale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D au quarré de FG. Mais I n'est à AC, com-

me nombre quarré à nombre quarré ; donc les quarez de D, FG ne seront aussi comme nombre quarré à nombre quarré : & partant les lignes D, & FG, seront incommensurables en longueur par la 9.10. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG ; & AB est plus grand que AC, aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG : soit donc plus grand du quarré de H. Maintenant nous démonstrerons comme en la 49.p.10. que EF & H, sont commensurables en longueur. Donc le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG du quarré de H qui luy est commensurable en longueur, & l'une ny l'autre d'icelles EF, FG n'est commensurable en longueur à la proposée rationelle D, cōme il a este démontré : partant EG sera binome troisieme par les secondes définitions.

S C H O L I E.

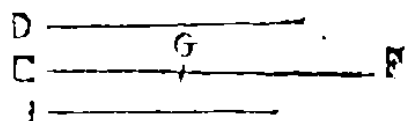
La rationelle proposée D soit 6 : faisant donc que comme 16. est à AB 9. ainsi 36. quarré de D soit au quarré de EF ; icelle EF sera $\sqrt{54}$; & faisant que comme AB 9 est à AC 5, ainsi 54 quarré de EF soit au quarré de FG ; icelle FG sera $\sqrt{30}$: & partant la toute EG sera $\sqrt{54} + \sqrt{30}$, qui est binome troisieme.

P R O B. 16. P R O P. LII.

Trouver vn binome quatriesme.

Estans trouvez deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB, ne soit à l'un ny à l'autre comme nombres quarez (cōme nous auons enseigne au 3.

A..... C... B



scholie de la 29.p.de ce liure :) Soit exposé la rationelle D. & pris EG commensurable en longueur à icelle rationelle D & par consequent EG sera aussi rationelle : Et ayant construit le reste comme en la 49.p.10. Nous démonstrerons comme là que la toute EF est binome. Item que le quarré de EG peut plus que le quarré de FG ; & que par conuersion de raison, comme AB est à CB, ainsi le quarré de EG au quarré de H. Mais AB n'est à CB comme nombre quarré à nombre quarré :

Donc le quarré de EG ne sera au quarré de H, comme nombre quarré à nōbre quarré. & par la 9. p. 10. les lignes EG & H, sont incommensurables en longueur : parquoy puis que le plus grand nom EG peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy est incommensurable en longueur. & qu'icelle EG est commensurable en longueur à la rationelle proposée D ; EF sera binome quatriesme par les def. secondes.

SCHOLIE.

La rationelle exposée D soit 8, & EG 6 : faisant donc que comme A B est AC 5 ainsi le quarré de EG sçavoir 36. soit au quarré de FG ; icelle FG sera trouvée de $\sqrt{24}$: & partant la toute EF sera $6 + \sqrt{24}$, qui est binome quatriesme.

PROB. 17. PROP. LIII.

Trouver vn binome cinquiesme.

Estans trouuées les deux nombres AC, CB comme en la precedente prop. & fait la construction comme en la 50 p. on démontrera comme en ladite 50 p. que EF est binome. Item que le quarré de EG est plus grand que le quarré de FG du quarré de H Et comme la precedente qu'icelles EG & H sont incommensurables en longueur : & partant par les secondes def. EF est binome cinquiesme.

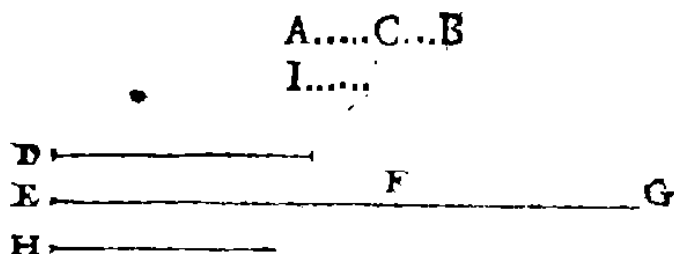
SCHOLIE.

La rationelle proposée D soit 7, & EG 6 : donc faisant que comme AC 6 est à AB 9, ainsi le quarré de GF, sçavoir est 36, soit au quarré de EG ; icelle FG sera trouvée de $\sqrt{54}$: partant la toute EF sera $\sqrt{54} + 6$, qui est binome cinquiesme.

PROBL. 18. PROP. LIV.

Trouver vn binome sixiesme.

Soient exposez 2. nombres AC, CB, tellement que le composé d'iceux AB ne soit à l'un ny à l'autre comme nōbre quarré à nōbre



quarré (ce qu'on fera adioustant ensemble deux nōbres pre-

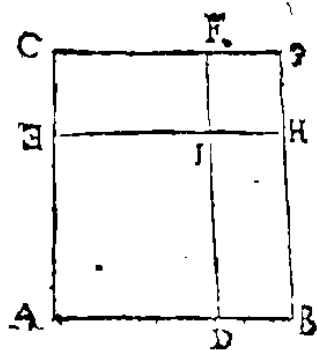
miers entr'eux : Car par la 30. p. 7 le total sera aussi premier à chacun deux ; & partant ne sera à l'un ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, par les choses demonstrees à la fin du 8. liure.) Et soit pris quelque autre nombre non quarré I, afin qu'iceluy ne soit à AB, ny à AC, comme nombre quarré à nombre quarré. En apres soit ync rationele proposée D : & par le corol. de la 6 p. 10. soit fait comme I à AB, ainsi le quarré de D au quarré de EF : & ayât acheué comme en la 51. p. 10. nous demonstretrons comme la que EG est binome : en apres que D & FG sont incommensurables en longitude, & que le quarré de EF, est plus grand que le quarré de FG du quarré de H. Finalement nous demonstretrons comme en la 49. p. que par conuersion de raison, comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'est pas à CB, comme nombre quarré à nombre quarré, ny par consequent le quarré de EF au quarré de H : donc par la 9 p. 10. les lignes droictes EF & H, seront incommens. en longitude. Parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG du quarré de la ligne H qui luy est incommens. en longitude : & l'un ny l'autre d'iceux noms n'est commens. en long. à l'exposée rationele D, par les secondes def. EG sera binome sixiesme.

S C H O L I E.

La rationele proposée D soit 6 : faisant que comme 16 est à AB 8, ainsi le quarré de D, c'est à sçavoir 36, au quarré de EF : icelle EF sera trouuee de $\sqrt{48}$: & faisant que come AB 8 est à AC 5, ainsi 48 quarré de EE soit au quarré de FG : icelle FG sera trouuee de $\sqrt{30}$: partant la toute EG sera $\sqrt{48} + \sqrt{30}$, qui est binome sixiesme.

L E M M E.

Les quarez AI, IG estans conioincts à l'angle I tellement que les costez DI, IF facent vne seule ligne droicte DF ; & par consequent les costez EI, IH aussi vne seule ligne droicte EH ; estât acheué le parallelogramme BC. Je dis qu'iceluy est quare : & EF estre rectangle moyen proportionel entre les quarez AI, IG : & EG moyen prop. entre les quarez AG, IG.



Car d'autant que EI est égale à ID , mais HI à IF : la toute EH sera égale à la toute DF . Mais par la 34. p. 1. la ligne EH est égale à l'une & à l'autre d'icelles AB, CG : & DF à AC, BG : & par conséquent chacune d'icelles AB, CG est égale à l'une & à l'autre AC, BG : dont le parallélogramme BC est équilateral. Mais par la 29. p. 1. il est aussi rectangle: & partant quarré. D'eschef puis que comme DI est à IF , ainsi EI à IH . Mais par la 1. p. 6. comme DI à IF , ainsi AI à EF : & comme EI à IH , ainsi EF à IG : donc comme AI à EF , ainsi EF à IG : & partant EF est moyen prop. entre AI, IG . Et finalement veu que comme AE à EC , ainsi CF à FG , icelles estées égales chacune à la sienne: & en cōposant comme AC à EC , ainsi CG à FG . Mais comme AC à CE , ainsi AC à EG : & comme CF à FG ainsi EG à IG par la 1 p. 6. Donc comme AG à EG , ainsi EG à IG : & par conséquent EG est moyen prop. entre AG, IG .

Or voila comme Commandin propose & demonstre ce lemme: mais Clavius le propose ainsi.

Si vne ligne droicte est coupee comme on voudra, le rectangle contenu sous les parties, est moyen proportionel entre les quarréz d'icelles. Item le rectangle contenu sous la toute, & vne des parties, est moyen prop. entre le quarré de la toute, & le quarré de ladite partie.

Ce qui est la mesme chose que dessus.

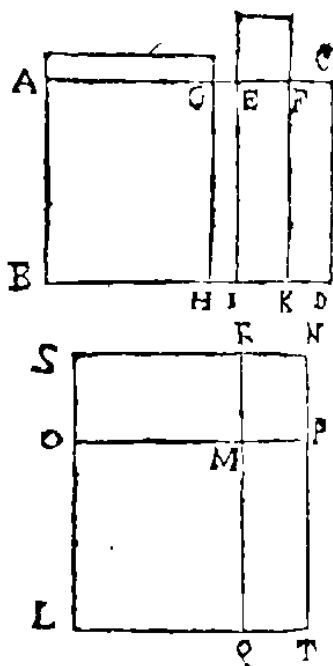
THEOR. 37. PROP. LV. Six. 4.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un binome premier; la ligne pouvant iceluy rectangle est binome.

Soit le rectangle AD , compris de la rationele AB & du binome premier AC : Je dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est binome.

Car d'iceluy binome AC , le plus grand nom soit AE : donc par la def. AE, EC sont rationeles commenſ. en puissance seulement, & AE pourra plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est commenſ. en longit. & aussi AE sera commenſ. en longit. à la rationele proposée AB . Soit coupée EC en deux également en F . Donc puis que AE peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est commenſ. en longit. si sur icelle AE on applique vn rectangle egal au quart du quarré de EC , c'est à

dire au quarré de EF, & defaillant d v-
ne figure quarree, il diuifera icelle AE
en parties commenſ. en longitude par
la 18 p 10. ſoient donc icelles parties
AG, GE. & par les points G, E, F ſoiēt
menees GH, EI, FK paralleles à icelles
AB, CD. puis par la 14. p. 2. ſoient deſ-
crits les quarrez LM, MN egaux aux
deux rectangles AH, GI, & diſpoſez
en ſorte que OM, MP facent vne ligne
droicte: puis ſoit acheuē le rectangle
ST, lequel ſera quarré par le lemme
precedent.



Maintenant d'autant que par la cō-
ſtruction le rectangle de AG, GE eſt
egal au quarré de EF: les lignes AG, EF, GE ſeront prop. par
la 7. p. 6. Donc par la 1. p. 6. les rectangles AH, EK, GI ſerōt
auſſi proportionaux: parquoy EK ſera moyē prop. entre AH,
GI, ou leurs egaux quarrez LM, MN. Mais par le lemme pre-
cedent OR eſt auſſi moyen prop. entre iceux quarrez LM,
MN: donc OR, EK ſeront egaux. Mais par la 43. p. 1. OR,
QP ſont egaux: & par la 36. p. 1. EK eſt egal à FD: donc QP
ſera auſſi egal à FD: & par conſequāt tout le quarré LN egal
à tout le rectangle AD: & ainſi la ligne OP peut le rectangle
AD: Je diſ donc qu'icelle OP eſt binome.

Car puis que AG, GE ont eſté demonſtrees commenſ. en
longitude, la toute AE ſera auſſi commenſ. en longitude à
chacune d'icelles par la 16. p. 10. Mais AE eſt auſſi commenſ.
en longitude à AB: donc par la 12. p. 10. icelle AB eſt auſſi cō-
menſ. en longit. à chacunes d'icelles AG, GE: & partant AB
eſt rationale, AG, GE ſeront auſſi rationeles: & par la 10.
p. 10. les rectangles AH, GI contenus ſous icelles rationeles,
ſeront rationaux: donc auſſi rationaux leurs egaux quarrez
LM, MN: & par conſequent les lignes OM, MP ſeront auſſi
rationeles. Et d'autant que AE eſt incommenſ. en longitude
à EC, mais commēſ. à AG, & EC à ſa moitié EF, par le ſcho-
lie de la 14. p. 10. AG, EF ſeront incommenſ. en long. parquoy
AH, EK qui ont meſme raiſon que AG, EF par la 1. p. 6. ſont
auſſi incommenſ. par la 10. p. 10. & par conſequent leurs egaux
LM, QP: donc par la 10. p. 10. les lignes OM, MP ſont auſſi
incommenſ. en longitude, puis que par la 1. p. 6. elles ſont en
meſme raiſon que LM, QP. Mais OM, MP, ont eſté demon-
ſtrees rationeles: & partant elles ſont rationelles commenſ.

en puissance seulement : donc la toute OP pouuant le rectangle AD est binome par la 37 p. 10. Ce qu'il falloit prouuer.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 5, & AC 4 + $\sqrt{12}$. Donc le rectangle AD sera 20 + $\sqrt{300}$: Et, puis que AE plus grand nom du binome est 4, & EF moitié du plus petit nom I.C, est 3; AG sera 3, & GE 1. Donc le rectangle AH sera 15. & la ligne OM qui peut iceluy rectangle sera $\sqrt{15}$: Ainsi GI est 5, & M.P $\sqrt{5}$ Mais EF est 3, & EI égale à AB: donc EK sera $\sqrt{75}$, & son double ED $\sqrt{300}$. Or si on multiplie OM, MP entr'elles, sera produicte MT $\sqrt{75}$, égal à EK. Mais à iceluy MT est égal MS: donc MS, MT ensemble seront aussi $\sqrt{300}$. Or les quarrés LM 15, MN 5, font ensemble 20 : Partant tout le quarré LN est 20 + $\sqrt{300}$, & son costé OP ou LT 4 + $\sqrt{5}$, qui est binome sixieme.

THEOR. 38. PROP. LVI.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un binome second ; la ligne qui peut iceluy rectangle, est bimediale premiere.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB & du binome second AC: Je dis que (apres auoir fait pareille construction & demonstration qu'en la precedente) la ligne OP qui peut iceluy rectangle AD, est bimediale premiere.

Car puis que AC est binome second, AE sera incommensurable en longitude à la rationele AB: Item AG & EG (qu'on prouuera estre commens. en longitude entr'elles, comme en la precedente, & par la 16. p. 10. à leur toute AE) seront par la 14. p. 10. aussi incommens. en longitude à icelle AB, laquelle estant rationele, icelles AG, GE seront aussi rationeles : & par consequent commens. en puissance seulement à icelle rationele AB. Donc par la 22. p. 10. les rectangles AH, GI seront mediaux : & leurs egaux quarrés LM, MN aussi mediaux : Et partant les lignes OM, MP mediales, lesquelles on prouuera

estre commens. en puissance seulement, tout ainsi qu'en la précédente. Et d'autant que EC est commens. en longitude à la rationele AB, le rectangle ED sera rationel par la 10. p. 10. aussi sera la moitié EK : & par conséquent son egal QP compris des deux mediales OM, MP : & par la 38. p. 10. OP est bimediale premiere.

SCHOLIE,

La rationele AB soit 5, & AC $\sqrt{48} + 6$: donc le rectangle AD sera $\sqrt{1200} + 30$. Et puis que AE est $\sqrt{48}$, & EC 6 : EF sera 1, & son quarré 9, auquel estant posé egal le rectangle de AG, GE, icelles seront $\sqrt{27}$, & $\sqrt{3}$: parquoy le rectangle AH sera $\sqrt{675}$. & par conséquent la ligne OM, qui peut iceluy sera $\sqrt{675}$ ainsi GI sera $\sqrt{75}$. & MP $\sqrt{75}$. Or EC est 6 : partant ED double de MS $\sqrt{50625}$, est à dire 15, est 30 ; & par conséquent MS, MT, seront aussi 30. Parquoy tout le quarré LN composé des quarréz LM $\sqrt{675}$, MN $\sqrt{75}$, & des deux rectangles MS, MT 30, sera $\sqrt{1200} + 30$, & son coste OP ou LT $\sqrt{675} + \sqrt{75}$, qui est bimediale premiere.

THEOR. 39. PROP. LVII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un binome troisieme; la ligne qui peut iceluy rectangle est bimediale seconde.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB & du binome troisieme AC (apres avoir construit comme aux précédentes.) Je dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, est bimediale seconde.

Car on prouvera comme en la précédente, que les deux lignes OM, MP sont mediales commensurables en puissance seulement ; Item d'autant que AC est binome troisieme, EC est commensurable en puissance seulement à la rationele AB ; & par la 22. p. 10. Le rectangle ID sera medial, aussi sera la moitié EK : Et par conséquent medial son egal QP (compris des deux mediales OM & MP.) Ainsi OM, MP sont deux mediales commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, & par la 39 p. 10. OP sera bimediale seconde.

S C H O L I E.

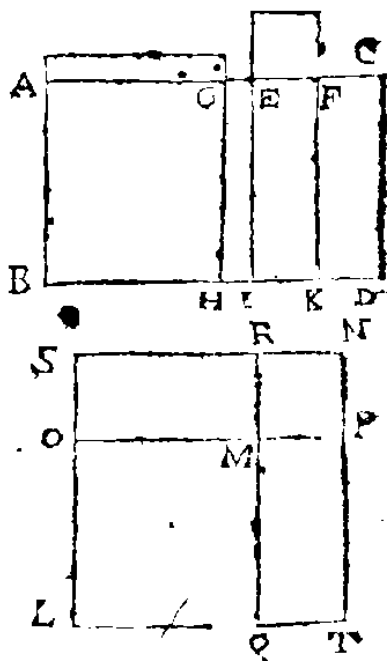
La rationele AB soit 5, & $AC \sqrt{32} + \sqrt{24}$: Donc le rectangle AD sera $\sqrt{800} + \sqrt{600}$. Mais d'autant que AE est $\sqrt{32}$, & $EC \sqrt{24}$; EF sera $\sqrt{6}$, au quarré de laquelle est posé egal le rectangle de AG , GE ; & partant AG sera $\sqrt{18}$, & $GE \sqrt{2}$. Parquoy le rectangle AH sera $\sqrt{450}$, & $GI \sqrt{50}$; & par consequent la ligne OM est $\sqrt{\sqrt{450}}$, & $MP \sqrt{\sqrt{50}}$. Et puis que EI est 5, & $EC \sqrt{24}$, le rectangle ED sera $\sqrt{600}$, lequel est double de $MT \sqrt{150}$. Donc tout le quarré LN , qui est composé des quarréz $LM \sqrt{450}$, $MN \sqrt{50}$, & des rectangle MS , $MT \sqrt{600}$; sera $\sqrt{800} + \sqrt{600}$; & partant son costé QP est $\sqrt{\sqrt{450}} + \sqrt{\sqrt{50}}$. qui est bimediale seconde.

THEOR. 40. PROP. LVIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un binome quatriesme; la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Maieure.

Soit le rectangle AD , compris du binome quatriesme AC & de la rationele AB (apres avoir construit & démontré comme en la 55.p.) Je dis que OP qui peut iceluy rectangle AD est ligne maieur.

Car puis que AC est binome quatriesme, AE plus grand nom est communurable en longitude à la rationele AB , & peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude, & par la 19.p. 10. le rectangle deffaillant, compris sous AG , GE (qui est egal au quart du quarré de EC) diuifera AE en AG & EG incommens. en longitude; & les rectangles AH & GI seront incommens. par la 1.p. 6. & 10.p. 10. Donc aussi incommens. leurs egaux quarréz LM , & MN : & par consequent les lignes OM , MP sont incommens. en puissance. Mais le rectangle AI compris



des rationeles AB, AE, est rationel par la 20. p. 10. (qui est egal aux quarez LM, MN). Et le rectangle QP compris d'icelles lignes OM, MP est medial, car son egal EK est medial, comme son double EC par la 22 p. 10. estant ED rationele commens. en puissance seulement à AB : & par la 40. p. 10. OP est ligne majeure.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 5, & AC 4 + √8: Donc le rectangle AD sera 20 + √200. Et puis que AE est 4, & EC √8; EF sera √2, au quare de laquelle, scauoir 2, ayant este pose egal le rectangle de AG, GE; la ligne AG sera 2 + √2, & GE 1 — √1: partant le rectangle AH sera 10 + √50, & GI 10 — √50; & par consequent OM est √(10 + √50) & MP √(10 — √50). Or ED estoit √8, donc l'D double du rectangle MTV 50; sera √200. La somme des quarez LM, MN, sera donc 10, à laquelle si on adloiste les plans TMS √200, on aura pour tout le quare LN 20 + √200; & partant son costé OP sera √(20 + √200) + (10 — √50) ou √(20 + √200) qui est ligne majeure.

THEOR. 41. PROP. LIX.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un binome cinquiesme; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne irrationele pouuant vn rationel & vn medial.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB, & du binome cinquiesme AC; Je dis (apres auoir construit & démontré comme en la 55. p.) que OP qui peut iceluy rectangle AD, est ligne irrationele, pouuant vn rationel & vn medial.

Car puis que AC est binome cinquiesme, AE plus grand nom peut plus que E du quare d'une ligne qui luy est incommens. en longueur: & comme en la precedente AG & EG seront incommens. en longueur: Et les lignes OM, MP seront incommens. en puissance, & l'egal au composé de leurs quarez, scauoir le rectangle AI, est medial par la 22. p. 10. car les lignes AB & AE sont rationeles commens. en puissance seule-

ment. Et d'autant que AB, & le plus petit nom EC, sont commens. en longitude, par la 20. p. 10. ED est rationel : aussi sera sa moitié EK, & son egal QP, compris des lignes QM, MP, & par la 41. p. 10. OP est ligne irrationele pouuant vn rationel, & vn medial.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 5, & AC $\sqrt{8+2}$. Donc le rectangle AD sera $\sqrt{200+10}$. Et d'autant que AE est $\sqrt{8}$. & EC 2; EF sera 2, au quarré de laquelle estant egal le rectangle de AGE, le costé AG sera $\sqrt{2+1}$: & GE $\sqrt{2-1}$: Et partant le rectangle AH sera $\sqrt{50+5}$, & la ligne OM $\sqrt{50+5}$; & MP $\sqrt{50-5}$, puis que GI est $\sqrt{50-5}$. Et pource que EI est 5. & EC 2; le rectangle ED sera 10; & par consequent sa moitié MT est 5. Donc la somme des quarréz LM MN, est $\sqrt{200}$, à laquelle adioustant les rectangles SMT 10, tout le quarré LN sera $\sqrt{200+10}$; Et par consequent son costé OP, est $\sqrt{(\sqrt{50+5}) + (\sqrt{50-5})}$, ou bien $\sqrt{(\sqrt{200+10})}$ qui est ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

THEOR. 42. PROP. LX.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un binome sixiesme ; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant deux mediaux.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB, & du binome sixiesme AC: (apres auoir construit & demonstré comme en la 55. p. que OP peut iceluy rectangle AD) Je dis qu'icelle OP, est ligne pouuant deux mediaux.

Car puis que AC est binome sixiesme, AE plus grand nom peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude, & si les deux noms sont incommensurables en longitude à la rationele AB: Et comme il a esté démontré à la 58. p. 10. OM, MP seront incommensurable en puissance; & si par la 12. p. 10. Le rectangle AI, qui est egal au composé de leurs quarréz est medial; Item EC qui est compris de deux rationeles commensurables en puissance seulement, est aussi medial par la mesme prop. aussi medial sa moi-

tié EK, & son egal QP compris d icelles lignes OM, MP. Et si iceluy rectangle QP, ou son egal EK est incommens. au composé des quarez LM, MN, sçauoir AI : car les lignes AE & EC estant incommens. en longitude, aussi AE & EF le seront : & par la 1. p. 6. & 10 p 10. Les rectangles AI & EK feront incommens. Et par la 41 p. 10. OP sera ligne pouuant deux mediaux.

S C H O L I E.

La rationale AB soit 5, AC $\sqrt{12} + \sqrt{8}$. Donc le rectangle AD sera $\sqrt{300} + \sqrt{200}$. Et pour ce que AE est $\sqrt{12}$, & EC $\sqrt{8}$; EF sera $\sqrt{1}$, au quarré de laquelle estant egal le rectangle de AGE; le costé AG sera $\sqrt{3} + 1$, & le costé GE $\sqrt{3} - 1$: Parquoy le rectangle AH sera $\sqrt{75} + 5$, & la ligne OM $\sqrt{(\sqrt{75} + 5)}$ & GI estant $\sqrt{75} - 5$, MP sera $\sqrt{(\sqrt{75} - 5)}$. Mais EC estant $\sqrt{8}$, le rectangle ED double de MT $\sqrt{50}$; sera $\sqrt{200}$. Donc les quarez LM, MN, feront ensemble $\sqrt{300}$, & les rectangles SMT $\sqrt{200}$; & partant tout le quarré LN sera $\sqrt{300} + \sqrt{200}$; & par cōsequēt son costé OP sera $\sqrt{(\sqrt{75} + 5)} + \sqrt{(\sqrt{75} - 5)}$ ou bien $\sqrt{(\sqrt{300} + \sqrt{200})}$ qui est ligne pouuant deux mediaux.

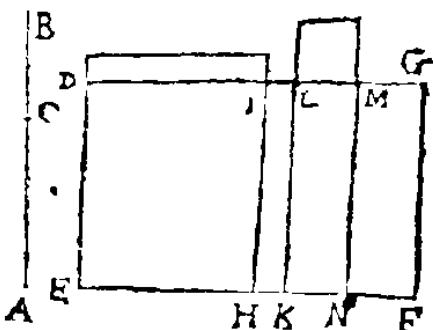
THEOR. 43. PROP. LXI. Six. 5.

Le quarré d'un binome, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé binome premier.

Soit le binome AB, le plus grand nom duquel est AC; & sur la rationele DE soit appliqué par la 45. p. 1. le rectangle DE egal au quarré de AB: Je dis que l'autre costé DG est binome premier.

Car sur la mesme DE soit construit le rectangle DH egal au quarré de AC: & sur HI vn autre rectangle IK egal au quarré de CB: Il est donc euident par la 4 p. 2. que le reste LI est egal à deux fois le rectangle de AC, CB: & en diuisant LG également en M, & en menant MN parallele a CD, chaque rectangle LN, MF sera egal au rectangle de AC, CB. Et d'autant que AB est binome, AC, CB sont rationeles commens. en puis-

en puissance seulement; & leurs
quarrez seront rationaux, & leurs
egaux rectanges DH & IK aussi ra-
tionaux; & par la 21. p. 10. les costez
DI & IL seront rationels commē-
surables en longueur à la rationele
DE, & entr'elles par la 12. p. 10. Et
par la 16 p. 10. la route DL sera cō-



mens. en longueur à chacune DI, IL, & par la 12. p. 10. elle
sera rationele & commens. en longueur à DE rationele: Et
d'autant que par la 21. p. 10. le rectangle de AC, CB est me-
dial, son double EF sera aussi medial: & par la 22. p. 10. Ice-
luy medial LF estant appliqué sur la rationele LK, l'autre co-
sté LG sera aussi rationel incommens. en longit. à icelle LK,
c'est à dire à DE, à laquelle DL estant commens. en longit.
par la 13 p. 10. DL, LG sont incommens. en longit. mais elles
sont rationeles: elles seront donc commens. en puissance seu-
lement; & par la 37 p. 10. DG est binome. Je dis en outre que
c'est binome premier.

Car il appert par le lemme de la 54. p. de ce liure, que le re-
ctangle de AC, CB est moyen prop. entre les quarrez d'icel-
les AC, CB: dont aussi LN moyen prop. entre DH, IK: & par
consequent la ligne LM moyenne prop. entre les lignes DI,
IL par la 1 p. 6. & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL sera egal
au carré de LM: Et d'autant que les quarrez de AC, CB sōt
commens. (car icelles AC, CB sont posees commensur. en
puissance) leurs egaux DH, IK seront aussi commens. Donc
aussi commens. en longueur les lignes DI, IL par les 1 p. 6. &
10. p. 10. Et d'autant que les deux quarrez de AC & CB sont
plus grands que leur rectangle deux fois, par le lemme qui
fait la 44. p. de ce liure: partant DK sera plus grand que LF;
& DL plus grand nom que LG: car icelles lignes sont entre-
elles comme DK à LF, par la 1. p. 6. Et puisque le rectangle de
DI, IL appliqué sur DL, est egal au carré de LM, c'est à di-
re au quart du carré de LG, & deffailant d'une figure quar-
ree, & les parties DI IL sont commens. en longueur; icelle
DL peut plus que LG du carré d'une ligne qui luy est com-
mens. en longit. par la 18. p. 10. & partant icelle DL ayant esté
demonstree commens. en long. à la rationele DE, par les se-
condes def. DG sera binome premier.

S C H O L I E.

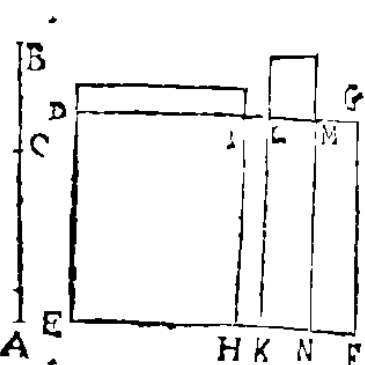
Le binome AB soit $\sqrt{45} + 3$, & la rationele DE 6. d'autant que le plus grand nom AC est $\sqrt{45}$ son quarré est 45, lequel applique sur DE 6, fait l'autre costé DI de $7\frac{1}{2}$: Et le moindre nom CB estant 3, son quarré est 9, qui appliqué sur IH 6, fait IL de $1\frac{1}{2}$, & partant la toute DL est 9. Or le rectangle de ACB est $\sqrt{405}$, & son double LF $\sqrt{1620}$. Donc la ligne FG sera $\sqrt{45}$; & par consequent la toute DG sera $9 + \sqrt{45}$, qui est binome premier.

THEOR. 44. PROP. LXII.

Le quarré d'une bimediale premiere, appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre costé binome second.

Soit la bimediale premiere AB , diuisee en ses noms en C , dont le plus grand soit AC , (apres auoir construit comme en la precedente) Je dis que DG est binome second.

Car puis que AB est bimediale premiere, par la 38. p. 10. AC, CB s'ont mediales commensur. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, duquel le double LF sera aussi rationel, & par la 21. p. 10. LG sera rationele commens. en longitude à DE . Mais icelles deux lignes AC & CB estans mediales, leurs quarez sont mediaux: & partant leurs egaux rectangles DH, IK seront aussi mediaux & commens. Et d'autant que par la 16. p. 10. le total DK est cōmens. à chacun d'iceux DH, IK , par le coroll. de la 24. p. 10. iceluy DK sera aussi medial: Et par la 23. p. 10. son autre costé DL sera rationel incommens. en longitude à la rationele DE : & par la 13. p. 10. DL, LG seront incommens. en long. & partant rationeles commens. en puissance seulement: & par la 37. p. 10. DG sera binome. Je dis d'auantage qu'il est binome premier. Car il se prouuera comme en la precedente que DL est plus grand nom, & qu'il peut plus que le moindre LG du



quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude. Nous avons aussi monstté que LG plus petit nom, est commens. en longitude à la rationele DE : & partant par les secondes def. DG est binome second.

S C H O L I E.

La bimediale AB soit $\sqrt{180} + \sqrt{12}$, & la rationele DE 4. D'autant que le plus grand nom AC est $\sqrt{108}$ son quarré est $\sqrt{108}$, lequel étant appliqué sur la rationele DE 4, le coste DI sera $\sqrt{6}$; Ainsi aussi le moindre nom étant $\sqrt{12}$, son quarré est $\sqrt{12}$; Et par consequent IL est $\sqrt{3}$, Et la toute DL $\sqrt{12}$. Or le rectangle de ACB est 6 : & partant le rectangle KG double d'iceluy est 12, Et le coste LG 3. Donc la toute DG sera $\sqrt{12} + 3$, qui est binome second.

THEOR. 45 PROP. LXIII.

Le quarré d'une bimediale seconde, appliqué sur une ligne rationele, faict l'autre coste binome troisieme.

Soit la bimediale seconde AB, diuisee en ses noms en C desquels AC soit le plus grand. (Après avoir construit comme en la 61. p.) Je dis que DG est binome troisieme.

Car puis que AB est bimediale seconde, par la 39. p. 10. AC, CB sont mediales commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle medial ; partant les quarrés d'icelles AC, CB seront commensurables & mediaux ; & aussi leurs deux rectangles DH, IK : & par la 16. p. 10. le total DK est commensurable à chacun d'iceux DH, IK : donc par le coroll. de la 24. p. 10, DK sera aussi medial, & étant appliqué sur la rationele DE, par la 23. p. 10. son autre coste DL, sera rationel incommensurable en longitude à icelle DE. De rechef puis que le rectangle de AC, CB est medial, son double LE sera aussi ; & iceluy LE étant appliqué sur la rationele LK, son autre coste LG sera rationel incommensurable en longitude à LK : c'est à dire à DE : Donc l'une & l'autre d'icelles lignes DL, LG, est rationele & incommensurable en longitude à la rationele DE. Et d'autant que comme AC à CB, ainsi le quar-

ré de AC au rectangle de AC & CB, par la 1. p. 6. Il est evident par la 10. p. 10. que le quarré sera incommensurable au rectangle (estans les deux lignes incommensurables en longueur). Mais par la 16. p. 10. au quarré de AC est commensurable le composé des quarrés de AC, CB; & au rectangle de AC, CB est commensurable son double: Donc le composé des quarrés de AC, CB, c'est à dire le rectangle de DK est incommensurable au double du rectangle de AC, CB; c'est à dire au rectangle LF. par le scholie de la 14. p. 10. parquoy les lignes DL, LG qui sont en mesme raison que DK, LF sont incommensurables en longueur. par la 10. p. 10. mais elles sont rationnelles: & partant commensurables en puissance seulement: & par la 37. p. 10. DG est binome.

Je dis d'avantage qu'il est binome troisieme. Car il a esté démontré que les deux noms sont incommensurables en longueur à la rationnelle DE: Et se prouvera comme à la 61. p. que DL peut plus que LG du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur: & par les secondes def. DG est binome troisieme.

SCHOLIE.

AB soit $\sqrt{72} + \sqrt{8}$, & DE 4. Donc DH sera $\sqrt{72}$, IK $\sqrt{8}$, & LN ou MF $\sqrt{24}$, qui appliquez sur DE; DI sera $\sqrt{4}$, IL $\sqrt{1}$, & LM ou MG $\sqrt{1}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{8}$, & LG $\sqrt{6}$. Parquoy la toute DG est $\sqrt{8} + \sqrt{6}$, qui est binome troisieme.

THEO. 46. PROP. LXIII.

Le quarré d'une ligne majeur, appliqué sur une ligne rationnelle, fait l'autre costé binome quatrieme.

Soit la ligne majeur AB, diuisée en ses noms en C, dont le plus grand soit AC. (apres avoir construit comme en la 61. p. de ce liure). Je dis que DG est binome quatrieme.

Car puis que AB est ligne majeur, par la 40. p. AC, & CB sont incommensurables en puissance, comprenant un rectangle medial, & le composé de leurs quarrés rationnel: partant

le rectangle DK egal au composé d'iceux quarréz est aussi rationel, lequel estant appliqué sur la rationele DE, son autre costé DL sera aussi rationel cōmens. en longitude à icelle DE par la 21. p. 10. Item le rectangle LF double du rectangle de AC, CB sera medial, lequel appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, par la 23. p. 10. LG sera rationele incommensurable en longitude à DE. Et partant par la 13. p. 10. Les rationeles DL & LG, seront incommensurable en longitude. Donc commensurable en puissance seulement: & par la 37. p. 10. DG est binome.

Je dis d'avantage qu'il est binome quatriesme. Car puis que les lignes AC & CB sont incommens. en puissance, leurs quarréz seront incommens. partant aussi leurs egaux rectangles DH, IK, & les lignes DL, & IL incommens. Et d'autant que nous demonstrerons comme en la 61. p. que DL est plus grande que LG, & sur DL est appliqué le rectangle de DI, IL egal au quart du quarré de LG, & defaillant d'une figure quarrée, lequel diuise icelle DL en parties incommensurables en longitude, par la 19. p. 10. DL, qui est commensurable en longitude à la rationele DE, peut plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude, & par les secondes def. DG est binome quatriesme.

S C H O L I E.

La ligne majeure AB soit $\sqrt{10 + \sqrt{37\frac{1}{2}}} + \sqrt{10 - \sqrt{37\frac{1}{2}}}$, & la rationele DE soit 5. Donc le rectangle DH sera $10 + \sqrt{37\frac{1}{2}}$, IK $10 - \sqrt{37\frac{1}{2}}$: LN ou MF $\sqrt{62\frac{1}{2}}$, qui appliquez sur DE, le costé DI sera $2 + \sqrt{1\frac{1}{2}}$ IL $2 - \sqrt{1\frac{1}{2}}$ & LM ou MG $\sqrt{2\frac{1}{2}}$. Parquoy DL sera 4, & LG $\sqrt{10}$; & par consequent la toute DG est $4 + \sqrt{10}$, qui est binome quatriesme.

THEOR. 47. PROP. LXV.

Le quarré d'une ligne pouvant vn rationel & vn medial, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé binome cinquiesme.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuisee en ses noms au point C, dont le plus grand est AC (apres auoir construit comme à la 61. p.) Je dis que DG est binome cinqiesme.

Car puis que AB est ligne pouuant vn rationel, & vn medial, AC, CB, par la 41. p. 10. sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarez medial : Partant le rectangle DK egal au composé d'iceux quarez est aussi medial, lequel estant appliqué sur la rationele DE, son autre costé DL sera aussi rationel communurable en puissance seulement a icelle DE par la 13. p. 10. Item le rectangle de AC, CB estant rationel, son double LF sera aussi rationel, & par la 21. p. 10. Iceluy LF estât apliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, son autre costé LG, sera ligne rationele com. en longi. à icelle DE; & par la 13. p. 10. les rationeles DL, LG seront com. en puissance seulemēt, & par la 36. p. 10. DG sera binome. Je dis de plus, qu'il est binome cinqiesme. Car LG est commens. en longueur à la rationele DE, & si on prouuera comme en la precedente, que DL peut plus que LG, du quarre d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & par les secondes definitions DG est binome cinqiesme.

SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{125+5} + \sqrt{125-5}$, & la rationele DE 5. Donc le rectangle DH sera $\sqrt{125+5}$, IK $\sqrt{125-5}$, & LN, ou MF 10, qui appliquez sur DE, le costé DI sera $\sqrt{5+1}$, IL $\sqrt{5-1}$, & LM, ou MG 2. Parquoy DL sera $\sqrt{20}$. & LG 4, & par consequent la toute DG est $\sqrt{20+4}$, qui est binome cinqiesme.

THEOR. 48. PROP. LXVI.

Le quarré d'une ligne pouuant deux medianx apliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome sixiesme.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuisee en ses nōs au point C, dont le plus grand est AC. (Après auoir construit comme aux precedentes (je dis que DG est binome sixiesme.

Car puis que AB est ligne pouuant deux mediaux, par la 42.p.10.AC, CB sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarrés aussi medial : ainsi il est euident que DK & LF sont mediaux, & incommens. & par la 23.p.10.iceux estans appliquez sur lignes rationeles, leurs autres costez DL, LG seront rationaux commensur. en puissance seulement à la rationele DE. Mais iceux costez DL, LG estans entr'eux comme les parallelogrammes DK, LF, lesquels sont incommens. seront aussi entr'eux incommens. en longitude, par la 10.p.10. Donc les rationeles DL, LG seront incommens. en puissance seulement, & par la 37.p.10. DG est binome, duquel les deux noms sont incommens. en longit. à la rationele DE : & comme il a esté demonstré aux precedentes, le plus grand d'iceux DL peut plus que le moindre LG, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longit. & par les secondes def. DG est binome sixiesme.

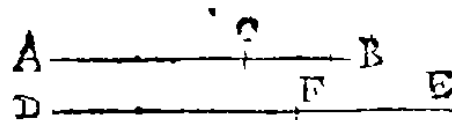
SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{252} + \sqrt{72}$, & DE 6. Le rectangle DH sera donc $\sqrt{252} + \sqrt{72}$, IK $\sqrt{252} - \sqrt{72}$, LN, ou MF 180, qui appliquez à DE, le costé DI est $\sqrt{7} + \sqrt{2}$, IL $\sqrt{7} - \sqrt{2}$, & LM ou MG 5. Partant DL est $\sqrt{28}$, & LG $\sqrt{20}$; Et par consequent la toute DG est $\sqrt{28} + \sqrt{20}$, qui est binome sixiesme.

THEOR. 49. PROP. LXVII: Six. 6.

La ligne commens. en longitude au binome, est aussi binome de mesme ordre.

Soit quelconque binome AB diuisee en ses noms au point C, desquels AC est le plus grand, & CB le moindre : & soit la ligne droite DE, commensurab.



en longitude au binome AB. Je dis que DE est aussi binome, & de mesme ordre que AB.

Car ayant fait par la 12.p.6. comme la toute AB est à la toute DE, ainsi la retranchée AC à la retranchée DF, par la 19.

p. 5. le reste CB sera au reste FE, comme la toute AB à la toute DE. Et pource que AB, DE, sont commens. en longit. par la 10. p. 10. AC, DF, & CB, FE, seront aussi commens. en long. Mais par la 37. p. 10 AC, CB, sont rationeles. Donc aussi DF, FE sont rationeles. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en changeant comme AC sera à CB, ainsi DF à FE. Mais AC, CB sont rationeles commensur. en puissance seulement: donc aussi DF, FE seront rationeles commens. en puissance seulement. Et partant par la 37. p. 10 DE est binome. Maintenant ie dis qu'il est aussi binome de mesme ordre que AB.

Car si AC peut plus que CB du carré d'une ligne qui luy soit commens. en longueur, aussi par la 15. p. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Et si AC est commens. en longueur à la rationele proposee, aussi sera DF par la 12. p. 10. Veu que l'une & l'autre est commens. en longueur à la mesme AC: Et partant AB, & DE seront binome premier: Si BC est commens. en longueur à la rationele exposee, aussi sera FE: ainsi AB & DE seront binome second: si AC & BC sont incommens. en longueur à la rationele, aussi seront DF & FE, & par les def. AB & DE seront binome troisieme. Que si AC peut plus que CB du carré d'une ligne qui luy soit incommens. en longueur, aussi par la 15. p. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Parquoy nous demonstrerons comme dessus, que AB, DE, seront binome ou quatrieme, ou 5. ou 6. Partant AB, DE, seront binomes de mesme ordre.

THEOR. 50. PROP. LXVIII.

La ligne commens. en longueur à une bimediale, est aussi bimediale de mesme ordre.

Soit quelconque bimediale AB, diuisee en ses noms au point C, desquels AC est le plus grand, & CB le plus petit, & à icelle AB soit commensurable en longueur la ligne DE. Ie dis qu'elle est aussi bimediale de mesme ordre qu'icelle AB.

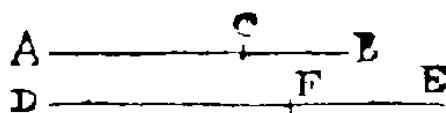
Car (apres auoir construit comme en la precedente) le reste CB sera au reste FE, come la toute AB, à la toute DE: & partant par la 10. p. 10. AC sera com. en long. à DF, & CB à FE. Mais AC, CB sont mediales: donc par la 24. p. 10. DF, FE, commens. à icelles sont aussi mediales. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en changeant comme AC à CB, ainsi DF à

IE. Mais AC, CB sont commens. en puissance seulement, par la 38. p. 10. Donc aussi DF, FE seront commensurables en puissance seulement, par la 10. p. 10. mais elles sont aussi mediales: & partant par la 38. ou 39. p. 10. DE sera bimediale. D'avantage ie dis qu'elle est en mesme ordre que AB. Car d'autant que comme AC est à DF, ainsi BC à FE, par la 22. p. 6. Le quarré de AC sera au quarré de DF, comme le rectangle de AC, BC, est au rectangle de DF, FE, (estant iceux rectangles semblables, d'autant qu'ils ont les costez prop.) Mais le quarré de AC est commensurable au quarré de DF, ainsi par la 10. p. 10. les rectangles seront aussi commens. que si l'un est rationel, l'autre le sera aussi. Et partant AB, & DE seroient bimediales premieres, par la 38. p. 10. Que si l'un des rectangles est medial, l'autre sera aussi medial, & AB & DE seront bimediales secondes, par la 39. p. 10. Ainsi DE sera bimediale, & en mesme ordre que AB.

THEOR. 51. PROP. LXIX.

La ligne commens. à vne ligne maieur, est aussi ligne maieur,

Soit la ligne maieur AB, diuisee en ses noms en C, & à icelles soit commens. DE. Ie dis qu'elle est aussi ligne maieur.



Car (apres auoir construit comme aux precedentes) AC sera à CB cōme DF à FE, & AC commens. à DF & CB à FE : mais par la 41. p. 10. AC & CB sont incommens. en puissance ; aussi DF & FE seront incommens. Item puis que icelles lignes AC, CB, DF, FE sont prop. par la 22. p. 6. leurs quarréz seront proportionnaux : & en composant, les deux de AC & BC seront au seul de CB, cōme les deux de DF & FE, sont au seul de FE, & en changeant les deux quarréz de AC, & CB, seront aux deux de DF & FE, comme le seul de CB est au seul de FE. Mais les lignes CB, FE estans commens. leurs quarréz seront aussi commens. & partant les deux de DF & FE, seront par la 10. p. 10. commens. aux deux de AC & BC: & seront rationaux commē iceux. Itē prouuera comme en la precedente que le rectangle de DF

& FE est commensurable au rectangle de AC & BC : lequel estant medial, par la 40.p.10. aussi sera celui de DF & FE, par le corol. de la 24.p.10. Parquoy DE sera ligne majeure.

THEOR. 52. PROP. LXX.

La ligne commensurable à vne ligne pouvant vn rationel, & vn medial; est aussi ligne pouvant vn rationel, & vn medial.

Soit la ligne AB pouvant vn rationel & vn medial, diuisee en ses noms en D, & à icelle soit commens. la ligne DE. Je dis qu'elle est aussi pouvant vn rationel & vn medial.

Car (apres telle construction qu'aux precedentes) on prouuera que comme AC & BC sont incommens. en puissance, aussi seront DF & FG. Item les quarez de AC & BC composez seront commens. au composé des quarez de DF & FE; & le rectangle de AC & BC sera commens. au rectangle de DF & FE. Mais par la 41.p.10. le composé des quarez de AC & BC est medial, & leur rectangle rationel: Partant le composé des quarez de DF & FE sera aussi medial, & leur rectangle rationel: & DE sera ligne pouvant vn rationel, & vn medial, par la 40.p.10.

THEOR. 53. PROP. LXXI.

La ligne commensurable à vne ligne pouvant deux mediaux; est aussi ligne pouvant deux mediaux.

Soit la ligne AB pouvant deux mediaux, diuisee en ses nōs au point C, & à icelle soit commens. DE. Je dis qu'elle est aussi ligne pouvant deux mediaux.

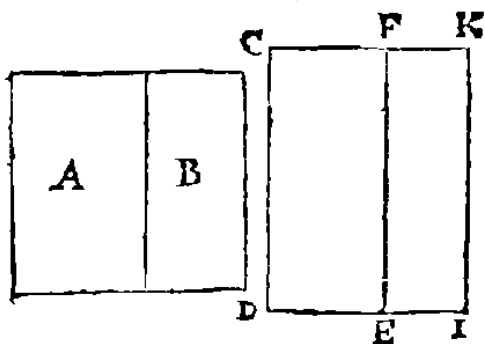
Car (apres construction faicte comme aux precedentes) on prouuera tout de mesme que DF & FE sont incommens. en puissance: que le composé de leurs quarez est medial, & leur rectangle medial: Mais puis que le composé des quarez de

AC & BC, est au composé des quarréz de DF & FE, comme le quarré de CB au quarré de FE : & que par la 22 p. 6. comme le quarré de CB au quarré de FE, ainsi le rectangle de AC & BC, au rectangle de DF & FE, par la 11. p. 5. Le composé sera au composé, comme le rectangle au rectangle : Et en changeant, comme le composé des quarréz de AC & BC est incommens. à leur rectangle, aussi le composé des quarréz de DF & FE est incommens. à leur rectangle, & par la 42. p. 10. DE est ligne pouvant deux mediaux.

THEOR. 5. PROP. LXXII. Six. 7.

Si vne superficie rationelle, & vne mediale sont ioinctes, la ligne qui peut tout le composé est binome, ou bimediale premiere, ou ligne majeure, ou ligne pouvant vn rationel, & vn medial.

Soient ioinctes deux superficies A rationelle & B mediale : ie dis que la ligne qui peut toutes les deux est binome, ou bimediale premiere, ou ligne majeure, ou ligne pouvant vn rationel & vn medial.



Car premierement les deux superficies ne scauroient estre egales (car ou elles seroient toutes deux rationelles, ou toutes deux mediales). Soit donc premierement A plus grande que B : Et sur la rationelle CD soit appliqué le rectangle CE egal à A : & sur EF vn autre rectangle FI egal à B. Et puis que A est rationelle, & B mediale, aussi CE sera rationel, & FI medial, lesquels estans appliquez à la rationelle CD; CE sera rationelle commun. en longit. à icelle CD par la 21. p. 10. & aussi FK rationelle, mais incommens. en longit. à CD par la 23. p. 10. & par la 13. p. 10. les rationelles CE, FK seront incommens. en longueur, donc commun. en puissance seulement : & par la 37. p. 10. CK sera binome diuisé en ses noms en F : Et par la 1. p. 6. CE estant plus grande que FI : CE sera le plus grand nom, lequel peut plus que FG du quarré d'une ligne qui luy est cō-

menf. ou incommenf. en long. Si commenf. (eftant CF eom-
menf. en longitude à la rationele CD) CK fera binome pre-
mier par la 1. des feconde def. Et par la 55. p. 10. la ligne qui
peut le rectangle CI eft binome. Si incommenf. CK fera bi-
nome quatriefme, par la 4. des fecondes def. & par la 58. p. 10.
la ligne qui peut iceluy rectangle CI eft ligne maieure. Que
fi A eft plus petit que B, auffi CE fera plus petit que FI, & CF
fera le plus petit nom commenf. à la rationele CD : & par ce
moyen CK fera binome fecond ou cinquiefme : fi binome fe-
cond, par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eft bi-
mediale premiere. Si binome cinquiefme, par la 59. p. 10. la
ligne qui peut le rectangle CI eft ligne pouuant vn rationel
& vn medial.

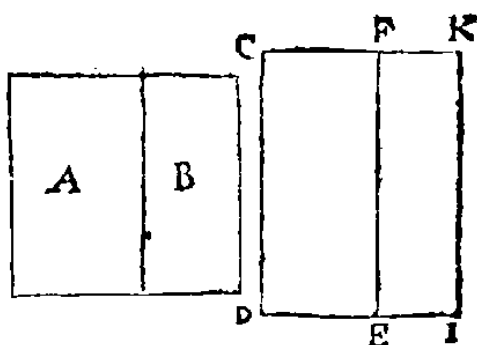
S C H O L I E.

Si la furface rationele A eft 7, & la mediale BV 48. la ligne
pouuant icelles adioutees enfemble fera $2 + \sqrt{3}$, qui eft binome pre-
mier: fi A & B font 21 & $\sqrt{432}$, la ligne pouuant icelles fera $\sqrt{12}$
 $+ 3$, qui eft binome fecond: mais elle fera $\sqrt{8} + \sqrt{6}$, qui eft binome
traiſieſme, fi A eft 14. & B $\sqrt{192}$: mais fi A eft 6, & B $\sqrt{32}$, elle fera
 $2 + \sqrt{1}$, qui eft binome quatriefme: fi A eft 3 & BV 8, elle fera $\sqrt{2} + 1$
qui eft binome cinquiefme: & fi A eft 5, & B $\sqrt{14}$, la lig. pouuant la cõpo-
ſee d'icelles fera $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ qui eft binome 6. mais fi A eft 4 & BV 18, la
lig. pouuant la ſurface cõpoſee d'icelles fera $\sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{2}}$, qui eft me-
diale premiere: mais fi A eft 6. & BV 12, la ligne pouuant la com-
poſee d'icelles fera $\sqrt{(6 + 12)}$ ou $\sqrt{(3 + \sqrt{6})} + \sqrt{(3 - \sqrt{6})}$: & ſuaie-
ment fi A eft 2, & BV 8, la ligne pouuant icelles fera $\sqrt{(\sqrt{8} + 4)}$, ou
 $\sqrt{(\sqrt{2} + 1)} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)}$, qui eft ligne pouuant vn rationel & vn me-
dial.

THEOR. 55. PROP. LXXIII.

Si deux ſurfaces mediales incommenſu-
rables ſont iointes, la ligne qui peut tout le cõ-
poſé eft bimediale ſeconde, ou ligne pouuant
deux mediaux.

Soient les deux superficies mediales incommens. A & B: Je dis que la ligne qui peut toutes les deux est bimediale seconde, ou ligne pouuant deux mediaux.



Soit faite construction cõme en la precedente sur la rationele CD: les rectangles CE & FI seront mediaux & incommens. Et par la 22. p. 10. CF FK seront rationeles commens. en puissance seulement entrelles, & à la rationele CD: & par la 37. p. 10. CK sera binome. Soit donc CF le plus grand nom: Car CF & FK ne scauroient estre egales, d'autant qu'elles sont incommens. en longueur: Donc CF peut plus que CG du quarré d'une ligne qui luy est commens. ou incommens. en longueur. Si commens. CK est binome troisieme par la 3. d. secondes (estans les deux noms incommens. en longueur à la rationele) & par la 57. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est bimediale seconde: Si incommens. CK, par la 6. des secondes def. sera binome sixiesme: & la ligne qui peut le rectangle CI est par la 60. p. 10. ligne pouuant deux mediaux.

S C H O L I E.

Si A est $\sqrt{50}$, & B $\sqrt{48}$. la ligne pouuant la composee d'icelles sera $\sqrt{18} + \sqrt{8}$, qui est bimediale seconde: mais si A est $\sqrt{12}$, & B $\sqrt{8}$, ladite ligne pouuant icelles sera $\sqrt{12} + \sqrt{8}$, ou bien $\sqrt{3} + 1$, qui est ligne pouuant deux mediaux.

C O R O L A I R E.

De toutes ces choses on peut facilement colliger que le binome, & les autres lignes irrationeles qui suyuent icelle, sont differentes entrelles, & à la mediale. Car le quarré d'une ligne mediale, appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre costé rationel commens. en puissance seulement à la rationele à laquelle il est appliqué par la 23. p. 10.

Mais le quarré d'un binome, fait l'autre costé binome premier par la 61. p. 10.

Le quarré d'une bimediale premiere, fait l'autre costé binome se-

cond, par la 62. p. 10.

Le quarré d'une bimediale seconde, fait l'autre costé binome troisieme, par la 63. p. 10.

Le quarré d'une ligne majeure, fait l'autre costé binome quatrieme, par la 64. p. 10.

Le quarré d'une ligne pouuant un rationel & un medial, fait l'autre costé binome cinquieme, par la 65. p. 10.

Le quarré d'une ligne pouuant deux mediaux, fait l'autre costé binome sixieme, par la 66. p. 10.

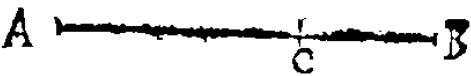
Mais il faut tousiours entendre qu'ils soient appliquez sur une ligne rationele. Et puis que tous ces costez sont differens entr'eux, il est manifeste que toutes icelles lignes irrationelles sont differentes entr'elles.

I C Y C O M M E N C E N T L E S sixaines des lignes irrationelles par le retranchement.

THEOR. 56. PROP.^{te} LXXIV.

Si d'une ligne rationele, est retranchee vne ligne rationele commens. en puissance seulement à la toute; le reste est irrationel: Soit appelé Residu.

Soit retranchée de la rationele AB la rationele AC, en sorte que AB & AC, soient rationeles commens. en puissance seulement: Je dis que le reste CB est irrationel.



Car par la 1. p. 6. comme AB est à AC, ainsi le quarré de AB est au rectangle de AB & AC: mais AB est incommensur. en longueur à AC. Donc par la 10. p. 10. Le quarré de AB est incommens. au rectangle de AB & BC: Partant aussi à son double: mais les quarrés de AB & AC, sont posez commens. Donc par la 16. p. 10. les deux ensemble seront commens. au seul de AB: & partant puis que le quarré de AB est incommen-

furable au double du rectangle de AB, AC, par la 14 p. 10. les quarez de AB & AC, seront aussi incommens. à deux fois le rectangle de AB & AC, lesquels avec le quarré de CB, estans egaux aux 2 quarez de AB & AC par la 7. p. 2. il s'ensuivra que le quarré de CB avec deux fois le rectangle de AB, & AC seront incommensurable à iceux deux rectangles : Et par le corol. de la 17. p. 10. deux fois le rectangle avec le quarré de CB, (ou les deux quarez de AB & AC) seront incommens. au quarré de CB; Mais iceux quarez de AB, AC, estā rationaux (car ils sont descrits sur lignes rationeles) le quarré de CB sera irrationel: Partant la ligne CB sera aussi irrationele appelée Residu.

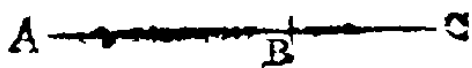
S C H O L I E.

La rationele AB soit 2 & AC $\sqrt{3}$: Donc le reste BC sera $2 - \sqrt{3}$. Or en ceste prop. Et és 5 suivantes, ou Euclide montre l'origine des Apotomes ou residus, il ne veut dire autre chose, sinon que si aux lignes dont il s'agit és prop. 37. 38. 39. 40 41. Et 42, on retranche le plus petit nom du plus grand, ce qui restera est irrationel appelé residu, &c.

THEOR. 57. PROP. LXXV.

Si d'une ligne mediale, est retranchée vne mediale commens. en puissance seulement à la toute, comprenant avec la toute vn rectangle rationel; le reste est irrationel: Soit appelé residu medial premier.

