Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

Ariſtippus Philoſophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodienſium litus animadverſiſſet Geometrica ſchemata deſcripta, exclamaviſſe ad comites ita dicitur, **Bene ſperemus, Hominum enim veſtigia video.**
Vitruv. Architect. lib. 6. Præf.

delin. MBurghers ſculpt. Univ. Oxon.

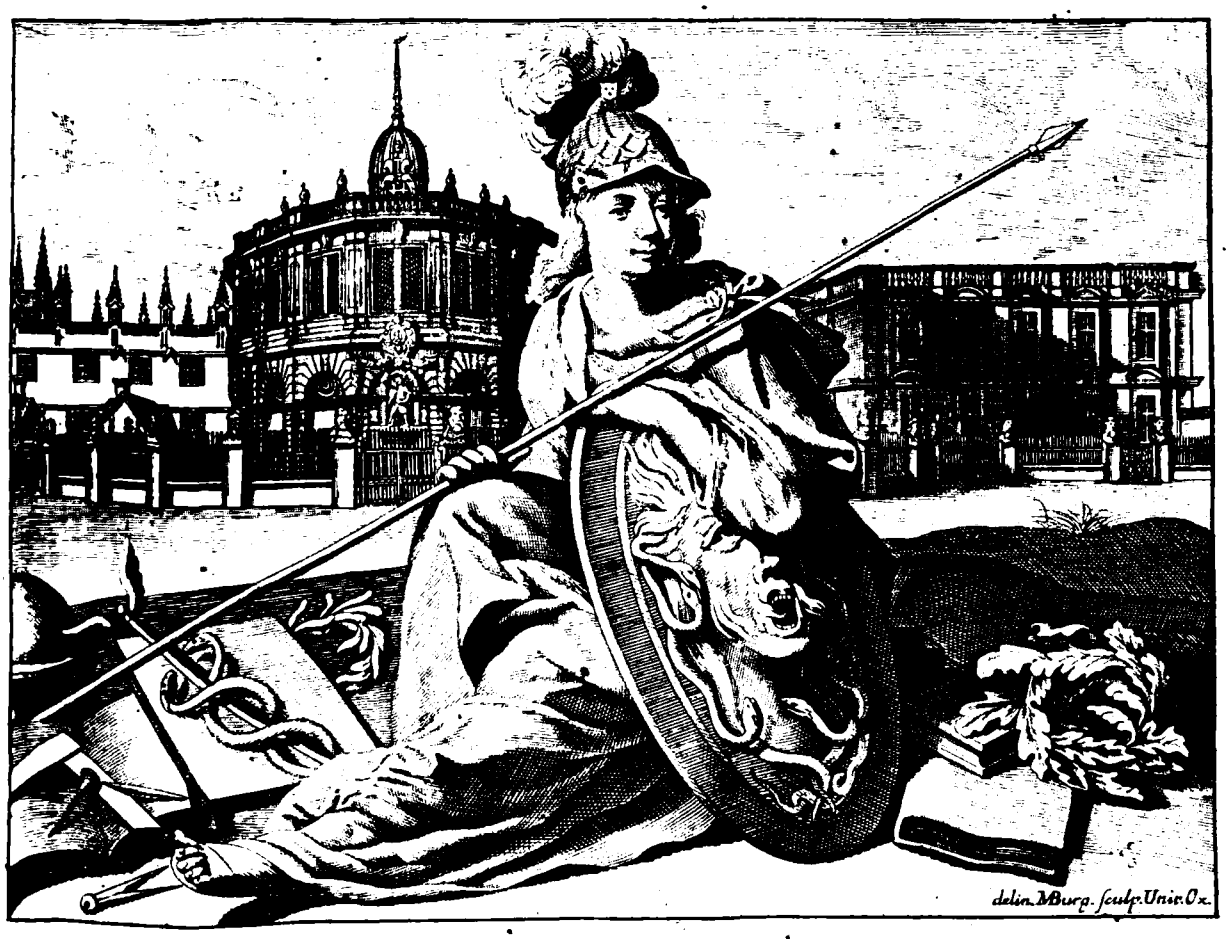
ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS

QUÆ SUPERSUNT OMNIA.

Ex Recenſione DAVIDIS GREGORII M. D.
Aſtronomiæ Profeſſoris Saviliani, & R.S.S.



OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCIII.

Imprimatur,

GUIL. DELAUNE

VICE-CAN. *OXON.*

Junii 3. 1703.

REVERENDO VIRO

HENRICO ALDRICH

S. T. P.

ÆDIS CHRISTI OXONIENSIS

DECANO,

ET

Synodi Provinciæ Cantuariensis

INFERIORIS DOMUS

PROLOCUTORI DIGNISSIMO.

CUM Tuæ, Vir Reverende, & dignitatis splendore, & eruditionis varietate omnium ad Te oculos atque animos trahas; tum præsertim ea, qua literas & literatos foves, benevolentia & liberalitate facis, ut doctorum omnium votis, affectibus, prædicatione cumuleris. Inter Artes vero universas quas & Ipse colis, & ad quas alios accendis, nulla fere est quæ curas Tuas magis exercuit quam Matheſis: inter viros quamplurimos, quorum industriam provocasti, me certe devinctiorem habes neminem. Me enim in Oxonio hospitem & quasi peregrinum summa illico humanitate amplexus es; meque deinde & studia mea, ultra quam mihi fas erat sperare, Tuo frequentius colloquio, hortatu, consilio adjuvisti. Libere mecum communicare solebas, quid de omni Matheseos disciplina sentseris, quis fuerit scopus, qui fructus, quæ cujusque tradendæ ratio commodissima. Memini vero quam sæpe reclamares viris in re Mathematica novitatis, compendii, & forte sui nimium amantibus; cum interim Juventutem ad ipsos

fontes

fontes remittendam, Veterumque libros diligentius esse versandos terendosque vehementer urgeres. Ad hæc studia resuscitanda suadebas, ut Antiqui illi scriptores sive eruti e MSS. publici juris fierent, sive prius editi ad prelum denuo revocarentur; utque Euclides imprimis (quem Te uno, Vir Clarissime, nemo aut penitius inspexit, aut sæpius revolvit, aut distinctius animo infixit) paulo quam antehac elegantior perfectiorque, sed sua lingua, suo simplex cultu atque apparatu prodiret. Mihi vero hanc provinciam commendabas volenti, fateor, atque optanti; quippe qui & rei Mathematicæ inservire, & Tibi semper placere magnopere cupiam. Habes itaque hic, quod a me postulabas, Euclidis libros, quantum meæ vires & diligentia efficere poterant, emendatos & numero suo absolutos. Ex Te satis intellexi perfectissimum opus nihil indigere adjumentis. Cum itaque Tuo obsecutus judicio perpauca admodum annotaverim, pauca etiam erunt quæ veniam Tuam desiderabunt. Si hæc tandem Tibi non displicuerint, pro solita Amicitia studiis meis succurre, Tuoque in me Imperio ulterius utere. Nihil oneris impones, quod Te tanto tamque benevolo Adjutore non lubens suscipiam,

Tibi omnibus officiis
omnique cultu devotissimus,

DAVID GREGORY.

PRÆFATIO.

PRODEUNT tandem in lucem Euclidis Opera, quæ ſuperſunt omnia, nunc primum Græce & Latine edita. Adjecta ſunt quædam quæ Euclidis forſan non ſunt: noluimus enim quidquam prætermittere, quod vel communi conſenſu, vel celebrioris alicujus Geometræ judicio, Euclidi adſcriptum eſt. De ſingulis, vel qua autoritate Euclidis nomen vendicent, vel quibus argumentis ab illo abjudicanda cenſeamus; quis ſit cujuſque libri ſcopus & methodus; quid demum in hac Editione præſtitum ſit, quibuſque auxiliis muniti hæc adornavimus, paulo fuſius dicemus, ubi pauca de ipſo Authore prælibaverimus.

Quo genere aut patria oriundus ſit Euclides minime conſtat: alium eſſe ab Euclide Megareo, cujus vitam deſcripſit Laertius, vel inde quis ſuſpicetur, quod inter ſcripta ejus nullum opus Mathematicum memoretur. Sed præterea liquet illum Megareum & hunc noſtrum, tum ætate disjunctos eſſe, tum moribus & diſciplina diverſos. Erat enim ille (ut ait Laertius) Socratis auditor; hic (ut teſtatur Proclus libro 2. comment. in lib. 1. Elem.) non Socrate ſolum & Platone, ſed Eudoxo Platonis, & Menæchmo Eudoxi diſcipulo junior. Ille (eodem Laertio authore) vehemens & litigioſus; hic (Pappo teſte libro 7. Collect. math.) ſuaviſſimi ingenii vir, & contentionis minime amans. Floruit vero (ut ex Proclo diſcimus) ſub Ptolemæo Lagi, (qui Ægypto annis plus quam trecentis ante Æram Chriſtianam cæpit imperare,) Eratoſthene & Archimede paulo antiquior. Alexandriæ primus omnium Scholam mathematicam fælicibus auſpiciis aperuit, unde omnes fere inſigniores Mathematici prodiere. Si hæc & plura quædam de Euclide clarius uberiuſque enarrata deſideras, Lector, conſule Celeberrimum SAVILIUM, *qui in Prælectionibus illis, quas tanquam primitias propriæ Fundationi conſecrare voluit, quicquid de Euclide ex veterum monumentis erui poteſt copioſiſſime accuratiſſimeque expendit. Cum vero (ut ait Vir ille clariſſimus) Euclidis quidem ingenii monumenta habeamus plurima, vitæ perpauca, de Ejus ſcriptis aliquanto diligentius diſſeremus.*

Opera ejus, partim à Pappo lib. 7, partim à Proclo lib. 2. enumerata, hæc ſunt: Elementorum *Libri*, Datorum *Liber*, Introductio Harmonica, Sectio Canonis, Phænomena, Optica, Catoptrica, *Liber de* Diviſionibus, Poriſmatum *Libri*, Locorum ad ſuperficiem *Libri*, Fallaciarum *Liber*, Conicorum *Libri*; *de quibus ordine dicendum erit.*

PRÆCIPUE *vero (inquit Proclus loco citato) circa Geometricam Elementorum Inſtitutionem eum quiſpiam admirabitur, propter ordinem & delectum eorum, quæ per Elementa diſtribuit, theorematum atque problematum. Veriſimile eſt etiam ante Euclidem Geometriæ Elementa aliqua conſtructa fuiſſe ab Hippocrate Chio, Leonte, aliiſque magno numero, à Proclo lib. 2. verſus initium memoratis. Nam Proclus expreſſe ait quod Euclides in Elementis multa quidem ordinavit Eudoxi, multa Theæteti perfecit, ea præterea, quæ laxius à prioribus demonſtrata fuerant, firmiſſimis demonſtrationibus munivit, quæ nec coargui nec convinci poſſunt; unde à Proclo & veteribus* κατ' ἐξοχὴν *dictus eſt* στοιχειωτὴς, *& Geometra.*

Elementa hæc, prout nunc extant, libris conſtant Quindecim; *niſi quod (inquit Gerardus Voſſius) de duobus poſtremis res non ſit ita aperta. Plerique eos non Euclidis putant, ſed commentarios Hypſiclis Alexandrini, qui ducentis poſt Euclidem annis floruit. Sane decimuſquartus præfationem habet propriam, quam nec primus habet Euclidis: non vano argumento, libros duos ultimos alterius eſſe, quam Euclidis.*

Licet Euclides, qui (teſte Proclo) ſecta fuit Platonicus, totius Elementorum Inſtitutionis finem ſtatuat τῶν κοσμικῶν σχημάτων, Mundanarum Figurarum, *conſtitutionem, ad quem (inquit Kepplerus) referuntur omnes omnino propoſitiones omnium librorum, exceptis quæ ad Numerum perfectum ducunt; (figurarum, inquam, earum quæ Platonicæ appellantur, à Pythagora licet detectæ fuerint, ut oſtendit epigramma:*

Σχήματα πέντε Πλάτωνος, ἃ Πυθαγόρας σοφὸς εὗρε·
Πυθαγόρας σοφὸς εὗρε, Πλάτων δ' ἀεὶδηλ' ἐδίδαξεν·
Εὐκλείδης δὲ τοῖσι κλέος περικαλλὲς ἔπυξεν.)

proprie tamen Geometria hæc dividitur in Ἐπιπέδων θεωρίαν, superficierum contemplationem, *&* στερεομετρίαν, solidorum. *Nam de Punctis & Lineis, ut ait Proclus, nulla eſt inſtituta ab Euclide in Elementis peculiaris tractatio. Sed* στερεομετρία *intelligi nequit ſine notitia linearum* συμμέτρων *&* ἀσυμμέτρων. *Nec hanc ſcire poſſumus, niſi notitiam habeamus numerorum. Quare Elementa hæc commode in quatuor partes dividuntur. Prima eſt* Ἐπιπέδων θεωρία, *ſex libris comprehenſa; quæ rurſum triplex eſt: quatuor primis agitur de Planis abſolute; in quinto de Proportionibus Magnitudinum in genere; in ſexto denique de Proportionibus Figurarum planarum. Altera eſt de Numerorum Affectionibus; nempe liber ſeptimus, octavus & nonus, qui Arithmeticorum vocantur. Tertia eſt de Lineis* συμμέτροις *&* ἀσυμμέτροις, *unde hæc pars* Συμμετρία *dicitur, ac libro decimo continetur. Quarta eſt* Στερεομετρία, *ſive de Solidis, quæ reliquis libris abſolvitur.*

Circa hoſce Elementorum libros, prout nunc ab omnibus teruntur, varie inter recentiores diſputatur quæ fuerint Theonis in illis partes. "*Quidam propoſitiones Elementorum tribuunt Euclidi, demonſtrationes Theoni, homines ſtulti* (*inquit* Savilius) *&* "*ridiculi; quaſi ullus unquam artifex ſuas edi voluerit concluſiones, nullis adjectis pro*"*bationibus. Hoc neque Philoſophorum quiſquam, nec Medicorum, nedum Mathemati*"*corum, fecit unquam. Secunda eſt opinio Petri Rami, qui tam propoſitiones quam de*"*monſtrationes Euclidi abjudicat, univerſa Theoni attribuens, falſe: eadem enim hæc* "*quæ nunc habemus, eodem ordine, eiſdem verbis, agnoſcunt ſub Euclidis nomine Pro*"*clus & Boëtius Theone poſteriores, & anterior Theone Alexander Aphrodiſeus, & omnis* "*antiquitas. Tertia opinio eſt eorum, qui omnia attribuunt Euclidi; quæ aut vera eſt,* "*aut veritati certe proxima. Quid ergo dicemus vulgatis libris, qui ἐκ τῶ Θέωνος συνα*"*γωγῶν,* ex Theonis colloquiis ſive congreſſibus, *præ ſe ferunt? cujus tamen tituli in neutro* "*noſtrorum codicum MSS. ullum reperi veſtigium. Non diffiteor in uno ad oram mar*"*ginis adſcripta eſſe ad decimumtertium librum hæc verba:* Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συνα"*γαγών, ὢν ἐπὶ χρόνοις Ἀλεξάνδρου τοῦ Μακεδόνος· Θέων δὲ ὁ σωτάξας αὐτὰ, ἐπὶ Θεοδοσίου* "*τοῦ βασιλέως; ut collectionem Elementorum Euclidi, ordinationem & diſpoſitionem Theoni* "*tribuiſſe videatur. Magna certe Theonis laus, ſi inordinata & incompoſita in ordinem* "*redegit. Sed ne huic incerto ſcholiaſtæ fidem adjungamus, obſtat, ut dixi, Procli &* "*antiquorum omnium auctoritas; obſtat mirabilis & concinna propoſitionum ſeries, ex* "*quibus unam loco ſuo ſi eximas, tota corruat compages & ſtructura neceſſe eſt. Quid igitur?* "*Nullæ ſunt Theonis in hoc libro partes? Non me movent ſuperius dicta; ſed auctoritatem* "*ipſius Theonis, in commentariis in Almageſtum, perpendendam exiſtimo, quæ fortaſſe* "*viam præire poſſunt ad eruendam in hac quæſtione veritatem. Quod vero ſectores, in*"*quit, in circulis æqualibus ſint proportionales angulis ad centrum conſtitutis, oſtenſum* "*eſt à nobis in editione Elementorum,* ἐκδόσει, *ad finem ſexti libri. Ex quibus verbis* "*& novam Elementorum editionem adornaſſe Theonem conſtat, & nonnulla ab ipſo adjecta.* "*Et quidem in omnibus noſtris exemplaribus hæc verba de ſectore annectuntur ultimæ* "*propoſitioni libri ſexti Elementorum, quæ & Theonis eſſe puto, ut etiam demonſtrationem* "*ad illa verba:* Λέγω ὅτι ἡ, &c. *uſque ad finem. Nam Euclidis illa ſolennis clauſula,* "ὅπερ ἔδει δεῖξαι, *quæ proxime præcedit, finis eſt, ut puto, Euclideæ. Idem judicium* "*ferendum puto de multis in decimo libro lemmatiis, & fortaſſe propoſitionibus nonnullis.* "*Alexander certe aliquot ante Theonem ſeculis, in commentariis in priora Ariſtotelis, eam,* "*quæ quinta eſt decimi in noſtris libris, citat pro quarta; ut neceſſe ſit aliquam ex præ*"*cedentibus, quartam, uti reor, qua ſine magno incommodo ſane carere potuiſſemus, ſuo* "*tempore ab Elementorum libro abfuiſſe, vel ſaltem cum tertia coaluiſſe. Et quidem ul*"*timam decimi non dubito aſſumentum eſſe Theonis, vel potius, antiquioris* (*nam apud* "*Alexandrum extat iiſdem prope verbis*) *minus perſpicacis ingenii, quippe alieno loco po*"*ſitam. Forte & Definitiones quædam & Axiomata, Libro* 1. *præpoſita, Theonem vel alium præter Euclidem agnoſcunt auctorem,* ex. gr. *Ax.* 11; *nam licet Euclides hoc pronunciatum adhibeat in demonſtranda prop.* 29. *El.* 1, *illud tamen pro Axiomate non habuit, ſed pro converſa prop.* 17, *utpote quæ ex illa manifeſto conſequatur. Fortaſſe & alteræ demonſtrationes, quæ paſſim occurrunt, ſunt etiam Theonis: nam quæ in Datorum libro reperiuntur, Euclidis non eſſe expreſſe aſſerit Pappus, licet cum illis Elementorum fa-*

cile

cile comparandæ. Sunt vero ex his quædam quæ Theonem non ſapiunt, ſed à ſciolis quibuſdam conſcriptæ ſunt. Sunt & lemmata & corollaria quædam in Elem. 10. *quæ ab ageometris ſubjuncta ſunt: illa ubique nota perſtrinximus.* "*Ex quibus omnibus* "*concludit* Savilius *Theonis fuiſſe partes, in Euclide pauciſſimis quidem in locis inter-* "*polando, explicando, augendo; ultra hoc nullas. Qui tamen labos non tanti fuit, ut* "*Proclo (omnium ante ſe Mathematicorum diligentiſſimo laudatori) commemoratione dignus* "*videretur.*

Corpus hoc Elementorum ea claritate & evidentia, eo judicio ac firmitudine compactum eſt, ut ſingulæ in iis propoſitiones, jam à bis mille annis, ab omnibus habeantur pro evidentibus, & pro talibus paſſim ab omnibus citentur. De antiquorum ſuper hiſce ſententia conſulantur Pappus, Proclus, cæterique quotquot erant Geometræ. Ex recentioribus unicus ſufficiat Cardanus, qui lib. 13. *de Subtilitate de hiſce verba faciens, ſic inquit:* "*Quo-* "*rum inconcuſſa dogmatum firmitas, perfectioque adeo abſoluta, ut nullum opus jure huic* "*aliud comparare audeas. Quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut ſoli hi* "*in arduis quæſtionibus videantur poſſe à vero falſum diſcernere, qui Euclidem habent* "*familiarem. Quibus non obſtantibus, dantur aliqui, qui licet utilitatem propoſitionum Eu-* *clidearum in omni re geometrica, earumque firmitatem ultra agnoſcant, methodum tamen deſiderant; nempe queruntur illum, neglecta methodo, de Lineis, de Angulis, de Figuris planis mixtim agere: nimirum hanc eſſe optimam veræ methodi legem exiſtimavit vir accuratiſſimus, ut nihil ſumatur pro vero niſi demonſtratum; nihil demonſtretur niſi ex antecedentibus.* "*Quo fit (inquit* Savilius) *ut ordo, quem iſti Methodiſtæ requirunt ab Eu-* "*clide, quo nunquam vidit hic ſol μεθοδικώτερον, ſervari non potuerit, niſi ſi quis eſt adeo* "*ineptus, ut neſcio cujus imaginariæ venuſtatis rationem habendam putet, neglecta ſani-* "*tate. Quivis eorum, qui Geometriæ Elementa alia methodo tradenda ſuſcepit, inter Euclideum opus alteriuſque cujuſvis præter proprium judex conſtituatur; illico patebit diſcrimen. Impetret horum aliquis ſi poſſit, à judice æque habili, ſententiam qualem de Euclideis Elementis tulit Ramus:* "*Nullus paralogiſmus, nulla ψευδογραφία, in totis Ele-* "*mentis, nobis quanquam ſevere inquirentibus animadverti potuit: quam laudem eſſe ſin-* "*gularem profiteor, quamque nulli adhuc neque Grammatico, neque Rhetori, neque Lo-* "*gico concedere potui, ut in Grammatica, Rhetorica, Logica nihil falſi docuiſſet. Nullane igitur eſt methodus compendioſior ad Geometriam addiſcendam, quam hæcce per Euclidis Elementa, quam adeo reformidant plerique? Huic certe quæſtioni reſpondeat ipſe Euclides. Ille à Ptolemæo Ægypti Rege interrogatus, an via eſſet aliqua ad Geometriam magis compendiaria ſua στοιχειώσει, reſpondiſſe fertur, auctore Proclo in lib.* 2, Μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν.

Hæc vindicandis Elementis, quæ nullo indigent vindice, abunde ſufficient: quid porro nos in iis edendis præſtitimus, paucis explicemus. Primo, Textum Græcum quod attinet, ut is quam emendatiſſimus & caſtigatiſſimus prodiret, modis omnibus curavimus; adhibitis, prout opus eſset, in conſilium MSS. Codicibus haud paucis, melioris notæ, quos in hunc ipſiſſimum uſum Academiæ pridem legârat magnus Savilius; *ut & Caſtigationibus ejus propria manu adſcriptis ad marginem editionis Hervagianæ. Acceſſit ſingularis, & nunquam ſatis prædicanda amiciſſimi D.* Joannis Hudſoni S. T. P. *Protobibliothecarii Bodleiani induſtria in expoliendis Græcis hiſce, & quidem univerſa Editione à vitiis, etiam typographicis, liberanda. Nempe in omnes, etiam infimas, operis noſtri partes ſe demiſit vir optimus. Textum Hervagianum, ante paulo quam in typographorum manus traderetur, accurate interpungendum & diſtinguendum curavit. Latina cum Græcis per totum, in Elementis præſertim ac Datis, ſumma fide contulit. Ubi ea à ſe invicem diſcrepantia deprehenderentur, vel etiam Græcum ipſum ſuſpectum haberetur, conſulti illico MSS. Codices, quorum lectio, ſi cum Latinis congrueret, ad marginem adſcripta extabat; ſin minus, appoſita ſtellula, ut exinde judicandi occaſio mihi daretur, utra demum lectio Geometricis rationibus magis conveniret. Denique, quo textus puritati melius conſuleretur, etiam ſchedas ſingulas, mox ut eas à prelo madentes exceperat, ſemel atque iterum legere & accurate recenſere haud gravatus eſt; eandemque plane in Euclidis noſtri, quam in aliorum Auctorum Græcorum monumentis, à ſe ſumma cum laude evulgatis, præſtitit diligentiam. Traductionem plerunque ſecuti ſumus Federici Commandini, at infinitis in locis caſtigatam; præcipue ex libris clariſſimi* Edvardi Bernardi, *Aſtronomiæ olim Profeſſoris Saviliani, in Bibliotheca Bodleiana adſervatis. Notas nullas adjecimus, niſi cum opus eſſet textum corruptum*

reſtituere, aut ſcholium à ſciolo interpolatum perſtringere: neque enim Euclides is erat, qui elementarem inſtitutionem contexeret, quæ ulteriore egeret explicatione, ſive quæ non eſſet vere elementaris. Atque in hac re provoco ad cujuſvis experientiam, ſintne Elementa hæc clariora & intellectu faciliora, ubi ſola exhibentur, an ubi ſcholiis & lemmatiis innumeris obrutus ipſe Euclides vix appareat. Schemata nitide juſtæque menſuræ excudi curavimus, & demonſtrationibus congrua; præſertim in Elemento quinto, ubi error in ſchemate mentem perſæpe tranſverſim agit. In libro quinto quantitates literis deſignatæ non magis debent eße lineæ quam aliæ quævis magnitudines; conſuetudini tamen gerentes morem, rectas in ſchemate deſcripſimus, utpote imaginationi maxime accommodatas. In libris ſeptimo, octavo & nono, nulla debent eſſe ſchemata; literæ enim non determinatos numeros deſignant, ſed quoſvis in certis conditionibus: ad imaginationem tamen ſublevandam, puncta depinximus ea multitudine quæ propoſitioni conveniant. At ſi quando numeri congrui tam magni ſunt, ut punctorum multitudo ſtatim non pateat; ipſos numeros appoſuimus more communi notatos.

SEQUUNTUR *Euclidis* Δεδομένα, Data, *libro unico comprehenſa, cui præfigitur, ob affinitatem, Marini Philoſophi* εἰς τὰ δεδομένα εἰσαγωγή, In Data Præfatio; *tametſi ſtylo ſatis obſcuro conſcripta Euclidis Data parum illuſtret. Cum autem Data hæc ſint ad Analyſin geometricam comparata, & ejus quaſi Elementa veteribus Geometris familiaria, at à recentioribus fere neglecta; libet huc tranſcribere Pappi Alexandrini præfationis ad lib. 7. collect. mathemat. partem, quæ de veterum Analyſi geometrica tractat, & Euclidis Data accurate deſcribit, eorumque uſum indicat. Hanc vero (quia Græce nondum extat) Græce trademus, una cum verſione Commandini.*

Pappi Alexandrini Mathematicarum Collectionum Liber Septimus.

Continet autem lemmata loci reſoluti.

Locus qui vocatur reſolutus, ô Hermodore fili, ut ſummatim dicam, propria quædam eſt materia, poſt communium elementorum conſtitutionem, iis parata, qui in geometricis ſibi comparare volunt vim, ac facultatem inveniendi problemata, quæ ipſis proponuntur: atque hujus tantummodo utilitatis gratia inventa eſt. Scripſerunt autem hac de re tres viri, nempe Euclides τὰ τόποις, Apollonius Pergæus, & Ariſtæus ſenior, quæ quidem per reſolutionem & compoſitionem procedit. Reſolutio igitur eſt via à quæſito tanquam conceſſo, per ea quæ deinceps conſequuntur, ad aliquod conceſſum in compoſitione: in reſolutione enim id quod quæritur tanquam factum ponentes, quid ex hoc contingat conſideramus, & rurſum illius antecedens; quouſque progredientes incidamus in aliquod jam cognitum, vel quod ſit è numero principiorum. Et hujuſmodi proceſſum *Reſolutionem* appellamus, veluti ex contrario factam ſolutionem. In compoſitione autem, per converſionem, ponentes tanquam jam factum id quod poſtremum in reſolutione ſumpſimus, atque hic ordinantes ſecundum naturam ea antecedentia, quæ illic conſequentia erant, & mutua illorum facta compoſitione, ad quæſiti finem pervenimus; & hic modus vocatur *Compoſitio.* Duplex autem eſt reſolutionis genus: alterum quidem quod veritatem perquirit, & *Contemplativum* appellatur: alterum vero, quo inveſtigatur id quod dicere propoſuimus, vocaturque *Problematicum.* In contemplativo igitur genere, quod quæritur ut jam exiſtens & ut verum ponen-

Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως Συναγωγῆς ἕβδομον.

Περιέχει δὲ λήμματα τοῦ ἀναλυομένου τόπου.

Ὁ καλούμενος ἀναλυόμενος, Ἑρμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν ἰδία τίς ἐστιν ὕλη παρεσκευασμένη, μετὰ τὴν τῶν κοινῶν στοιχείων ποίησιν, τοῖς βαλομένοις ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικὴν τῶν προτεινομένων αὐτοῖς προβλημάτων· καὶ εἰς τοῦτο μόνον χρήσιμη καθεστῶσα. γέγραπται δὲ ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, Εὐκλείδου τε τὰ στοιχειωτοῦ, καὶ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου, καὶ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου, κατὰ ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν ἔχοντα τὴν ἔφοδον. ἀνάλυσις μέντοι ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου, ὡς ὁμολογουμένου, διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων, ἐπί τι ὁμολογούμενον ἐν συνθέσει· ἐν μὲν τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποτιθέμενοι, τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα· καὶ πάλιν ἐκεῖνο τὸ προηγούμενον, ἕως ἂν ἔτυχε ἀναπολοῦντες, καταντήσωμεν εἴς τι τῶν ἤδη γνωριζομένων, ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων. καὶ τὴν τοιαύτην ἔφοδον ἀνάλυσιν καλοῦμεν, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν. ἐν δὲ τῇ συνθέσει, ἐξ ὑποστροφῆς, τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη, καὶ τὰ ἐπόμενα ἐκεῖ, ἐνταῦθα προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες, καὶ ἀλλήλοις ἐπισυνθέντες, εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς· καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν. διττὸν δέ ἐστιν ἀναλύσεως γένος. τὸ μὲν γὰρ ζητητικὸν ταὐτηθῆς, ὃ καλεῖται θεωρητικόν· τὸ δὲ πρακτικὸν τοῦ προτεθέντος λέγειν, ὃ καλεῖται προβληματικόν. δεῖ μὲν οὖν τὸ θεωρητικὸν γένος, τὸ ζητούμενον ὡς ὂν ὑποτιθέμενοι, καὶ

ὡς

ὡς ἀληθὲς, εἶτα ἀφ' ὧν ἐξῆς ἀναλύθων ὡς ἀληθῶς, ἢ ὡς ἔστι καθ' ὑπόθεσιν, προσελθόντας ὅπῃ τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν ἀληθὲς ᾖ ἐκεῖνο τὸ ὁμολογούμενον, ἀληθὲς ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ψεύδει ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ψεῦδος ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον. ὅπῃ δὲ τὸ προβληματικὸν γένος, τὸ προτεθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἶτα ἀφ' ἧς ἐξῆς ἀναλύθων ὡς ἀληθῶς προσελθόντας ὅπῃ τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ ἢ κατὰ μέρος, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθὲν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προτεθὲν, καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα. διορισμὸς δὲ ἐστὶ προσδιαγνῶναι τὸ ὅπῃ, ἢ πῶς, καὶ ποσαχῶς δυνατὸν ἔσται τὸ πρόβλημα. τοσαῦτα μὲν ἦν περὶ ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως.