Soit la mediale AC, de laquelle est retranchée la mediale AB



en sorte que AB & AC sont me-

diales commens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel: Je dis que le reste BC est irrationel,

Car puis que AB & AC sont mediales, leurs quarez seront mediaux, & partant incommens. au double du rectangle de AB & AC, lequel est rationel: Et par la 7. p. 2. deux fois le rectangle de AB & AC avec le quarré de BC estans egaux aux

quarrez de AB & AC, setont incommens. au double du rectang. de AB & AC, & par la 17. p. 10. le carré de BC sera incommens. au double du rectang. AB & AC, lequel estant rationel, le carré de BC sera aussi irrationel; & partant la ligne BC aussi irrationele, qu'on appellera residu medial premier.

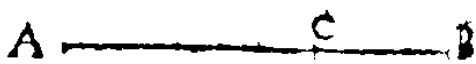
S C H O L I E.

La mediale AC soit $\sqrt{54}$, & la retranchée AB $\sqrt{24}$: donc le reste BC sera $\sqrt{54} - \sqrt{24}$.

THEOR. 58. PROP. LXXVI.

Si d'une ligne mediale est retranchée vne ligne mediale commens. en puissance seulement à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial; le reste est irrationel: Soit appelé residu medial second.

Soit la mediale AB, de laquelle est retranchée la mediale AC, en sorte que AB & AC soient commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial: Je dis que le reste CB est irrationel.



Car puis que les quarrez de AB & AC sont commensurab. par la 16. p. 10. le composé d'iceux sera aussi commensur. à vn chacun d'eux: & chacun d'iceux estant medial, pource que les lignes AB, AC sont posées mediales) aussi le composé d'iceux quarrez est medial par le coroll. de la 24. p. 10. comme aussi le double du rectangle de AB, AC, puis que le seul rectangle de AB, AC est posé medial. Veu donc que par la 7. p. 2. le composé des quarrez de AB, AC, est egal au double du rectangle de AB, AC avec le carré de CB: le composé des quarrez de AB, AC, qui est medial, excedera le double du rectangle de AB, AC, qui est aussi medial, du carré de CB. Mais par la 27. p. 10. vn medial n'excede pas vn medial, d'un rationel: donc le carré de CB n'est pas rationel; & partant il est irrationel; & la ligne BC sera aussi irrationele, qu'on appellera residu medial second.

S C H O L I E.

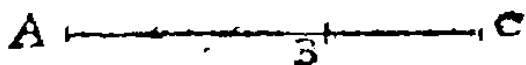
SCHOLIE.

La médiale AB soit $\sqrt{18}$, & AC $\sqrt{8}$: donc le reste CB sera $\sqrt{18} - \sqrt{8}$.

THEOR. 59. PROP. LXXVII.

Si d'une ligne droite est retranchée une ligne droite incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial, & le composé de leurs quarrés rationnel; le reste sera irrationnel: Soit appelé ligne Mineure.

Soit la ligne droite AC ,
de laquelle est retranchée AB
incommen. en puissance à la



toute AC , comprenant avec icelle un rectangle medial, & le composé de leurs quarrés est rationnel: Je dis que le reste BC est irrationnel.

Car puisque le composé des quarrés de AB , & AC est rationnel, il est incommensurable au rectangle de AC & AB , lequel est medial: partant aussi au double d'iceluy rectangle. Mais par la 7. p. 2. le composé des quarrés de AB , AC est égal au double du rectangle de AB , AC , ensemble au carré de CB : donc par le corol. de la 17. p. 10. le composé d'iceux quarrés de AB , AC sera aussi incommensurable au carré de CB . Et puis qu'iceluy composé est posé rationnel, par la 10. d. le carré de BC est irrationnel, & la ligne BC irrationnelle, qu'on appellera ligne mineure.

SCHOLIE.

Soit la ligne AC $\sqrt{18 + \sqrt{108}}$. & AB $\sqrt{18 - \sqrt{108}}$: le reste BC sera donc $\sqrt{18 + \sqrt{108}} - \sqrt{18 - \sqrt{108}}$.

THEOR. 60. PROP. LXXVIII.

Si d'une ligne droite est retranchée une

ligne droicte incômenfurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial, le reste fera irrationel : soit appelé ligne faifant avec vne superficie rationelle vn tout medial.

Soit la ligne droicte AC, de laquelle est retranchée AB incommens. en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez est medial. Je dis que le reste BC est irrationel.

Car puis que le rectangle de AB & AC est rationel, aussi sera son double, & partant par la 10. d. il sera incommensurable au composé des quarrez de AC & AB, lequel est medial, c'est à dire irrationel. Mais le composé d'iceux quarrez par la 7. p. 2. est egal au double du rectangle de AB, AC, ensemble au quarré de BC. Donc aussi le double du rectangle de AB, AC est incommensurable au double d'iceluy rectangle avec le quarré de BC : Et par la 17. prop. 10. iceluy double rectangle sera aussi incommens. au quarré de BC. Et puis que iceluy double rectangle est rationel, par la 10. d. le quarré de BC sera irrationel, & la ligne BC irrationele. appelée ligne faifant avec vne superficie rationele, vn tout medial, ainsi nommée à cause que le quarré d'icelle ligne adiousté avec vne superficie rationele fait vn tout medial comme il apparoistra à la 109. p. 10.

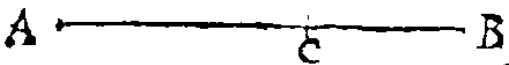
SCHOLIE.

Si AC est $\sqrt{216 + \sqrt{72}}$ & AB $\sqrt{216 - \sqrt{72}}$; le reste BC sera $\sqrt{216 + \sqrt{72}} - \sqrt{216 - \sqrt{72}}$.

THEOR. 61. PROP. LXXVIII.

Si d'une ligne droicte, est retrâchée vne ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectagle me-

dial , incommensurable au composé de leurs quarez aussi medial; le reste est irrationel : soit appelé ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne droicte AB , de laquelle est retranché la ligne A  C incommensurable en puissan-
ce à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial in-
commensurable au composé de leurs quarez aussi medial: Je
dis que le rectangle BC est irrationel.

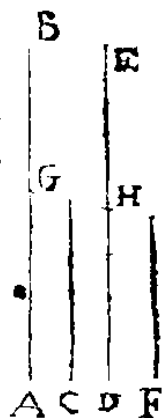
Car puis que par la 7. p. 2. le composé des quarez de AB.
AC, est egal au double du rectangle de AB, AC, avec le quar-
ré de BC: iceluy composé des quarez excedera le double du
rectangle, du carré de BC. Mais par la 27. p. 10. vn medial,
n'excede pas vn medial d'un rationel : Donc le carré de BC
n'est pas rationel; & partant est irrationel, & la ligne BC aussi
irrationele, qu'on appellera ligne faisant avec vne superficie
mediale vn tout medial : ainsi appelée parce que le carré
d'icelle avec vne superficie mediale fait vn tout medial, com-
m'apparoistra à la 110. p. 10.

S C H O L I E.

Si AB est $\sqrt{180 + \sqrt{60}}$, & AC $\sqrt{180 - \sqrt{60}}$, le reste CB sera
 $\sqrt{(\sqrt{180 + \sqrt{60}}) - \sqrt{(\sqrt{180 - \sqrt{60}})}}$

L E M M E.

S'il y à quatre grandeurs AB, C, DE, F, & que GB ex-
cez d'entre AB & C soit egal à DH excez d'entre DE & F
E; aussi en changeant l'excez d'entre AB & DE sera e-
gal à l'excez d'entre C & F. Car puis que GB est l'excez
d'entre AB & C, AG sera egal à C : En la mesme ma-
niere DH sera egal à F. Donc l'excez d'entre AG & DH
sera egal à l'excez d'entre C & F, puis que ces grādeurs
sont egales à celles-li, chacune à la sienne, & partant
adioustant à AG & DH choses egales GB & HF, l'ex-
cez d'entre les toutes AB, & DE sera toujours egal à
l'excez d'entre C & F. Ce qui estoit proposé.



COROLLAIRE.

De ces choses appert que quatre grandeurs ayant proportion Arithmétique, en changeant elles seront aussi en proportion Arithmétique.

THEOR. 62. PROP. LXXX.

Au residu ne peut conuenir qu'une seule ligne rationele commens. en puissance seulement à la route.

Soit le residu AB, auquel conuienne BC en sorte que AB & BC soient rationeles commens. en puissance seulement : Je dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne en la mesme sorte.

Car s'il est possible, en soit une autre BD, s'accordant avec icelle AB, en sorte que AD, & BD soient rationeles commensurables en puissance seulement. Maintenant par la 7. p. 2. les deux quarez de AC, BC sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, BC du quarré de AB. Pareillement les deux quarez de AD, & BD sont plus grands que deux fois le rectangle de AD, BD, du mesme quarré de AB; & en changeant par le lemme precedent, les quarez excéderont autant les quarez, que les rectangles excèdent les rectangles: & d'autant que les quarez sont rationaux, leur excez sera rationel, par le lemme precedent la 43. p. 10. & partant les rectangles estans mediaux, (pource que par la 22. p. 10. un seul d'iceux rectangles est medial, & par le corol. de la 24. p. 10. son double est aussi medial) leur excez sera rationel contre la 27. p. 10. Donc à AB ne peut conuenir autre ligne que BC, rationele commensurable en puissance seulement à la route.

THEO. 63. PROP. LXXXI.

Au residu medial premier, ne s'accorde qu'une

ne seule ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel.

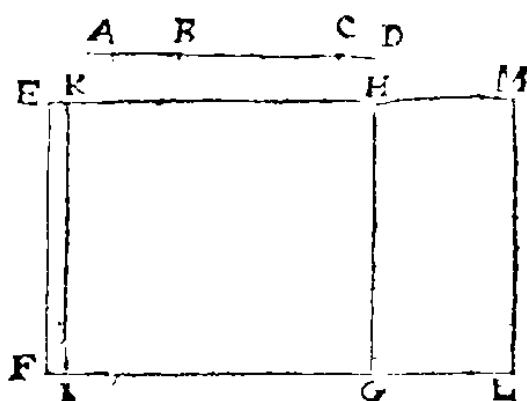
Soit le residu medial premier AB, auquel la mediale BC s'accorde en sorte que AC & BC, soient mediales commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel: Je dis qu'à icelle AB ne peut convenir autre ligne que BC en la mesme sorte.

Car si faire se peut en soit vne autre BD. Maintenant par la 7.p.2. il se prouuera comme en la preced. que l'excez d'entre le composé des quarez de AB, BC, & le composé des quarez de AD, BD, est tel que l'excez d'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre ces rectangles est rationel par le lemme qui precede la 43.p.10 pource que chacun d'iceux est rationel: & partant l'excez d'entre les quarez qui sont mediaux (estans descrits sur lignes mediales) seroit aussi rationel, contre la 27. p.10. Donc à AB n'a peu convenir autre ligne mediale que BC, qui soit commens. en puissance seulement à la toute, & comprenant avec icelle vn rectangle rationel.

THEOR. 64. PROP. LXXXII.

Au residu medial second, ne peut estre conjoincte qu'une seule ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial.

Soit conjoincte au residu medial second AB la mediale BC, commens. en puissance seulement à la toute AC, & faisant avec icelle vn rectangle medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut pas convenir vne autre ligne que BC, en la mesme sorte.



Car si faire se peut, en soit conjoincte vne autre BD en la sorte requise. Et sur la rationele proposée EF soit appliqué le rectangle EG égal aux deux quarréz de AC, BC; & a la mesme EF soit encore appliqué EI égal au quarré de AB: parquoy par la 7. p. 2. le reste KG sera égal à deux fois le rectangle de AC, BC. Ité sur la mesme rationele soit encore appliqué le rectangle EL égal aux deux quarréz de AD, BD: Et puisque le rectangle EI est égal au quarré de AB: aussi KL sera égal à deux fois le rectangle de AD, DB, par la 7. p. 1.

Maintenant les quarréz de AC & BC sont mediaux (estans faicts de lignes mediales) & si deux fois le rectangle de AB & BD doit estre medial: partant leurs egaux rectangles EG, & KG seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationele EF, auront les autres costez EH, & KH rationaux commens. en puissance seulement a EF par la 13. p. 10. en apres le quarré de AC estant au rectangle de AC, & BC, par la 1. p. 6. comme AC est à BC, qui sont incommens. en longueur: par la 10. p. 10. le quarré de AC sera incommens. au rectangle de AC & BC: & partant aussi à son double KG. Item le quarré de BC est commens. au quarré de AC, & par la 16. p. 10. le rectangle EG égal à iceux quarréz, sera commens. au seul quarré de AC, auquel KG est incommens. Et par la 14. p. 10. EG, & KG seront incommens. aussi seront les lignes EH & KH par la 1. p. 6 & 10. p. 10. lesquelles estans rationeles seront commens. en puissance seulement; & par la 74. p. 10. EK sera residu, & KH sa conuenable. Par mesme discours (si on maintient que DC soit aussi adiointe a AB, selon le requis) EK se trouuera residu, & KM sa conuenable: ce qui seroit contre la 80. p. 10. Donc au residu medial AB ne peut s'adjoindre autre conuenable que BC.

THEOR. 65. PROP. LXXXIII.

A la ligne mineure, est conuenable vne seule ligne incommens. en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarréz rationel.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle conuenne BC incommens. en puissance à



la toute AC, & faisant le composé de leurs quarrez rationel, & le rectangle compris d'icelles AC, BC, medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut estre adioincte autre ligne que BC selon le requis.

Car si faire se peut en soit adioustee vne autre BD selon le requis. Il se prouuera comme en la 80. p. 10. qu'il y a mesme excez entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD. qu'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre les quarrez est rationel par le lemme qui suit la 42. prop. 10. pource que l'un & l'autre composé est rationel : donc aussi l'excez d'entre les rectangles sera rationel, contre la 27. p. 10. Car iceux rectangles estas mediaux l'excez d'iceux ne peut estre rationel. Donc à la ligne mineure AB on n'a peu adiouster autre ligne conuenable que BC.

THEOR. 66. PROP. LXXXIII.

A la ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial, s'accorde vne seule ligne incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarrez medial.

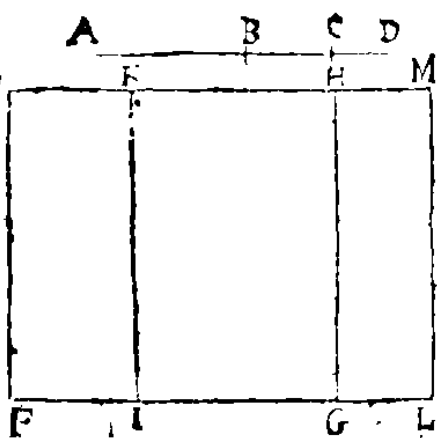
Soit la ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial AB, à laquelle s'accorde la ligne BC, incommensur. en puissance à la toute AC, & comprenant avec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarrez medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut s'accommoder autre ligne que BC, qui soit selon le requis.

Car s'il est possible en soit encore vne autre BD: il se prouuera comme en la 80. p. 10. que les quarrez de AC, & BC, excèdent les quarrez de AB & BD d'un mesme excez, que deux fois le rectangle de AC & BC, excèdent deux fois le rectangle de AB, & BD, lequel excez comme en la precedente seroit rationel & irrationel si à AB, on pouuoit encore adioindre BD selon le requis.

THEOR. 67. PROP. LXXXV.

A la ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial, se conioinct vne seule incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarez aussi medial,

Soit la ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial AB, a laquelle s'accorde BC ^E incommens. en puissance a la toute AC, & comprenant avec icelle vn rectangle medial incommensurable au composé de leurs quarez, qui est aussi medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut s'adjoindre autre ligne que BC, qui fasse le requis.



Car si faire se peut en soit adioustee vne autre BD. Puis soit fait mesme construction qu'en la 82. p. 10. Donc le composé des quarez de AC & BC estant medial & incommensurable a deux-fois le rectangle de AC & BC aussi medial, leurs egaux rectangles EG, & KG seront mediaux, & incommensurable: Et par la 13. p. 10. estans appliquez sur la rationelle E F leurs autres costez EH, & KH seront lignes rationnelles, & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. commensurables en puissance seulement (puis que leurs rectangles sont incommensurables,) & par la 74. 10. EK sera residu auquel KH sera convenablement adioustee. Par mesme discours (si on dit que BD soit aussi convenable à AB selon le requi.) EK se trouuera residu, & KM se convenable: ainsi le residu EK n'auroit pas vne seule convenable, contre la 80 p. 19. On ne pouoit donc pas adjoindre à AB, autre ligne convenable que BC.

DEFINITIONS TROISIÈMES.

*Estant proposée vne ligne rationele , & le residu :
Lors la toute composée du residu , & de sa conue-
nable ou adioustee , peut plus que la conuenable ,
du quarré d vne ligne qui luy est commensurable
en longitude.*

1. Si la toute est commensurable à la rationelle proposée; le residu soit appelé residu premier.
2. Mais si l'adioustee est commensurable, à la rationelle exposée; Soit residu second.
3. Que si ny l'une ny l'autre n'est commensurable à la rationelle proposée; Soit residu troisieme.

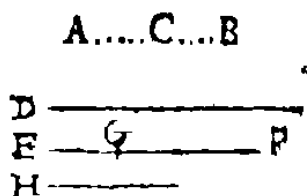
*Derecheflors que la toute peut plus que l'adioustee ,
du quarré d vne ligne qui luy est incommensura-
ble en longitude.*

4. Si la toute est commensurable à la rationelle proposée; Soit residu quatriesme.
5. Mais si l'adioustee est commensurable à la rationelle; Soit residu cinquiesme.
6. Que si ny l'une ny l'autre n'est commensurable à la rationelle; Soit residu sixiesme.

PROBL. 19. PROP. LXXXVI.

Trouuer vn residu premier.

Estans trouvez deux nombres quarrez AB, CB, (comme nous auons enseigné au 2. scholie de la 29. p. 10.) desquels l'excez AC ne soit quarré, soit exposée la rationele D, alaquelle EF soit commensurab. en longueur: & partant icelle EF sera aussi rationele: puis apres par le corol. de la 6. p. 10 soit fait que comme le nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF soit au quarré de GF. Je dis que EG est residu premier.



Car puis que les quarrez de EF, GF qui sont comme nombre à nombre, sont commens. par la 6. p. 10. aussi les lignes EF, GF seront comm. au moins en puissance: & EF étant rationele, GF le sera aussi. Mais d'autant que AB, AC ne s'ont entr'eux comme nombres quarrez: aussi les quarrez de EF, GF ne seront comme nombres quarrez: & partant par la 9. p. 10. les lignes EF, GF sont incommens. en longueur: elles sont donc rationeles commens. en puissance seulement, & partant le reste EG sera residu par la 74. p. 10.

Je dis d'auantage qu'il est residu premier: car EF étant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle GF, soit du quarré de H. Et puis que cōme le nōbre AB est au nōbre AC, ainsi le quarré de EF, au quarré de GF, par conuersion de raison comme AB sera à CB, ainsi le quarré de EF sera au quarré de H. Mais AB, CB sont nombres quarrez: Donc les quarrez de EF & H sont comme nombres quarrez: & partant par la 9. p. 10. les lignes EF, & H sont commens. en longueur. Ainsi la route EF, commensur. en longueur à la rationele D, peut plus que la conuenable GF, du quarré de la ligne H qui luy est commens. en longueur: & partant par la 1. d. des troisieme, EG sera residu premier.

S C H O L I E.

La rationele D soit 9. EF 6: AB 9, CB 4, & par consequent AC est 5: faisant donc que comme 9 est à 5, ainsi le quarré de EF, c'est à dire 36, soit au quarré de FG; icelle FG sera √ 20: & partant le reste EG sera 6 — √ 20, qui est residu premier.

PROB. 20. PROP. LXXXVII.

Trouuer vn residu deuxiesme.

Estans trouuees deux nombres quarez AB, CB, (comme en la precedente proposition) & l'exposee rationele D, soit prise GF commens. en longitude a icelle D, laquelle sera aussi rationele: puis soit fait comme le nombre AC, est au nombre AB, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF par le corol. de la 6. p. 10. Je dis que EG est residu second.

Car puis que les quarez de GF, EF, ayans la raison des nombres AC, AB, sont commens. par la 6. p. 10. les lignes GF, EF seront aussi commens. au moins en puissance: & GF estant rationele, EF sera aussi rationele. Et d'autant que les nombres AC, AB, & partant aussi les quarez de GF, EF, ne sont comme nombres quarez, par la 9. p. 10. GF, EF, incommens. en longit. donc les rationeles GF, EF, sont commens. en puissance seulement: & partant par la 74. p. 10. le reste EG est residu.

Je dis aussi qu'il est residu second. Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, & soit du quarré de H. Donc puis que comme AC est a AB, ainsi le quarré de GF au quarré de EF & en changeant cōme AB a AC, ainsi le quarré de EF au quarré de GF. Maintenant nous demonsturerons comme en la precedente prop. que la ligne H est commensurable en longitude a icelle EF. Parquoy puis que la route EF, peut plus que l'adiouste GF, du quarré de H qui luy est cōmens. en longit. comme aussi a la rationele proposee D: par les troisiemes def. EG sera residu second.

S C H O L I E.

La rationele D soit 9, FG 5. AB 9, CB 4. & par consequent AC 5: faisant donc que comme AC, est AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF: icelle EF sera $\sqrt{45}$: & partant LG sera $\sqrt{45} - 5$, qui est residu second.

PROB. 21. PROP. LXXXVIII.

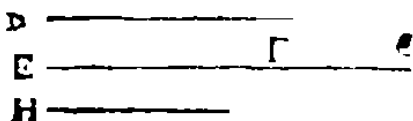
Trouuer vn residu troisieme.

Ayant trouué les deux nombres quarez AB, CB, comme en la prop. 86. soit pris vn autre nombre I Comme nous auons enseigné en la 51. prop. de ce liure) qui ne soit a l'un ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré a nombre quarré:

puis étant exposée la rationelle D
soit fait que comme I est à AB, le
quarré de D soit au quarré de EG,
lesquels quarez par la 6. p. 10. se-
ront commensurables: & partant
les lignes D & EG, aussi commensurables au moins en puissance.

A....C....B

I.....



Donc D étant rationelle, aussi EG sera rationelle. Et d'autant que les nombres I & AB, & partant les quarez de D & EG, ne sont en raison de nombres quarez, par la 9. p. 10. les lignes D & EG seront incommensur. en longueur. De rechercher soit fait que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EG soit au quarré de GF. Je dis que EF est résidu troisieme.

Car puis que les quarez de EG, GF, estans comme nombre à nombre, sont commensurables par la 6. p. 10. les lignes EG, GF seront aussi commensurables au moins en puissance. Mais EG étant rationelle, GF le sera aussi. Et puis que AB, AC, & partant aussi les quarez de EG, GF, ne sont comme nombres quarez, par la 9. p. 10. les lignes EG, GF, seront incommensurables en longueur. Donc EG, GF sont rationelles commensurables en puissance seulement: & partant puis que de EG, est ôtée GF commens. en puissance à icelle, par la 74. p. 10. le reste EF sera résidu.

Je dis qu'il est aussi résidu troisieme: Car puis que comme I est à AB, ainsi le quarré de D, au quarré de EG, & comme AB à AC, ainsi le quarré de EG au quarré de GF, en raison égale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D au quarré de GF. Or les nombres I & AC ne sont comme nombres quarez: ny par conséquent aussi les quarez de D & GF: parquoy par la 9. p. 10. les lignes D & GF sont incommensurables en longueur. Donc l'une & l'autre d'icelles EG, GF est incommensurable en longueur à la rationelle proposée D. Et comme en la 86. p. on prouvera que EG peut plus que GF du quarré de la ligne H, qui luy est commensurable en longueur: Et par les tierces def. EF sera résidu troisieme.

SCHOLIE.

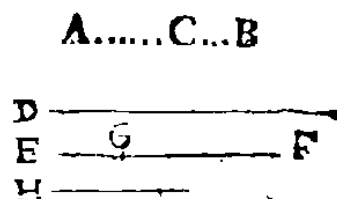
La rationelle D soit 6, & soit fait que comme le nombre I 6, est à AB 9, ainsi le quarré de D, sçavoir 36, soit au quarré de EF, & iceluy sera 54, & par consequent la ligne EF √ 54. Mais faisant que comme

AB 9, & à AC 5. ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG, icelle FG sera $\sqrt{30}$, & par consequent EG sera $\sqrt{54} - \sqrt{30}$, qui est residu troisieme.

PROBL. 22. PROP. LXXXVIII.

Trouuer vn residu quatriesme.

Estans trouuez (comme nous auons enseigné au 3. scholie de la 29. prop. 10.) deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB ne soit à l'un ny à l'autre AC, CB, comme nombre quarré à nombre quarré. soit proposée la ratio-



nele D. à laquelle soit commensurable en longueur EF, laquelle sera par consequent aussi rationelle. Que si on achue de construire comme en la 86. p. on démontrera comme là que EG est residu : & d'auantage ie dis qu'il est residu quatriesme.

Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus, qu'icelle, soit du quarré de H. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de GF : par conuersion de raison comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais les nombres AB, CB, ne sont comme nombre quarré à nombre quarré : donc par la 9. p. 10. les lignes EF & H seront incommens. en longi. Farquoy la toute EF peut plus que l'adioustée GF, du quarré de H qui luy est incommensurable en longueur, & la mesme EF est commens. en longueur à la rationelle D : partant par la def. EG sera residu quatriesme.

SCHOLIE.

La rationelle D soit 9, EF 6 : faisant donc que comme AB 9 est à AC 6, ainsi 36 quarré de EF soit au quarré de FG, icelle sera $\sqrt{24}$, & par consequent le reste EG sera $6 - \sqrt{24}$, qui est residu quatriesme.

PROB. 23. PROP. XC.

Trouuer vn residu cinquiesme.

Estans trouvez les deux nombres AC, CB, comme en la prop. preced. soit fait meisme construction qu'en la 87. p. puis soit démontré comme en icelle 87. p. que EG est residu Ie dis qu'il est aussi residu 5. Car EF peut plus que G du quarré de H: Et comme en la 86. p. nous démontrerons par conuersion de raison, que comme AB est à CB, ainsi le quarré de EF est au quarré de H: & comme en la precedente les lignes EF & H serót incommens. en longit. & la conuenable GF commens. en long. à la rationelle D. Parquoy par les def. troisiemes EG sera residu cinquieme.

SCHOLIE.

La rationelle D soit 9, EG 6. faisant que comme AC 6, est à AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF, iceluy sera 54 & par consequence la ligne EF √54; & le reste EG √54 — 6, qui est residu cinquieme.

PROB. 24. PROP. XCI.

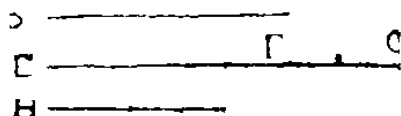
Trouuer vn residu sixieme.

Estans trouvez les trois nombres AG, CB, & I, comme en la 54. prop. & exposé la rationelle D, soit acheuee la construction comme en la 88. prop. Nous démontrerons cōme là, que D & EG sont incommens. en longit. & que EF est

residu: puis que D & EG seront aussi incommens. en longit. & partant l'une & l'autre d'icelles EG, EG est incommens. en longit. à la rationelle proposée D. Maintenant EG, peut plus que EG du quarré de la ligne H, laquelle nous démontrerons comme en la 89 p. estre incommens. en longit. à icelle EG. Parquoy par la derniere des 3. d. EF sera residu sixieme.

A.....C.....B

I.....



SCHOLIE.

La rationelle D soit 9; & soit fait que comme 19 est à AB 11, ainsi 81 quarré de D soit au quarré de EF; lequel sera trouué de 108, & par consequent icelle sera √108; & faisant qu. comme AB 11 est à

AC 7. ainsi 108 soit au quarré de FG ; icelle FG sera $\sqrt{63}$. & par conséquent le reste EG sera $\sqrt{108 - 63}$. qui est residu sixiesme.

Or nous trouverons encores (comme enseigne Theon) les six residus su dits, ainsi qu'il ensuit.

S'il faut trouver pour exemple le residu premier : soit trouué par la 49. p. 10. le binome premier AD, duquel le plus grand nom est AC, & le moindre CD; puis soit couppé de AC la ligne CB egale à CD. Je dis que AB est residu premier. Car d'autant que AC, CD, sont rationeles commensurable en puissance seulement; aussi AC, BC seront rationeles commensurables en puissance seulement : Donc par la 74. p. 10. AB est residu. Et pource que AC pout plus que CD, qu CB du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur, & AC est commens. en longueur à la rationele proposee par la d. f. du binome premier ; AB sera residu premier par la 1. des tierces des. Par la mesme maniere seront trouvez tous les autres residus, sçavoir, est le 2. si du second binome nous osons le moindre nom du plus grand, &c.

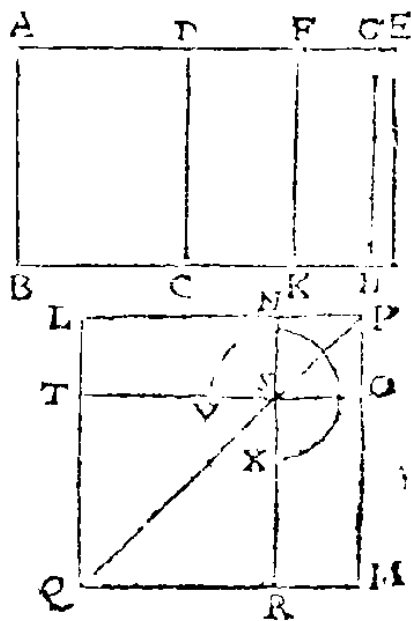
Ainsi ayant trouué le binome premier AD $9 + \sqrt{45}$, si du plus grand nom AC 9. on est le moindre nom, restera le residu AB de $9 - \sqrt{45}$. & ainsi des autres.

THEOR. 68. PROP. XCII. Six. 4.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un residu premier ; la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du residu premier AB: Je dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Au residu AB soit sa conuenable DE, laquelle soit coupee en deux également au point F, & apres auoir appliqué vn rectangle sur la ligne AE defaillant d'une figure quarrée, c'est à dire d'une ligne egale à son autre costé, & egal au quart du quarré de DE, qui est le quarré de FE, soit iceluy rectangle compris sous AG,



GE: en après soient menees les lignes FK, GH, EI paralleles a AB, qui rencontrent la ligne BC prolongee en K, H & I, puis soit fait le quarré LM egal au rectangle AH, & le quarré NO, egal au rectangle EH, ayant avec LM l'angle LPM commun. Donc les quarrés LM, NO, par la 26. p. 6. seront au long d'un mesme diametre, lequel soit PQ: soient continuees les lignes NS, OS, afin d'acheuer le gnomon VX. Maintenant FE est moyenne proport. entre AG & GE, par la 17. p. 6. car par hypothese le quarré de EF est egal au rectangle de AG & GE, & par la 1. p. 6. le rectangle KE sera milieu proport. entre les deux rectangles AH & HE; il le sera aussi entre leurs egaux quarrés LM & NO. Mais par le lemme de la 54 p. 10. le rectangle LO, est aussi milieu proport. entre iceux quarrés: Donc KE, ou DK son egal, sera egal au rectangle LO, Et par consequent KG à LS, (estant HE egal à NO.) Ice-luy GK sera aussi egal à SM: ainsi le rectangle DH sera egal au gnomon VX. Mais tout le quarré LM: est egal au rectangle AH. Partant le rectangle AC sera egal au quarré TR. Je dis que la ligne TS: qui peut le rectangle AC est residu. Soit ceste construction generale a toute la sixaine.

Car puisque AD est residu premier, & DE sa conuenable: les deux lignes AE & DE, sont rationeles commens. en puissance seulement, estant la toute AE commens. en longitude à la rationele AB, & pouuant plus que l'adioustee DE, du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude: Et par la 18. p. 10. le rectangle defaillant aura les deux costez AG, & GE commens. en longitude, & par la 16. p. 10. Ils seront commensurables en longitude à la totale AE, laquelle estant commensurable en longitude à la rationele AB, par la 12. p. 10. AE AG, GE, AB seront toutes rationeles commens. en longitude: & par la 20. p. 10. les rectangles AH & HE seront rationaux, & leurs egaux quarrés LM & NO aussi rationaux, & les lignes TO & SO rationeles.

Pareillement les deux lignes DF & FE estans egales, & commens. elles le seront aussi a leur toute DE, par la 16. p. 10. Laquelle DE estans rationele; DF, & FE seront aussi rationeles commens. en puissance seulement a AB, comme leur toute DE; & par la 21. p. 10. leurs rectangles CF & KE seront mediaux. Mais le rectangle LO est egal au medial KE, partant aussi medial, & incommens. au quarré rationel NO. Et par la 1. p. 6. & 10. p. 10. leurs costez TO & SO seront incommens. en longitude: & pour autant qu'ils sont rationaux, ils seront com. en puissance seulement, & par la 74. p. 10. TS est residu.

SCHOLIE.

S C H O L I E.

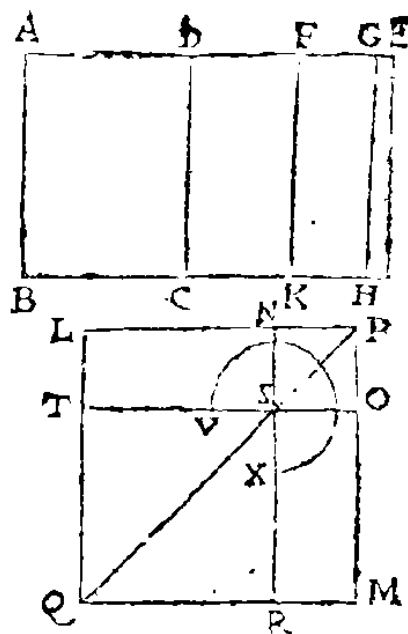
La rationelle AB soit 8, & AD 9— $\sqrt{45}$. DE est donc $\sqrt{45}$, & sa moitié DF $\sqrt{11\frac{1}{4}}$: mais AG sera $2\frac{1}{2}$, & GE $1\frac{1}{2}$. Donc le rectangle BE est 72, AH 60, HE 12, CF $\sqrt{720}$, & AC 72— $\sqrt{2880}$, & le rectangle de AG, GE est $11\frac{1}{4}$. Parquoy le quarré LM sera 60, & NO 12: & partant la ligne LP est $\sqrt{60}$, & NP $\sqrt{12}$: & par consequent LN, ou TS sera $\sqrt{60}$ — $\sqrt{12}$, qui est residu, & son quarré TR est 72— $\sqrt{2880}$, egal au rectangle AC.

THEOR. 69. PROP. CXIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle & d'un residu fecond; la ligne qui peut iceluy rectangle, est residu medial premier.

Soit le rectangle AC , compris de la rationelle AB , & du residu second AD le dis (apres avoir construit comme en la precedente) que la ligne T qui peut iceluy rectangle AC , est residu medial premier.

Car puis que AD est residu second, & DE fa conuenable, les deux lignes AE & DE sont rationnelles commensurables en puissance seulement, la conuenable DE estant cōm. en long. à la rationnelle AB; & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur, & par la 18. p. 10. Le rectangle defaillant aura les deux costez AG & GE commens. en longueur, & par la 16. p. 10. ils seront aussi commensurables à la totale AE, & par la 14. p. 10. icelle totale estant incommensurable en longueur à la rationnelle à B, aussi seront AG, & GE qui sont rationnelles



(car elles sont commens. à leur totale qui est rationele) commensurable en puissance seulement à la rationele AB, & par la 22 p. 10. les rectangles AH & HE seront mediaux ; partant mediaux leurs egaux quarrés LM & NO, & leurs costez TO & SO seront lignes mediales.

Pareillement DE estant commens. en longitude à la rationele AB, aussi sera sa moitié FE, & par la 20. p. 10. le rectangle KE sera rationel : partant aussi rationel son egal rectangle LO, compris des deux mediales TO & SO, lesquelles sont incommens. en longitude : (autrement leur rectangle seroit medial par la 25. p. 10.) & par la 75. p. 10. TS est residu medial premier.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 4, AD $\sqrt{45-5}$: DE est donc 5, & sa moitié DF $2\frac{1}{2}$, & par consequent le quarré d'icelle DE ou FE est $6\frac{1}{4}$, auquel estant egal le rectangle de AG, GE, icelles seront $\sqrt{31\frac{1}{4}}$ & $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: parquoy le rectangle HE, ou quarré NO sera $\sqrt{20}$: & partant son costé SO est $\sqrt{20}$. Mais puis que la ligne AE est $\sqrt{45}$, & AG $\sqrt{31\frac{1}{4}}$: le rectangle BE sera $\sqrt{720}$, & AH, ou le quarré LM $\sqrt{500}$: & par consequent la ligne TO est $\sqrt{500}$: de laquelle estant ostée SO, restera TS $\sqrt{500-\sqrt{20}}$, qui est residu medial premier, & son quarré TR est $\sqrt{720-\sqrt{20}}$. Mais le rectangle AC est autant : car multipliant AB 4 par AD $\sqrt{45-5}$, viendra aussi $\sqrt{720-\sqrt{20}}$. Donc TS residu medial premier peut le rectangle AC.

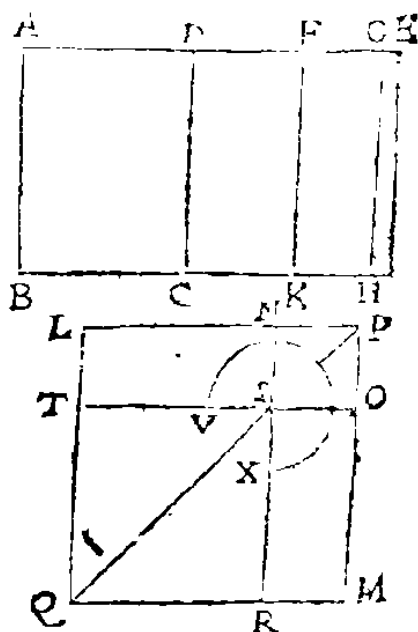
THEOR. 70. PROP. XCIII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu troisieme ; la ligne pouvant iceluy rectangle, est residu medial second.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du residu troisieme AD (apres avoir construit comme en la 91. p. 10.) Je dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, est residu medial second.

Car puis que AB est residu troisieme, & DE sa conuenable, les lignes AE & DE sont rationeles commensu. en pul-

lance seulement entr'elles, à la rationele AB, mais AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est communurable en longitude, & par la 18. p. 10. AG & GE seront communurable en longitude, & à leur totale AE par la 16. p. 10. Et seront rationnelles comme icelle: mais AE est communurable en puissance seulement à la rationele AB, & par la 14. p. 10. AG & GE seront commun. en puissance seulement à AB. Et par la 22. p. 10. les rectangles AH & HE seront mediaux: Donc aussi mediaux leurs egaux quarréz LM & NO, & leurs costez TO & SO seront lignes mediales.



Parcilleme^{nt} DE estant incommunurable en longitude à la rationele AB, aussi sera sa moitié FE, par la 14. p. 10 & par la 22. p. 10. EF estant rationele comme la double DE, le rectangle KE sera medial, partant aussi medial son egal LO, compris des deux mediales communurables en puissance seulement TO & SO: (car leurs quarréz sont communurables estans leurs egaux rectangles communurables, & ne scauroient estre communutab. en longitude, car il faudroit par la 1. p. 6. & 10. p. 10. que LO & NO fussent aussi communurables, & par consequent leurs egaux rectangles KE & HE, (ce qui n'est pas.) & par la 76. p. 10. TS est residu medial second.

SCHOLIÉ.

La rationele AB soit 4, & AD $\sqrt{54} = \sqrt{30}$; donc DE est $\sqrt{30}$: & sa moitié DF $\sqrt{7\frac{1}{2}}$ son quarré $7\frac{1}{2}$, lequel estant appliqué sur la ligne AE $\sqrt{54}$, & deffaislant d'une figure quarrée, les costez du rect. appliqué, sçavoir AG, GB, seront $\sqrt{37\frac{1}{2}}$, $\sqrt{1\frac{1}{2}}$. Parquoy le rectangle AC sera $\sqrt{864} = \sqrt{480}$, BE $\sqrt{864}$, CE $\sqrt{480}$, AH $\sqrt{600}$, DK $\sqrt{240}$, & HE $\sqrt{24}$. Mais le quarré LM estant egal à AH, il sera aussi $\sqrt{600}$, NO egal à HE $\sqrt{24}$: & partant les costez d'iceux quarréz, sçavoir TO, SO sont $\sqrt{600}$, $\sqrt{24}$: & par consequent TS est $\sqrt{600} - \sqrt{24}$, & son quarré TR $\sqrt{864} = \sqrt{480}$, egal au rectangle AC.

THEOR. 71. PROP. XCV.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un residu quatriesme; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne mineure.

Soit le rectangle AC compris de la rationelle AB, & du residu quatriesme AD. (après construit comme en la 92. p. 10.) Je dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC est ligne mineure.

Car puis que AD est residu quatriesme, & DE sa convenable, les lignes AE & DE sont rationelles commens. en puissance seulement; & AE qui est commens. en longitude à la rationelle AB, peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude: & par la 19 p. 10. AG & GE seront incommens. en longitude: partant par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les rectangles AH & HE seront incommens. aussi seront donc leurs egaux quarrés LM & NO: partant les lignes TO & SO seront incommens. en puissance: Mais AE estant communurable en longitude à la rationelle AB, par la 20. p. 10. le rectangle AI sera rationel: partant aussi rationel sera le composé de leurs egaux quarrés LM & NO. Pareillement DE estant communurable en puissance seulement à AB, le rectangle CE sera medial par la 22. p. 10. aussi sera sa moitié KE: & par consequent son egal LM sera aussi medial: partant les deux lignes TO & SO, qui comprennent iceluy rectangle, mediales (estans incommens. en puissance) & le composé de leurs quarrés estant rationel, par la 77. p. 10. TS est ligne mineure.

S C H O L I E.

La rationelle AB soit 6, AD 9— $\sqrt{54}$; donc DE est $\sqrt{54}$, & sa moitié DF $\sqrt{13\frac{1}{2}}$, son quarré $13\frac{1}{2}$, lequel appliqué sur AE 9, & defaillant d'une figure quarrée, les costez AG, GE seront $4\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{2}}$ & $4\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{1}{2}}$. Parquoy le rectang. e AC sera $54 - \sqrt{1944}$, BE 54, AH $27 + \sqrt{243}$, DK $\sqrt{486}$, & HE $24 - \sqrt{243}$. Mais le quarré LM estant egal à AH, sera aussi $27 + \sqrt{243}$, NO egal à HE $27 - \sqrt{243}$: & partant leurs costez TO, SO sont $\sqrt{(27 + \sqrt{243})}$ & $\sqrt{(27 - \sqrt{243})}$: & par consequent TS est $\sqrt{(27 + \sqrt{243})} - \sqrt{(27 - \sqrt{243})}$, & son quarré TR $54 - \sqrt{1944}$, egal au rectangle AC.

THEO. 72. PROP. XCVI.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un residu cinquieme; la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant avec vne superficie rationelle vn tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationelle AB, & du residu cinquieme AD: (apres avoir construit comme en la 91. p. 10.) Je dis que TS qui peut iceluy rectangle AC, est ligne faisant avec vne superficie rationelle, vn tout medial.

Car puis que AB est residu cinquieme, & DE sa conuenable, les lignes AE, & DE sont rationelles commensurables en puissance seulement, & DE est commensurable en longueur à la rationelle AB, & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur, & par la 19. p. 10. Les lignes AG & GE sont incommensurables en longueur: & comme en la precedente TO & SO seront incommensurables en puissance. Mais AE estant incommensurable en longueur à la rationelle AB, le rectangle AI sera medial par la 22. p. 10. partant aussi medial le composé de leurs egaux quarrés LM, & NO.

Pareillement DE estant commensurable en longueur à la rationelle AB, par la 10. p. 10. le rectangle CE sera rationel, aussi sera sa moitié KE, & son egal LO, compris de deux lignes incommensurables en puissance TO & SO, desquelles le composé de leurs quarrés fait vn tout medial, & par la 78. p. 10. TS sera ligne faisant avec vne superficie rationelle vn tout medial.

S C H O L I E.

La rationelle AB soit 4, AD $\sqrt{54} = 6$: donc DE est 6, & sa moitié DF 3, son quarré 9, auquel estant egal le rectangle de AGE. AG sera $\sqrt{13\frac{1}{2}} + \sqrt{4\frac{1}{2}}$ & GE $\sqrt{13\frac{1}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{2}}$. Mais le rectangle AC sera $\sqrt{864} = 24$, BE $\sqrt{864}$, AH $\sqrt{216} + \sqrt{72}$, DK 12, & HE $\sqrt{216} - \sqrt{72}$: ainsi le quarré LM sera $\sqrt{216} + \sqrt{72}$, NO $\sqrt{216} - \sqrt{72}$. &

leurs costez $TQ, SO, \sqrt{\sqrt{(216+72)}}, \& \sqrt{\sqrt{(216-72)}}$, & par conséquent TS est $\sqrt{\sqrt{(216+72)} - \sqrt{\sqrt{(216-72)}}}$, & son quarré TR sera $\sqrt{864} - 24$.

THEOR. 73. PROP. XCVII.

Si vn rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu fixiesme ; la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit le rectangle AC , compris de la rationele AB , & du residu fixiesme AD (apres avoir construit comme en la 92. p. 10.) Je dis que TS qui peut iceluy rectangle AC , est ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Car puis que AD est residu fixiesme, & DE sa conuenable; AE & DE sont rationeles commensurables en puissance seulement entr'elles, & à la rationele AB , & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur: Et par la 19. p. 10. AG & GE seront incommensurable en longueur: Et comme en la 95. p. 10. TO & SO seront incommens. en puissance, & tout ainsi qu'en la precedente le rectangle AI estant medial, le compose de leurs egaux quarréz LM & NO , sera aussi medial: Item DE estant commensu. en puissance seulement a AB rationele, par la 22. p. 10. le rectangle CE sera medial: aussi sera donc sa moitié KE , & son egal LO . Et AE, DE estans incommens. en longueur, par la 1. p. 6. & 10 p. 10. les rectangles AI, CE , seront incommensurables, & puis que CE est commens. a sa moitié KE , par la 14. p. 10. KE sera incommens. a AI : Et partant le medial LO (egal a KE) compris des lignes TO & SO incommens. en puissance, est incommensu. au compose des quarréz d'icelles TO & SO (egal a AI) medial: Parquoy par la 79. p. 10. le reste TS sera ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

SCHOLIE.

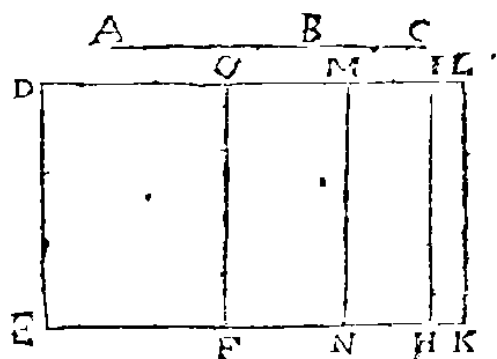
La rationele AB soit 6, $AD \sqrt{108} = \sqrt{63}$: donc DE est $\sqrt{6}$, & sa moitié $DE \sqrt{15\frac{3}{4}}$, son quarré $15\frac{3}{4}$, $AG \sqrt{27} = \sqrt{11\frac{1}{4}}$, $GE \sqrt{17}$ —

II^e: mais le rest. AC sera $\sqrt{3888} - \sqrt{2268}$, BE $\sqrt{3888}$, AH $\sqrt{972} + \sqrt{405}$, DK $\sqrt{567}$, & HE $\sqrt{972} - \sqrt{405}$: ainsi le quarré LM sera $\sqrt{972} + \sqrt{405}$, NO $\sqrt{972} - \sqrt{405}$, & leurs costez TO, SO, seront $\sqrt{972} + \sqrt{405}$, & $\sqrt{972} - \sqrt{405}$: & par consequent TS est $\sqrt{972} + \sqrt{405} - \sqrt{972} - \sqrt{405}$, & son quarré TR $\sqrt{3888} - \sqrt{2268}$.

THEOR. 74. PRO. XCVIII. Six. 5.

Le quarré d'un residu appliqué sur vne rationele, faict l'autre costé residu premier.

Soit le residu AB, & BC sa convenable, tellement que AC, BC soient rationeles commensurables en puissance seulement: & sur la rationele DE soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Je dis que l'autre costé D G est residu premier.



Car sur la mesme rationele DE soit appliqué le rectangle DH egal au quarré de AC: & sur IH vn autre rectangle IK egal au quarré de BC, tellement que le total DK est egal au composé des quarréz de AC, BC; lequel estant egal par la 7. p. 2. à deux fois le rectangle de AC, CB, ensemble avec le quarré de AB, si on oste le quarré de AB & le rectangle DF; restera GK egal à deux fois le rectangle de AC, CB: partant GL estant couppee en deux également en M, & tiré MN parallèle à DE; MK sera egal au rectangle de AC, CB. Et pource que AC, CB sont rationeles, leurs quarréz seront aussi rationaux, & partant commens. & par la 16. p. 10. le composé d'iceux quarréz est commens. à vn chacun d'eux: & partant iceluy composé, ou DK son egal, est rationel, lequel estant appliqué sur la rationele DE, par la 21. p. 10. DL sera rationele commens. en longit. à icelle DE. De rechef puis que AC, CB sont rationeles commens. en puissance seulement, le rectangle d'icelles, & partant aussi son double GK, sera medial: & iceluy estant appliqué à la rationele GF, par la 23. p. 10. GL sera rationele incommens. en longit.

tude à GF, ou DE : Et puis que DK rationel, & GK medial, c'est à dire irrationel, sont incommensurab. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les lignes DL, GL, seront aussi incommens. en longueur. Parquoy puis qu'elles ont esté demonstrees rationeles, elles seront commensurab. en puissance seulement : & partant par la 74. p. 10. le reste DG sera residu. Je dis d'avantage qu'il est residu premier.

Car puis que par le lemme de la prop. 54. le rectangle de AC, CB, ou son egal MK, est moyen prop. entre les quarez de AC CB, c'est à dire entre DH, IK : DH, MK, IK seront continuellement proportionaux : & par consequent aussi les lignes DI, ML, IL. & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL est egal au quarré de ML, c'est à dire au quart du quarré de GL, par le scholie de la 4. p. 2. Et puis que les quarez de AC, CB, ou leurs egaux rectangles DH, IK, sont commens. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les lignes DI, IL, seront commens. en longit. Parquoy puis que les lignes DL, GL sont inegales, & à la plus grande DL est appliqué le rectangle de DI, IL, egal à la quatre parrie du quarré de GL, & defaillant d'une figure quatee, par la 18. p. 10. DL pourra plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur ; & par la 1. des 3. def. DG sera residu premier.

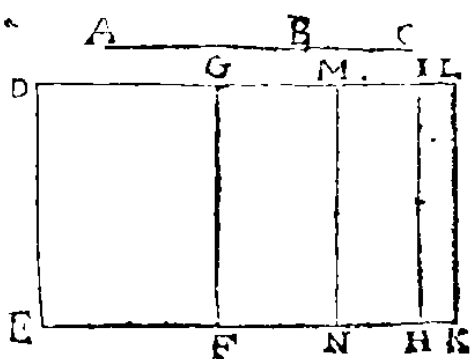
S C H O L I E.

Le residu AB soit $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, & BC $\sqrt{12}$: donc la toute AC est $\sqrt{60}$: mais la rationele DE soit 8, sur laquelle estant appliqué le quarré de AB, qui est $72 - \sqrt{2880}$, l'autre costé DG sera $9 - \sqrt{45}$: aussi DI sera $7\frac{1}{2}$, IL $1\frac{1}{2}$, DL 9 & GL $\sqrt{45}$, & GM $\sqrt{11\frac{1}{4}}$: Ainsi le rect. DK sera 72, DH 60, IK 12, GN $\sqrt{710}$, GK $\sqrt{2880}$, & DF $72 - \sqrt{2880}$.

* THEOR. 75. PROP. XCIX.

Le quarré d'un residu medial premier, appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé residu second.

Soit le residu medial premier AB, duquel la conuenable soit B. C, tellement que AC, BC, soient mediales commens. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle rationel: & sur la rationele DE soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de DB. Je le dis que l'autre costé DG est residu second.



Car soit construit ainsi qu'en la precedente, tellement que derechef DH, IK, soient egaux aux quarez de AC, BC, & GK double du rectangle compris d'icelles lignes AC, BC, & partant MK egal à vne fois le rectangle de AC, BC. Veu donc que les lignes AC, CB, sont mediales commens. en puissance seulement; les quarez d'icelles, ou leurs egaux rectangles DH, IK, seront aussi mediaux & commens. & partant par la 16. p. 10. le tout DK sera aussi commens. à chacun d'eux: Donc aussi medial, par le corol. de la 24. p. 10. Et par la 23. p. 10. DL sera rationele commensurable en puissance seulement à DE: & d'autant que le rectangle de AC, BC est rationel, son double GK sera aussi rationel: & par la 21. p. 10. GL sera rationele commensurable en longitude a DE rationele, & les deux rectangles DK, & GK estans incommens. (car l'un est rationel, l'autre medial) les rationeles DL & GL seront commensurables en puissance seulement, & par la 74. p. 10. DG sera residu: lequel je dis estre aussi second. Car on prouuera de mesme qu'en la precedete, que la toute DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude, & partant par les tierces definitions DG est residu second.

SCHOLIE.

Le residu medial premier AB soit $\sqrt{500}$ — $\sqrt{20}$, & BC $\sqrt{20}$: la toute AC sera donc $\sqrt{500}$: & estant appliqué sur la rationele DE le quarré de AC, qui est 500, l'autre costé DI sera $\sqrt{31}$, & si à la mesme DE est appliqué IK egal au quarré de BC, qui est 20, IL sera $\sqrt{1}$: ainsi la toute DL sera $\sqrt{45}$. Derechef appliquant a DE le rect. GN egal au rect. de ACB, qui est 10, l'autre cost. GM sera 2, & son double GL 4: parquoy DG sera $\sqrt{45} - 5$, qui est residu second.

THEOR. 76. PROP. C.

Le quarré d'un residu medial second , appliqué sur vne ligne rationele , fait l'autre costé residu troisieme.

Soit le residu medial second AB, auquel conuienne BC, tellement que AC, BC, soient mediales commensurables en puissance seulement, & contiennent un rectangle medial : Et sur la rationele DE , soit appliqué le rectangle DF. Je dis que l'autre costé DG est residu troisieme.

Car (ayant construit comme en la 98.p.10.) on demonstrera comme en la precedente que le rectangle DK est medial, & partant par la 23.p.10. son autre costé DL sera rationel communurable en puissance seulement à la rationele DE. Item le rectangle de AC, BC estant medial, aussi sera son double GK, & par la 23.p.10. GL sera aussi rationele communurable en puissance seulement à la rationele DE : Et puis que AC, BC sont incōmens. en longitude, le quarré de AC sera incommensurable au rectangle de AC, BC, par la 1.p.6. & 10.p.10. partant aussi à sō double GK : Mais le quarré de AC est aussi commun. au quarré de BC : (pource qu'iceux quarréz sont descriptz sur lignes communurables en puissance :) & partant par la 16.p.10. le composé d'iceux quarréz, c'est à dire DK, sera aussi com. au quarré de AC, auquel est incō. GK, parquoy par la 11.p.10. DK sera incom. a GK, & par la 10.p.10. les lignes DL, GL, ayant mesme raison que DK, GK seront incom. en lon. Mais estās rationeles, elles seront communf. en puissance seulement, & par la 74.p.10. BG sera residu. Mais n'y DL, ny GL ne sont communurable en longitude à la rationele DE, & si on prounera comme en la 98.p.10. que DL peut plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude : Et par les tierces def. DG est residu troisieme.

S C H O L I E.

Le residu medial second AB soit $\sqrt{V} 600$ — $\sqrt{V} 24$, & BC $\sqrt{V} 24$: la toute AC sera donc $\sqrt{V} 600$: & appliquant sur la rationele DE 4, le rect. DH egal au quarré de AC, qui est $\sqrt{V} 600$, l'autre costé DL si-

est $\sqrt{57\frac{1}{2}}$; mais appliquant sur la mesme DE le rect. IK egal au quarre de hG, l'autre costé IL sera $\sqrt{1\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{54}$: & si derechef on applique sur la mesme DE le rect. GN egal au rectangle de ACB, qui est $\sqrt{120}$, l'autre costé GM sera $\sqrt{7\frac{1}{2}}$, & son double GL $\sqrt{30}$: parquoy DG est $\sqrt{54} - \sqrt{30}$, qui est residu troisieme.

THEOR. 77. PROP. CI.

Le quarré d'une ligne mineure, appliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre costé residu quatriesme.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle BC conuienne, en sorte que AC, BC, soient incommens. en puissance, comprenant un rectangle medial, & le composé de leurs quarrés rationel, & le quarré d'icelle AB soit appliqué sur la rationelle DE : ie dis que l'autre costé DG est residu quatriesme.

Car (apres auoir construit comme en la 98. p. 10. le rectangle DK sera rationel, & GK medial, par le discours des precedentes; & par la 21. p. 10. DL sera rationelle com. en long. a la rationelle DE; & GL, par la 23. p. 10. sera rationelle com. en puissance seulement à icelle rationelle DE : & puis que DK est rationel, & GK medial, ils sont incommensurables, & par la 10. p. 10. les lignes DL, GL qui sont en mesme raison que DK, GK, seront incommensurable en longueur. Mais elles sont rationelles, elles seront donc commensu. en puissance seulement; & par la 74 p. 10. DG sera residu.

D'auantage il est residu quatriesme. Car puis que les lignes AC, BC sont incommens. en puissance, leurs quarrés seront incommens. Aussi incommens. leurs egaux rectangles DH, IK, & par consequent incommens. les lignes DI, IL, costez du rectangle defaillant d'une figure quarrée egale au quarré de ML, c'est à dire à la quarte partie du quarré de GL, comme il a esté demonst. en la 98. p. 10. & par la 19. p. 10. DL (qui est commensu. en longueur à la rationelle DE,) peut plus que la conuenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur : & par les tierces definitions DG est residu quatriesme.

SCHOLIE.

La ligne mineure AB soit $\sqrt{27+\sqrt{243}} - \sqrt{27-\sqrt{243}}$ & BC $\sqrt{27-\sqrt{243}}$: la toute AC sera donc $\sqrt{27+\sqrt{243}}$, le quarré de laquelle appliqué sur la rationelle DE 6, l'autre costé DI sera $4\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{2}}$: mais étant appliqué sur la mesme DE, le rectangle IK égal au quarré de BC, qui est $27-\sqrt{243}$, l'autre costé IL sera $4\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera 9. Que si à la mesme DE on applique le rect. GN égal au rectangle de ACB, qui est $\sqrt{486}$, l'autre costé GM sera $\sqrt{13\frac{1}{2}}$, & son double GL $\sqrt{54}$: & partant DG est $9 - \sqrt{54}$, qui est residu quatriesme.

THEOR. 78. PROP. CII.

Le quarré d'une ligne faisant avec une superficie rationelle, un tout medial, appliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre costé residu cinquieme.

Soit la ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial AB, de laquelle le quarré soit appliqué sur la rationelle DE : Je dis que l'autre costé DG est residu cinquieme.

Car (apres avoir construit comme en la 98. p. 10.) AB est une ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial, & BC sa conuenable, les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance, comprenant un rectangle rationel, & le composé de leurs quarrés medial : partant le rectangle DK sera medial, & GK rationel, & par la 13. p. 10. DL sera rationelle incommens. en longueur à la rationelle DE : & par la 21. p. 10. GL sera aussi rationelle, mais commens. en longit. à la rationelle DE : Item les rectangles DK, GK estans incommensur. (car l'un est rationel, l'autre medial) les lignes DL, GL seront aussi incommens. en longueur. Mais icelles sont rationelles : elles seront donc commens. en puissance seulement, & par la 74 p. 10. DG sera residu. Mais GL étant commens. en longueur à la rationelle DE, & si comme en la precedente on prouvera que la toute DL peut plus que la conuenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur : & partant par les tierces def. DG est residu cinquieme.

SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{\sqrt{216 + \sqrt{72}}} - \sqrt{\sqrt{216 - \sqrt{72}}}$, & BC $\sqrt{\sqrt{216 + \sqrt{72}}}$; la toute AC sera donc $\sqrt{\sqrt{216 + \sqrt{72}}}$, le quarré de laquelle soit appliqué sur la rationele DE 4, & l'autre costé DI sera $\sqrt{13\frac{1}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{2}}$: mais estant appliqué sur la mesme rationele, le rectang. IK egal au quarré de BC , qui est $\sqrt{216 - \sqrt{72}}$, l'autre costé IL sera $\sqrt{13\frac{1}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{54}$: Que si à la mesme rationele on applique le rect. GN ou MK , egal au rect. de ACB , qui est 12, l'autre costé ML sera 3, & son double GL 6 : Parquoy DG sera $\sqrt{54} - 6$, qui est residu cinquiésme.

THEOR. 79. PROP. CIII.

Le quarré d'une ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre costé residu sixiésme.

Soit la ligne AB , faisant avec une superficie mediale un tout medial, le quarré de laquelle AB soit appliqué sur la rationele DE : Je dis que l'autre costé DG est residu sixiésme.

Car (apres avoir construit comme en la 98. p. 10.) AB est une ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, & BC la convenable à icelle AB : les deux lignes AC , BC sont incommensurables en puissance, comprenant un rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrés aussi medial : partant les deux rectang. DK & GK sont mediaux & incommens. & par la 23. p. 10. DL , GL seront rationeles incommens. en l'og. entr'elles, & à la rationele DE ; & par conséquent commens. en puissance seulement : & par la 74. p. 10. BG sera residu Mais on peut prouver cōme en la 101. p. 10. que la toute DL peut plus que la convenable GL , du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur : & partant par les tierces des. GD est residu sixiésme. •

SCHOLIE.

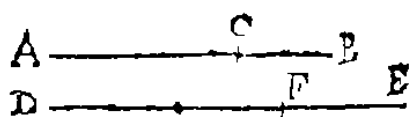
La ligne AB soit $\sqrt{\sqrt{972 + \sqrt{405}}} - \sqrt{\sqrt{972 - \sqrt{405}}}$, &

BCVV (972— $\sqrt{405}$) : donc la route AC sera $\sqrt{V}$ (972+ $\sqrt{405}$), au quarré de laquelle soit égal le recta gle DH, appliqué sur la rationele DE 6 : l'autre costé DI sera donc $\sqrt{27+11\frac{1}{4}}$: mais étant appliqué sur la mesme rationele, le rect. IK égal au quarré de BC, qui est $\sqrt{972-405}$, l'autre costé IL sera $\sqrt{27-11\frac{1}{4}}$: & partant la route DL sera $\sqrt{108}$: Si derechef on applique sur la mesme rationele le rectangle MK, ou GN, égal au rectangle de ACB, qui est $\sqrt{567}$ l'autre costé GM sera $\sqrt{15\frac{3}{4}}$, & son double $\sqrt{63}$: parquoy DG sera $\sqrt{108-63}$, qui est residu sixiesme.

THEOR. 80. PROP. CIII. Six. 6.

La ligne commensurable en longueur à un residu, est aussi residu, & de mesme ordre.

Soit le residu AC, auquel soit commens. en longueur la ligne droite DE. Je dis que DE est residu de mesme ordre que AC.



Car CB soit la convenable au residu AC, tellement que AB, CB soient rationeles commensurables en puissance seulement, & par la 12. p. 6. soit fait que comme AC est à DF, ainsi CB soit à FE. Donc par la 12. p. 5. la route AB sera à la route DE, comme AC à DF, ou CB à FE : & par la 10. p. 10. comme AC est commensur. en longueur à DF, ainsi AB à DE & BC à FE. Et en changeant comme AB à BC, ainsi DE à FE. Maintenant comme AB & BC sont rationeles, aussi seront DE & FE : (car elles sont commensurables à icelles, par la 10. p. 10.) Mais AB & BC sont commensurables en puissance seulement : partant DE & FE seront aussi rationeles commensurables en puissance seulement, & par la 74. p. 10. DE est residu.

Je dis d'avantage qu'il est residu de mesme ordre que AC. Car la ligne AB peut plus que BC du quarré d'une ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longueur : si commensurable : aussi DE pourra plus que FE de même façon par la 15. p. 10. (estans les quatre lignes proport.) que si AB est commens. en lon. à une ligne rationele proposée, aussi DE qui luy est commens. en longueur sera commens. en longueur à la mesme rationele proposée par la 11. p. 10. Parquoy

AC & DF seront residus premiers : Que si BC est commens. en longitude à la rationele , aussi sera FE : & AC, DF seront residus seconds : si AB & BC sont incommensurables en longitude à la rationele : aussi seront DE & FE ; & AC, DF seront residus troisiemes. Que si AB peut plus que BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude : aussi DE pourra plus de mesme que FE par la 15. p. 10. & si AB est commensurable en longitude à la rationele ; aussi sera DE : & AC DF seront residus quatriemes. Si BC est commensurable en longitude à la rationele, aussi sera FE : & AC DF seront residus cinquiesmes. Si AB & BC sont incommensur. en longitude à la rationele, aussi seront DE & FE : partant AC & DF seront residus sixiesmes : par ainsi DF est residu de mesme ordre que AC.

S C H O L I E.

Le residu AC soit $\sqrt{60}$ — $\sqrt{12}$ & DF $\sqrt{15}$ — $\sqrt{3}$. lesquelles sont commens. en longitude, l'une estant double de l'autre , & la conuenable CB soit 12 : Donc la toute AB est $\sqrt{60}$: & puis que comme AC est à DF, ainsi CB $\sqrt{12}$ est à FE ; icelle FE sera $\sqrt{3}$: & la toute DE $\sqrt{15}$ commens. seulement en puissance à DF.

THEOR. 81. PROP. CV.

La ligne commensurable à vn residu medial, est aussi residu medial de mesme ordre.

Soit la ligne DF commens. au residu medial AC : ie dis que icelle DF est aussi residu medial, & de mesme ordre que AC.

Car ayant fait mesme construction qu'en la preced. prop. AB & BC seront comens. à DE, lesquelles sont mediales commens. en puissance seulement, & par la 24. p. 10. DE & FE seront mediales commens. en puissance seulement, par la 10. p. 10. Et partant par la 75 ou 76 p. 10. DF est residu medial : ie dis d'auantage qu'il est de mesme ordre que AC.

Car le quarré de AB est au rectangle de AB, BC comme AB à BC : Item le quarré de DE est aussi au rectangle de DE, FE comme DE à FE, par la 1 p 6. Mais le quarré de AB est com-

menſ au quarré de DE, eſt ar² AB & DE commenſ. & par la prop. 10 les deux rectangles ſeront auſſi commenſ. Que com-
me l'un ſera rationel ou medial, auſſi l'autre ſera rationel ou
medial: partant ſi les rectangles ſont rationaux, AC & DE ſe-
ront reſidus mediaux premiers: ſi les rectangles ſont mediaux,
AC & DE ſeront reſidus mediaux ſeconds.

SCHOLIE.

*Le reſidu medial AC ſoit $\sqrt{7500} - \sqrt{20}$, & DE $\sqrt{11} - \sqrt{1}$;
BC ſera $\sqrt{20}$. & la toute AB $\sqrt{7500}$; mais FE ſera $\sqrt{11} + \sqrt{1}$, & la toute
DE $\sqrt{31}$.*

THEOR. 82. PROP. CVI.

La ligne commenſurable à vne ligne mi-
neure; eſt auſſi ligne mineure.

Soit la ligne DE, commenſ. à la ligne mineure AC: Je diſ
qu'icelle DE eſt auſſi ligne mineure. Car CB eſtant conuen-
able a ice'le AC, & fait meſme cōſtruction qu'en la 104 p. 10.
AB & BC ſeront incommenſ. en puiſſance, comprenant vn
rectangle medial, & le compoſé de leurs quarréz rationel.
Mais comme AB à CB, ainſi DE à FE, & par la 10. p. 10. DE &
FE ſeront incommenſ. en puiſſance. Item puis que comme A
B à BC, ainſi DE à FE, par la 22. p. 6. leurs quarréz ſeront
proportionaux, & en compoſat comme le compoſé des quar-
rez de AB, BC ſera au quarré de BC, ainſi le cōpoſé des quar-
rez de DE, FE, ſera au quarré de FE; & en permutant comme
le compoſé des quarréz de AB, BC ſera au compoſé des
quarréz de DE, FE, ainſi le quarré de CB ſera au quarré de FE:
leſquels quarréz de CB & FE ſont commenſ. (car les lignes B
C & FE ſont commenſ. comme AC & DE, ainſi qu'il a eſté
demonſtré à la 104. p. 10.) & partant par la 10. p. 10. le compo-
ſé des quarréz de AB & BC, (lequel eſt rationel) ſera commē-
ſurable au compoſé des quarréz de DE & FE, lequel ſera auſſi
rationel. Pareillement d'autant que comme nous auons dit à
la prop. precedente, le quarré de AB eſt au rectangle de AB &
CB, comme le quarré de DE au rectangle de DE & FE, & en
changeant comme le quarré au quarré, ainſi le rectangle au
rectangle

rectangle : c'est à dire commensur. Car les lignes AB & DE sont commens. par la 10. p. 10. & par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de AB & BC estant medial, celui de DE & FE sera aussi medial : partant DE & FE estant incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarez rationel, par la 77. p. 10. DF sera ligne mineure.

THEOR. 83. PROP. CVII.

La ligne commensurable à vne ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial, est aussi ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.

Soit la ligne DF commensurable à la ligne AC , faisant avec vne superficie rationele vn tout medial. Je dis que DF est aussi ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.



Car soit CB conuenable à AC , tellement que AB, CB soient incommens. en puissance, & facent le composé de leurs quarez medial, mais le rectangle compris d'icelles rationel : Et estant fait mesme construction qu'en la 104. p. on démontrera comme en la precedente que les lignes DE, FE sont incommens. en puissance ; & que le composé des quarez de AB, CB est comment. au composé des quarez de DE, FE . Mais celui là est medial : aussi sera donc cestuy-cy, par le corol. de la 24. p. 10. Derechef comme nous auons démontré en la 105. p. le rectangle de AB, CB , est commens. au rectangle de DE, FE : mais cestuy-là est posé rationel : aussi sera donc celui-cy par la 9. d. 10. Veu donc que DE, FE , sont incommens. en puissance, & font le composé de leurs quarez medial, mais leur rectangle rationel, par la 78. p. 10. DF sera ligne faisant avec superficie rationele vn tout medial.

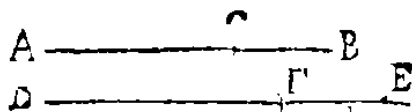
THEOR. 84. PROP. CVIII.

La ligne commensurable à la ligne faisant

Hh

avec vne superficie mediale vn tout medial, est aussi ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne DF commens. à la ligne AC , faisant avec vne superficie mediale vn tout medial: Je dis que DF est aussi ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.



Car à AC soit CB conuenable, tellement que AB , CB soient incommens. en puissance, & font le composé de leurs quarrés medial, & leur rectangle aussi medial, & incommens. au composé de leurs quarrés: & ayant fait semblable construction qu'aux precedentes, on prouuera comme en la 106. p. que les lignes DE , FE , sont incommens. en puissance, & que le composé des quarrés de AB & BC , est commensurable au composé des quarrés de DE & FE : & comme en la 105. p. que le rectangle de AB & BC , est commensurable au rectangle de DE & FE . Mais le rectangle de AB , & CB est medial, & incommensurable au composé des quarrés de AB & CB , aussi medial: partant par le scholie de la 14. p. 10. le rectang. de DE & EF , sera medial, & incommens. au composé des quarrés de DE & FE , aussi medial: & DF sera ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial.

THEOR. 85. PROP. CIX.

Si d'une superficie rationele, est retranchée vne superficie mediale: la ligne qui peut le reste est residu, ou ligne mineure.

Soit la superficie rationele AB , (en la figure de la prop. suivante) de laquelle soit retranchée la mediale A : Je dis que la ligne qui peut le reste, B est residu, ou ligne mineure.

Qu'il ne soit ainsi. Sur la rationele proposée CD soit décrit le rectangle CE egal à A , & FI egal à B . Il est euident que CI sera rationel, & par la 21. p. 10. son autre costé CK sera rationel commens. en longueur à CD . Item par la 13. p. 10. CE

étant medial, CF sera rationele commenſ. en puissance ſeulement à CD, & par la 13. p. 10. CK & CF ſeront rationeles commenſ. en puissance ſeulement : & partant par la 74. p. 10. FK ſera reſidu. Maintenant CK peut plus que CF du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſ. ou incommenſur. en longit. Si commenſ. FK ſera reſidu premier : & la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt reſidu par la 92. p. 10. Si incommenſur. CK eſt reſidu quatrieſme : & la ligne qui peut le rectangle FI, (ou ſon egal B) eſt ligne mineure par 93. p. 10.

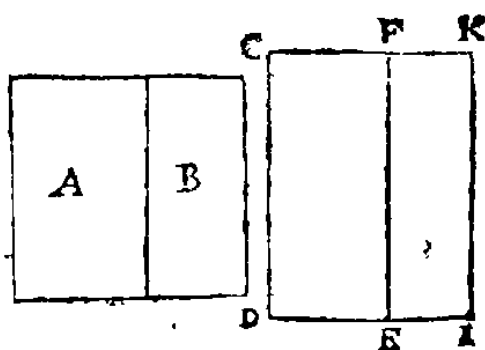
SCHOLIE.

Si l'angle rationel AB eſt 32, le medial A $\sqrt{310}$, & la ligne rationele CD 6, ſur laquell eſt deſcrit le rect. CE egal à A, & FI egal à B : les coſtez CF, & FK, ſeront $\sqrt{8\frac{2}{3}}$ & $\sqrt{8\frac{2}{3}}$: & partant la toute CK ſera $\sqrt{3}$: & le rectangle CI 32, duquel oſtant CF, qui eſt $\sqrt{310}$, le reſte rectangle FI ſera $32 - \sqrt{310}$: & la ligne pouuant ice-luy ſera $\sqrt{(16 + \sqrt{176}) - \sqrt{(16 - \sqrt{176})}}$, qui eſt ligne mineure.

THEOR. 86. PROP. CX.

Si d'une ſuperficie mediale, eſt retranchée une ſuperficie rationele; la ligne qui peut le reſte, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial.

Soit comme deſſus la ſuperficie mediale AB, de laquelle ſoit retranchée la rationele A. Je diſ que la ligne qui peut le reſte B, (après avoir conſtruit comme en la precedente) ou ſon egal FI, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial.



Car puis que la ſuperficie totale AB eſt mediale, auſſi la totale CI eſt mediale, & par la 13. p. 10. Le coſté CK eſt rationel commenſ. en puſſances ſeulement à la rationele CD.

Item puis que le retranché A est rationel, aussi sera son egal CE, & par la 21. p. 10. CF sera rationel commensurable en longueur à la rationel CD: & par la 13. p. 10. CK & CF seront rationels commensurables en puissance seulement; & par la 74. p. 10. FK sera aussi residu. Mais à cause que CK peut plus que CF du quarré d'une ligne qui luy est commensurable, ou incommensurable en longueur: FK sera residu second, ou residu cinquième. Si residu second; la ligne qui peut le rectangle FI est residu medial premier par la 93. p. 10 si residu cinquième, la ligne qui peut le rectangle FI, est ligne faisant avec une superficie rationel un tout medial par la 96. p. 10.

S C H O L I E.

Si la superficie mediale AB est $\sqrt{800}$, & la rationel A 12; le reste B sera $\sqrt{800} - 12$, & la ligne pouvant iceluy sera $\sqrt{(\sqrt{200} + \sqrt{164}) - (\sqrt{200} - \sqrt{164})}$, qui est ligne faisant avec une superficie rationel un tout medial.

THEOR. 87. PROP. CXI.

Si d'une superficie mediale, est retranchée une superficie mediale incommensurable à la toute; la ligne qui peut le reste est ou residu medial second, ou ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

Soit la superficie mediale AB, de laquelle soit retranchée la superficie mediale A, incommens. à la toute AB. Je dis que la ligne qui peut le reste B, est residu medial second, ou ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

Car ayant fait même construction qu'aux précédentes, les rectangles CI, CE seront mediaux & incommens. entre eux; & par la 21. p. 10. les lignes CK, CF seront rationels incommensurables en longueur à CD. Et puis que CI, CE. sont incommensurables rationels CK, CF, qui sont en même raison que CI, CE, seront aussi incommensurable en longueur, par la 10. p. 10. & par consequent elles sont seulement commens.

en puissance : Donc FK sera residu par la 74. p. 10. & FC sera conuenable. Maintenant CK peut plus que FK, du quarré d'une ligne qui luy est commens. ou incommens. en longueur : si commensurable ; FK sera residu troisieme, par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou son egal B) est residu medial second, par la 94. p. 10. Si incommens. FK sera residu 6. par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou B son egal) est ligne faisant avec vne superficie mediale un tout medial, par la 97. p. 10.

SCHOLIE.

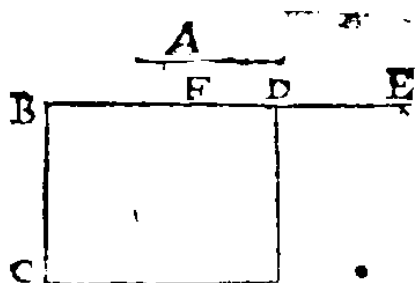
Si la superficie mediale AB est $\sqrt{279}$, & AV 40 : la superficie restante B sera $\sqrt{279} - 40$: & la ligne pouuant icelle sera $\sqrt{(\sqrt{279} - 40)^2} = \sqrt{279} - 40$, qui est appellee ligne faisant avec vne superficie mediale un tout medial.

THEO. 88. PROP. CXII.

La ligne appelee residu, n'est pas la mesme que Binome.

Soit le residu A. Je dis qu'elle n'est pas mesme ligne que binome.

Car soit la rationele proposee BC, sur laquelle soit appliqué le rectangle CD egal au quarré du residu A : par la 98. p. 10. BD sera residu premier : auquel si on adiouste sa conuenable DE ; BE & DE, seront rationeles commensurables en puissance seulement : & BE commensur. en longueur à la rationele BC.



Maintenant si on pose A estre binome ; BD sera binome premier, par la 61. p. 10. lequel estant diuisé en ses noms au point F ; (estant BF le plus grand nom) BF & FD seront rationeles commensurables en puissance seulement, & BF commensurable en longueur à la rationele BC ; & par la 12. p. 10. BE & BF, seront commensurables en longueur. Veu donc que la toute BE est commens. en longueur à la partie BF, par le corol. de la 16. p. 10. l'autre partie FE sera aussi commensu.

en longitude à BE: partant aussi rationele comme icelle BE. Mais DE qui est aussi rationele, n'est commensurable en longitude à BE, & par la 14 p. 10. FE, DE sont rationeles commensurables en puissance seulement: & partant par la 74. p. 10. FD est residu, & par consequent irrationele; ce qui est absurde: car elle a esté prouuee tantost rationele: donc le residu A, sera differend du binome.

COROLLAIRE.

De ces choses on peut facilement colliger que la ligne appelée residu, & les cinq sortes de lignes irrationeles suivantes, sont differentes de la mediale, & entr'elles. Car le quarré de la mediale applique sur une ligne rationele, faict l'autre costé rationel commensurable en puissance seulement à icelle rationele, par la 23. p. 10.

Le quarré du residu, faict l'autre costé residu premier, par la 98. p. 0.

Le quarré du residu medial premier, faict l'autre costé residu second, par la 99. p. 10.

Le quarré du residu medial second, faict l'autre costé residu troisieme, par la 100 p. 10.

Le quarré de la ligne mineure, faict l'autre costé residu quatrieme, par la 101 p. 10.

Le quarré de la ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial, faict l'autre costé residu cinquieme, par la 102. p. 10.

Le quarré de la ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, faict l'autre costé residu sixiesme, par la 103. p. 10.

Puis donc que tous ces costez, (qui sont les latitudes des rectangles) sont differens; les lignes qui les peuvent seront aussi differentes. Mais les quarrés des binomes, & des cinq lignes irrationeles suivantes, estans appliquez sur une ligne rationele font l'autre costé binome de quelque ordre: partant le binome & les cinq suivantes sont differentes du residu, & des cinq suivantes,

Ainsi toutes les lignes irrationeles cy deuant dictes sont treize: sçavoir celles-cy.

1. Mediale.
2. Binome.
3. Bimediale premiere.
4. Bimediale seconde.
5. Ligne majeure.
6. Ligne pouvant yn rationel & yn medial.

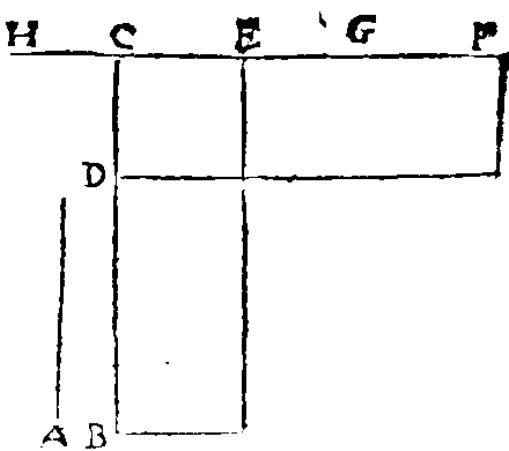
7. Ligne pouuant deux mediaux.
8. Residu.
9. Residu medial premier.
10. Residu medial second.
11. Ligne mineure.
12. Ligne faisant avec vne superficie rationele vn tout medial.
13. Ligne faisant avec vne superficie mediale vn tout medial. ■

THEOR. 89. PROP. CXIⁿ.

Le quarré d'une ligne rationele estant appliqué sur vn binome, faict l'autre costé residu, les noms duquel sont proportionaux, & commensurables aux noms du binome : en outre le residu est de mesme ordre que le binome.

Soit la rationele A, & le binome BC, duquel le plus grand nom soit BD : & à icelle BC soit appliqué le rectangle BE egal au quarré de la rationele A. Je dis que l'autre costé CE est residu tel que dit la proposition.

Car sur le plus petit nom CD soit appliqué le rectangle DF aussi egal au quarré de rationele A : donc les deux rectangles BE, DF, seront egaux, & par la 14. p. 6. leurs costez seront reciproques, sçauoir que comme BC à DC, ainsi CF à CE, & en diuisant comme BD à DC, ainsi FE à EC. Mais BD est plus grande que CD : donc aussi FE sera plus grande que EC. Maintenant de EF soit retranchée EG egale à EC, & soit faict comme FG à GE, ainsi EC à CH, par la 12. p. 6. & en composant comme FE à EG (ou EC son egale) ainsi EH à CH, & par la 12. p. 5. les deux antecedents FEH seront aux deux consequents ECH. comme l'un des antecedens EH à l'un des consequens CH : & partant



les trois lignes FH, EH, CH, seront continuellement proportioneles en la raison de FE à EC, ou BD à DC : & par la 22. p. 6. & 10. p. 10. comme le quarré de BD est commensur. au quarré de DC, (car iceux quarréz sont commensur. puis que BD, DC sont les noms du binome BC) ainsi que le quarré de EH, sera commensur. au quarré de CH : & par le corol. de la 10. p. 6. & 10. p. 10. CH sera commens. en longitude à la troisieme proportionele FH, & par la 16. p. 10. CH & CF seront commens. en longit. Et d'autant que le rectangle DF est rationel (estant egal au quarré de la ligne rationele A) & DC ligne rationele : CF sera aussi ligne rationele commensur. en longitude à CD, par la 21. p. 10. Et CH sera aussi rationele commens. en longitude à CD, par la 12. p. 10. & par la 10. p. 10. comme CD & DB sont rationeles commens. en puissance seulement, aussi CH, EH, seront rationeles commens. en puissance seulement : & partant par la 74 p. 10. CE sera residu : duquel les noms EH, CH, sont proportionaux, & commens. aux nōs BD, DC, du binome BC : Car il a esté démontré que comme BD est à DC, ainsi EH à CH ; & partant en changeant comme BD sera à EH, ainsi DC à CH. Mais DC, CH ont esté demonstrees commens. en long par la 10 p. 10. BD, EH, seront donc aussi commens. en longitude.

Reste donc à prouver que le residu est de mesme ordre que le binome : Or les noms de l'un estans proportionaux, & commensurab. aux noms de l'autre : par la 15. p. 10. comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy sera commensurable, ou incommens. en longitude : le plus grand nom du residu pourra plus de mesme : Que si le plus grand nom du binome est commensurable en longitude à la rationele : aussi sera le plus grand du residu par la 12 p. 10. & ils seront binome premier, & residu premier. Que si le plus petit nom du binome est commens. en longit. à la rationele ; aussi sera le plus petit du residu ; & ils seront binome & residu second. Que si ny l'un ny l'autre nom du binome est commens. à la rationele : semblablement l'un ny l'autre nom du residu ne sera commens. à la mesme rationele ; Et ils seront binome, & residu troisieme : & ainsi des autres.

S C H O L I E.

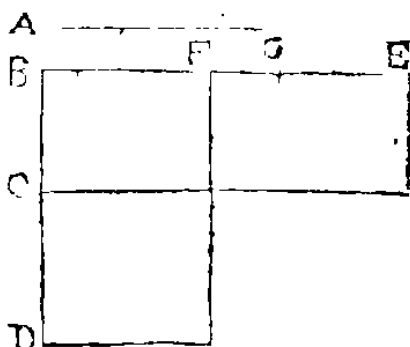
Si la rationele A est 8, le binome BC $9 + \sqrt{45}$. tellement que BD soit 9, & CD $\sqrt{45}$: Le quarré de A estāt appliqué sur BC, l'autre cosse du

rectangle CE sera $16 - \sqrt{142}^2$, qui est residu: & puis que comme DC est à CB, ainsi CE à CF, icelle CF sera $\sqrt{91\frac{1}{4}}$; & EF $\sqrt{460}^2 - 16$. Mais EG estant egale à CE, est $16 - \sqrt{142}^2$; GF $\sqrt{1115\frac{1}{5}} - 32$: & d'autant que comme FG est à GE, ainsi EC à CH; icelle sera $\sqrt{142}^2$, & EH 16: Ainsi est manifeste que CE est residu de mesme ordre que le binome BC, & que les noms EH, CH, sont proportionaux aux noms BD, CD.

THEOR. 90. PROP. CXIII.

Le quarré d'une ligne rationele, estant appliqué sur vn residu, faict l'autre costé binome, les noms duquel sont proportionaux, & commens. aux noms du residu: En outre le binome est de mesme ordre que le residu.

Soit la rationele A, & le residu BC auquel convienne CD, & sur BC soit descript le rectangle CE egal au quarré de la rationele A: Je dis que l'autre costé BE sera binome tel que demande la proposition.



Car sur BD, soit descript le rectangle DF egal au mesme quarré de la rationele A: Donc les rectangles CE & DF seront egaux, & ayans les costez reciproques par la 14 p. 6. BD sera à BC comme BF à BF, & par conuersion de raison BD sera à CD, comme BE à FE. Maintenant soit coupee EF en G, par la 10. p. 6. tellement que comme BE est à FE, ainsi EG à GF, veu donc que comme la toute BE est à la toute FE, ainsi EG retranchée de BE, est à GF retranchée de FE, aussi par la 19 p. 5. le reste BG, sera au reste EG, comme la toute à la toute, c'est à dire comme la retranchée EG à la retranchée GF: & parant EG est moyenne proportion. entre BG & GF. Parquoy comme BG sera à GF, ainsi le quarré de BG sera au quarré de EG, par le corol. de la 20. p. 6. Et puis que comme BD à CD, ainsi BE à FE, c'est à dire BG à GE; & BD, CD noms du residu BC sont rationeles commens. en puissance seulement: & par la 10. p. 10. BG, GE seront aussi commen-

surable en puissance seulement: & partant les quarréz d'icelles BG, GE sont commens., & par consequent les lignes BG, FG qui ont mesme raison qu'iceux quarréz, sont commensurables, en longitude, par la mesme 10. p. 10. Et par le corol. de la 16. p. 10. BG, BF seront aussi commensurables en longitude. Et d'autant que BD plus grand nom du residu BC est rationel, & le rectangle DF egal au quarré de la rationelle 4, est rationel; par la 1. p. 10. BF sera aussi rationel commensu. en longitude a BD. Donc par la 12. p. 10. BG sera aussi rationel commens. en longitude a la mesme BD. Et puis que BG, GE, ont esté demonstrees commens. en puissance seulement, & BG rationel, GE sera aussi rationel. Donc BG, GE sont rationeles commens. en puissance seulement: Et partant par la 17. p. 10. BE est binome: duquel les noms BG, GE, sont proportionnaux, & commens. aux noms BD, CD, du residu BC. Car il a esté demonsté que comme BD a CD, ainsi BG a GE: & partant en permutant comme BD a BG, ainsi CD a GE: mais BD a esté demonsté commensurable en longitude a BG: d'oc aussi CD sera commens. en longitude a GE, par la 10. p. 10. Reste donc a prouver que BE est binome de mesme ordre que le residu BC: ce qu'on fera rout ainsi qu'en la precedente.

S C H O L I E.

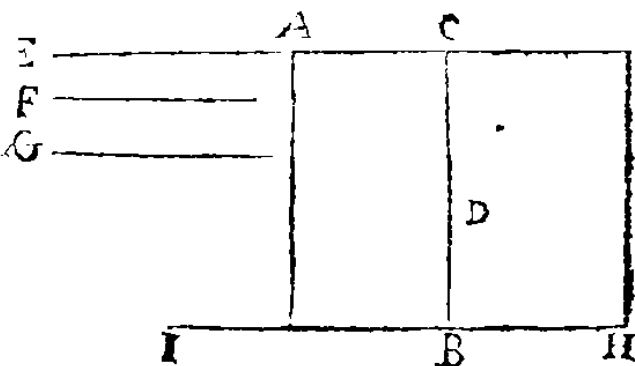
Si la ration. A est 4, & le residu BC 9, & CD 4, & BD 9. le rect. DF sera 16, & aussi CE 16: ainsi le costé BF sera $\sqrt{1^2 + 8^2}$, & BE $4 + \sqrt{8^2 + 2^2}$: & par consequent FE sera $\sqrt{8^2 + 2^2}$; & GE $\sqrt{8^2}$, FG $\sqrt{1^2}$, BG 4: ainsi est evident que BE est binome en mesme ordre que le residu BC, & que les noms d'iceux sont proportionaux.

THEOREME 91. PROP. CXV.

Si vn rectangle est compris d'un residu, & d'un binome, desquels les noms sont proportionnaux & commensurables; la ligne droicte pouuant icelluy rectangle est rationelle.

Soit le rectangle AB, compris sous le residu AC, & le binome CB, duquel les noms CD, DB soient proportionaux, &

commensurab. aux nbs
CE, AE du residu AC, &
soit la ligne droite F
pouvant iceluy rectan-
gle AB. Je dis que F est
rationnel.



Car soit vne ratione-
le proposee G, le quar-
ré de laquelle estant ap-
pliqué sur le binome C
B, face le rectangle CH. Donc par la 113. p. 10. l'autre costé
BH sera residu, duquel les noms HI, BI sont commensur. &
proportionaux aux noms CD, DB, sçavoir est que comme HI
à BI, ainsi CD à DB, & partant ainsi CE à AE : & en changeât
comme la toute HI à la toute CE, ainsi la retranchée BI à la
retranchée AE ; & par la 19 p. 5. le reste BH sera aussi au reste
AC, comme la toute à la toute. Mais icelles toutes sont com-
mens. en long. par la 12. p. 10. pource que l'une & l'autre est
commens. à CD : donc aussi BH, AC seront commensur. en
long par la 10. p. 10. & par consequent les rectangles HC &
BA estans par la 1. p. 6. en mesme raison que BH, & AC, seront
aussi commens. Mais HC égal au carré de la rationelle G, est
rationnel : donc aussi AB sera rationnel ; & partant la ligne F
qui peut iceluy AB, sera aussi rationnel.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste qu'un rectangle rationel, peut estre compris
de lignes irrationnelles.

SCHOLIE.

Si le residu AC est $4 - \sqrt{8\frac{2}{9}}$, tellement que les noms d'iceluy CE,
& AE soient 4, & $\sqrt{8\frac{2}{9}}$, mais le binome BC soit $9 + \sqrt{45}$, le rectan-
gle AB sera 16, qui est rationnel : & partant la ligne F qui peut iceluy
est 4, & par consequent rationnelle. Or la rationelle G estant 8 le rectan-
gle CH sera 64, & le costé BH $16 - \sqrt{142\frac{2}{9}}$, HI 16, & BI $\sqrt{142\frac{2}{9}}$.

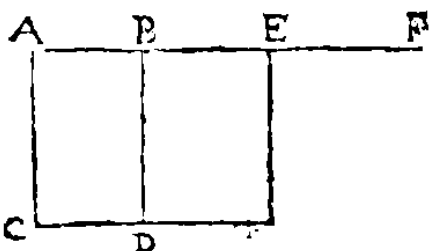
THEO. 92. PROP. CXVI.

De la ligne mediale naissent infinies lignes

irrationnelles, toutes différentes des devant dites.

Soit la ligne mediale AB, ie dis que d'icelle naissent infinies lignes irrationnelles toutes différentes des devant dites.

Car si sur l'extremité de la mediale on mene la perpendiculaire AC qui soit rationelle, & on acheue le rectangle AD : iceluy rectangle sera irrationnel par le coroll. de la 39. p. 10. & par la 11. d. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle est irrationnelle : soit icelle BE : laquelle sera différente de toutes les devant dites. Car son quarré appliqué sur vne ligne rationelle comme AC, fait l'autre costé AB medial : Ce que ne faisoit pas vne des devant dites. Item si on accomplit le rectangle DE, il sera aussi irrationnel : & la ligne qui le peut aussi irrationnelle : & soit EF, laquelle sera différente de toutes les devant dites. Car le quarré de pas vne d'icelles, appliqué sur vne ligne rationelle, ne fait l'autre costé tel que BE : & de ceste façon on peut proceder à l'infiny.



SCHOLIE.

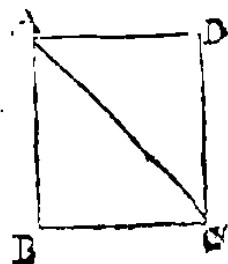
Si la mediale AB est $\sqrt{2}$, & la rationelle AC 2; le rectangle AD sera $\sqrt{2}$ la ligne BE qui peut iceluy sera $\sqrt{32}$: Ainsi le rectangle DE sera $\sqrt{2}$, & la ligne EF qui peut iceluy sera $\sqrt{52}$, & ainsi à l'infiny.

THEOR. 93. PROP. CXVII.

Au quarré, la diagonale est incommensurable en longueur au costé.

Soit le quarré ABCD, duquel AC soit diagonale. Ie dis que la diagonale AC est incommensurable en longueur au costé AB.

Car par la 47. p. 1. le quarré de AC est double du quarré de AB : mais toute grandeur double d'une autre est comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. Donc le quarré de AC est au



quarré de AB, comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré, comme nous avons démontré au corol. de la 24. p. 8. & partant par la 9. p. 10. la diagonale AC, & costé AB, sont incommensurables en longueur.

S C H O L I E.

Si AB costé du quarré est 1, la diagonale AC sera $\sqrt{2}$: tellement que la raison du costé au diametre est comme 1 à $\sqrt{2}$, c'est à dire incommens. en longueur.

Fin du dixiesme liure.





ELEMENT

VNZIESME.

DEFINITIONS.

1.  Solide, est ce qui a longueur, largeur & profondeur : Mais les termes d'un solide, sont superficies.

2.  Vne ligne droicte est perpendiculairement esleuee sur vn plan, quand toutes les lignes sur iceluy plan menees vers elle la rencontrent en angles droicts.

3. Vn plan est esleué perpendiculairement sur vn plan, quand les lignes menees sur l'un d'iceux perpendiculairement à la ligne de commune section, sont aussi perpendiculaires à l'autre plan.

4. L'inclination d'une ligne droicte à vn plan est l'angle aigu contenu d'icelle ligne, & d'une autre ligne droicte menec au plan de l'inclinante, par le poinct auquel tombe vne perpendiculaire tiree du sommet d'icelle inclinante sur le dit plan.

5. Vn plan est incliné sur vn plan, quand les lignes menees sur l'vn & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune section, & vers vn mesme poinct d icelle, ne sont point perpendiculaires les vnes aux autres : & l'inclination d'iceux plans; est l'angle aigu compris d icelles perpendiculaires.

6. Vn plan est dit estre semblablement incliné à vn plan, lors que les susdicts angles d'inclination sont egaux entr'eux.

7. Plans parallels, sont ceux lesquels estans continuez ne se rencontrent point.

8. Solides semblables, sont ceux qui sont compris de superficies semblables, egales en nombre.

9. Solides egaux, & semblables, sont ceux qui sont compris de semblables superficies, egales en nombre & grandeur.

10. Angle solide, c'est la rencôtre de plus de deux angles plans en vn mesme poinct, estans iceux constituez sur plans differens.

11. Pyramide, est vn solide compris de plusieurs plans, se rencontrâs en vn même poinct, & ayans vn autre plan pour base.

12. Prisme, est vn solide compris de plans, desquels deux qui sont opposez sont egaux, semblables, & parallels, & les autres sont parallelogrammes.

13. Sphere, est vne figure comprise par le demy cercle, lors que son diametre demeurant

immobile, iceluy demy cercle tourne iusques à ce qu'il reuienne là, d où il estoit party.

14. L'axe de la sphere, est iceluy diametre immobile à l'entour duquel tourne le demy cercle.

15. Le centre de la sphere, est celuy mesme que du demy-cercle.

16. Diametre de la sphere, est vne ligne laquelle passant par le centre d'icelle, est terminée à la superficie de la sphere.

17. Cone, est vn solide compris par vn triangle rectangle, lors que l'vn des costez qui comprennent l'angle droit demeurant immobile, le triangle fait vn tour alentour d'iceluy costé. Et si ledit costé immobile est egal à l'autre costé comprenant l'angle droit; le cone sera rectangle: si plus petit, il sera amblygone: si plus grand, il sera oxigone.

18. L'axe du cone est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle tourne le triangle.

19. Mais le cercle descript par l'autre costé comprenant l'angle droit qui tourne, est la base du cone.

20. Cylindre, est vn solide compris par vn parallelogramme rectangle, lors que l'vn des costez demeurant immobile, le parallelogramme fait vn tour à l'entour d'iceluy costé.

21. L'axe du cylindre, est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle se meust le parallelogramme.

22. La base du cylindre, est le cercle d'escriit par l'autre costé, qui avec l'axe du cylindre comprend l'angle droit.

23. Semblables cones, & cylindres, sont ceux desquels les axes & les diametres de leurs bases sont proportionaux.

24. Cube est vn solide compris de six quarez.

25. Tetraedre, est vne figure solide comprise de quatre triangles egaux, & equilateraux.

26. Octaedre, est vn solide cõpris de huit triangles egaux, & equilateraux.

27. Dodecaedre, est vn solide compris de douze pentagones egaux, & equilateraux & equiangles.

28. Icosaedre, est vn solide cõpris de vingt triangles egaux, & equilateraux.

29. Parallelipiede, est vn solide compris de six quadrangles plans, desquels les opposez sont parallels.

30. Vne figure solide, est dictée inscrite en vne figure solide, lors que tous les angles de la figure inscrite sont construits, ou és angles, ou és costez, ou finalement és plans de la figure en laquelle elle est inscrite.

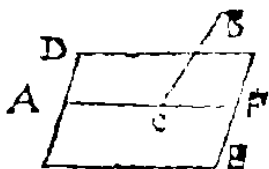
31. Mais vne figure solide, est dictée circonscrite à vne figure solide, quand ou les angles, ou les costez, ou les plans de la figure circonscrite, touchent tous les angles de la figure à

l'entour de laquelle elle est descrite.

THEO. 1. PROP. 1.

Vne partie d'une ligne droite ne peut estre sur vn plan, & l'autre partie en l'air.

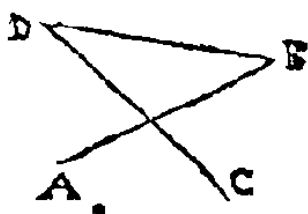
La demonstration de ceste prop. est facile. Car si AC partie de la ligne ACB est sur le plan DE, & l'autre partie CB en l'air, il est evident que ACB ne sera pas ligne droite, comme il est requis.



THEOR. 2. PROP. II.

Si deux lignes droictes se coupent l'une l'autre, elles seront sur vn mesme plan : Et tout triangle est en vn mesme plan.

Soient deux lignes AB & CD se coupans l'une l'autre au point E, & en EB, ED soient pris quelcôques points B & D, & soit tirée la ligne droite BD. afin de faire le triangle EBD. Je dis que les deux lignes droictes AB, CD, sont constituees en vn seul plan : Item que le triangle EBD est pareillement en vn seul plan.

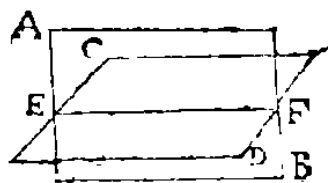


Car d'autant que les lignes AB, CD s'entrecoupent en E, BE, DE feront vn angle au point E: & par la definition de l'angle plan conuertie, &c. p. 1. elles seront en vn mesme plan, Et par la mesme raison BD faisant deux angles avec iceiles deux lignes BE, DE, sera aussi au mesme plan: Partant tout le triangle EBD est en vn mesme plan. Et puis que BE, DE parties des lignes AB, CD, sont en vn mesme plan, il s'ensuit par la r. p. 11. qu'icelles AB, CD, sont aussi en vn mesme plan; sçavoir est en celuy auquel nous auons demonstré estre le triangle EBD.

THEOR. 3. PROP. III.

Si deux plans se coupent l'un l'autre, leur commune section sera vne ligne droicte.

Soient les deux plans se coupans l'un l'autre AB & CD, & les termes de leur commune section, soient les poinçts E, F. Je dis que leur commune section est vne ligne droicte.



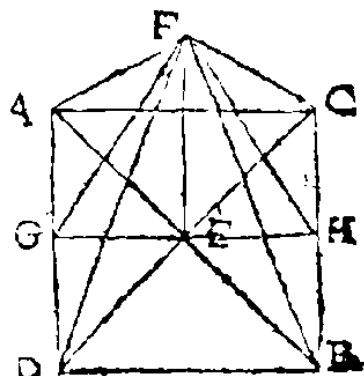
Car puis que les poinçts E, F, sont communs à tous les deux plans, d'un poinçt à l'autre soit menee vne ligne droicte sur le plan AB; item des mesmes poinçts soit menee vne ligne droicte sur le plan CD: Je dis qu'il est impossible qu'icelles deux lignes soient autres qu'une seule ligne droicte, sçavoir E F: car si elles estoient differentes, il s'en suivroit que deux lignes droictes auroient leurs extremittez communes: ce qui est impossible, car elles enfermeroient vne espace, contre la 12. com sent. La ligne droicte EF est donc sur l'un & l'autre plan, & partant leur commune section.

THEOR. 4. PROP. III.

Si deux lignes droictes se coupans l'une l'autre, & au poinçt de leur section on esleue perpendiculairement vne autre ligne droicte, elle sera aussi esleuee perpendiculairement sur le plan d'icelles.

Soient les deux lignes AB & CD, se coupans l'une l'autre au poinçt E, & du poinçt de section E soit esleue la perpendiculaire EF à chacune d'icelles: Je dis qu'elle est aussi perpendiculaire à leur plan.

Car soient posees egales AE, EB, CE & ED, & soient tirees les lignes AD, BC,



& par le point E soit mence la ligne droite GH , coupant les lignes AD, BC , és points $G \& H$: Item du point en l'air F soient tirees les lignes $FA, FG, FD, FB, FH \& FC$. D'autant que les costez EA, ED du triangle AED , sont egaux aux costez EB, EC du triangle BEC , & les angles AED, BEC contenu, par iceux costez aussi egaux par la 15. p. 1. les bases AD, BC seront pareillement egales, par la 4. p. 1. Derechef puis que les angles AEG, BEH sont egaux par la 15. p. 1. les deux angles AEG, EAG du triangle AGE seront egaux aux deux angles BEH, EBH du triangle BHE , & le costé AE est egal au costé BE : donc par la 26. p. 1. les deux costez AG, GE , seront egaux aux deux costez BH, HE . Et puis que les deux costez FE, EA du triangle FEA sont egaux aux costez FE, EB du triangle FEB , & les angles contenus d'iceux costez aussi egaux, sçauoir droicts par l'hypotese, par la 4. p. 1. les bases EA, EB seront egales. Par mesme raison seront aussi egales les lignes FD, FC . D'auantage veu que les costez FA, AD du triangle FAD , sôt egaux aux costez FB, BC du trian. FBC , & la base FC , egale à la base FD , par la 8. p. 1. les angles FAD, FBC serôt aussi egaux: Parquoy les costez FA, AG du trian. FAG estans egaux aux costez FB, BH , du triangle FBH , les bases FG, FH , seront pareillemēt egales par la 4. p. 1. Et finablemēt puis que les costez FE, EG , du triangle FEG , sont egaux aux costez FE, EH du triangle FEH , & les bases FG, FH aussi egales, les angles FEG, FEH seront pareillement egaux par la 8. p. 1. & partant par la 10. d. 1. la ligne droite FE sera perpendiculaire à la ligne GH , qui la touche en E , & constituée au mesme plan que les lignes AB, CD ; par la 2. p. 11.

~ On pourra semblablement prendre tant de lignes qu'on voudra sur le mesme plan, qui feront les angles droicts rencontrant la perpendiculaire FE , par les mesmes raisons que dessus: & par la 2. d. 11. FE sera perpendiculaire au plan des lignes $AB \& CD$; ce qu'il falloit demonstrier.

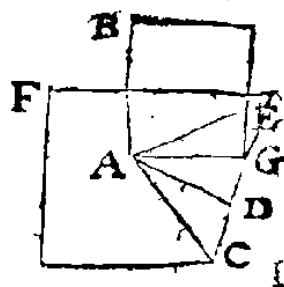
THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droite rencontre en vn point perpendiculairement trois autres lignes droites; icelles trois lignes droites seront en vn mesme plan.

ELEMENT.

Soit

Soit la ligne droite AB perpendiculaire a trois autres lignes droictes AC, AD, AE, au point de leur rencontre A. Je dis qu'icelles trois lignes AC, AD, AE, sont sur vn mesme plan.

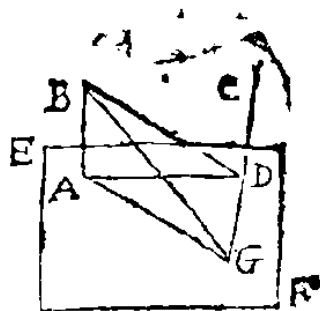


Car puis que deux d'icelles quelles qu'elles soient sont en vn mesme plan par la 2. p. 11. soient AC, AD, au plan FC. Si donc on dit que AE n'est point sur le mesme plan FC, mais qu'elle est esleuee en l'air, elle pourra estre au mesme plan que AB par la 2. p. 11. & soient toutes deux au plan BE. Ainsi FC, & BE sont deux plans differens, lesquels se touchans au point A, ne sont pas parallels. partant estans continuez tant qu'il sera de besoin ils se couperont, & leur commune section sera vne ligne droite par la 3. p. 11. soit la ligne AG, laquelle par ce moyen sera au mesme plan que AC; & partant par la 3. d. 11. BA, & GA se rencontreront en angles droicts: mais par hypothese AB & AE se rencontrent aussi en angles droicts: par ainsi les angles BAE, BAG estans au plan BG tiré par les lignes BA, AG, seroient egaux, la partie au tout: ce qui est impossible: Donc AE estoit au mesme plan que AC & AD.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux lignes droites sont esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan; elles seront paralleles.

Soient les deux lignes AB, CD esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan EF. Je dis qu'elles sont paralleles entr'elles.



Car si des points A & D, ou icelles lignes rencontrent vne mesme superficie plane on mene la ligne droite CD, les deux angles BAD & CDA seront droicts par la 2. d. 11. partant si les deux lignes BA & CD sont en vn mesme plan, elles seront paralleles par la 8. p. 1.

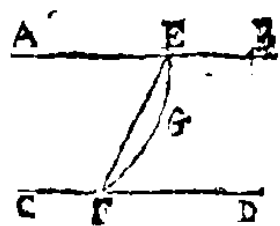
Ores qu'elles soient en vn mesme plan, on le prouue ainsi. Sur le plan EF & du point D, soit menee DG perpendicu-

laire à AD par la 11. p. 1. & soit posée icelle DG égale à AB, & soient menees les lignes BD, BG, AG. D'autant que les 2. triangles ABD & AGD ont les deux costez AB, DG égaux, & AD commun, & l'angle BAD droit égal à l'angle GDA aussi droit, par la 4. p. 1. la base BD sera égale à la base AG. Item les deux triangles AGB & GDB ayans les deux costez AB, & DG égaux, & les deux autres AG & BD aussi égaux, & la base BG commune à tous deux, par la 8. p. 1. les deux angles BAG, BDG seront égaux. Mais l'angle BAG est droit par la 3. d. 11. donc BDG sera aussi droit: il est donc evident que GD touche perpendiculairement en vn point D, les trois lignes DA, DB, DC: & partant par la 5. p. 11. icelles trois lignes se iōt en vn mesme plan, c'est à dire que CD sera au plan mené par les lignes AD, DB. Mais par la 2. p. 11. les trois lignes AB, BD, AD sont aussi sur vn mesme plan; partant AB & CD seront en vn mesme plan.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux lignes droites sont paralleles, & de l'une à l'autre on mene vne ligne droite, elle sera au mesme plan des lignes paralleles.

Soient deux lignes paralleles AB & CD, & de l'une à l'autre soit menee la ligne droite EF. Je dis qu'icelle ligne est au mesme plan des lignes paralleles AB & CB.



Car si elle n'est au mesme plan, ains en vn autre: que celuy cy coupe cestuy-là es points E, & F, & la commune section d'iceux plans soit EGF, laquelle sera ligne droite par la 3. p. 11. donc les deux lignes droites EF, EGF, ayans mesmes termes E & F, enfermeroiēt vn espace: ce qui est absurde. Donc la ligne droite EF n'est pas en vn autre plan que celuy auquel sont les paralleles AB, CD.

SCHOLIE.

Cette mesme proposition est aussi veritable, encore que les deux lignes AB, CD ne soient paralleles, pourueu qu'elles soient en vn mes-

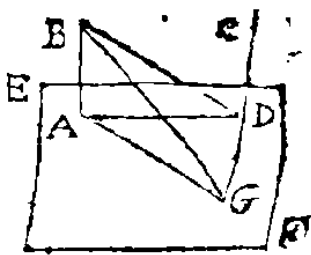
me plan, comme il est manifeste par la demonstration.

THEOR. 8. PROP. VIII.

S'il y a deux lignes paralleles, desquelles l'une soit à angles droicts à quelque plan : aussi l'autre sera à angles droicts sur le mesme plan.

Soient les deux lignes paralleles AB & CD, & que l'une d'icelle AB soit esleue perpendiculairement sur le plan EF. Je dis que l'autre CD est aussi esleue perpendiculairement sur le mesme plan EF.

Qu'il ne soit ainsi. Soit faicte mesme constructiō qu'en la 6. p. II. & comme il a esté demonstré, les deux angles BAG & GDB seront droicts, & par la 4. p. II. GD fera esleue perpendiculairement sur le plan des lignes AD & BD : mais par la 7. p. II. les deux lignes AB & AD sont au mesme plan de AB & CD : car elles sont paralleles par hypothese : il s'ensuit que GD est perpendiculaire sur le plan où est la ligne CD : Ainsi l'angle CDG sera droit. Mais l'angle ADC est aussi droit par la 29. p. I. estās AB & GD paralleles : & par la 4. p. II. CD sera perpendiculaire au plan de GD & AD, c'est à dire au plan EE. Ce qu'il falloit demonstrer.

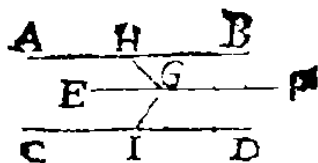


THEOR. 9. PROP. IX.

Les lignes droites paralleles à vne mesme, lesquelles ne sont à vn mesme plan qu'icelle, sont aussi paralleles entr'elles.

Soient les lignes droictes AB, CD, paralleles à la ligne EF, & ne soient en vn mesme plan qu'icelle. Je dis que AB, CD, sont aussi paralleles entr'elles.

Soit pris en EF quelconque point G, duquel soient tirees à icelle EF deux perpendiculaires, sçavoir GH au plan des paralleles AB, EF; &



GI au plan des paralleles CD, EF. D'autant que EF est perpendiculaire aux deux lignes GH, GI, qui s'entre-touchent en G: elle le sera aussi au plan ti, e par icelles par la 4 p.ii. Iatquoy puis que AB, EF, sont paralleles: & EF est perpendiculaire au plan mené par GH, GI: aussi AB sera perpendiculaire au mesme plan par la 8. p.ii. Par mesme raison CD sera perpend. au plan passant par GH, GI: & partant par la 6 p.ii. AB, CD estans perpend. a vn mesme plan, sont paralleles entrelles. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si deux lignes droites s'entre-touchant, sont paralleles: & deux autres lignes droites s'entre-touchant, & ne sont en vn mesme plan, elles comprendront angles egaux.

Soient les deux lignes AB & AC se touchans en A, lesquelles soient paralleles aux deux autres lignes DE & DF se touchant en D: & AB, AC ne soient au mesme plan que DE, DF. Je dis que les angles BAC, EDF, compris par icelles sont egaux.

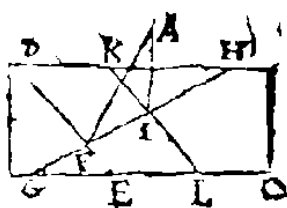


Qu'ainsi ne soit. Soient egales les quatre lignes AB, AC, DE, DF; & soient menees les lignes AD, BE, CF, BC, EF. Premièrement AB & DE estans egales & paralleles, AD & BE seront aussi egales & paralleles par la 33. p. i. & par la mesme raison AD, & CF seront aussi egales & paralleles: & partant par la 9 p. ii. BE & CF seront aussi egales & paralleles entrelles: & par la 33. p. i. BC & EF seront egales & paralleles. Ainsi les deux triangles APC & DEF ont les trois costez egaux aux trois costez chascun au sien, & par la 8. l. les angles BAC, EDF seront egaux. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROBL. I. PROP. XI.

D'un point esleué en haut; mener vne ligne perpendiculaire sur le plan qui est au dessous d'iceluy point.

Soit le point A eslevé en haut, duquel il faut tirer vne perpendiculaire au plan BC qui est au dessous d'iceluy point A . Au plan BC , soit menée comme on voudra la ligne DE ; a laquelle de A soit tirée la perpendiculaire AF par la 12. p. 1. Et au plan BC par F , soit tirée GH perpendiculaire a DE par la 11. p. 1. Et a icelle GH soit tirée de A la perpendiculaire AI par la 12. p. 1. Je dis qu'icelle AI est perpendiculaire au plan BC .



Car au plan BC , étant tirée par I , la ligne KIL parallèle a DE par la 31. p. 3. puis que DE est perpendiculaire aux deux lignes FA , & AI par la construction; & partant aussi perpend. au plan tiré par FA , FH par la 4. p. 11. pareillement KI sera perpend. au mesme plan par la 8. p. 11. Et d'autant que par la 2. p. 11 AI est en vn mesme plan que FA , FH , & touche la ligne KI en I , l'angle KIA sera droit par la 2. d. 11. & AI sera perpendiculaire aux deux KI , IF . Donc par la 4. p. 11. AI sera perpendicul. au plan où sont les lignes KI , IF , sçavoir au plan BC .

PROB. 2. PROP. XII.