Τῶν δὲ προειρημένων τῷ ἀναλυομένῳ βιβλίων ἡ τάξις ἐστὶ τοιαύτη. Εὐκλείδου δεδομένων βιβλία ἓν· Ἀπολλωνίου λόγου ἀποτομῆς δύο, χωρίου ἀποτομῆς δύο, ἐπαφῶν δύο· Εὐκλείδου πορισμάτων τρία· Ἀπολλωνίου νεύσεων δύο, τοῦ αὐτοῦ τόπων ἐπιπέδων δύο, κωνικῶν ὀκτώ· Ἀρισταίου τόπων στερεῶν πέντε· Εὐκλείδου τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν δύο· Ἐρατοσθένους περὶ μεσοτήτων δύο. γίνεται βιβλία λά, ὧν τὰς περιοχὰς, μέχρι τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν, ἐξεθέμεθα πρὸς ἐπίσκεψιν, καὶ τὸ πλῆθος τῶν τόπων, καὶ τῶν διορισμῶν, καὶ τῶν πτώσεων, καθ' ἕκαστον βιβλίον· ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα· καὶ ἀδεμίαν ἐν τῇ πραγματείᾳ τῶν βιβλίων καταλέλοιπε ζήτησιν, ὡς ὑπολαμβάνομεν.

Περὶ τῶν Δεδομένων Εὐκλείδου.

Περιέχει δὲ τὸ πρῶτον βιβλίον, ὅπερ ἐστὶ τῶν δεδομένων, ἅπαντα θεωρήματα ἐννενήκοντα· ὧν πρῶτον μὲν καθόλου ἐπὶ μεγεθῶν διαγράμματα κγ'· τὸ δὲ δ' καὶ τὸ κ' ἐν εὐθείαις ἐστὶν ἀνάλογον ἄνευ θέσεως· τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ιδ' ἐν εὐθείαις ἐστὶ θέσει δεδομέναις. τὰ δὲ τούτοις ἑξῆς ι', ἐπὶ τριγώνων ἐστὶ τῷ εἴδει δεδομένων, ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἑπτὰ, ἐπὶ τοχόντων ἐστὶν εὐθυγράμμων χωρίων εἴδει δεδομένων, ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἓξ, ἐν παραλληλογράμμοις ἐπὶ καὶ παραβολῆς εἴδει δεδομένων χωρίων. τῶν δὲ ἐχομένων ε', τὸ μὲν πρῶτον γραφόμενόν ἐστι, τὰ δὲ δ' ἐπὶ τριγώνων χωρίων, ὅτι αἱ διαφοραὶ ἢ δυνάμεων ἢ πλευρῶν πρὸς ταῦτα τὰ τρίγωνα χωρία λόγον ἔχουσι δεδομένον. τὰ δὲ ἑξῆς ἑπτὰ, ἕως τοῦ ὁ καὶ γ', ἐν δυσὶ παραλληλογράμμοις, ὅτι διὰ τὰς ἐν ταῖς γωνίαις καθ' ὑπόθεσιν εἰς δεδομένους εἰσὶ λόγους πρὸς ἀλλήλας· ἔνια δὲ τούτων ἐπιλόγους ἔχει ὁμοίους ἐν δυσὶ τριγώνοις. ἐν δὲ τοῖς ἀφ' ἑξῆς ἓξ διαγράμμασιν, ἕως τοῦ ὁ' ϟ', δύο μὲν εἰσὶν ἐπὶ τριγώνων, δ' δὲ ἐπὶ πλειόνων εὐθειῶν ἀνάλογον ὄντων. τὰ δὲ ἑξῆς τρία, ἐπὶ δύο

tes, per ea quæ deinceps conſequuntur tanquam vera, & quæ ex poſitione ſunt, procedimus ad aliquod conceſſum; quod quidem ſi verum ſit, verum erit & quæſitum; & demonſtratio reſolutioni ex contraria parte reſpondebit: ſi vero falſo evidenti occurramus, falſum erit & quæſitum. In problematico autem genere, quod propoſitum eſt ut cognitum ponentes, per ea quæ deinceps conſequuntur tanquam vera, procedimus ad aliquod conceſſum; quod quidem ſi fieri, compararique poſſit, (quod Datum vocant mathematici,) etiam illud quod propoſitum eſt fieri poterit; & rurſus demonſtratio reſolutioni ex contraria parte reſpondens: at ſi quod fieri evidenter non poſſit occurramus, & problema itidem fieri non poterit. Determinatio autem eſt, quæ declarat quando, & qua ratione, & quot modis problema fieri poſſit. Hæc igitur de Reſolutione & Compoſitione dicta ſunt.

Dictorum autem librorum, qui ad reſolutum locum pertinent, ordo talis eſt. Euclidis Datorum liber unus; Apollonii de Proportionis Sectione libri duo, de Spatii Sectione duo, Tactionum duo; Euclidis Poriſmatum tres; Apollonii Inclinationum duo, ejuſdem Planorum Locorum duo, Conicorum octo; Ariſtæi Locorum Solidorum quinque; Euclidis Locorum ad Superficiem duo; Eratoſthenis de Medietatibus duo. Atque ita omnes libri ſunt numero triginta & unus; quorum periochas, uſque ad Apollonii Conica, tibi expoſuimus ad contemplationem, & multitudinem locorum & determinationum & caſuum in unoquoque libro; ſed & etiam lemmata quæ requiruntur: & in librorum tractatione nullam, ut arbitramur, quæſtionem omiſimus.

De Datis Euclidis.

Primus autem liber, qui eſt Datorum, theoremata nonaginta continet; quorum primum quidem univerſe in magnitudinibus diagrammata habet 23; vigeſimum-quartum vero eſt in rectilineis proportionalibus ſine poſitione: at quæ deinceps ſequuntur quatuordecim ſunt in rectis lineis poſitione datis. Quæ vero ſequuntur decem in triangulis ſpecie datis, ſine poſitione. Quæ ſequuntur ſeptem ſunt de quibuſvis ſpatiis rectilineis ſpecie datis, ſine poſitione. Quæ ſequuntur ſex in parallelogrammis, & applicationibus ſpatiorum ſpecie datorum. Eorum quæ deinceps ſunt quinque, primum quidem eſt in lineis; quatuor vero in ſpatiis triangulis, quod differentiæ quadratorum laterum ad ipſa triangula ſpatia rationem habeant datam. Quæ ſequuntur ſeptem, uſque ad ſeptuageſimum-tertium, in duobus parallelogrammis, quod ob poſitiones in angulis rationem inter ſe datam habeant: aliqua autem horum epilogos ſimiles habent in duobus triangulis. In ſequentibus vero ſex diagrammatibus, uſque ad ſeptuageſimum-nonum, duo quidem ſunt in triangulis, quatuor in pluribus rectis lineis proportionalibus. Quæ deinceps ſunt tria, in

duabus rectis lineis proportionalibus, quæ datum ſpatium continent. At quæ in omnibus octo, uſque ad nonaginta, in circulis oſtenduntur, vel magnitudine tantum datis, vel etiam poſitione; nimirum rectis lineis per datum punctum ductis.

εὐθειῶν ἀνάλογον ἐσῶν, τὰ δ' ἐπὶ, δεδόθη τι σχῆμα χωρίον. τὰ δ' ἐπὶ πάσαις ἐπτὰ, ἕως ἐννενήκοντα δέδονται, τῆς μὲν μεγέθει μόνον δεδομένοις, τῆς δὲ καὶ θέσει, ἀχρόμφων εὐθειῶν ἀπὸ δεδομένου σημείου.

Exhinc perſpicere licet quomodo veteres Geometræ theorema demonſtrarent, vel problema conſtruerent. Non enim, ut neoterici plerique, ſymbolis ſuppoſitis, in calculum arithmeticum ſeſe ſtatim immergebant; ſed ex datis gradum faciebant ad alia, ope penus analytici; nempe Datorum *horum, aliorumque Euclidis, Apollonii, Ariſtæi & Eratoſthenis Librorum* 30. *ſupra enumeratorum. Hujuſmodi Analyſeos apud veteres paſſim extant exempla, nominatim in propoſitionibus* 107, 117, 155, 204, 205, *&c. ſeptimi libri math. collect. Pappi. Inter recentiores Clariſſ. D.* Antonius Hugo de Omerique, *in Analyſi Geometrica Gadibus An.* 1698. *edita, hanc fere veterum Analyſin poſtliminio reducere feliciter eſt aggreſſus.*

Poſtquam Pappus enumeravit Libros, qui ad reſolutum locum pertinent, eorum deſcriptionem particularem aggreditur. Ac primo de Datis Euclidis agit. Ex hujus libri deſcriptione liquet illum temporis injurias eſſe paſſum: ait enim illum theoremata nonaginta continere, cum nunc nonaginta quinque in eo numerentur. Sed libet ſingulas diviſiones diſpicere. Theoremata prima 48 *eodem ſunt ordine, numero, & de iiſdem rebus, quibus à Pappo deſcribuntur. Quæ ſequuntur* 7, *nempe à* 49^na^ *ad* 55^tum^ *inclusive, ſunt (ut à Pappo deſcribuntur) de quibuſvis ſpatiis rectilineis ſpecie datis, ſine poſitione: hæc* 7 *omiſit Commandinus in verſione latina. Sex deinde ſequentia, nempe à* 56^to^ *ad* 61^mum^ *inclusive, reſpondent deſcriptioni Pappi. Sic etiam* 5 *proxima; illorum enim primum eſt de figuris deſcriptis à duabus rectis datam rationem habentibus: loco vero quatuor ſequentium ſunt quinque; exinde proculdubio, quod quæ vulgo numerantur* 64^tum^ *&* 65^tum^ *ſint tantum bini caſus ejuſdem theorematis; eſt enim alterum in oxygoniis triangulis, quod alterum eſt in amblygoniis; adeo ut numerus propoſitionum ſit hic auctus unitate. Sequentia* 7 *à deſcriptione Pappi non diſcrepant, niſi quod horum penultimum ſit de quibuſvis figuris, & ultimum ſit de rectangulo parallelogrammo comparato cum alio rectilineo: patet vero ex Pappi verbis theoremata* 71^mum^ *&* 72^dum^ (*ut vulgo numerantur*) *debere eſſe tantum epilogos, ut &* 75^tum^ *&* 76^tum^; *nam in illis eadem enunciantur de triangulis, quæ prius de parallelogrammis. Adeo ut hic reperiantur quatuor theoremata ſupra numerum, quæ una cum uno, (de quo prius) faciunt quinque ſupra numerum; unde fit ut horum ultimum, quod Pappo eſt* 73^tium^, *ſit* 78^vum^. *Sequentium theorematum duo ſunt in triangulis, ut ait Pappus; at tantum tria in pluribus rectis proportionalibus, licet Pappus numeret quatuor. Pappus proxime deſcribit tria theoremata in duabus rectis proportionalibus, quæ datum continent ſpatium; ſunt tamen quatuor: verum hic aliquis irrepſit error; nequeunt enim duæ rectæ dici proportionales; & præterea vel rectarum harum, vel quadratorum ab illis, ſumma vel differentia data eſt. Octo ſequentia theoremata exacte reſpondent deſcriptioni Pappi. Atque ſic ſunt* 90 *theoremata; nempe ſi vulgo numerata* 64^tum^ *&* 65^tum^ *in unum coaleſcant; &* 71^mum^ *&* 72^dum^, *item* 75^tum^ *&* 76^tum^ *pro epilogis habeantur, qualia ea habet Pappus, & detrahatur unum ex antepenultimis quatuor à Pappo deſcriptis, & ſuppleatur unum in penultimis tribus. Nos eundem, quem à prædeceſſoribus habuimus, numerum, quique in MSS. noſtris obtinet, retinuimus, ne citationes ab auctoribus factæ turbarentur.*

Græcum textum infinitis in locis, ex diverſis quos habuimus codicibus MSS. ſupplevimus; verſionem Latinam Claudii Hardy *ex* Bernardo *emendavimus, & diagrammatibus ſuas literas ex MSS. reſtituimus, quas* Cl. Hardy *immutaverat, ut paucioribus inciſis ſchematibus opus haberet. Euclides enim in Operibus ſuis indubitatis, etiam in hac re adiaphora, methodum elegantem ubique obſervavit; nempe ut prima puncta, primaſque lineas vel figuras prioribus alphabeti literis deſignaret, ſequentia ſequentibus, atque ita porro.*

Unicum theorema 86^tum^ *inſigniter vitiatum videtur; quod tamen ex MSS. reſtitui nequit. Illud ſic legendum crediderim:* Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato; poſſit autem recta data altera majus, alterius quadrato, quam in ratione: & utraque ipſarum data erit. *Vel ſic aliter:* Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato; quadratum autem rectæ quadrato alterius majus ſit, alterius quadrato, quam in ratione: & utraque ipſarum data erit. *Vel ita optime:*

optime: Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato; earum autem quadrata ſimul ſumpta æqualia ſint ſpatio dato: & utraque ipſarum data erit. *Etenim ſi ſic fuiſſet enunciatum hoc theorema, tum poſitis (methodo, ſive potius ſtylo recentiorum) x & y duabus rectis, & angulo dato recto, (nam alter quivis datus angulus differt à recto ſicut* $\frac{m}{n}$ *ab* $\frac{m}{m}$ *ſive* 1, *quæ differentia gradum æquationis nihil mutat,) fiet* $xy = a^2$, *&* $b^2 - x^2 = y^2$ *ſive* $b^2 = x^2 + y^2$; *& reductione facta ad unicam æquationem,* $x^4 - b^2 x^2 + a^4 = 0$, *vel* $y^4 - b^2 y^2 + a^4 = 0$. *Ideoque cum Euclides oſtendat in hoc caſu dari x & y, ſimul oſtendit reſolutionem æquationis hujuſmodi quatuor dimenſionum, nempe* $z^4 * - d z^2 * + c = 0$, *ſicut in ſequente unico theor.* 87, *oſtendit reſolutionem hujuſmodi æquationis* $z^4 * + d z^2 * - c = 0$, *vel hujuſmodi* $z^4 * - d z^2 * - c = 0$. *Unde factum, ut duobus his theorematibus contineretur reſolutio omnium æquationum (quas vocant) biquadraticarum ſecundo & quarto terminis carentium. At ſi theorema hoc* 86^tum *accipiatur modo quo vulgo legitur, tum erit* $xy = a^2$ *&* $x^2 - b^2 . y^2 :: e . f$, *ſive* $f x^2 - f b^2 = e y^2$; *& rejecta x, fiet* $e y^4 + f b^2 y^2 - f a^4 = 0$; *vel rejecta y, fiet* $f x^4 - f b^2 x^2 - e a^4 = 0$. *Atque ſic reſoluta haberetur æquatio hujus formulæ* $z^4 * + d z^2 * - c = 0$, *vel hujus* $z^4 * - d z^2 * - c = 0$; *nempe ejuſdem cum illis quæ in ſequente* 87^mo *reſolutæ ſunt; & formula hæc* $z^4 * - d z^2 * + c = 0$ *omnino omiſſa eſſet ab Euclide: quod minime eſt veriſimile, præſertim ſi conſideretur theor.* 84^to *Datorum reſolutas eſſe æquationes pure quadraticas harum formularum* $z^2 + d c - c = 0$, *&* $z^2 - d z - c = 0$; *&* 85^to *hanc* $z^2 d z + c = 0$; *cujuſmodi æquatio in biquadraticis eſt omiſſa, niſi lectio ſuprapoſita (vel æquipollens alia) admittatur. Immo conſtructionis harum æquationum (ſimpliciter ſive una æquatione, non autem duabus, ut in* 84^to *&* 85^to, *enunciatarum) habita eſt ratio in theorematibus* 58^vo *&* 59^no *Datorum; immo & in ipſis Elementis, prop.* 28^va *&* 29^na *libri* 6; *& prop.* 30^ma *ejuſdem eſt problema quadraticum ex prius oſtenſa methodo conſtructum, ſicut theoremata aliquot verſus finem Datorum ſunt alia hujus methodi exempla.*

SEQUUNTUR *Euclidis duo Tractatus Muſici*; Introductio Harmonica & Sectio Canonis. *In quibus edendis Celeberrimi D.* Walliſii *conſiliis uſi fuimus, qui in Notis ſuis ad Ptolemæi Harmonica (ab ipſo edita) ejuſque Appendice Græcorum Harmonicam feliciter reſtituit & illuſtravit: quo itaque lectorem ablegamus, qui de hac re plura deſiderat. Euclidis, dixi, Tractatus duo; non quod utrumque putemus ab Euclide ſcriptum, (forte neutrum;) ſed quod è nuperis ſcriptoribus quidam hos Euclidi tribuerint. E nuperis, inquam, ſcriptoribus quidam; nam nemo (quod ſcimus) veterum, Ptolemæo antiquiorum, eorum vel utrumque vel alterum memoravit uſpiam; nec in ullo antiquo codice MS. adſcriptum extat Euclidis nomen. (Quæ agnoſcit Meibomius in Præfatione ſua; qui tamen eos Euclidi tribuit, ſed ut ab aliis forſan interpolatos.) Mirum autem eſt, ſi Euclidis fuerint, quod nemo veterum Ptolemæo antiquiorum, nec ipſe Ptolemæus, eorum uſpiam meminerit. Fieri quidem poteſt, quod eorum prior fuerit ab Euclide ſcriptus, qui totus eſt Ariſtoxeneus, Ariſtoxeni hypotheſin per omnia ſecutus; quæ quidem hypotheſis Euclidis tempore recepta fuerat, eaque ſola; atque deinceps ad Ptolemæum uſque, qui primus omnium hanc Canonis Sectionem introduxit, ante quem nemo (quod ſcimus) aut hujus Sectionis, aut etiam hujuſce Canonis mentionem fecit, aut de ea quicquam cogitavit.*

Ariſtoxenus enim ejuſque ſectatores (Ariſtoxenei dicti) pro poſtulato habuerunt, Magnitudinem, qua differunt Dia-pente & Dia-teſſaron, (pro arbitrio ſuo) dicendam Tonum; *atque ad hanc menſuram intervalla reliqua exigebant omnia. Et ſpeciatim Dia-teſſaron cenſebant hujuſmodi Tonos continere duos cum ſemiſſe; Dia-pente, tres cum ſemiſſe; & Dia-paſon, ſex tonos, ſeu quinque Tonos & duo Hemitonia, (Tonos omnes reputantes tum inter ſe, tum hujus æquales;) & Hemitonium, hujuſce Toni præciſe ſemiſſem, de Sonorum inter ſe proportione minime ſolliciti. Ptolemæus autem (omnium primus) hanc Diaſtematum ſeu Intervallorum menſuram per hanc Toni magnitudinem improbans, diſtinguenda cenſuit intervalla Muſica pro Ratione ſeu Proportione, quam inter ſe habent Soni terminantes hæc intervalla, ſecundum Acuminis & Gravitatis gradum conſiderati; quod & Pythagorici ante fecerant, ſed rejecit Ariſtoxenus. Adeoque Dia-paſon cenſuit in Ratione dupla; Dia-pente in ſeſquialtera; Dia-teſſaron in ſeſquitertia; Tonumque ipſum (quo differunt Dia-pente & Dia-teſſaron) in ſeſquioctava; reliquaque intervalla, pro ſua cujuſque Sonorum terminantium proportione. Et quidem, ſumpta pro Canone linea cujuſcunque longitudinis determinatæ, docet, quomodo ſecandus ſit hic Canon, ut hæc ſingula intervalla repræſentet.*

Cui quidem hypotheſi aptè reſpondet Experimentum phyſicum: quippe ſi chorda Muſica, æquabiliter tenſa, intelligatur (ceteris paribus) ſecundum has longitudines diviſa; ejuſdem partes (plectro percuſſæ) ſones exhibebunt gravitate proportionales ſuis reſpective longitudinibus. Atque hinc eſt, quod Ptolemæus, quique illum ſequuntur, (propter hanc Canonis Sectionem,) dici ſolent Canonici; ut reliquis Muſicis (Ariſtoxeneis) contra diſtincti, quos Muſicos *vocant, non* Canonicos.

Atque hanc Ptolemaicam Hypotheſin, Ariſtoxeneæ contrariam, exponit Tractatuum horum poſterior, qui Sectio Canonis dicitur. Adeoque (quicquid ſit de priori) poſterior hic tractatus nullo modo cenſeri poteſt ab Euclide ſcriptus, cum hæc Sectio Canonis non niſi longo poſt Euclidem tempore primum innotuerit, nullaque hujus extent veſtigia in quopiam ſcriptore Muſico (quod ſcimus) qui ſit antiquior Ptolemæo. Fieri quidem poteſt (idque probabiliter) ut, ſi ejuſdem Authoris cenſendus ſit uterque, uterque ſit Ptolemæi, qui forte Hypotheſin Ariſtoxeneam, quæ hucuſque obtinuit, fideliter primum expoſuit; dein expoſitam refutavit, ſeu (ut mollius loquamur) correxit & emendavit. Hoc enim poſteriori Tractatu factum eſt, qui eſt prioris ſolida refutatio. Demonſtrat utique (contra quam ſupponit prior Hypotheſis) Dia-paſon minus eſſe quam ejuſmodi ſex Tonos; & Dia-teſſaron minus quam duos cum ſemiſſe; & Dia-pente minus quam tres cum ſemiſſe: item illos, qui pro Tonis antea cenſebantur, non inter ſe æquales omnes, nec expoſito Tono Diazeuctico, quem ut communem menſuram poſuerint: item, quod dici ſolet Hemitonium, non eſſe expoſiti ſemiſſem, nec poſſe Tonum illum in duas partes æquales (concinnas) dividi. Quæ omnia ἀναντιῤῥήτως demonſtrantur, ſuntque priori hypotheſi plane contraria. Cumque hodierni Muſici practici etiammum loqui ſoleant non raro ſecundum phraſeologiam Ariſtoxeneorum, (de Tonis & Hemitoniis,) intelligendi ſunt non ſecundum Mathematicam ἀκρίβειαν, ſed (latius) vero proximum pro vero ſumentes. Sed, ubi accuratius loqui libet, Tono Diazeuctico (à Meſe ad Parameſen) rationem aſſignant ſeſquioctavam; Tonis quibuſdam minoribus, ſeſquinonam; Hemitonio, ſeſquidecimamquintam; Limmati, ſeſquioctogeſimam; τῷ Dia-teſſaron, ſeſquitertiam; Dia-pente, ſeſquialteram; Ditono, ſeſquiquartam; Dia-paſon, duplam; Dia-paſon cum Dia-pente, triplam; Diſ-dia-paſon, quadruplam; & reliquis ſimiliter. Cumque hæc ſibi ſumpſerit demonſtranda Ptolemæus, omnino candide factum eſt, quod hypotheſin, quam ſubverſum ibat, fideliter primum expoſuerit, (ne cenſeretur vel cum umbris dimicare, vel adverſariis eſſe injurius,) deinde falſitatis arguerit. Hinc eſſe ſuſpicamur, quod ſoleant hi Tractatus junctim incedere; quaſi fuerint ejuſdem Auctoris Tractatus duo, aut ejuſdem (ſi libet) Tractatus duæ partes. Atque hæc ſunt quæ de Authore dicenda putavimus, quem Ptolemæum fuiſſe potius cenſeamus. Euclidis interim nomen ideo retinemus, eo quod huic ab aliis ſint adſcripti; reliquiſque ſcriptis Euclideis hic ſubjungimus, ne cenſeamur Euclidis quicquam omiſiſſe: ſuntque Tractatus ipſi (cujuſcunque fuerint Authoris) merito æſtimandi.

In his edendis Meibomii editionem (Amſtelodami habitam, Anno 1652) *in Textu Græco fere per omnia ſequimur; præterquam ubi (in Notis ſuis) aliquid immutandum ſubinnuit ipſe, ut qui in his aliiſque veteribus Muſicis edendis & reſtituendis utilem impendit operam. Apud ipſum videat (cui libet) variantes variorum codicum lectiones, & cur hos aliis prætulerit; quibus codicibus uſus fuerit; quid alii de Authore ſenſerint; aliaque rem ipſam ſpectantia, ſcitu digna. Ejuſdem verſionem Latinam ut plurimum retinemus, paucis tamen in locis ſubinde mutatam; præſertim quod pro Latinis literis ſchemata reſpicientibus ſubſtituimus ubique Græcas, ut quæ ſchematiſmis aptius inſerviant. Sed & voces aliquot parce immutavimus. Sic, verbi gratia, pag.* 1. *lin.* 13. ποιὰν τάξιν ἐχόντων, *quod ille reddit* certum quendam ordinem ſervantibus, *aptius reddendum putamus* ſecundum qualitatem ordinatis, *pag.* 533. *lin.* 10. *Non enim* τινὰ *dicitur, (ut indeterminatum, ſeu indefinitum, innuat;) ſed* ποιὰν, *quod Prædicamentum Qualitatis reſpiciat: quippe ejuſdem ſoni Productio & Contractio (ſeu Longitudo & Brevitas) ſoni Quantitatem reſpiciunt; ſed (quæ hic conſiderantur) Intenſio & Remiſſio (ſeu Acumen & Gravitas) ejuſdem Qualitatem: quod innuit vox* ποιά. *Et ſimiliter ubi vox* ποιὰ *vel* ποιότης *occurrit. Et mirum eſt, quod Interpretes (tum hic tum alibi) id non obſervaverint. Sic vocem* ποιὸν, *quam ille variis in locis (varietatem affectans) aliter atque aliter reddit,* intenſionem, finitionem, determinationem, *&c. nos* tenſionem *ubique reddimus; vocabulis artis preſſius inſiſtendum putantes, quo ambiguitatem vitemus. Item Rationes, quæ ipſi (novis vocibus) paſſim vocantur* ſeſcupla, ſupertertia,

tertia, superoctava, &c. (*quo linguam Latinam, ut ille loquitur, novis vocabulis ditare possit,*) *nos receptioribus vocabulis dicimus* sesquialteram, sesquitertiam, sesquioctavam, &c. *quæ voces sunt nec minus latinæ, & melius natæ, & ab ipso aliquando admissæ. Idque potissimum facimus, quia liquet Mathematicos scriptores, & Euclidem maxime, non varietati phrasium indulgere, sed ad statas loquendi formulas stylum suum accommodare.*

Sic vocem ἄγειν, *quam Meibomius* (*p.* 2. *l.* 31.) *reddit* ascendit, *nos* tendit *reddimus,* (*p.* 533. *l. ult.*) *nam vox* ἄγειν *non magis Ascensum innuit quam Descensum. Et apud Meibomium* (*p.* 3. *lin.* 12, 14, 17, 19.) *simili sensu occurrunt voces* deferetur, erigetur, descendet, ascendet, (*innuentes Acutum in Alto, & Grave in Imo,*) *quas nos* (*pag.* 534. *l.* 15, 16, 18, 19.) *expungendas censuimus; tum, quia nihil est in Græco textu quod his vocibus Latinis respondeat; tum maxime, quia Euclides* (*aut quisquis fuerit horum Tractatuum Author*) *nusquam docet Intensionem Ascendendo fieri, nec Remissionem Descendendo.*

Verum quidem est, quod hodierni Musici sic loqui soleant, (*Acutum in Alto reputantes, & Grave in Imo,*) *quodque ex Græcis recentioribus nonnulli sic aliquando* (*sed raro*) *loquuti videantur; apud quos sensim inolevit mos sic loquendi. Hinc est quod apud recentiores Græcos Modus Hypodorius dicitur, qui quam Dorius Gravior; & Hypophrygius quam Phrygius* (*toto Dia-tessaron,*) *& in reliquis similiter; & Hypermixolydius acutior quam Mixolydius. Nec tamen omnes eodem sensu loquuntur: nam Nicomacho* (*pag.* 7. *lin.* 12.) *Hypermese est quam Mese gravior; totoque decursu suo Grave reputat Infimum & Acutum Altissimum. Atque Aristides Quintilianus* (*pag.* 18. *editionis Meibomianæ*) *Tonum Hypodorium acutiorem facit quam Dorium; & Hypophrygium quam Phrygium; & Hypolydium quam Lydium. Sed antiquiores Græci plane contrarium,* (*Grave reputantes in Alto, & Acutum in Imo.*) *Hinc est quod Tetrachordorum Gravissimum dicitur Hypaton* (ὑπατῶν) *Chordarum* Supremarum; *deinde Meson* (μέσων) Mediarum; *& tandem* (νητῶν *sive* πάτων) Ultimarum *sive* Novissimarum. *Et, in eodem Tetrachordo, Chorda gravissima Hypate* (ὑπάτη) *Chorda* Suprema *dicitur; Parypate* (παρυπάτη) Supremæ proxima; *& Nete* (νήτη *sive* νεάτη) Ultima *sive* Novissima. *Sic Hypate Hypaton, Parypate Hypaton, Hypate Meson, Parypate Meson &c, Grave pro Summo indicant olim habitum; eademque nomina etiamnum retinentur. Horumque Author Tractatuum à Proslambanomeno* (*serius assumpto*) *procedit ad Hypaten Hypaton, Parypaten Hypaton, & sic continue, ad Acutiores sonos descendendo. Quod etiam ad Boëthii tempora continuatum est, qui, in schematismis suis, Grave semper in Summo ponit, & Acutum in Imo. Nolimque Euclidis authoritatem prætendi, quasi sua ætate sic fuerint loquuti, ut nunc dicrum. Non interim negemus, quin fieri possit ut Aristoxeni ætate admissum fuerit, ut omnium acutissimum, Tetrachordon* ὑπερβολαίων, (excellentium, supereminentium, extravagantium, insuper adjectorum, *pluribus enim modis Latine redditur ea vox;*) *nam semel occurrit vox* ὑπερβολαίος *apud Aristoxenum,* (*p.* 40. *lin.* 7. *editionis Meibomianæ,*) *qui est omnium quos nunc habemus Musicorum antiquissimus, sed Platone & Aristotele junior, quos ambos ipse citat sub initium libri secundi; & quibus etiam non multo juniorem esse Euclidem nostrum superius ostensum est, ut non possibile sit Tractatus hosce duos ab ipso fuisse scriptos. Sed sciendum est, tum Proslambanomenon, in Grave; tum totum Hyperbolæon Tetrachordum, in Acutum, multo serius admissa fuisse, quam indita fuerint priora nomina ab iis qui chordam Gravissimam censuerint* (ὑπάτων) Supremam. *Et quidem Vocis* Motum in Acutum, & Motum in Grave, *item* Intensionem & Remissionem, *passim habemus apud scriptores Musicos; sed* (*pro illis*) Ascensum & Descensum *nemo* (*quod scimus*) *dixerit Græcorum veterum.*

Tractatus *Musicos excipiunt* Phænomena; *Liber certe unicus, qui à Geometra scriptus cœlestia ullo modo attingit. Hujus meminit Joannes Grammaticus Philoponus ad* 2. *Phys. Aristot.; meminit etiam Pappus in lib.* 6, *ubi queritur casus esse omissos in ejus Theor.* 2^do 12^mo 13^tio *&c, quos supplet: unde patet Pappum librum hunc pro corrupto habuisse; neque enim de Euclide dixisset, quod propositiones* ἀμελέτως, negligenter, *intelligeret. Hoc alterius patet ex secundis demonstrationibus possim interpolatis, & ex scholiis* ἐκ περιουσῆ. *Liber hic Phænomenôn supponit Elementa sphærica tunc extantia: cum vero nihil supersit hâc de re scriptum ante Euclidem, præter Autolyci Pytanei Librum de Sphæra quæ movetur, hunc unicum citandum censuimus. Neque enim concinnum judicavimus, ad astruenda quæ ab Euclide asseruntur, Sphærica afferre Theodosii, quæ multis post seculis scripta sunt.*

In hoc edendo codices MSS. diligenter contulimus, ut textus Græcus, qui nunc primo lucem aſpicit, quam caſtigatiſſimus prodiret. Theor. 2. *vox* ἀρκτικοῦ, *redditur* Poli arctici, *non* Circuli. *Theor.* 4. *& alibi ſæpius, loco* μεσημβρινὸς, *legimus* μέγιστος κύκλος, *exigente ſenſu. Verſione uſi ſumus Joſephi Auriæ Anno* 1591. *Romæ edita, at plurimis in locis emendata. Schemata reſtituimus qualia in MSS. reperiuntur, quæ intellectu multo ſunt faciliora. Zamberti & Auriæ theoremata* 14 *&* 15 *in unum conjecimus, tam ex fide optimorum codicum, quam ex rei ipſius natura; ſunt enim ejuſdem theorematis tantum caſus diverſi.*

Proximè *apparent* Optica & Catoptrica. *Horum meminit Proclus in lib.* 2, *& Marinus in Præf. in Data; at nullibi (quod ſciam) Pappus: tantum enim abeſt, ut, dum lib.* 6. *collect. math. Prop.* 50, 51 *idem demonſtrat quod Euclides Theor.* 35, 36 *&* 37 *Opticæ, nullam mentionem Euclidis injiciat: poſtquam vero hanc rem abſolviſſet, nempe Prop.* 55. *ejuſdem Libri, de Aſtronomicis verba faciens, Euclidis Phænomenôn meminit, eaque ſupplevit. Multa nos movent ut ſuſpicemur Opus hoc eße ſpurium; vel, ſi hujuſmodi Opus ab Euclide fuerat conſcriptum, illud temporis lapſu prorſus fuiſſe corruptum. Multa, inquam, ſunt quæ hoc ſuadeant; quorum pauca, præter dicta de Pappi ſilentio, adnotare non pigebit. Ipſum Præfationis initium ſatis oſtendit hanc ſaltem ab Euclide non eſſe profectam: loquitur enim non in perſona ſua, ſed in alia ſive tertia; oſtenditque de peripheria circulari quod in Optica demum fit ad Prop.* 22. *Ut taceam modum, hic & in Catoptrica, angulos deſignandi, quem Euclides nullibi adhibuit. Porro nemo concinnitati & elegantiæ Euclidis aßuetus putabit Poſitiones* 5, 6 *&* 7, *item* 8 *&* 9, *rurſuſque* 10 *&* 11 *eſſe Euclidis. Rurſus Phænomena* 1, 2 *&* 3 *Catoptricæ ſunt prorſus falſa: occupato etenim eo ſpeculi (ſive plani, ſive convexi, ſive cavi) loco, in quem cadit perpendicularis ducta à re aſpectabili ad ſpeculum, res aſpectabilis etiamnum cernitur: mirorque hoc pro Phænomeno proponi à quopiam philoſopho, nedum ab Euclide, cum quotidiana experientia in ſpeculis planis contrarium doceat. Ultimum Phænomenon verum quidem eſt, at ad Catoptricam nihil attinens: Dioptricum enim eſt prorſus, nec quiſquam eſt ejus in hoc libro uſus. Pars theor.* 5. *contraria eſt theor.* 6, *eſtque utrumque ineptiſſime prolatum. Septimum theor. & quinque ſequentia pendent à* 16, 17 *&* 18, *quæ Euclidem minime ſapiunt; atque hæc rurſus à tribus Phænomenis ſupra dictis: ideoque licet* 7 *&* 16 *vera ſunt, tamen non ſunt demonſtrata: reliqua vero duo,* 17 *&* 18, *ne quidem ſunt vera; hoc eſt, viſibilis extremitatis imago non eſt in concurſu radii reflexi per oculum tranſeuntis cum perpendiculari ab eadem ad ſpeculum. Theorema* 25 *omnino falſum eſt, atque hic error ab Alhazeno & Vitellione continuatur. Theoremata* 23, 28 *&* 29 *veram ſapiunt Catoptricam: abeſt tamen ſuppoſitio, quod plures radii ab eodem viſibilis puncto manant; abſque qua difficile prorſus eſt ſolidi quidquam in Catoptricis invenire. Theorema ultimum nulli innititur demonſtrationi, ac experientiæ prorſus eſt contrarium: non enim circa centrum ſpeculi cavi Soli oppoſiti accenditur ignis, ſed in medio puncto centrum inter & ſpeculum. Quod theorema hoc ſit hic perperam demonſtratum, agnoſcit Vitellio prop. ult. lib.* 8. *ſuæ Opticæ, & pſeudographiam detegit; attamen, neque illic, neque ad prop.* 37. *lib.* 9, *ubi rem hanc rurſus tractat, verum locum definit. In hiſce Auctor aſſumit viſum fieri per emiſſionem radiorum ex Oculo in Objectum: & licet hoc maximis prematur difficultatibus ex Phyſica petitis, in re tamen Mathematica, ubi Oculus habetur tanquam punctum videns, eodem redit cum hypotheſi emiſſionis radiorum ex Viſibili, & intramiſſionis in Oculum; concinnius tamen putabant veteres radium ab animato Oculo verſus Objectum dirigi, quam ab Objecto inanimato verſus Oculum; nunquam enim (quod res eſt) de radiis ab unoquoque viſibilis puncto circumquaque perpetuo manantibus cogitarunt. Verſione latina Joannis Penæ ſumus uſi, Græcumque textum quam potuimus caſtigatum fecimus: adjecimus paſſim Notas doctiſſimas & reſtitutiones, quas Illuſtris* Savilius *ad oram marginis adſcripſerat, ex quibus liquet illum recte exiſtimaſſe* Euclidis Opticæ & Catoptricæ libros eſſe non magni momenti.

Scripsit *etiam Euclides Librum* περὶ διαιρέσεων, de Diviſionibus, *teſte Procl.* Joannes Dee *Londinenſis, cum Librum de Diviſionibus ſuperficierum,* Machometo Bagdedino (*qui floruiße creditur ſeculo Chriſti decimo*) *vulgo adſcriptum, ex Arabico (uti credo, licet hoc expreſſe non dicat) in Latinum verteret, & Commandino in lucem publicam edendum committeret, ſic ſcribit:* "*Cum ipſemet Euclides Librum de Diviſionibus ſcripſerit,* "*nullum, qui ſub hoc titulo extet, alium novimus, nec qui jure meliori propter tractandi* "*excellentiam Euclidi aſcribi queat, invenire poſſumus ullum: nullius enim Machometi*

"*tantum*

"tantum in Mathematicis acumen adhuc perſpicere ex eorum, quæ habemus, monimentis "potuimus, quantum in his ubique elucet problematibus. Denique in antiquiſſimo quodam "Geometrici negocii fragmento memini me expreſſis verbis ex hoc libello locum citatum le- "giſſe, veluti ex Euclidis certiſſimo opere. Porro invenimus ad hæc verba lib. 2. Procli, Circulus namque, & Rectilineorum quodlibet, in ratione diſſimiles dividi poteſt figuras; quod & ipſe Euclides in Diviſionibus pertractat, *ipſius* Jo. Dee *manu ſcriptum*: "Clarum hinc eſſe poteſt Librum illum, ſive Fragmentum, de Diviſionibus Super- "ficierum, quem nos cum Mathematico excellentiſſimo D. Federico Commandino Urbini "reliquimus, Anno 1563, ipſius Euclidis fuiſſe; quod tum conjiciebamus quidem, aliis ar- "gumentis adducti, hujus loci immemores. Ex hoc ipſo tamen Procli loco colligit Savilius *hunc librum non eſſe Euclidis*: "Atqui nulla eſt (inquit in Prælect. 1.) in illo Bagdedini "libello propoſitio, quæ figuras doceat in ſimiles vel diſſimiles figuras dividere, ſed in datam "proportionem dividere. Inter contrarias graviſſimorum Virorum opiniones de auctore hujus Libri, illum hoc in loco edendum judicavimus, quod & raro admodum reperiatur, & Euclidem auctorem magis ſapiat quam Optica & Catoptrica pro ejuſdem Libris habitæ. Illum Latine tantum exhibemus; Græce enim, quod ſciamus, nullibi reperitur; neſcimus an Arabice, in aliqua Italiæ bibliotheca. Euclidis propoſitiones ab illo citatas numeravimus, non ut ille Campanum ſecutus, ſed prout in hac editione numerantur. Notas pauculas Illuſtris Savilii adjecimus, quæ locis quibus adjectæ ſunt multum lucis afferunt.

Tres *item* Poriſmatum *Libros edidit Euclides, teſte Pappo & Proclo. Et Proclus quidem, in commentariis, Poriſma hujuſmodi dicit Propoſitionem, quæ neque Problema eſt neque Theorema, id eſt, quæ neque generationem aut πίνον alicujus rei requirit, neque ſimplicem contemplationem; ſed inventionem tantum: ut Dati Circuli centrum invenire, & quæ huic ſimilia; alia plane ac diverſa notione vocis Poriſmatis, quam quæ in Elementis. Perierunt hi Libri magno rei Geometricæ, Loci præſertim Reſoluti, damno. Ex iis vero quæ in 7^mo lib. Pappi (tum in Præf. tum à Prop. 127. ad 165.) ſuperſunt, non difficile futurum reor illos quodammodo reſtituere, ubi Textus Græcus lucem aſpexerit: Commandini namque verſio Præfationis latina mentem Pappi minime aſſequitur.*

Pappus *etiam in dicto lib. 7. commemorat Euclidis* τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν, Locorum ad Superficiem, *Libros duos, ad Analyſin Geometricam itidem pertinentes; ſed qui etiam periere. Horum nihil conſignavit Pappus præter Lemmata quatuor.*

Fallaciarum, ψευδαρίων, *quoque Librum ab Euclide conſcriptum memorat Proclus in Libro 2^do; de quo ſic ſcribit*: "Quoniam multa mente concipimus ut veritati ad- "hærentia, & ſcientificis principiis conſentanea, quæ à principiis aberrant & ſimpliciores "decipiunt; methodos tradidit Euclides altera ab alteris prudenter diſcernendi, per quas "hujus diſciplinæ tirones fierent exercitatiores ad deprehendendos paralogiſmos, & à fal- "laciis & captionibus cautiores. Atque hunc Librum, per quem hanc infert nobis præpara- "tionem, Fallaciarum inſcripſit; quippe qui modos ipſarum omnes ordine enumeravit, at- "que in horum unoquoque cogitationem noſtram variis exercuit theorematibus, & Fallacia "Verum comparavit, ipſique experientiæ deceptionis redargutionem coaptavit. Hic itaque "Liber purgandi exercendique vim habet; ſicut Elementaris Geometriæ Inſtitutio invinci- "bilem perfectumque habet ordinem. Periit & hic magno totius rei literariæ damno.

"Euclides, *teſte Pappo in lib. 7, ſecutus Ariſtæum ſcriptorem luculentum in iis* "quæ de Conicis tradiderat, neque antevertens, neque volens eorum tractationem deſtruere, "cum mitiſſimus eſſet & benignus erga omnes, quatuor Libros Conicorum *ſcripſit, quos* "Apollonius (qui Euclidis diſcipulis Alexandriæ longo tempore operam dedit) explevit, ac "iis quatuor alios adjunxit. De his igitur plura non dicemus, cum brevi forſan Apollo- "nii Conica Græce, Mathematicis hucuſque inviſa, edendi occaſio dabitur.

Est & *Fragmentum quod in Zamberti editione latina Euclidi adſcribitur*, de Levi & Ponderoſo. *Neſcio qua auctoritate fretus iſtud fecerit* Jo. Hervagius *editor; neque enim aliud dicit, quam quod dum hæc ederet, illud ad ſe fuerit allatum.* Savilius *illud pro ſpurio habet. Nos, cum paginam non excedat, edimus, prout illud accepimus; ne quid in hac noſtra editione deſideretur.*

Oxoniæ,
Junii 10. 1703.

ELENCHUS OPERUM.

Elementorum Libri XV.	Pag. 1.
Data, cum Præfatione Marini	461.
Introductio Harmonica.	533.
Sectio Canonis.	547.
Phænomena.	557.
Optica.	601.
Catoptrica.	645.
De Divisionibus Liber.	667.
De Levi et Ponderoso Fragmentum.	685.

EY-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ*.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.

ΟΡΟΙ.

α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β'. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές.

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.

δ'. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξίσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε'. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ϛ'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

ζ'. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξίσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι'. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ια'. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ'. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ'. Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

DEFINITIONES.

1. Punctum est, cujus pars nulla est.

2. Linea autem est longitudo non lata.

3. Lineæ vero extrema sunt puncta.

4. Recta quidem linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.

5. Superficies autem est, quod longitudinem & latitudinem tantum habet.

6. Superficiei vero extrema sunt lineæ.

7. Plana quidem superficies est, quæ ex æquo suas lineas rectas interjacet.

8. Planus vero angulus est duarum linearum, in plano sese tangentium, & non in directum jacentium, mutua inclinatio.

9. Quando autem lineæ angulum comprehendentes rectæ fuerint, angulus ipse appellatur rectilineus.

10. Cum vero recta linea super rectam lineam insistens angulos deinceps inter se æquales fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: & quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur ad eam super quam insistit.

11. Obtusus angulus est, qui major est recto.

12. Acutus autem, qui est recto minor.

13. Terminus est, quod alicujus est extremum.

* Quidam Codices addunt: Καὶ τὰ Θεωρήματα.

14. Fi-

14. Figura eſt, quæ aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

15. Circulus eſt figura plana una linea comprehenſa, quæ circumferentia appellatur, ad quam, ab uno puncto eorum quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

16. Hoc autem punctum, centrum circuli nuncupatur.

17. Diameter vero circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte circumferentiâ circuli terminata: quæ etiam circulum bifariam ſecat.

18. Semicirculus eſt figura comprehenſa ſub diametro, & ea circuli circumferentia, quæ à diametro intercipitur.

19. Segmentum circuli eſt, quod recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.

20. Rectilineæ figuræ ſunt, quæ rectis lineis comprehenduntur.

21. Trilateræ quidem, quæ tribus.

22. Quadrilateræ, quæ quatuor.

23. Multilateræ vero, quæ pluribus quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

24. E trilateris autem figuris, æquilaterum triangulum eſt, quod tria latera habet æqualia.

25. Iſoſceles autem, quod duo tantum æqualia habet latera.

26. Scalenum vero, quod tria latera habet inæqualia.

27. Adhæc, è trilateris figuris, rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

28. Amblygonium autem, quod habet angulum obtuſum.

29. Oxygonium vero, quod tres habet angulos acutos.

30. E figuris autem quadrilateris, quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum eſt & rectangulum.

31. Oblongum, quod rectangulum quidem eſt, ſed non æquilaterum.

32. Rhombus, quod æquilaterum quidem eſt, ſed non rectangulum.

33. Rhomboides, quod habet oppoſita

ιδ'. Σχῆμά ἐϛι, τὸ ὑπό τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε'. Κύκλος ἐϛὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια· πρὸς ἣν, ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ις'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐϛὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη'. Ημικύκλιον δέ ἐϛι τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ιθ'. Τμῆμα κύκλου ἐϛί, τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

κ'. Ευθύγραμμα σχήματά ἐϛι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

κα'. Τρίπλευρα μέν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

κβ'. Τετράπλευρα δέ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

κγ'. Πολύπλευρα δέ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κδ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μέν τρίγωνόν ἐϛι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

κε'. Ισοσκελὲς δέ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

κϛ'. Σκαληνὸν δέ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κζ'. Επὶ τι, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μέν τρίγωνόν ἐϛι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

κη'. Αμβλυγώνιον δέ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

κθ'. Οξυγώνιον δέ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

λ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μέν ἐϛιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐϛι καὶ ὀρθογώνιον.

λα'. Ετερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

λβ'. Ρόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

λγ'. Ρομβοειδὲς δέ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς

πλευρὰς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

λδ'. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

λε'. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

34. Reliqua autem quadrilatera præter hæc, vocentur trapezia.

35. Parallelæ denique rectæ lineæ ſunt, quæ in eodem jacentes plano, atque ex utraque parte in infinitum productæ, in neutram ſibi coincidunt.

AITHMATA.

α'. Ἠτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

POSTULATA.

1. POſtuletur, à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

2. Item rectam lineam finitam continue in directum producere.

3. Item quovis centro & intervallo circulum deſcribere.

KOINAI ENNOIAI.

α'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

δ'. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

ε'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

ϛ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

ζ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίσεα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

η'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

θ'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

ι'. * Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ια'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δυσὶν ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

ιβ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι.

COMMUNES NOTIONES, SIVE AXIOMATA.

1. QUÆ eidem æqualia, inter ſe ſunt æqualia.

2. Item ſi æqualibus æqualia addantur, tota ſunt æqualia.

3. Item ſi ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt æqualia.

4. Item ſi inæqualibus æqualia addantur, tota ſunt inæqualia.

5. Item ſi ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt inæqualia.

6. Item quæ ejuſdem ſunt duplicia, inter ſe ſunt æqualia.

7. Item quæ ejuſdem ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt.

8. Item quæ ſibi mutuo congruunt, ſunt æqualia.

9. Item totum ſua parte majus eſt.

10. * Item omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

11. Item ſi in duas rectas lineas recta incidens angulos interiores & ad eaſdem partes duobus rectis minores fecerit; duæ illæ rectæ, in infinitum productæ, coincident inter ſe ex ea parte, ad quam ſunt anguli duobus rectis minores.

12. Item duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

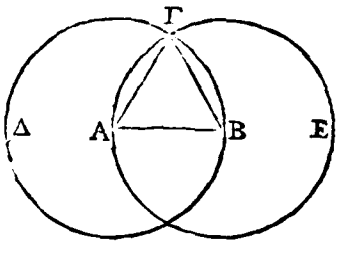
* In quibuſdam Codicibus Axiomata 10 & 11 inter Poſtulata numerantur.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datam rectam terminatam, triangulum æquilaterum conſtituere.

SIT data recta terminata AB: oportet vero ſuper rectam AB triangulum æquilaterum conſtituere.

Centro quidem A, intervallo autem AB, deſcribatur [per 3. poſt.] circulus BΓΔ; & rurſus centro B, intervallo BA, deſcribatur circulus AΓE; & à puncto Γ, in quo circuli ſeſe mutuo ſecant, ad puncta A, B ducantur [per 1. poſt.] rectæ ΓA, ΓB.



Quoniam igitur punctum A eſt centrum circuli ΓΔB, recta AΓ [per 15. def.] erit æqualis ipſi AB: rurſus, quoniam punctum B eſt centrum circuli ΓAE, erit BΓ æqualis rectæ BA. oſtenſum autem eſt rectam ΓA æqualem eſſe rectæ AB: utraque igitur rectarum ΓA, ΓB æqualis eſt rectæ AB. quæ autem eidem ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia; recta igitur ΓA rectæ ΓB æqualis eſt: quare tres rectæ ΓA, AB, BΓ inter ſe ſunt æquales.

Eſt igitur [per 24. def.] triangulum ABΓ æquilaterum, atque etiam conſtitutum ſuper datam rectam terminatam AB. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐπὶ τῆ δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη ἡ AB· δεῖ δὴ ἐπὶ τῆ AB εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ AB, κύκλος γεγράφθω ὁ BΓΔ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ B, διαστήματι δὲ τῷ BA, κύκλος γεγράφθω ὁ AΓE· καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ A, B σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓA, ΓB.

Ἐπεὶ οὖν τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔB κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AΓ τῇ AB· πάλιν, ἐπεὶ τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓAE κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BΓ τῇ BA. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓA τῇ AB ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓA, ΓB τῇ AB ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓA ἄρα τῇ ΓB ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓA, AB, BΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

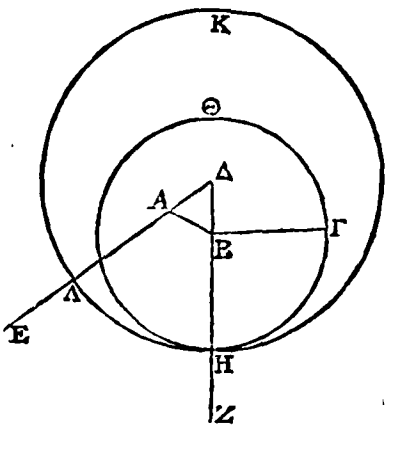
Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆ δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆ AB. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum, datæ rectæ æqualem rectam ponere.

SIT datum punctum A, & data recta BΓ: oportet quidem ad punctum A, rectæ BΓ æqualem rectam ponere.

Ducatur [per 1. poſt.] ab A puncto ad punctum B recta AB; & ſuper eam [per 1. prop.] conſtituatur triangulum æquilaterum ΔAB, producanturque in directum ipſis ΔA, ΔB rectæ AE, BZ; dein centro B, intervallo BΓ, deſcribatur [per 3. poſt.] circulus ΓHΘ: & rurſus centro Δ, intervallo ΔH, deſcribatur circulus HKΛ.



Quoniam igitur punctum B eſt centrum circuli ΓHΘ, erit [per 15. def.] recta BΓ æqualis rectæ BH. rurſus, quoniam punctum Δ centrum eſt circuli HKΛ, erit recta ΔΛ rectæ ΔH æqualis; ex quibus ΔA æqualis eſt ΔB: reliqua igitur AΛ, [per 3. ax.] reliquæ BH æqualis erit. oſtenſum autem eſt rectam BΓ rectæ BH æqualem eſſe: utraque igitur rectarum AΛ, BΓ rectæ BH æqualis eſt. quæ vero eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia: ergo & recta AΛ æqualis eſt rectæ BΓ.

Ad datum igitur punctum A, datæ rectæ BΓ æqualis poſita eſt recta AΛ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ BΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ A σημείῳ, τῇ BΓ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ B σημεῖον εὐθεῖα ἡ AB· καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔAB, καὶ ἐκβεβλήθωσαν ἐπ' εὐθείας τῇ ΔA, ΔB εὐθεῖαι αἱ AE, BZ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ B, διαστήματι δὲ τῷ BΓ, κύκλος γεγράφθω ΓHΘ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔH, κύκλος γεγράφθω ὁ HKΛ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓHΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BΓ τῇ BH. καὶ πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ HKΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔH, ὧν ἡ ΔA τῇ ΔB ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ AΛ λοιπῇ τῇ BH ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ BΓ τῇ BH ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν AΛ, BΓ τῇ BH ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ AΛ ἄρα τῇ BΓ ἐστιν ἴση.

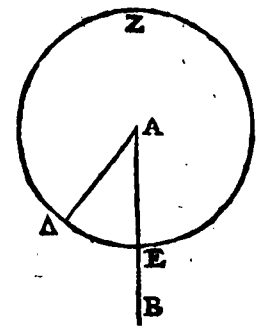
Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ A, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ BΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ AΛ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

ΕΣτωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.



Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. III. Probl.

Datis duabus rectis inæqualibus, à majore auferre rectam æqualem minori.

SInt duæ datæ rectæ inæquales ΑΒ & Γ, quarum major sit ΑΒ: oportet à recta ΑΒ majore auferre rectam æqualem rectæ Γ minori.

Ponatur [per 2. prop.] ad punctum Α recta ΑΔ æqualis rectæ Γ; & centro Α, intervallo ΑΔ, describatur [per 3. post.] circulus ΔΕΖ.

Et quoniam punctum Α centrum est circuli ΔΕΖ, erit recta ΑΕ æqualis rectæ ΑΔ: est autem recta Γ æqualis eidem ΑΔ. utraque igitur rectarum ΑΕ, Γ æquatur rectæ ΑΔ: quare & recta ΑΕ est æqualis rectæ Γ.

Datis igitur duabus rectis inæqualibus ΑΒ, Γ, ab ΑΒ majore ablata est ΑΕ æqualis rectæ Γ minori. quod erat faciendum.

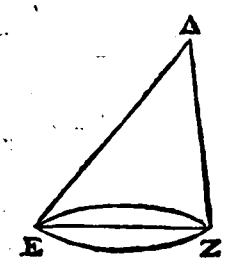
ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τὰς ἴσας εὐθείας περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

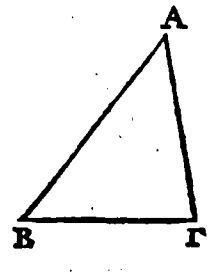
Prop. IV. Theorema.

Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; & angulum æqualem angulo, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: habebunt & basim basi æqualem, & triangulum erit triangulo æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquabuntur, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur.

ΕΣτω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.



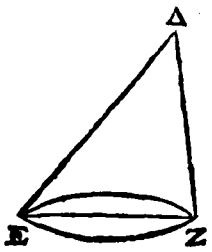
Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου μὲν τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει, ὥστε βά-



SInt duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, habentia duo latera ΑΒ, ΑΓ æqualia duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ, alterum alteri; nempe latus ΑΒ æquale lateri ΔΕ, & latus ΑΓ lateri ΔΖ, & angulum ΒΑΓ æqualem angulo ΕΔΖ: dico & basim ΒΓ æquari basi ΕΖ, & triangulum ΑΒΓ æquari triangulo ΔΕΖ, & reliquos angulos reliquis angulis æquari, alterum alteri, quibus latera æqualia subtenduntur; angulum nempe ΑΒΓ angulo ΔΕΖ, & angulum ΑΓΒ angulo ΔΖΕ.

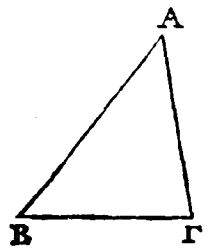
Nam si ΑΒΓ triangulum applicetur triangulo ΔΕΖ, posito puncto Α super punctum Δ, & recta ΑΒ super rectam ΔΕ; punctum Β congruet puncto Ε, quia recta ΑΒ æquatur rectæ ΔΕ: congruente autem recta ΑΒ rectæ ΔΕ, congruet etiam recta ΑΓ rectæ ΔΖ, quia angulus ΒΑΓ æqualis est angulo ΕΔΖ: quare & punctum Γ congruet puncto Ζ, quia recta ΑΓ æqualis est rectæ ΔΖ. punctum autem Β congruebat puncto Ε, id-

circo baſis ΒΓ congruet baſi ΕΖ: nam ſi punctum Β congruat puncto Ε, & punctum Γ puncto Ζ, baſis autem ΒΓ non congruat baſi ΕΖ; neceſſe eſt duas rectas comprehendere ſpatium, quod [per 12. ax.] fieri non poteſt. congruet igitur baſis ΒΓ baſi ΕΖ, eique æqualis erit: quare & totum triangulum ΑΒΓ congruet toti triangulo ΔΕΖ, eritque ei æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent, iiſque æquabuntur; nempe angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ, & angulus ΑΓΒ angulo ΔΖΕ.