A vn plan donné, & d'un point donné en iceluy, eslever vne ligne perpendiculaire.

Soit le plan donné BC , & le point donné en iceluy soit A : Il faut d'iceluy point A eslever vne ligne perpendiculaire au plan donné BC .



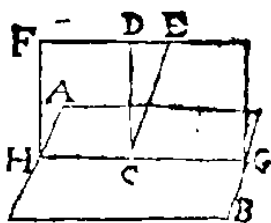
Soit pris en l'air comme on voudra le point D , & d'iceluy soit menée sur le plan BC , la perpendiculaire DE , rencontrant le plan au point E par la 11. p. 11. Et du point A soit menée AE parallèle a BD , par la 31. p. 1. il est evident que par la 8. p. 11. AE sera aussi perpendiculairement eslevée sur le plan BC , ainsi qu'il estoit requis.

THEOR. II. PROP. XIII.

D'un mesme plan, & d'un mesme point

d'iceluy, on ne leuera pas en l'air d'un mesme costé, deux lignes perpendiculaires.

Soit donné quelque plan comme AB, & le point en iceluy C : ie dis que du point C, on n'esleuera pas en l'air deux lignes perpendiculaires sur iceluy plan, & de mesme costé.



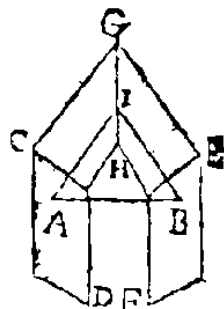
Autrement s'il est impossible: du point C, soient esleues en l'air les deux perpendiculaires CD & CE, elles seront en vn mesme plan, par la 2. p. 11. & soit iceluy FG, lequel d'autant qu'il touche le plan AB, au point C, n'est point parallele à iceluy AB : partant estans continuez ils se couperont, & leur commune section sera vne ligne droite: soit icelle GCH. Et parce que les lignes CD & CE sont perpendiculaires à iceluy plan AB, les angles ECG & DCG seroient droicts & egaux, la partie au tout: ce qui est impossible. Il ne se peut donc esleuer du point C, deux lignes perpendiculaires au plan AB, & de mesme costé, ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si vne ligne droite est perpendiculaire à deux plans; iceux plans seront parallels.

Soit la ligne droite AB, perpendiculaire à chacun des plans CD & EF: ie dis qu'iceux plans sont parallels entr'eux.

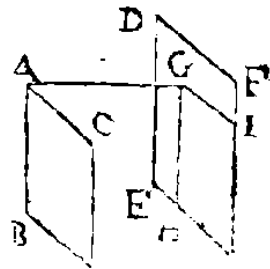
Autrement s'ils n'estoient parallels, estans continuez ils se rencontreront, & leur commune section sera vne ligne droite par la 3. p. 11. soit icelle GH, en laquelle soit pris comme on vouldra le point I, & soient d'iceluy menées les lignes IA, IB és plans GCD, GEF. Maintenant puis que la ligne AB est perpendiculaire à chacun d'iceux plans GCD, GEF, au triagle AIB les angles IAB & IBA, seront droits, contre la 17. p. 1. donc les deux plans CD, EF ne se rencontreront point, ains seront parallels: ce qu'il falloit prouuer.



THEOR. 13. PROP. XV.

Si deux lignes droictes s'entretouchant sont paraleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans , n'estans toutesfois en vn mesme plan: les plans passans par icelles, seront aussi paralels.

Soient les deux lignes AB & BC, se touchans au poinct A, paraleles a deux autres lignes DE, DF, s'entretouchans en D, & ne soient en vn mesme plan qu'icelles. Je dis que le plan BC mené par icelles AB, AC est paralel au plan EF tiré par les lignes DE, DF.



Car par la 31. p. 11. de A soit tirée sur le plan EF la perpendiculaire AG, rencontrant le plan EF en G: puis par la 31. p. 1. au plan EF, soient tirées de G, les lignes GH, GI paraleles a DE, DF. Maintenant d'autant que AB, GH sont paraleles a DE, icelles AB, GH seront paraleles entr'elles, par la 9. p. 11. & partant par la 29. p. 1. les angles BAG, AGH sont égaux a deux droicts. Mais AGH est droict, par la 3. d. 11. Donc BAG sera aussi droict. Par mesme raison on prouuera l'angle CAG estre droict. Parquoy veu que la ligne GA est perpend. aux deux AB, AC; par la 4. p. 11. elle sera aussi perpend. a leur plan BC: Mais par la construction elle l'est aussi au plan EF. Donc par la 4. p. 11. les plans BC, seront paralels: ce qu'il falloit demonstrier.

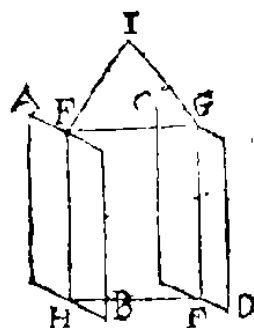
THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux plans paralels sont coupez par vn autre plan; les lignes de commune section seront paraleles.

Soient les deux plans paralels AB & CD, coupez par le

Troisième plan EF : Je dis que leurs lignes de commune section (c'est à sçavoir HE & GI) sont parallèles.

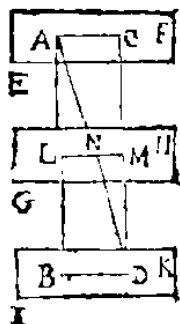
Autrement si elles n'estoient parallèles, estans cōtinuées, elles se rencontreroiēt comme au point I: Mais d'autant qu'iceux plans AB, CD sont Parallèles, estans continuez ils ne se rencontrent jamais: il faudroit donc que les lignes HEI, FGI (esquelles se rencontrent) fussent en partie sur leurs plans, en partie dehors, ce qui est contre la 1. p. 11. Donc HE & GF estant continuees ne se rencontrent point, & partant sont parallèles: ce qui estoit à prouver.



THEO. 15. PROP. XVII.

Si deux lignes droictes sont coupees par plusieurs plans parallèles, elles seront coupees proportionnellement.

Soient les deux lignes AB, CD, traversans les trois plans parallèles EF, GH, IK, tellement qu'icelles lignes sont coupees par iceux plans es points A, L, B, C, M, D. Je dis qu'elles sont coupees proportionnellement, c'est à dire que les segments d'icelles intercepts entre les susdits plans sont proportionaux, sçavoir que comme AL est à LB, ainsi CM à MD.

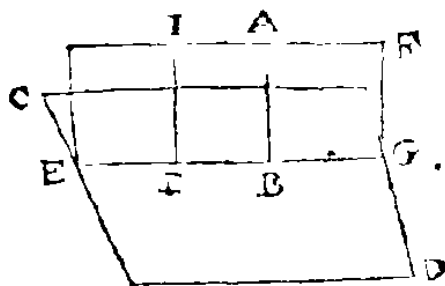


Car es plans EF, IK, soient menees les lignes droictes AC, BD : & tiré AD rencontrant le plan GH au point N, duquel soient menees les lignes NL, NM, au mesme plan GH; & le triangle ABD, par la 2. p. 11. sera en vn mesme plan : semblablement le triangle ADC en vn seul plan. Et d'autant que les plans parallèles GH, IK sont coupeez par le plan du triangle ABD : leurs communes sections LN, BD seront parallèles par la 16. p. 1. Par mesme raison MN, AC, seront aussi parallèles. Parquoy par la 2. p. 6. comme AL sera à LB, ainsi AN sera à ND : Item comme AN à ND, ainsi CM à MD : Et partant par la 11. prop. 5. comme AL sera à LB, ainsi CM sera à MD : ce qui estoit à prouver.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte est esleuee perpendiculairement sur vn plan, aussi tous les plans procedans d'icelle, seront perpẽdiculaires au mesme plan.

Soit la ligne AB perpendiculaire sur quelque plan CD : Je dis que tous les plans menez de la ligne AB, quelle part on voudra, seront esleuez perpendiculairement sur le mesme plan CD.

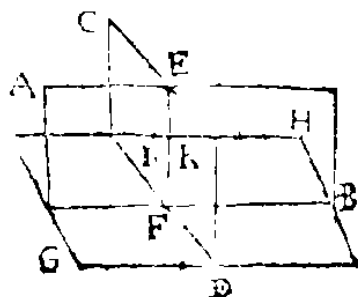


Qu'ainsi ne soit. Soit tiré par AB le plan EF, couppant le plan CD par la ligne EG : & en icelle soit pris quelconque point H, duquel au plan EF soit mesee HI parallele à AB par la 31. p.1. Donc puis que AB, IH sont paralleles, & AB a esté posée perpendiculaire au plan CD : aussi IH sera perpend. au mesme plan CD, par la 8. p.11. & partant par la 2. d.11. aussi perpendiculaire a la commune section EG. Par mesme discours toutes autres lignes qui seront tirees au plan EF paralleles à icelle AB, seront perpendiculaires au plan CD : & par consequẽt a la ligne EG. Parquoy par la 3. d.11. le plan EF sera perpendiculaire au plan CD. Par mesme raison seront demonstrez tous autres plans tirez par la ligne AE, estre perpendiculaires au plan CD.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si deux plans esleuez perpendiculairement sur vn autre plan s'entrecoupent, leur ligne de commune section est perpendiculaire sur iceluy plan.

Soient les deux plans se couppans l'un l'autre AB & CD, esleuez perpendiculairement sur le plan GH, & soit la ligne de leur commune section FE: ie dis qu'icelle est perpendiculaire au mesme plan GH.



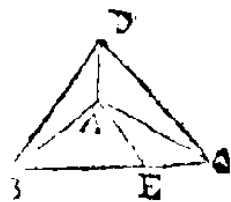
Car si elle n'est perpendiculaire au plan GH: puis que le plan AB, est perpendiculaire au plan GH, ils auront vne commune section qui sera ligne droiète: soit icelle FB; & du point F pris en icelle soit menee FI perpendiculaire à la ligne FB, sur le plan CD, par la 11. p. 1. & par la 4. d. 11. conuertie, elle sera perpendiculaire au plan GH. Tout de mesme le plan CD estant perpendiculaire au plan GH, si à leur commune section DF, & du point F, on lene la perpendiculaire FK sur le plan CD, elle fera aussi par la mesme def. conuertie perpendiculaire au plan GH: ainsi FI & FK seroient toutes deux d'un mesme point esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan: ce qui est contre la 13. p. 11. D'oc du point F on n'en a per mener d'autres perpendiculaires au plan GH, sinon vne seule, laquelle doit estre commune à tous les deux autres plans: partant il est euident que c'est leur ligne de commune section FE.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si vn angle solide est compris de trois angles plans, les deux pris comme on voudra, sont plus grands que le troisieme.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB. Ie dis que deux pris comme on voudra, comme BAD & DAC sont plus grands que le troisieme BAC.

Car si on dist que BAC soit plus grand que les deux autres: au plan tiré par AB, AC, soit fait DA'E egal à DAB par la 23. p. 1. & soient faictes egales les deux lignes AD AE: puis apres au mesme plan soit menee par E la ligne droiète BC, couppant les lignes AB, AC, en B & C: & soient tirees les lignes BD, DC. Main-

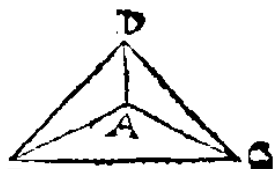


restant puis que les deux costez AB & AD sont egaux aux 2. costez AB & AE, & leurs angles egaux : la base DB sera egale a la base BE, par la 4. p. 1. Item puis que l'on pose l'angle BAC plus grand que les deux autres, & que le retranché BAE est egal à l'un d'iceux BAD, le reste CAE sera plus grand que l'autre CAD : mais les deux costez EA & AC sont egaux aux deux costez AD & AC, & l'angle CAE est plus grand que l'angle DAC : & partant par la 24. p. 1. la base EC sera plus grande que la base DC : & BD estant egale à BE, il est evident que le triangle ABC le costé BC est plus grand que les deux autres : ce qui est contre la 20. prop. 1. Donc l'angle BAC n'est point plus grand que les deux autres BAD, CAD. Que si on dit qu'il est egal, il s'ensuyura par le mesme discours que BC est egale à BD & CD : ce qui contrevient tousiours à la 20 p. 1. Il est donc plus petit que les deux autres ; ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Tous les angles plans d'un angle solide, sont plus petits que quatre angles droicts.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans CAB, BAD, DAC. Je dis qu'iceux trois angles plans sont plus petits que quatre droicts.



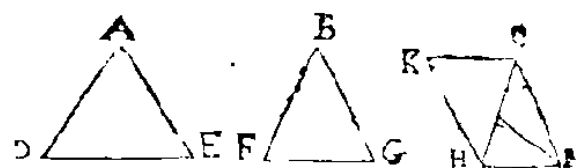
Car estans tirees les trois lignes BC, CD, BD, seront constituez trois angles solides B, C, D, desquels chacun est contenu sous trois angles plans, sçavoir B, sous ABC, ABD, CBD : & C sous ACB, ACD, BCD : & D sous ADB, ADC, BDC. Et d'autant que par la 20. p. 1. de chacun d'iceux angles solides, deux angles plans pris comme on voudra sont plus grands que le troisieme, les deux ABC, ABD, seront plus grands que le troisieme DBC, & les deux ACB, ACD, seront plus grands que le troisieme BCD : Item les deux CDA, & BDA, sont plus grands que BDC : & partant les six angles ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA ensemble, seront plus grands que les trois de la base triangulaire BCD, c'est a dire que deux droicts (car iceux trois angles valent tant par la 31. p. 1. (Mais d'autant qu'iceux six angles avec

les trois qui font l'angle solide A, vallent six droicts, par la 22.p.1. (Car ce sont les angles de trois triangles plans ABC, ACD, ABD, & qu'iceux six angles sont plus grands que de deux droicts) ; il est manifeste que les trois qui font l'angle solide A, sont plus petits que quatre droicts : ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que l'autre, & les lignes droictes comprenant iceux egales ; Il se peut faire que des lignes qui conjoignent icelles egales, soit constitué vn triangle.

Soient trois angles plus A, B, C, contenus des lignes egales AD, AE, BF, BG, CH & CI: deux des-



quels en quelques sortes qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre. Je dis que des trois lignes droictes DE, FG, HI, qui conjoignent icelles lignes egales, peut estre constitué vn triangle.

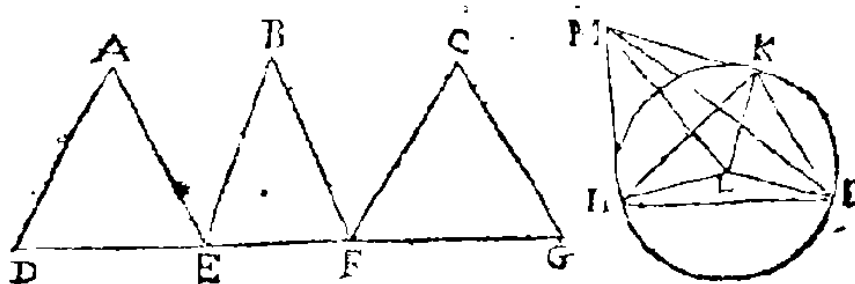
Car puis que deux d'iceux angles pris comme on voudra, sont plus grands que le troisieme ; qu'on en mette deux ensemble tels qu'on voudra, côme si a HCI, on adioust HCK egal à FBG par la 13.p.1. & ayant faict CK egal à BG : on tire IK & HK ; l'angle ICK estant plus grand que le troisieme A, la base IK par la 24.p.1. sera plus grande que la base DE (car les deux costez sont egaux) & à plus forte raison les deux IH, HK qui par la 20.p.1. sont plus grandes qu'icelle IK, seront plus grandes que la troisieme DE. Et par mesme discours on monstrera tousiours que deux d'icelles bases DE, FG, HI, prises comme on voudra, sont plus grandes que la troisieme : Partant d'icelles on pourra faire vn triangle. Ce qui estoit a demonstrier.

PROB.

PROB. 3. PROP. XXIII.

Faire vn angle solide de trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que le tiers. Mais il faut qu'iceux trois angles soiēt moindres que quatre droicts.

Soient trois angles plans A, B, C, moindres que 4 droicts, & desquels deux quels qu'ils soient sont plus grands que



l'autre. Il faut faire vn angle solide de trois angles plans egaux à iceux A, B, C.

Soient posées egales les six lignes AD, AE, BE, BF, CF, & CG qui comprennent les angles proposez, lesquels soient soutenus des trois bases DE, EF, FG. Donc puis que par la précédente prop. on peut faire vn triangle d'icelles lignes DE, EF, FG, soit fait le triangle HIK, ayans les trois costez egaux à icelles bases DE, EF, FG par la 22. p. 1. lequel soit circonscrit du cercle HIK par la 5. p. 4. & du centre L soient menees les trois lignes LH, LI, LK : & apres auoir par la 12. p. 11. esleué en l'air perpendiculairement LM, par le lemme de la 14. p. 10. soit icelle retranchée en sorte, que son quarré avec le quarré de LH, soient egaux au quarré de l'un des costez d'iceux angles plans : puis soient menees les lignes HM, IM, KM : Je dis que HIMK est vn angle solide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez A, B, C.

Car les trois lignes LH, LI, LK estant egales, & LM perpendiculaire à icelles : les trois lignes HM, IM, KM, seront egales par la 47. p. 1. d'autant qu'elles peuvent autant l'une comme l'autre : & puis qu'elles peuvent autant que l'un des costez des angles plans donnez, elles seront egales aux costez d'iceux angles plans : puis les trois bases HI, IK, KH estans

egales aux bases des angles donnez, par la 8. p. 1. les trois angles plans faisant l'angle solide au point M , seront egaux aux trois donnez A, B, C .

SCHOLIE.

Si quelqu'un obieſtoit icy que la perpendiculaire LM ne peut pas toujours estre retranchee, en sorte que son quarré avec le quarré de LH soient egaux au quarré de l'un des costez des angles donnez: comme par exemple si iceluy costé estoit egal ou plus petit que HL . Je dis que cela n'arrive jamais, non pas seulement qu'il soit egal à HL : Car si HL & IL estoient egaux à AD & AE : & la base HI egale à la base DE , par la 8 p. 1. (& ainsi des deux autres triangles) les trois angles au point L seroient egaux aux trois angles A, B, C , chacun au sien: ce qui est euidentement faux: Car toujours par hypothese les trois angles A, B, C , sont plus petits que quatre droicts; & par le coroll. de la 15. p. 1. les trois au point L sont egaux à quatre droicts.

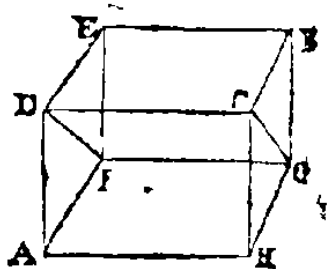
THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si vn solide est compris de plans parallels; Les plans opposez d'icelles seront parallelogrames semblables, & egaux.

Soit le solide AB compris de six plans parallels AC, FB, AG, DB, AE, HB : Je dis que les plans opposez sont parallelogrames, semblables & egaux.

Car puis que les plans AC & FB sont parallels, estans coupezz par les plans AE & HB ; les lignes de cõmune section

AD, FE sõt paralleles: Itẽ HC & GB , par la 16. p. 11. par la mesme raison les plans AG & DB estans parallels, les lignes de cõmune section AF & DE : Item GH & BC sont paralleles: partant AE & HB sont parallelogrames. Par le mesme discours $AG, DB; AC, FB$, se prouueront estre parallelogrames. Je dis maintenant que les parallelogrames opposites sont semblables & egaux. Car puis que les lignes AF, AD , sont paralleles

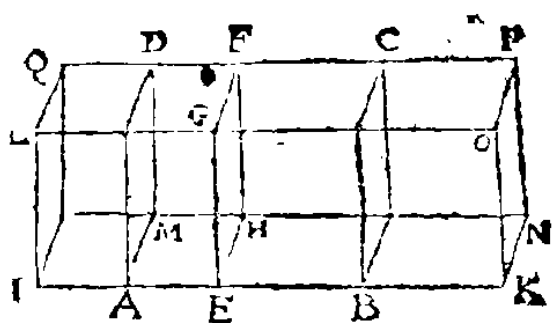


ait lignes HG, HC, & non en mesmes plans, mais en opposez; par la 10. p. 11. les angles DAF, CHG, seront egaux: par mesme raison les autres angles du parallelograme AE, seront egaux aux autres angles du parallelograme HB. Et puis que par la 34. p. 1. au parallelog AC, les costez AD, HC sont egaux comme aussi les costez AF, HG, du parallelog. AG; comme AD sera à AF, ainsi HC à HG, & partat comme AF a FE, ainsi HG a GB, &c. Donc les costez des parallelog. AE, HB, au long des angles egaux, seront proportionaux: & partant ils sont parallelogrames semblables. Maintenant estans tirez les diametres DF, CG: veu que les costez AD, AF, du triangle ADF, sont egaux aux costez HC HG, du triagle HCG, & les angles DAF, CHG aussi egaux; par la 4. p. 1. les triangles ADF HCG, seront pareillement egaux: lesquels estans moitez des parallelogrames AE, HB, par la 34 p. 1. iceux parallelogrames seront aussi egaux entr'eux. Par mesme discours on demonstera les autres parallelogrames opposez AG, DB; AC, FB, estre semblables & egaux.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Si vn solide parallelipede est couppé par vn plan parallel aux plans opposez, les solides coupeez seront lvn à l'autre comme leurs bases.

Soit le solide parallelipede ABCD couppé par le plan EF parallel aux deux opposez AD & BC, & faisant deux solides AF & EC: ie dis qu'iceux solides seront lvn à l'autre, comme la base AH à la base BH.



Qu'il ne soit ainsi (la ligne AB estant prolongee de part & d'autre.) Soient faictes egales AI à AE, & BK à BE, & soient accomplis les parallelogrames IM & BN. Item les solides A Q & BP. Doncques puis que AI, AE, sont egales, les parallelog. IM, AH seront aussi egaux par la 1. p. 6. & par la 24. p. 11. les

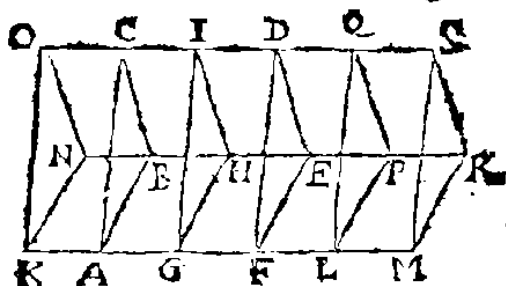
plans oppofez LD, GD feront femblables & egaux: Item AL, AG femblables & egaux à MQ, MF, plans oppofez; & ainfi des autres: & par la 9. def. de ce liure, le folide AQ eft egal au folide AF. Par le mefme difcours le folide BP fera egal au folide FB: partant le folide IF eft autāt multiplie du folide AF, comme la bafe IH eft multiplie de la bafe AH: Item le folide EP eft autāt multiplie du folide EC, comme la bafe EN eft multiplie de la bafe BH: & partant comme la bafe IH fera plus grande, egale ou plus petite que la bafe AH, ainfi le folide IF fera plus grand, egal, ou plus petit que le folide AF. Tout de mefme comme la bafe EN fera plus grande, egale, ou plus petite que la bafe BH, ainfi le folide EP fera plus grand, egal, ou plus petit que le folide EC. Maintenant foient quatre grandeurs, les deux bafes AH, BH, & les deux folides AF, EC: defquelles de la premiere & troiefme, (ſçauoir de la bafe AH & du folide AF) on à pris les equemultiplices HI bafe, & IF folide: Item de la feconde & quatriefme, (ſçauoir de la bafe BH, & du folide EC) les equemultiplices EN bafe, & EP folide, lefquels nous auons monſtré eſtre comme demande la 6. d. 5. plus grands, egaux ou plus petits, en quelconque multiplication qu'elles foient prinſes: & partant comme la bafe AH à la bafe BH, ainſi le folide AF au folide EC: ce qu'il falloit demonſtrer.

S C H O L I E.

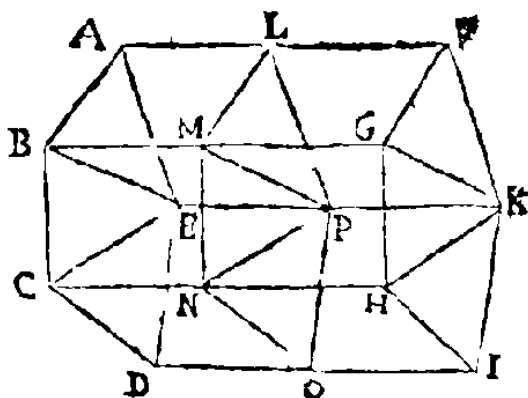
Ceſte propoſ. ſe peut accommoder à tous priſmes: Car ſi quelconque pri me eſt couppé par un plan parallel aux plans oppofez; tout ainſi que la b ſe fera à la bafe, ainſi le folide ſera au folide. Car ſoit premierem nt le priſme ABCDEF, duquel les plans oppofez ſont les triangles ABC, DEF; & ſoit iceuy couppé par le plan GHI parallel aux plans oppofez. Je dis que comme la bafe AI eſt à la bafe FI, ainſi le folide ABCIHG eſt au folide FEDIHG. Car ſoit imaginé le priſme ABCDEF eſtre prolongé de part & d'autre, tant qu'on voudra; Et de AF prolongee ſoient priſes AK egale à GF, & FL, LM egales à FG: En apres par les points G, L, M ſoient entendus les plans KNO, LPQ, MRS parallels aux plans ABC, GHI, FED. Donc puis que les plans parallels ABC, GHI, ſont coupez par le plan AI; leurs communes ſections AC, GI, ſeront para. lels par la 16. p. 11. Mais à cauſe que AD eſt parallelog. AG, CI ſeront auſſi paralleles. Donc AI eſt parallelog. Par meſmes raiſons ſeront demonſtrez AH, CH eſtre parallelog. Et pource que les coſtez AC, AB, du triangle ABC, ſont egaux

aux costez GI, GH , du triangle GHI , (car par la 34. p. 1. AC est egal à GI , & AB à GH) & par la 10. p. 11. les angles BAC, HGI sont aussi egaux; (pource que les lignes AB, AC sont paralleles aux lignes GH, GI , & en diuers plans) par la 4. p. 1. les triangles ABC, GHI sont egaux entr'eux, & equiangles: Parquoy par la 4. p. 6. l. s costez d'alentour les angles egaux, seront proportionnaux; & partant iceux triangles seront semblables. Donc le solide $ABCIHG$, contenu des deux plans opposez ABC, GHI egaux & semblables, & des parallelog. AI, IB, GB , est un prisme. Par mesme raison $ABCONK, GHIDEF, DEFLPQ, LPQSRM$ seront prismes: Et pource que les parallelogrames AI, KC sont egaux & semblables, comme aussi AH, KB ; & CH, OB ; tous les plans du prisme $ABCIHG$, seront egaux & semblables à tous les plans du prisme $ABCONK$. Parquoy par la 9. d. 11. les prismes $ABCIHG, ABCONK$ sont egaux. Par mesme raison les prismes $GHIDEF, DEFLPQ, LPQSRM$ seront egaux. Partant le prisme $KNOIHG$ sera autant multiple du prisme $ABCIHG$, que la base KI , de la base AI ; & le prisme $GHISRM$ autant multiple du prisme $GHIDEF$, que la base GS de la base GD . Et pource que si la base KI , (multiple de la base AI premiere grandeur) est egale à la base GS (multiple de la base GD 2. grandeur) aussi le prisme $KNOIHG$ (multiple du prisme $ABCIHG$ 3. grandeur) est egal au prisme $GHISRM$, (multiple du prisme $GHIDEF$ 4. grandeur:) Mais si la base KI est plus grande que la base GS , aussi le prisme est plus grand que le prisme; & si moindre, moindre, en quelconque multiplication: par la 6. d. 5. cōme la base AI premiere grandeur, sera à la base GD 2. grandeur, ainsi le prisme $ABCIHG$ 3. grandeur sera au prisme $GHIDEF$ 4. grandeur. En la mesme maniere on demonstrea que le prisme est au prisme, comme la base AH est à la base GE , & comme la base CH est à la base EI . Ce qui estoit proposé.

Soit maintenant le prisme $ABCDEF GHIK$, duquel les plans opposez sont polygones, c'est à sçavoir pentagones, & soit coupe par le plan $LMNOP$. Je dis derechef, que comme la base CM est à la base NG , ainsi est le solide $ABCDEL MNOP$, au solide $LMNOPFGHIK$. Car si les plans opposez parallels sont resouds en triangles; aussi le prisme sera resoud en autant de prismes qu'il y aura de triangles es plans opposez. Parquoy comme la base BP est à la base MK , ainsi le prisme $ABEP ML$ sera au prisme $LMPKGE$, par les choses d'monstrees cy dessus. En la mesme maniere, comme la base CP est à la base NK , ainsi le prisme $BCEPM N$ sera au prisme $MNPKGH$; &



Le prisme $CDEPNO$ au prisme $NOPKHI$. Mais par la 1. p. 6. comme BP est à MK ; & CP à NK , ainsi est la ligne EP à la ligne PK , c'est à dire comme CN est à NH , & comme CN est à NH , ainsi est CM à NG . Donc les prismes $ABEP$, ML , $BCEPMN$, $CDEPNO$, ont mesme raison aux pris-



mes $LMPKGF$, $MNPKGH$, $NOPKHI$, que CM à NG ; & partant ont la mesme entr'eux. Mais par la 12. p. 5. comme un seul est à un seul, ainsi sont les trois aux trois. Donc comme le prisme BC $EPMN$ sera au prisme $MNPKGH$, c'est à dire comme la base CM à la base NG , ainsi le prisme $BCDELMNOP$ composé des trois sera au prisme $LMNOPFGHIK$ composé des trois. Ce qui estoit proposé. Il y aura mesme demonstration en quelconque autre prisme.

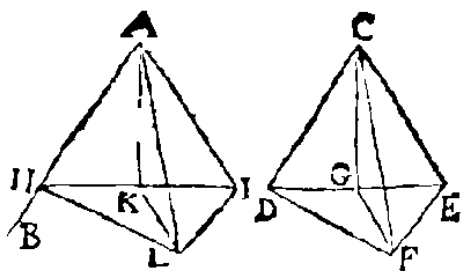
COROLLAIRE:

De ceuy resulte que si quelconque prisme est couppe par un plan parallel aux plans opposez, que la section est une figure egale & semblable aux plans opposez. Car il a esté demonstre au premier prisme que le triangle GHI est egal, & semblable au triangle ABC , & partant au triangle DEF : Et il y a mesme demonstration en tous. La mesme se doit entendre des parallelepipedes.

PROB. 4. PROP. XXVI.

Sur vne ligne droicte, & à vn point donné en icelle, constituer vn angle solide egal à vn angle solide donné.

Soit la ligne droicte donnee AB , & le point en icelle A ; & il faut construire sur icelle AB , & au point A , vn angle solide egal à l'angle solide C compris de trois angles plâs DCE , ECF , FCD .



Soit tiree de F , la ligne FG perpendiculaire au plan des li-

gnes CD, CE , par la 11. p. 11. & soient menees les lignes DF, FE, EG, GD, CG : en apres soit prise AH egale à CD : & par la 13. p. 1. soit faict l'angle HAI egal à l'angle DCE : & la ligne AI egale à la ligne CE . Derechef au plan tiré par AH, AI soit faict l'angle HAK egal à l'angle DCG : & la ligne AK egale à la ligne CG : puis par la 12. p. 11. de K soit tirée au plan auquel sont les trois AH, AK, AI , la perpendiculaire KL : laquelle soit posée egale à FG , & soit menee la ligne AL . Je dis que l'angle solide A , contenu des trois angles plans HAI, HAL, LAI , est egal à l'angle solide donné C .

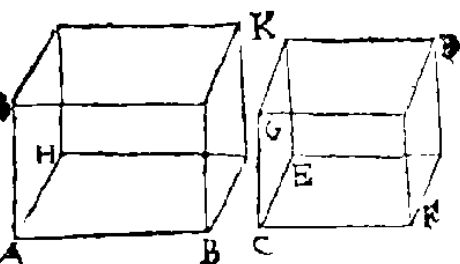
Car estans menees les lignes HK, KI, IL, LH : veu que les costez AH, AK du triangle AHK , sont egaux aux costez CD, CG du triangle CDG , & les angles HAK, DCG egaux par la construction : les bases HK, DG seront egales par la 4. p. 1. Et d'autant que des angles egaux HAI, DCE , estans otez les angles egaux HAK, DCG , demeurent egaux les angles KAI, GCE : lesquels par la construction sont compris de lignes egales; par la 4. p. 1. les bases KI, GE , seront aussi egales. Les costez KH, KL sont aussi egaux aux costez GD, GF , & les angles HKL, DGL droicts : donc par la mesme 4. p. 1. les bases HL, DF , seront egales. Parquoy puis que les costez AH, AL du triangle AHL , sont aussi egaux aux costez CD, CF du triangle CDF : (car les costez AK, KL , sont egaux aux costez CG, GF , par la construction, & comprennent angles droicts : partant les bases AL, CF sont egales par la 4. p. 1.) les angles HAI, DCF seront pareillemēt egaux par la 8. p. 1. Finalement pour ce que les costez KI, KL sont egaux aux costez GE, GF : & les angles IKL, EGF droicts; par la 4. p. 1. les bases IL, EF sont egales : partant puis que les costez AI, AL du triangle AIL sont egaux aux costez CE, CF du triangle CEF , par la construction, les angles IAL, ECF seront aussi egaux par la 8. p. 1. donc les trois angles plans HAI, HAL, LAI , composant l'angle solide A , sont egaux aux trois angles plans DCE, DCF, FCE , composant l'angle solide C ; & partant l'angle solide A est egal à l'angle solide C : ce qui estoit requis.

PROB. 5. PROP. XXVII.

Sur vne ligne droite donnee, descrire vn solide parallelipede semblable, & semblablement posé à vn solide parallelipede donné.

Soit la ligne donnée AB, sur laquelle il faut construire vn solide parallelepiped semblable, & semblablement posé au parallelepiped donné CD.

Sur la ligne AB & au point A, soit fait vn angle solide egal à l'angle solide C par la 26. p. 11. lequel soit compris des trois angles plans HAI, BAI, BAH : & par la 12. p. 6. soit fait comme CF est à CG, ainsi AB à AI, & comme CG à CE, ainsi AI à AH : & en raison egale AB sera à AH comme CF à CE. Soient maintenant paracheuez les parallelog. BH, HI, BI, BK, KI, KH. Je dis que le solide AK est semblable & semblablement posé au solide CD donné.



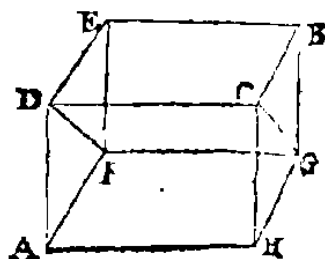
Car ils ont autant de superficies planes l'un comme l'autre & d'autant que AB est à AI, comme CF à CG, & l'angle BAI egal à l'angle FCG, le parallelogramme BI est semblable au parallelog. FG : par la mesme raison le parallelog. BH sera semblable au parallelog. FE : & HI à EG. Partant trois parallelog. du solide AK sont semblables & semblablement posez, à trois parallelog. du solide CD. Mais par la 24. p. 11. les trois opposez sont egaux, & semblables. Parquoy les six plans du solide AK sont semblables & semblablement posez aux six plans du solide CD : & partant par la 8. d de ce liure les solides AK & CD seront semblables & semblablement posez.

THEOR. 23. PROP. XXVIII.

Si vn solide parallelepiped est coupé par vn plan passant par les diagonales des plans opposez : il sera coupé en deux egalemt.

Soit le solide parallelepiped AB coupé par vn plan passant par les diagonales des plans opposez DF, CG. Je dis qu'il est coupé en deux egalemét.

Car il est euident par la 34. p. 1. que les triangles ADF, EFD sont egaux ; item les deux CGH & GCB, & le plan AG egal & semblable au plan DB, &

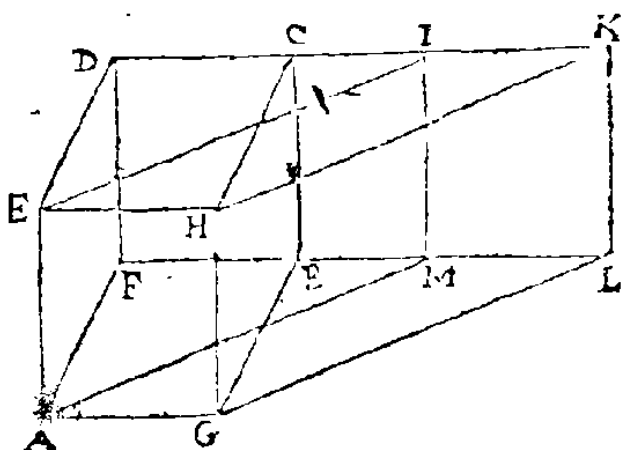


AC à FB par la 24. p. 11. (car ils sont opposez) Partant les deux prismes ADCHGF, FEBGCD, sont cōpris de parallelogrāmes, & de triangles opposez semblables & egaux : & par la 9. def. de ce liure iceux prismes sōt egaux. Parquoy puis qu'ils composent le parallelipede AB : iceluy sera couppé en deux egalelement par le plan DCGF : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 24. PROP. XXIX.

Les solides parallelipedes ayans mesme base , & mesme hauteur , & desquels les plās opposez à la base sont entre mesmes lignes droictes , sont egaux entr'eux.

Soient les deux solides parallelipedes AB CDEFGH, ALKIEH GM, tous deux sur la mesme base AH, de mesme hauteur , ayans les deux plans FC & MK opposez à la base AH constituez entre les mesmes lignes droictes DK & FL : ie dis qu'iceux deux solides parallelip. sont egaux entr'eux.



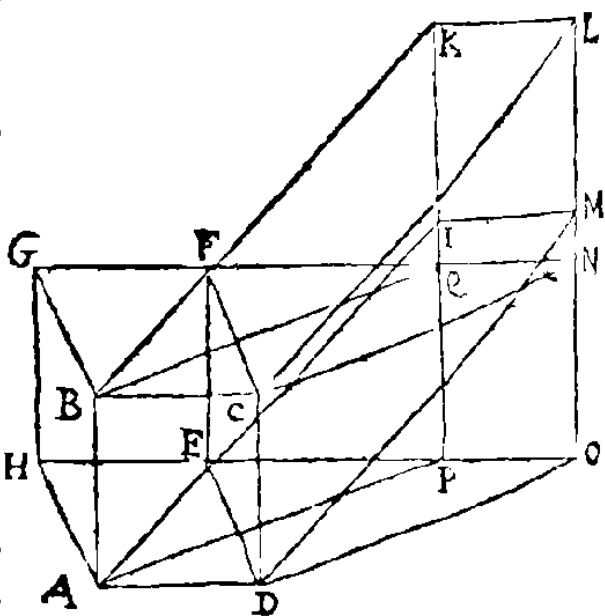
Ceste demōstration est facile à celuy qui a bien conceu celle de la 35. p. 11. Car ce que celle-là prouue par les triangles egaux, ausquels on oste & adioust. Icy on prouue par les prismes egaux, desquels on retranche & adioust vn prisme commun. Les prismes AFMIDE, GBLKCH, seront monstrez egaux par la 24. p. 11. parce que les plans opposez des parallelipedes sont semblables, & egaux : & d'iceux sont faicts les prismes. Le reste est aisé.

THEOR. 25. PROP. XXX.

Les solides parallelipedes constituez sur

mesme base, & de mesme hauteur, & desquels les plâs opposez à leur base ne sont entre mesmes lignes droïtes, sont egaux entr'eux.

Soient deux solides parallelipipedes ABCD EFGH, ABCDMLKI, tous deux sur mesme base ABCD, & de mesme hauteur (c'est à dire que leurs plans opposez, & parallels à leur base ABCD, sçauoir GE & KM soient en vn mesme plâ, lequel soit parallel à la base AC) ie dis qu'ils sont egaux entr'eux, encores que les plans GE & KM opposez à leur base commune AC, ne soient entre mesmes lignes droïtes.



Car puis que les plans GE & KM sont en vn mesme plan, & qu'ils ne sont entre mesmes lignes droïtes : il est certain que deux costez de l'vn estans continuez, couperont deux costez de l'autre aussi continuez. Soient donc les costez GE, HE continuez vers N. & D. Item KI, LM vers P & O : elles se couperont donc aux poinçts Q, N, P, O, faisant vn parallelograme (d'autant que les lignes continuees sont paralleles) lequel sera egal à la base plane AC : Car par la 34. p. 1. les lignes QP & NO estans egales à GH, FE, elles le seront aussi à BA & CD : item PO & QN estans egales à IM & KL, elles le seront aussi à BC & AD : & apres auoir mené les quatre lignes AP, DO, BQ, CN : il est manifeste que les deux solides AF, AN, sont sur mesme base, & de mesme hauteur ; (car ils sont entre mesmes plans) & les plans HF, PN opposez à la base AC, entre mesmes lignes droïtes, & par la 29. p. 11. ils sont egaux.

Pareillement le solide AN se trouuera egal au solide AL, (estâs sur mesme base AC, de mesme hauteur, & les plans QO, KM opposez à la base AC entre mesmes lignes droïtes) & par la commune sentence le solide AF sera egal au solide AL : ce qui estoit à demonstrier.

S C H O L I E,

On convertira tant ceste proposition que la precedente en ceste maniere.

Les solides parallelipipedes egaux ayans mesme base, soit qu'ils soient colloquez entre mesmes lignes droictes, ou non, sont en mesme hauteur.

Car si l'on dit que l'un est plus haut, si d'iceluy on coupe un parallelipede de mesme hauteur que l'autre, le couppe & l'autre seroẽt egaux, par la 29. ou 30. p. 1. & puis qu'à cest autre est pose egal au tout; le couppe sera egal au tout; Ce qui est absurde.

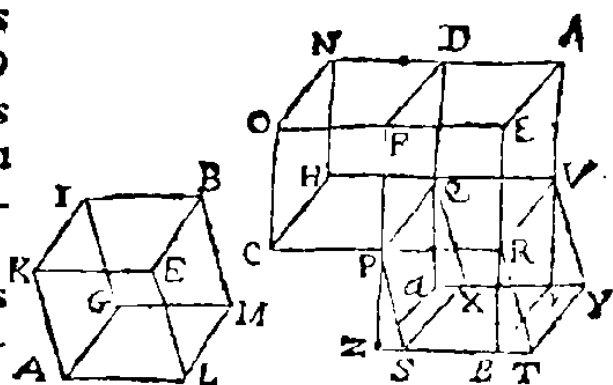
THEOR. 26. PROP. XXXI.

Les solides parallelipipedes estans sur bases egales, & de mesme hauteur; sont egaux entre eux.

Soient les deux solides parallelipipedes A B, C D constituez sur bases egales A E & C F, & d^e mesme hauteur A G, C H. Je dis qu'ils sont egaux.

Qu'ainsi ne soit. Leurs hauteurs sont perpendiculaires, ou non: Soient premierement perpendiculaires: & apres avoir continué C P iusques à K, & fait PR egale à K E, au plan de O P prolongé, soit fait l'angle R P S egal à l'angle A K E, & fait R S egale à K A: puis soit acheuẽ le parallelogramme P T, sur lequel soit construit le parallelipede Q S T V à la hauteur de la perpendiculaire P Q. Donc puis

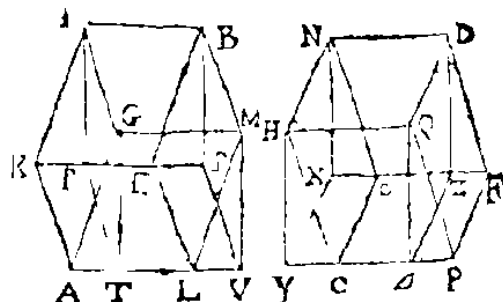
que les costez P R, P S sont egaux aux costez E K, K A, & les angles R P S, E K A egaux, les parallelog PT, K L seront eg. & semblab. Derechef puis que les costez P Q, P S sont egaux aux costez K I, K A, & les angles Q P S, I K A droicts par la 1. d.



11. pource qu'icelles IK, PQ sont posees perpendiculaires aux plans AE, PT : aussi les parallelog. QS, AI, seront eg. & semblab. Par mesme raison, d'autant que les costez PR, PQ sont egaux aux costez KE, KI, & les angles RPQ, EKI droicts par la mesme 2. d. 11. pareillement les parallelog. PV, KB seront eg. & semblab. Parquoy puis que les trois parallelog. PT, QS, PV, du parallelepipedes QSTV sont egaux & semblables aux trois KL, AI, KB, du parallelepipedes AIBL, par la 24. p. 11. tant ceux la que ceux-cy seront egaux & semblables à leurs autres parallelog. opposez : & partant par la 9. def. de ce liure les parallelepipedes AB, SV seront egaux entr'eux. Maintenant que FP, TS prolongees se rencontrent en Z : & DQ, YX, en α & soit acheué le parallelepipedes ZV. Item que ND, γ V prolongees se rencontrant en δ , & OF, BR, en ϵ , & soit acheué le parallelepipedes DR. Donc puis que les parallelepipedes SV, ZV, ont mesme base PV, & sont en mesme hauteur, & que les plans SY, Z γ , opposez a la base, sont entre mesmes lignes droictes ZT, α Y : iceux solides seront egaux entr'eux par la 29. p. 11. Mais le parallelepipedes SV est egal au parallelepipedes AB : donc le parallelepipedes ZV sera egal au mesme AB. Et d'autant que par la 35. p. 1. les parallelogrammes PT, PB sont egaux, & PT egal à AE, aussi PB sera egal au mesme AE, c'est à dire à CF (car AE, CF sont posees bases egales) & par la 7 p. 5. comme CF sera à P ϵ , ainsi PB sera à P ϵ : & par la 25. p. 11. comme la base CF est à la base P ϵ , ainsi le solide CD est au solide P δ , puis que le parallelepipedes C δ est couppe par le plan PD parallel aux plans opposez CN, R δ : Par la mesme raison cōme PB est à P ϵ , ainsi le solide ZV ou solide P δ , pource que le parallelepipedes DB est couppe par le plan PV parallel aux plans opposez. Donc par la 9. p. 5. les parallelepipedes CD, ZV seront egaux, puis qu'ils ont vne mesme raison au solide P δ , sçavoir est la mesme qu'ont les bases CF, PB, a la base P ϵ . Parquoy puis que le parallelepipedes ZV a esté demonstree egal au parallelepipedes AB : les parallelepipedes AB & CD seront pareillement egaux : ce qui estoit propose.

Maintenant si leurs hauteurs ne sont perpendiculaires sur les bases AE, CF, soit tirees des points (apres auoir continué les lignes AL, KE & PC, FO, tant qu'il sera de besoin) G, I, B, M, & H, N

D, Q, & sur les plans d'au dessous d'iceux points les perpen-



diculaires $GT, IR, BS, MV, \& HY, NX, DZ, Qa$, par la 11. p. 11. & soient tirées RT, SV, XY, Za . Il est evident par ce qui a esté démontré cy dessus que le solide TB est egal au solide YD , car ils sont sur bases egales GB, HD : & de mesme hauteur : Mais par la 29. p. 1. le solide TB est egal au solide AB ; & le solide YD egal au solide CD : donc le solide AB sera egal au solide CD . Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E .

On conuertira ceste 31. prop. en ceste maniere.

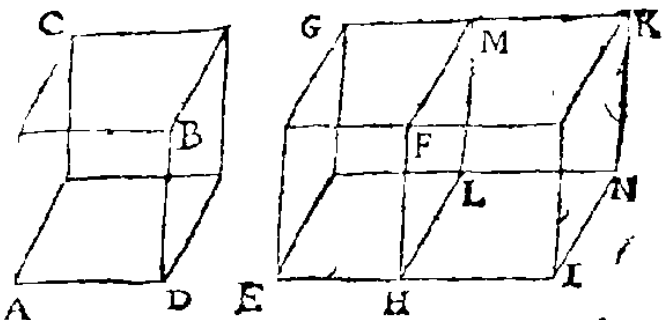
Les solides parallelipipedes egaux, constituez sur bases egales, sont en mesme hauteur : & les solides parallelipipedes egaux, qui sont en mesme hauteur : sont sur bases egales, s'ils n'ont vne mesme base.

Car si on croit l'un plus haut que l'autre : si on coupe du plus haut un parallelipip. de mesme hauteur que l'autre : par la 31. p. 11. le couppe sera egal à l'autre, auquel est aussi posé egal le tout : par quoy le couppe sera aussi egal au tout : ce qui est absurde. Que si les parallelip. estans de mesme hauteur, on croit que la base de l'un soit plus grande que la base de l'autre, si on coupe d'icelle base vne egale à l'autre, & sur icelle couppee on entend estre un parallelipipede de mesme hauteur, nous demonstrerons en la mesme maniere, la partie estre egale au tout : ce qui est absurde.

T H E O R . 27 . P R O P . x x x i i .

Les solides parallelipipedes de mesme hauteur; sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux parallelipipedes de mesme hauteur $ABCD, EF$ GH , desquels les bases soient AB, EF Iedis que le solide est au solide comme la base à la base.



Car si sur la ligne HF (apres avoir prolongé le plan EF vers I) & sur l'angle FHI on construit le parallelograme FF

egal au parallelograme AB : puis on acheue le solide IFLK; iceluy estant de mesme hauteur que le solide ABCD , & sur base egale, il luy sera egal par la 31. p. 11. Parquoy par la 7. p. 8. comme le solide IFKL est au solide EFGH, ainsi le solide ABCD au mesme solide EFGH. Mais par la 25. p. 11. le solide IFKL est au solide EFGH, comme la base IF, c'est a dire AB à la base EF; Donc aussi le solide ABCD, sera au solide EFGH, comme la base AB, à la base EF: ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

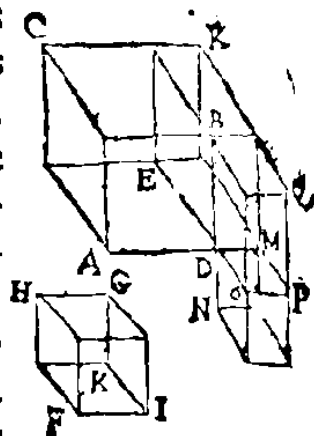
La converse ; si les solides parallelepipedes sont entr'eux comme leurs bases ; ils seront en me me hauteur. Car si l'une est plus grande que l'autre, soit de la plus grande coupee une egale à la moindre, & soit tiré un plan parallel à la base. Or par la 32. p. 11. comme la base sera à la bas , ainsi l' paral'eli-pede sera au parallelepipede couppé : mais ainsi il estoit aussi au par'el' l'ip. total. Donc le couppé est egal au tout par la 9. p. 9. ce qui est absurde.

THEO. 28. PROP. XXXIII.

Les semblables solides parallelipipedes, s'ot
l'un à l'autre en raison triplee de leurs costez
homologues.

Soient deux semblables parallelipipedes
 ABCDEFGHIK constituez sur les bases
 semblables AE, FK, esquelles les costez
 homologues sont AD, FI. Je dis que le
 parallelipiede ABCDE est paralleli-
 pedeFGHIK en raison triplee des co-
 stez homologues AD, FI.

Qu'ainsi ne soit : soit prolongé AD vers M, tellement que DM soit égale à FI, ou HG. Item BD vers N, en sorte que DN soit égale à LI ou GK : Item ED vers O, tellement que DO soit égale à KI ou GL : puis apres estans accomplis les parallelogrames DP, MN, NO, soit acheué le parallelepipedes NMP. Il est donc evident que les deux parallelepipedes



FG, NP sont semblables & egaux, puis qu'ils sont composez de plás qui ont les angles egaux, & les costez au long d'iceux angles egaux, aussi egaux. Item soient construis les parallelipipedes BMOQ, & EBRM. D'autant que les parallelipipedes ABCD; FGHI, sont semblables, comme AD est à FI, c'est à dire à DM, ainsi DE à KI, c'est à dire à DO; & BD à LI, c'est à dire à DN. Mais par la 1. p. 6. comme AD à DM, ainsi est le parallelo. AE, au paral. EM; & côme ED à DO, ainsi le paral. log. EM à DP; & comme BD à DN, ainsi le parallelograme BM à MN. Donc comme AE sera à EM, ainsi EM à DP, & BM à MN. Mais par la 32. p. 11. comme la base AE à la base EM, ainsi est le parallelipede AEGB au parallelipede EMRB; & comme la base EM est à la base DP, ainsi le parallelipede EMRB est au parallelip. DPBQ: & comme la base BM est à la base MN, ainsi le parallelipede DPBQ au parallelipede NP. Parquoy comme le parallelip. AEGB sera au parallelipede EMRB, ainsi le parallelip. EMRB sera au parall. DPBQ; & le parallelipede DPBQ au parallelip. NP: Partant les quatre quantitez AEGB, EMRB, DPBQ, NP sont continuellement proportioneles: & par la 10. d. 5. la premiere AEGB sera à la 4. NP, c'est à dire à FG, en raison triplee de la premiere AEGB à la seconde EMRB. Mais par la 32. p. 11. comme AEGB est à EMRB, ainsi la base AE, est à la base EM; & par la 1. p. 6. comme AE est à EM, ainsi AD est à DM, c'est à dire à FI. Donc par la 11. p. 5. AECD sera à EMRB comme AD à FI: partant la raison triplee de AECD à EMRB, sera la mesme que de AD à FI; & par consequent AECD estant à FG en raison triplee de AECD à EMRB; il sera aussi en raison triplee de AD à FI. Ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

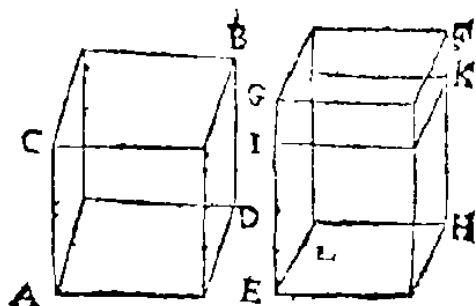
Par cecy est evident que s'il y a quatre lignes droictes continuellement proportioneles, comme la premiere est à la 4. ainsi le parallelipede décrit sur la premiere, est au parallelip. semblable, & semblablement décrit sur la seconde. Puis que tant le parallelipede est au parallelip. que la premiere ligne à la 4. en raison triplee de la raison de la premiere ligne à la 2. sçavoir des costez homologues.

THEOR. 29. PROP. xxxiv.

Les egaux solides parallelipipedes, ont les

bases & les hauteurs reciproques : Et ceux qui ont les bases & les hauteurs reciproques, sont egaux.

Soiēt egaux les parallelipipedes ABCD, EFGH sur les bases AD, EH. Je dis que leurs bases & leurs hauteurs sont reciproques, c'est à dire, que comme la base AD est à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur AC.



Qu'il ne soit ainsi. Premièrement il est evident que si les bases AD & EH sont egales (estans les solides egaux) qu'il faudra aussi que les hauteurs soient egales. Soient donc les bases inegales, sçavoir AD plus grande que DH. Je dis que la hauteur EG doit estre plus grande que CA : car elle ne peut estre plus petite, non pas seulement egale, d'autant que par la 32 p. 11. iceux solides seroient l'un à l'autre cōme leurs bases, partant AB plus grād que EF, & nous les auōs posez egaux : La hauteur EG sera dōc plus grande que CA, & d'icelle soit retranchee EI egale à CA, & d'iceluy poinct I soit imaginé le plan IK parallē à EH, couper le parallelipede EF : Or les deux solides AB & EF estans egaux, ils auront mesme raison l'un comme l'autre au solide EK, par la 7 p. 5. Mais AB & EK estans de mēme hauteur, ils seront l'un à l'autre cōme la base AD à la base EH, par la 32 p. 11. Partant EF sera aussi à EK cōme la base AD à la base EH. Or cōme le parallelipede EF est au parallelipede EK, ainsi la base GL à la base IL, par la 25 p. 11. & icelle base GL est à la base IL, cōme la ligne EG est à la ligne EI, par la 1 p. 6. & partant par la 11 p. 5. le solide EF est au solide EK, cōme EG à EL. Mais le solide EF est aussi au solide EK, cōme la base AD à la base EH : Donc par la 11 p. 5. cōme la base AD à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur EI, ou à son egale AC.

Pour la seconde partie si AD base est à EH base, cōme EG hauteur est à AC hauteur. Je dis que les deux solides AB, & EF sont egaux.

Car si les hauteurs sont egales, il est evident que les bases sont aussi egales, puis qu'elles sont posees en mēme raison : & partant par la 31 p. 11. les parallelipedes AB, EF seront pareillement egaux.

Que si la hauteur EG est plus grande que la hauteur AC, soit retranchée d'icelle EI, égale à AC, & par I soit tiré le plan IK parallèle à la base EH. Donc par la 32. p. 11. comme la base AD est à la base EH, ainsi le solide AB est au solide EK, puis que leurs hauteurs sont égales: Et par la 1. p. 6. comme EG est à EI, ainsi le plan GL est au plan IL. Mais comme la base GL est à la base IL, ainsi le solide EF, est au solide EK: (car ils sont de mesme hauteur;) donc comme le solide AB est au solide EK, ainsi le solide EF est au mesme solide EK, puis que par l'hypothese AD est à EH comme EG à AC ou EI: partant par la 9. p. 5. les solides AB, EF seront égaux.

S C H O L I E.

Il faut noter qu'à ceste demonstration & presque à toutes les autres de ce livre, les hauteurs des solides doivent estre perpendiculaires. Parquoy si elles n'estoient telles, les y faut trocquer, comme nous avons fait à la fin de 31. p. de ce livre.

Or toutes les choses que nous avons demonstrees és 6. precedentes propositions, sçavoir, 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conviennent aussi aux prismes qui ont deux plans opposez triangulaires, observant les susdites hypotheses. Car si à deux tels prismes de mesme hauteur, Et constituez sur une mesme base, ou sur bases égales, on appose deux autres prismes égaux & semblables à iceux, seront faicts deux parallelepipedes de mesme hauteur, & constituez sur mesme, ou bases égales. Parquoy par la 29. 30. ou 31. p. 11. seront égaux iceux parallelep. & partant aussi les prismes donnez, c'est à sçavoir les moitiéz d'iceux parallelep.