Si igitur duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus æqualia, alterum alteri; & angulum habuerint angulo æqualem, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: habebunt & baſim baſi æqualem, & triangulum triangulo erit æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. quod erat demonſtrandum.

ſις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει· οἱ μὲν γὰρ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος, τὸ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.



Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. V. Theor.

Triangulorum iſoſcelium anguli ad baſim ſunt inter ſe æquales: &, productis æqualibus rectis, anguli ſub baſim erunt inter ſe æquales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

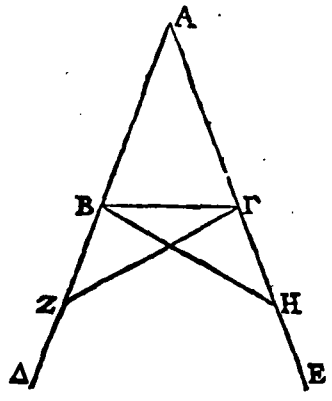
Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

SIT triangulum iſoſceles ΑΒΓ, habens latus ΑΒ æquale lateri ΑΓ, & producantur [per 2. poſt.] rectæ ΒΔ, ΓΕ in directum rectis ΑΒ, ΑΓ: dico angulum ΑΒΓ æqualem eſſe angulo ΑΓΒ, item angulum ΓΒΔ æqualem eſſe angulo ΒΓΕ.

Sumatur enim in recta ΒΔ punctum quodlibet Ζ, & ab ΑΕ recta majore auferatur [per 3. prop.] recta ΑΗ æqualis rectæ ΑΖ minori, & ducantur rectæ ΖΓ, ΗΒ.

Quoniam igitur ΑΖ æquatur rectæ ΑΗ, & ΑΒ rectæ ΑΓ, duæ etiam ΖΑ, ΑΓ æquantur duabus ΗΑ, ΑΒ, altera alteri, & comprehendunt communem angulum ΖΑΗ: erit igitur [per 4. prop.] baſis ΖΓ æqualis baſi ΗΒ, & triangulum ΑΖΓ æquale triangulo ΑΗΒ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur; angulus nempe ΑΓΖ angulo ΑΒΗ, & angulus ΑΖΓ angulo ΑΗΒ. cum autem tota ΑΖ æquatur toti ΑΗ, & ΑΒ æquatur rectæ ΑΓ; reliqua igitur ΒΖ [per 3. ax.] æquabitur reliquæ ΓΗ. oſtenſum autem eſt rectam ΖΓ æqualem eſſe rectæ ΗΒ: duæ itaque rectæ ΒΖ, ΖΓ æquantur duabus ΓΗ, ΗΒ, altera alteri, & angulus ΒΖΓ æquatur angulo ΓΗΒ, & recta ΒΓ eſt eorum baſis communis; erit igitur [per 4. prop.] & triangu-

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσιν τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγω-

νον

νον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσεται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἰσάζεται ἴσον, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴσον, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἰσάζεται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση, καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καὶ, προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Triangulorum igitur iſoſcelium anguli ad baſim ſunt inter ſe æquales: &, productis rectis æqualibus, anguli ſub baſim erunt inter ſe æquales. quod erat demonſtrandum.

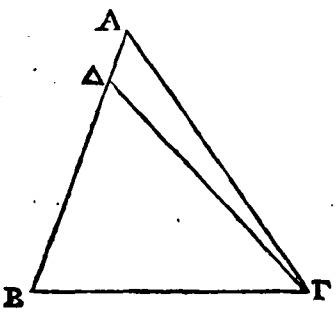
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Prop. VI. Theor.

Si trianguli duo anguli ſint inter ſe æquales, latera æqualibus angulis ſubtenſa inter ſe æqualia erunt.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾷ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση.



Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ· καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἐλάσσονι τὸ μεῖζον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ESto triangulum ABΓ, æqualem habens ABΓ angulum angulo AΓB: ajo latus AΓ æquale eſſe lateri AB.

Si enim AΓ inæquale eſt lateri AB, eorum alterum majus erit. ſit majus AB: & ab AB majore auferatur [per 3. prop.] recta ΔB æqualis lateri AΓ minori, & ducatur recta ΔΓ.

Quoniam igitur ΔB æquatur rectæ AΓ, & recta BΓ eſt latus commune, duæ rectæ ΔB, BΓ æquantur duabus rectis AΓ, ΓB, altera alteri, & angulus ΔBΓ angulo AΓB eſt æqualis; baſis igitur ΔΓ æquabitur baſi AB, & triangulum ABΓ æquabitur triangulo ΔΓB, majus minori, quod abſurdum eſt: non eſt ideo AB inæqualis rectæ AΓ; igitur æqualis.

Idcirco ſi trianguli duo anguli ſint inter ſe æquales, latera æqualibus angulis ſubtenſa inter ſe æqualia erunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ καὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

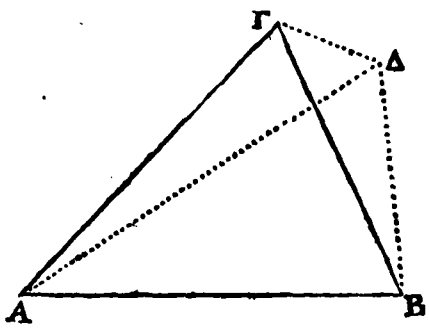
Prop. VII. Theor.

Super eandem rectam, duabus iiſdem rectis duæ aliæ rectæ æquales altera alteri non conſtituentur, ad aliud atque aliud punctum in eaſdem partes, eoſdem terminos habentes cum rectis initio ductis.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Γ, Δ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ Α, Β ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ

NAM ſi fieri poteſt, ſuper eandem rectam AB, duabus iiſdem rectis AΓ, ΓB duæ aliæ rectæ AΔ, ΔB æquales altera alteri conſtituantur, ad aliud atque aliud punctum Γ & Δ, in eaſdem partes Γ & Δ, eoſdem terminos habentes A & B cum rectis initio ductis; ita ut recta ΓA ſit æqualis rectæ

ΔA, habens cum illa eundem terminum, punctum A, & recta ΓB æqualis rectæ ΔB, habens cum illa eundem terminum, punctum B: & ducatur recta ΓΔ.



Quoniam igitur AΓ æquatur rectæ AΔ, æqualis eſt [per 5. prop.] angulus AΓΔ angulo AΔΓ: quare angulus AΔΓ major eſt angulo ΔΓB, & angulus ΓΔB multo major eſt angulo ΔΓB. rurſus quoniam recta ΓB æqualis eſt rectæ ΔB, erit angulus ΓΔB æqualis angulo ΔΓB. oſtenſum autem eſt eodem eſſe multo majorem, quod eſt impoſſibile.

Super eandem igitur rectam, duabus iiſdem rectis duæ aliæ rectæ æquales altera alteri non conſtituentur, ad aliud & aliud punctum in eaſdem partes, habentes eoſdem terminos cum rectis initio ductis. quod erat demonſtrandum.

ΔA, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσα αὐτῇ τὸ A, ἡ δὲ ΓB τῇ ΔB, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσα αὐτῇ τὸ B· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ.

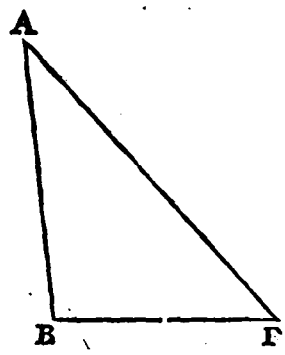
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ AΓ τῇ AΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AΓΔ τῇ ὑπὸ AΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ AΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓB, πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔB μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓB. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓB τῇ ΔB, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔB γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓB. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ τοῖς αὐτοῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τοῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; habeant etiam & baſim baſi æqualem: angulum quoque angulo æqualem habebunt, ab æqualibus rectis comprehenſum.

Sint duo triangula ABΓ, ΔEZ, habentia duo latera AB, AΓ duobus lateribus ΔE, ΔZ æqualia, alterum alteri, latus quidem AB lateri ΔE, & latus AΓ lateri ΔZ; habeant etiam & baſim BΓ æqualem baſi EZ: dico etiam angulum BAΓ æqualem eſſe angulo EΔZ.

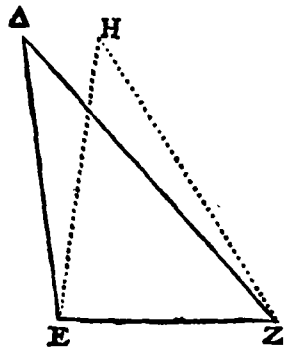


Si enim triangulum ABΓ applicetur triangulo ΔEZ, & punctum B ponatur ſuper punctum E, & recta BΓ ſuper rectam EZ; congruet punctum Γ puncto Z, quia recta BΓ æquatur rectæ EZ: congruente vero BΓ rectæ EZ, congruent etiam BA, AΓ rectis EΔ, ΔZ. ſi enim baſis BΓ congruat baſi EZ, latera vero BA, AΓ non congruant lateribus EΔ, ΔZ, ſed ſitum mutent, ut EH, HZ; conſtituentur, ſuper eandem rectam, duabus iiſdem rectis aliæ duæ rectæ æquales, altera alteri, ad aliud & aliud punctum in eaſdem partes, habentes eoſdem terminos. ſed [per 7. prop.] non conſtituuntur: congruente igitur baſi BΓ baſi EZ, non poſſunt non congruere etiam latera BA, AΓ lateribus EΔ, ΔZ. congruent igitur: adeoque angulus BAΓ congruet angulo EΔZ; eique æqualis erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τὰς ἴσας εὐθείας περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ABΓ, ΔEZ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB, AΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔE, ΔZ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν AB τῇ ΔE, τὴν δὲ AΓ τῇ ΔZ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν BΓ βάσει τῇ EZ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BAΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EΔZ ἐστὶν ἴση.



Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ABΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου μὲν τοῦ B σημείου ἐπὶ τὸ E σημεῖον, τῆς δὲ BΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν EZ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Z, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν BΓ τῇ EZ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς BΓ ἐπὶ τὴν EZ, ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ BA, AΓ ἐπὶ τὰς EΔ, ΔZ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ BΓ ἐπὶ βάσιν τὴν EZ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ BA, AΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς EΔ, ΔZ οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς αἱ EH, HZ· συσταθήσονται, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ τοῖς αὐτοῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα, * ἐφαρμοζομένης τῆς BΓ βάσεως ἐπὶ τὴν EZ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ BA, AΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς EΔ, ΔZ. ἐφαρμόσουσι ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BAΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ EΔZ ἐφαρμόσει, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

* Ιν. ἁρμοσάσης.

Ἐὰν

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; habeant etiam & basim basi æqualem: angulum quoque angulo æqualem habebunt, ab æqualibus rectis comprehensum. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

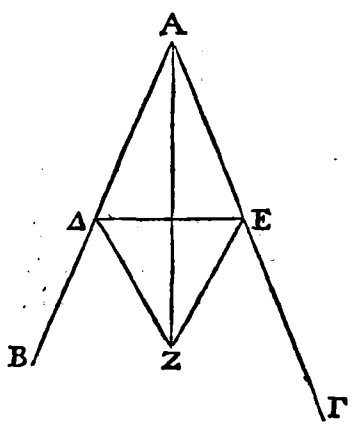
Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἐστὶν ἴση.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

SIT datus angulus rectilineus BAΓ: oportet illum bifariam secare.

Sumatur in recta AB punctum quodlibet Δ, & à recta AΓ auferatur [per 3. prop.] recta AE æqualis rectæ AΔ, & ducatur recta ΔE; & super rectam ΔE fiat [per 1. prop.] triangulum æquilaterum ΔEZ, & ducatur recta AZ: dico angulum BAΓ bifariam secari à recta AZ.

Quoniã enim AΔ æquatur rectæ AE, recta autem AZ sit communis; duæ rectæ ΔA, AZ duabus rectis EA, AZ æquales erunt, altera alteri; basis etiam ΔZ æquatur basi EZ: angulus igitur ΔAZ æquatur [per 8. prop.] angulo EAZ.

Datus igitur angulus rectilineus BAΓ bifariam secatur à recta AZ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

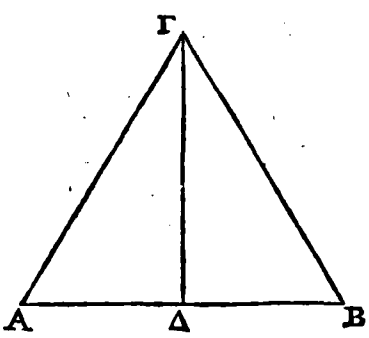
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ δίχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

SIT data recta terminata AB: oportet rectam AB bifariam secare.

Fiat [per 1. prop.] super illam triangulum æquilaterum ABΓ, & secetur [per 9. prop.] angulus AΓB bifariam à recta ΓΔ: dico rectam AB bifariam secari in puncto Δ.

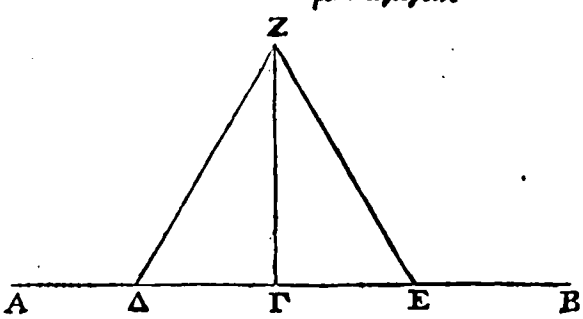
Quoniam enim AΓ æqualis est rectæ ΓB, recta autem ΓΔ est communis; duæ rectæ AΓ, ΓΔ æquales sunt duabus rectis BΓ, ΓΔ, altera alteri, & angulus AΓΔ æqualis est angulo BΓΔ: basis igitur AΔ æqualis est [per 4. prop.] basi BΔ.

Data igitur recta terminata AB bifariam secatur in puncto Δ. quod erat faciendum.

PROP. XI. PROBL.

Datæ rectæ lineæ, à puncto in ipſa dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

SIT data recta AB, & punctum in ea Γ: oportet à puncto Γ ipſi rectæ AB ad rectos angulos rectam lineam ducere.



Sumatur in recta AΓ punctum quodlibet Δ, & [per 3. prop.] ponatur ΓE æqualis rectæ ΓΔ, & [per 1. prop.] conſtituatur ſuper rectam ΔE triangulum æquilaterum ZΔE; & ducatur recta ZΓ: dico quod datæ rectæ AB, à dato in ea puncto Γ, ad rectos angulos ducitur recta ZΓ.

Quoniam enim æqualis eſt ΓΔ rectæ ΓE, & recta ZΓ communis; duæ rectæ ΔΓ, ΓZ æquantur duabus rectis EΓ, ΓZ, altera alteri, & baſis ΔZ æquatur baſi EZ: angulus igitur ΔΓZ æquatur [per 8. prop.] angulo EΓZ; atque hi anguli ſunt deinceps. quando autem recta inſiſtens in rectam fecerit angulos deinceps inter ſe æquales, rectus eſt [per 10. def.] uterque æqualium angulorum: rectus igitur eſt uterque angulorum ΔΓZ, ZΓE.

Datæ igitur rectæ lineæ AB, à dato in illa puncto Γ, ad rectos angulos ducta eſt recta linea ZΓ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ δοθέντος τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, τοῖς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς AΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓE, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔE τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ZΔE, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZΓ· λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ZΓ.

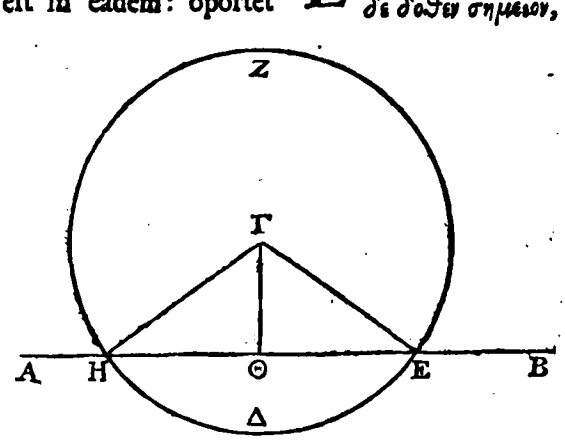
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓE, κοινὴ δὲ ἡ ZΓ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓZ δυσὶ ταῖς EΓ, ΓZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔZ βάσει τῇ EZ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓZ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EΓZ ἴση ἐστί, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓZ, ZΓE.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας γραμμὴ ἦκται εὐθεῖα ἡ ZΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XII. PROBL.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod non eſt in eadem, perpendicularem lineam rectam ducere.

SIT data recta infinita AB, & datum punctum Γ, quod non eſt in eadem: oportet ſuper datam rectam infinitam AB, à dato puncto Γ, quod in eadem non eſt, perpendicularem lineam rectam ducere.



Sumatur enim ex altera parte rectæ AB punctum quodlibet Δ, & centro Γ, intervallo ΓΔ, deſcribatur [per 3. poſt.] circulus EZH, & ſecetur recta EH bifariam [per 10. prop.] in puncto Θ, ducanturque rectæ ΓH, ΓΘ, ΓE: dico quod ſuper datam rectam infinitam AB, à dato pun-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς AB εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ EZH, καὶ τετμήσθω ἡ EH δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓH, ΓΘ, ΓE· λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB, ἀπὸ τοῦ δοθέντος

πος σημεῖόν τῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς; καθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστὶν ἴση, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τῇ δοθείσῃ ἄρα εὐθείαν ἀπείρου τῦ ΑΒ, ἀπὸ τῦ δοθέντος σημείῦ τῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω, τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι, ἢ δύο ὀρθαί εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τῦ Β σημείῦ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ εἰσὶν ἴσαι. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ὡς ἂν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρός γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας

cto Γ, quod in eadem non eſt, ducta eſt perpendicularis recta linea ΓΘ.

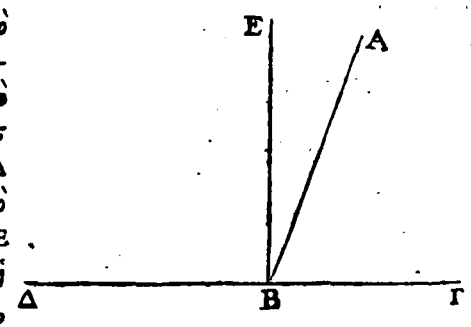
Quoniam enim ΗΘ æqualis eſt rectæ ΘΕ, recta autem ΘΓ eſt communis; duæ rectæ ΗΘ, ΘΓ ſunt æquales duabus rectis ΕΘ, ΘΓ, altera alteri, & baſis ΓΗ æquatur [per 15. def.] baſi ΓΕ: angulus igitur ΓΘΗ æquatur [per 8. prop.] angulo ΕΘΓ; atque hi anguli ſunt deinceps. quando autem recta inſiſtens in rectam fecerit angulos deinceps inter ſe æquales, rectus eſt uterque æqualium angulorum; & recta inſiſtens vocatur perpendicularis ad eam in quam inſiſtit.

Super datam igitur rectam infinitam ΑΒ, à dato puncto Γ, quod non eſt in eadem, perpendicularis ducitur ΓΘ. quod erat faciendum.

PROP. XIII. THEOR.

Si recta inſiſtens in rectam faciat angulos; vel duos rectos faciet, vel duobus rectis æquales.

REcta enim quælibet ΑΒ inſiſtens in rectam ΓΔ faciat angulos ΓΒΑ, ΑΒΔ: dico quod anguli ΓΒΑ, ΑΒΔ vel erunt recti, vel duobus rectis æquales.



Si enim angulus ΓΒΑ æqualis ſit angulo ΑΒΔ, duo anguli [per 10. def.] erunt recti. ſin minus, ducatur [per 11. prop.] à puncto Β recta ΒΕ ad rectos angulos rectæ ΓΔ: quare anguli ΓΒΕ, ΕΒΔ ſunt duo recti. & quoniam angulus ΓΒΕ æquatur duobus angulis ΓΒΑ, ΑΒΕ; ſi addatur communis angulus ΕΒΔ, anguli ΓΒΕ, ΕΒΔ æquantur tribus angulis ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. rurſus, cum angulus ΔΒΑ æquetur angulis duobus ΔΒΕ, ΕΒΑ; ſi communis angulus ΑΒΓ addatur, anguli ΔΒΑ, ΑΒΓ æquabuntur tribus angulis ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ. oſtenſi autem ſunt anguli ΓΒΕ, ΕΒΔ iiſdem tribus eſſe æquales; & quæ eidem æqualia, ſunt inter ſe æqualia; anguli igitur ΓΒΕ, ΕΒΔ æquantur angulis ΔΒΑ, ΑΒΓ: ſed anguli ΓΒΕ, ΕΒΔ ſunt duo recti; idcirco anguli ΔΒΑ, ΑΒΓ ſunt duobus rectis æquales.

Si igitur recta inſiſtens ſuper rectam faciat angulos; faciet vel duos angulos rectos, vel duobus rectis æquales. quod erat demonſtrandum.

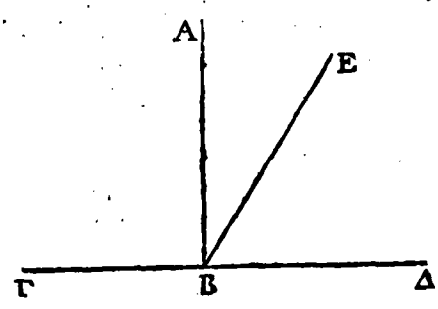
PROP. XIV. THEOR.

Si ad aliquam rectam lineam, & ad punctum in ea, duæ rectæ, non ad eaſdem partes poſitæ, faciant angulos deinceps duobus rectis æquales; ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi invicem erunt.

AD aliquam enim rectam lineam ΑΒ, & ad punctum in ea Β, duæ rectæ ΒΓ, ΒΔ, non ad eaſdem partes poſitæ, faciant angulos deinceps

ABΓ, ABΔ duobus rectis æquales: dico rectam BΔ esse in directum rectæ ΓB.

Si enim BΔ non sit in directum rectæ BΓ, sit [per 2. post.] BE in directum rectæ ΓB.



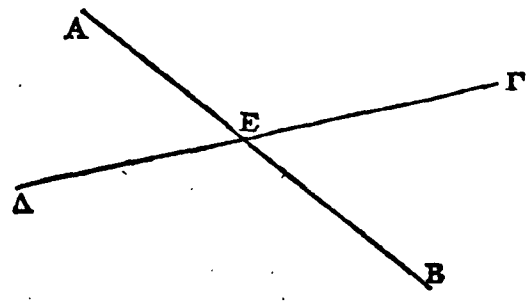
Quoniam igitur recta AB insistit in rectam ΓBE, anguli ABΓ, ABE æquantur [per 13. prop.] duobus rectis; sunt autem [ex hyp.] anguli ABΓ, ABΔ duobus rectis æquales: anguli igitur ΓBA, ABE æquantur angulis ΓBA, ABΔ. communis auferatur ABΓ; reliquus igitur ABE æquabitur reliquo ABΔ, minor majori, quod fieri non potest: recta igitur BE non est in directum rectæ BΓ. eodem modo ostendemus, nullam aliam esse præter BΔ: est ergo recta ΓB in directum rectæ BΔ.

Si igitur ad aliquam rectam, & ad punctum in ea, duæ rectæ, non ad easdem partes positæ, faciant angulos deinceps duobus rectis æquales; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. quod erat demonstrandum.

PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ sese mutuo secent, angulos ad verticem facient inter se æquales.

DUÆ rectæ AB, ΓΔ sese mutuo secent in puncto E: dico angulum AEΓ æquari angulo ΔEB, & angulum ΓEB æquari angulo AEΔ.



Quoniam enim recta AE insistit in rectam ΓΔ, faciens angulos ΓEA, AEΔ; idcirco anguli ΓEA, AEΔ æquantur [per 13. prop.] duobus rectis. rursus, quoniam recta ΔE insistit in rectam AB, faciens angulos AEΔ, ΔEB; idcirco anguli AEΔ, ΔEB æquantur [per 13. prop.] duobus rectis. ostensi autem sunt anguli ΓEA, AEΔ æquales duobus rectis: sunt igitur anguli ΓEA, AEΔ æquales angulis AEΔ, ΔEB. auferatur communis angulus AEΔ; reliquus igitur ΓEA æquatur reliquo BEΔ. eodem modo demonstrabitur angulos ΓEB, ΔEA esse æquales.

Si igitur duæ rectæ sese mutuo secent, faciunt angulos ad verticem inter se æquales. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc manifestum est, quotcunque rectis sese mutuo secantibus, angulos ad punctum sectionis æquari quatuor rectis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ AEΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEB, ἡ δὲ ὑπὸ ΓEB τῇ ὑπὸ AEΔ.

Ἐπὶ γὰρ εὐθεῖά ἐστιν ἡ AE ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσι τὰς ὑπὸ ΓEA, AEΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓEA, AEΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔE ἐπ' εὐθεῖαν τὴν AB ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσι τὰς ὑπὸ AEΔ, ΔEB· αἱ ἄρα ὑπὸ AEΔ, ΔEB γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓEA, AEΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓEA, AEΔ τῇ ὑπὸ AEΔ, ΔEB ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ AEΔ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓEA λοιπῇ τῇ ὑπὸ BEΔ ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓEB, AEΔ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

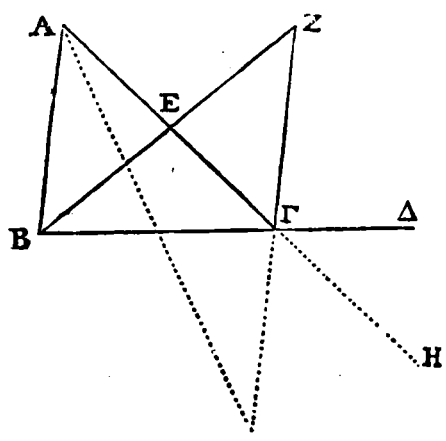
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν.

ΕΣτω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπιζευχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστὶν, κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. ὁμοίως δὴ, τὴν ΒΓ τετμημένην δίχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto, angulus exterior major eſt utrolibet interiorum & oppoſitorum.

SIT triangulum ABΓ, & producatur latus BΓ uſque ad Δ: dico exteriorem angulum AΓΔ majorem eſſe utrolibet interiorum & oppoſitorum ΓBA, BAΓ.

Secetur [per 10. prop.] AΓ bifariam in E, & ducta recta BE producatur ad Z, & ponatur [per 3. prop.] EZ æqualis rectæ BE, & ducatur recta ZΓ, & producatur AΓ ad H.

Quoniam igitur AE æquatur rectæ EΓ, & BE rectæ EZ, duæque AE, EB æquantur duabus ΓE, EZ, altera alteri, angulus etiam AEB æquatur [per 15. prop.] angulo ZEΓ; eſt enim ad verticem: baſis AB æquatur [per 4. prop.] baſi ZΓ, & triangulum ABE æquatur triangulo ZEΓ, & reliqui anguli reliquis angulis æquantur, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: eſt igitur angulus BAE æqualis angulo EΓZ. major autem eſt [per 9. ax.] angulus EΓΔ angulo EΓZ: major eſt igitur angulus AΓΔ angulo BAE. eodem modo, ſi BΓ ſecetur bifariam, demonſtrabitur angulum BΓH, id eſt [per 15. prop.] angulum AΓΔ, majorem eſſe angulo ABΓ.

Omnis igitur trianguli uno latere producto, angulus exterior major eſt utrolibet interiorum & oppoſitorum. quod erat demonſtrandum.

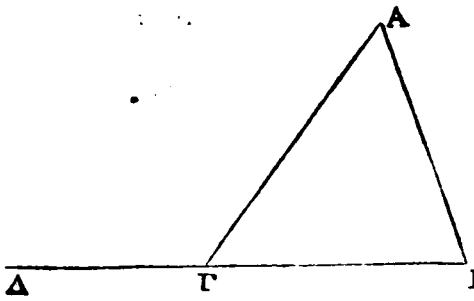
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

ΕΣτω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι ἐν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.



PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli ſunt minores duobus rectis, quomodocunque ſumpti.

SIT triangulum ABΓ: dico duos angulos trianguli ABΓ, quomodocunque ſumptos, minores eſſe duobus rectis.

Producatur enim [per 2. poſt.] BΓ ad Δ.

Et quoniam AΓΔ eſt exterior angulus trianguli ABΓ, major eſt [per 16. prop.] interiore & oppoſito ABΓ. addatur communis angulus AΓB: anguli igitur AΓΔ, AΓB ſunt majores angulis ABΓ, BΓA. ſed anguli AΓΔ, AΓB æquantur [per 13. prop.] duobus rectis: anguli igitur ABΓ, BΓA ſunt minores duobus rectis. eodem modo demonſtrabimus angulos BAΓ, AΓB minores eſſe duobus rectis; itemque angulos ΓAB, ABΓ.

Omnis igitur trianguli duo anguli ſunt minores duobus rectis, quomodocunque ſumpti. quod erat demonſtrandum.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XVIII. Theor.

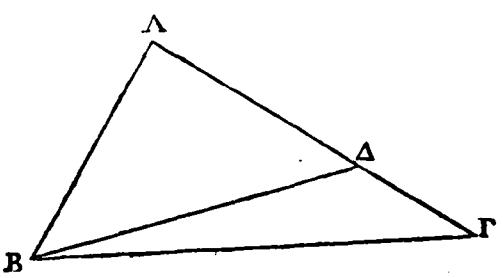
Omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

SIT triangulum ABΓ, habens latus AΓ majus latere AB: dico angulum etiam ABΓ majorem eſſe angulo BΓA.

Quoniam enim latus AΓ majus eſt latere AB, ponatur [per 3. prop.] recta AΔ æqualis lateri AB, & ducatur recta BΔ.



Et quoniam AΔB eſt exterior angulus trianguli BΔΓ, major eſt [per 16. prop.] interiore & oppoſito ΔΓB. æqualis autem eſt [per 5. prop.] angulus AΔB angulo ABΔ, quia latus AB æquatur lateri AΔ: ideoque major eſt angulus ABΔ angulo AΓB; angulus igitur ABΓ multo major eſt angulo AΓB.

Omnis igitur trianguli majus latus ſubtendit majorem angulum. quod erat demonſtrandum.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ABΓ, μείζονα ἔχον τὴν AΓ πλευρὰν τῆς AB· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ BΓA.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ AΓ τῆς AB, κείσθω τῇ AB ἴση ἡ AΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ BΔΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ AΔB, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΔΓB. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ AΔB τῇ ὑπὸ ABΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ AB τῇ AΔ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ABΔ τῆς ὑπὸ AΓB· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ AΓB.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIX. Theor.

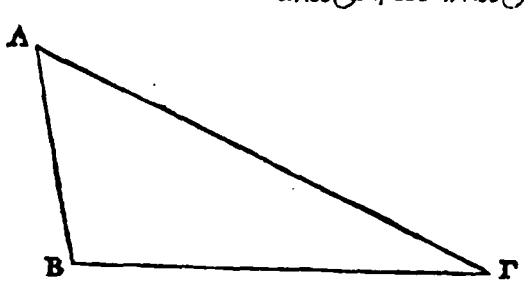
Omnis trianguli majori angulo majus latus ſubtenditur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

SIT triangulum ABΓ, habens angulum ABΓ majorem angulo BΓA: dico latus AΓ majus eſſe latere AB.

Si enim non ſit majus: latus AΓ, vel eſt æquale lateri AB, vel ipſo minus. æquale autem non eſt latus AΓ lateri AB: nam tum angulus ABΓ æqualis eſſet [per 5. prop.] angulo AΓB. non eſt autem æqualis: nec igitur latus AΓ lateri AB æquale erit. neque tamen minus eſt latus AΓ latere AB: tum enim angulus ABΓ minor eſſet [per 18. prop.] angulo AΓB. at non eſt minor: nec igitur latus AΓ minus erit latere AB. demonſtratum autem eſt non eſſe æquale: majus eſt igitur latus AΓ latere AB.



Omnis igitur trianguli majori angulo majus latus ſubtenditur. quod erat demonſtrandum.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ABΓ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ABΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ BΓA· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ AΓ πλευρᾶς τῆς AB μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή· ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ AΓ τῇ AB, ἢ ἐλάσσων. ἴση μὲν οὐκ ἔστιν ἡ AΓ τῇ AB· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABΓ τῇ ὑπὸ AΓB. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ AΓ τῇ AB. ἀλλὰ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ AΓ τῆς AB· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABΓ τῆς ὑπὸ AΓB. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ AΓ τῆς AB. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστί· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ AΓ τῆς AB.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XX. Theor.

Omnis trianguli duo latera ſunt majora reliquo, quomodocunque ſumpta.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

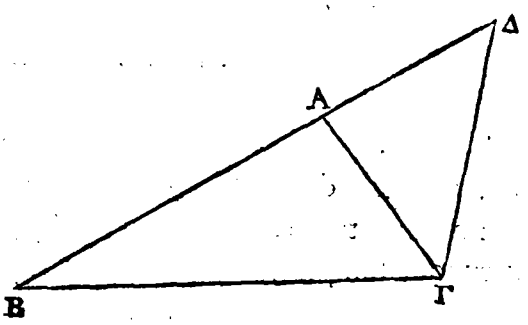
Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

SIT enim triangulum ABΓ: dico trianguli ABΓ duo latera, quomodocunque ſumpta, majora eſſe reliquo; nempe BA, AΓ latere BΓ; & AB, BΓ latere AΓ; & BΓ, ΓA latere AB.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ABΓ· λέγω ὅτι τοῦ ABΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν BA, AΓ τῆς BΓ, αἱ δὲ AB, BΓ τῆς AΓ, αἱ δὲ BΓ, ΓA τῆς AB.

Διήχθω

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.



Producatur enim latus ΒΑ ad punctum Δ, & [per 3. prop.] ponatur ΔΑ æqualis rectæ ΓΑ, & jungatur ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστὶ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶν μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔΒ ταῖς ΑΒ, ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν· αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Quoniam igitur ΔΑ æqualis est rectæ ΑΓ, erit etiam [per 5. prop.] angulus ΑΔΓ æqualis angulo ΑΓΔ: est autem [per 9. ax.] angulus ΒΓΔ major angulo ΑΓΔ; major est igitur angulus ΒΓΔ angulo ΑΔΓ, quoniam etiam triangulum ΔΓΒ habet angulum ΒΓΔ majorem angulo ΒΔΓ, & [per 19. prop.] majorem angulum subtendit majus latus, latus ΔΒ majus erit latere ΒΓ. est autem recta ΔΒ æqualis lateribus ΑΒ, ΑΓ: majora igitur sunt latera ΒΑ, ΑΓ latere ΒΓ. eodem modo ostendemus latera ΑΒ, ΒΓ majora esse latere ΓΑ; & latera ΒΓ, ΓΑ majora latere ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Omnis igitur trianguli duo latera, quomodocunque sumpta, sunt majora reliquo. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

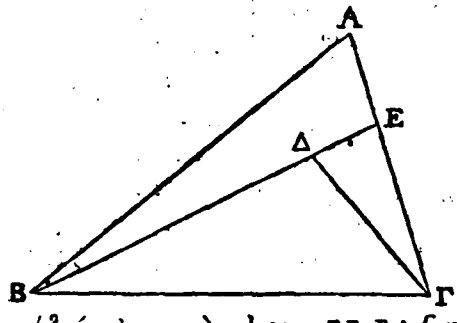
Prop. XXI. Theor.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ intus constituantur: hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum comprehendent.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μὲν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι, τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Triangulí enim ΑΒΓ in uno latere ΒΓ, à terminis Β, Γ, constituantur intus duæ rectæ ΒΔ, ΔΓ: dico rectas ΒΔ, ΔΓ minores esse duobus reliquis trianguli lateribus ΒΑ, ΑΓ, angulum tamen comprehendere ΒΔΓ majorem angulo ΒΑΓ.



Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσι. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσι. πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσι.

Producatur enim recta ΒΔ ad punctum Ε.

Et cum omnis trianguli duo latera [per 20. prop.] sint majora reliquo: trianguli ΑΒΕ duo latera ΑΒ, ΑΕ sunt majora latere ΒΕ. communis addatur recta ΕΓ; sunt igitur latera ΒΑ, ΑΓ majora rectis ΒΕ, ΕΓ. rursus, quoniam trianguli ΓΕΔ duo latera ΓΕ, ΕΔ sunt majora latere ΓΔ, communis addatur ΔΒ: sunt igitur rectæ ΓΕ, ΕΒ majores rectis ΓΔ, ΔΒ. sed latera ΒΑ, ΑΓ ostendebantur esse majora rectis ΒΕ, ΕΓ: sunt igitur ΒΑ, ΑΓ multo majora quam ΒΔ, ΔΓ.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί· τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Rursus, quoniam angulus, qui extra est quemvis triangulum, major est [per 16. prop.] interiore & oppositò; angulus ΒΔΓ, qui extra est triangulum ΓΔΕ, major est angulo ΓΕΔ. eadem de causa angulus ΓΕΒ, qui extra est triangulum ΑΒΕ, major est angulo ΒΑΓ. ostensum autem est angulum ΒΔΓ majorem esse angulo ΓΕΒ: angulus igitur ΒΔΓ multo major est angulo ΒΑΓ.

Si igitur à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ intus conſtituantur: hæ reliquis duobus trianguli lateribus ſunt quidem minores, angulum vero comprehendunt majorem. quod erat demonſtrandum.

Εὰν ἄρα τριγώνου ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο αἱ εὐθεῖαι ἐντὸς συνσταθῶσιν· αἱ συνστᾶσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μέν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXII. Probl.

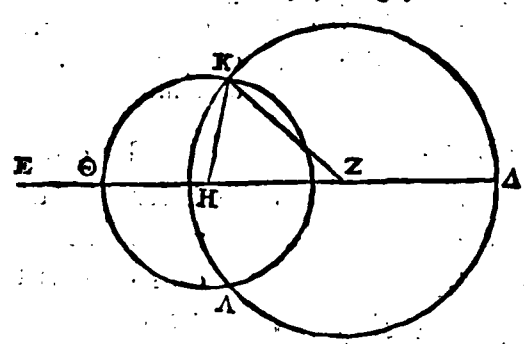
E tribus rectis, quæ tribus rectis datis ſunt æquales, triangulum conſtituere: oportet autem duas, utcunque ſumptas, majores eſſe reliqua.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συνστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας.

SInt tres datæ rectæ A, B, Γ, quarum duæ utcunque ſumptæ ſint majores reliqua; nempe A & B majores quam Γ, item A & Γ majores quam B, denique B & Γ majores quam A: oportet è rectis lineis, æqualibus ipſis A, B, Γ, triangulum conſtituere.

Ponatur recta linea Δ E, finita quidem ad Δ, infinita vero verſus E; & ponatur [per 3. prop.] Δ Z æqualis rectæ A, & recta Z H æqualis rectæ B, rectæ autem Γ ſit æqualis H Θ; & centro Z, intervallo autem Z Δ, deſcribatur [per 3. poſt.] circulus Δ K Λ; & rurſus centro H, intervallo H Θ, deſcribatur circulus K Λ Θ, & ducantur rectæ K Z, K H: dico triangulum K Z H, fieri è tribus lineis rectis, æqualibus ipſis rectis A, B, Γ.



A ———
B ———
Γ ———

Quoniam enim punctum Z eſt centrum circuli Δ K Λ, recta Z Δ æqualis eſt [per 15. def.] rectæ Z K: at Z Δ æquatur rectæ A; recta igitur K Z æqualis eſt rectæ A. rurſus, quoniam punctum H eſt centrum circuli Λ K Θ, æqualis eſt H Θ rectæ H K: eſt autem H Θ æqualis rectæ Γ; eſt igitur K H æqualis rectæ Γ. rectæ autem B æqualis eſt Z H: tres igitur rectæ K Z, Z H, H K æquantur tribus rectis A, B, Γ.

E tribus idcirco rectis K Z, Z H, H K, quæ tribus datis rectis A, B, Γ ſunt æquales, conſtituitur triangulum K Z H. quod erat faciendum.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ A, B, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν A B τῆς Γ, αἱ δὲ A Γ τῆς B, καὶ ἔτι αἱ B Γ τῆς A· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων τοῖς A, B, Γ τρίγωνον συνστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Δ E, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ E· καὶ κείσθω τῇ μὲν A ἴση ἡ Δ Z, τῇ δὲ B ἴση ἡ Z H, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ H Θ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Z, διαστήματι δὲ τῷ Z Δ, κύκλος γεγράφθω ὁ Δ K Λ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ H, διαστήματι δὲ τῷ H Θ, κύκλος γεγράφθω ὁ K Λ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ K Z, K H· λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τοῖς ἴσαις τοῖς A, B, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ K Z H.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ Δ K Λ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ Z Δ τῇ Z K· ἀλλὰ ἡ Z Δ τῇ A ἐστιν ἴση· καὶ ἡ K Z ἄρα τῇ A ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ Λ K Θ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ H Θ τῇ H K· ἀλλὰ ἡ H Θ τῇ Γ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ K H ἄρα τῇ Γ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ Z H τῇ B ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ K Z, Z H, H K τρισὶ τοῖς A, B, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν K Z, Z H, H K, αἵτινες ἴσαι εἰσὶ τρισὶ τοῖς δοθείσαις εὐθείαις τοῖς A, B, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ K Z H. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXIII. Probl.

Ad datam rectam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo angulum rectilineum æqualem conſtituere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

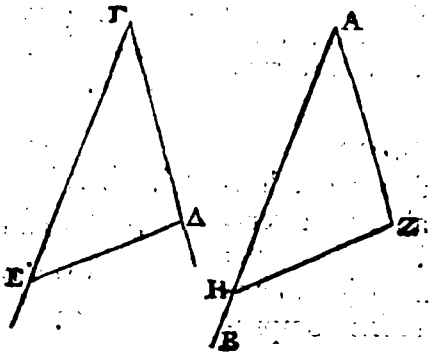
Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συνστήσασθαι.

SIT data recta linea A B, & in ea datum punctum A, datus autem angulus rectilineus ſit Δ Γ E: oportet ad datam rectam A B, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo Δ Γ E æqualem angulum rectilineum conſtituere.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ A B, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ A, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ Δ Γ E· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ A B, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ Δ Γ E ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συνστήσασθαι.

Εἰλήφθω

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.



Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δυσὶ ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Sumantur in utraque recta ΓΔ, ΓΕ puncta quælibet Δ, Ε, & ducatur recta ΔΕ: & è tribus rectis lineis, quæ æquales ſint tribus ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, conſtituatur [per 22. prop.] triangulum ΑΖΗ; ita ut ΓΔ æquetur rectæ ΑΖ, recta autem ΓΕ rectæ ΑΗ, recta denique ΔΕ rectæ ΖΗ.

Quoniam igitur duæ rectæ ΔΓ, ΓΕ æquantur duabus rectis ΖΑ, ΑΗ, altera alteri, & baſis ΔΕ æquatur baſi ΖΗ; angulus ΔΓΕ [per 8. prop.] æqualis eſt angulo ΖΑΗ.

Ad datam igitur rectam lineam ΑΒ, & ad datum in ea punctum Α, dato angulo rectilineo ΔΓΕ conſtituitur æqualis angulus rectilineus ΖΑΗ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

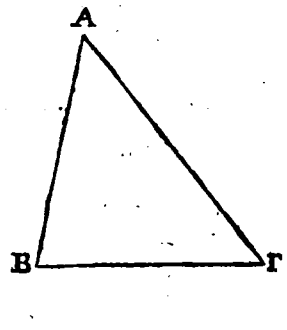
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Prop. XXIV. Theor.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; angulum autem angulo majorem, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: etiam baſim baſi majorem habebunt.

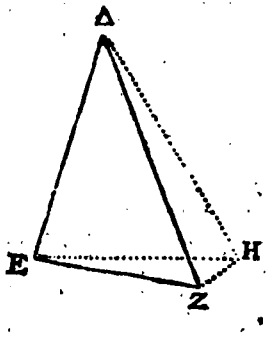
Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, quæ duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ habent æqualia, alterum alteri, latus nempe ΑΒ lateri ΔΕ, atque latus ΑΓ lateri ΔΖ; angulus autem ΒΑΓ ſit major angulo ΕΔΖ: dico baſim ΒΓ majorem eſſe baſi ΕΖ.



Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ· καὶ κείσθω ὁπτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ, ΖΗ.

Quoniam enim angulus ΒΑΓ major eſt angulo ΕΔΖ, conſtituatur [per 23. prop.] ad rectam ΔΕ, & ad punctum in ea Δ, angulus ΕΔΗ æqualis angulo ΒΑΓ: ponaturque ΔΗ [per 3. prop.] æqualis alterutri rectarum ΑΓ, ΔΖ, & ducantur ΗΕ, ΖΗ.



Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΗΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

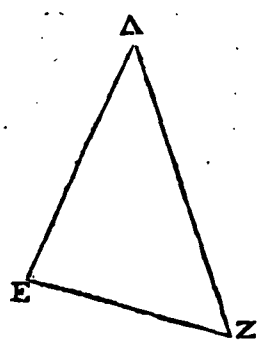
Itaque quoniam ΑΒ æquatur rectæ ΔΕ, & recta ΑΓ rectæ ΔΗ, duæ rectæ ΒΑ, ΑΓ æquantur duabus ΕΔ, ΔΗ, altera alteri, & angulus ΒΑΓ æquatur [per conſtruct.] angulo ΕΔΗ: baſis igitur ΒΓ æqualis erit [per 4. prop.] baſi ΕΗ. rurſus, quoniam ΔΗ æqualis eſt rectæ ΔΖ, & angulus ΔΖΗ eſt [per 5. prop.] æqualis angulo ΔΗΖ; major erit ΔΖΗ angulo ΕΗΖ, multoque igitur major erit angulus ΕΖΗ angulo ΕΗΖ. & quoniam triangulum ΕΖΗ habet angulum ΕΖΗ majorem angulo ΕΗΖ; majorem autem angulum [per 19. prop.] majus latus ſubtendit: eſt latus ΕΗ majus latere ΕΖ. verum ΕΗ æquale eſt [per conſtruct.] lateri ΒΓ; itaque latus ΒΓ majus eſt latere ΕΖ.

Si igitur duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; angulum autem habeant angulo majorem, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: etiam baſim baſi majorem habebunt. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXV. Theor.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; baſim autem habeant baſi majorem: habebunt etiam angulum majorem angulo, qui ab æqualibus rectis comprehenditur.

SInt duo triangula ABΓ, ΔEZ, quæ habent duo latera AB, AΓ æqualia duobus lateribus ΔE, ΔZ, alterum alteri, latus quidem AB lateri ΔE, & latus AΓ lateri ΔZ; baſis autem BΓ ſit major baſi EZ: dico angulum BAΓ majorem eſſe angulo EΔZ.



Si enim non ſit major, vel eſt æqualis ei, vel minor. æqualis autem non eſt angulus BAΓ angulo EΔZ, ſic enim eſſet [per 4. prop.] baſis BΓ æqualis baſi EZ: non eſt autem; angulus igitur BAΓ non eſt æqualis angulo EΔZ. ſed neque minor, ſic enim eſſet [per 24. prop.] baſis BΓ minor baſi EZ: atqui non eſt; angulus igitur BAΓ non eſt minor angulo EΔZ. oſtenſum autem eſt eum non eſſe æqualem: major eſt igitur angulus BAΓ angulo EΔZ.

Si igitur duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; baſim autem habeant baſi majorem: habebunt etiam angulum majorem angulo, qui ab æqualibus rectis comprehenditur. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXVI. Theor.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale; vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

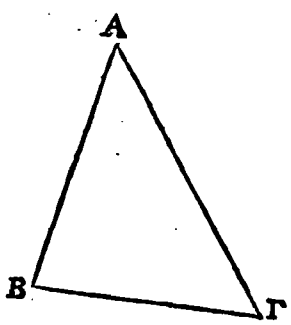
SInt duo triangula ABΓ, ΔEZ, quæ duos angulos ABΓ, BΓA duobus angulis ΔEZ, EZΔ æquales habent, alterum alteri, angulum ſcilicet ABΓ æqualem angulo ΔEZ, angulum vero BΓA angulo EZΔ: habeant autem & unum latus uni lateri æquale; & primum, quod æqua-

Ἐὰν ἄρα δύο τείγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν δύο τείγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τείγωνα τὰ ABΓ, ΔEZ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB, AΓ τῶν δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔE, ΔZ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν AB τῇ ΔE, τὴν δὲ AΓ τῇ ΔZ, βάσις δὲ ἡ BΓ βάσεως τῆς EZ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BAΓ γωνίας τῆς ὑπὸ EΔZ μείζων ἐστίν.



Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάσσων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστι καὶ ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία τῇ ὑπὸ EΔZ, ἴση γὰρ ἂν καὶ ἡ βάσις ἡ BΓ βάσει τῇ EZ· οὐκ ἔστι δέ, οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία τῇ ὑπὸ EΔZ. ἀλλ' οὐδὲ μὴν ἐλάσσων, ἐλάσσων γὰρ ἂν ἡ βάσις ἡ BΓ βάσεως τῆς EZ· οὐκ ἔστι δέ, οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία τῆς ὑπὸ EΔZ. ἐδείχθη δὲ οὐδ' ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία τῆς ὑπὸ EΔZ.

Ἐὰν ἄρα δύο τείγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν δύο τείγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

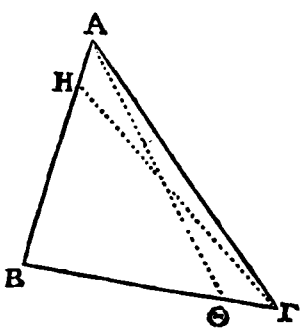
Ἔστωσαν δύο τείγωνα τὰ ABΓ, ΔEZ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ABΓ, BΓA δυσὶ τοῖς ὑπὸ ΔEZ, EZΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ABΓ τῇ ὑπὸ ΔEZ, τὴν δὲ ὑπὸ BΓA τῇ ὑπὸ EZΔ· ἐχέτω πρὸς μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· πρότερον, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις

τὴν

τῷ ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἔστω. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΗΓΒ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.



Ἀλλὰ δὴ πάλιν, ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

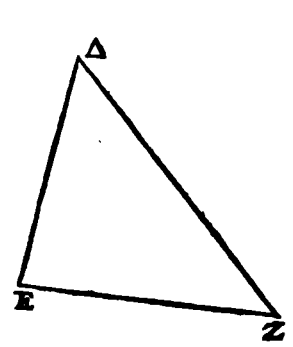
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω εἰ δυνατὸν μείζων ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση, τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΓ

libus adjacet angulis, latus nempe ΒΓ lateri ΕΖ: dico & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus ſcilicet ΑΒ lateri ΔΕ, & latus ΑΓ lateri ΔΖ, & reliquum angulum ΒΑΓ reliquo angulo ΕΔΖ.

Si enim latus ΑΒ ſit inæquale lateri ΔΕ, eorum alterum erit majus. ſit ΑΒ majus, & ponatur [per 3. prop.] ΗΒ recta æqualis lateri ΔΕ, & ducatur ΗΓ.

Quoniam igitur latus ΒΗ æquale eſt lateri ΔΕ, latus autem ΒΓ lateri ΕΖ, duo nempe latera ΒΗ, ΒΓ æqualia duobus ΔΕ, ΕΖ, alterum alteri, & angulus ΗΒΓ æqualis eſt angulo ΔΕΖ: baſis igitur ΗΓ æquatur [per 4. prop.] baſi ΔΖ, & triangulum ΗΓΒ æquabitur triangulo ΔΕΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquabuntur, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: eſt igitur angulus ΗΓΒ æqualis angulo ΔΖΕ. angulus autem ΔΖΕ ponitur æqualis angulo ΒΓΑ: eſt igitur angulus ΒΓΗ æqualis angulo ΒΓΑ, minor majori, quod fieri non poteſt. non eſt igitur latus ΑΒ inæquale lateri ΔΕ: ergo eſt æquale. eſt autem ΒΓ latus æquale lateri ΕΖ, atque duo latera ΑΒ, ΒΓ æquantur duobus ΔΕ, ΕΖ, alterum alteri, & angulus ΑΒΓ æquatur angulo ΔΕΖ: baſis igitur ΑΓ [per 4. prop.] æquatur baſi ΔΖ, & reliquus angulus ΒΑΓ æquatur reliquo angulo ΕΔΖ.



Quin & rurſum, ſint latera quæ æqualibus angulis ſubtenduntur æqualia, latus ſcilicet ΑΒ lateri ΔΕ: dico rurſus, quod & reliqua latera reliquis lateribus æquabuntur, nempe ΑΓ lateri ΔΖ, & ΒΓ lateri ΕΖ; & reliquus etiam angulus ΒΑΓ æquabitur reliquo angulo ΕΔΖ.

Si enim inæquale ſit latus ΒΓ lateri ΕΖ, eorum alterum majus erit. ſit (ſi fieri poteſt) ΒΓ majus, ponaturque [per 3. prop.] ΒΘ æquale lateri ΕΖ, & ducatur ΑΘ.

Et quoniam latus ΒΘ æquale eſt lateri ΕΖ, & latus ΑΒ lateri ΔΕ, duo nempe latera ΑΒ, ΒΘ æqualia duobus ΔΕ, ΕΖ, alterum alteri, & angulos comprehendunt æquales: baſis igitur ΑΘ [per 4. prop.] æquatur baſi ΔΖ, & triangulum ΑΒΘ æquatur triangulo ΔΕΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquabuntur, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: angulus igitur ΒΘΑ æquatur angulo ΕΖΔ. ſed [ex hyp.] angulus ΕΖΔ æqualis eſt angulo ΒΓΑ: eſt igitur ΒΘΑ angulus æqualis angulo ΒΓΑ; trianguli nempe ΑΓΘ exterior angulus ΒΘΑ æqualis interiori & oppoſito ΒΓΑ, quod [per 16. prop.] fieri non poteſt: latus igitur ΒΓ non eſt inæquale lateri ΕΖ, igitur æquale. eſt autem ΑΒ æquale lateri ΔΕ; duo idcirco latera ΑΒ, ΒΓ æquantur duobus lateribus ΔΕ, ΕΖ, alterum alteri, & comprehendunt angulos æquales: baſis igitur ΑΓ [per 4. prop.] æquatur baſi ΔΖ, & triangulum

lum ABΓ æquatur triangulo ΔEZ, & reliquus angulus BAΓ æquatur reliquo EΔZ.

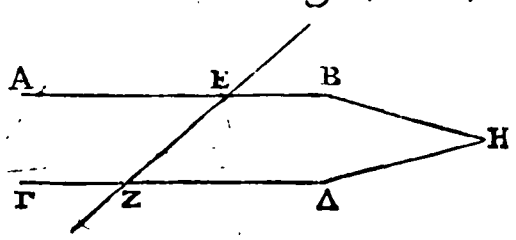
Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis habeant æquales, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale; vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXVII. Theor.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

IN duas enim rectas lineas AB, ΓΔ recta linea EZ incidens alternos angulos AEZ, EZΔ æquales inter ſe faciat: dico rectam lineam AB rectæ ΓΔ parallelam eſſe.

Si enim non eſt parallela, productæ AB, ΓΔ, vel ad partes BΔ convenient, vel ad partes AΓ. producantur, conveniantque ad partes BΔ in puncto H.



Jam, angulus AEZ, qui extra eſt triangulum EHZ, major eſt [per 16. prop.] interiore & oppoſito EZH: ſed & [ex hyp.] æqualis, quod fieri non poteſt: non igitur AB, ΓΔ, productæ ad partes BΔ, convenient. ſimiliter demonſtrabitur neque convenire ad partes AΓ: quæ vero in neutras partes conveniunt, ſunt [per 35. def.] inter ſe parallelæ; parallela igitur eſt AB ipſi ΓΔ.

Quare ſi in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, rectæ lineæ erunt parallelæ. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXVIII. Theor.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori & oppoſito & ad eaſdem partes æqualem fecerit; vel interiores & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: rectæ lineæ erunt inter ſe parallelæ.

IN duas enim rectas lineas AB, ΓΔ recta linea EZ incidens exteriorem angulum EHB interiori & oppoſito & ad eaſdem partes HΘΔ æqualem faciat; vel interiores & ad eaſdem partes BHΘ, HΘΔ duobus rectis æquales: dico rectam lineam AB rectæ ΓΔ parallelam eſſe.

Quoniam enim EHB angulus æqualis eſt angulo HΘΔ, angulus autem EHB æqualis [per 15. prop.] angulo AHΘ; erit & angulus AHΘ angulo HΘΔ æqualis: & ſunt alterni; parallela igitur eſt [per 27. prop.] AB ipſi ΓΔ.

τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσην ἐστὶ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EΔZ ἴση ἐστίν.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχῃ, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

ΕΙΣ γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ AEZ, EZΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓΔ εὐθείᾳ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ AB, ΓΔ συμπεσοῦνται, ἤτοι ἐπὶ τὰ BΔ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ AΓ. ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ BΔ μέρη κατὰ τὸ H.

Τριγώνου δὴ τοῦ EHZ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ AEZ μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ EZH· ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ AB, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ B, Δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ A, Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

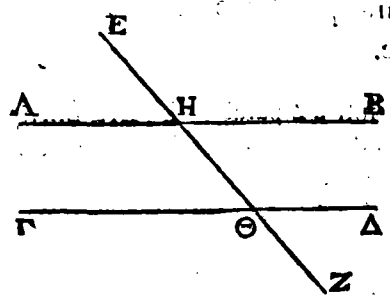
Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

ΕΙΣ γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ EHB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίᾳ τῇ ὑπὸ HΘΔ ἴσην ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ BHΘ, HΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ EHB τῇ ὑπὸ HΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ EHB τῇ ὑπὸ AHΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ AHΘ ἄρα τῇ ὑπὸ HΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓΔ.

ΠΑΛΙΝ

ΠΑΛΙΝ, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



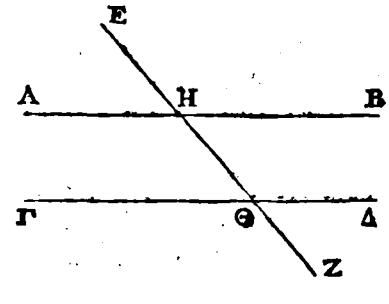
Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ὁμοῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Η εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ὁμοῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ὁμοῦ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

ΕΙΣ γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δέ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἴση ἄρα.



ΑΛΛΑ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση.

ΚΟΙΝΗ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Η ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ὁμοῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ὁμοῦ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

RURSUS, quoniam anguli BHΘ, HΘΔ duobus rectis sunt æquales, & sunt [per 13. prop.] AHΘ, BHΘ æquales duobus rectis: erunt anguli AHΘ, BHΘ angulis BHΘ, HΘΔ æquales. communis auferatur BHΘ, reliquus igitur AHΘ est æqualis reliquo HΘΔ; & sunt alterni: ergo AB ipsi ΓΔ [per 27. prop.] est parallela.