Derechef si aux deux prismes susdits de mesme hauteur, & constituez sur diverses bases, on adjoinct deux autres prismes égaux, & semblables à iceux, seront faicts derechef deux parallelepipedes de mesme hauteur: Parquoy par la 32. p. 11. le parallelepipede sera au parallelepipede comme la base à la base; & partant par la 15. p. 5. le prisme sera au prisme, c'est à sçavoir la moitié de l'un des parallelep. à la moitié de l'autre, comme la mesme base à la base, si les bases des prismes sont parallelogrames, ou comme le triangle au triangle, sçavoir est la moitié d'une base à la moitié de l'autre, si les bases sont triangulaires.

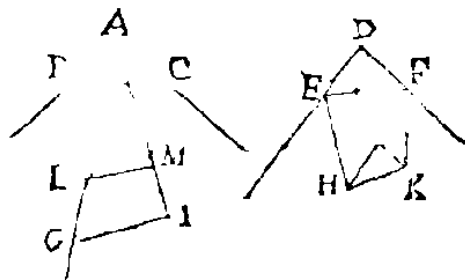
D'avantage, si à iceux deux prismes semblables, on adjoûte deux autres prismes égaux & semblables à eux seront constituez deux parallelep. semblables, lesquels par la 33. p. 11. seront entr'eux en raison triplee des costez homologues. Donc aussi par la 15. p. 5. les prismes, sçavoir est les moitiéz d'iceux, auront la raison triplee de mesmes costez homologues, lesquels sont pareillement costez homologues des prismes.

Finablement ; si aux deux susdits prismes egaux , on adiouste deux autres prismes egaux & semblables a ceux , serot constituez deux parallelepipedes egaux de mesme hauteur que les prismes : Parquoy par la 34 p. 11. puis que les bases , & les hauteurs des parallelepipedes , sont reciproques , & les bases des prismes sont les mesmes , ou les triangles moietiez d'icelles , ayant mesme raison par la 15 p. 5. Aussi les bases & hauteurs des prismes seront reciproques.

THEOR. 30. PROP. XXXV.

S'il y a deux angles plans egaux , aux sommets desquels soient leuees en l'air deux lignes droictes faisant angles egaux avec les costez des angles premieremēt posez , chacun au sien : & d'un poinct pris au haut de chacune des deux lignes sont menees des lignes perpendiculaires sur les plans esquels sont les angles premiere-ment posez ; & des poincts où tombent icelles perpendiculaires sont tirees des lignes droites vers les sommets des angles premierement posez : Les angles que font icelles lignes , avec les leuees en l'air sont egaux entr'eux.

Soient les deux angles plās egaux BAC, EDF, du sommet desquels A & D , soient leuees en l'air les lignes droites AG , DH , tellement que l'angle BAG est egal a l'angle EDH : & l'angle CAG egal à l'angle FDH. & des poincts



G & H pris és lignes AG, DH, soient tirees aux plans esquels sont les angles BAC, EDF, les perpendiculaires GI, HK, tombantes és poincts I, K, desquels soient menees les lignes IA, KD. Je dis que les angles GAI, HDK, sont egaux entr'eux.

Cat si les deux lignes AG, DH sont inegales, de la plus grande AG, soit retranchée AL egale a DH ; & de L au plan du

triangle AGI, soit tirée LM parallèle à GI : laquelle LM sera perpendiculaire au plan de l'angle BAC par la 8. p. 11. puis que GI est perpendicul. à iceluy plan Soient aussi tirez des points M, K, les lignes MB, MC, KE, KF, perpendiculaires aux lignes AB, AC, DE, DF ; & soient menées les lignes BC, BL, LC, EF, EH, HF. Or d'autant que LM est perpendiculaire au plan de l'angle BAC, elle le sera aussi à la ligne AM tirée au même plan par la 2. d. 11. partant par la 47. p. 1. le carré de AL sera égal aux carrés de AM, ML : mais par la même prop. le carré de AM est égal aux carrés de AC, CM, puis que l'angle ACM est droit par la construction. Donc le carré de AL est égal aux carrés de AC, CM, ML : Et par la 47. p. 1. le carré de CL est égal aux carrés de CM, ML, puis que par la 2. d. de ce liure, l'angle CML est droit. Donc le carré de AL est égal aux carrés de AC, CL : & partant par la 48. p. 1. l'angle ACL est droit. Derechef, puis que par la 47. p. 1. le carré de AL est égal aux carrés de AM, ML : & le carré de AM est égal aux carrés de AB, BM, l'angle ABM étant droit par la construction : le carré de AL est égal aux carrés de AB, BM, ML : mais le carré de BL est égal à ceux carrés de BM, ML, pource que l'angle BML est droit par la 2. d. 11. Donc le carré de AL est égal aux carrés de AB, BL : & partant par la 48. p. 1. l'angle ABL sera droit. On démontrera en la même manière que les angles DFH, DEH sont aussi droits. Maintenant puis que les angles ABL, LAB, du triangle ABL sont égaux aux angles DEH, HDE, du triangle DEH, & les costez AL, DH aussi égaux, par la 26. p. 1. les autres costez AB, BL seront pareillement égaux aux autres costez DE, EH Par même raison seront égaux les costez AC, CL, aux costez DF, FH. Parquoy les costez AB, AC du triangle ABC, estans égaux aux costez DE, DF du triangle DEF, & les angles BAC, EDF aussi égaux, par la 4. p. 1. les bases BC, EF, seront pareillement égales entr'elles, & les angles ABC, ACB égaux aux angles DEF, DFE Mais tous les angles ABM, ACM, sont égaux à tous les angles DEK, DFK, puis qu'ils sont tous droits : Donc aussi les autres angles MBC, MCB seront égaux aux autres angles KEF, KFE : & partant puis que les costez BC, EF, ont esté démontrés égaux ; les costez BM, CM, seront égaux aux costez EK, FK, par la 26. p. 1. ven donc que les costez AC, CM du triangle ACM sont égaux aux costez DF, FK du triangle DFK, & les angles ACM, DFK sont droits, par la 24. p. 1. les bases AM, DK seront égales. Et puis que BL, EH ont esté démontrées égales, leurs car-

rez seront aussi égaux : Mais par la 47. p. r. le quarré de BL est égal aux quarréz de BM, ML, & le quarré de EH aux quarréz de EK, KH, pour ce que les angles BML, EKH sont droicts, par la 2. d. 11. Donc les quarréz de BM, ML seront égaux aux quarréz de EK, KH : & partant estans ostez les quarréz de BM EK, qui sont égaux, les lignes BM, EK, ayant esté demonstrees égales; resteront égaux les quarréz de LM, HK, & partant les lignes LM, HK seront égales. Parquoy vëu que les costez AL, AM du triangle ALM, sont égaux aux costez DH, DK du triangle DHK, & la base LM égale a la base HK ; les angles LAM, HDK seront égaux par la 8. p. r. ce qu'il falloit demonstrier.

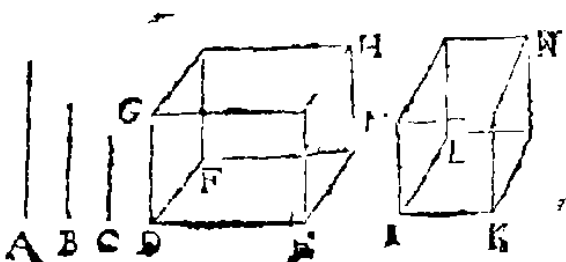
COROLLAIRE.

Parquoy s'il y à deux angles plans égaux, és sommets desquels soient esleuees en l'air des lignes droictes égales, lesquelles avec les lignes d'iceux angles premierement posez, contiennent angles égaux, chacun au sien; les perpendiculaires tirees des points extremes d'icelles lignes esleuees en l'air, sur les plans des angles premierement posez; seront égales entr'elles. Car d'autant que les angles plans BAC, EDF, sont posez égaux, & les lignes égales AL AL, DH esleuees en haut constituent les angles égaux LAB, HDE; Item LAC, HDE; il a esté demonstté que les perpendiculaires LM, HK, sont égales entr'elles.

THEOR. 31. PROP. xxxvi.

Si trois lignes sont proportionnelles; le solide parallelipede cõpris d'icelles trois lignes, est égal au solide patallelipipe de compris de la moyenne; moyennant qu'iceux deux solides soient equiangles.

Soient trois lignes continuellement proportionnelles A, B, C : & soit constitué un angle solide D, de trois quelconques angles plans EDF, EDG, FDH tellement que la ligne DE



soit égale à A, & DG à B, & DF égale à C: & soit accompli le parallélipède DH: en apres par la 16.p.11. sur la ligne IK égale à B, & au point I soit fait l'angle solide I des trois angles plans KIL, MIM, & KIL, égaux aux trois EDF, EDG, FDG: tellement que les lignes IK, IL, IM soient égales à la moyenne B; & soit fait le parallélipède IN. Je dis que les solides DH, IN sont égaux.

Car puis que comme DE est à IK, ainsi IL à DF: (car DE est égale à A; IK, IL à B; & DF à C) & les angles EDF, KIL égaux; les parallelogrammes EF, KL seront égaux par la 14.p. 6. pource qu'ils ont les costez au long des angles égaux reciproques. Et d'autant qu'aux sommets des angles plans égaux EDF, KIL sont esleuez en l'air les lignes égales DG, IM, lesquelles avec les lignes des angles premierement posez comprennent angles égaux, vn chacun au sien: les perpendiculaires tirees de G, M, sur les plans des bases EF, KL; (sçavoir est les hauteurs des parallélipedes DH, IN) seront égales entr'elles par le corolaire de la precedente proposition Parquoy par la 31.p.11. les parallélipedes DH, IN, seront égaux entr'eux, puis qu'ils ont les bases EF, KL égales, & pareillemēt les hauteurs égales: ce qu'il faloi demonstret.

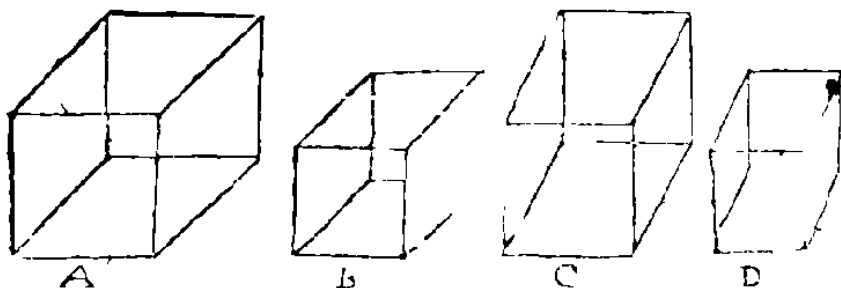
THEOR. 32. PROP. XXXVII.

Si quatre lignes sont proportioneles, les solides parallélipedes semblables, & semblablement descrits sur icelles, seront proportionaux: Et si iceux quatre semblables solides parallélipedes sont proportionaux; les quatre lignes sur lesquelles ils seront semblablement posez, seront aussi proportioneles.

Soient quatre lignes proportioneles comme A, B, C, D: & soient descrits sur icelles quatre solides semblables & semblablement posez A, B, C, D. Je dis qu'iceux solides sont proportionaux.

Car puis que le solide A est semblable au solide B: par la 33.p.11. ils seront l'un à l'autre en raison triplee de la ligne A

à la ligne B : pareillement les solides C & D seront aussi en raison triplee de C à D : mais la raison de A à B , est comme C à D par l'hypothese. Donc la raison triplee de A à B, sera



semblable à la raison triplee de C à D ; & partant par la 11. p. 5. le solide A sera au solide B , comme le solide C au solide D.

Maintenant si les quatre solides A, B, C, D sont proportionaux, la ligne A sera à la ligne B, comme la ligne C à la ligne D. Car tout de mesme le solide A sera au solide B, en raison triplee de la ligne A à la ligne B : Item le solide C au solide D, en raison triplee de C à D : mais le solide A est au solide B cōme le solide C au solide D. partant leur raison triplee sera semblable ; & par consequent les quatre lignes A, B, C, D, seront proportioneles.

S C H O L I E.

Nous adionstons icy cest autre theoreme.

Si 4 lignes sont continuellement proportioneles : le parallepipede cōpris sous le quarré de l'une des extremes, & sous le quarré de l'autre extreme, est egal au cube de la moyenne proportionele plus prochaine de la premiere extreme prise.

Si ent quatre ligne continuellement proportioneles A, B, C, D. le dis que le p rallelipede compris sous le quarré de l'extrem A, & sous le quarr de l'autre extreme D, est egal au cube de la moyenne B plus prochaine de l'extreme A.

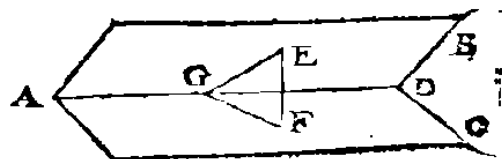
Car puis que par le co.oll. de la 20 p 6. le quarré de A est au quarré de B, comme A à C, c'est à dire comme B à D : les bases avec les hauteurs sero t reciproques, puis qu le quarré de A est la base du parallepipede, & la ligne D, la hauteur d'iceluy ; & la base du cube est le quarré de B, & sa hauteur la mesme ligne B. Donc par la 34. p. 11. le parallepipede & le cube seront egaux. Par mesme raison le paralle ip. compris sous le quarré de l'extreme D, & sous le quarré

de l'autre extreme *A*, sera démontré égal au cube de la moyenne prop. *C* plus prochaine de l'extreme *D*.

THEO. 33. PROP. XXXVIII.

Si vn plan est esleué perpendiculairement sur vn autre plan, & d vn point de l'vn d'iceux on meine vne ligne perpendiculaire sur l'autre; elle tombera sur leur commune section.

Soit le plan *AB*, esleué perpendiculairement sur le plan *AC*, leur ligne de commune section *AD*; & du point *E* pris en *AB* on laisse tomber vne perpendiculaire sur le pla *AC*: ie dis qu'elle tombera sur la commune section *AD*.

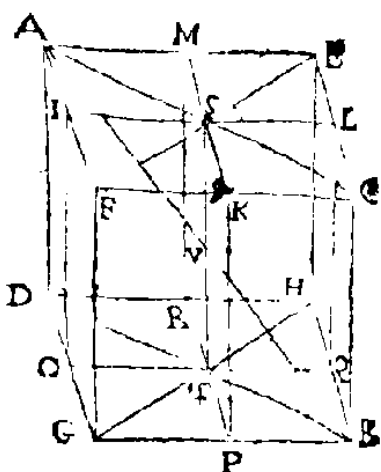


Autrement qu'elle tombe au point *F*, du plan *AC*, s'il est possible: & par la 12. p. 1. du point *F* sur la ligne *AD* soit menée la perpendiculaire *FG*; & la ligne *GE* faisant le triangle *GFE*. Or si la ligne *EF* est perpendiculaire au plan *AC*, elle le sera aussi à la ligne *FG*: & icelle *FG* estant perpendiculaire à la commune section *AD*, elle le sera pareillement au plan *AB*: & par consequent à la ligne *GE*: partant au triangle *GFE*, les deux angles sur la ligne *GF* seroiēt tous deux droits contre la 17. p. 1. Donc la perpendiculaire tombant de *E* sur le plan *AC* ne tombera pas hors la commune section *AD*, mais elle tombera en icelle: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si les costez des plans opposez d'un solide parallelepipedes, sont coupez en deux également; & on meine des plans par les sections: la ligne de commune section d'iceux plans, & le diamette du solide parallelepipedes, se couperont en deux également.

Soit le parallelepiped AB; les plâs opposez AC, BD, desquels tous les costez soient coupeez en deux egale-ment és points I, K, L, M, O, P, Q, R, par lesquels soiét imaginez passer les plans IQ, KR, se couppans l'un l'autre en la ligne ST: & soit meêe la diagonale AB, Je dis que la ligne ST & la diagonale AB s'entre-couppent en deux egale-ment.



Car estans tirees les lignes SA, SC, TD, TB: soient consideréz les deux triangles BQT, DOT, desquels les deux costez BQ, QT sont egaux aux deux costez DO, OT, (car BQ, DO, sont moiez des lignes droictes egales BH, DG: & par la 4. p. 1. QT, OT, sont egales aux deux egales BP, GP, puis que PQ, PO sont parallelogrammes.) & l'angle BQT par la 29. p. 1. est egal à l'interne DOT: partant par la 4. p. 1. les bases BT, DT seront aussi egales: & les angles BTQ, DTO pareillement egaux: Et par la 13. prop. 1. les angles BTQ, BTO sont egaux à deux droicts. Donc aussi DTO, BTO sont egaux à deux droicts: & partant par la 14. p. 1. BT, DT constituent vne seule ligne droicte. En la mesme maniere sera demōstré que AS, CS sont egales, & composent vne seule ligne droicte. Maintenant puis que l'une & l'autre AD, BC est parallele & egale à FG, à cause des parallelogrammes DF, FB: icelles seront aussi egales & paralleles entr'elles par la 9. p. 11. Parquoy AE, BD qui conioignent les extremités d'icelles AD, BC, sont aussi egales & paralleles par la 33. p. 1. & par consequent AS, BT moiez d'icelles sont egales. Mais pource que AC, BD sont paralleles, les lignes AB, ST seront avec icelles en vn mesme plan, par la 7. p. 11. & partant s'entrecouperont en vn point, sçavoir en V. Et d'autant que par les 29. & 15. p. 1. les deux angles ASV, AVS du triangle ASV, sont egaux aux deux angles BTV, BVT du triangle BTV, & le costé AS egal au costé BT: les autres costez AV, SV, seront aussi egaux aux autres costez BV, TV, chacun au sien; par la 26. p. 1. Parquoy les deux lignes AB, ST s'entrecouppent en deux egale-ment au point V: ce qu'il falloît prouver.

COROLLAIRE.

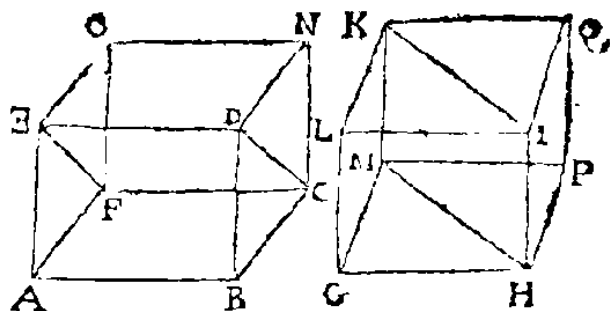
Par cecy est evident qu'en tout parallelepiped, tous les diametres

se entrecoupent en deux également en un seul point, sçavoir est au point V , auquel ils diuisent en deux également la ligne ST . Est aussi manifeste que tout plan qui coupe le parallelepiped en deux également passe par le centre d'iceluy, sçavoir par V .

THEOR. 35. PROP. XL

Deux prismes de mesme hauteur sont egaux, si la base de l'un triangulaire, n'est que la moitié de la base de l'autre, estant vn parallelogramme.

Soient deux prismes de mesme hauteur $ABCDEF$, $GHIKLM$; & que celui-là ait pour base le parallelogramme $ABCF$, double du triangle GHM base du prisme $GHIKLM$. Je dis qu'iceux prismes sont egaux.



Car si on les accomplit pour estre solides parallelepipedes AN, GQ , la base GP sera egale à la base BF ; & estans de mesme hauteur, ils seront egaux par la 31. p. II. & par la 28. p. II. les plans diagonaux $CDEF, HIKM$ les diuiseront en deux également, & partant les prismes donnez au commencement estans les moitiez de choses egales, seront egaux entr'eux: ce qu'il falloit prouuer.

Fin de l'Element vnzieme.

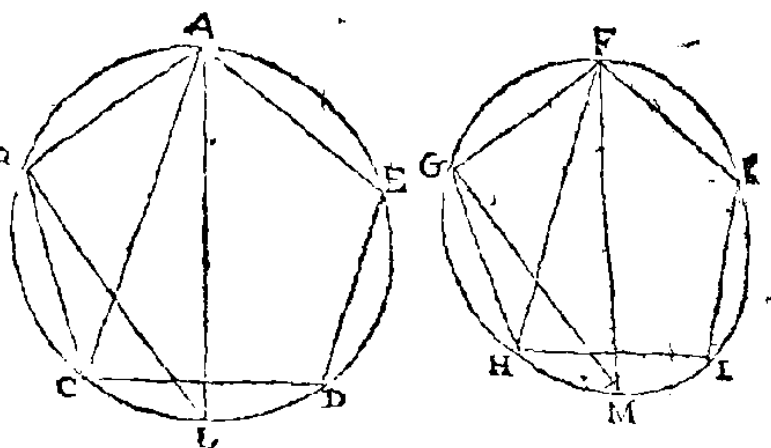


ELEMENT DOVZIESME.

THEOR. I. PROP. I.

DEs polygones semblables inscrits aux cercles ; sont l'un à l'autre comme les quarrez descrits des diametres des cercles .

Soient deux polygones semblables A BCDE & FGHIK, inscrits dans les cercles, desquels les diametres sont AL, FM. Je dis qu'i-



ceux polygones sont l'un à l'autre comme les quarrez de diametres AL, FM.

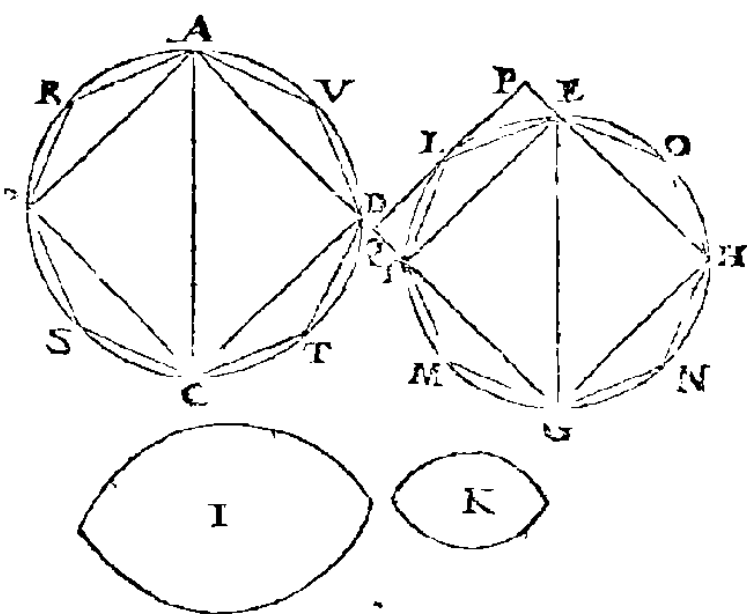
Qu'il ne soit ainsi. Soient menees les lignes AC, FH, et BL, & GM. D'autant que les pentagones sont semblables

est à BC , comme FG à GH , & l'angle ABC , égal à l'angle FGH ; par la 6. p. 6. les triangles ABC , FGH sont equiangles; partant l'angle BCA sera égal à l'angle FHG . Mais ils sont chacun égaux, l'un à l'angle L , l'autre à l'angle M , par la 21. p. 3. (car ils sont sur mesmes sections BA & FG .) Ainsi l'angle L sera égal à l'angle M : & par la 31 p. 3. les angles ABL , FGM estans droicts dans les demy cercles, & égaux, les triangles ABL , FGM seront equiangles: (car le troisieme sera égal au troisieme, par la 32. p. 1.) & par la 4 p. 6. comme AL sera à AB , ainsi FM à FG ; & en changeant comme AL sera à FM , ainsi AB à FG . Parquoy par la 22. p. 6. comme le pentagone décrit sur AB sera à l'autre pentagone semblable, & semblablement posé sur FG : ainsi le quarré de AL au quarré de FM : ce qui estoit à prouver.

THEOR. 2- PROP. II.

Les cercles sont l'un à l'autre, comme les quarez décrits de leurs diametres.

Soient les deux cercles $ABCD$, $EFGH$, décrits sur les deux diametres AC & EG : Je dis qu'ils sont l'un à l'autre comme le quarré de AC est au quarré de EG ; c'est à dire que si on imagine que comme le quarré de AC , au quarré EG , ainsi



le cercle $ABCD$ à quelque figure quatriesme propor. (comme I) qu'icelle figure I est égale au cercle $EFGH$.

Autrement elle sera plus petite ou plus grande. Soit premierement plus petite s'il est possible: & soit le cercle $EFGH$ plus grand qu'icelle de la figure K . Or par la 1 p. 10. on peut retrancher plus de la moitié du cercle $EFGH$, & du residu plus de la moitié tant de fois qu'il demeurera en fin vne qua-

ité plus petite que K : Soit donc dans iceluy cercle EFGH décrit le quarré EFGH, qui est plus grand que la moitié du cercle. (d'autant que le quarré de EG, qui est son double, est plus grand que le cercle.) Si les quatre sections du cercle sont plus petite que K, nous auons ce que nous demandons: Sinon soit couppe l'arc EF en deux également au point L, & les trois autres arcs semblablement es points L, M, N, O; & soient tirees les lignes EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, & OE, afin d'auoir l'octogone ELMGNHO, inscrit dans le cercle: Il est euident que dans les quatre sections egales, il y aura quatre triangles egaux, & que chacun comme ELF, est plus de la moitié de sa section: (car le triangle Isocele FLE est la moitié du rectangle FP de mesme hauteur & sur mesme base FE, par la 41. p. 1. lequel rectangle est plus grand que la section FLE.) Soient maintenant les huit petites figures restantes plus petites que la figure K, que si cela n'estoit, il faudroit toujours couper les arcs derniers, & toujours inscrire des polygones, desquels le dernier auroit deux fois autant de costez que son precedent, & soustraire toujours plus de la moitié de chacune section, sçauoir son triangle Isocele: Il est certain qu'à la fin les dernières sections seront plus petites que la figure K. Mais pour abreger soient les deuant dictes huit sections restantes plus petites que la figure K: Il est euident que l'octogone ELMGNHO sera plus grand que la figure I, puis que les deux I & K sont egales au cercle EFGH. Soit pareillement inscrit vn octogon esemblable, au cercle ABCD, ce qui est facile: car il n'y a qu'à couper en deux également les deux demy cercles ABC, ADC, en B & D; puis les circonferences AB, BC, CD, AD aussi en deux également en R, S, T, V; & ayant tiré les lignes droictes AR, RB, BS, SC, CT, TD, DV & VA; il est euident que la figure inscrite sera semblable à la figure octogone descrite au cercle EFCH. Maintenant par la 1. p. 12. l'octogone ARBSCTDV sera à l'octogone ELMGNHO, comme le quarré de AC: est au quarré de EG: mais comme le quarré de AC est au quarré de EG, ainsi le cercle ABCD est à la figure I: & par la 11. p. 5. come le polygone ARBSCTDV sera au polygone ELMGNHO, ainsi le cercle ABCD sera à la figure I. Mais le polygone ARBSCTDV est moindre que le cercle ABCD: Donc par la 14. p. 5. le polygone ELMGNHO sera aussi moindre que la figure I: Mais il a aussi esté demonstté plus grand. Ce qui est absurde. Donc la figure I n'est pas plus petite que le cercle EFGH.

On prouuera aussi qu'elle ne peut estre plus grande. Au-

tement s'il est possible ; puis que-cōme le quarré de AC au quarré de EG , ainsi le cercle ABCD à la figure I : aussi en changeant la figure I sera au cercle ABCD , comme le quarré de EG au quarré de AC : mais soit imaginé que comme I est au cercle ABCD , ainsi le cercle EFGH soit à quelque autre figure, comme K : & par la 14. p. 5. cōme la figure I est plus grande que le cercle EFGH , ainsi le cercle ABCD sera plus grand que la figure K : & par la 11. p. 5. le cercle ABCD sera à la figure K, comme le quarré de AC est au quarré de EG : ce qui contrevient à la premiere partie de la demonstration , en laquelle nous avons montré que l'un des cercles estant à vne figure, en la raison des quarréz des diametres, qu'icelle figure ne pouoit estre plus petite que l'autre cercle : Partant la figure I ne pouoit estre plus grande que le cercle EFGH : ny plus petite, comme en la premiere partie : elle estoit donc egale à iceluy : ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

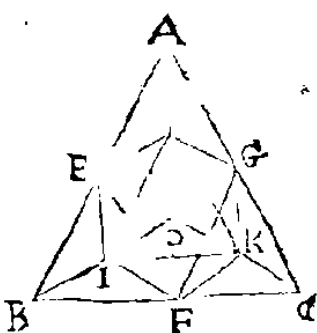
Par ces choses est euident que le cercle est au cercle comme le polygone descript en celuy-là est au polygone semblable descript en cestuy-cy. Puis que par la 2. p. 12. tant le cercle est au cercle , que par la 1. p. 12. le polygone est au polygone, comme le quarré du diametre est au quarré du diametre, ainsi qu'il a esté demonsté.

THEOR. 3. PROP. III.

Toute pyramide ayant base triangulaire, peut estre diuisee en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale ; & en deux prismes egaux, & plus grands que la moitié de la pyramide totale.

Soit la pyramide ABCD, ayant la base triangulaire ABD, & le sommet au point C : Je dis qu'elle peut estre diuisee en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale : & en deux prismes egaux , plus grands que la moitié de la pyramide donnee.

Qu'il ne soit ainsi. Soient coupez en deux également, tous les costez des plas d'icelle pyramide, sçavoir les trois de la base ABD aux points E, F, G, & les trois hypothénuses AC, BC, DC aux trois points H, I, K, & soient menées les lignes FE, FG, HI, IK, KH, HG, HE, FI. Premièrement la base ABD est divisée en trois figures; au quadrangle BEGF; & les deux triangles DGF, & EAG, lesquels sont semblables entr'eux, & au tout ABC, puis que les costez d'iceluy sont coupez proportionnellement, & par la 2. p. 6 la ligne EG est parallèle à BD, & FE à AD. Partant étant l'angle A commun aux deux triangles BAD, & EAG, l'angle extérieur GEA se a égal à l'opposé intérieur DBA, par la 19. p. 1. Et par la 12. p. 1 le troisième sera égal au troisième, & par la 4. p. 6 & 1. d. 6. les deux triangles BAD & EAG seront semblables. Par le même discours le triangle FGD, sera semblable au triangle BAD, & par la 21. p. 6. les deux triangles EAG FGD, seront semblables entr'eux, & égaux, d'autant que leurs costez sont égaux. Quant au quadrangle BEGF il est évident par la 41. p. 1 qu'il est double du triangle FGD. (car il est sur base égale, & entre mêmes parallèles) Il est aussi manifeste que toute la pyramide ABCD, est divisée aux deux pyramides AEGH & HIKC égales & semblables; & aux deux prismes, l'un EHGFIB, duquel la base est le quadrangle BEGF, l'autre HIKFDG, duquel la base est le triangle FGD: & pour autant qu'ils sont de même hauteur, sçavoir de la hauteur du point H, ou du point K, & que la base quadrangulaire est double de la triangulaire. ils seront égaux par la 40. p. 11.



Or que les pyramides AEGH, & HICK soient semblables, on le prouve en ceste sorte: d'autant que les costez AC, DC du triangle ACD ont été coupez en deux également, par la 2. p. 6 HK, AD, sont parallèles, & l'angle extérieur CHK est égal à son opposé intérieur HAG par la 29. p. 1. Et AHG à HCK, & par la 2. p. 1 le troisième sera égal au troisième; & partant par la 4. p. 6. Les triangles équiangles CHK & HAG seront semblables entr'eux, & au triangle ACD, par la 21. p. 6. ils seront aussi égaux entr'eux, étant les lignes CH & HA égaux. Par les mêmes raisons les triangles ICH, & EHA seront égaux & semblables entr'eux, & au triangle ACB. Et le triangle IKH se prouvera facilement équiangle, & semblable au triangle ABD, par la 10. p. 11. (ayans leurs costez parallèles).

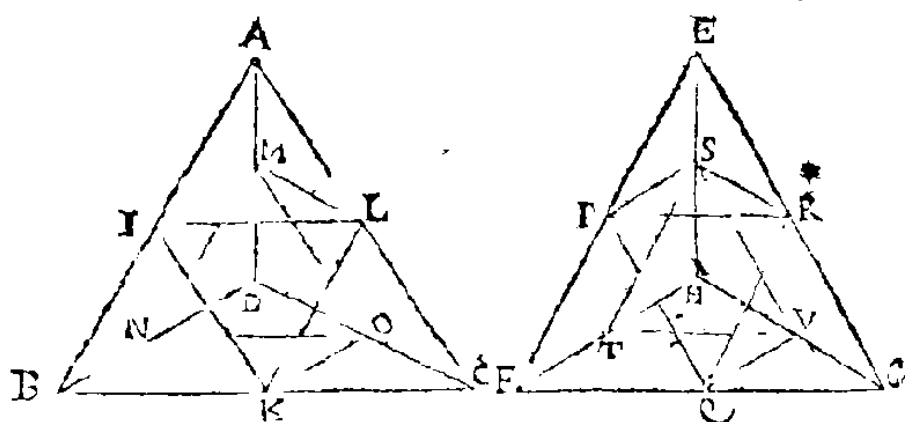
iels se touchans en diuers plans) partant aussi semblables au triangle GAE, & egal à iceluy par la 21. p. 6. Car HK est egal à GD, & GD à GA : & par la 10. p. 11. KCI & BCD seront semblables à GHE, & KGI egal à iceluy : & par la def. des solides semblables & egaux, icelles trois pyramides ABCD, AEHG, HICK, faictes de plans semblables, seront semblables ; & les deux petites seront egales, faictes de plans egaux

Que les deux prismes EHGFIB, & HIKFDG soient ensemble plus de la moitié d'icelle pyramide totale ABCD, il appert ainsi : iceux deux prismes estans egaux, l'un d'iceux EHGFIB, ayant base quadrangulaire BEGF double du triangle FGD, base de la pyramide AGHE, & de mesme hauteur qu'icelle, on en peut retrancher vne pyramide egale à icelle pyramide EAGH : partant iceluy prisme est plus grand que la pyramide, le tout que la partie : Et par consequent les deux prismes ensemble, seroient plus grands que les deux pyramides AEHG, HICK ensemble. Mais iceux prismes, & pyramides font ensemble la pyramide totale ABCD : donc iceux prismes estans plus grands qu'icelles deux pyramides ; seront aussi plus grands que la moitié d'icelle pyramide totale ABCD : ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 4. PROP. III.

S'il y a deux pyramides de mesme hauteur ayans base triangulaire, & chacune d'icelles est diuisee en deux autres pyramides semblables entr'elles, & à la toute ; & en deux prismes egaux ; & les pyramides de la diuision sont tousiours subdivisees de mesme façon : comme la base de l'une des pyramides sera à la base de l'autre, ainsi aussi tous les prismes ensemble tant de la diuision que subdiviision d'icelle pyramide, seront à tous les prismes ensemble del autre pyramide.

Soient sur les bases triangulaires ABC, EFG, les pyramides ABCD, EFGH de mesme hauteur, desquelles chacune soit diuisee comme en la precedente proposition en deux pyrami-



des egales entr'elles & semblables à la toute, sçauoir est en AILM, MNOD; EPRS, STVH; & en deux prismes egaux IBKLMN, CKLMNO; PFQRST, GQRSTV: Et de mesme façon soient entendues chacune des pyramides AILM, MNOD, EPRS, STVH estre diuisees; & en continuant toujours de mesme façon. Je dis que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi tous les prismes faicts en la pyramide ABCD à tous les prismes faicts en la pyramide EFGH.

Car puis que comme BC à CK, ainsi FG à GQ; pource que l'une & l'autre ligne est diuisee en deux également, & les triangles ABC LKC sont semblables & semblablement posez: Item les triangles EFG RQG, par le corol. de la 4. p. 6. pareillemēt par la 22. p. 6. comme le triangle ABC au triangle LKC, ainsi le triangle EFG au triangle RQG: & en permutāt comme ABC à EFG, ainsi LKC à RQG. Mais cōme LKC à RQG ainsi est le prisme CKLMNO au prisme GQRSTV, comme nous demonstrerōs incontinent: & partant ainsi aussi le prisme IBKLMN est au prisme PFQRST, puis que ceux-cy sont egaux à ceux là: Et cōme vn seul prisme, sçauoir IBKLMN est ~~au~~ vn seul prisme PFQRST, ainsi sont les deux prismes ensemble IBKLMN, CKLMNO, aux deux prismes ensemble PFQRST, GQRSTV par la 12. p. 5. Donc aussi comme la base ABC à la base EFG, ainsi les deux prismes en la pyramide ABCD seront aux deux prismes en la pyramide EFGH. Nous demonstrerons en la mesme maniere, deux prismes és pyramides AILM, MNOD, faictes en la pyramide ABCD, estre aux deux prismes és pyramides EPRS, STVH, faictes en la pyramide EFGH, comme sont les bases AIL, MNO de ces pyramides là aux bases EPR, STV de ces pyramides-cy: & ainsi

ainsi continuellement, tant que la mesme diuision sera faicte. Mais comme ces bases la sont à celles-cy, ainsi la base LKC, qui est egale & semblable à celles-là, est à la base RQG, qui est egale & semblable à celles-cy, c'est à dire ainsi la base ABC est à la base EFG. Donc aussi comme la base ABC est à la base EFG, ainsi les prismes de quelconque pyramide faicte en la pyramide ABCD, seront aux prismes de quelconque pyramide faicte en la pyramide EFGH : & partant aussi comme les prismes de la pyramide ABCD seront aux prismes de la pyramide EFGH, ainsi seront les prismes tant de la pyramide AILM, aux prismes de la pyramide EPRS, que les prismes de la pyramide MNOD, aux prismes de la pyramide STVH ; & ainsi continuellement. Parquoy puis que par la 12. p. 3. comme les deux prismes de la pyramide ABCD sont aux deux prismes de la pyramide EFGH, ainsi tous les prismes estans es pyramides ABCD, AILM, MNOD, &c. ensemble, sont à tous les prismes estans es pyramides EFGH, EPRS, STVH &c. ensemble, si celles-cy sont egales en multitude à celles-là ; pareillement comme la base ABC est à la base EFG, ainsi seront tous les prismes estans en la pyramide ABCD, à tous les prismes en la pyramide EFGH : ce qu'il falloit prouuer.

L E M M E.

Or que comme LKC est à RQG, ainsi le prisme CKLMNO soit au prisme GQRSTV, nous le demonstrerons ainsi. Soient imaginees tomber des sommets D, H, des lignes perpendiculaires sur les bases ABC, EFG, lesquelles seront les hauteurs egales des pyramides ABCD EFGH. Donc puis que les plans parallels ABC, MNO couppent proportionnelement par la 17. p. 11. deux lignes droictes, sçauoir DC & la perpendiculaire tombant de D ; & DC est coupee en deux egale-ment en O ; pareillement la perpendiculaire tombant de D, sera coupee en deux egale-ment au point auquel elle rencontre le plan MNO. Par la mesme raison la perpendiculaire tombant de H, sera coupee en deux egale-ment par le plan STV. Parquoy puis qu'icelles perpendiculaires sont posees egales, leurs moitiez, sçauoir est les hauteurs des prismes, seront aussi egales : & partant les prismes CKLMNO, GQRSTV estans d'egales hauteurs, seront entr'eux, comme les bases LKC, RQG, par les choses que nous auons demonstrees sur la 34. p. 11.

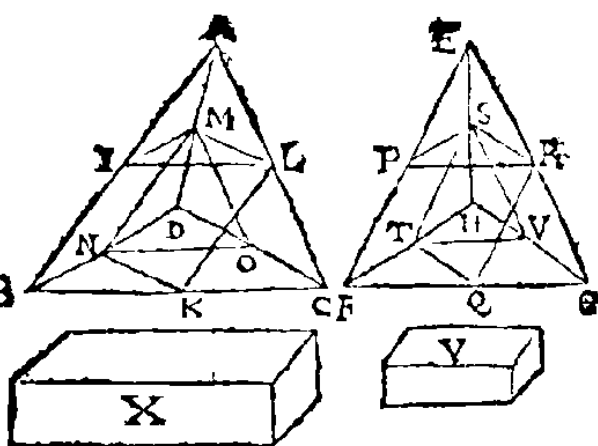
THEOR. 5. PROP. V.

Les pyramides de mesme hauteur ayans bases triangulaires, sont l'une à l'autre comme leurs bases.

Soient les pyramides de mesme hauteur $ABCD$, $EFGH$, desquelles les bases sont les triangles ABC , EFG . Je dis que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base.

Autrement, soit imaginé comme en la 2. p. 12.

que comme la base ABC à la base EFG , ainsi la pyramide $ABCD$ à quelque solide, comme X : ie dis qu'iceluy solide X est egal à la pyramide $EFGH$, autrement il sera plus petit ou plus grand: & soit en premier lieu plus petit comme de la quantité du solide Y . Ainsi nous imaginons que les deux solides X & Y , soient egaux à la pyramide $EFGH$. Maintenant par la 3. p. 12. on peut diuiser vne pyramide en deux pyramides egales, & en deux prismes egaux, lesquels seront plus grands que la moitié de la pyramide totale: Que si de la pyramide $EFGH$, on retranche plus de la moitié, sçauoir les deux prismes PFQ , RST , $GQRSTV$, & de chacune pyramide restante $EPRS$, $STVH$, encores plus de la moitié, sçauoir deux prismes, en continuant tousiours iusques à ce que toutes les pyramides restantes apres le dernier retranchement, soient toutes ensemble manifestement plus petites que le solide Y : ce qui peut arriuer par la 1. p. 10. Ainsi tous les prismes ensemble retranchez de la pyramide $EFGH$, seront plus grâds que le solide X , puis que le reste est plus petit que le solide Y . Pareillement soient retranchez autât de fois deux prismes de la pyramide $ABCD$, comme on en a retranché de la pyramide $EFGH$: il est euidé par ce qui a esté démontré à la precedente proposition, que comme la base ABC est à la base EFG , ainsi tous les prismes retranchez de la pyramide $ABCD$ seront à tous les prismes



retranchez de la pyramide EFGH: Mais nous auôs posé que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABC est au solide X. Et partant par la 11. p. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD seront a tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH, comme la pyramide ABCD est au solide X. Or tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD sont plus petits qu'icelle pyramide: Et partant par la 14 p. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH, seront plus petits que le solide X, & nous les auions tantost prouuez estre plus grands en posant le solide X plus petit que la pyramide EFGH: partant icelle hypothese a esté faulſe, qui nous a conduit à absurdité: Et le solide X n'estoit plus petit que la pyramide EFGH.

Soit donc plus grand, s'il est possible; puis que comme la base ABC à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD au solide X, en changeant la base EFG, sera à la base ABC, comme le solide X est à la pyramide ABCD. Pareillement comme le solide X à la pyramide ABCD soit posé la pyramide EFGH estre à quelque autre solide; comme Y: Et par la 14. p. 5. d'autant que le solide X est posé plus grand que la pyramide EFGH, aussi la pyramide ABCD sera plus grande que le solide Y: & par la 11. p. 5. comme la base EFG est à la base ABC, ainsi la pyramide EFGH à vn solide plus petit que l'autre pyramide: mais nous auons demonſtré que cela estant, il s'ensuit vne absurdité, ſçauoir que les prismes retranchez d'une pyramide, estoient plus grand que la pyramide de laquelle ils sont retranchez: Partant le solide X ne peut estre plus grand que la pyramide EFGH, ny aussi plus petit: il sera donc egal. Parquoy puis qu'il a esté posé que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X; & que par la 7. p. 5. la pyramide ABCD est au solide X, comme à la pyramide EFGH egale a iceluy solide X; pareillement comme la base ABC sera à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD sera à la pyramide EFGH: ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Par la conuerſe; Si les pyramides triangulaires sont entr'elles égales leurs bases: elles seront de mesme hauteur. Car si on croit que la hauteur de l'une soit plus grande que l'autre, soit couppee d'icelle une egale à la moindre, & du point de la section à tous les angles de la

base, soient tirées des lignes droictes: & comme la base sera à la base ainsi la pyramide sera à la pyramide n'aguerees constituees: mais elle estoit pareillement ainsi à toute la pyramide. Donc par la 9. p. 5. la pyramide constituee sera egale à toute la pyramide, la partie au tout: ce qui est absurde.

COROLLAIRE.

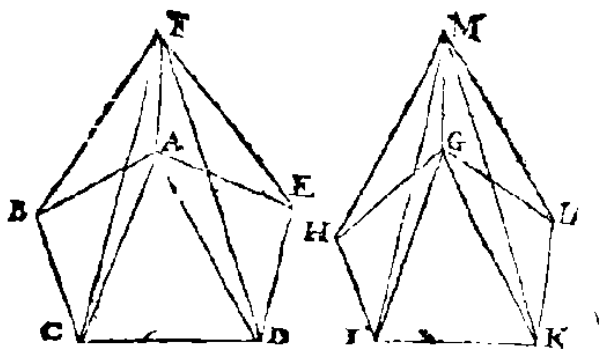
De cecy resulte que les pyramides de mesme hauteur constituees sur mesmes, ou egales bases triangulaires, sont egales entr'elles: puis qu'elles sont en mesme raison que leurs bases, lesquelles sont posees egales, ou une seule & mesme.

Item il s'ensuit au contraire que les pyramides triangulaires constituees sur une mesme ou egales bases, sont de mesme hauteur. Et que les pyramides egales, & ayans mesme hauteur, ont les bases gales, si elles ne sont une mesme: lesquelles deux choses nous demonstrerons par la premiere partie du corol. par le mesme argument dont nous auons usé en demonstrent la conuerse des 30 & 31. p. 11. si tant sur la hauteur, que sur la base couppee est constituee une autre pyramide &c.

THEOR. 6. PROP. VI.

Les pyramides de mesme hauteur ayans bases poligones, sont l'une à l'autre comme leurs bases.

Soit la pyramide ABC DEF de mesme hauteur que la pyramide GHIK LM, desquelles les bases ABCDE & GHIKL sôt poligones: Je dis que comme la base est à la base, ainsi la pyramide est à la pyramide.

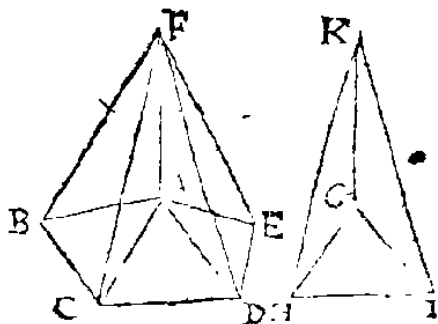


Car les bases estans reduites en triangles ABC, ACD, ADE; GHI, GIK, GKL: soit imaginé sur chacun d'iceux vne pyramide de mesme hauteur que la totale. Donc puis que par la 5.

p. 12. comme la base ABC est à la base ACD, ainsi la pyramide ABCF est à la pyramide ACDF; en composant comme la base ABCD sera à la base ACD, ainsi la pyramide ABCDF sera à la pyramide ACDF: Mais derechef, par la 5. p. 12. comme la base ACD est à la base ADE, ainsi la pyramide ACDF est à la pyramide ADEF: Donc en raison égale, comme la base ABCD est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDF est à la pyramide ADEF: & partant en composant comme la base ABCDE est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDEF est à la pyramide ADEF. Par semblable argument sera démontré que comme la base GHIKL est à la base GKL, ainsi la pyramide GHKLM est à la pyramide GKLM; & en changeant comme la base GKL est à la base GHIKL, ainsi la pyramide GKLM est à la pyramide GHKLM. Derechef puis que par la 5. p. 12. comme la base ADE est à la base GKL, ainsi la pyramide ADEF est à la pyramide GKLM; les 4. bases ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, seront és mesmes raisons que les 4. pyramides ABCDEF, ADEF, GKLM, GHKLM: Parquoy en raison égale comme la base ABCDE est à la base GHIKL, ainsi la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHKLM: Ce qu'il falloit prouver.

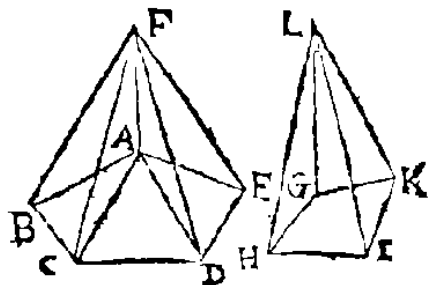
S C H O L I E.

Encore que selon plusieurs Interpretes, il soit parlé en la demonstration de ceste prop. seulement des pyramides de mesme hauteur, desquelles les bases polygones ont les costez égaux en nombre: toutes-fois nous démontrerons aussi le mesme des pyramides de mesme hauteur, la base de l'une desquelles contiët plus de costez que la base de l'autre. Car soient premicrement deux pyramides de mesme hauteur ABCDEF, GHIK, la base de l'une desquelles soit polygone savoir est pentagone, & de l'autre triangulaire. Je dis que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base: Car le pentagone estant resoud en triangles, aussi la pyramide sera diuisée en pyramides égales en nombre. Et pource que par la 5. p. 12. comme la base ABC premiere quantité est à la base GHI, seconde quantité, ainsi la pyramide ABCF 3. quantité est à la pyramide GHIK 4. quantité, Et en la mesme maniere, comme la base ACD, 5. quanti-



est à la base GHI 2. quantité, ainsi la pyramide $ACDF$ 6. quantité est à la pyramide $GHIK$ 4. quantité: par la 24. p. 5. comme la base $ABCD$ premiere & 2. quantitez ensemble, sera à la base GHI seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCF$ 3. quantité, avec la 6. sera à la pyramide $GHIK$ 4. quantité. Derechef puis que comme la base $ABCD$ est à la base GHI , ainsi la pyramide $ABCF$ est à la pyramide $GHIK$, comme nous venons de demonstrier: & que par la 5. p. 12. comme la base ADE 5. quantité, est à la base GHI 2. quantité, ainsi la pyramide $ADEF$ 6. quantité est à la pyramide $GHIK$ 4. quantité: par la mesme 24. p. 5. la base $ABCDE$ sera à la base GHI , comme la pyramide $ABCDEF$ est à la pyramide $GHIK$: ce qui estoit proposé. En la mesme maniere faudroit tousiours proceder s'il y a voit d'auantage de triangles & la base du polygone. Or puis que comme il a esté demonstté, la base du polygone $ABCDE$ est à la base triangulaire GHI , ainsi que la pyramide $ABCDEF$ est à la pyramide $GHIK$: pareillement en chang. art, comme la base GHI sera à la base $ABCDE$, ainsi la pyramide $GHIK$ sera à la pyramide $ABCFDEF$. Parquoy deux pyramides, desquelles l'une à la base polygone, & l'autre triangulaire, sont tousiours comme leurs bases, de quelque part ou l'on commence: Car encore que la demonstration commence au polygone & à sa pyramide, comme appert par la demonstration, toutesfois en changeant il est permis prendre le commencement au triangle & à sa pyramide, comme il a esté dict.

Maintenant soient deux pyramides de mesme hauteur $ABCDEF$, $GHIKL$, desquelles les bases sont polygones, & sont plus de costez en une base qu'en l'autre: Je dis derechef que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base. Car estant resoud le polygone $ABCDE$, és triangles ABC , ACD , ADE : la pyramide sera diuisee en autant de pyramides. Et d'autant



qu' comme la base triangulaire ABC , premiere quantité, est à la base polygone $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCF$ troisieme quantité, est à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité; & comme la base ACD 5. quantité est à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ACDF$ 6. quantité, est à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité: aussi par la 24. p. 5. comme la base $ABCD$ premiere quantité avec la 5. sera à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCFDEF$ troisieme quantité avec la 6. sera à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité. Derechef puis que comme la base $ABCD$ premiere quantité est à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCFDEF$ tierce quantité, est à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité: & aussi

que comme la base ADE quinte quantité, est à la base $GHIK$ seconde de quantité, ainsi la pyramide $ADEF$ sixiesme quantité, est à la pyramide $GHIKL$ quarte quantité: pareillement par la 24. p. r. comme la base $ABCDE$ premiere quantité avec la quinte, sera à la base $GHIK$ seconde de quantité, ainsi la pyramide $ABCDEF$ tierce quantité avec la 6. sera à la pyramide $GHIKL$ 4. quantité: ce qui estoit proposé. Il faudroit tousiours proceder en la mesme maniere s'il y auoit d'auantage de triangles en la base.

Or nous conuertirons tant ceste 6. prop. que celle demonstree en ce scholie, en ceste maniere.

Les pyramides de queleconques bases, lesquelles sont entr'elles comme leurs bases, sont en mesme hauteur.

Ce qu'on demonstrera en la mesme maniere, que les choses dictes au scholie de la 5. p. de ce liure, ont esté demonstrees.

COROLLAIRE.

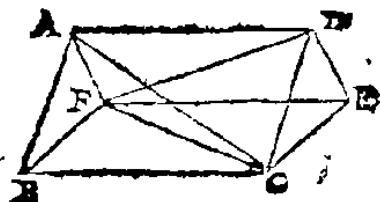
Il appert aussi que les pyramides de mesme hauteur, constituees sur bases egales multilateres, ou sur une mesme, estre egales entr'elles; puis qu'elles ont mesme raison que leurs bases, lesquelles sont posees egales, ou une mesme.

Derechef est evident que les pyramides multilateres egales, & construites sur bases egales, ou sur une mesme, ont mesme hauteur. Et que les pyramides multangulaires egales, & ayans mesme hauteur, ont aussi les bases egales, si elles ne sont une mesme. Ce qui se peut demonstrier comme nous auons dict au corol. de la 5. p. de ce liure.

THEOR. 7. PROP. VII.

Tout prisme peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires,

Soit le prisme $ABCDEF$ duquel les deux triangles opposites ABF , DCE sont egaux & semblables. Je dis qu'iceluy prisme peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires.



Car si des trois parallelogrammes d'iceluy prisme, on mei-

ne les trois diametres AC, CF, FD, il est evident que le prisme sera diuisé en trois pyramides : montrons qu'elles sont egales. D'autant que la diagonale AC, couppant le parallelog. ABCD, en deux egalement, les triangles ABC, ADC sont egaux : Partant la pyramide ABCF, ayant pour base le triangle ABC est egale à la pyramide ADCF ayant pour base le triangle ADC, par la 5. p. 12. Car icelles Pyramydes sont de mesme hauteur, sçauoir est de la perpendiculaire tombant du sommet F sur le plan ABCD. Par mesme raison seront egales les pyramides ADFC, EFDC, constitues sur les bases egales AD, EF, & sous mesme hauteur, sçauoir de la perpendiculaire mencee du sommet C sur le plan ADEF. Mais la pyramide ADCF est la mesme que la pyramide ADFC ; puis que l'une & l'autre est contenuee des 4. plans ADC, ADF, ACF, DCF. D'oc les trois pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ou CDEF, composans tout le prisme, sont egales entr'elles: ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE. I.

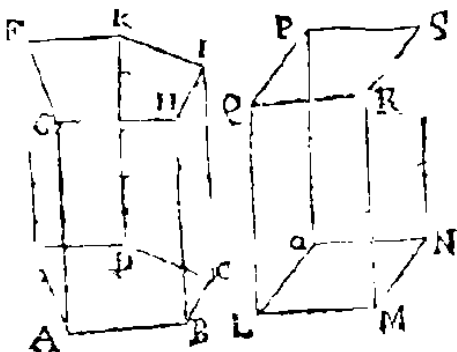
De cecy resulte que tout prisme est triple d'une pyramide de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales, ou bien qu'une pyramide est la tierce partie d'un prisme de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales.

SCHOLIE.

Nous adiousterons icy la demonstration d'une autre proposition, touchant les prismes qui ont au sommet les plans parallels à la base, egaux & semblables: ceste proposition est telle.

Les prismes estans sous mesme hauteur, & ayans quelconques bases, sont entr'eux comme leurs bases.

Soient deux prismes de mesme hauteur ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, desquels les bases sont figures multilateres. Je dis que comme la base ABCDE est à la base LMNO, ainsi est le prisme au prisme. Car si de tous les angles de chasque base, on tire des lignes droictes à un point du plan superieur, qui est opposé à la ba-



se, se feront deux pyramides sous mesme hauteur, ayans mesmes bases que le prisme : Et partant par le coroll. cy dessus, chaque pyram. sera la troisieme partie de son prisme. Parquoy par la 15. p. 5. comme la pyramide sera à la pyramide, ainsi le prisme sera au prisme : Mais la pyramide est à la pyramide, comme la base à la base, ainsi qu'il a esté démontré à la 6. p. Donc aussi comme la base sera à la base, ainsi le prisme sera au prisme. Ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE II,

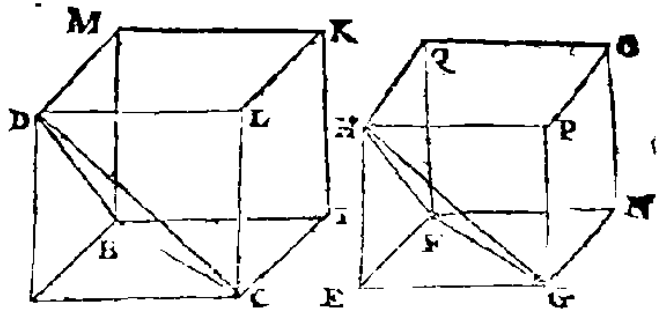
Il est manifeste par ces choses, que les prismes de mesme hauteur, & construez sur mesme base, ou sur bases egales, quelles qu'elles soient, sont egaux entr'eux, puis qu'ils ont mesme raison entr'eux que leurs bases, lesquelles sont une mesme, ou bien s. m. egales.

Appert aussi par le contraire, que les prismes egaux, construez sur une mesme base, ou sur egales, sont en mesme hauteur : Et que les prismes egaux de mesme hauteur, ont aussi mesme base, ou egales. Ce qu'on démontrera en la mesme maniere qu'a esté démontré la conuerse de la 31. p. 11.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Pyramides semblables ayans bases triangulaires, sont en raison triplee de leurs costez homologues.

Soient les deux pyramides semblables A BCD & EFGH, ayans bases triangulaires A BC & EFG : ie dis qu'elles sont en raison triplee des costez de mesme raison AC & EG.



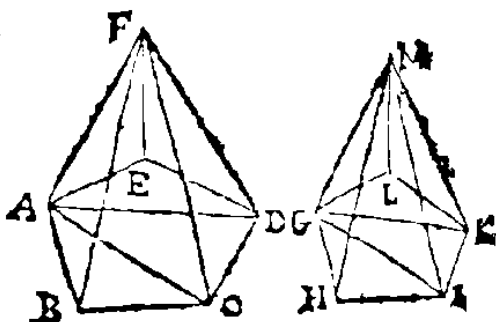
Qu'ainsi ne soit. Soient acheuez les parallelipipedes AK & EO. D'autant que les pyramides sont semblables, les trois costez AD, AB, AC, seront proportionnaux aux trois costez EH, EF, EG, & l'angle solide A egal à l'angle solide E, par la

deff. des solides semblables : & par la mesme demonstration qui a esté faicte à la 27. p. 11. les deux solides AK & EO seront semblables , ayans les trois costez AB, AD, AC, proportionaux aux trois costez EF, EH, EG; & les opposez seront aussi proportionaux; & par consequent les six plans proportionaux aux six plans: Mais les 2. solides AK & EO, estans semblables, ils seront en raison triplee de leurs costez homologues AC, & EG, par la 33. p. 11. Et cōme le solide AK est au solide EO, ainsi la pyramide ABCD est à la pyramide EFGH : (car chacune pyramide est la sixiesme partie de son solide, d'autant que par la 28. p. 11. chacun solide peut estre diuisé en deux prismes egaux , & chacun prisme en trois pyramides egales par la 7. p. 12.) & partant la 11. p. 5. les pyramides sont aussi en raison triplee des costez de mesme raison AC , & EG. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE,

De cecy est manifeste, qu'aussi les pyramides semblables, desquelles les bases ont plus de trois costez ; sont en raison triplee de leurs costez homologues.

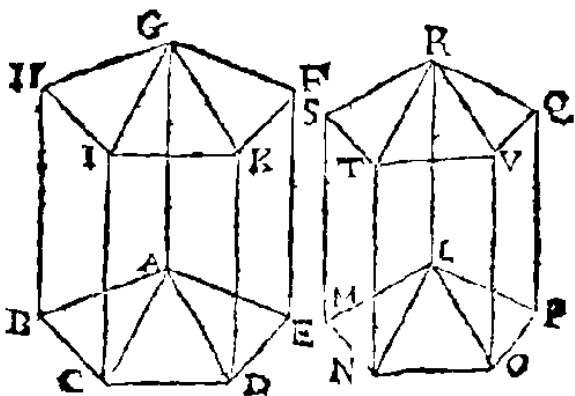
Soient les pyramides semblables ABCDEF, GHIKLM, ayans bases rectilignes semblables de plusieurs costez. Je dis qu'icelles pyramides sont en raison triplee des costez homologues AB, GH. Car si des angles A & G, on tire aux angles opposez les lignes droictes AC, AD : GI, GK: par la 20 p. 6. les bases semblables seront diuisees en nombre egal de triangles semblables, sçauoir est que les triangles ABC, ACD, ADE, seront semblables aux triangles GHI, GIK, GKL. Donc puis que les pyramides sont semblables : les triangles AFB, GMH, sont semblables, & l'angle FAB egal à l'angle MGH; & comme FA sera à AB, ainsi MG sera à GH : mais comme AB à AC, ainsi GH à GI, à cause de la similitude des triangles ABC, GHI : donc en raison egale, comme FA sera à AC, ainsi MG sera à GI. Derechef puis que comme AC est à CB, ainsi GI est à IH : à cause de la similitude des triangles ABC, GHI : & comme GB à CF, ainsi IH à IM, puis qu'à cause de la similitude des pyramides, les triangles BCF, HIM, sont semblables : aussi par raison egale, comme AC sera à CF, ainsi GI



sera à IM : & partant puis que comme FA à AC, ainsi MG à GI ; & comme AC à CF, ainsi GI à IM : pareillement en raison egale, comme FA sera à FC, ainsi MG à MI. Parquoy par la 5. p. 6. les triangles AFC, GMI, seront equiangles, & partant semblables. Mais les triangles AFB, BFC, ABC sont aussi semblab aux triangles GMH, HMI, GHI. Donc par la 8. d. 11. les pyramides ABCF, CHIM, sont semblables. Par mesme raison seront semblables les pyramides ACDF, GIKM : Item ADEF, GKLM. Parquoy par la 8. p. 12. les pyramides ABCF, ACDF, ADEF, seront aux pyramides GHIM, CIKM, GKLM, chacune à la sienne, en raison triplee des costez homologues AB, CD, DE, à GH, IK, KL, chacun au sien. Veu donc qu'à cause de la similitude des bases ABCDE, GHIKL, il y a une seule & mesme raison de AB, CD, DE à GH, IK, KL : aussi les pyramides ABCF, ACDF, ADEF, auront aux pyramides GHIM, GIKM, GKLM, une seule & mesme raison, c'est à sçavoir triplee. Et par la 12. p. 5. comme une seule pyramide ABCF est à une seule pyramide GHIM, ainsi toutes les pyramides, sçavoir est la pyramide ABCDEF, est à toutes les pyramides, sçavoir est à la totale GHIKLM. Parquoy puis que par la 8. p. 12. la pyramide ABEF est à la pyramide GHIM en raison triplee des costez homologues AB, GH ; aussi la pyramide ABCDEF sera à la pyram. de GHIKLM en la raison triplee des mesmes costez homologues AB, GH. Ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

Par mesme raison les prismes semblables sont en raison triplee de leurs costez homologues. Car soient deux prismes semblables ABCDEF, GHIK, LMNOPQ, RSTV : Je dis qu'ils sont en raison triplee des costez homologues. Car si des angles A & L on tire les lignes AC, AD, LN, LO ; par la 20. p. 6. les triangles ABC, CAD, DEA, seront semblables aux triangles LMN, LNO, OPL. Semblablement si des angles G & R, on tire les lignes GI, GK, RT, RV ; les triangles GHI, GIK, GKF, seront aussi semblables aux triangles RST, RTV, RVQ, & aux susdits, puis que par la def. du prisme, tous les p'ds opposites des prismes s'ont semblab. Et d'antant qu'à cause de la similitude des prismes, les parallelogrames CH, NS sont semblables ; comme CI sera à CB, ainsi TN sera



à NM, mais BC est à CA, ainsi aussi NM est à NL, à cause de la similitude des triangles. Donc par raison égale, comme CI sera à CA, ainsi TN à NL. Derechef pource que l'angle solide N, est égal, à l'angle solide C, à cause de la similitude des prismes, si celuy-cy est superposé à l'autre, l'angle MNO conviendra à l'angle BCD, Et l'angle TNM à l'angle ICB, Et l'angle TNO à l'angle ICD. Mais aussi la ligne droite NL conviend à la ligne CA, pource que les angles MNL, BCA sont égaux. Donc les angles ICA, TNL sont égaux; Et partant puis que les costez d'alentour iceux, ont esté demonstrez proportionaux, les parallelogrames CG, NR, seront semblables. Mais aussi les parallelogrames CH, HA sont semblables aux parallelog. NS, SL, & les triangles ABC, GHI, aux triangles LMN, RST. Donc les prismes ABCI, GH, LMNTRS, sont semblables, par la 8. def. 11. On démontrera en la mesme maniere que les prismes CDAGIK, NOLTRV, sont semblables, comme aussi les prismes AEDKGF, LPOVRQ. Parquoy les prismes ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, par les choses demonstrees à la 34. p. 11. sont aux prismes LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, chacun au sien, en raison triplee des costez homologues BC, CD, DE à MN, NO, OP, chacun au si n. Et partant en la mesme maniere que nous avons demonstrez cy dessus des pyramides multangles, on démontrera que les prismes ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, sont en raison triplee des costez homologues BC, MN.

De toutes ces choses se collige, que les pyramides multangles semblables, se diuisent en pyramides triangulaires semblables, & en nombre égal, & homologues aux toutes. Car cecy est manifeste par la demonstration du preced. corol.

Se collige aussi que les prismes multangulaires semblables, se diuisent en prismes semblables, ayans bases triangulaires, & en nombre égaux, & homologues aux tous, comme appert par la demonstration de ce scholie.

THEOR. 9. PROP. IX.

Des pyramides egales, ayans bases triangulaires; leurs hauteurs sont reciproques aux bases: Et les pyramides ayans bases triangulaires reciproques à leurs hauteurs, sont egales.

Soient les deux pyramides egales ABCD, & EFGH, ayans bases triangulaires: ie dis que les bases d'icelles sont reciproques a leurs hauteurs, c'est à dire que cōme la base ABC à la

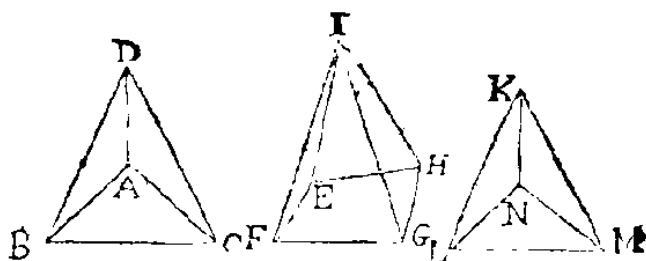
base EFG, ainsi la hauteur du point H à la hauteur du point D.

Qu'il ne soit ainsi. Soient achevez les parallelipipedes AK, EO, & comme en la precedente, il sera evident que chacun d'iceux parallelipipedes sera sextuple de sa pyramide. Et les deux pyramides estans egales, iceux solides AK, EO, seront egaux: & par la 34. p. II. ils auront les hauteurs reciproques aux bases. (C'est à dire que comme la hauteur du point D à la hauteur du point H, ainsi la base EN à la base AI) Mais comme EN à AI, ainsi la moitié le triangle EFC, à la moitié de AI, sçavoir le triangle ABC; & partant par la 17. p. 5. comme la hauteur du point D à la hauteur du point H, ainsi le triangle EFG au triangle ABC.

Pour la seconde partie: Si la hauteur du point D est à la hauteur du point H, comme le triangle EFG, est au triangle ABC: ie dis que les pyramides ABCD, EFGH seront egales. Car il est evident comme cy-dessus que la hauteur du point D, sera à la hauteur du point H, comme la base EN, à la base AI (d'autant qu'elles sont doubles des triangles EFG & ABC) ainsi les parallelipipedes AK, EO, auront les hauteurs reciproques aux bases: & par la 34. p. II. ils seront egaux; & par consequent leurs sixiesmes parties seront aussi egales, sçavoir les pyramides ABCD, & EFGH: ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Les pyramides egales, desquelles les bases ne sont triangulaires, ont aussi les bases & hauteurs reciproques: & les pyramides desquelles les bases ne sont triangulaires, & ont leurs bases reci-

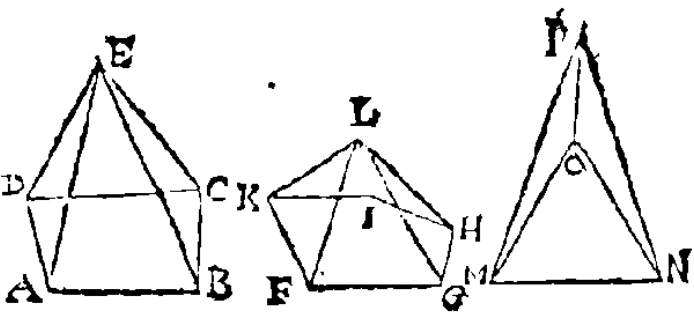


proques à leurs hauteurs, sont egales. Car soient premierement deux pyramides egales, l'une desquelles ABCD ait la base triangulaire, mais l'autre EFGHI ne l'ait pas. Soit fait le triangle KLM egal à la base non triangulaire EFGH; puis sur iceluy triangle soit construite la pyramide KLMN, de mesme hauteur que la pyramide EFGHI. Or d'autant que les pyramides EFGHI, KLMN, ont les bases egales, & mesme hauteur, elles seront egales, par les choses demontrees au scholie de la 6. p. 12. Mais la pyramide EFGHI a esté posee egale à la pyramide ABCD; donc aussi les pyramides ABCD, KLMN, seront egales: Parquoy puis qu'elles ont les bases triangu-

laïres, par la 9. p. 12. comme la base ABC sera à la base KLM , ou à son égale $EFGH$, ainsi la hauteur de la pyramide $KLMN$, c'est à dire la hauteur de la pyramide $EFGH$, sera à la hauteur de la pyramide $ABCD$: Et partant des pyramides égales $ABCD, EFGH$, les bases & hauteurs sont reciproques.

Mais maintenant d'icelles pyramides, les bases & hauteurs soient reciproques. Je dis qu'icelles pyramides sont égales. Car demeurant la mesme construction faicte cy dessus; puis que la base ABC est posée estre à la base $EFGH$, cōme la hauteur de la pyramide $EFGH$ est à la hauteur de la pyram. $ABCD$; aussi la base ABC sera à la base KLM , cōme, la hauteur de la pyram., $KLMN$ sera à la hauteur de la pyramide $ABCD$. Parquoy par la 9. p. 12. les pyramides $ABCD, KLMN$, sont égales. Mais comme nous avons démontré au scholie de la 6. p. 12. la pyramide $KLMN$ est égale à la pyramide $EFGH$: dont aussi la pyramide $ABCD$ sera égale à la pyramide $EFGH$. Ce qui estoit proposé.

Soient maintenant les pyramides égales $ABCDE, FGHIKL$, ayans bases multangulaires. Soit faict de rechef le triangle MNO , égal à la base $ABCD$: & la pyramide $MNOP$ de mesme hauteur que



la pyramide $ABCDE$. Donc par les choses démontrées au scholie de la 6. p. 11. la pyramide $MNOP$ sera égale à la pyramide $ABCDE$: laquelle a esté posée égale à la pyramide $FGHIKL$: donc aussi la pyramide $MNOP$ sera égale à la pyramide $FGHIKL$. Parquoy comme nous avons démontré cy dessus, ainsi que la base MNO , c'est à dire la base $ABCD$, sera à la base $FGHIK$, ainsi la hauteur de la pyramide $FGHIKL$ sera à la hauteur de la pyramide $MNOP$, c'est à dire à la hauteur de la pyramide $ABCDE$: Et partant des pyramides égales $ABCDE, FGHIKL$, les bases & hauteurs sont reciproques.

Mais soient maintenant reciproques les bases & hauteurs d'icelles pyramides: on démontrera comme dessus qu'elles sont égales.

Or tout ce que nous avons démontré cy dessus peut aussi conuenir à quelconques prismes. Car si les prismes estoient égaux, aussi les pyramides de mesme hauteur qu'iceux, ayans les mesmes bases, seront égales, puis que d'iceux prismes par le corol. de la 7. p. 12. elles sont les tierces parties, ou les deux tierces parties par le scholie de la mesme

prop. Parquoy comme nous avons demonst^ré n'agueres, les bases & hauteurs d'icelles pyramides seront reciproques. Veu donc que ces bases & hauteurs sont les mesmes que des prismes, les bases & hauteurs des prismes seront pareillement reciproques.

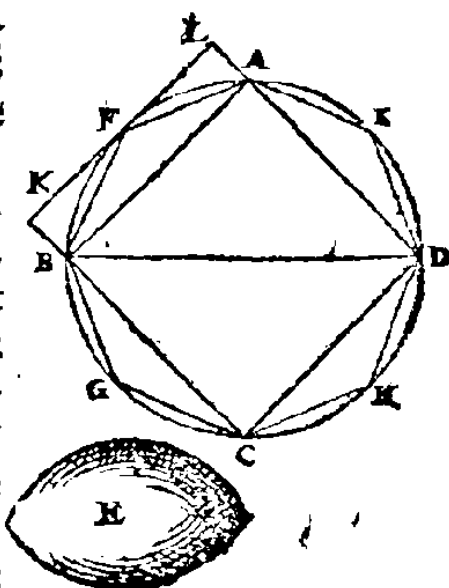
Derechef si les bases & hauteurs des prismes sont reciproques : les bases & hauteurs des pyramides aians mesmes bases & hauteurs que les prismes, seront aussi reciproques. Parquoy, comme il a esté demonst^ré, les pyramides sont egales ; & partant aussi les prismes, puis que d'icelles pyramides ils sont triples, ou sesquialteres. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 10. PROP. X.

Tout cone est la troisieme partie du cylindre ayant base egale, & de mesme hauteur.

Soit vn cylindre & vn cone, tous deux de mesme hauteur, & ayans vne mesme base, sçauoir le cercle ABCD : Je dis que le cylindre est triple du cone.

Autrement il sera plus grand, ou plus petit que le triple d'iceluy cone. Soit premierement plus grand s'il est possible, sçauoir de la quantité du solide E, c'est à dire que si du cylindre, ayant pour base le cercle ABCD est retranché le solide E, le reste sera triple du cone, ayant pour base le mesme cercle ABCD. Maintenant dans le cercle soit inscrit le quarré ABCD, diuisé en deux triangles par la diagonale BD, & sur iceux triangles soient imaginez estre esleuez deux prismes de mesme hauteur que le cylindre : Et parce que le quarré est plus de la moitié du cercle, il est euident qu'iceux deux prismes seront plus de la moitié du cylindre. Que si les segmens restans du cylindre, (les deux prismes estans soustraits) sont encores plus grands que le solide E, sur les bases d'iceux segmens soient faicts les quatre triangles Isosceles AFB, BGC, CHD, DIA, & sur iceux soient imaginez estre esleuez quatre



prismes de mesme hauteur que le cone ou cylindre , dont la base est le cercle ABCD. Il est evident qu'iceux triangles isosceles sont plus de la moitié des bases des segmens restans du cylindre ; & par consequent qu'iceux quatre prismes seroient plus de la moitié d'iceux quatre segmens. Que si les huit petits segmens restans du cylindre ne sont plus petits que le solide E, soit toujours en ceste façon soustrait plus de la moitié de ce qui restera, iusqu'à ce que par la 1. p. 10. les segmens restans soient plus petits que le solide E. Et pour abreger soient iceux huit petits segmens plus petits qu'iceluy solide E: Il est donc manifeste que la colonne composee de ces six prismes, ayant pour base le polygone inscrit au cercle ABCD, & de mesme hauteur que le cylindre donné ; sera plus que triple d'iceluy cone, par ce qui a esté dit cy-dessus. Or d'autant que chacun prisme est triple de sa pyramide de mesme hauteur, & ayant base egale, (car il peut estre diuisé en trois telles pyramides egales par la 7. p. 12.) il s'ensuit que tous iceux prismes faisant la colonne ayant pour base le polygone inscrit au cercle ABCD, (c'est à dire icelle colonne de mesme hauteur que le cylindre I) est triple de toutes les six pyramides, faisant la seule pyramide, ayant le mesme polygone pour base, & de mesme hauteur qu'icelle colonne. Partant icelle pyramide sera plus grande que le cone de mesme hauteur, ayant le cercle ABCD pour base: ce qui est impossible, n'estant la pyramide que partie du cone. Donc le cylindre n'estoit pas plus grand que le triple du cone.

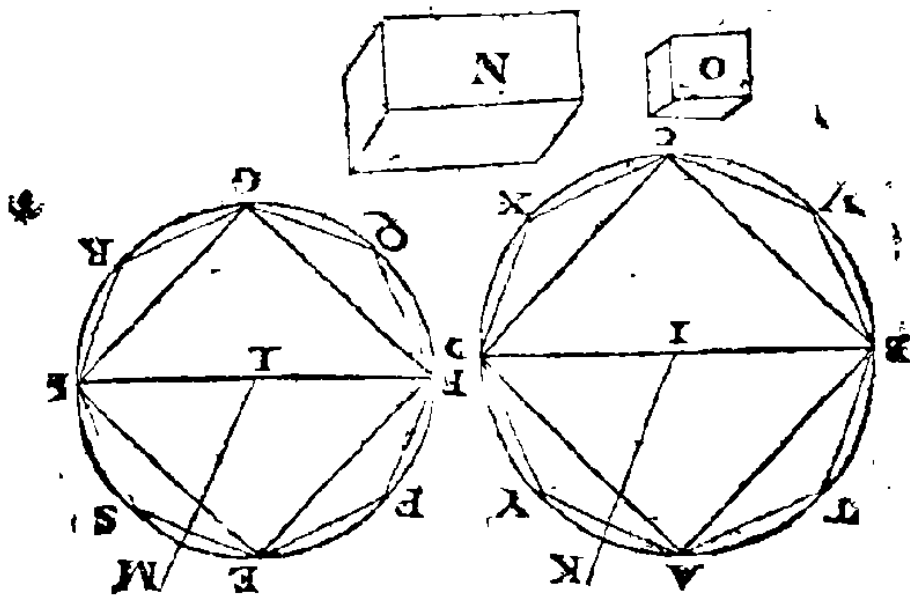
Soit donc plus petit, s'il est possible ; sçauoir de la quantité du solide E, c'est à dire que si on retranche le solide E du cone, que le residu soit la troisieme partie du cylindre. Maintenant du cone, ayant pour base le cercle ABCD, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de mesme hauteur, ayant pour base le quarré ABCD, & du residu, sçauoir des quatre segmens F, G, H, I, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de chacun segment, de mesme hauteur qu'iceluy segment, & ayant pour base le triangle isoscelle en iceluy segment: soit continué ce retranchement iusques à ce que les segmens restans soient plus petits que le solide E: ce qui doit arriuer par la 1. p. 10. Soient donc pour abreger iceux huit petits segmens plus petits que le solide E: il est donc evident que la pyramide de mesme hauteur que le cone, ayant iceluy octogone pour base, est plus grand qu'un tiers du cylindre donné, d'autant qu'elle est plus grande que le cone, apres que d'iceluy on a retranché le solide E. Or iceluy cone, ainsi rescindé
est le

est le tiers du cylindre donné, & la pyramide est aussi, (comme il a esté dit cy-dessus) le tiers de la colonne de mesme hauteur, ayant le mesme octogone pour base: Partant icelle colonne seroit plus grande que le cylindre donné, duquel elle est partie: Ce qui est impossible. Donc le cylindre donné n'estoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone: il faut donc qu'il soit egal: ce qui estoit a demonstrier.

THEOR. II. PROP. XI.

Les cones & cylindres de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux cones de mesme hauteur, desquels les bases sont les cercles ABCD & EFGH; les diametres BD & FH leurs axes ou hauteurs IK & LM. Je dis que comme le cercle



ABCD est au cercle EFGH, ainsi le cone BK est au cone FM; C'est à dire que si on imagine que comme le cercle au cercle ainsi le cone BK à quelque autre solide, comme N: qu'iceluy solide N sera egal au cone FM.

Autrement il sera plus petit ou plus grand: Soit premièrement plus petit, & s'il est possible de la quantité du solide O: ainsi les deux solide SN & O seront egaux au cone FM. Maintenant du cone FM comme en la precedente, soit retranché plus de la moitié, sçavoir une pyramide de mesme

hauteur que le cone, ayant pour base le quarré FGHE: & du residu encores plus de la moitié, sçauoir quatre pyramides de mesme hauteur que le cone, ayans pour base les quatre triangles isosceles EFF, FQG, FQH, GRH, HSE, en continuant tousiours iusques à ce que par la 1. p. 10. le residu soit plus petit que le solide O: & soit iceluy residu pour abreger les huiets petits segmens: il s'ensuit que la pyramide FM de mesme hauteur que le cone FM, & ayant pour base l'octogone EPFQGRHS, sera plus grande que le solide N. Dans le cercle ABCD, soit inscrit vn polygone semblable au polygone inscrit dans la base circulaire EFGH, & sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyramide de mesme hauteur que le cone BK. Or par le corol. de la 2. p. 12. comme le cercle ABCD est au cercle EFGH, ainsi le polygone TVXY est au polygone PQRS: mais comme le cercle ABCD au cercle EFGH, ainsi le cone BK est au solide N, & par la 6. p. 12. comme le polygone au polygone, ainsi la pyramide à la pyramide de mesme hauteur que les cones: & partât par la 11. p. 5 la pyram. ATBVCXDYK sera à la pyramide EPFQGRHSM, comme le cone BK au solide N. Mais la pyramide ATBVCXDYK est plus petit que le cone BK, la partie que le tout: Donc aussi par la 14. p. 5. la pyramide EPFQGRHSM sera moindre que le solide N. Mais elle a esté demonstrée aussi plus grande: ce qui est absurde. Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cone FM, puis que le posant tel, il nous a conduit à absurdité.

Soit donc plus grand s'il est possible: & soit en changeans comme le solide N au cone BK, ainsi le cercle EFGH au cercle ABCD: & comme iceluy solide N au cone BK, soit aussi le cone FM à quelque autre solide, comme O: Et par la 14. p. 5. puis que le solide N est plus grand que le cone FM, aussi le cone BK sera plus grand que le solide O. Parquoy puis que comme le cercle EFGH est au cercle ABCD, ainsi le solide N est au cone BK: par la 11. p. 5. comme le cercle EFGH est au cercle ABCD, ainsi le cone FM au solide O, plus petit que le cone BK: ce que tantost nous auons monstré estre impossib. Donc le solide N n'est pas plus grand ne plus petit que le cone FM, ains egal. Parquoy puis qu'on a posé la base ABCD estre à la base ABCD estre à la base EFGH, ainsi que le cone ABCDK au solide N: & par la 7. p. 5. comme le cone ABCDK est au solide N, ainsi est le mesme cone ABCDK au cone EFGHM: pareillement comme la base ABCD sera à la base EFGH, ainsi le cone ABCDK sera au cone EFGHM.

Ce que nous auons prouué des cones de mesme hauteur, se doit aussi entendre des cylindres de mesme hauteur : d'autant que par la 10. p. 12. le cylindre est triple de son cone de mesme hauteur, & ayant base egale. Que si le cone est au cone comme la base à la base, aussi le triple du cone sera au triple du cone, comme la base à la base par la 15. p. 5. c'est à dire le cylindre au cylindre, comme la base à la base. Donc les cones & cylindres de mesme hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que les cones & cylindres de mesme hauteur, constituez sur mesme base, ou sur bases egales, sont aussi egaux.

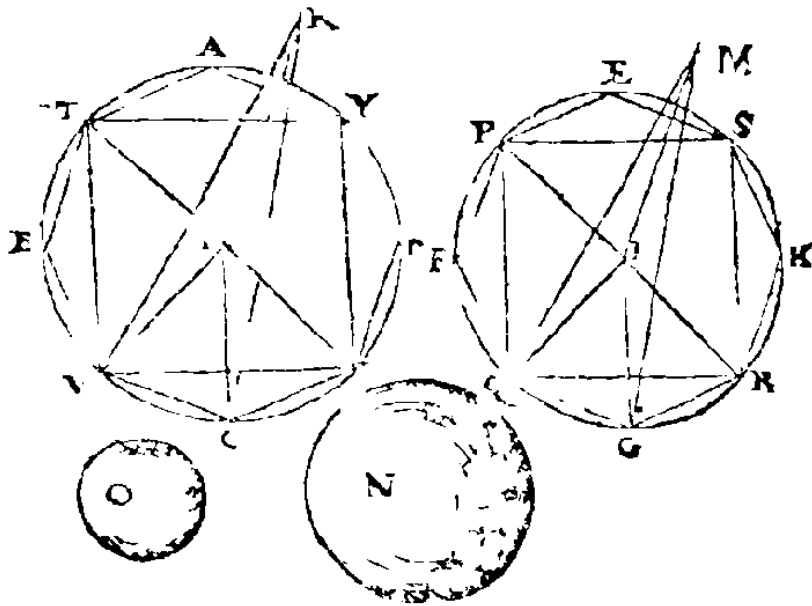
T H E O R. 12. P R O P. XII.

Les cones & cylindres semblables, sont l'un à l'autre en raisõ triplee des diametres de leurs bases.

Soient semblables cones & cylindres, ayans pour bases les cercles ABCD, EFGH, mais les axes d'iceux soient IK, LM; & les diametres des bases TV, PR. Je dis que le cone duquel la base est le cercle ABCD, mais le sommet K, est au cone ayant pour base le cercle EFGH, & pour sommet le point M, en raison triplee du diametre TX au diametre PR, c'est à dire que si on imagine comme aux precedentes, que le cone ABCDK soit à quelque solide, comme à N, en raison triplee du diametre TX au diametre PR. Je dis que le solide N est egal au cone EFGHM.

Autrement il sera plus grand ou plus petit. Soit premiere-ment plus petit, sçauoir de la quantité du solide O: Donc les deux solides O & N seront egaux au cone EFGHM: & comme en la precedente soit faicte detraction de plus de la moitié du cone EFGHM, & du residu encore plus de la moitié, iusques à ce que par la 1. p. 10. les restes (c'est à sçauoir pour abreger les huit petits segmens, qui sont à l'entour de la pyramide à la base octogone EPFQGRSM, ou de plus s'il est besoin) soient plus petits que le solide O: Il est euident qu'icelle py-

ramide à la base poligone FM, sera plus grande que le solide N. Maintenant dans le cercle ABCD soit inscrit vn mesme poligone que le plus grand qui soit inscrit au cercle EFGH, sçauoir ATBVCXDY: & sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyramide de mesme hauteur que le cone BK, & ayant tiré les lignes VI, CI; QL, GL; soient menees les lignes QM, CM; VK, CK, afin d'auoir les deux pyramides VCIK, QLGM. Il est manifeste que la pyramide ATBVCXDYK est composee d'autant de pyramides egales, qu'il y a de costez au poligone inscrit dans le cercle, (c'est à sçauoir qu'icelle pyramide totale VICx est composee de huit pyramides egales & semblables à la pyramide de mesme hauteur que la to-



ale.) Le mesme se peut dire que l'autre pyramide totale EPGRHSM est composee de huit pyramides egales & semblables à la pyramide QLGM, de mesme hauteur que la totale. Mais d'autât que les cones BK & FM sont semblables par la definition des cones semblables, comme le diametre TX est au diametre PR; & partant par la 15. p. 5. comme le demy diametre VI est au demy diametre QL, ainsi l'axe IK est à l'axe LM: & en permutant comme le demy diametre VI sera à l'axe IK, ainsi le demy diametre QL est à l'axe LM: & les angles VIK & QLM estans droicts, (car les cones sont posez droicts; & par consequent les axes d'iceux, sont aussi à droicts angles sur leurs bases) par la 6. p. 6. le triangle VIK sera equiangle au triangle QLM. Item CIK sera aussi equiangle à GLM, & par la 4. p. 6. ils auront les costez proportionaux, & seront semblables. Item VI est à CI comme QL à GL, (estans chacun egaux) & l'angle I egal à l'angle L; (ayans chacun

la huitiesme partie de sa circonference pour base) & partant par la 6. p. 6. les triangles VIC, QLG, seront equiangles: partant semblables. Item VC est à VI, comme QG à QL, d'autant que les triangles VIC, & QLG sont semblables) & pour la mesme raison VI est VK comme QL à QM; & en raison egalé VC sera à VK comme QG à QM. Et par mesme discours VC est à CK, comme QG à GM: Et les egales VK & CK, seront l'une à l'autre, comme les egales QM à GM: Et partant par la 5 p. 6. les triangles VKC, QMG, seront equiangles, & semblables: & par la deff. des pyramides semblables, les deux pyramides VICK, & QLGM, seront semblables: Et par la 8. p. 12. elles seront en raison triplee de leurs costez homologues, sçavoir des demy diametres VI & QL. Par mesme discours on prouvera les sept autres pyramides de la totale ATBVCDYK, proportionelles à vne chacune de sept autres pyramides de la totale EPFQGRHSM: Et partant par la 12. p. 5. Les toutes seront aux toutes, comme l'une d'icelles est à l'une d'icelles: C'est à dire que toute la pyramide BK est à toute la pyramide FM, en raison triplee du demy diametre VI au demy diametre QL, ou bien du diametre TX, au diametre PR; puis que comme VI est à QL, ainsi TX est à PR, par 15. p. 5. Mais par nostre hypothese le cone BK est au solide N, aussi en raison triplee des deux diametres TX, PR: Et partant par la 11. p. 5. le cone BK sera au solide N, comme la pyramide de BVCDYK à la pyramide EPFQGRHSM. Parquoy puis que le cone BK est plus grand que la pyramide BK, le tout que la partie, aussi par la 14. p. 5. le solide N sera plus grand que la pyramide FM: & il a esté demonsté estre aussi moindre. Ce qui est absurde. Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cone FM, puis que le posant tel il nous a conduit à l'absurdité.

Soit donc maintenant le solide N plus grand que le cone EFGHM, s'il est possible. D'autant qu'on a pose que le cone ABCDK est au solide N en raison triplee du diametre TX au diametre PR, & la pyramide BK est à la pyramide FM en raison triplee des mesmes diametres, comme nous auons demonsté, par la 11. p. 5. comme le cone BK sera au solide N, ainsi la pyramide BK à la pyramide FM: & en changeant comme N au cone BK, ainsi la pyramide FM à la pyramide BK Parquoy puis que par le corol. de la 8. p. 12. la pyramide FM est à la pyramide BK en raison triplee des costez homologues QG à VC: c'est à dire du diametre PR au diametre TX: pareillement le solide N sera au cone BK en raison triplee des mes-

mes diametres PR à TX. Soit posé que comme N est au cone BK, ainsi le cone FM au solide O. Donc aussi le cone FM sera au solide O en raison triplee du diametre PR au dia. TX. Et puis que le solide N a esté posé plus grand que le cone FM : par la 14. p. 5 le cone BK sera aussi plus grand que O Parquoy le cone FM sera au solide O moindre que le cone BK, en raison triplee du diametre PR au dia. TX : ce qui est absurde. Car il a esté démontré cy dessus qu'un cone ne peut estre à un solide moindre qu'un autre cone, en raison triplee des diametres des bases d'iceux cones. Donc le solide N n'est pas plus grand ny plus petit que le cone EFGHM : il est donc egal. Parquoy par la 7. p. 5. le cone ABCDK a même raison au cone EFGHM qu'au solide N. Et partat puis qu'on a posé le cone ABCDK estre à N en raison triplee des diametres TX & PR : le cone ABCDK sera aussi au cone EFGHM en la raison triplee des mêmes diametres.

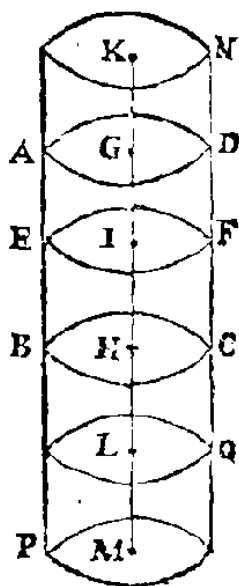
Ceste preuve se doit aussi entendre des cylindres semblables : car leurs cones estans en raison triplee des diametres, par la 15. p. 5. Les cylindres qui sont triples d'iceux cones, seront aussi l'un à l'autre en raison triplee de leurs diametres.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si vn cylindre est coupé par vn plan parallel, aux plans opposez d'iceluy cylindre : les segmens du cylindre sont l'un à l'autre comme les segmens de l'axe.

Soit le cylindre ABCD, coupé par le plan EF, parallel aux deux plans opposez AD & BC, lequel coupe l'axe GH en I. Je dis que le segment de cylindre AEFD, est au segment de cylindre EBCF, comme l'axe GI, est à l'axe IH.

Qu'il ne soit ainsi : apres avoir continué l'axe GH de part & d'autre, soit faite GK egale à GI : & de l'autre costé HL, LM egales à IH : Et soit imaginé le cylindre ABCD, continué d'un costé iusques au point K, & de l'autre iusques au point M. Il est evident que tous les cylindres AN, ED, BF, BO, PO, sont tous sur bases egales :



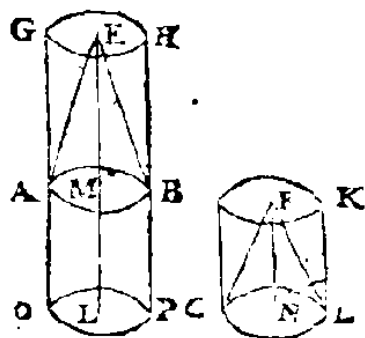
& par le corol. de la 11. prop. 12. les deux qui ont les axes égaux GK, GI, (c'est à dire qui sont de mesme hauteur sont égaux entr'eux : Item les trois BF, BO, PO, estans de mesme hauteur, sont aussi égaux entr'eux : Ainsi il est evident que l'axe IK est autant multiplie de l'axe IG, que le cylindre EN, est multiplie du cylindre ED : Pareillement que l'axe IM est autant multiplie de l'axe IH, que le cylindre PF, est multiplie du cylindre BF; & partant si l'axe IK (multiplie de IG premiere grandeur) est egal, plus grād, ou plus petit que l'axe IM, (multiplie de IH seconde grandeur) aussi le cylindre EN (multiplie du cylindre ED troisieme grandeur) sera egal, plus grand, ou plus petit que cylindre F, (multiplie du cylindre BF 4. grandeur) & ce en quelcōque multiplication: & partant par la 6.d. 5. l'axe GI sera à l'axe IH, comme le cylindre ED au cylindre BF. Ce qui estoit à demonsttrer.

THEOR. 14. PROP. XIII.

Les cones, & cylindres ayans bases égales, sont l'un à l'autre, comme leurs hauteurs.

Soient sur bases égales AB, CD, les deux cones ABE, CDF; & les deux cylindres ABGH, CDIK, desquels les axes & hauteurs soient ME, NF. Je dis que le cone ABE est au cone CDF; & le cylindre ABGH au cylindre CDIK, comme la hauteur ME est à la hauteur NF.

Qu'il ne soit ainsi: Soit continué l'axe EM, jusques au point L, & soit faite ML égale à FN; & soit imaginé le cylindre AH continué jusques au plan OP parallèle à AB, & passant par le point L. Et d'autant que le plan AB coupe le total cylindre OPGH, étant parallèle aux deux plans opposés OP, GH par la 13. p. 12. les cylindres AH, AP, seront l'un à l'autre comme les axes EM & ML: Mais ML est égal à FN, & la base AB égale à la base CD: Donc par le corol. de la 11. p. 12. le cylindre AP sera égal au cylindre CK: Partant comme EM sera à NF, ainsi le cylindre AH au cylindre CK. Et d'autant que par la 10 p. 12. les cones ABE, CDF, sont tierces

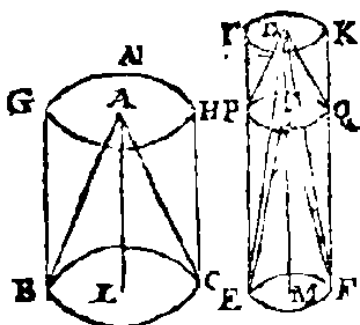


parties des cylindres AH, CK ; ils aurônt meſme raiſon qu'iceux cylindres, par la 15. p. 5. Et partant le cone ABE ſera pareillement au cone CDF , comme la hauteur ME à la hauteur NF . Donc les cones & cylindres conſtituez ſur baſes egales, ſont entr'eux, comme leurs hauteurs. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEOR. 15. PROP. XV.

Aux cones, & cylindres egaux; les hauteurs ſont reciproques aux baſes: Et les cones & cylindres ſont egaux, deſquels les hauteurs ſont reciproques aux baſes.

Soient egaux les cones ABC, DEF ; & les egaux cylindres $BGHC, EIKF$, deſquels les baſes ſoient BC, EF ; leurs axes ou hauteurs AL, DM . Je dis que les baſes ſont reciproques aux hauteurs; c'eſt à dire que comme la baſe BC eſt à la baſe EF , ainſi la hauteur DM à la hauteur AL .



Car premierement ſi DM eſt egale à AL ; les cylindres eſtâs egaux, il eſt euident par la 11. p. 12. que la baſe ſera egale à la baſe. Que ſi MD eſt plus grande que AL , ſoit retranchée MO egale à AL ; Et ſoit coupé le cylindre EK , par le plan PQ , parallel à EF , & paſſant par le point O . Donc par la 14. p. 12. le cylindre EK ſera au cylindre EQ , comme la hauteur MD à la hauteur MO ; & partant par la 7. & 11. p. 5. le cylindre BH egal à iceluy EK , ſera au cylindre EQ , comme MD eſt à MO ; & par la 11. p. 12. comme le cylindre BH eſt au cylindre de meſme hauteur EQ , ainſi la baſe BC à la baſe EF : Et partant par la 11. p. 5. comme la baſe BC , à la baſe EF , ainſi la hauteur MD à la hauteur MO , ou LA ſon egale. Donc les cylindres egaux BH, EK ont les baſes & les hauteurs reciproques.

Par meſme diſcours on prouuera que les baſes & hauteurs des cones egaux ABC, DEF , ſont reciproques; ſi on cōſtruit deux cones ſous les hauteurs MO, OD , comme appert en la figure.

Maintenant ſoient les baſes reciproques aux hauturs: Je dis que les cylindres BH & EK ſont egaux. Car ayant con-

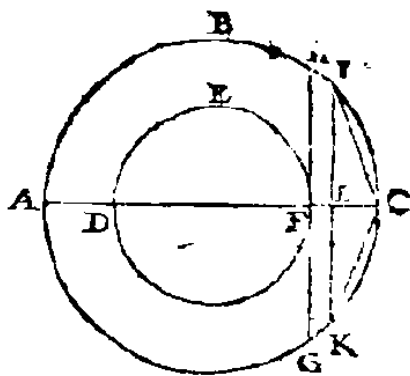
truiſt comme deſſus, puis que la baſe BC , eſt à la baſe EF , cõ-
me la hauteur MD , à la hauteur LA , ou MO ſon egale: Et
par la 11. p. 12. comme la baſe BC , à la baſe EF , ainſi le cylindre
 BH au cylindre de meſme hauteur EQ ; Item par la 14. p. 12.
comme la hauteur MD à la hauteur MO , ainſi le cylindre EK
au cylindre EQ : par la 11. p. 5. Les deux cylindres BH & EK ,
auront meſme raiſon au troiſieſme EQ , l'un comme l'autre:
Et par la 9. p. 5. ils ſeront egaux.

Quant aux cones qui ont auſſi leurs baſes & hauteurs reci-
proques, ils ſeront par le meſme diſcours demonſtrez egaux.
Ce qui eſt toutesfois aſſez euident, puis qu'ils ſont par la 10.
p. 12. tierces parties des cylindres.

PROBL. I. PROP. XVI.

Deux cercles inegaux eſtans à l'entour d'un
meſme centre; inſcrire au plus grand cercle
vn polygone equilateral, ayant le nombre des
coſtez pair, & lequel ne touche point le plus
petit cercle.

Soient deux cercles inegaux AB
 C , & DEF , tous deux ſur vn meſ-
me centre: Il faut dans le plus
grand ABC , inſcrire vn polygone
equilateral, duquel les coſtez ſoiẽt
nombre pair, & ne touchent point
la circonference du plus petit cer-
cle DEF .



Soit mené par le centre d'iceux
cercles le diametre commun AC ,
coupant le petit cercle au point
 F : Et d'iceluy point ſoit menee HFG perpendiculaire au dia-
metre DF , rencontrant la circonference du grand cercle aux
points H & G : & laquelle touchera le cercle DEF en F par
le corol. de la 16. p. 3. Item ſoit coupee la demie circonfere-
nce ABC en deux egalement; Et la moitié encores en deux
egalement, en continuant toujours iuſques à ce qu'on vien-
ne à vn arc plus petit que l'arc HC : ce qui eſt poſſible par la
1. p. 10. Soit donc iceluy plus petit arc IC , & ſoit tiree la ligne

droiſte ſubtendante IC. Je diſ qu'icelle ligne droiſte IC eſt vn coſté du polygone requis. Car puis que le demy cercle & autres arcs d'iceluy ont touſiours eſté diuiſez par moitié juſques à l'arc IC : il eſt euident qu'iceluy arc eſt contenu preciſément certain nombre de fois en la circonſerence du cercle, & en nôbre pair; & par conſequent que la ligne droiſte IC ſera certain nombre de fois également dans iceluy cercle ABC, & en nombre pair. Partant ſera deſcrit dans le cercle ABC vn polygone equilateral & de coſtez pair. Et qu'il ne touche le cercle DEF, on le demonſtre ainſi : De I ſoit menee IK perpendiculaire à AC, couppant icelle AC en L. D'autant que les angles HFC, ILF ſont droiſts, les lignes GH, IK ſeront parallèles par la 28. p. 1. Parquoy puis que la ligne droiſte GH touche le cercle DEF au ſeul poinct F; la ligne droiſte IK ſera totalemēt hors iceluy cercle, & ne le peut iamais toucher, puis que iamais elle ne conuiendra avec la ligne droiſte GH: Donc a plus forte raiſon la ligne droiſte IC, qui eſt moindre & plus eſloignée d'iceluy cercle que Ik, ne le touchera pas; ny partāt auſſi les autres coſtez du polygone inſcrit, puis qu'il ſont egaux à IC, & par conſequent egalemēt diſtans du centre d'iceluy cercle par la 14. p. 3.

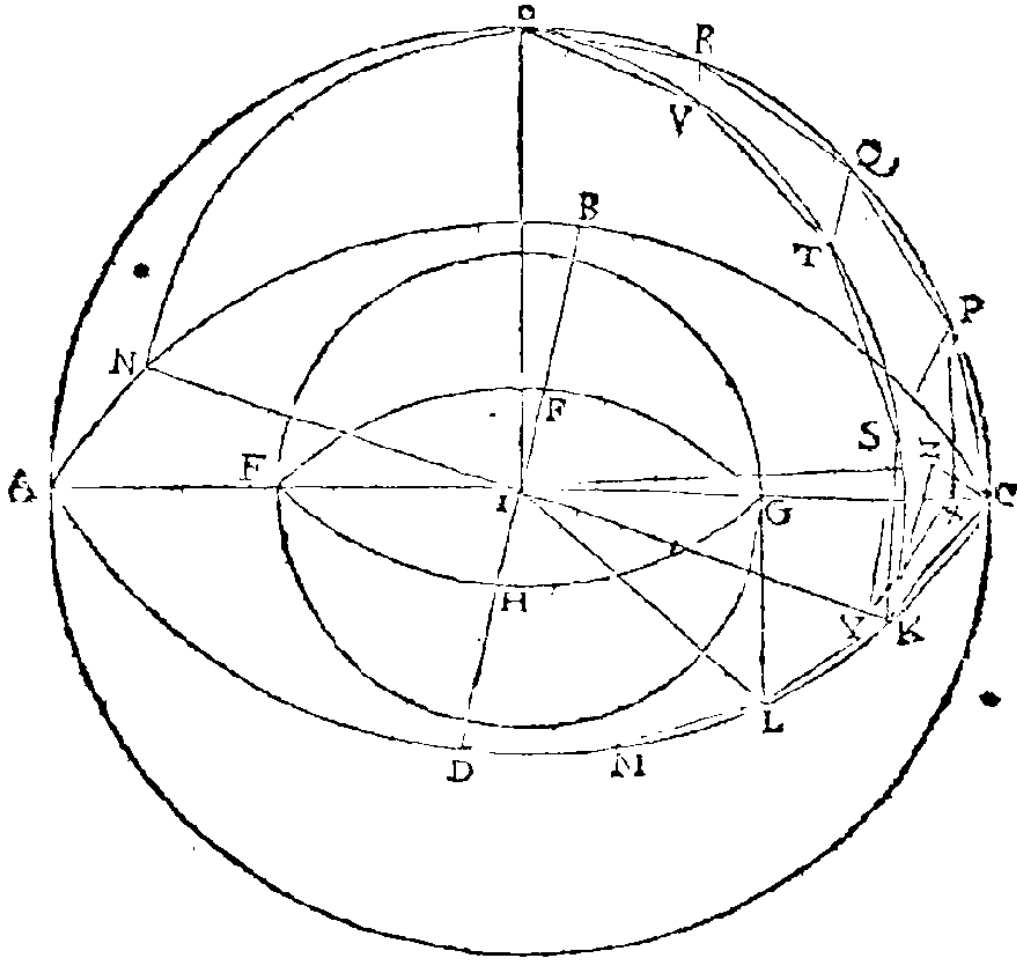
COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que ſi à l'extremité du coſté du polygone inſcrit, lequel conuient avec le diametre, on tire vne ligne perpendic. à iceluy diametre, qu'elle ne peut toucher le moindre cercle, mais que elle tombera toute dehors. Car telle eſt la ligne Ik, laquelle du poinct I extreme du coſté IC conuenant avec le diametre AC, eſt tirée perpendiculairement ſur iceluy diametre AC. & a eſté demonſtré qu'elle ne touche pas le cercle DEF.

PROB. 2. PROP. XVII.

Deux ſpheres inegales eſtans ſur vn meſme centre; inſcrire en la plus grande vn polyedre, duquel les plans ne touchent point la ſuperficie de la petite ſphere.

Soient les deux sphaeres inegales $ABCD$, $EFGH$, alentour d'un mesme centre I : & il faut dans la plus grande $ABCD$ inscrire vn solide polyedre ou de plusieurs costez, lequel ne touche la superficie de la moindre sphaere $EFGH$.



Soient les deux sphaeres coupees par quelque plan passant par le centre I : il est euident par la def. de la sphaere, (qui est faite par la circondution du demy cercle) que les communes sections seront cercles, & les plus grands de toute la sphaere: d'autant qu'ils ont pour diametre le diametre de la sphaere, puisque le plan couppant passe par le centre de la sphaere: soient donc icelles communes sections, sçauoir en la plus grande sphaere, le cercle $ABCD$, & en la plus petite, le cercle $EFGH$: & soient leurs diametres AC & BD se couppans en angles droicts au centre I : Et dans le cercle de la plus grande sphaere $ABCD$, soit inscrit vn polygone, ne touchant point le moindre cercle $EFGH$, par la 16. p. 12. Duquel les costez de la quarte CD , soient Ck , kL , LM , MD : Et soit menee la ligne KI , continuee iusques au point N : Item par la 12. p. 11. du centra I soit menee IO perpendiculaire sur le plan des cercles $ABCD$, $EFGH$, rencontrant la superficie de la plus grande sphae-

re en O : Pareillement par les lignes AC, IO, & Nk, OI, soiet tirez les plans AOC, NOk. Ils feront (par ce qui a esté dit cy dessus) les demy cercles AOC, NOk, tres-grands en la sphere, (d'autant que leurs diametres passent par le centre I :) Et d'autant que la ligne IO est esleuee perpendiculairement sur le plan du cercle ABCD, les deux demy cercles AOC, NOk, feront par la 18. p. 11. esleuez perpendiculairement sur le plan d'iceluy cercle. Et puis que les trois demy cercles ADC, AOC, NOk sont egaux (ayans les diametres egaux) aussi leurs moitez seront egales, sçauoir les quartes DC, OC, Ok : Partant autant qu'il y aura de costez du poligone en la quarte DC, on en pourra inscrire autât en chacune des quartes OC, Ok. Soient iceux CP, PQ, QR, RO ; & KS, ST, TV, VO : & soient menees les lignes SP, TQ, VR : Item des poincts P & S soiet menees par la 11. p. 11. les perpendiculaires PX, SY : par la 38. p. 11. elles tomberont sur les lignes IC, IK, qui sont les communes sections des quarts de cercles IOC, IOK, esleuez perpendiculairement sur le quart IDC. Soit aussi menee la ligne XY. Maintenant puis que les arcs & les cordes PC & SK sont egales : les angles PXC, SYK droicts, & les angles PCX SKY egaux : car ils insistent sur les peripheres egales AOP, NOS : les deux angles PCX, PXC du triangle PCX, & le costé PC, sont egaux aux deux angles SKY, SXK, & au costé SK du triangle SKY : partant par la 26. p. 1. les autres costez PX, XC seront egaux aux autres costez SY, YK. Parquoy puis que les deux diametres AC, NK sont egaux : & les segmens XC, YK aussi egaux ; les segmens AX, NY seront pareillemēt egaux : partant comme IX est a XC, ainsi IY est a YK : & par la 1. p. 6. IX sera parallele a KC. Item les deux perpendiculaires PX, SY estans egales, sont aussi paralleles par la 6. p. 11. & par la 33. p. 1. SP, YX, seront egales & paralleles : & par la 9. p. 11. SP & KC seront paralleles, & par la 7. p. 11. SK & PC seront au mesme plan d'icelles. Partant tout le quadrilatre CK SP, est en vn mesme plan. Par mesme discours on monstrera aussi que les quadrilateres TP, VQ, & le triangle VOR ont chacun toutes leurs parties en vn mesme plâ. Que si des points O, P, R, S, T, V, on imagine des lignes menees vers le centre I, on se representera vne figure solide, comprise entre OC & OK, composee de quatre pyramides, desquelles le sommet est au centre I, & leurs bases sont les quadrilateres SC, TP, VQ, & le triangle VOR : Et si on construict pareillement sur les costez KL, LM, & MD, comme on a fait sur CK : Et semblablement sur toutes les autres quartes, on aura inscrit vn poliedre en la sphere donnee.

Je dis d'auantage qu'iceluy polyedre ne touche la petite sphere EFGH. Car si du centre I on meine la ligne IZ perpendiculaire sur le plan SC: Je dis qu'elle sera plus grãde que IG demy diametre de la petite sphere.

Car ayant pour l'inscription du poligone tiré du point G la ligne GL perpendiculaire à AC, laquelle est manifestement plus grande que CK costé d'iceluy polygone inscrit, soit tirée IL; & aussi CZ, KZ. D'autant que par la 2. d. 11. les angles IZC, IZK sont droicts, le quarré de IC sera egal aux quarréz de IZ, CZ, & le quarré de IK egal aux quarréz de IZ, ZK: Parquoy les quarréz des demy diametres egaux IC, IK, estans egaux, les quarréz de IZ, CZ, seront egaux aux quarréz de IZ ZK: ostant donc le quarré de IZ commun, resteront egaux les quarréz de CZ, KZ; & par consequent les lignes CZ, KZ sont egales. On demonstrera en la mesme maniere, estant tirées des lignes de Z à P & S, qu'elles seront égales, tant entr'elles qu'à icelles CZ, KZ: Parquoy si du centre Z, & de l'intervale de l'une d'icelles, on décrit vn cercle il circonserira le quadrilatere CKSP: duquel les trois costez CK, CP, KS qui soustiennēt arcs egaux de cercles eg. estās eg. & l'autre costé SP plus petit; (car les triang. ICK, IXY estans semblables, & le costé IC plus grand que le costé IX, aussi le costé CK sera plus grand que le costé XI, qui a esté démontré egal à SP) il est euident que l'angle CZK sera plus grand qu'un droit; & par consequent le plus grand du triangle CZK: & par la 19 p. 1. CK sera plus grand costé que CZ. Parquoy GL estant plus grande que CK, sera aussi plus grande que CZ; & par consequent le quarré de GL plus grand qu'iceluy de CZ. Et d'autant que par la 47. p. 1. les quarréz de IG & GL, sont egaux aux quarréz de IZ, CZ, (estans chacuns egaux au quarré du demy diametre de la grande sphere, d'autant que les triangles IGL, ICZ sont rectangles) & le quarré de GL, est plus grãd que le quarré de CZ; le quarré de IZ, sera plus grand que le quarré de IG; & par consequent la ligne IZ, plus grande que la ligne IG. Le plan CKSP ne touche donc pas la petite sphere EFGH. On prouuera par mesme raison que tous les autres plans du polyedre inscrit en la grãde sphere ne touchent pas la petite sphere EFGH. Donc estans donnees deux spheres inegales alentour d'un mesme centre, nous auons inscrit en la plus grande vn polyedre, qui ne touche pas la superficie de la petite sphere. Ce qu'il falloit faire.

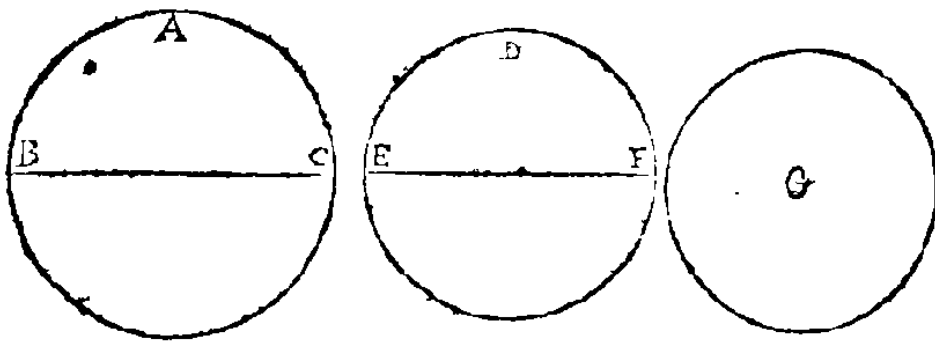
COROLLAIRE.

Des choses cy dessus demonstrees, resulte que si en un autre sphere, on inscrit un polyedre seblable au polyedre cy dessus descri., qu'iceux polyedres seront en raison triplee des diametres des spheres, auxquelles ils seront inscrits. Car iceux polyedres est ins semblables par la deff. des so ides semblables, ils auront en leur convexité utant de plans s mblables l'un comme l'autre: partant ils se pourront diuiser en autant de pyramides semblables l'un comme l'autre, ayant toutes le demy diametre de leur sphere pour un de leurs costez: Partant prises une à une, elles seront en raison triplee des costez homologues, sçavoir est des demy diametres d s spheres, par le corol. de la 8 p 12. Et les toutes aux toutes, pareillement en raison triplee des mesmes demy diametres, par la 12. p. 5. Et par la 15. p. 5. en raison triplee des diametres entiers.

THEO. 16. PROP. XVIII.

Les spheres sont l'une à l'autre, en raison triplee de leurs diametres.

Soient les deux spheres ABC, DEF, desquelles les diametres sont BC, EF. Je dis qu'elles sont l'une à l'autre en raison triplee du diametre BC, au diametre EF: C'est a dire que si



on imagine que comme la raison triplee de BC à EF, ainsi la sphere BAC, a quelque autre sphere, comme G: icelle sera egale a la sphere DEF.