Si igitur in duas rectas recta linea incidens exteriorem angulum interiori & opposito & ad easdem partes æqualem fecerit; vel interiores & ad easdem partes duobus rectis æquales: rectæ lineæ erunt inter se parallelæ. quod erat demonstrandum.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori & opposito & ad easdem partes æqualem, & interiores & ad easdem partes duobus rectis æquales efficit.

IN parallelas enim rectas lineas AB, ΓΔ recta linea incidat EZ: dico illam alternos angulos AHΘ, HΘΔ inter se æquales efficere, & exteriorem EHB interiori & opposito & ad easdem partes HΘΔ æqualem, & interiores & ad easdem partes BHΘ, HΘΔ duobus rectis æquales.

Si enim inæqualis est AHΘ ipsi HΘΔ, unus ipsorum major est. sit major AHΘ. & quoniam angulus AHΘ major est angulo HΘΔ, communis apponatur BHΘ: anguli igitur AHΘ, BHΘ angulis BHΘ, HΘΔ majores sunt. sed anguli AHΘ, BHΘ sunt [per 13. prop.] æquales duobus rectis: ergo BHΘ, HΘΔ anguli sunt duobus rectis minores. quæ vero à minoribus, quàm sunt duo recti, in infinitum producuntur rectæ lineæ [per 11. ax.] inter se conveniunt: ergo rectæ lineæ AB, ΓΔ in infinitum productæ convenient inter se. atqui non conveniunt, cum parallelæ ponantur: non igitur inæqualis est AHΘ angulus angulo HΘΔ, ideo æqualis.

ANGULUS autem AHΘ æqualis est [per 15. prop.] angulo EHB: ergo & EHB ipsi HΘΔ æqualis erit.

COMMUNIS apponatur BHΘ: anguli igitur EHB, BHΘ sunt æquales angulis BHΘ, HΘΔ. sed EHB, BHΘ æquales sunt [per 13. prop.] duobus rectis: ergo & BHΘ, HΘΔ duobus rectis æquales erunt.

In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori & opposito & ad easdem partes æqualem, & interiores & ad easdem partes duobus rectis æquales efficit. quod erat demonstrandum.

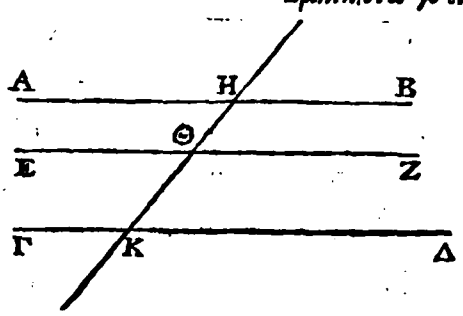
PROP. XXX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ & inter ſe ſunt parallelæ.

SIT utraque ipſarum AB, ΓΔ ipſi EZ parallela: dico & AB ipſi ΓΔ parallelam eſſe.

Incidat enim in ipſas recta linea HK.

Et quoniam in parallelas rectas lineas AB, EZ recta linea HK incidit, angulus AHΘ [per 27. prop.] angulo HΘZ eſt æqualis. rurſus, quoniam in parallelas rectas lineas EZ, ΓΔ recta linea incidit HK, æqualis eſt HΘZ angulus [per 28. prop.] angulo HKΔ. oſtenſus autem eſt & angulus AHK angulo HΘZ æqualis: ergo & AHK ipſi HKΔ æqualis erit; & ſunt alterni: parallela igitur eſt AB [per 29. prop.] ipſi ΓΔ.



Ergo quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ & inter ſe ſunt parallelæ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν AB, ΓΔ τῇ EZ παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ AB τῇ ΓΔ ἐστὶ παράλληλος.

Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ HK.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς AB, EZ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ HK, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ AHΘ τῇ ὑπὸ HΘZ. πάλιν, ἐπεὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας τὰς EZ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ HK, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HΘZ τῇ ὑπὸ HKΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AHK τῇ ὑπὸ HΘZ ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ AHK ἄρα τῇ ὑπὸ HKΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓΔ.

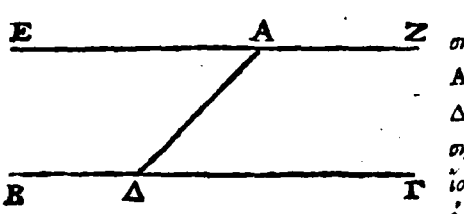
Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

SIT datum quidem punctum A, data vero recta linea BΓ: oportet, per A punctum, ipſi BΓ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sumatur in BΓ quodvis punctum Δ, & jungatur AΔ; conſtituaturq; [per 23. prop.] ad rectam lineam ΔA, & ad punctum in ipſa A, angulo AΔΓ æqualis angulus ΔAE; & in directum ipſi EA recta linea AZ producatur.



Quoniam igitur in duas rectas lineas BΓ, EZ recta linea AΔ incidens alternos angulos EAΔ, AΔΓ inter ſe æquales efficit, EZ ipſi BΓ [per 27. prop.] parallela erit.

Per datum igitur punctum A, datæ rectæ lineæ BΓ parallela ducta eſt recta linea EAZ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ BΓ· δεῖ δὴ, διὰ τοῦ A σημείου, τῇ ΓB εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς BΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔA εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A, τῇ ὑπὸ AΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔAE· καὶ ἐκβεβλήθω ἐπ' εὐθείας τῇ AE εὐθεῖα ἡ AZ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς BΓ, EZ εὐθεῖα ἐμπεσοῦσα ἡ AΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ EAΔ, AΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ BΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ A, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ BΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ EAZ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus & oppoſitis eſt æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis ſunt æquales.

SIT triangulum ABΓ, & unum ipſius latus BΓ producatur in Δ: dico angulum exteriorem AΓΔ duobus interioribus & oppoſitis ΓAB, ABΓ æqualem eſſe; & trianguli tres in-

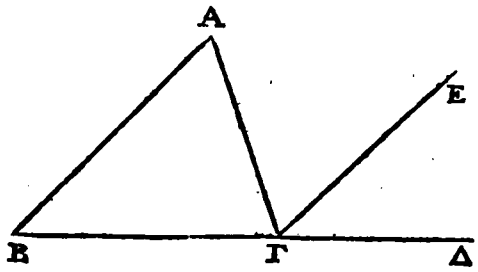
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ABΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ BΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ AΓΔ ἴση ἐστὶ τοῖς δυσὶ τοῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓAB, ABΓ· καὶ αἱ ἐντὸς

Ἐὰν τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἤχθω γὰρ, διὰ μὲν τοῦ Γ σημείου, τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.



Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ· αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ· ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

ΚΟΙΝΗ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

teriores angulos ABΓ, BΓA, ΓAB duobus rectis esse æquales.

Ducatur enim, per punctum Γ, [per 31. prop.] ipsi AB rectæ parallela ΓE.

Et quoniam AB ipsi ΓE parallela est, & in ipsas incidit AΓ: alterni anguli BAΓ, AΓE [per 29. prop.] inter se æquales sunt. rursus, quoniam AB parallela est ipsi ΓE, & in ipsas incidit recta linea BΔ: exterior angulus EΓΔ interiori & opposito ABΓ est æqualis. ostensus autem est angulus AΓE æqualis angulo BAΓ: quare totus AΓΔ exterior angulus æqualis est duobus interioribus & oppositis BAΓ, ABΓ.

Communis addatur AΓB: anguli igitur AΓΔ, AΓB tribus ABΓ, BΓA, ΓAB sunt æquales. sed [per 13. prop.] anguli AΓΔ, AΓB sunt æquales duobus rectis: ergo & AΓB, ΓBA, ΓAB duobus rectis sunt æquales.

Omnis igitur trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis sunt æquales. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς ἁπτόμεναι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Prop. XXXIII. Theor.

Quæ æquales & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, ipsæ etiam sunt æquales & parallelæ.

Ἐστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ πρὸς ἁπτέσθωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν.

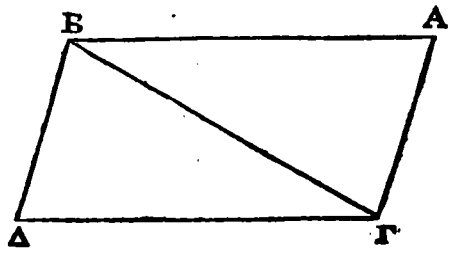
Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΓ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ· αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκε ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς ἁπτόμεναι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt æquales & parallelæ AB, ΓΔ, & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ AΓ, BΔ: dico AΓ, BΔ æquales & parallelas esse.

Jungatur enim BΓ.



Et quoniam AB parallela est ipsi ΓΔ, & in ipsas incidit BΓ: alterni anguli ABΓ, BΓΔ [per 29. prop.] æquales sunt. rursus, quoniam AB est æqualis ΓΔ, communis autem BΓ, duæ AB, BΓ duabus ΓΔ, BΓ sunt æquales; & angulus ABΓ æqualis angulo BΓΔ: basis igitur AΓ [per 4. prop.] basi BΔ est æqualis, triangulumque ABΓ æquale triangulo BΓΔ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: ergo angulus AΓB angulo ΓBΔ est æqualis. & quoniam in duas rectas lineas AΓ, BΔ recta BΓ incidens alternos angulos AΓB, ΓBΔ æquales inter se efficit: parallela est [per 27. prop.] AΓ ipsi BΔ. ostensa autem est & eidem æqualis.

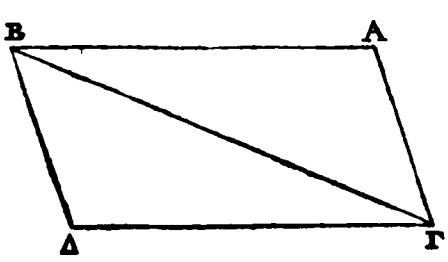
Quæ igitur æquales & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, ipsæ etiam sunt æquales & parallelæ. quod erat demonstrandum.

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum ſpatiorum tam latera oppoſita quam anguli oppoſiti inter ſe æquantur, & illa diameter bifariam ſecat.

SIT parallelogrammum ΑΓΔΒ, ejus autem diameter ΒΓ.: dico ΑΓΔΒ parallelogrammi latera oppoſita & angulos oppoſitos inter ſe æquari, & diametrum ΒΓ ipſum bifariam ſecare.

Quoniam enim parallela eſt ΑΒ ipſi ΓΔ, & in ipſas incidit recta linea ΒΓ: anguli alterni ΑΒΓ, ΒΓΔ [per 29. prop.] inter ſe ſunt æquales. rurſus, quoniam ΑΓ ipſi ΒΔ parallela eſt, & in ipſas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΓΒ, ΓΒΔ ſunt inter ſe æquales: duo igitur triangula ſunt ΑΒΓ, ΓΒΔ, quæ duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus angulis ΒΓΔ, ΓΒΔ æquales habent, alterum alteri; & unum latus uni lateri æquale, quod æqualibus adjacet angulis, utrique commune ΒΓ: ergo & reliqua latera [per 26. prop.] reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem: æquale igitur eſt latus quidem ΑΒ lateri ΓΔ, latus vero ΑΓ ipſi ΒΔ, & angulus ΒΑΓ angulo ΒΔΓ. & quoniam angulus ΑΒΓ eſt æqualis angulo ΒΓΔ, & angulus ΓΒΔ angulo ΑΓΒ: erit totus angulus ΑΒΔ æqualis toti ΑΓΔ. oſtenſus autem eſt & angulus ΒΑΓ angulo ΒΔΓ æqualis.



Parallelogrammorum igitur ſpatiorum latera oppoſita & anguli oppoſiti inter ſe æquantur.

DICO etiam diametrum eas bifariam ſecare. quoniam enim æqualis eſt ΑΒ ipſi ΓΔ, communis autem ΒΓ; duæ ΑΒ, ΒΓ duobus ΔΓ, ΓΒ ſunt æquales, altera alteri, & angulus ΑΒΓ æqualis eſt angulo ΒΓΔ: baſis igitur ΑΓ [per 4. prop.] baſi ΒΔ æqualis eſt, ideoque triangulum ΑΒΓ triangulo ΒΓΔ æquale erit.

Ergo diameter ΒΓ parallelogrammum ΑΓΔΒ bifariam ſecat. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ· αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΓΒΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν τῇ μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΓΔΒ παραλληλόγραμμον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma, ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

SInt parallelogramma ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ſuper eadem baſi ΒΓ & in eiſdem parallelis ΑΖ, ΒΓ conſtituta: dico ΑΒΓΔ parallelogrammum ΕΒΓΖ parallelogrammo eſſe æquale.

Quoniam enim parallelogrammum eſt ΑΒΓΔ, ΑΔ [per 34. prop.] æqualis eſt ΒΓ. eadem quoque ratione & ΕΖ eſt æqualis ΒΓ: quare & ΑΔ æqualis erit ΕΖ. & communis ΔΕ: tota igitur ΑΕ toti ΔΖ [per 2. ax.] eſt æqualis. eſt autem

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

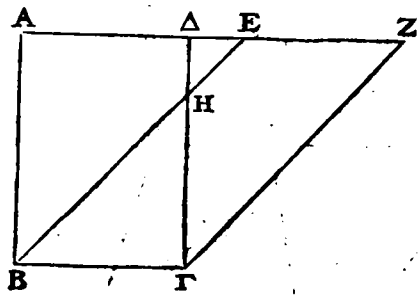
Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῇ ΒΓ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἴση ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἴση ἐστί. καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ

τῇ

τῇ ΔΓ ἴσῃ· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΔΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί.



Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

& AB [per 34. prop.] æqualis ΔΓ; ergo duæ EA, AB duabus ZΔ, ΔΓ ſunt æquales, altera alteri, & angulus ZΔΓ [per 29. prop.] æqualis angulo EAB, exterior interiori: baſis igitur EB [per 4. prop.] baſi ZΓ eſt æqualis, & triangulum EAB æquale triangulo ZΔΓ. commune auferatur ΔHE: reliquum igitur trapezium ABHΔ [per 3. ax.] reliquo trapezio EHΓZ eſt æquale. commune addatur HBΓ triangulum: ergo totum parallelogrammum ABΓΔ toti parallelogrammo EBΓZ æquale erit.

Parallelogramma igitur, ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Prop. XXXVI. Theor.

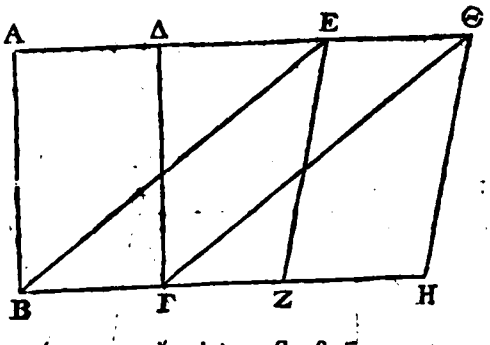
Parallelogramma, ſuper æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΕ, ΓΘ, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· καὶ αἱ ΕΒ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ, ταῖς ΒΓ, ΑΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



SInt parallelogramma ABΓΔ, EZHΘ ſuper æqualibus baſibus BΓ, ZH & in eiſdem parallelis AΘ, BH conſtituta: dico parallelogrammum ABΓΔ parallelogrammo EZHΘ eſſe æquale.

Conjungantur enim BE, ΓΘ.

Et quoniam æqualis eſt BΓ ipſi ZH, & ZH ipſi EΘ; erit & BΓ ipſi EΘ æqualis. ſunt autem & parallelæ & ipſas conjungunt BE, ΓΘ; quæ autem æquales & parallelas ad eaſdem partes conjungunt [per 33. prop.] ſunt æquales & parallelæ: ergo BE, ΓΘ & æquales ſunt & parallelæ: quare EBΓΘ parallelogrammum eſt, & [per 35. prop.] æquale parallelogrammo ABΓΔ; baſim enim eandem habet BΓ & in eiſdem parallelis BΓ, AΘ conſtituitur. ſimili ratione & EZHΘ eidem EBΓΘ eſt æquale: ergo & parallelogrammum ABΓΔ eſt æquale parallelogrammo EZHΘ.

Parallelogramma igitur, ſuper æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Prop. XXXVII. Theor.

Triangula, ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις τῇ ΑΔ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

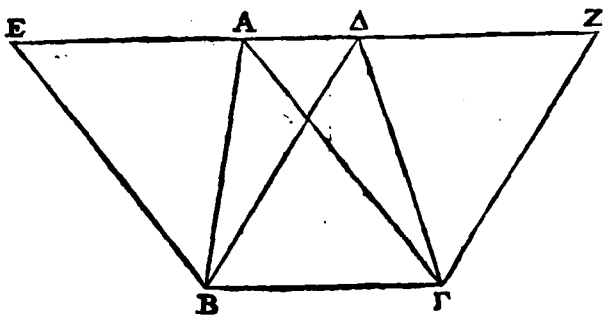
SInt triangula ABΓ, ΔBΓ ſuper eadem baſi BΓ & in eiſdem parallelis AΔ, BΓ conſtituta: dico triangulum ABΓ triangulo ΔBΓ eſſe æquale.

Producatur A Δ ex utraque parte in E, Z puncta, & per B quidem ipſi Γ A [per 31. prop.] parallela ducatur B E, per Γ vero ipſi B Δ parallela ducatur Γ Z.

Parallelogrammum igitur eſt utrumq; ipſorum E B Γ A, Δ B Γ Z: & parallelogrammum E B Γ A [per 35. prop.] eſt æquale parallelogrammo Δ B Γ Z; etenim ſuper eadem ſunt baſi B Γ & in eiſdem parallelis B Γ, E Z: eſtque parallelogrammi quidem E B Γ A dimidium A B Γ triangulum; diameter enim A B ipſum bifariam ſecat: parallelogrammi vero Δ B Γ Z dimidium triangulum Δ B Γ; diameter enim Δ Γ [per 34. prop.] ipſum bifariam ſecat. æqualium autem dimidia inter ſe ſunt æqualia: ergo triangulum A B Γ triangulo Δ B Γ eſt æquale.

Triangula igitur, ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia. quod erat demonſtrandum.

Ἐκβεβλήθω ἡ Α Δ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ Γ Α παράλληλος ἤχθω ἡ Β Ε, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ Β Δ παράλληλος ἤχθω ἡ Γ Ζ.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ· ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΒΓΑ τῷ ΔΒΓΖ, ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ· ἔστι δὲ τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangula, ſuper baſibus æqualibus & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

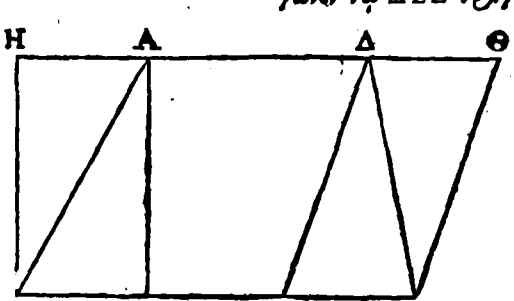
SInt triangula A B Γ, Δ E Z ſuper æqualibus baſibus B Γ, E Z & in eiſdem parallelis B Z, A Δ conſtituta: dico A B Γ triangulum eſſe æquale triangulo Δ E Z.

Producatur enim A Δ ex utraque parte in H, Θ puncta, & per B quidem ipſi Γ A [per 31. prop.] parallela ducatur B H, per Z vero ducatur Z Θ parallela ipſi Δ E.

Parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum H B Γ A, Δ E Z Θ: atque eſt H B Γ A [per 36. prop.] æquale Δ E Z Θ; ſuper æqualibus enim ſunt baſibus B Γ, E Z & in eiſdem parallelis B Z, H Θ: parallelogrammi vero H B Γ A dimidium eſt A B Γ triangulum, nam [per 34. prop.] diameter A B ipſum bifariam ſecat: & parallelogrammi Δ E Z Θ dimidium eſt triangulum Z E Δ; diameter enim Δ Z ipſum ſecat bifariam. æqualium autem dimidia ſunt inter ſe æqualia: ergo A B Γ triangulum triangulo Δ E Z eſt æquale.

Triangula igitur, ſuper æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia. quod erat demonſtrandum.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.



Ἐκβεβλήθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· ἔστι δὲ τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος δίχα αὐτὸ τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΖΔ διάμετρος δίχα αὐτὸ τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

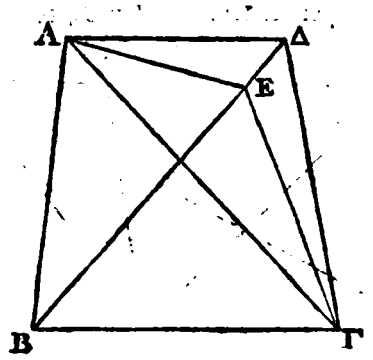
Τὰ ἄρα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

ΕΣτω τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθεῖα παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῇ ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΒΓ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστίν, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάττονι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶ παράλληλος.



Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia, ſuper eadem baſi & ad eaſdem partes conſtituta, ſunt in eiſdem parallelis.

SInt æqualia triangula ABΓ, ΔBΓ, ſuper eadem baſi BΓ conſtituta & ad eaſdem partes: dico in eiſdem eſſe parallelis. ducatur enim AΔ: dico AΔ parallelam eſſe BΓ.

Si enim non, ducatur per A punctum [per 31. prop.] rectæ BΓ parallela recta AE, & ducatur EΓ.

Æquale igitur eſt [per 37. prop.] ABΓ triangulum triangulo EBΓ; ſuper eadem enim eſt baſi BΓ & in eiſdem parallelis BΓ, AE. ſed [ex hyp.] ABΓ, triangulum triangulo ΔBΓ eſt æquale: ergo & triangulum ΔBΓ æquale eſt ipſi EBΓ triangulo, majus minori, quod fieri non poteſt: non eſt igitur AE ipſi BΓ parallela. ſimiliter oſtendemus neque ullam aliam parallelam eſſe præter ipſam AΔ: ergo AΔ ipſi BΓ eſt parallela.

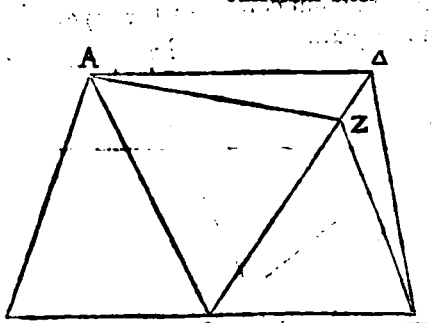
Triangula igitur æqualia, ſuper eadem baſi & ad eaſdem partes conſtituta, ſunt in eiſdem parallelis, quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

ΕΣτω τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΒΓ, ΓΔΕ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ. Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΖΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΔΓΕ ἄρα τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάττονι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ παράλληλός ἐστι.



Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστι παραλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XL. THEOR.

Triangula æqualia, ſuper baſibus æqualibus & ad eaſdem partes conſtituta, ſunt in eiſdem parallelis.

SInt triangula æqualia ABΓ, ΓΔE, ſuper æqualibus baſibus BΓ, ΓE & ad eaſdem partes conſtituta: dico etiam in eiſdem eſſe parallelis. ducatur enim AΔ: dico AΔ ipſi BE parallelam eſſe.

Nam ſi non eſt, ducatur per A ipſi BE parallela ZA, & ZE ducatur.

Triangulum igitur ABΓ [per 38. prop.] triangulo ZΓE eſt æquale; nam & ſuper æqualibus baſibus BΓ, ΓE & in eiſdem parallelis BE, AZ conſtituuntur. ſed triangulum ABΓ æquale eſt triangulo ΔΓE: ergo & triangulum ΔΓE triangulo ZΓE æquale erit, majus minori, quod fieri non poteſt: non eſt igitur AZ ipſi BE parallela. ſimiliter demonſtrabimus neque ullam aliam parallelam eſſe præter AΔ: ergo AΔ ipſi BE parallela erit.

Æqualia igitur triangula, ſuper baſibus æqualibus & ad eaſdem partes conſtituta, ſunt in eiſdem parallelis, quod erat demonſtrandum.

PROP.

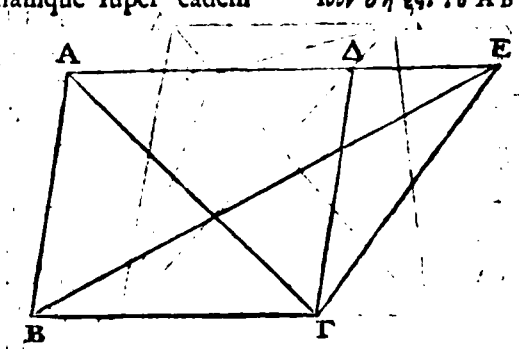
Prop. XLI. Theor.

Si parallelogrammum & triangulum eandem habeant baſim, ſintque in eiſdem parallelis: parallelogrammum ipſius trianguli duplum erit.

PArallelogrammum enim ABΓΔ & triangulum EBΓ baſim habeant eandem BΓ, & ſint in eiſdem parallelis BΓ, AE: dico parallelogrammum ABΓΔ trianguli BEΓ duplum eſſe.

Ducatur enim AΓ.

Triangulum igitur ABΓ triangulo EBΓ [per 37. prop.] eſt æquale; namque ſuper eadem baſi BΓ, & in eiſdem parallelis BΓ, AE conſtituitur. ſed ABΓΔ parallelogrammum duplum eſt trianguli ABΓ, diameter enim AΓ [per 34. prop.] ipſum bifariam ſecat: quare & ABΓΔ parallelogrammum ipſius EBΓ trianguli duplum erit.



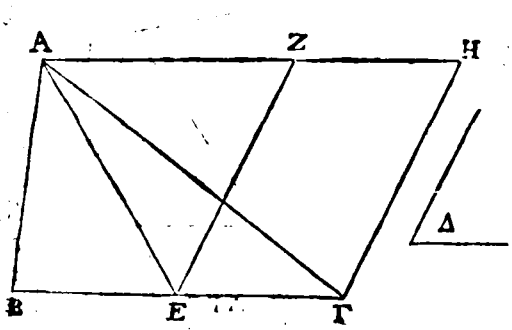
Si igitur parallelogrammum & triangulum eandem habeant baſim, & ſint in eiſdem parallelis: parallelogrammum ipſius trianguli duplum erit. quod erat demonſtrandum.

Prop. XLII. Probl.

Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

SIT datum triangulum ABΓ, datus autem rectilineus angulus Δ: oportet itaque dato triangulo ABΓ æquale parallelogrammum conſtituere in angulo rectilineo ipſi Δ æquali.

Secetur BΓ [per 10. prop.] bifariam in E, & ducatur AE, & ad rectam lineam EΓ atque ad punctum in ea E conſtituatur [per 23. prop.] angulus ΓEZ æqualis ipſi Δ, & per A quidem ipſi EΓ [per 31. prop.] parallela ducatur AH, per Γ vero ipſi ZE ducatur parallela ΓH: parallelogrammum igitur eſt ZEΓH.



Et quoniam BE eſt æqualis EΓ, erit & ABE triangulum [per 38. prop.] triangulo AEΓ æquale; ſuper æqualibus enim ſunt baſibus BE, EΓ, & in eiſdem parallelis BΓ, AH: ergo triangulum ABΓ trianguli AEΓ eſt duplum. eſt autem [per 41. prop.] parallelogrammum ZEΓH duplum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχῃ τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ· διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστω παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΒΕΓ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστω αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνου βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχῃ τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ· διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι *ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΖΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τριγώνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον

* Legendum videtur, ἐν ἴσῃ τῇ δοθείσῃ, ſic *Proclus* in 44. prop.

μον

μα διπλάσιον τῦ ΑΕΓ τριγώνυ· βάσιν τε γὰρ αὐτοῦ τ αὐτὸν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, καὶ ἔχει τ ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνεστάθη τὸ ΖΕΓΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

trianguli ΑΒΓ; baſim enim eandem habet, & in eiſdem eſt parallelis: æquale igitur eſt [per 6. ax.] ΖΕΓΗ parallelogrammum triangulo ΑΒΓ, habetque ΓΕΖ angulum æqualem angulo dato Δ.

Dato igitur triangulo ΑΒΓ æquale parallelogrammum ΖΕΓΗ conſtitutum eſt, in angulo ΓΕΖ, qui angulo Δ eſt æqualis. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

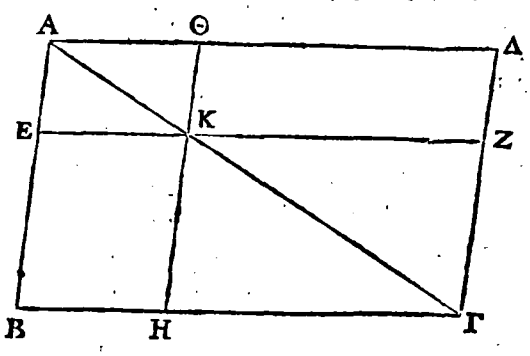
Παντὸς παραλληλογράμμυ τ περὶ τὰς διαμέτρους παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Prop. XLIII. Theor.

In omni parallelogrammo complementa eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum inter ſe ſunt æqualia.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τριγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΕΚΘΑ παραλληλόγραμμόν ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τριγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τριγωνον τῷ ΚΗΓ ἐστιν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τριγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τριγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τριγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπῷ ἄρα τῷ ΚΔ παραπληρώματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα.



Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμυ τ περὶ τ διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sit parallelogrammum ΑΒΓΔ, cujus diameter ΑΓ, & circa ipſam ΑΓ parallelogramma quidem ſint ΕΘ, ΖΗ, quæ vero dicuntur complementa ΒΚ, ΚΔ: dico ΒΚ complementum complemento ΚΔ eſſe æquale.