Autrement elle sera plus grande ou plus petite. Soit premièrement la sphere G, plus petite que la sphere DEF, s'il est possible : Elle pourra estre enfermee dans icelle, si on les met toutes deux sur vn mesme centre : Et partant dans la sphere DEF, peut estre inscrit vn polyedre qui ne touchera point la plus petite sphere G par la 17. p. 12. Et dedans l'autre sphere pourra estre pareillement inscrit vn semblable polyedre par la mesme prop. Et par le corol. d'icelle, ce polyedre cy sera a celuy-la, en raison triplee du diametre BC, au diametre EF : mais en telle raison, la sphere BAC est posée estre a la sphere G, & par la 11. p. 5. comme la sphere BAC, a la sphere G, ainsi le polyedre de la sphere BAC, sera au polyedre de la sphere DEF. Or la sphere BAC, est plus grande que son polyedre, n'estant que partie d'icelle : donc par la 14. p. 5. la sphere G est plus grande que le polyedre de la sphere DEF : ce qui est impossible, n'estant que partie d'iceluy. Donc la sphere BAC, ne peut estre en raison triplee des diametres BC & EF, a vne autre sphere plus petite que DEF.

Soit donc la sphere G plus grande que DEF, s'il est possible : Et puis qu'on a posé que comme la sphere ABC a la sphere G, ainsi la raison triplee du diametre BC au diametre EF ; en changeant la sphere G sera a la sphere BAC, en raison triplee du diametre EF, au diametre BC. Item on peut imaginer que comme la sphere G a la sphere BAC, ainsi la sphere DEF, a vne quatriesme proportionelle : laquelle sera plus petite que BAC par la 14. prop. 5. d'autant que G est posée plus grande que DEF : Et partant icelle quatriesme pourra estre inscrite en la sphere BAC : Et si par la 11. p. 5. la sphere DEF, sera à icelle quatriesme inscrite dans BAC, en raison triplee du diametre EF au diametre BC, ce que nous auons demonstté estre impossible. Donc la sphere G, n'a peu estre plus grande, ne plus petite que la sphere DEF, mais egale : & par consequent les spheres sont l'vne à l'autre en raison triplee de leurs diametres.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'une sphere est à une sphere, comme le polyedre descript dans celle-là, est au polyedre semblable descript en ceste

cy: pource que tant les spheris que les polyedres sont en raison triplée des diametres d'icelles spheris, comme il a esté démontré.

Fin de l'Element douzième.



ELEMENT



ELEMENT

TREIZIESME.

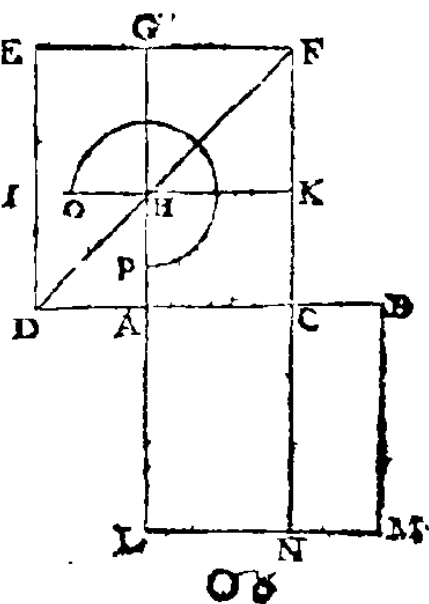
THEOR. I. PROP. I.



Une ligne droite est couppee en la moyenne & extreme raison : le quarré de la moitié de la toute, & du plus grand segment comme d'une seule ligne, est quintuple du quarré de la moitié d'icelle ligne totale.

Soit la ligne AB, couppee en la moyenne & extreme raison au point C, à laquelle on adiouste AD, ligne égale à la moitié de la totale AB: ie dis que le quarré de DC est quintuple du quarré de DA.

Car soit descript sur CD le quarré CE, & tiré le diametre DF; puis soit menée AG parallele à DE, coupant le diametre DF en H, par lequel point soit tirée IK parallele à CD. En apres ayant prolongé GA & accompli le quarré AM, soit produi-



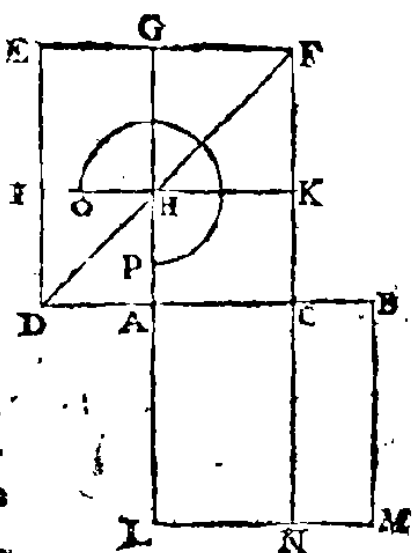
te FC iusques en N. Premièrement par le corol. de la 4. p. 2. les quadrilateres AI, GK seront quarrés des lignes DA, AC. Et puis que AB est couppee en la moyenné & extreme raison en C, comme AB sera à AC, ainsi AC est à CB; & par la 17. p. 6. le rectangle CM, sous AB, CB, est egal au quarré de AC, sçavoir GK. Et puis que AB est posée double de DA; & AL est egale à icelle AB, & AH à AD; aussi AL sera double de AH. Mais comme AL est à AH, ainsi le rectangle AN est au rectangle AK, par la 1. p. 6. Donc AN est double de AK. Et puis que par la 43. p. 1. AK est egal à IG; AN sera egal aux deux IG, AK; adioustant donc ces egaux, aux egaux CM, KG, le quarré AM sera egal au gnomon OP. Parquoy puis que par le scholie de la 4. p. 2. le quarré AM est quadruple du quarré AI, aussi le gnomon OP sera quadruple du mesme quarré AI: & partant si au gnomon OP est adiousté le quarré AI; CE quarré de DC sera quintuple de AI quarré de DA. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si le quarré d'une ligne, est quintuple du quarré d'une partie d'icelle: le double d'icelle partie estant couppee en la moyenné & extreme raison, le plus grand segment sera l'autre partie de la donnee.

Soit la ligne DC diuisee au point A, en sorte que le quarré de la toute sçavoir EC, soit quintuple du quarré de la plus petite partie DA, sçavoir AI: & soit prise AB double d'icelle AD: Je dis que si on diuise AB en la moyenné & extreme raison, que le plus grand segment sera AC, autre partie de la totale DC.

Car ayant acheué la construction comme en la precedente: les quadrilateres AI, GK seront quarrés par le corol de la 4. p. 2. Et puis que AB, c'est à dire AL, est double de DA, ou

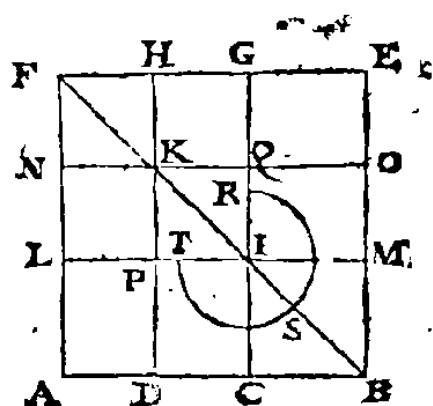


ÀH son egale, le rectangle AN sera double du rectangle AK par la 1.p.6. ou egal aux deux AK, IG qui sont egaux par la 4.p.1. Or par le scholie de la 4.p.2. le quarré AM est quadruple du quarré AI; & le quarré EC est quintuple du mesme par l'hypothese: Il est donc evident que le quarré AM est egal au gnomon OP, duquel les deux rectangles AK, IG, sont egaux au rectangle AN. Il faut donc que le rectang CM, soit egal au quarré GK, fait sur vne ligne egale à AC: & partant par la 17.p.6. comme BM, c'est à dire AB est à AC, ainsi AC à CB. Parquoy par la 3.d.6. la ligne AB sera couppee en la moyenne & extreme raison au point C: & AC autre partie de la totale DC, est le plus grand segment d'icelle. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison; le quarré du plus petit segment & de la moitié du plus grand segment comme d'une seule ligne, est quintuple du quarré de la moitié du plus grand segment.

Soit la ligne AB, couppee en la moyenne & extreme raison au point C, de laquelle le plus grand segment AC est coupé en deux également en D: ie dis que le quarré du petit segment & de la moitié du grand BD, est quintuple au quarré de la moitié du grand segment DC.



Qu'il ne soit ainsi: sur AB soit décrit le quarré AE, & ayât mené son diamètre BF, des points C & D, soient menees CG, DH paralleles à AF; couppans le diamètre BF es points I & K, par lesquels soient menees LM, NO paralleles à AB, lesquelles couppent CG, DH en P & Q: Et par le corol. de la 4.p.2. les quadrilateres LG, PQ, DO sont quarrés des lignes AC, CD, DB: ie dis donc que le quarré DO est quintuple au quarré PQ.

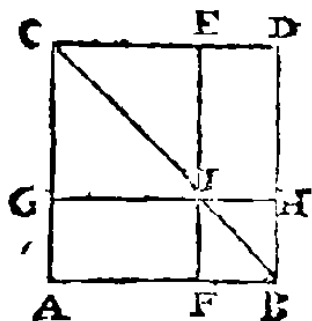
Car puis que comme AB à AC, ainsi AC à CB, par la 17.p.6.

le rectangle des extremes AB & CB (ſçauoir AM) eſt egal au quarré de la moyēne AC, ſçauoir LG, lequel eſtāt par le ſcho- lie de la 4. p. 1. quadruple du quarré PQ. le rectangle AM ſera auſſi quadruple de PQ: mais AP & DI eſtans ſur baſes ega- les, ſont egaux par la 1. p. 6. Et DI eſtant egal à IO, par la 43. p. 1. le gnomon RST ſera egal au rectangle AM quadruple du quarré PQ: ainſi il eſt euident que le quarré DO, eſt quin- tuple du quarré PQ. Ce qu'il falloir demonſtrer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si vne ligne droicte eſt couppee en la mo- yenne & extreme raiſon, le quarré de la route, & le quarré du petit ſegment enſemble, ſont triples du quarré du plus grand ſegment.

Soit la ligne AB, couppee en la mo- yenne & extreme raiſon au point F: ie dis que le quarré de la route AB, & le quarré de FB plus petit ſegment, ſont triples du quarré de AF plus grand ſeg- ment.



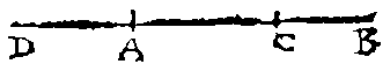
Car ſoit deſcrit ſur AB le quarré AD, auquel eſtant tiré le diametre BC, ſoit menec de F la ligne EF parallele à AC, coupant BC en I, par lequel ſoit menec GH parallele à AB. Par le corol de la 4. p. 1. les parallelogrammes GE, FH ſeront quarrés des lignes AF, FB: Et puis que comme AB eſt à AF, ainſi AF eſt à FB, par la 17. p. 6. le rectangle des extremes AB, FB, ſçauoir AH eſt egal au quarré de la moyēne AF, ſçauoir GE. Veu donc que AH & FD ſont egaux, le gnomon EBG avec le quarré FH, ſera egal au double du quarré GE: & par- tant adiuſtant le quarré GE; AD quarré de AB, avec FH quarré de FB ſera triple de GE quarré de AC. Ce qu'il falloir prouuer.

THEO. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte eſt couppee en la mo-

ienne & extreme raison, & à icelle on adiouste directement le plus grand segment; la toute composee, sera coupee en la moyenne & extreme raison, & la toute simple sera le plus grand segment.

Soit la ligne AB, coupee en la moyenne & extreme raison au point C, & à icelle on adiouste directement AD égale à AC grand segment: ie dis que DB est aussi coupee en la moyenne & extreme raison au point A, & que la toute donnee AB est le plus grand segment.



Car puis que comme AB est à AC, c'est à dire AD, ainsi AC est à CB; en changeant comme DA sera à AB, ainsi BC à AC: & en composant comme DB sera à AB, ainsi AB à AC, c'est à dire à AD. Donc par la 3. d. 6. la ligne DB est coupee en la moyenne & extreme raison au point A, & le plus grand segment est la ligne AB proposee au commencement. Ce qui estoit à prouver.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne rationele est coupee en la moyne & extreme raison: l'un & l'autre segment est ligne irrationele appelée residu.

Soit la ligne rationele AB, coupee en la moyenne & extreme raison au point C: ie dis que AC & BC sont irrationeles & residus.

Car si au plus grand segment AC on adiouste directement DA, égale à la moitié de AB. D'autant que par la 1. p. 13. le quarré de DC est quintuple du quarré de la ligne DA, il est à iceluy comme nombre à nombre. Parquoy par la 6. p. 10. les quarrés de DC, DA seront commensurables, & par consequent les lignes DC, DA, sont aussi commensurables, au moins en puissance. Or AD est rationele, puis qu'elle est moitié d'une rationele AB; Donc aussi DC sera rationele. Et

d'autant que les quarrés de DC, DA ne sont comme nombre quarré à nombre quarré: (comme il appert par le corol. de la 24. p. 8. car ils sont comme 5 à 1, ou 15 à 5) les lignes DC, DA, seront incommens. en longueur, par la 9. p. 10. & partant rationeles commensurables en puissance seulement. Parquoy si de DC rationele on oste DA commensurable en puissance seulement, par la 74 p. 10. le reste AC sera irrationele appelée residu.

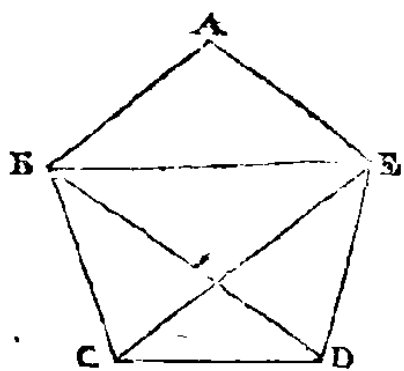
Derechef AB estant couppee en la moyenne & extreme raison en C, le quarré de AC sera egal au rectangle de AB, CB par la 17. p. 6. Or le quarré du residu AC appliqué sur la rationele AB, doit faire l'autre costé CB residu premier, par la 98. p. 10. Donc les segmens AC, CB, sont lignes irrationeles appelées residus. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si en vn pentagone equilateral trois angles pris comme on voudra sont egaux : il sera equiangle.

Soit le pētagone equilateral ABCDE, duquel trois angles pris cōme on voudra sont egaux, sçavoir A, C, D, ie dis qu'iceluy pentagone est equiangle.

Car estant tirees à iceux angles egaux A, C, D, les lignes subtendantes BE, BD, CE, elles seront egales par la 4 p. 1. (estans tous les costez egaux.) Item les deux triāgles DBC & DEC, ayans les trois costez egaux aux trois costez, chacun au sien, les deux angles DBC & DEC seront egaux par la 8. p. 1. Item BAE estant isoscele, les deux angles sur la base BE, seront egaux par la 5 p. 1. Pareillement les deux triāgles CBE & DEB, ayās les trois costez egaux aux trois costez, chacun au siē ils auront l'angle CEB egal a l'angle DBE, par la 8. p. 1. Partant le total angle B est egal au total angle E. Mais d'autant que CBE est triangle isoscele, & que BAE a les trois costez egaux aux trois costez du triangle DEC chacun au sien,

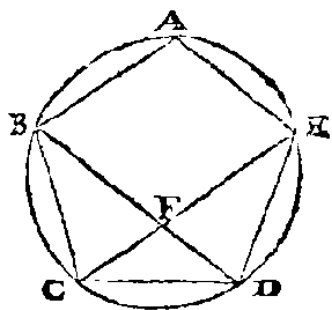


l'angle ABE sera egal a l'angle DCE par la 8. p. 1. Parquoy le total C sera egal a l'angle total B, & par la 1. commune sentence ils seront tous egaux entr'eux. Partant le pentagone sera equiangle. Ce qui estoit a demonst rer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si deux lignes droictes subtendent deux angles d'un pentagone equiangle & equilateral, lesquels soient d'ordre: icelles subtendantes se couperont l'une l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs plus grands segmens seront egaux à vn costé du pentagone.

Au Pentagone ABCDE equiangle & equilateral soient deux lignes droictes BD, CE, subtendantes les angles C, D, qui sont d'ordre, lesquelles s'entrecouppent en F. Je dis qu'elles seront ainsi couppees en la moyenne & extreme raison, & que leurs plus grands segmens BF, EF seront egaux a quelconque costé du pentagone.



Car ayant descrit par la 14. p. 4. vn cercle alentour du pentagone, les arcs AB, BC, CD, DE, & EA seront egaux par la 28. p. 3. Et d'autant que les triangles CBD, CED, ont deux costez egaux, & l'angle compris par iceux aussi egal par l'hypotese; les bases BD, CE, & les angles CDB, DCE seront pareillement egaux par la 4. p. 1. Et partant veu qu'au triangle CFD, les deux angles DCF, CDF, sont egaux, & par la 32. p. 1. l'angle externe BFC est egal à iceux: iceluy BFC sera double de DCE. Mais par la 33. p. 6. l'angle BCE est aussi double du mesme DCE, pource que l'arc BAE est double de l'arc DE; Donc les angles BFC, BCF sont egaux: & partant par la 6. p. 1. BF est egale au costé du pentagone BC. Et d'autant que par la 26. p. 3. les angles DBC, ECD, insiftans sur arcs egaux, les deux angles DBC, CDB du triangle BCD sont egaux aux deux angles DCF, FDC du triangle CFD: & partant les deux triangles BCD, CFD seront equiangles par la 32. p. 1. Parquoy

par la 4. p. 6. comme BD sera a DC, c'est à dire a BF, ainsi CD ou BF sera a FD: & partant la subtendante BD est couppee en F, en la moyenne & extreme raison, & le plus grand segment BF est egal a BC costé du pentagone. Par mesme raison on demonstrera CE estre couppee en la moyenne & extreme raison en F, & que le grand segment EF est egal à DE costé du pentagone. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Donnot a traduit ceste proposition ainsi.

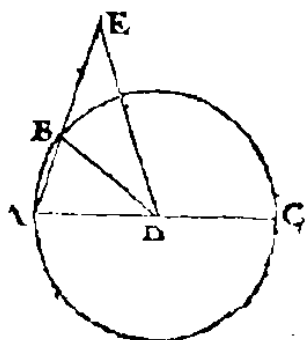
Si deux lignes droictes sont tirees d'angle en angle en vn pentagone equiangle, & equilateral, elles se couperont l'une l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs plus grâds segmens seront egaux aux costez du pentagone.

Ce qu'estant ainsi, la proposition ne seroit universellement vraie: Car il est euident que si on tire deux lignes droictes de l'angle A, aux angles C & D, ou de l'angle B, aux angles D & E, &c. Iceles lignes droictes ne se couperont point.

THEOR. 9. PROP. IX.

La ligne droicte composee du costé de l'hexagone, & du costé du decagone, tous deux inscrits en vn mesme cercle; est couppee en la moyenne & extreme raison, de laquelle le plus grand segment est le costé de l'hexagone.

Dans le cercle ABC soit inscrit le costé du decagone AB, auquel soit adiousté directement le costé de l'hexagone BE qui peut estre inscrit dans le mesme cercle, c'est à dire que BE soit egale au demy diametre du cercle. (car le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle auquel il est inscrit par le corol. de la 15. p. 4.) Je dis que AE est couppee en



la moyenne & extreme raison, & que BE costé de l'hexagone est le plus grand segment.

Car ayant mené de A par le centre D le diametre AC, & tiré les lignes DB, DE: l'arc AB estant la 10. partie de la peripherie du cercle, sera la 5. de l'arc AC: & partant l'arc BC sera quadruple d'iceluy AB: Parquoy par la 33. p. 6. aussi l'angle BDC sera quadruple de l'angle ADB: & par la 32. p. 1. BDC estant extérieur, il vaudra les deux DAB, DBA: lesquels estés égaux par la 5. p. 1. parce que le triangle ABD est Isoscele. l'un ou l'autre sera double de ADB: mais l'un d'iceux DBA estant extérieur, est égal aux deux opposez intérieurement DEB & BDE (lesquels sont égaux, estant le triangle DBE Isoscele, pource que DB demy diametre, & BE sont égaux par la construction) ainsi l'angle DBA sera double de l'angle E: lequel par ce moyen sera égal à l'angle ADB: ainsi les deux triang. AED, ADB seront equiangles, ayans l'angle A commun, & l'angle E égal à l'angle ADB, par la 32. p. 1. le tiers sera égal au tiers: & par la 4. p. 6. comme AE est à AD ou BE son égal, ainsi AD, ou BE est à AB: partant AE est couppee en la moyenne & extreme raison en B: & BE costé de l'hexagone est le plus grand segment. Ce qu'il falloit prouver,

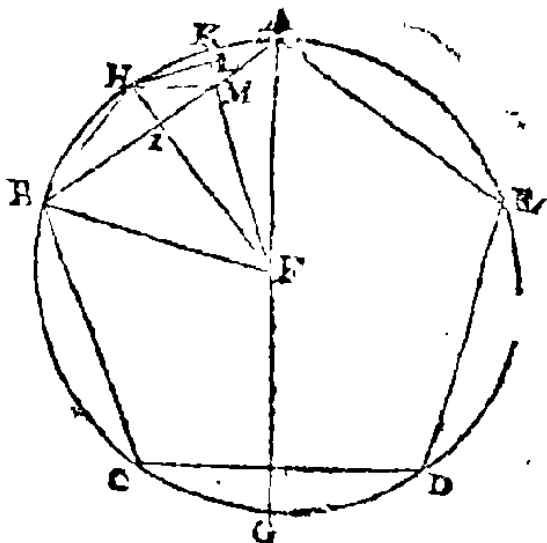
COROLLAIRE.

De cecy est evident que le costé de l'hexagone estant couppe en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment est costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car si de BE costé de l'hexagone on coupe une partie égale à AB: comme la toute AE sera à la toute BE ainsi la retranchee BE sera à la retranchee de BE, c'est à dire à AB: & partant par la 19. p. 5. le reste sera au reste, comme la toute à la toute, ou la retranchee à la retranchee. Parquoy BE sera semblablement couppee que AE en la moyenne & extreme raison par la 3. d. 6. dont le plus grand segment sera AB costé du decagone.

THEOR. 10. PROP. X.

Le quarré du costé du pentagone equilateral inscrit en vn cercle, est égal aux deux quarrés des costez du decagone, & de l'hexagone, inscrits au mesme cercle.

Au cercle $ABCDE$, duquel le centre est F , soit inscrit vn pentagone equilateral, vn costé duquel est AB . Je dis que le quarré d'iceluy costé AB est egal aux deux quarrés des costez de l'hexagone, du decagone inscrit au mesme cercle.



Car ayant tiré le diametre AFG , & ioinct FB , soit couppe l'arc AB en deux également par la ligne FH , laquelle coupe aussi la ligne AB en I ; & soient tirees les lignes droictes AH , BH ; & AH sera costé du decagone, & FB costé de l'hexagone: En apres soit couppe l'arc AH en deux également en K , par la ligne FK , laquelle coupe aussi la ligne AH en L , & la ligne AB au point M , auquel soit menec la ligne HM . Veu donc que les arcs AH , BH sont egaux, aussi seront egaux les angles AFH , BFH , par la 27. p. 3. Parquoy les costez AF , FB estans egaux, & FI commun aux deux triangles AFI , BFI , la base AI sera egale a la base BI , par la 4. p. 1. & les angles AFI , BFI aussi eg. & partant droicts. Par mesme raison seront egales les lig. AL , HL , & les ang ALF , HLF droicts. Or si des demis cercles eg $ABCG$, $AEDG$, on oste arcs egaux ABC , AED , resteront eg. les arcs CG , CD , & partant l'arc CG sera moitié de l'arc CGD . Mais aussi l'arc AH est moitié de l'arc AHB : donc puis que les arcs AB , CD sont egaux, les arcs AH , CG moitié d'iceux, seront aussi egaux: & partant l'arc AH estât double de l'arc HK , aussi le sera CG . Aussi puis que les arcs AB , BC sont egaux, & l'arc AB est double de l'arc BH , l'arc BC sera pareillement double du mesme arc BH . Parquoy les arcs CG , BC sont equemultiplices, sçauoir est doubles, des arcs HK , BH , & partant par la 1. p. 5. tout l'arc BG sera double de l'arc BK : & par consequent l'angle BFG aussi double de l'angle BFK , par la 33. p. 6. Mais par la 20. p. 3. le mesme angle BFG au centre, est double de l'angle FAB : donc les angles BFM , FAB seront egaux, & partant l'angle ABF estant commun aux deux triangles ABF , FBM , & le tiers au tiers, par la 31. p. 1. iceux triangles seront equiangles; & par la 4. p. 6. comme AB sera à BF , ainsi BF à BM : & partant par la 17. p. 6. le re-

L'angle de AB, BM sera egal au quarré de BF. Derechef puis que les costez AL, LM du triangle ALM sont egaux aux costez HL, LM du triangle HLM, & les angles contenus d'iceux aussi egaux, sçavoir droicts, par la 4. p. 1. les bases AM, HM, & les angles LAM, LHM seront egaux. Mais par la 3. p. 1. l'angle LAM est egal a l'angle HBA, pource que les costez HA, HB sont egaux : Donc aussi l'angle LHM sera egal au mesme HBA : & partant par la 32. proposition 1. les triangles ABH, AHM seront equiangles, puis qu'ils ont les angles ABH, AHM egaux, & l'angle HAM commun. Parquoy par la 4. p. 6. comme AB sera a AH, ainsi AH a AM : & par la 17. p. 6. le rectangle de AB, AM sera egal au quarré de AH. Mais il a esté demonstté que le rectangle de AB, BM, est egal au quarré de BF : donc les rectangles de AB, AM, & de AB, BM ensemble, sont egaux aux deux quarrés de AH, BF. Mais par la 2. p. 2. iceux rectangles sont egaux au quarré de AB : donc le quarré de AB costé du pentagone est egal aux deux quarrés des lignes BF, AH, costez de l'hexagone, & du decagone. Ce qui estoit à prouver.

C O R O L L A I R E. 1.

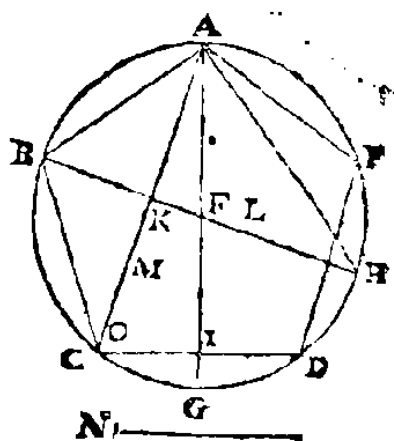
Par cecy est manifeste qu'une ligne droicte tiree du centre, & laquelle diuise en deux egalement un arc, diuise aussi la ligne subten-dente d'iceluy arc en deux egalement, & a angles droicts.

Est aussi euident que le diametre du cercle tiré de l'angle du penta-gone, diuise en deux egalement l'arc que le costé oppose à iceluy an-gle subtend, comme aussi iceluy costé oppose, & a angles droicts. Car il a este demostté que le diametre AG tiré du point A, diuise en deux egalement l'arc CD, lequel le costé oppose CD subtend: Parquoy par ce que dessus, il couppera aussi en deux egalement & a angles droicts iceluy costé CD. La meisme demonstration sera en tout polygone equi-lateral inscrit au cercle, le nombre des costez estant impair.

T H E O R. II. P R O P. XI.

Si dans vn cercle ayant le diametre rationel, on inscrit vn pentagone equilateral ; le costé du pentagone est irrationel : appellé ligne mineure.

Soit le pentagone equilateral AB CDE, inscrit dans le cercle ABCDE, duquel le diametre est rationel : ie dis que AB costé du pentagone est irrational, appelle ligne mineure.



Car soient menez par le centre F les diametres AG, BH, desquels AG coupera le costé CD en deux également en I, & à angles droicts par le corol. de la preced. soient aussi tirees les lignes AC, AH, desquelles AC, sera couppee par le diametre BH en deux également en K par le corol. de la preced. Partant est manifeste que les deux triangles ACI & AKF sont equiangles : car l'angle du point A est commun a tous les deux, & le droict AKF egal au droict AIC ; le tiers sera egal au tiers par la 12. p. 1. Et par la 4. p. 6. comme IC à CA, ainsi KF à FA. Item du demy diametre FH (lequel est rationel & egal à FA) soit retranchée FL, egale au quart de FA, laquelle FL sera rationele estant le quart d'une ligne rationele, & par la 16. p. 10. BL composee des deux BF, FL, & commensurable à chacune d'icelles, sera aussi rationele. Item de AC soit retranché CM quart d'icelle ligne : Et par la 15. p. 5. CI sera à CM quart de CA, comme KF à FL quart de FA : Que si on double les deux CI & CM par la 15. p. 5. CD sera à CK (car elle est la moitié de CA & double de CM) comme KF à FL : & en composant comme les deux CD & CK ensemble à CK, ainsi KL à FL : Et par la 22. p. 6. le quarré de la composee de CD & CK sera au quarré de CK, comme le quarré de KL au quarré de FL. Mais d'autant que la ligne AC estant couppee en la moyenne & extreme raison (sçavoir est estant tiree la ligne droicte BD) par la 8. p. 13. son plus grand segment est egal au costé du pentagone, sçavoir à iceluy CD ; par la 1. p. 13. le quarré de la composee de CD plus grand segment, & CK moitié de la toute CA, sera quintuple au quarré de CK moitié de la toute : partant aussi le quarré de KL, sera quintuple du quarré de FL. Mais la ligne BL est aussi quintuple de FL, estant FL quart de IB : donc comme BL à FL, ainsi le quarré de KL, au quarré de FL ; c'est à dire en raison doublee de KL à FL : dont s'ensuit que KL sera moyenne proportionnelle entre BL & FL : Partant par la mesme raison doublee de la 10. deff. 5. & 10. proposition du 6. le quarré de BL sera au quarré KL, comme BL à FL : c'est à dire que le quarré de BL sera quintuple du quarré de KL : Partant iceux

quarrez seront entr'eux comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré, (comme il appert par le corol. de la 24. p. 8) Parquoy par la 9. p. 10. les lignes BL & KL, seront commensurables en puissance seulement : desquelles BL estant rationele : BL & KL seront rationeles commensurables en puissance seulemēt, & par la 74. p. 10. BK sera residu. Maintenant que la ligne BL puisse plus que la ligne KL, du quarré de la ligne N. Donc puis que BL est rationele commens. en longitude à la rationele proposée BF (car elles sont entr'elles comme 5. à 4.) Et que BL peut plus que KL, du quarré de la ligne N qui luy est incommens. en longitude ; (car la puissance de la ligne BL estant quintuple de la puissance de la ligne KL, le quarré de N, qui reste apres avoir osté le quarré de KL de celui de BL ; sera au quarré de BL, comme, 4. à 5. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré : & partant par la 9. proposition 10. BL qui peut plus que KL du quarré de la ligne N, est incommens. en longitude à icelle N.) par la 4. des tierces def. du 10. BK sera residu quatriesme.

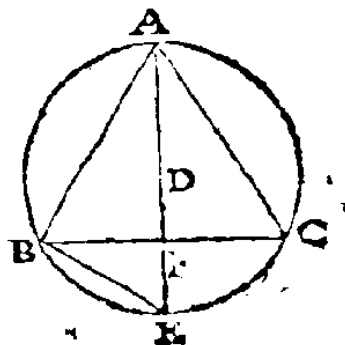
Finalemēt pource que par le corol. de la 8. p. 6. AB est moyenne proportionele entre BH, BK (car le triangle BAH, à l'angle droict, duquel est tirée AK perpend. à la base BH) le quarré de AB sera egal au rectangle de BH, BK. Parquoy puis que la ligne droicte AB peut la superficie contenue de la rationele BH, & du residu 4. BK : par la 95 p. 10. icelle AB sera ligne mineure. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XII.

Le quarré du costé du triangle equilateral inscrit dans vn cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.

Soit le triangle equilateral ABC inscrit en vn cercle ABC, duquel le centre est D. Je dis que le quarré de AB costé d'iceluy triangle, est triple du quarré du semidiametre.

Car estant tiré le diametre AE, lequel couppera par le corol. de la 10. p. de ce liure, l'arc BC en deux également en E : & aussi la ligne droicte BC en deux éga-



lement & à angles droicts : veu que l'arc BEC est le tiers de toute la circonference, BE sera la sixiesme partie : partant estant tirée la ligne droite BE, elle sera le costé de l'hexagone & egal au demy diametre DE, par le corol. de la 15 p 4. Or le quarré du diametre AE sera quadruple du quarré de BE egale au demy diametre, par le scholie de la 4 p 2. & par la 47. p. 1. Il est aussi egal aux deux de BA & BE: il est donc manifeste qu'il sera triple du quarré de BE, ou ED son egal. Ce qu'il falloit prouver.

C O R O L L A I R E.

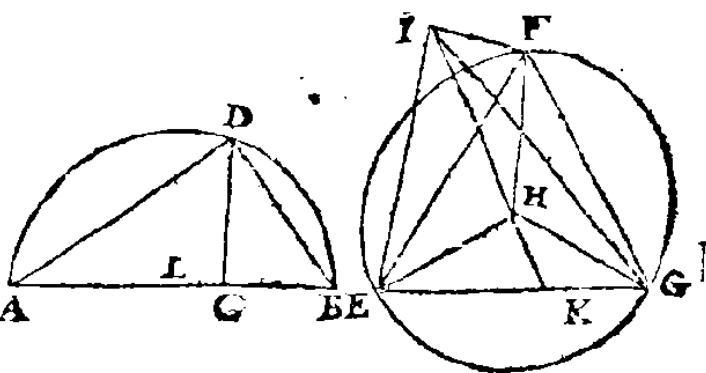
Il s'ensuit de ce que dessus que le quarré du diametre d'un cercle est au quarré du costé du triangle equilateral inscrit en iceluy cercle, en raison sesquiterce, c'est à dire comme 4. à 3. Car puis qu'il a esté démontré que le quarré du costé AB est triple du quarré du demy diametre AD; posant le quarré de AB 3. le quarré de AD sera 1; Et le quarré de AE quadruple d'iceluy sera 4. Parquoy le quarré de AE sera au quarré de AB comme 4. à 3.

Et pource que le corol. de la 8 p. 6. comme AE est à AP, ainsi AB à AF perpendiculaire tombant d'un angle sur un costé; pareillement le quarré de AB sera au quarré de AF, comme 4. à 3. On peut aussi facilement colliger que le demi-diametre DE est coupé en deux également en F par le costé du triangle BC. Car puis que le quarré de AB est triple du quarré de BE; si on pose iceluy quarré de AB estre 12. le quarré de BE sera 4, Et le quarré de BF 3; Et par consequent le quarré de EF sera 1. par la 47. p. 1. Partant le quarré de BE, c'est à dire de DE son egal, sera quadruple du quarré de FE. Parquoy par le scholie de la 4. p. 2. la ligne DE sera double de FE; Et par consequent DE est coupée en deux également en F.

P R O B. I. P R O P. XIII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vne pyramide equilaterale : & monstrier que le quarré du diametre d'icelle sphere, est en raison sesquialtere au quarré du costé d'icelle pyramide.

Soit la ligne AB, diamètre de la sphere donnée, diuisee en C, de sorte que AC soit double de BC: Et apres auoir descript sur AB le demy cercle ADB, le-



uee la moyenne proportionele CD, & mené les lignes DA & DB: Soit descript le cercle EFG, duquel le demy diamètre HE soit egal à CD: & apres auoir inscrit en iceluy le triangle equilateral EFG, du centre H soit leuee la perpendiculaire HI par la 12. p. 11. laquelle soit egalee à AC: puis soient menees les lignes IE, IF, IG. Je dis premierement que la pyramide EFGI est equilaterale: puis qu'elle peut estre inscrite en la sphere, de laquelle le diamètre est AB: & que le quarré du diamètre AB, est en raison sesquialtere au quarré du costé EG.

Que la pyramide soit equilaterale: il appert en premier lieu que le triangle EFG, est equilateral: Item que les trois lignes IE, IF, IG, sont aussi egales entr'elles: (d'autant que par la 47. p. 1. le quarré d'une chacune d'icelle est egal au quarré de la perpendiculaire IH, & au quarré de l'une des trois lignes HE, HF, HG, lesquelles sont egales.) Et d'autant que les costez AC, DC du triangle ADC sont egaux aux costez HI, HE du triangle IHE: & les angles qu'ils comprennent egaux; la base AD sera egale a la base EI par la 4. p. 1. En la mesme maniere sera demonstre AD estre egale à FI, GI. Et veu que le quarré de AC, est double du quarré de CD (car ils sont l'un à l'autre comme AC a CB par le corol. de la 20. p. 6. estans les 3. lignes AC, CD, CB continuellement proportionelles) le quarré de AD, qui est egal à tous les deux, sera triple du quarré de CD, ou de son egale HE: Mais par la 12. p. 13. le quarré de EF est aussi triple du quarré de HE; Partant EF, & AD sont egales: & par la comm. sent. EF & EI seront egales. Parquoy puis que AD est aussi egale à FI, GI, les quatre triang. EFG, EFI, FGI, GEI seront equilateraux, & egaux entr'eux. Et par consequent la pyramide EFGI, est equilaterale.

Qu'elle puisse estre inscrite à la sphere, ayant pour diamètre AB, il appert: Soit continuee la ligne perpend. IH par dessous la base de la pyramide iusques en K: Et soit faicte IK

egale à AB, & soit imaginé estre posé le demy cercle ADB $\frac{2}{3}$ l'entour de la pyramide : sçavoir le poinct A, au poinct I ; le poinct B au poinct K : Et puis que AC & BC sont egales à IH & HK ; & HG egale à DC, faisant angle droict avec IH, aussi bien que leurs egales AC & CD , il est evident que le poinct D, du demy cercle tombera sur le poinct G. Partant le diametre demeurant immobile, si le demy cercle faiçt vne revolution, il touchera les deux autres angles de la pyramide E & F ; (estans les lignes HE, HF, HG egales) ainsi la pyramide est inscrite en la sphere donnee .

Finalemēt que le quarré du diametre AB, soit sesquialtere au quarré du costé AD, qui est egal à chacun costé de la pyramide, il appert : Car puis que AB est triple de BC : & AC double de la mesme BC ; AB sera en raison sesquialtere à AC. Mais par le corol. de la 8. p. 6. les trois lignes AB, AD, AC sont proportionnelles : Et partant par le cor. de la 20. p. 6. comme AB sera à AC, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AD. Donc aussi le quarré de AB sera au quarré de AD en raison sesquialtere.

COROLLAIRE.

De ces choses on peut facilement colliger, que la puissance du diametre de la sphere est quadruple sesquialtere de la puissance du semidia. du cercle décrit al'entour de la base de la pyramide. Car puis que AB diam. de la sphere, a esté démontré sesquialtere en puissance à EF costé de la pyramide, le quarré de EF sera de 6. parties, telles que le quarré du diametre AB en contiendra 9, & le quarré de la ligne HE 2, pource que le quarré de EF est triple du quarré de HE, par la 12. p. 13. Donc de 9 telles parties que le quarré de AB contiendra ; le quarré de HE en contiendra 2 : Et partant le diametre AB est quadruple sesquialtere en puissance au semidiametre HE, puis que la raison des quarréz est comme 9 à 2.

Aussi la perpendiculaire tirée du centre de la sphere au plan de la base de la pyramide est la sixiesme partie du diametre de la sphere, & la tierce partie du semidia. Car L soit le cētre du demy cercle ADB : L sera pareillemēt le centre de la sphere. Je dis que la ligne LC (qui est la perp. tirée du centre de la sphere à la base EFG : puis que AC est egale à HL, & partant le poinct C, le mesme que H, ainsi aussi L est le mesme que le centre de la sphere) est la 6. partie du dia. de la sphere, sçavoir est de AB, & la tierce partie du semidia. AL. Car puis que AC est double de CB, de telles 4 parties qu'est AC, 2 telles sera CB : & partant 6 telles sera la toute AB, & 3 le semidia. AL.

Parquoy

Parquoy si AC est 4, & AL 3; LC sera 1: & partant LC sera la sixiesme partie de AB , & la tierce de AL .

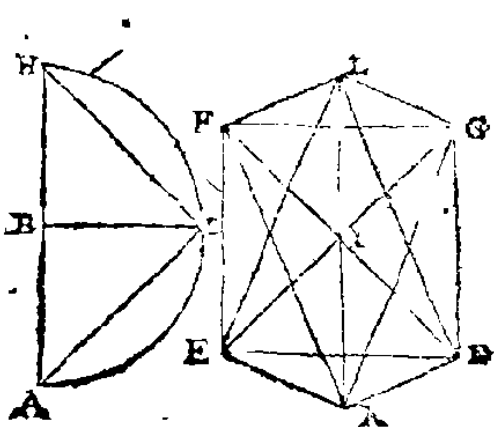
Semblablement la hauteur de la pyramide HI sera deux tierces parties du diametre de la sphere. Car HI est la mesme que AC , laquelle par la construction est deux tierces parties d'iceluy diametre.

Aussi de 9 telles parties que sera le quarré d'iceluy diam. le quarré de la hauteur de la pyramide en sera 4. Car la raison de 9 à 4, est la raison doublee de 3 à 2.

PROB. 2. PROP. XIII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn octaedre: Et monstrier que le quarré du diametre de la sphere, est double du quarré du costé de l'octaedre.

Soit le diametre de la sphere donnee AH , couppe en deux également au point B : & apres auoir construit le demy cercle $A CH$; leué la perpendiculaire BC , & mené les lignes CA, CH , lesquelles seront egales entr'elles par la 4. p. 1. sur la ligne DE egale à l'une d'icelles AC, CH , soit construit le quarré $DEFG$,



dans lequel soient menees les deux diagonales DF, GE se couppans au point I , duquel point par la 12. p. 11. soit esleuee la ligne IL , perpendiculairement sur le quarré GE ; laquelle soit aussi continuee perpendiculairement par dessous iceluy plan, & soit icelle IK , laquelle soit faicte egale à AB ; & IL aussi à AB : Item des points L & K , soient menees aux angles du quarré les lignes $LD, LE, LF, LG, KD, KE, KF, KG$.

Je dis maintenant que la figure solide $DLEK$, est enuironnée de huit triangles equilateraux; & que c'est vn octaedre. Car le quarré $DEFG$, ayant les costez egaux à AC ; Il est euidens que les diagonales EG, FD seront egales à AH : partant leurs moities à AB . Mais les deux lignes IL & IK sont aussi egales à AB : & par consequent elles seront egales à vne chacune d'icelles demy diagonales; & par la 4. p. 1. les huit lignes

LD, LE, LF, LG, KD, KE, KF, KG, seront toutes égales entr'elles : & aux quatre du quarré DEFG par la mesme 4. p. 1. (estans les demy diagonales égales aux perpendic. IL & IK, en constituant des angles droicts au poinct I milieu du quarré) Et puis que tous les costez sont égaux, tous les triang. seront équilatéraux, sçavoir les quatre au dessus du quarré DEFG, & ayans leurs bases sur les quatre costez d'iceluy quarré, & se terminans au poinct L: & quatre autres au dessous du mesme quarré, ayans aussi leurs bases sur les costez du quarré, & se terminans au poinct K: ainsi le solide DLFk compris de huit triangles équilatéraux, sera octaedre.

Je dis d'avantage qu'iceluy octaedre est inscriptible en la sphere donnee. Car il est evident que la ligne EK, est égale au diametre AH, & que l'angle LDK est droict: (d'autant que les deux lignes LI, ID estans égales; les angles sur la base LD seront égaux, & demy droicts, pource que l'angle LID est droict: Et par mesme raison l'angle IDK est demy droict; & partant le total LDK sera droict.) Partant le demy cercle ayât pour diametre LK, & faisant vne reuolution à l'entour de l'octaedre, il touchera le poinct D: Et par mesme discours il touchera aussi les trois autres E, F, G, desquels les angles sont égaux à l'angle D.

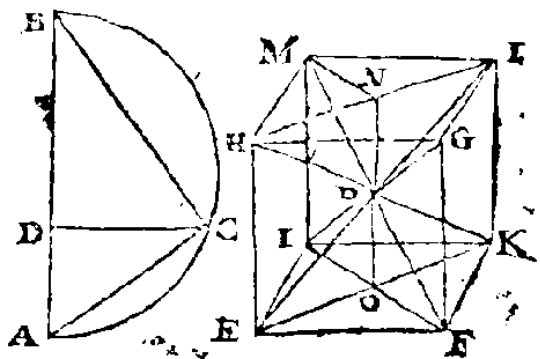
Finablement il est evident par la 47. p. 1. que le quarré du diametre de la sphere AH ou LK, est égal aux deux quarrés de LD, DK, lesquels sont égaux; & partant iceluy quarré de LK diametre de la sphere, sera double du quarré de l'un d'iceux costez de l'octaedre. Ce qu'il falloit demonstrier.

PROB. 3. PROP. XV.

Dans la sphere donnee, inscrire vn cube: & monstrier que le quarré du diametre de la sphere, est triple au quarré du costé d'iceluy cube.

Soit le diametre de la sphere donnee AB, lequel soit coupé au poinct D, en sorte que BD soit double de AD, c'est à dire que AB soit triple d'icelle AD: Puis, apres auoir construit le demy cercle ABC, leué la perpendiculaire DC, & mené les deux lignes AC, & BC: Sur EF égale a BC, soit fait le quarré EFGH, sur lequel soient esleuees par la 12. p. 11, les quatre li-

ignes perpendiculaires EI, EK
GL, HM, qu'on fera egales à
EF: puis soient menees les qua-
tre lignes IK, KL, LM, MI.
D'autant que les lignes EI,
FK sont perpend. au plan EF
GH: elles seront paralleles
par la 6. p. II. Mais elles sont
aussi egales: donc par la 33. p.



1. EF, IK seront pareillement

egales & paralleles: & partant EFKI est vn parallelogramme
ayant les 4 costez egaux. Mais il a aussi par la 34. p. I. les 4 an-
gles droicts, puis que les angles EIK, FKI sont opposez aux
droicts KFE, IEF: donc EFKI est quarré. Par mesme raison
FKLG, GLMH, HMIE seront quarrés: & partant IKLM
sera aussi quarré, puis que par la 24. p. II. il est egal & sembla-
ble au quarré oppose EFGH: Car EL est vn solide paralleli-
pipede: pource que par la 15. p. II. les plans opposez d'iceluy
sont paralleles, estans tirez par lignes paralleles qui s'entre-
touchent. Parquoy EL sera vn cube: lequel ie dis estre in-
scriptible en la sphere donnee. Car ayant mené les diametres
EK, FI, HL, GM, des plans opposez EFKI, HGLM, soient
imaginez estre tirez par iceux diametres, les plans EKLH,
FIMG, lesquels par la 28. p. II. coupperont le cube en deux e-
galement, & passeront par le centre d'iceluy, sçauoir par le
point P, auquel par le corol. de la 9. p. II. tous les diametres
dudit cube s'entre coupperont aussi en deux egalemēt: &
partant la commune section d'iceux plans, sçauoir NO, pas-
sera par le mesme centre P. Mais il est euident qu'iceux plans
EKLH, FIMG sont rectangles egaux: & que par consequent
leurs diametres & semidiametres seront aussi egaux. Parquoy
estant descrit vn cercle du centre P, sur le diametre EL: il est
euident qu'iceluy demy cercle faisant vne reuolutiō alentour
du cube, descrira vne sphere passant par tous les angles du cu-
be: laquelle ie dis estre egale à celle du diametre AB. Car puis
que par la 47. p. I. le quarré de EK est egal aux quarrés des li-
gnes egales EF, FK, & partant double du quarré de EF, ou de
KL: les quarrés de EK, KL seront triples du quarré de KL.
Mais par la 47. p. I. le quarré de EL est eg. aux quarrés de EK,
KL: donc aussi le quarré de EL sera triple du quarré de KL,
c'est à dire du quarré de AC: duquel est aussi triple le quarré
de AB. (car par le corol. de la 8. p. 6. AB, AC, AD sont prop. &
partant par le corol. de la 20. p. 6. comme AB est à AD, ainsi le

quarre de AB sera au quarre de AC: Veu donc que AB est triple de AD, aussi le quarre de AB sera triple du quarre de AC.) Parquoy les quarrez de EL, AB sont egaux: & par consequent les lignes EL, AB, diametres des spheres: comme aussi les spheres d'iceux diametres, sont pareillement egales.

Or il a este demonstre que le quarre du diametre EL est triple du quarre du coste du cube KL. Parquoy nous auons faict tout ce qui estoit propose.

C O R O L L A I R E.

Il est manifeste que le quarré du diametre de la sphere, ou du cube, est egal aux quarrez du costé du Tetraedre & du cube pris ensemble. Car par la 47. p. 1. le quarré de AB diametre de la sphere, est egal aux deux quarrez de AC, BC costez du cube & du tetraedre.

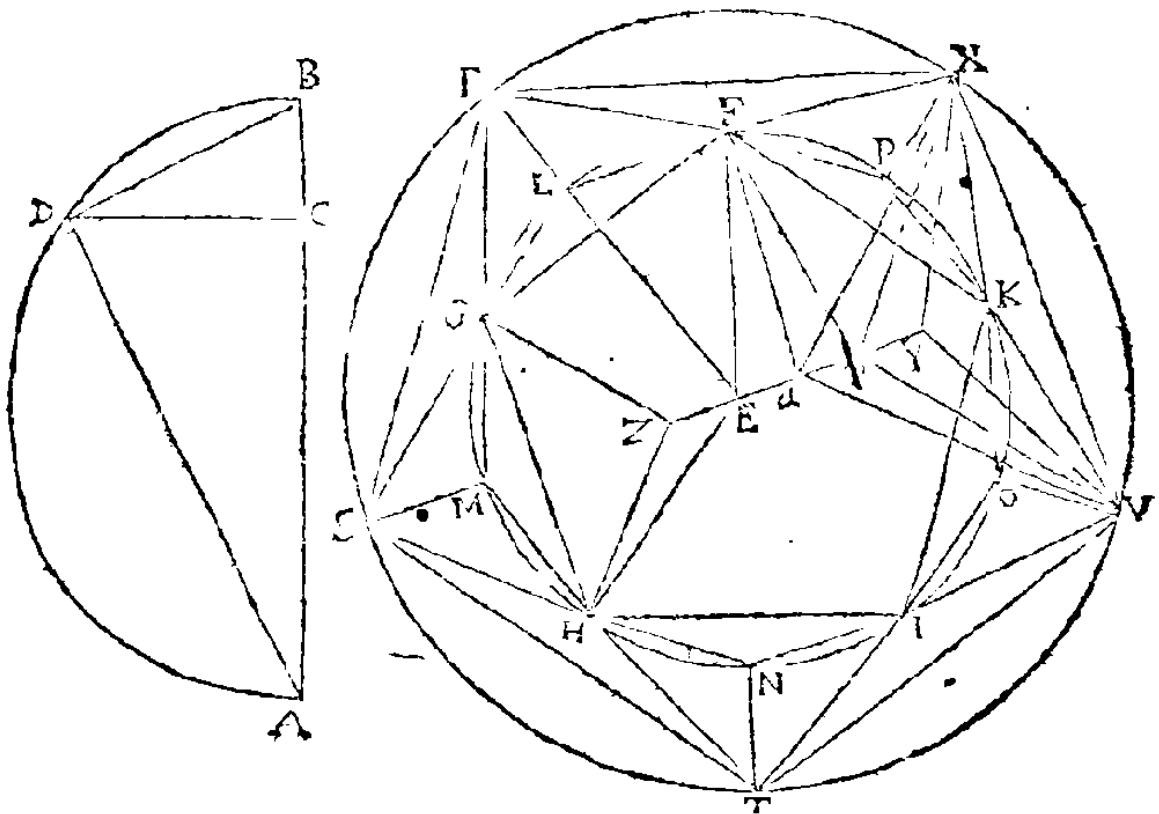
Est aussi euident que tous les diametres du cube sont egaux entre eux, & qu'ils se diuisent en deux également au centre de la sphere: & pareillement que les lignes droictes qui conioignent les centres des quarrez opposez, se couppent en deux également au mesme centre de la sphere.

P R O B. 4. P R O P. XVI.

Dans la sphere donnee, inscrire vn icosaëdre: Et monstrier que son costé est ligne irrationele, appelée ligne mineure.

Soit le diametre de la sphere donnee AB, lequel soit diuisé au point C, en sorte que AC soit quadruple de BC, & apres auoir construit le demy cercle, leué la perpendiculaire CD, & mené les lignes AD, DB; du centre E, & interval EF, egale à BD; soit faict vn cercle, dans lequel soit inscrit le pentagone equilateral FGHK, & puis dans le mesme cercle, soit aussi inscrit vn decagone equilateral, (ce qui se fera en couppant en deux également l'arc d'un chacun costé du pentagone.) En apres par la 12. p. 11. du centre E, & des points L, M, N, O, P, soient leuees les lignes EQ, LR, MS, NT, OV, PX perpendiculaires au plan du cercle FGHK, lesquelles soient posees egales à EF ou BD, & par la 6. p. 11. elles seront paralleles entre elles: & partant les lignes droictes conioignant icelles, sca-

voir $EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX$, (toutes lesquelles toutesfois nous n'auons tirees pour euiter confusion) seront egales & paralleles entr'elles, par la 33. p. 1. D'oc puis que



$EL, EM, &c.$ sont egales au semidiametre EF ; aussi QR, QS, QT, QV, QX seront egales tant entr'elles qu'à iceluy demy diametre EF , ou à la ligne BD . Et pource que par la 15. p. 11. le plan mené par les lignes QR, QS est parallel au plan $FGHIK$ tiré par les lignes EL, EM : Et que pour la mesme raison le plā tiré par les lig. QS, QT , est parallel au mesme plan $FGHIK$, tiré par les lignes EM, EN ; mais que le plan tire par les lignes QR, QS conuient avec le plan mené par les lignes QS, QT , en la ligne droicte QS : il est euident par les choses demonstrees à la 16. p. 11. que ces deux plans en font vn seul. On demonstrea en la mesme maniere que le plan tiré par QT, QV , avec celuy-cy en faict vn seul, & aussi celuy tiré par QV, QX , & par QX, QR : tellement donc que les 5 lignes QR, QS, QT, QV, QX sont en vn mesme plan; & partant si de Q . & de l'interualc QR , on décrit vn cercle en iceluy plan, il passera par les autres points S, T, V, X , & sera egal au cercle $FGHIK$. Soient tirees les lignes droictes RS, ST, TV, VX, XR . Et d'autant que LR, PX sōt egales & paralleles; si on imagine estre tiree vne lig. droicte LP ; aussi par la 33. p. 1. LP, RX seront egales & paralleles: & partant par la 28. p. 3. de cercles egaux, elles prennent arcs egaux: Mais LP prend la 5. partie du cercle $FGHIK$, scauoir

deux 5. parties LF, FP. Donc aussi RX prend la 5. partie du cercle RSTVX. Par mesme maniere nous concluons que chacune des autres lignes droictes RS, ST, TV, VX, prend la 5. partie d'iceluy cercle. Parquoy RSTVX est vn pentagone equilateral, ayant tous les costez egaux a ceux du pentagone FGHIK. Soient tirees des angles du pentagone RSTVX, aux angles du pentagone FGHIK, les lignes droictes RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Donc puis que la perpendiculaire LR est egale au demy diametre EF, c'est à dire au costé de l'exagone du cercle FGHIK; & LF est costé du decagone par la 10. p. 13. le quarre du costé du pentagone du mesme cercle, est egal aux quarrez de LR, LF. Mais le quarre de LR, par la 47. p. 1 est egal à iceux quarrez de LR, LF. Donc le quarre de LR est egal au quarre du costé du Pentagone; & par consequent la ligne RF sera egale a LP costé du pentagone, ou à FG, c'est à dire à RX. Par la mesme raison, les autres lignes R, G, SG, &c seront egales aux autres costez de chaque pentagone: & partant les 10. triangles RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, seront equilateraux, & egaux entr'eux. Maintenant soit prolongé de part & d'autre la perpendiculaire EQ, tellement que QX, EZ soient egales au costé du decagone, & soient tirees les lignes VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. D'autant que QX est semy diametre du cercle RSTVX, c'est à dire costé de l'exagone, & QY est costé du decagone de mesme cercle; par la 10. p. 13. le quarré de XV costé du pentagone, sera egal aux quarrez de QX, QY. Mais par la 47 prop. 1. à iceux quarrez de QX, QY, est aussi egal le quarré de XY (car l'angle XQY est droict, estant EQ perpendiculaire à l'un & l'autre plan des cercles parallels.) Donc le quarré de XY est egal au quarré de XV; & partant la ligne XY egale à ligne XV. Par mesme raison XV sera demonstree egale à VY; & partant le triangle VYX est equilateral. Par mesme maniere, (estans tirees les lignes RY, SY, TY, lesquelles ne sont tirees pour euiter confusion) les quatre triangles RYX, RYS, SYT, TYV, seront demonstrez equilateraux, & egaux au triangle VYX, c'est à dire aux dix premiers triangles, puis que tous leurs costez sont egaux aux costez du pentagone. Par semblable argument sera prouué que le triangle GZH est equilateral; comme aussi les 4. autres triangles HZI, IZK, KZF, FZG, (desquels toutesfois nous n'auons aussi tiré les lignes, afin d'euiter la confusion) tous lesquels seront egaux aux 15. precedans. Veu donc que tous ces 20. triangles sont equilateraux, & egaux, & qu'ils se conioignent les vns aux

autres par lignes droictes; sera constitué d'iceux vn Icosaedre: lequelie dis estre inscriptible en la sphere donnee, de laquelle le diametre est AB. Car ayant couppe en deux egale-ment EQ en a , & tire les lignes aF , aX , aV ; les costez aQ , QV du triangle aQV seront egaux, aux costez aQ , QX du triangle aQX , (car QV , QX sont semy diametres du cercle RSTVX) & les angles aQV , aQX sont droicts: & partant par la 4. p. 1. les bases aV , aX seront egales. Par la mesme raison, si on tire des lignes de a & Q, & R, S, T, les lignes aR , aS , aT seront demonstrees egales entr'elles, & à icelle aV , aX . Et puis que les costez aQ , QX du triangle aQX ; sont egaux costez aE , EF du triangle aEF , (pource que QX , EF sont demy diametres de cercles egaux, & EQ est coupee en deux egale-ment en a ,) & les angles aQX , aEF sont aussi egaux, sca-voir droicts; par la 4. p. 1. les bases aX , aF seront aussi egales. Par mesme raison, si de a & E on tire des lignes droictes à G, H, I, K, on demonstrera les lignes aG , aH , aI , aK , estre egales à icelle aX : & partant les dix lignes droictes tirees de a aux dix angles F, G, H, I, K, R, S, T, V, X, sont egales. Et d'autant que QE est semidiametre, c'est à dire costé de l'exagone du cercle FGHIK; & EZ costé du decagone du mesme cercle; par le 9. p. 13. QZ sera diuisee en la moyenne & extreme rai-son en E, & le plus grand segment sera QE. Parquoy par la 3. p. 13. le quarré de AZ sera quintuple du quarré de Ea. Mais le quarré de aF est aussi quintuple du mesme quarré de Ea: Car le quarré de EF estant quadruple du quarré de Ea par le scholie de la 4. p. 2. pource que EF est double de Ea; les quarrés de EF, Ea, sont le quintuple du quarré de Ea. Mais par la 47. p. 1. le quarré de aF est egal à iceux quarrés de EF, Ea: donc aussi le quarré d'icelle aF sera quintuple d'iceluy quarré de Ea.) Donc les quarrés de aZ , aF , sont egaux; & par consé-quent les lignes aZ , aF seront egales. Et puis que aE , aQ , & EZ, QY sont egales, aussi aZ , aY seront egales; & toutes les lignes droictes tirees de a , à tous les angles de l'icosaedre pa- reillement egales. Parquoy la sphere descrite alentour du diametre ZY, passera par tous les angles de l'icosaedre. Car d'autant que par la 15. p. 5. comme aZ est à aE , ainsi YZ à QE, & partant par la 22. p. 6. comme le quarré de aZ est au quarré de aE , ainsi le quarré de YZ au quarré de QE, & que le quarré de aZ a este demōstre quintuple du quarré de aE : pareillemēt le quarré YZ sera quintuple du quarré de QE, c'est à dire du quarré de BD son egale. Mais aussi le quarré de AB est qu'intu-ple du mesme quarré de BD: (car AB, BD, BC estans propor.

par le corol. de la 8. p. 6. le quarré de AB sera au quarré de BD, comme AB à BC par le corol. de la 20. p. 6. & partant AB estant quintuple de BC, aussi le quarré de AB sera quintuple du quarré de BD.) Donc les quarréz de YZ, AB sont egaux; & partant les lignes YZ, AB, & les spheres descriptes alentour d'icelles seront egales.