Quoniam enim parallelogrammum eſt ΑΒΓΔ, & ejus diameter ΑΓ, æquale eſt [per 34. prop.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΑΔΓ. rurſus, quoniam ΕΚΘΑ parallelogrammum eſt, cujus diameter ΑΚ, triangulum ΑΕΚ triangulo ΑΘΚ æquale erit. eadem etiam ratione & triangulum ΚΖΓ triangulo ΚΗΓ eſt æquale. cum igitur triangulum quidem ΑΕΚ æquale ſit triangulo ΑΘΚ, triangulum vero ΚΖΓ ipſi ΚΗΓ, triangulum ΑΕΚ una cum triangulo ΚΗΓ æquale eſt triangulo ΑΘΚ una cum ΚΖΓ triangulo: eſt autem & totum triangulum ΑΒΓ æquale toti ΑΔΓ: reliquum igitur ΒΚ complementum [per 3. ax.] reliquo complemento ΚΔ eſt æquale.

In omni igitur parallelogrammo complementa eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum inter ſe ſunt æqualia. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, * ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Prop. XLIV. Probl.

Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τριγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τ ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

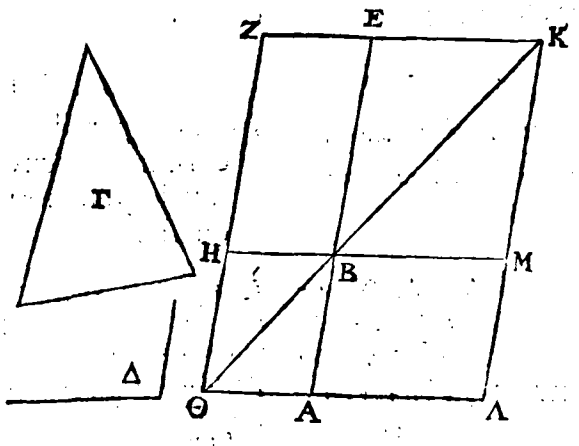
Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ

Sit data quidem recta linea ΑΒ, datum vero triangulum Γ, & datus angulus rectilineus Δ: oportet quidem ad datam rectam lineam ΑΒ, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicare, in angulo ipſi Δ æquali.

Conſtituatur [per 42. prop.] triangulo Γ æquale parallelogrammum ΒΕΖΗ, in angulo ΕΒΗ, qui eſt æqualis angulo Δ; & ponatur ΒΕ in di-

* εὐγωνίᾳ, ἤτοι ἴσῃ τῇ δοθείσῃ. *Proclus.*

rectum ipſi AB, producaturque ZH ad Θ, & per A alterutri ipſarum BH, EZ [per 31. prop.] parallela ducatur AΘ, & jungatur ΘB. & quoniam in parallelas AΘ, EZ recta linea ΘZ incidit, anguli AΘZ, ΘZE [per 29. prop.] duobus rectis ſunt æquales; quare BΘH, HZE duobus rectis ſunt minores: quæ vero à minoribus, quàm ſunt duo recti, in infinitum producuntur [per 11. ax.] conveniunt inter ſe: ergo ΘB, ZE productæ convenient. producantur [per 2. poſt.] & conveniant in K; perque K alterutri ipſarum EA, ZΘ [per 31. prop.] parallela ducatur KΛ; & AΘ, HB ad Λ, M puncta producantur.



Parallelogrammum igitur eſt ΘΛKZ, cujus diameter ΘK, & circa ΘK parallelogramma quidem ſunt AH, ME; ea vero quæ dicuntur complementa AB, BZ: ergo [per 43. prop.] AB ipſi BZ eſt æquale. eſt autem BZ æquale triangulo Γ: quare & AB triangulo Γ æquale erit. & quoniam HBE angulus æqualis eſt [per 15. prop.] angulo ABM, & æqualis eſt etiam HBE angulo Δ: erit & angulus ABM angulo Δ æqualis.

Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum conſtituitur AB, in angulo ABM, qui eſt æqualis angulo Δ. quod erat faciendum.

AB, καὶ διήχθω ἡ ZH ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν BH, EZ παράλληλος ἤχθω ἡ AΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘB. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς AΘ, EZ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΘZ, αἱ ἄρα τοῦ AΘZ, ΘZE γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα τοῦ BΘH, HZE δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων, ἢ δύο ὀρθῶν, εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘB, ZE ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ K, καὶ διὰ τοῦ K σημείου ὁποτέρᾳ τῶν EA, ZΘ παράλληλος ἤχθω ἡ KΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘA, HB ἐπὶ τὰ Λ, M σημεῖα.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛKZ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘK, περὶ δὲ τὴν ΘK παραλληλόγραμμα μέν ἐστι τὰ AH, ME, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα AB, BZ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τῷ BZ. ἀλλὰ καὶ τὸ BZ τῷ Γ τετράγωνόν ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ AB ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HBE γωνία τῇ ὑπὸ ABM, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ HBE τῇ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ABM τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν AB, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ AB, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ABM, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XLV. PROBL.

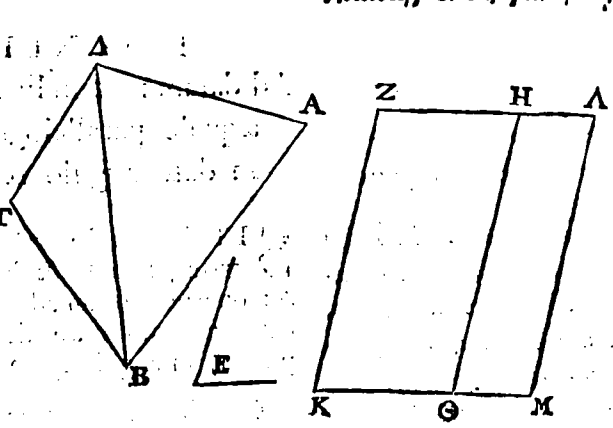
Rectilineo dato æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

SIT datum rectilineum ABΓΔ, datus vero angulus rectilineus E: oportet rectilineo ABΓΔ æquale parallelogrammum conſtituere, in angulo ipſi E æquali.

Ducatur enim ΔB, & conſtituatur [per 42. 1 prop.] triangulo AΔB æquale, parallelogrammum ZΘ, in angulo ΘKZ, qui eſt æqualis angulo E: deinde ad rectam lineam HΘ applicetur triangulo ΔBΓ æquale parallelogrammum HM, in angulo HΘM, qui angulo E eſt æqualis.



Et quoniam angulus E æqualis eſt utrique ipſorum ΘKZ, HΘM: erit & ΘKZ angulo HΘM æqualis. communis addatur KΘH: angu-

ΕΣτω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ABΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ E· δεῖ δὴ τῷ ABΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν ἴσῃ γωνίᾳ τῇ E.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔB, καὶ συνεστάτω τῷ ABΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ZΘ, ἐν τῇ ὑπὸ ΘKZ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ E· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν HΘ εὐθεῖαν τῷ ΔBΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ HM, ἐν τῇ ὑπὸ HΘM γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ E.

Καὶ ἐπεὶ ἡ E γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘKZ, HΘM ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἄρα ὑπὸ ΘKZ τῇ ὑπὸ HΘM ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ KΘH· αἱ ἄρα ὑπὸ

τῷ ΖΚΘ, ΚΘΗ τῷ τῷ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσας εἰσίν. ἀλλ' αἱ τῷ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ τῷ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ τῷ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινὴ προσκείσθω ἡ τῷ ΘΗΛ· αἱ ἄρα τῷ ΜΘΗ, ΘΗΛ τῇσι τῷ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ τῷ ΜΘΗ, ΘΗΛ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, καὶ αἱ τῷ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΖ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε, καὶ παράλληλός ἐστι· καὶ ταῖς ἄκραις αὐτῶν εὐθείαις αἱ ΚΜ, ΖΛ, καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΘΖ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΑΒΓ τῷ ΗΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέστηται τὸ ΚΖΛΜ, ἐν γωνίᾳ τῇ τῷ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση δοθείσῃ τῇ Ε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

li igitur ΖΚΘ, ΚΘΗ [angulis ΚΘΗ, ΗΘΜ] sunt æquales. sed ΖΚΘ, ΚΘΗ [per 29. prop.] sunt æquales duobus rectis: ergo & ΚΘΗ, ΗΘΜ duobus rectis æquales erunt. itaque quoniam ad rectam lineam ΗΘ, & ad punctum in ea Θ, duæ rectæ lineæ ΚΘ, ΘΜ, non ad easdem partes positæ, angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt, [per 14. prop.] in directum est ΚΘ ipsi ΘΜ. & quoniam in parallelas ΚΜ, ΖΗ recta linea ΘΗ incidit, alterni anguli ΜΘΗ, ΘΗΖ [per 29. prop.] æquales sunt. communis addatur ΘΗΛ: anguli igitur ΜΘΗ, ΘΗΛ angulis ΘΗΖ, ΘΗΛ sunt æquales. at anguli ΜΘΗ, ΘΗΛ [per 29. prop.] sunt æquales duobus rectis: quare & anguli ΘΗΖ, ΘΗΛ duobus rectis æquales erunt: in directum igitur est ΖΗ ipsi ΗΛ. & quoniam ΚΖ ipsi ΘΗ & æqualis est & parallela, & ΘΗ etiam ipsi ΜΛ, erit [per 1. ax. & 30. prop.] ΚΖ ipsi ΜΛ & æqualis & parallela; ipsasque conjungunt rectæ lineæ ΚΜ, ΖΛ: ergo & ΚΜ, ΖΛ [per 33. prop.] sunt æquales & parallelæ: parallelogrammum igitur est ΚΖΛΜ. cum autem triangulum quidem ΑΒΔ æquale sit parallelogrammo ΘΖ, triangulum vero ΑΒΓ parallelogrammo ΗΜ; erit totum ΑΒΓΔ rectilineum toti parallelogrammo ΚΖΛΜ æquale.

Dato igitur rectilineo ΑΒΓΔ æquale parallelogrammum constitutum est ΚΖΛΜ, in angulo ΖΚΜ, qui est æqualis angulo Ε dato. quod erat faciendum.

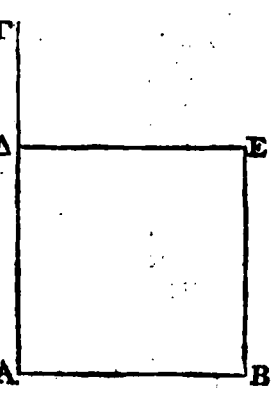
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

PROP. XLVI. PROBL.

A data recta linea quadratum describere.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.



Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, ἀπὸ δὲ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α, πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ· καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ· διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση, αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΒΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ· αἱ ἄρα τῷ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ τῷ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ τῷ ΑΔΕ. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν τῷ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Τετράγωνον ἄρα ἐστί, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

SIT data recta linea ΑΒ: oportet ab ipsa ΑΒ quadratum describere.

Ducatur [per 11. prop.] rectæ lineæ ΑΒ, à puncto in ea dato Α, ad rectos angulos ΑΓ; & ipsi ΑΒ æqualis [per 3. prop.] ponatur ΑΔ; perque punctum Δ ducatur [per 31. prop.] ΔΕ ipsi ΑΒ parallela; & per Β ipsi ΑΔ parallela ducatur ΒΕ.

Parallelogrammum igitur est ΑΔΕΒ. ideo & ΑΒ quidem est æqualis ΔΕ, ΑΔ vero ipsi ΒΕ. sed & ΑΒ ipsi ΑΔ est æqualis: quatuor igitur ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ inter se sunt æquales: ideoque æquilaterum est ΑΔΕΒ parallelogrammum. dico etiam rectangulum esse. quoniam enim in parallelas ΑΒ, ΔΕ recta linea incidit ΑΔ: anguli ΒΑΔ, ΑΔΕ [per 29. prop.] duobus rectis sunt æquales. rectus autem est [per construct.] ΒΑΔ: ergo & ΑΔΕ rectus erit. parallelogrammorum autem tam latera quam anguli oppositi [per 34. prop.] æquantur: rectus igitur est uterque oppositorum ΑΒΕ, ΒΕΔ angulorum; & ob id rectangulum est ΑΔΕΒ. ostensum autem est & æquilaterum esse.

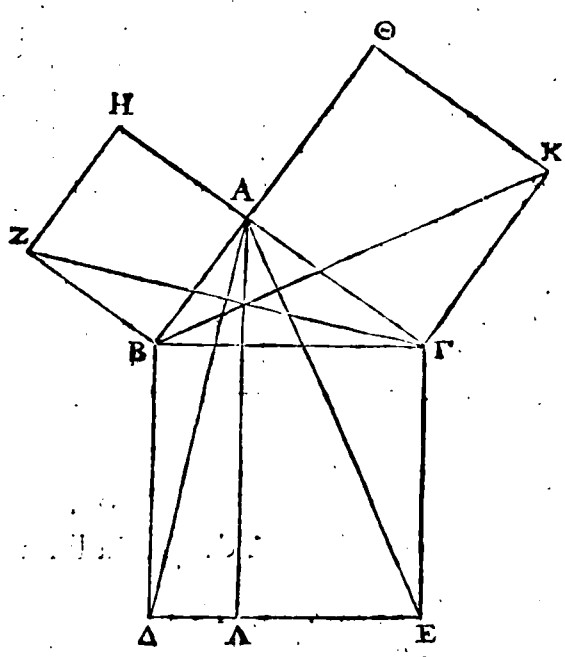
Quadratum igitur sit necesse est; atque à recta linea ΑΒ describitur. quod erat faciendum.

PROP. XLVII. THEOR.

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus deſcribuntur.

SIT triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum habens ΒΑΓ angulum: dico quadratum, deſcriptum à recta ΒΓ, æquale eſſe quadratis, quæ ab ipſis ΒΑ, ΑΓ deſcribuntur.

Deſcribatur enim à ΒΓ quidem quadratum ΒΔΕΓ; ab ipſis vero ΒΑ, ΑΓ quadrata ΗΒ, ΘΓ; perque Α alterutri ipſarum ΒΔ, ΓΕ parallela ducatur ΑΛ; & ducantur ΑΔ, ΖΓ.



Quoniam igitur uterque angulorum ΒΑΓ, ΒΑΗ rectus eſt; & ad eandem rectam lineam ΒΑ, & ad punctum in ea Α, duæ rectæ lineæ ΑΓ, ΑΗ, non ad eaſdem partes poſitæ, faciunt angulos deinceps duobus rectis æquales: ΓΑ recta eſt in directum ipſi ΑΗ. eadem ratione, & ΑΒ eſt in directum ipſi ΑΘ. & quoniam angulus ΔΒΓ [per 10. ax.] eſt æqualis angulo ΖΒΑ, rectus enim eſt uterque, communis addatur ΑΒΓ: totus igitur ΔΒΑ angulus toti ΖΒΓ eſt æqualis. cum autem duæ ΔΒ, ΒΑ duabus ΓΒ, ΒΖ ſint æquales, altera alteri, & angulus ΔΒΑ æqualis angulo ΖΒΓ: erit [per 4. prop.] & baſis ΑΔ baſi ΖΓ æqualis, & ΑΒΔ triangulum triangulo ΖΒΓ æquale. eſtque trianguli quidem ΑΒΔ [per 41. prop.] duplum ΒΛ parallelogrammum; baſim enim eandem habent ΒΔ, & ſunt in eiſdem parallelis ΒΔ, ΑΛ: trianguli vero ΖΒΓ duplum eſt ΗΒ quadratum; rurſus enim baſim habent eandem ΖΒ, & ſunt in eiſdem parallelis ΖΒ, ΗΓ; æqualium autem dupla ſunt inter ſe æqualia: æquale eſt igitur parallelogrammum ΒΛ ipſi ΗΒ quadrato. ſimiliter, ductis ΑΕ, ΒΚ, oſtendetur etiam ΓΛ parallelogrammum æquale quadrato ΘΓ: totum igitur ΒΔΕΓ quadratum duobus quadratis ΗΒ, ΘΓ eſt æquale. & eſt quidem ΒΔΕΓ quadratum à recta linea ΒΓ deſcriptum; quadrata vero ΗΒ, ΘΓ ab ipſis ΒΑ, ΑΓ: quadratum igitur ΒΕ, à latere ΒΓ deſcriptum, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur à lateribus ΒΑ, ΑΓ.

Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus deſcribuntur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, τετραγώνοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ· ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ· καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν· πρὸς δή τινι τῇ ΒΑ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΓΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἔστι μὲν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· ἔστι δὲ τοῦ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσὶ ταῖς ΖΒ, ΗΓ· τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ, δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΒΓΕ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ΒΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

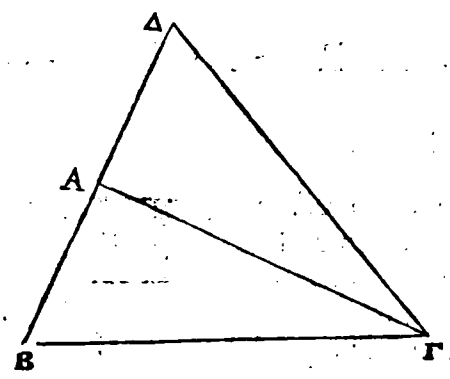
Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν δύο τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστι.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur: angulus à reliquis duobus trianguli lateribus comprehensus rectus erit.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὀρθὴ γὰρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

TRianguli enim ΑΒΓ quod ab uno latere ΒΓ describitur quadratum æquale sit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus ΒΑ, ΑΓ describuntur: dico angulum ΒΑΓ rectum esse.

Ducatur enim [per 11. prop.] à puncto Α ipsi ΑΓ ad rectos angulos ΑΔ, ponaturque ΑΔ ipsi ΒΑ æqualis, & ducatur ΔΓ.

Quoniam igitur ΔΑ est æqualis ΑΒ; erit & quadratum, quod describitur ex ΔΑ, æquale quadrato rectæ ΑΒ. commune addatur quadratum. quod ex ΑΓ: ergo quadrata quæ ex ΔΑ, ΑΓ æqualia sunt quadratis quæ ex ΒΑ, ΑΓ describuntur. sed quadratis quidem quæ ex ΔΑ, ΑΓ æquale est [per 47. prop.] quod ex ΔΓ quadratum, rectus enim angulus est ΔΑΓ; quadratis vero quæ ex ΒΑ, ΑΓ æquale ponitur quadratum quod ex ΒΓ: quadratum igitur quod ex ΔΓ æquale est ei quod ex ΒΓ quadrato: ergo & latus ΔΓ lateri ΓΒ est æquale. & quoniam ΑΔ est æqualis ΑΒ, communis autem ΑΓ; duæ ΑΔ, ΑΓ duabus ΒΑ, ΑΓ æquales sunt; & basis ΔΓ est æqualis basi ΓΒ: angulus igitur ΔΑΓ [per 8. prop.] angulo ΒΑΓ est æqualis. rectus autem est ΔΑΓ: ergo & ΒΑΓ rectus erit.

Si igitur quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur: angulus à reliquis duobus trianguli lateribus comprehensus rectus erit. quod erat demonstrandum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

1. OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

2. Omnis parallelogrammi unumquodque eorum quæ circa diametrum ipſius ſunt parallelogrammorum cum duobus complementis Gnomon vocetur.

ΟΡΟΙ.

α'. ΠΑΝ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

β'. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ὄντων παραλληλογράμμων ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.

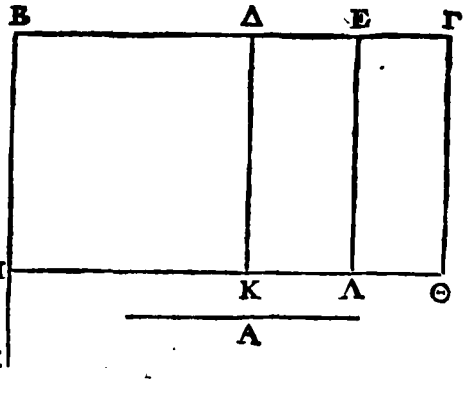
PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcunque partes: rectangulum ſub duabus rectis comprehenſum æquale eſt eis rectangulis, quæ ſub recta linea non ſecta & ſingulis alterius ſegmentis comprehenduntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

SInt duæ rectæ lineæ A, BΓ, & ſecta ſit BΓ utcunque in punctis Δ, E: dico rectangulum comprehenſum ſub rectis lineis A, BΓ æquale eſſe rectangulo quod continetur ſub A, BΔ, & rectangulo quod ſub A, ΔE, & ei quod ſub A, EΓ continetur.



Ducatur enim [per 11. prop. lib. 1.] à puncto B ipſi BΓ ad rectos angulos BZ, atque ipſi A ponatur æqualis BH, & per H quidem ipſi BΓ [per 31. 1.] parallela ducatur HΘ; per puncta vero Δ, E, Γ ducantur ΔK, EΛ, ΓΘ parallelæ ipſi BH.

Rectangulum igitur BΘ eſt æquale rectangulis BK, ΔΛ, EΘ. atque eſt quidem BΘ rectangulum, quod ſub A, BΓ continetur; etenim con-

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ A, BΓ, καὶ τετμήσθω ἡ BΓ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ Δ, E σημεῖα· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν A, BΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῶν A, BΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν A, ΔE, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν A, EΓ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B τῇ BΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ BZ, καὶ κείσθω τῇ A ἴση ἡ BH, καὶ διὰ τοῦ H τῇ BΓ παράλληλος ἤχθω ἡ HΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, E, Γ τῇ BH παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔK, EΛ, ΓΘ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ BΘ τοῖς BK, ΔΛ, EΘ. καὶ ἔστι τὸ μὲν BΘ τὸ ὑπὸ τῶν A, BΓ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ

HB,

ΗΒ, ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΒΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΗΒ τῇ Α· τὸ δὲ ΔΛ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τουτ' ἔστιν ἡ ΒΗ, τῇ Α· καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Α, ΒΔ, καὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α, ΕΓ.

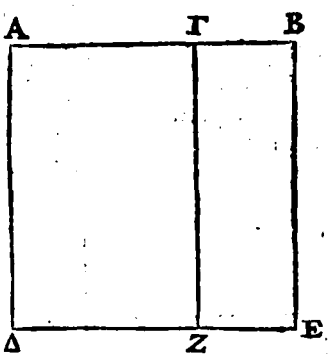
Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνου τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.



Ἴσον δὴ τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ εἰρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΓ τετραγώνου.

tinetur ſub ΗΒ, ΒΓ, & ΒΗ ipſi Α eſt æqualis: rectangulum autem ΒΚ eſt quod continetur ſub ipſis Α, ΒΔ; continetur enim ſub ΗΒ, ΒΔ, quarum ΗΒ eſt æqualis Α: & rectangulum ΔΛ eſt quod continetur ſub rectis Α, ΔΕ, quoniam ΔΚ, hoc eſt ΒΗ, ipſi Α eſt æqualis: & ſimiliter rectangulum ΕΘ eſt quod ſub rectis Α, ΕΓ continetur: ergo rectangulum contentum ſub rectis Α, ΒΓ eſt æquale rectangulo contento ſub rectis Α, ΒΔ, & contento ſub rectis Α, ΔΕ, & adhuc contento ſub Α, ΕΓ.

Si igitur ſint duæ rectæ lineæ, quarum altera ſecta fuerit in quotcunque partes: rectangulum ſub duabus rectis lineis comprehenſum eſt æquale eis rectangulis, quæ ſub recta linea non ſecta, & ſingulis alterius ſegmentis comprehenduntur. quod erat demonſtrandum.

Prop. II. Theor.

Si recta linea ſecetur utcunque, rectangula ſub tota & utroque ſegmento comprehenſa æquantur quadrato totius.

Recta enim linea ΑΒ ſecetur utcunque in puncto Γ: dico rectangulum quod ſub rectis ΑΒ, ΒΓ comprehenditur, una cum rectangulo comprehenſo ſub ΒΑ, ΑΓ, æquari quadrato rectæ ΑΒ.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex ΑΒ quadratum ΑΔΕΒ, & per Γ ducatur [per 31. 1.] alterutri ipſarum ΑΔ, ΒΕ parallela ΓΖ.

Eſt igitur ΑΕ æquale rectangulis ΑΖ, ΓΕ: eſt autem ΑΕ quadratum rectæ ΑΒ; ΑΖ vero rectangulum comprehenditur ſub rectis ΒΑ, ΑΓ, comprehenditur enim ſub rectis ΔΑ, ΑΓ, quarum ΑΔ æquatur ipſi ΑΒ: & rectangulum ΓΕ comprehenditur ſub rectis ΑΒ, ΒΓ, cum recta ΒΕ ſit æqualis rectæ ΑΒ: rectangulum igitur comprehenſum ſub rectis ΒΑ, ΑΓ, una cum rectangulo ſub ΑΒ, ΒΓ, æquatur quadrato rectæ ΑΒ.

Si igitur recta linea ſecetur utcunque, rectangula ſub tota & utroque ſegmento comprehenſa æquantur quadrato totius. quod erat demonſtrandum.

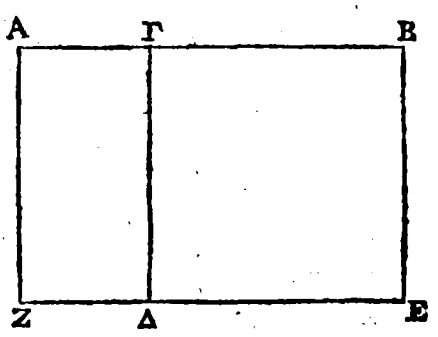
Prop. III. Theor.

Si recta linea ſecetur utcunque, rectangulum ſub tota & uno ſegmento comprehenſum æquatur rectangulo ſub ſegmentis comprehenſo, & prædicti ſegmenti quadrato.

Recta enim linea ΑΒ ſecta ſit utcunque in puncto Γ; dico rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ æquale eſſe rectangulo ſub ΑΓ, ΓΒ, una cum quadrato rectæ ΒΓ.

Deſcriba-

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex ΒΓ quadratum ΓΔΕΒ, producaturque ΒΔ in Ζ, & per Α alterutri ipſarum ΓΔ, ΒΕ [per 31. 1.] parallela ducatur ΑΖ.



Æquale utique erit rectangulum ΑΕ ipſis ΑΔ, ΓΕ: & eſt ΑΕ [quidem rectangulum contentum ſub rectis ΑΒ, ΒΓ; continetur etenim ſub rectis ΑΒ, ΒΕ, quarum ΒΕ eſt æqualis ΒΓ: rectangulum vero ΑΔ eſt quod continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ, cum ΔΓ ipſi ΓΒ ſit æqualis: & ΔΒ eſt quadratum quod fit ex ex ΒΓ: ergo rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ, eſt æquale rectangulo ſub ΑΓ, ΓΒ, una cum quadrato quod ex ΒΓ.

Si igitur recta linea ſecetur utcunque, rectangulum ſub tota & uno ſegmento comprehenſum æquatur rectangulo ſub ſegmentis comprehenſo, & prædicti ſegmenti quadrato. quod erat demonſtrandum.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΓΔΕΒ, καὶ ἤχθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΔ, ΓΕ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχει γὰρ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ εἰρημένου τμήματος τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IV. Theor.

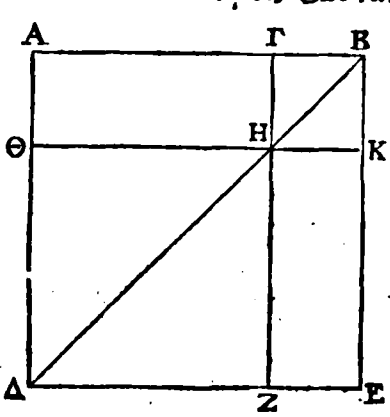
Si recta linea ſecetur utcunque, quadratum totius æquatur quadratis ſegmentorum & rectangulo bis comprehenſo ſub ſegmentis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Recta enim linea ΑΒ ſecta ſit utcunque in Γ: dico quadratum quod fit ex ΑΒ æquale eſſe & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis comprehenditur ſub ſegmentis ΑΓ, ΓΒ.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex ΑΒ quadratum ΑΔΕΒ, jungaturque ΒΔ, & per Γ quidem alterutri ipſarum ΑΔ, ΒΕ [per 31. 1.] parallela ducatur ΓΗΖ, per Η vero alterutri ipſarum ΑΒ, ΔΕ ducatur parallela ΘΚ.



Et quoniam ΓΖ eſt parallela ipſi ΑΔ, & in ipſas incidit ΒΔ, erit exterior angulus ΒΗΓ [per 29. 1.] interiori & oppoſito ΑΔΒ æqualis. angulus autem ΑΔΒ [per 5. 1.] eſt æqualis angulo ΑΒΔ, quod & latus ΒΑ æquale eſt lateri ΑΔ: quare ΓΗΒ angulus angulo ΗΒΓ eſt æqualis: ac propterea latus ΒΓ [per 6. 1.] lateri ΓΗ æquale. ſed & latus ΓΒ æquale eſt [per 34. 1.] lateri ΗΚ, & ΓΗ ipſi ΒΚ: ergo & ΗΚ eſt æquale ΚΒ; & ΓΗΚΒ eſt æquilaterum. dico inſuper etiam rectangulum eſſe. quoniam enim ΓΗ eſt parallela ipſi ΒΚ, & in ipſas incidit ΓΒ; anguli ΚΒΓ, ΗΓΒ [per 29. 1.] duobus rectis ſunt æquales. rectus autem eſt [per 30. def. 1.] ΚΒΓ angulus: ergo & rectus ΗΓΒ: quare & anguli oppoſiti ΓΗΚ, ΗΚΒ [per 34. 1.] recti erunt: rectangulum igitur eſt ΓΗΚΒ. ſed oſtenſum fuit & æquilaterum eſſe: quadratum

Ἐὰν γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗΖ, διὰ δὲ τοῦ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπεσεν ἡ ΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΗΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ. ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον, αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τε-

* Videtur deeſſe ad ſenſum explendum, τέμνουσι τὴν ΒΔ καὶ τὸ Η σημεῖον. & ſic non raro in ſequentibus, quod ſemel admoniſſe ſat eſto.