Je dis finalement que le coste de l'icosaedre est ligne irrationelle, appelée ligne mineure: ce qui est euident par la 11. p. 11. estant par la 6. p. 10. le demy diametre EF, ou son egale BD, ligne rationelle commensurable en puissance à la poise rationelle AB, de laquelle nous auons monstre que le quarré estoit quintuple du quarré de BD. Nous auons donc faict ce qui estoit propose.

COROLLAIRE.

De cecy resuite que le quarré du diametre de la sphere est quintuple du quarré du semidiametre du cercle comprenant 5 costez de l'icosaedre

Et aussi qu'iceluy diametre de la sphere est composé du costé de l'hexagone, & de deux costez du decagone, décrit en un mesme cercle.

Et encore que le costé de l'icosaedre est egal au costé du pentagone, par le moyen duquel est construit iceluy icosaedre.

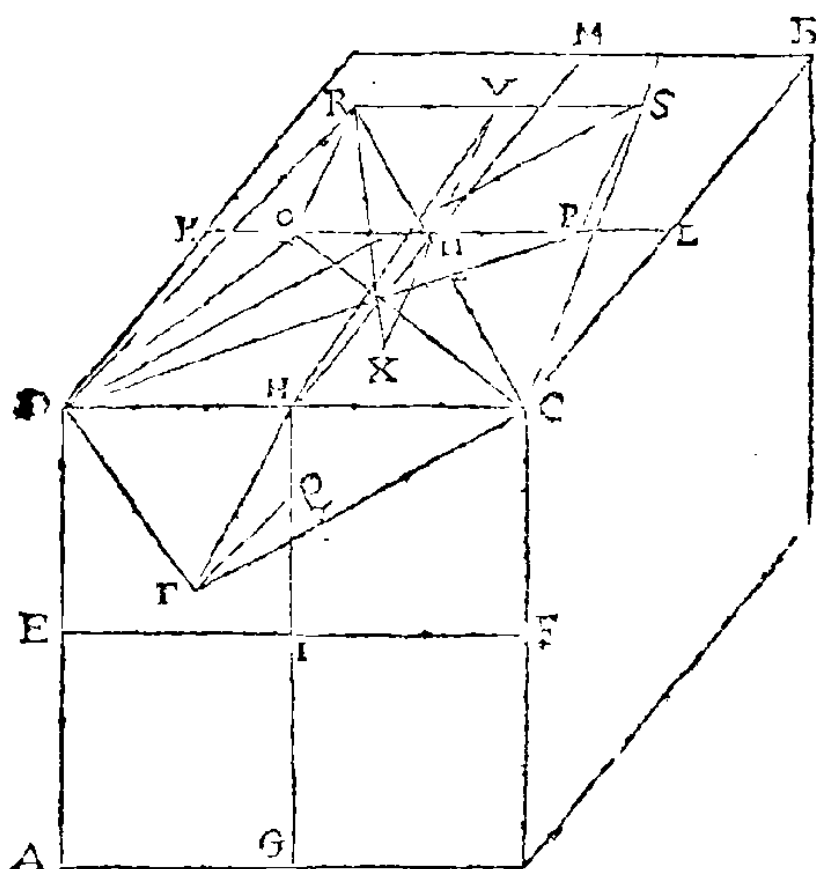
PROBL. 5. PROP. XVII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn dodecaedre: Et monstre que son costé est ligne irrationelle appelée residu.

Soit le cube AB, & d'iceluy les deux plans extérieurs AC, & DB, se rencontrant à droits angles à la ligne de commune section DC: & d'iceux plans tous les costez soient coupés en deux egalement, sçauoir AC, par les deux lignes EF, GH se coupés au point I; & DB, par les lig. KL & HM se coupés au point N. Item soient les trois lignes KN, NL, HI coupées en la moyenne & extreme raison aux points O, P, Q, desquelles les plus grands segmens soient ON, NP, IQ: Et par la 11. p. 11. soient leues les deux lignes OR, PS perpend.

au plan DB : mais QT au plan AC, lesquelles soient posées égales aux trois segments ON, NP, IQ. Puis soient menées les lignes DR, RS, DT, CS, CT. Je dis que DR SCT est pentagone equilateral constitué sur vn mesme plan, & equianglé.

Car soient menées les lignes DO, DP, DS: Et d'autant que KN est couppee en la moyenne & extreme raison au point O, & que ON, est le plus segment, par la 4.p.13. les deux quar-



rez de KN, KO seront triples du carré de ON: Et KN étant égale à KD; & ON à OR, les deux quarrés de KD, & KO, ou par la 47.p.1. le seul de DO, est triple du carré de OR: & le carré de DR, qui est égal à tous les deux, par la 47.p.1. sera quadruple du seul de RO: Et d'autant que RS est double de RO, son carré, par le scholie de la 4.p.2. sera aussi quadruple du carré de RO, aussi bien que le carré de DR: Partant les lignes DR, RS seront égales. Par mesme discours on monstera l'égalité des trois autres costez SC, CT, TD tant entre eux qu'aux deux DR, RS: donc le pentagone est equilateral.

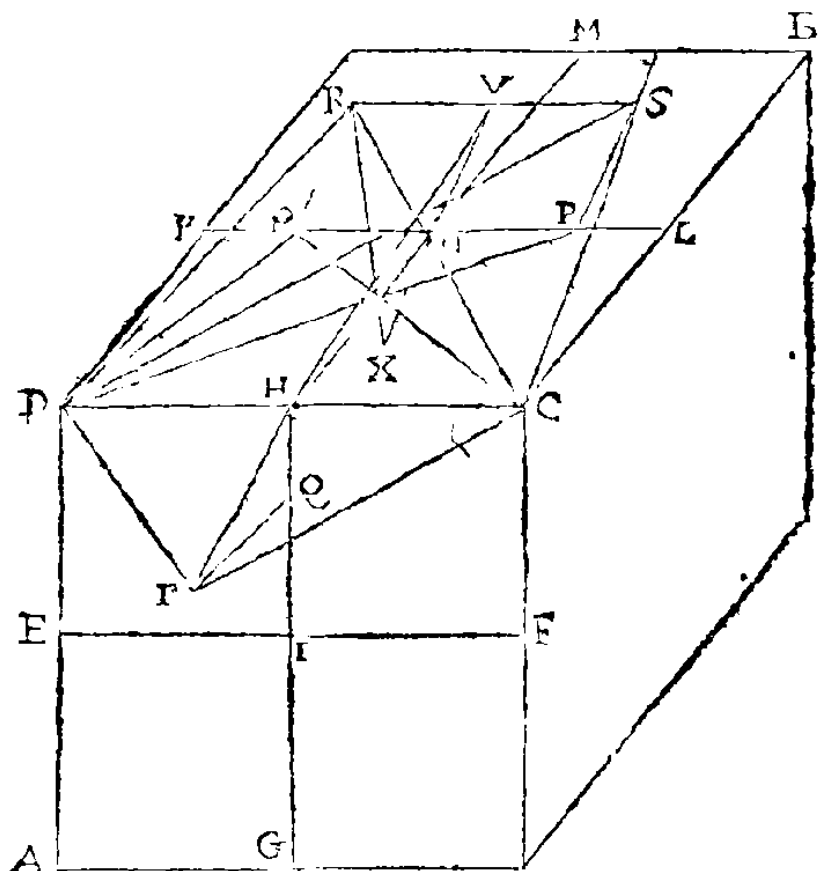
Je dis maintenant qu'il est en vn mesme plan. Soit menée NV, parallele à OR: Item les deux TH & HV. Je dis qu'elles deux lignes se rencontrent directement, & font vñ seu-

le ligne droicte THV. Car pour autant que HI est couppee en la moyenne & extreme raison au poinct Q; IH sera à IQ, comme IQ à QH. Mais HN est egale à HI, & NV à IQ, & QT à QI: donc comme HN est à NV, ainsi QT à QH. Parquoy puis que les triangles NVH, QTH, ont deux costez proportionaux à deux costez, & sont composez à vn angle H, tellement que les costez homologues sont parallels par la 6. p. 11. sçauoir HN & TQ, qui sont perpendic. au plan du quarré AC: & NV, QH qui sont à angles droicts sur le plan DB: par la 12. p. 6. THV sera vne seule ligne droicte. Or par la 1. p. 11. Toute ligne droicte est en vn mesme plan: par consequent le pentagone DRSC est en vn mesme plan.

Je dis encores qu'il est equiangle: Car puis que KN est couppee en moyenne & extreme raison, estant ON plus grand segment, par la 5. p. 13. en adioustant KN à NP, egale au plus grand segment ON; la toute KP sera couppee en la moyenne & extreme raison au poinct N, & sera KN le plus grand segment: & partant par la 4. p. 13. les quarréz de KP & NP (ou PS son egale) sont triples du quarré de KN, (ou de son egale KD.) & en adioustant le quarré de KD avec les deux de KP & PS, iceux trois quarréz seront quadruples du seul de KD (ou par la 47. p. 1. au lieu des deux de KP & KD, le seul de DP avec celui de PS, ou encore le seul de DS, sera quadruple du quarré de KD) duquel le quarré de DC est aussi quadruple par le scholie de la 4. p. 2. estant DC double de KD: partant les 2. lignes DC & DS seront egales: Mais aussi estans tous les costez du pentagone egaux, les deux triangles DCT, DSR auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien: Et par la 8. p. 1. l'angle au poinct R sera egal à l'angle au poinct T. Et semblablement nous monstrerons que l'angle RSC est egal à l'angle DTC: ainsi trois angles du pētagone seront egaux, & par la 7. p. 13. il sera equiangle. Il est aussi equilateral, & sur DC l'un des costez du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que si on veut construire de mesme façon vn pentagone, sur chacundes vnze costez restans, on trouuera vne figure solide enuironnee de douze pentagones equiangles & equilateraux: Et par les def. sera dodecaedre.

Je dis dauantage qu'il est inscriptible en la sphere donnee. Car si on prolonge VN, qui est perpend. sur le centre du quarré DB: il appert par la 19. p. 11. qu'elle coupera la diagonale du cube en deux egaleme: qu'elle la coupe donc au poinct X, auquel poinct sera le centre de la sphere enuironnant le cube par le corol. de la 15. p. 13. & NX est egale au demy co-

ste du cube: Soit menee la ligne RX . Or nous auons tantost monstre par la 4. p. 13. que les quarez de kP & NP sont triples du quare de kN : Mais VX est egale à kP ; & RV à NP : (car



NX est egale à KN : & VN à NP). Partant les deux quarez de RV, XV , ou le seul de RX , par la 47. p. 1. est triple du quare de KN : Mais par la 15. p. 13. le quare du diametre de la sphere circonscrite au cube, est triple du quare du coste d'iceluy cube: Et par la 15. p. 5. le quare du demy diametre est triple au quare du demy coste. Or KN est le demy coste du cube: Partant RX sera le demy diametre de la sphere circonscrite au cube AB , duquel le centre est X . Par mesme discours nous monstrerons que du point X toutes les lignes menees vers les autres angles du dodecaedre, sont egales au demy diametre de la sphere circonscrite au cube. Partant vne mesme sphere pourra estre circonscrite au cube & au dodecaedre.

Je dis finalement que le coste du dodecaedre est ligne irrationnelle appelee residu. Car d'autant que les deux demy costez du cube KN, NL sont chacun coupeez en la moyenne & extreme raison: par la 15. p. 5. toute la ligne KL sera aux deux plus grands segmens ensemble, sçauoir à QP , comme iceux plus grands segmens sont aux plus petits ensemble, sçauoir à la composee de KO & PL . Parquoy si KL coste du

cube est couppee en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera OP. Mais la toute KL ainsi couppee est rationele: (car son quarre est commensurable au quarre du diametre de la sphere, lequel est pose rationel: puis qu'il est le tiers d'iceluy par la 15.p.13.) Donc par la 6.p.13. le plus grand segment OP, c'est à dire RS costé du dodecaedre qui luy est egal, est ligne irrationele, appelée residu. Nous auons donc faict tout ce qui estoit proposé.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que le costé d'un cube estant couppe en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera le costé du dodecaedre inscrit en une mesme sphere.

Aussi que le costé du cube est egal à la ligne droite subtendant un angle du pentagone du dodecaedre. Et d'autant qu'icelle mesme ligne estant couppee en la moyenne & extreme raison, par la 8.p.13. le plus grand segment est costé d'un pentagone: & partant par la 5.p.13. la ligne droite composée d'icelle, c'est à dire du costé du cube, & du plus grand segment, c'est à dire du costé du dodecaedre, est semblablement diuisee, & le moindre segment est costé du dodecaedre, mais le plus grand, est costé du cube: Il s'ensuit que si une ligne droite est couppee en la moyenne & extreme raison, & que le moindre segment soit costé du dodecaedre: le plus grand segment sera costé du cube inscrit en la mesme sphere.

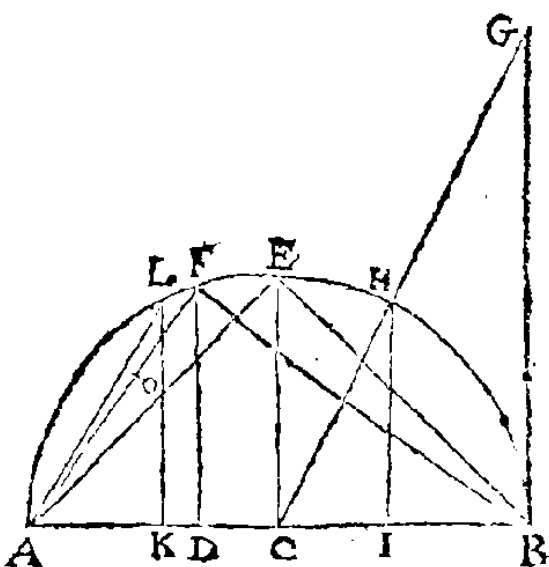
P R R O B. 6. P R O P. XVIII.

Le diametre d'une sphere estant donné; trouuer les costez des cinq figures inscrites en icelle; & les comparer entr'eux.

Soit le diametre d'une sphere donnee AB: & il faut premierement trouuer les costez des cinq figures inscriptibles en icelle sphere.

Soit diuise le diametre AB en deux également au point C; mais au point D, tellement que AD soit la tierce partie de AB, puis ayant décrit sur AB un demy cercle, soient esleues les perpendiculaires CE, DE, & tiré les lignes AE, AF; BE, BF.

D'autant que par le corol. de la 8. p. 6. BF est moyenne proportionnelle entre AB, BD; par le corol. de la 20. p. 6. comme AB sera à BD, ainsi le quarré de AB au quarré de BF. Mais AB est à BD en raison sesquialtere: (car par construction AB contient 3 telles parties que AD₁, & BD₂) Donc aussi le quarré de AB est au quarré de BD, en raison sesquialtere: & partant puis que par la 13. prop. 13. le



quarre du diametre de la sphere est en raison sesquialtere au quarre du costé de la pyramide equilaterale ou tetraedre: BF sera le costé du tetraedre inscrit en la sphere du diametre AB.

Derechef puis que par le mesme corol. de la 8 p. 6. AE est moyenne prop. entre AB, AC: & partant comme AB est a AC ainsi le quarre de AB au quarre de AE par le corol. de la 20. p. 6. & AB est double de AC: aussi le quarre de AB sera double du quarre de AE. Parquoy puis que par la 14. p. 13. le quarre du diametre de la sphere est double du costé de l'octaedre, AE sera costé de l'octaedre inscrit en la sphere du diametre AB.

Et pour autant que par les mesmes corol. de la 8. & p. 20 p. 6. le quarre de AB est au quarre de AF, cōme AB a AD; & que par la construction AB est triple de AD, le quarre de AB sera triple du quarre de AF. Parquoy veu que par la 15. p. 13. le quarre du diametre de la sphere est triple du quarre du costé du cube; AF sera le costé du cube inscrit en la sphere du diametre AB.

Et d'autant que AF est costé du cube, soit iceluy couppe en la moyenne & extreme raison au poinct O, duquel le plus grand segment soit AO: iceluy (par le corol. de la 17. p. 13.) sera le costé du dodecaedre inscrit en la mesme sphere que le cube, qui est celle-la mesme qui a pour diametre AB.

Quant au costé de l'icosaedre, soit leue la perpendiculaire BG egale à AB: & apres avoir mene la ligne CG coupnant la circonferēce du demy cercle en H, d'iceluy poinct soit menee HI perpend. à AB par la 12. p. 1. Or BG estant egale à AB, elle sera double de BC: & partant par la 4 p. 6. HI sera doub. de IC: (car les triangles sont equiangles, pource qu'ayans l'angle C commun, & ceux des poincts B & I droicts; le tiers

G sera egal au tiers H par la 32. p.1.) & par le scholie de la 47. p.2. le quarre de HL sera quadruple du quarre de IC : & partant le quarre de HC (ou de son egale AC) qui par la 47. p.1. est egal a tous les deux, sera quintuple du quarre de CI. Mais d'autant que AD est le tiers du diametre AB, & AC sa moitie: DC sera le demy tiers : & partat AC sera triple de DC ; & son quarre vaudra neuf fois le quarre de DC, par la 20. p.6. Or iceluy quarre de AC n'est que quintuple du quarre de CI: d'oe la ligne CI sera plus grande que DC. Soit prise CK egale à CI, & apres auoir leue la perpendiculaire KL, soit menee la ligne AL. Puis donc que le quarre de AC est quintuple du quarre de CI, par la 15. p.5. le quarre de AB, (la double de AC) sera quintuple du quarre de IK (la double de IC.) Or par le corol. de la 16. p.13. le quarre du diametre de la sphere circonscrite à l'icosaedre est quintuple au carré du demy dia. du cercle circoscriuāt 5 costez de l'icosaedre: dont CK sera semidia. c'est à dire coste de l'hexag. d'iceli y ce: cl. lequel coste de l'hexagone avec deux fois le coste du decagone inscrit dās le même cercle, est egal au diametre de la sphere AB, par le co. de la mesme 16. p.13. Il faut donc que AK, & IB lignes egales, soient les deux costez du decagone inscrit dans le même cercle, dans lequel KI est le coste de l'hexagone. Mais KI & KL sont egales: (car KL est egale a IH, pour estre en même distance du centre C, laquelle estant double de CI sera egale a KI.) Partant KL sera costé de l'hexagone, & AK du decagone : & par la 47. p.1. & 10. p.13. AL sera le coste du pentagone inscrit au même cercle. Donc il sera aussi le coste de l'icosaedre, par la 16. p.13.

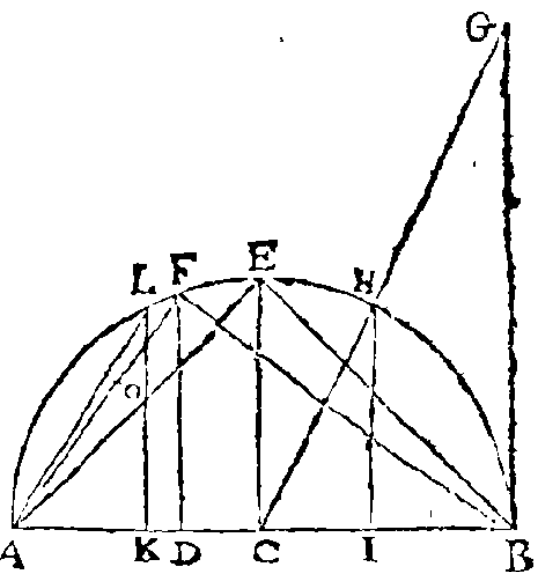
Nous auons donc trouue les costez des 5. figures regulieres inscriptibles en vne même sphere.

Maintenant pour le regard de la comparaison d'iceux costez trouuez. D'autant qu'il a esté demonstre que le quarre du diametre de la sphere est sesquialtere au quarre du coste de la pyramide : mais double de celui du coste de l'octaedre, & triple du quarre du coste du cube; il est euidēt que le quarre du diametre de la sphere estant 6. celui du coste du tetraedre sera 4: celui du coste de l'octaedre 3. & celui du coste du cube 2. Partant le quarre du coste de la pyramide est sesquiterce au quarre de l'octaedre : mais double de celui du coste du cube. Item le quarre du coste de l'octaedre est sesquialtere a celui du coste du cube. Parquoy les quarrez des costez d'icelles trois figures, & celui du diametre de la sphere, sont entr'eux comme nombre à nombre: & partant par la 6 p.10.

Iceluy diametre de la sphere, & costez d'icelles figures sont lignes commensurables, & rationeles, pource que le diametre est pose rationel. Mais les susdits quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarre à nombre quarre, ainsi qu'il apert par le corol. de la 14. p. 8. Donc icelles lignes (sçavoir le diametre de la sphere, le coste de la pyramide, le costé de l'octaedre, & celuy du cube,) sont incommens. en longueur par la 9. p. 10. & partant elles sont rationeles commensu. en puissance seulement.

Et quand aux costez de l'icosaedre, & dodecaedre : pource qu'ils sont lignes irrationeles, il est evident que ils sont incōmens. tant entr'eux, qu'au diametre de la sphere, & aux costez des autres figures.

Or lesquels d'iceux costez sont les plus grands, nous le rendrons manifeste ainsi : d'autant qu'il a este demonstre cy dessus que le quarre de AB est triple du quarre de AF : mais quintuple du quarre de KL, c'est à dire de AL son egal; trois quarrez de AF seront egaux à 5 quarrez de KL. Et puis que AF est coupee en la moyenne & extreme raison en O, & AO est le plus grand segment, il est evident par la 1. p. 6. que le rectangle compris de AF, AO sera plus grand que le rectangle de AF, OF : & partant iceux deux rectangles ensemble, seront plus grands que le double du rectangle de AF, OF : Mais à iceux deux rectangles ensemble, est egal le quarre de AF, par la 2. p. 2. & au double du rectangle de AF, OF, est egal le double du quarre de AO : (car par la 17. p. 6 le simple rectangle de AF, OF est egal au simple quarre de AO.) Donc aussi le quarre de AF sera plus grand que deux fois le quarre de AO : & par consequent trois quarrez de AF, ou cinq quarrez de KL leurs egaux) seront aussi plus grands que 6. quarrez de AO. Parquoy vn seul quarre de KL sera plus grand



qu'un seul quarre de AO : & par consequent la ligne KL sera plus grande que AO : Partant AL qui est plus grande qu'icelle KL, sera beaucoup plus grande que la mesme AO coste du dodecaedre. Nous auons donc faict ce qui estoit propose.

S C H O L I E.

Or outre les cinq figures solides cy dessus declarees, on n'en peut trouver d'autres comprises de superficies planes, equiangles, & equilaterales. Car de deux triangles, ou deux autres superficies planes, on ne comprendra aucun solide, ne pouvant constituer un angle solide. De trois triangles equilateraux, est constitue l'angle de la pyramide: de quatre, l'angle de l'octaedre: de cinq, l'angle de l'icosaedre: de six triangles equilateraux on ne constituera aucun angle solide: car iceux, ont egaux à quatre angles droicts, & tous les angles plans d'un angle solide, doivent estre plus petits que quatre angles droicts par la 21. p. 11. Partant on ne pourra constituer un angle solide de plus de six angles plans. De trois angles droicts est compose l'angle solide du cube: de quatre angl. s droicts on ne fera aucun angle solide: car ce seroit toujours contruvenir à la 21. v. 11. l'angle solide du dodecaedre est compris de trois pentagones equiangl. De quatre pentagones, il sera impossible: estans iceux plus grâds que quatre droicts. Et de pas un autre polygone equiangle, on ne pourra constituer aucun angle solide, d'autant qu'il s'ensuyuroit absurdité. Partant il est evident qu'outre les cinq figures regulieres cy dessus declarees, on n'en trouvera point d'autres.

Fin de l'Element treiziesme.

ELEMENT



ELEMENT

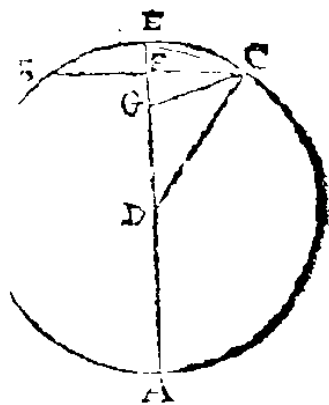
QVATORZIESME.

THEOR. I. PROP. I.



Une ligne perpendiculaire menée du centre vers le costé du pentagone inscrit au cercle, est la moitié des deux costez de l'hexagone, & decagone ensemble, inscrits au mesme cercle.

Soit dans le cercle ABC, le costé du pentagone BC, & du centre D soit mené la ligne DF, tombant perpendiculairement sur iceluy costé BC; & icelle estant prolongee de part & d'autre iusques en A & E, elle couppeta l'arc BEC en deux egalement, comme la ligne BC par la 3. p. 3. ainsi estant tiree la ligne EC, elle fera le costé du decagone, & DE costé de l'hexagone. Je dis que la perpendiculaire DF est la moitié des deux costez ensemble EC & DE.



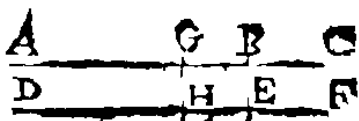
Qu'il ne soit ainsi. Apres auoir pris FG egale à FE, soit menée la ligne GC. Puis que l'arc BEC est la cinquième partie de la circonférence du cercle, EC la moitié sera la cinquième

me partie de la demy circonference ACE: Et partant l'arc AC sera quadruple de CE, & par la 33. p. 6. l'angle CDA sera quadruple de CDE au centre, & double de DEC à la circonference par la 20. p. 3. lequel par ce moyen sera double à CDE: mais par la 4. p. 1. la base CE est egale à la base CG: & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base EG seront egaux: & FGC sera double de GDC: & iceluy FGC estant par la 32. p. 1. egal à tous les deux opposez interieurement, les deux angles sur la base DC seront egaux entr'eux: & par la 6. p. 1. GC & GD seront egales; & EC à chacune d'icelles. Parquoy les deux GF & FE estans egales, la seule FD, sera egale aux deux FE, EC ensemble: & partant les trois ensemble DF, FE, EC, c'est à dire les deux ensemble DE, EC, seront egales au double de la seule DF: & par consequent icelle DF perpendiculairement tiree du centre sur le costé du pentagone, sera moitié des deux ensemble DE, EC, costez de l'hexagone, & du decagone. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 2. PROP. II.

S'il y a deux lignes droictes coupees en la moyenne & extreme raison; elles seront semblablement coupees.

Soient les deux lignes AB & DE coupees en la moyenne & extreme raison aux points G & H: leurs plus grands segmens soient AG & DH. Je dis qu'icelles lignes sont semblablement coupees: c'est à dire que comme AB est à DE, ainsi AG à DH, & GB à HE: Item comme AG à GB, ainsi DH à HE, &c.



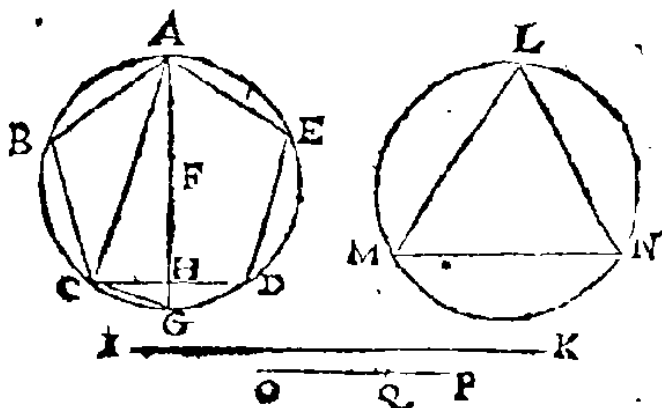
Car par la 17. p. 6. comme le rectangle de AB, & GB, sera egal au quarré de AG, ainsi le rectangle de DE & HE sera egal au quarré de DH: & partant quatre fois le rectangle de AB & GB sera au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE au quarré de DH: & en composant, (apres avoir adiousté directement BC egale à BG; & EF egale à EH) quatre fois le rectangle de AB & GB avec le quarré de AG (ou par la 8. p. 1. le seul quarré de AC) est au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE, avec le quarré de

DH, (ou le seul quarré de DF) est au quarré de DH. Parquoy par la 22.p.6. comme AC à AG, ainsi DF à DH: Et en composant comme la compotee de AC, AG, c'est à dire la double de AB, est à AG, ainsi la compotee de DF, DH, c'est à dire la double de DE, est à DH: & en changeant comme la double de AB est à la double de DE, ainsi AG à DH: Et par la 15.p.5. comme la double de AB est à la doub. de DE, ainsi AB à DE. Donc comme AB sera à DE, ainsi AG à DH: & partant par la 19.p.3. ainsi sera aussi le reste GB au reste HE. Parquoy comme AG à DH, ainsi sera GB à HE, puis que l'une & l'autre raison est comme AB à DE: & en permutant comme AG sera à GB, ainsi DH sera à HE: & ainsi selon toutes les autres manieres d'argumenter es proportions, on demonstrera toutes lignes, & partis d'icelles estre proportioneles entr'elles.

THEOR. 3. PROP. III.

Vn mesme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'Icosaedre inscrit en vne mesme sphere.

Auparavant que d'expliquer ceste propfit. il conuient demonstrier que le quarré du costé du pentagone avec le quarré de la ligne qui soustient vn angle d'iceluy, est quintuple du quarré demy diam du cercle dás lequel est inscrit iceluy pentagone.



Soit le costé du pentagone inscrit dans vn cercle CD, la ligne qui soustient vn angle d'iceluy pentagone CA, le demy diametre FG; lequel coupe en deux egallement, tant l'arc CGH que le costé CD, par le corol. de la de la 10.p.13. Je dis que les deux quarréz de CA & de CD sont ensemble quintuples du quarré de FG.

Car si on meine CG, ce sera le costé du decagone: & par le scholie de la 4.p.2. le quarré de AG, sera quadruple du quarré

du demy diametre FG; & par consequent les deux de AC, CG qui par la 47. p. 1. sont egaux au quarré de AG, seront aussi quadruple d'iceluy quarré de FG. Parquoy les trois de AC, CG, & GF, seront ensembles quintuples du seul de GF: Mais les deux de CG, & GF, costez de l'hexagone & decagone sont ensemble egaux au quarré de CD costé du pentagone, par la 10. p. 13. partant les deux quarréz de AC & CD sont quintuples du seul quarré de GF. Ce qui estoit proposé.

Pour la proposition. Soit IK le diametre de la sphere comprenant le dodecaedre & l'icosaedre; & d'iceluy dodecaedre soit vn pentagone ABCDE, & de l'icosaedre soit le triangle equilateral LMN: ie dis qu'un mesme cercle circonscrit le pentagone ABCDE, & le triangle LMN; c'est à dire que les cercles ABCDE, LMN, qui les circonscrivent sont egaux. -

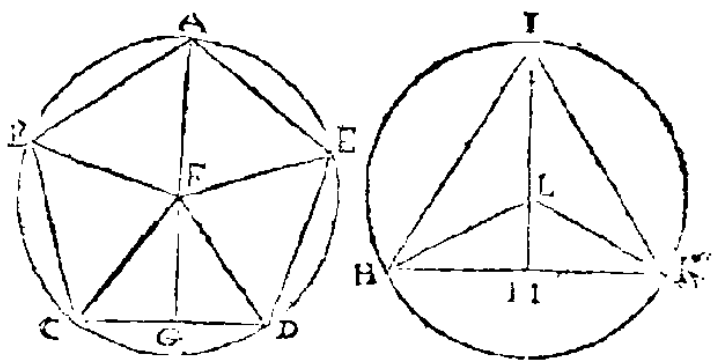
Car estant tiree AC subrendante de l'angle du pentagone B, ce sera le costé du cube inscrit en la mesme sphere, par le corol. de la 17. p. 13 & soit exposee la ligne droicte OP, telle que le quarré de IK diametre de la sphere, soit quintuple du quarré d'icelle OP: laquelle OP sera egale au demy diametre du cercle, dans lequel on construit l'icosaedre par le corol. de la 16. p. 13; soit icelle OP coupee en la moyenne & extreme raison en Q; & le plus grand segment OQ sera costé du decagone inscrit au mesme cercle, dont OP est costé de l'hexagone ou semi diametre, par le corol. de la 9. propo. 13. Mais par la 7. propo. 13. lors que CA est diuisee en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment est AB: Donc par la 2. propo. 14. comme la toute AC sera à la toute OP, ainsi le plus grand segment AB, sera au plus grand segment OQ: partant par la 22. p. 6. comme le quarré de AC sera au quarré de OP, ainsi le quarré de AB sera au quarré OQ; & par la 4. p. 5. comme le triple du quarré de AC est au quintuple du quarré de OP, ainsi le triple du quarré de AB est au quintuple du quarré de OQ. Mais le triple du quarré de AC est egal au quintuple du quarré de OP: (pource que le quarré de IK diametre de la sphere, est egal, tant au triple du quarré de AC costé du cube, par la 15. p. 13. que au quintuple du quarré de OP par l'hypotese.) Donc aussi le triple du quarré de AB sera egal au quintuple du quarré de OQ. Or par le corol. de la 16. p. 1. ML costé du triangle de l'icosaedre, est egal au costé du pentagone inscrit dans le cercle, dont OP est demy diametre: & partant puis que par la 10. p. 13. le quarré d'iceluy costé est egal aux deux quarréz de OP, & OQ, costez de l'hexagone & du decagone; cinq quarréz de ML, seront egaux à cinq quarréz

rez de OP, & à cinq de OQ : ou à trois de BA, & trois de AC. Parquoy les deux quarez de BA, & AC estans quintuples du quare du demy-diametre FA, (cōme nous auons demonstré au commencement de ceste proposition) trois quarez de AB, & AC seront egaux à quinze quarez du demy diametre FA. Mais cinq quarez de ML, costé du triangle equilateral, sont aussi egaux à quinze quarez du demy diametre du cercle LMN : (car chacun quare de ML est triple du quare du demy diametre , par la 12. proposition du 13.) Donc les trois de BA & AC, estans egaux aux cinq de ML, les quinze du demy diametre FA, seront egaux aux quinze du demy diametre du cercle LMN. Partant vn quare d'iceux sera egal à vn quarré, & le demy diametre au demy-diametre, & par consequent les cercles ABCDE, LMN seront egaux : ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si du cētre du cercle circōscriuant le pētagone du dodecaedre, on meine vne ligne perpēdiculaire sur vn costé d'iceluy pentagone ; trente fois le rectangle compris de la perpēdiculaire, & du costé du pentagone, sont, egaux à toute la superficie du dodecaedre.

Soit le cercle AB CDE circonscriuant vn pentagone d'vn dodecaedre, & le centre d'iceluy cercle soit F, duquel soit tirée FG, perpendiculairement sur le costé CD. Je dis



que trente fois le rectangle compris de la perpēdiculaire FG & costé CD, sont egaux à la superficie du dodecaedre.

Car ayant tiré les lignes FA, FB, FC, FD, FE : il est euident par la 41. p. 1. que le rectangle compris de FG, CD, est double du triangle CFD. Or en la superficie du dodecaedre, il y a douze pentagones egaux, & chascun pētagone à cinq pareils

triangles que CFD , qui sont en tout soixante triangles, deſquels soixante rectangles, ſeroient le double : Donc trente rectangles de FC , & CD , leur ſeront egaux.

Nous demonſtrerons ſemblablement que ſi vn triangle equilateral, comme HIK , eſt inſcrit en vn cercle, du centre duquel L , on tire ſur le coſté HK la perpendiculaire LM : trente fois le rectang. de LM & HK , ſeront egaux à la ſuperficie de l'Icoſaedre. Car icelle ſuperficie contient vingt triangles equilateraux ſemblables à HIK ; & chacun d'iceux ſe diuiſe en trois egaux entr'eux, & ſemblables & egaux à HLK , qui ſont en tout ſoixante triangles comme HLK : mais le rectangle de la perpendiculaire LM & du coſté HK , eſt double du triangle HLK , par la 41. p. 1. Et par conſequent ſoixante rectangles ſeroient doubles de ſoixante triangles : Donc trente rectangles de LM & HK ſeront egaux à la ſuperficie totale de l'icoſaedre.

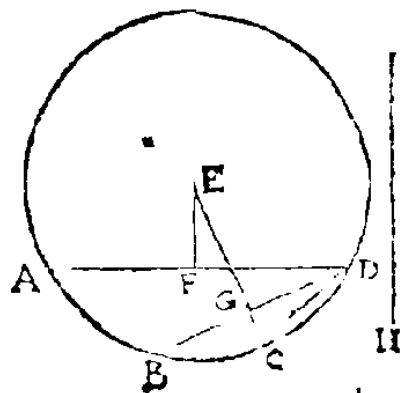
C O R O L L A I R E.

De cecy reſulte, par la 15. p. 5. que comme vn ſeul rectangle de FG & CD , eſt à vn ſeul rectangle de LM & HK , ainſi la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie de l'icoſaedre.

T H E O R. 5. P R O P. V.

Comme la ſuperficie du dodecaedre, eſt à la ſuperficie de l'icoſaedre ; ainſi le coſté du cube au coſté de l'icoſaedre, inſcrits en vne meſme ſphere.

Dans le cercle donné $ABCD$ ſoit pris AD le coſté du triangle equilateral de l'icoſaedre, & dans le meſme cercle le coſté du pentagone du dodecaedre (ce que nous auons monſtré eſtre poſſible par la 3. p. 14. qu'un meſme cercle cōprenent & le triangle de l'icoſaedre, & le pentagone du dodecaedre.) Soit donc iceluy coſté du pentagone



BD, & du centre E soient tirees sur AD, BD les perpendiculaires EF, EG : & icelle EG estant prolongee iusques à la circonference, elle coupera l'arc BCD en deux également en C : & estant tiree la ligne droicte CD, ce sera le costé du decagone : & finalement soit exposee la ligne droicte H costé du cube inscrit en la mesme sphere. Je dis que la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'Icosaedre, comme H costé du cube, est à AD costé de l'Icosaedre.

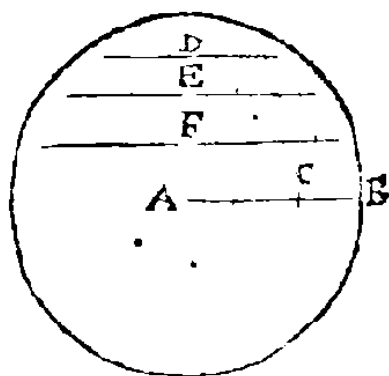
Car d'autant que EC est costé de l'hexagone, & CD costé du decagone inscrit en vn mesme cercle; la cōposée d'iceux costez, sera coupee en la moyenne & extreme raison, dont le plus grand segment sera EC par la 9.p.13. & par la 1.p.14. la moitié d'icelle composee est EG ; & par le corol. la 12. p. 13. la moitié d'iceluy plus grand segment est EF : Et partant puis que par la 15.p.5. les toutes sont aux toutes, comme les moities aux moities : il est euident que la moitié EG estant coupee en la moyenne & extreme raison, la moitié EF sera le plus grand segment; (car la moitié du plus grand segment, & la moitié du plus petit faict la moitié de la toute.) Mais par le corol. de la 17.p.13. H costé du cube estant aussi couppé en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment sera BD costé du dodecaedre. Donc par la 2.p.14. comme la toute H, sera à BD son plus grand segment, ainsi la toute EG sera à EF son plus grand segment : Et partant par la 16. p. 6. le rectangle compris des extremes H, EF, sera egal au rectangle des moyennes BD, EG. Et pource que par la 1.p.6. comme H est à AD, ainsi le rectangle de H, EF, est au rectangle de AD, EF : aussi comme H sera à AD, ainsi le rectangle de BD, EG (lequel est egal à celuy de H, EF) est au mesme rectangle compris sous AD, EF. Parquoy puis que par le corol. de la preced. comme le rectangle compris sous BD, EG, est au rectangle compris de AD, EF, ainsi la superficie du dodecaedre est à la superficie de l'icosaedre : pareillement comme H costé du cube sera à AD costé de l'icosaedre, ainsi sera la superficie du dodecaedre à la superficie de l'Icosaedre. Ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte est coupee en la moyenne & extreme raison ; cōme les deux quar-

rez de la toute & du plus grand segment, sont aux deux quarez de la toute & du plus petit segmēt, ainsi le quarré du costé du cube, est au quarré du costé de l'icosaedre inscrit en vne mesme sphere.

Soit le cercle comprenant & le triangle de l'icosaedre, & le pentagone du dodecaedre, duquel le demy diametre AB, soit couppé en la moyenne & extreme raison en C, le plus grand segment soit AC, lequel sera le costé du decagone inscrit dans le mesme cercle par le corol. de la 9. p. 13. Item soient prises trois lignes, D costé du dodecaedre, E costé de l'icosaedre, F costé du cube: Je dis que le quarré de F, est au quarré de E comme les deux quarez de AB & AC sont aux deux quarez de AB & CB.



Car D estant le costé du pentagone, & E costé du triangle, tous deux inscrits dans le cercle donné; lors que F costé du cube est divisé en la moyenne & extreme raison, D est son plus grand segment, par le corol de la 17 p. 13. Donc E estant le costé du triangle inscrit au cercle donné, son quarré sera triple du quarré du demy diametre AB par la 12. p. 13. & par la 4. p. 13. les deux quarez de AB & CB sont triples du quarré de AC: Ainsi le quarré de E, est au quarré de AB, comme les 2. quarez de AB, CB sont au quarré de AC: Et en changeant le quarré de E, sera aux deux quarez de AB, CB, comme le quarré de AB au quarré de AC. Mais comme le quarré de AB à 1 quarré de AC, ainsi le quarré de F au quarré de D: (car par la 2. p. 14. comme la toute AB est à son plus grand segmēt AC, ainsi la toute F à son plus grand segment D; & parant par la 22. p. 6. comme le quarré de AB au quarré de AC, ainsi le quarré de F sera au quarré de D) donc par la 11. p. 5. comme le quarré de E aux quarez de AB & CB, ainsi le quarré de F, au quarré de D: Et en changeant comme le quarré de E au quarré de F, ainsi les quarez de AB & CB, sont au quarré de D, costé du pentagone: lequel par la 10. p. 13. est egal aux deux quarez de AB & AC costez de l'hexagone & decagone inscrits en

Vn mesme cercle; & par consequent le quarré de F costé du cube est à E costé de l'Icosaedre, comme les deux quarrés de A^r & AC, sont aux deux quarrés de AB & CB. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Comme le costé du cube au costé de l'icosaedre, ainsi le dodecaedre à l'icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.

Ceste demonstration est facile, les precedētes estans bien entendues: Car puisque par la 3. p. 14. le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icosaedre sont inscrits dans vn mesme cercle: il est euident qu'iceux triangle & pentagone serōt equidistans du centre de la sphere. Parquoy si on diuise le dodecaedre & l'icosaedre en pyramides, toutes icelles pyramides tant de l'vn que de l'autre solide serōt de mesme hauteur: Et par les 5. & 6. p. 12. elles seront l'vne à l'autre, comme leurs bases, c'est à sçauoir douze pyramides du dodecaedre à vingt pyramides de l'icosaedre, comme douze pentagones à vingt triangles: C'est à dire que comme la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre, ainsi tout le dodecaedre à tout l'icosaedre. Mais par la 5. p. 14. icelles superficies sont l'vne à l'autre, comme le costé du cube au costé de l'icosaedre: donc par la 11. p. 5. comme le costé du cube au costé de l'icosaedre: ainsi le dodecaedre à l'icosaedre. Ce qui estoit à prouuer.

Fin du quatorziesme Element.

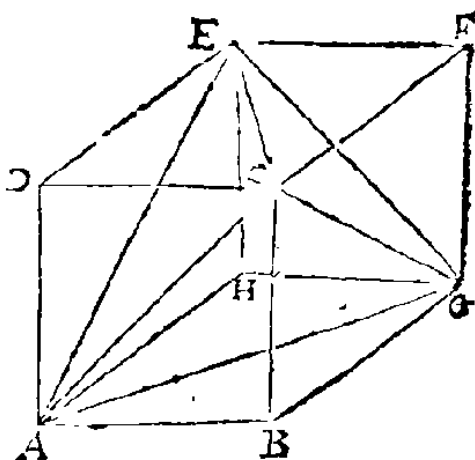


ELEMENT QVINZIESME.

PROB. I. PROP. I.

DANS vn cube donné, inscrire
vne pyramide.

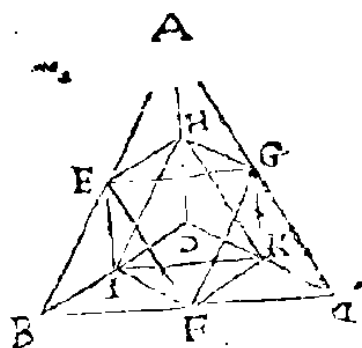
Soit le cube donné AF , dans lequel il faut inscrire vne pyramide. Soient menez les diagonales AE, EC, EG , & des extremitez d'icelles A, C, G , soient aussi menez les diagonales AG, AC, GC : Toutes lesquelles diagonales s'ont egales entr'elles, parce que les six quarez dans lesquelles elles sont menez sont egaux par la definition du cube: Partant les quatre triangles composez d'icelles AGE, ACE, ACG, ECG , sont equilateraux, & egaux entr'eux: & partant la pyramide $AEGC$ constituee d'iceux triangles est inscrite au cube donné AF , par la 30. d. 11. Car tous les angles d'icelle sont colloquez es adgles d'icelles cube proposé.



PROB. 2. PROP. II.

Dans vne pyramide donnee, inscrire vn octaedre.

Soit la pyramide donnee ABCD, dans laquelle il faut inscrire vn octaedre. Soient coupez tous les costez d'icelle pyramide en deux également aux points E, F, G, H, I, K : Et soient menees les lignes EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE. Toutes lesquelles lignes sont egales entr'elles, par la 4. p. 1. estant toutes les lignes coupees egales, & les angles des triangles plans de la pyramide egaux: Etpartant le quadrilatre EGKI à les quatre costez egaux, & les quatre triâgles EHI, IHK, KHG, GHE, cōmençâs sur iceluy quadrilatre, & finissâs au point H, sont tous equaliteraux & egaux entr'eux. Itē les quatre autres triâgles IFE, EFG, GFK, KFI commençâs au dessous du quadrilatre, & finissâs au point F, sōtaussi equilateraux & egaux tant entr'eux qu'aux 4. precedans. Parquoy la figure EIKGHF composée d'iceux 8. triangles est vn octaedre, par la 26. d. 17. & par la 30. d. 11. il est inscrit dans la pyramide donnee ABCD puis que tous les angles d'iceluy touchent les costez d'icelle pyramide.

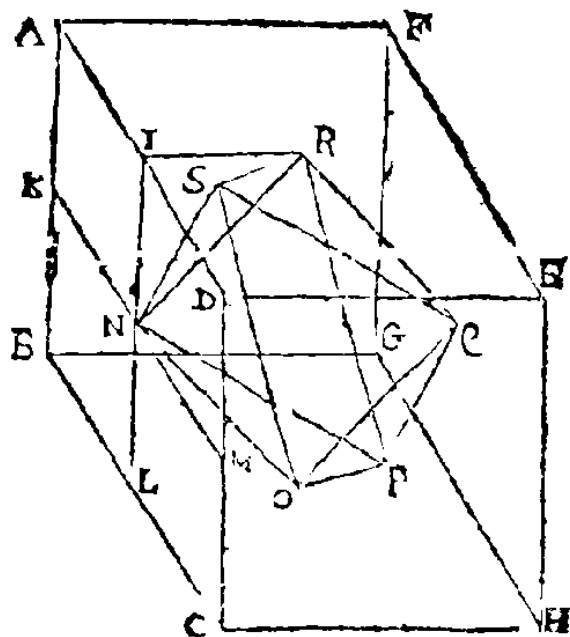


PROB. 3. PROP. III.

Dans vn cube donné, inscrire vn octaedre.

Soit le cube donne AH, dans lequel il faut inscrire vn octaedre. Soient coupez en deux également les costez du quarre AC, es points I, K, LM, & soient menees les deux lig. IL, KM, s'entre-coupans en N, lequel point sera le centre du quarre AC, comme il appert par la demonstration de la 8. p. 4. Par la mesme maniere seront trouvez les centres des 3. autres quarrez du cube, lesquels centres soient O, P, Q, R. S: Donc toutes les lignes droictes tirees d'iceux centres a chaf-

que point de la section des costez de leurs quarez, telles que sont NI, NK, NL, NM, NR , &c. seront egales aux moitez d'iceux costez, comme il appert par la susdite demonstration de la 8. p. 4. Item soient tirees les quatre lignes droictes NP, PQ, QS, SN , lesquelles seront routes egales, par la 4. p. 2. d'autant qu'elles sont bases de quatre triangles ayans deux costez egaux à deux costez, & vn angle egal à vn angle: Il est evident que icelles quatre lignes seront aussi vn quarré qui est au milieu de l'octaëdre. Or des quatre angles d'iceluy quarré soient menees les quatre lignes NR, PR, QR, SR , vers le point R , lesquelles comme il a este dit cy-dessus seront routes egales tant entr'elles qu'aux quatre precedentes, & feront les quatre triangles equilateraux NRP, PRQ, QRS, NRS : Item des mesmes quatre angles au dessous du quarré vers le centre D , soient aussi menees les lignes NO, PO, QO, SO , qui seront egales comme dessus, & feront quatre autres triangles equilateraux NOP, POQ, QOS, NOS , lesquels seront aussi egaux aux quatre premiers. Parquoy le solide $NOPQRS$ composé d'iceux 8 triangles equilateraux & egaux entr'eux est Octaëdre inscrit au cube donné, par les 16. & 30. d. xi.

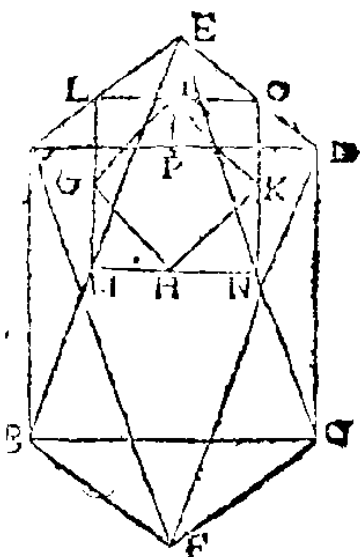


PROB. 4. PROP. IIIL.

Dans vn octaëdre donné, inscrire vn cube.

Soit donné l'octaëdre $ABCDEF$, dans lequel il faut inscrire vn cube des quatre triangles AEB, BEC, CED, AED , qui se terminent au point E . Soient pris les centres G, H, I, K , & soient menees les lignes GH, HK, KI, GI : Il est evident que $GHIK$ sera quarré. Car si d'iceux quatre centres on mene les lignes droictes LM, MN, NO, OL , paralleles chacune à son costé du quarré du milieu de l'octaëdre $ABCD$: les triangles LEM, MEN, NEO, LEO seront equilateraux, puis qu'ils

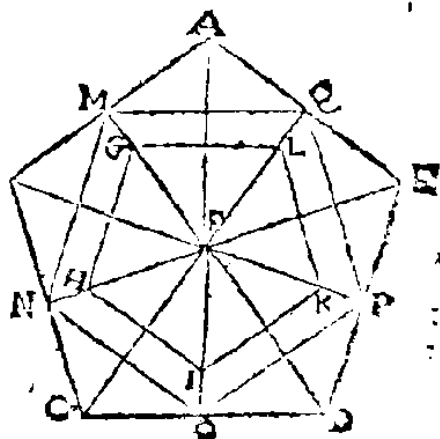
sont semblables aux triangles equilateraux cy dessus par le corol. de la 4. p. 6. & partant egaux entr'eux, pource qu'ils ont les costez communs; & par consequent les quatre bases LM, MN, NO, LO sont egales. Item si de E par le centre I on mene EP: elle diuise l'angle E en deux egalement: & par consequent LI sera egale à IO, c'est à dire que LO sera coupee en deux egalement au centre I: Par mesme raison LM, MN, NO seront aussi coupez en deux egalement aux centres G, H, K. Ainsi les 4 triangles GLI, IOK, GMH, HNK sont Isosceles rectang. (Car par la 10. p. tr. les angles des points L, M, N, O, sont egaux aux droicts du quarre ABCD.) Parquoy les 4 bases GI, IK, GH, HK seront egales, & les angles qu'elles comprennent droicts: partant GHKI est quarre. Que si semblablement des autres triang. de l'octaedre on prend les centres: iceux centres estans tous conioincts par lignes droictes, seront descrits encores 5 quarez, lesquels ayans les costez communs seront egaux entr'eux. Parquoy le cube compose d'iceux 6 quarez sera inscrit dans l'octaedre donne, puisque les angles d'iceluy touchent les bases de l'octaedre.



PROB. 5. PROP. V.

Dans vn icosaedre donné, descrire vn do-decaedre.

Soit ABCDE le pentagone par le moyen duquel on construit l'icosaedre, sur lequel soit vne des 12. pyramides pentagonales de l'icosaedre ayant pour sommet le point F, auquel s'assemblent les 5 triang. equilateraux ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, & soit trouue le centre de chacun d'iceux triangles aux points G, H, I, K, L, & d'iceux soient menées les lignes HG, GL, LK, KI, IH:



Item de F par iceux centres, soient menees les lignes FM, FN, FO, FP, FQ, lesquelles couperont en deux egalemēt les costes AB, BC, CD, DE, EA, comme il apert par le corol. de la 10. p. 13. & partant estant menees les lignes droictes MN, NO, OP, PQ, QM; il est euident par la 4. p. 1. quelle seront egales; & que par la 8. p. 1. les angles qu'elles soustiennent au point F sont egaux; & d'autant que les lignes FG, FH, FI, FK, FL sont aussi egales; (car ce sont demis diametres de cercles circonscruiens triangles equaliteraux egaux) les lignes GH, HI, IK, KL, LG seront pareillement egales, & les angles de dessus icelles aussi egaux, par la 4. p. 1. Parquoy le pentagone GHIKL est equilateral & equiangle: & il se prouuera aisement comme à la 17. p. 13. qu'il est aussi en vn mesme plan. Que si semblablement on conioinct par lignes droictes, les centres de tous les triangles des autres 11. pyramides de l'icosaedre, seront aussi descriptes des pentagones equaliteraux & equiangles, lesquels puis qu'ils ont des costez communs, seront aussi egaux entr'eux. Parquoy 12. tels pentagones constitueront vn dodecaedre, lequel sera inscrit dans l'icosaedre, puis que les 20. angles touchent les vngts bases de l'icosaedre.

Fin du quinzielme & dernier Element.

Extraict du Priuilege du Roy.

PAR grace & priuilege du Roy, il est permis à D. Henrion Mathematicien, de faire imprimer par tel Imprimeur que bon luy semblera, Les Elements d'Euclide, qu'il a traduits de Latin en François, & ce iusques au terme de six ans finis & accomplis, à compter du iour que ledit liure sera acheué d'imprimer: pendant lequel temps defences sont faictes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes de quelque estat & condition qu'ils soient, d'imprimer ou faire imprimer, alterer ny extraire aucune chose dudit liure, d'acheter, vendre, ny distribuer aucune indeuë impressiõ d'iceluy, sur peine de mille liures d'amende, & confiscation des liures & exemplaires d'icoux, qui se trouueront d'autre impressiõ que de celle qu'aura faict faire ledict Henrion. Voulant en outre sa Majesté, qu'en apposant au commencement ou à la fin dudit liure un extraict des presentes, elles soient tenuës pour bien notifiées & signifiées, nonobstant quelconque lettre au contraire: Car tel est le plaisir de sa Majesté. Donnë à Paris le vingt-sixiesme Septembre 1614.

Par le Roy en son Conseil,

A D D E E

Ces Elements d'Euclide ont esté acheuez d'imprimer le 15. Octobre de ladicte année 1614.