τράγωνον

τραγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΒΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τουτ' ἔστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσί. Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, ἔστι δὲ τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὃ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΤΕΡΑ ΔΕΙΞΙΣ.

Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἔστι δὲ ΑΒΔ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί· καὶ εἰσὶν ἴσαι, ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ ἡμίσεά ἐστιν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Α, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΗ, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΚΗ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ. ἔχει δὲ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΓΒΚ γωνίαν· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ τετράγωνά ἐστι, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΕΗ, καὶ ἔστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΓΒ, καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΓΚ, ΘΖ ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τὰ ΓΚ, ΘΖ καὶ τὰ ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕ, ὃ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον·

Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστιν.

igitur est, & est ex ΒΓ. eadem ratione & ΘΖ est quadratum, & est ex ΘΗ, hoc est ex ΑΓ: ergo ΘΖ, ΓΚ ex ipsis ΑΓ, ΓΒ quadrata sunt. & quoniam rectangulum ΑΗ [per 43. 1.] est æquale rectangulo ΗΒ, atque est ΑΗ quod sub rectis ΑΓ, ΓΒ continetur, est enim ΗΓ ipsi ΓΒ æqualis: erit & ΗΕ æquale ei quod continetur sub ΑΓ, ΓΒ: quare rectangula ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt ei quod bis continetur sub rectis ΑΓ, ΓΒ. sunt autem & ΘΖ, ΓΚ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ: quatuor igitur ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ sunt æqualia & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis continetur sub rectis ΑΓ, ΓΒ. sed ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ sunt totum ΑΔΕΒ, quod est quadratum ex ΑΒ: quadratum igitur ex ΑΒ æquale est & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis continetur sub rectis ΑΓ, ΓΒ.

Quare si recta linea secetur utcunque, quadratum totius æquatur quadratis segmentorum & rectangulo bis comprehenso sub segmentis. quod erat demonstrandum.

ALITER.

Dico quadratum ex ΑΒ æquale esse & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur.

Quoniam enim, in eadem figura, æqualis est ΒΑ ipsi ΑΔ, & angulus ΑΒΔ [per 5. 1.] angulo ΑΔΒ æqualis erit: & cum [per 32. 1.] omnis trianguli tres anguli duobus rectis sint æquales, erunt trianguli ΑΒΔ tres anguli ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ æquales duobus rectis. rectus autem est angulus ΒΑΔ; ergo reliqui ΑΒΔ, ΑΔΒ sunt uni recto æquales: & sunt æquales inter se; uterque igitur ipsorum ΑΒΔ, ΑΔΒ est recti dimidius. sed rectus est ΒΓΗ, æqualis namque est angulo interiori & opposito qui ad Α, reliquus igitur ΓΗΒ dimidius est recti: ac propterea ΓΗΒ angulus angulo ΓΒΗ est æqualis, & latus ΒΓ [per 6. 1.] æquale lateri ΓΗ. sed ΓΒ [per 34. 1.] est æqualis ΚΗ, & ΓΗ ipsi ΒΚ; æquilaterum igitur est ΓΚ. habet autem rectum angulum ΓΒΚ: igitur est quadratum, & fit ex ΓΒ. eadem ratione & ΘΖ quadratum est, & æquale quadrato quod ex ΑΓ: quadrata igitur sunt ΓΚ, ΘΖ, & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ æqualia. rursus quoniam [per 43. 1.] rectangulum ΑΗ est æquale ipsi ΕΗ, atque est ΑΗ id quod sub rectis ΑΓ, ΓΒ continetur, est enim ΓΗ ipsi ΓΒ æqualis: erit & ΕΗ æquale contento sub rectis ΑΓ, ΓΒ: quare ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt ei quod bis continetur sub rectis ΑΓ, ΓΒ. sunt autem & ΓΚ, ΘΖ æqualia quadratis ex ΑΓ, ΓΒ: ergo ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei quod bis continetur sub rectis ΑΓ, ΓΒ. sed ΓΚ, ΘΖ & ΑΗ, ΗΕ sunt totum ΑΕ, quod est quadratum ex ΑΒ:

Quadratum igitur ex ΑΒ est æquale quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis continetur sub rectis ΑΓ, ΓΒ. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Ex his manifestum est, in quadratis parallelogramma quæ sunt circa diametrum esse quadrata.

PROP. V. THEOR.

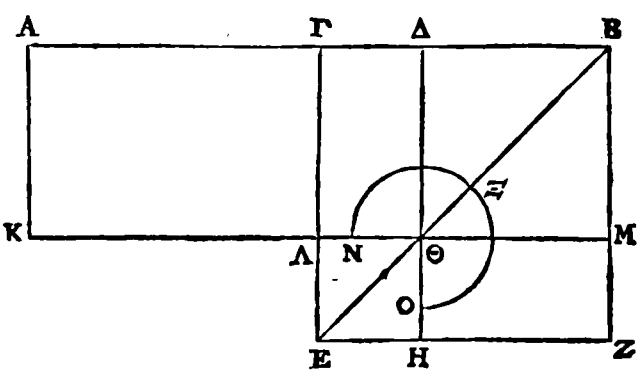
Si recta linea ſecetur in æqualia & inæqualia, rectangulum ſub inæqualibus totius ſegmentis comprehenſum una cum quadrato rectæ inter puncta ſectionum æquatur quadrato dimidiæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

RECta enim linea quæcunque AB ſecta ſit in partes æquales ad punctum Γ, & in partes inæquales ad Δ: dico rectangulum comprehenſum ſub rectis AΔ, ΔB una cum quadrato quod fit ex ΓΔ æquale eſſe ei quod fit ex ΓB quadrato.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex BΓ quadratum ΓEZB, jungaturque BE; & per Δ quidem alterutri ipſarum ΓE, BZ [per 31. 1.] parallela ducatur ΔΘH, per Θ vero ducatur KΛM parallela alterutri ipſarum ΓB, EZ: & rurſus per A ducatur alterutri ΓΛ, BM parallela AK.



Et quoniam [per 43. 1.] ΓΘ complementum æquale eſt complemento ΘZ, commune addatur ΔM: totum igitur ΓM toti ΔZ eſt æquale. ſed ΓM [per 36. 1.] eſt æquale AΛ, quoniam AΓ æquatur ipſi ΓB: ergo & AΛ æquale eſt ΔZ. commune addatur ΓΘ: totum igitur AΘ ipſis ΔZ, ΔΛ æquale erit. ſed AΘ quidem eſt quod ſub rectis AΔ, ΔB continetur, eſt enim ΔΘ ipſi ΔB æqualis; ZΔ, ΔΛ vero eſt gnomon NΞO: gnomon igitur NΞO æqualis eſt ei quod ſub rectis AΔ, ΔB continetur. commune addatur ΛH, quod æquale eſt [per cor. 4. 2.] quadrato ex ΓΔ: ergo NΞO gnomon & ΛH æqualia ſunt rectangulo quod continetur ſub rectis AΔ, ΔB & ei quod fit ex ΓΔ quadrato. ſed NΞO gnomon & ΛH ſunt totum quadratum ΓEZB, quod quidem fit ex ΓB: ergo rectangulum ſub AΔ, ΔB una cum quadrato quod ex ΓΔ æquale eſt ei quod ex ΓB quadrato.

Si igitur recta linea ſecetur in æqualia & inæqualia, rectangulum ſub inæqualibus totius ſegmentis comprehenſum una cum quadrato rectæ inter puncta ſectionum æquatur quadrato dimidiæ. quod erat demonſtrandum.

Ἐὰν γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρα τῶν ΓΕ, ΒΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρα τῶν ΓΒ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω πάλιν ἡ ΚΛΜ· καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρα τῶν ΓΛ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΖ παραλληλογράμμῳ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΓΜ τῷ ΑΛ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΔΖ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΔΖ καὶ ΔΛ ἴσον ἐστί. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔΒ· τὸ δὲ ΖΔ, ΔΛ ἐστὶν ὁ ΝΞΟ γνώμων· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. VI. THEOR.

Si recta linea ſecetur bifariam & illi recta quæcunque linea in directum adjiciatur, rectangulum comprehenſum ſub compoſita ex tota cum adjecta

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμι-

σείας

στίας πετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

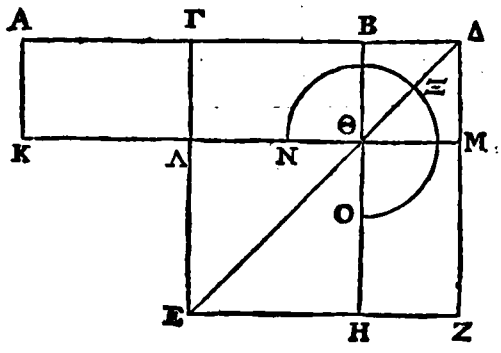
& adjecta una cum quadrato dimidiæ æquatur quadrato compositæ ex dimidia & adjecta tanquam una linea.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

REcta enim linea quæcunque ΑΒ secetur bifariam in puncto Γ, adjiciaturque ipsi in directum recta quæcunque ΒΔ: dico rectangulum sub ΑΔ, ΔΒ una cum quadrato à ΓΒ æquale esse ei quod fit ex ΓΔ quadrato.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΘΗ· διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛΜ· καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Describatur enim [per 46. 1.] ex ΓΔ quadratum ΓΕΖΔ, & jungatur ΔΕ; perque Β [per 31. 1.] alterutri ipsarum ΓΕ, ΔΖ parallela ducatur ΒΘΗ: & per Θ ducatur ΚΛΜ parallela alterutri ipsarum ΑΔ, ΕΖ: & adhuc per Α alterutri ΓΛ, ΔΜ parallela ΑΚ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ. ἀλλὰ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΘΖ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἴση γὰρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΛΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Itaque quoniam ΑΓ est æqualis ΓΒ, erit & rectangulum ΑΛ [per 36. 1.] rectangulo ΓΘ æquale. sed ΓΘ [per 43. 1.] æquale est ΘΖ: ergo & ΑΛ ipsi ΘΖ æquale erit. commune addatur ΓΜ: totum igitur ΑΜ gnomoni ΝΞΟ est æquale. atqui est ΑΜ, quod continetur sub rectis ΑΔ, ΔΒ, etenim ΔΜ [per cor. 4. 2.] est æqualis ΔΒ: ergo & gnomon ΝΞΟ æqualis est rectangulo comprehenso sub rectis ΑΔ, ΔΒ. rursus commune addatur ΛΗ, æquale scilicet quadrato quod ex ΓΒ: rectangulum igitur comprehensum sub rectis ΑΔ, ΔΒ una cum quadrato quod ex ΒΓ æquale est gnomoni ΝΞΟ & ipsi ΛΗ. sed gnomon ΝΞΟ & ΛΗ totum sunt ΓΕΖΔ quadratum; quod quidem fit ex ΓΔ: ergo rectangulum sub ΑΔ, ΔΒ una cum quadrato ex ΒΓ æquale est ei quod fit ex ΓΔ quadrato.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur recta linea secetur bifariam, & illi recta quæcunque linea in directum adjiciatur; rectangulum comprehensum sub composita ex tota cum adjecta & adjecta una cum quadrato dimidiæ æquatur quadrato compositæ ex dimidia & adjecta tanquam una linea. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Prop. VII. Theor.

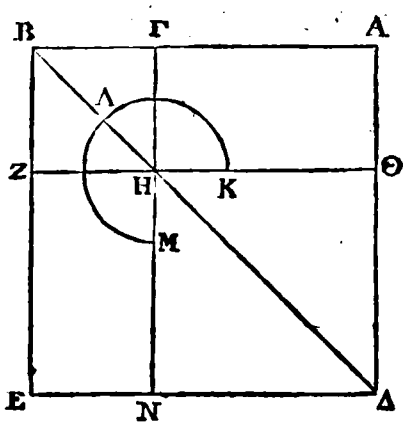
Si recta linea secetur utcunque, quadrata totius & unius è segmentis simul sumpta æquantur rectangulo bis comprehenso sub tota & dicto segmento una cum quadrato reliqui segmenti.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ.

REcta enim linea quæcunque ΑΒ secta sit utcunque in puncto Γ: dico quadrata ex ΑΒ, ΒΓ æqualia esse & rectangulo quod bis sub rectis ΑΒ, ΒΓ continetur & ei quod fit ex ΑΓ quadrato.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex AB quadratum AΔEB, & figura conſtruatur.

Itaque quoniam AH rectangulum æquale eſt [per 43. 1.] rectangulo HE, commune addatur ΓZ: quare totum AZ toti ΓE eſt æquale: rectangula igitur AZ, ΓB dupla ſunt rectanguli AZ. ſed AZ, ΓE ſunt KΛM gnomon & quadratum ΓZ: ergo KΛM gnomon & quadratum ΓZ dupla erunt rectanguli AZ. eſt autem id quod bis continetur ſub rectis AB, BΓ duplum ipſius AZ; etenim [per cor. 4. 2.] BZ eſt æqualis BΓ: gnomon igitur KΛM & quadratum ΓZ æqualia ſunt ei quod bis ſub rectis AB, BΓ continetur. commune addatur ΘN, quod eſt ex AΓ quadratum: ergo gnomon KΛM & quadrata ΓZ, ΘN æqualia ſunt ei quod bis ſub rectis AB, BΓ continetur & quadrato ex AΓ. at gnomon KΛM & quadrata ΓZ, ΘN totum ſunt AΔEB, & ΓZ; quæ ſunt ex AB, BΓ quadrata: quadrata igitur ex AB, BΓ æqualia ſunt rectangulo quod bis ſub rectis AB, BΓ continetur una cum eo quod fit ex AΓ quadrato.



Si igitur recta linea ſecetur utcunque, quadrata totius & unius è ſegmentis ſimul ſumpta æquantur rectangulo bis comprehenſo ſub tota & dicto ſegmento una cum quadrato reliqui ſegmenti. quod erat demonſtrandum.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AΔEB & κατεγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ HE, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓZ· ὅλον ἄρα τὸ AZ ὅλῳ τῷ ΓE ἐστὶν ἴσον· τὰ ἄρα AZ, ΓE διπλάσιά ἐστι τοῦ AZ. ἀλλὰ τὰ AZ, ΓE ὁ KΛM ἐστὶ γνώμων & τὸ ΓZ τετράγωνον· ὁ KΛM ἄρα γνώμων & τὸ ΓZ διπλάσιά ἐστι τοῦ AZ. ἔστι δὲ τοῦ AZ διπλάσιον & τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ, ἴση γὰρ ἡ BZ τῇ BΓ· ὁ ἄρα KΛM γνώμων καὶ τὸ ΓZ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘN, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς AΓ τετράγωνον· ὁ ἄρα KΛM γνώμων καὶ τὰ ΓZ, ΘN τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷτε δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ KΛM γνώμων & τὰ ΓZ, ΘN τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ AΔEB & τὸ ΓZ, ἃ ἐστιν ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷτε δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης & τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷτε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης & εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ & τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si recta linea ſecetur utcunque, rectangulum quater comprehenſum ſub tota & uno è ſegmentis una cum quadrato reliqui ſegmenti æquatur quadrato compoſitæ ex tota & prædicto ſegmento tanquam ex una linea.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγεγραμμένῃ τετραγώνῳ.

REcta enim linea AB ſecta ſit utcunque in Γ: dico rectangulum quater ſub rectis AB, BΓ contentum una cum quadrato quod ex AΓ æquale eſſe quadrato quod ex AB, BΓ tanquam ex una linea deſcribitur.

Producatur enim in directum rectæ AB recta ΔE, & ipſi ΓB ponatur æqualis BΔ, deſcribaturque [per 46. 1.] ex AΔ quadratum AEZΔ, & dupla figura conſtruatur.

Quoniam igitur ΓB eſt æqualis BΔ, atque eſt ΓB [per 34. 1.] ipſi HK æqualis, BΔ vero ipſi KN, erit & HK æqualis KN. eadem ratione & ΠP ipſi PO eſt æqualis. & quoniam ΓB eſt æqualis BΔ, & HK ipſi KN; erit [per 36. 1.] rectangulum quidem ΓK æquale rectangulo BN, rectangulum vero HP ipſi PN. ſed ΓK eſt [per 43. 1.] æquale PN, complementa enim ſunt parallelogrammi ΓO: ergo & BN æquale eſt HP, & quatuor rectangula BN, KΓ, HP,

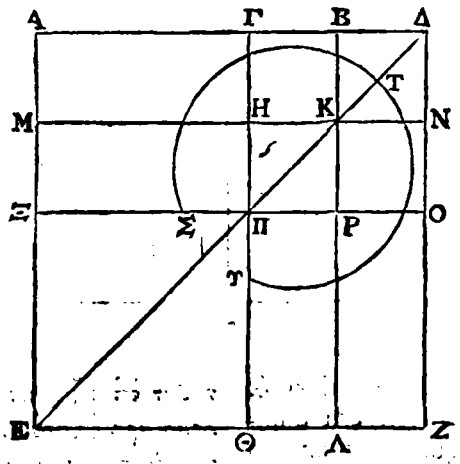
ΕΥΘΕΙΑ γάρ τις ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB, BΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ AB εὐθεῖα ἡ BΔ, καὶ κείσθω τῇ ΓB ἴση ἡ BΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AΔ τετράγωνον τὸ AEZΔ, καὶ κατεγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓB τῇ BΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓB τῇ HK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ BΔ τῇ KN, καὶ ἡ HK τῇ KN ἐστὶν ἴση. δι' τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠP τῇ PO ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓB τῇ BΔ, ἡ δὲ HK τῇ KN· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ΓK τῷ BN, τὸ δὲ HP τῷ PN. ἀλλὰ τὸ ΓK τῷ PN ἐστὶν ἴσον, παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓO παραλληλογράμμου· καὶ τὸ BN ἄρα τῷ HP ἐστὶν ἴσον· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ BN, KΓ,

HP,

ΗΡ, ΡΝ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα παραπληρώματα ἴσα ἐστὶ τῷ ΓΚ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τουτέστι τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΗΚ, τουτέστι τῇ ΗΠ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΗΡ τῇ ΡΟ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ. ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΗΛ ἐστὶν ἴσον, παραπληρώματα γὰρ τὰ ΜΛ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τῷ ΑΗ ἐστὶ τετραπλάσια. ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΒΝ, ΗΡ, ΡΝ τοῦ ΓΚ τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὁπτὼ ἃ περιέχει τὸ ΣΤΤ γνώμονα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ ἐστί. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἐστίν. ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΒΚ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΚ, ἐδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος ὁ ΣΤΤ γνώμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΤ γνώμονι. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΤ γνώμονι καὶ τῷ ΞΘ. ἀλλὰ ὁ ΣΤΤ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

HP, PN sunt inter se æqualia, ideoque quadrupla sunt rectanguli ΓK. rursus quoniam ΓB est æqualis BΔ, & BΔ quidem ipsi BK, hoc est [per 34. 1.] ipsi ΓH æqualis; ΓB vero ipsi HK, hoc est HΠ: est igitur ΓH æqualis HΠ. est autem & ΠP ipsi PO æqualis: rectangulum igitur AH [per 36. 1.] rectangulo MΠ, & rectangulum ΠΛ ipsi PZ æquale erit. sed MΠ est [per 43. 1.] æquale ΠΛ; complementa enim sunt MΛ parallelogrammi; quare & AH ipsi PZ est æquale: quatuor igitur AH, MΠ, ΠΛ, PZ inter se sunt æqualia, ac propterea ipsius AH quadrupla. ostensum autem est & quatuor ΓK, BN, HP, PN quadrupla esse ΓK: quare octo quæ gnomonem ΣΤΤ constituunt AK quadrupla sunt. & quoniam AK est quod sub rectis AB, BΔ continetur; etenim BK est [per cor. 4. 2.] æqualis BΔ: erit contentum quater sub rectis AB, BΔ ipsius AK quadruplum. at demonstratus est gnomon ΣΤΤ quadruplus ipsius AK: quod igitur quater continetur sub rectis AB, BΔ æquale est gnomoni ΣΤΤ. commune addatur ΞΘ, quod quidem [per cor. 4. 2.] quadrato ex AΓ est æquale: ergo quod quater continetur sub rectis AB, BΔ una cum quadrato ex AΓ æquale est ipsi ΣΤΤ gnomoni & quadrato ΞΘ. sed ΣΤΤ gnomon & ΞΘ constituunt totum AEZΔ quadratum, quod describitur à recta AΔ: rectangulum igitur quater sub rectis AB, BΓ comprehensum una cum quadrato ex AΓ æquale est ei quod ex AΔ, hoc est ex AB, BΓ tanquam ex una linea, describitur quadrato.

Si igitur recta linea secetur utcunque, rectangulum quater comprehensum sub tota & uno è segmentis una cum quadrato reliqui segmenti æquatur quadrato compositæ ex tota & prædicto segmento tanquam ex una linea. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Prop. IX. Theor.

Si recta linea secetur in æqualia & inæqualia, quadrata inæqualium segmentorum sunt dupla quadratorum à dimidia & à recta inter puncta sectionum.

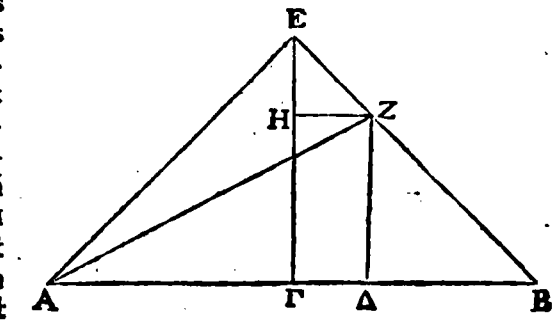
Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ.

Recta enim linea quæcunque AB secta sit in partes æquales ad Γ & in partes inæquales ad Δ: dico quadrata ex AΔ, ΔB quadratorum ex AΓ, ΓΔ dupla esse.

Ducatur enim [per 11. 1.] à puncto Γ ipsi AB ad rectos angulos ΓE, & ponatur æqualis alterutri ipsarum AΓ, ΓB, jungunturque EA, EB; ac per Δ quidem [per 31. 1.] ipsi EΓ parallela ducatur ΔZ, per Z vero ipsi AB parallela ZH, & AZ jungatur.

Itaque quoniam AΓ eſt æqualis ΓE, erit & angulus EAΓ [per 5. 1.] angulo AEΓ æqualis. & cum rectus ſit angulus ad Γ, reliqui AEΓ, EAΓ [per 32. 1.] uni recto æquales erunt, & ſunt æquales inter ſe: uterque igitur ipſorum ABΓ, EAΓ eſt recti dimidius. eadem ratione & recti dimidius eſt uterque ipſorum ΓBB, EBΓ: ergo totus angulus ABB rectus eſt. & quoniam angulus HEZ dimidius eſt recti, rectus autem EHZ; æqualis enim eſt [per 29. 1.] interiori & oppoſito EΓB: erit & reliquus EZH recti dimidius: æqualis igitur eſt HEZ angulus ipſi EZH: quare & latus EH [per 6. 1.] lateri HZ eſt æquale. rurſus quoniam angulus ad B dimidius eſt recti, rectus autem ZΔB quod ſit [per 29. 1.] æqualis interiori & oppoſito EΓB, reliquus BZΔ recti erit dimidius: angulus igitur ad B æqualis eſt angulo ΔZB: ideoque latus ΔZ [per 6. 1.] lateri ΔB æquale. & quoniam AΓ eſt æqualis ΓE, erit & ex AΓ quadratum æquale quadrato ex ΓE: quadrata igitur ex AΓ, ΓE dupla ſunt quadrati ex AΓ. quadratis autem ex AΓ, ΓE, æquale eſt [per 47. 1.] quadratum ex EA, ſiquidem rectus eſt angulus AΓE: ergo quadratum ex EA quadrati ex AΓ eſt duplum. rurſus quoniam EH æqualis eſt HZ, & quadratum ex EH quadrato ex HZ eſt æquale: quadrata igitur ex EH, HZ dupla ſunt quadrati ex HZ. at quadratis ex EH HZ æquale eſt [per 47. 1.] quod ex EZ quadratum: ergo quadratum ex EZ quadrati ex HZ duplum erit. æqualis autem eſt HZ [per 34. 1.] ipſi ΓΔ: quadratum igitur ex EZ duplum eſt quadrati ex ΓΔ. ſed & quadratum ex AE quadrati ex AΓ eſt duplum: ergo quadrata ex AE, EZ dupla ſunt quadratorum ex AΓ, ΓΔ. quadratis vero ex AE, EZ æquale eſt [per 47. 1.] ex AZ quadratum; quoniam angulus AEZ rectus eſt: quadratum igitur ex AZ quadratorum ex AΓ, ΓΔ eſt duplum. ſed quadrato ex AZ [per 47. 1.] æqualia ſunt ex AΔ, ΔZ quadrata; rectus enim eſt angulus qui ad Δ: ergo ex AΔ, ΔZ quadrata dupla ſunt quadratorum ex AΓ, ΓΔ. eſt autem ΔZ ipſi ΔB æqualis: quadrata igitur ex AΔ, ΔB quadratorum ex AΓ, ΓΔ dupla erunt.



Si igitur recta linea ſecetur in æqualia & inæqualia, quadrata inæqualium ſegmentorum ſunt dupla quadratorum à dimidia & à recta inter puncta ſectionum. quod erat demonſtrandum.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΕΓ, ΕΑΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΓ, ΕΑΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ πλευρᾷ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ, ἴση γὰρ πάλιν ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΖ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. X. Theor.

Si recta linea ſecetur bifariam & illi recta quæcunque linea in directum adjiciatur, quadratum compoſitæ ex tota

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσ-

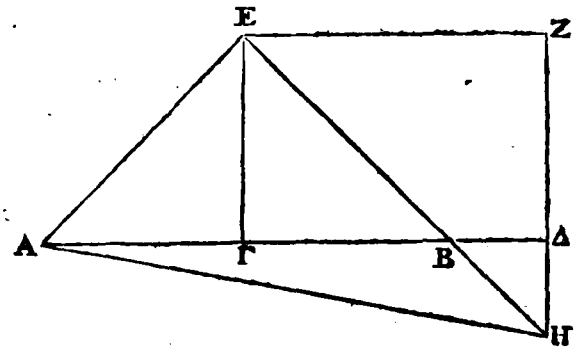
κειμένης

κμένης, τὸ σωαμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦτε ἀπὸ τῆ ἡμισείας καὶ ἀπὸ τῆ συγκειμένης ἔκτε τῆ ἡμισείας καὶ τῆ προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντες τραγώνου.

& adjecta & quadratum adjectæ ſimul ſumpta ſunt dupla & quadrati ex dimidia & quadrati compoſitæ ex dimidia & adjecta tanquam una linea.

Ευθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ. προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΕ, ΕΒ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΓ, ΖΔ εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ ΕΖ, αἱ ὑπὸ ΓΕΖ, ΕΖΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ, ΕΖΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΕΒ, ΖΔ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη συμπεσοῦνται). ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθή, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, ἐναλλὰξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΗΒ ἡμίσεά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΗΔ ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμίσεά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΗ ἡμίσεά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΗΖ πλευρᾷ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆ ΕΓ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆ ΑΓ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆ ΓΑ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆ ΕΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆ ΕΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆ ΑΓ τετραγώνου. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΕΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆ ΖΗ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆ ΖΕ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΖΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆ ΕΖ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆ ΕΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆ ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆ ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆ ΕΗ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆ ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆ ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετράγωνα

REcta enim AB ſecetur bifariam in Γ, & ipſi in directum adjiciatur quæcunque recta linea BΔ: dico quadrata ex AΔ, ΔB quadratorum ex AΓ, ΓΔ dupla eſſe.

Ducatur enim à puncto Γ [per 11. 1.] ipſi AB ad rectos angulos ΓE, & ponatur æqualis alterutri ipſarum AΓ, ΓB; junganturque AE, EB, & per E quidem ipſi AΔ [per 31. 1.] parallela ducatur EZ, per Δ vero ducatur ΔZ parallela ipſi ΓE. & quoniam in parallelas EΓ, ZΔ recta quædam linea EZ incidit, anguli ΓEZ, EZΔ [per 29. 1.] æquales ſunt duobus rectis: anguli igitur ZEB, EZΔ duobus rectis ſunt minores. quæ autem rectæ à minoribus angulis, quam ſunt duo recti, in infinitum producuntur [per ax. 11.] conveniunt inter ſe: ergo EB, ZΔ productæ ad partes BΔ convenient. producantur, & conveniant in puncto H, & AH jungatur.

Itaque quoniam AΓ eſt æqualis ΓE, angulus AEΓ [per 5. 1.] angulo EAΓ æqualis erit, atque eſt rectus qui ad Γ: uterque igitur ipſorum BAΓ, AEΓ [per 32. 1.] eſt recti dimidius. eadem ratione & recti dimidius eſt uterque ΓEB, EBΓ: ergo AEB eſt rectus. & quoniam EBΓ eſt dimidius recti: erit & recti dimidius ΔBH [per 15. 1.] ſed & BΔH [per 29. 1.] rectus eſt, etenim eſt æqualis ipſi AΓE alterno: reliquus ideo ΔHB dimidius eſt recti, igitur & angulus ΔHB ipſi ΔBH æqualis: ergo & latus BΔ [per 6. 1.] æquale lateri HΔ. rurſus, quoniam EHZ dimidius recti, rectus autem qui ad Z, eſt enim [per 34. 1.] angulo oppoſito qui ad Γ æqualis; erit & reliquus ZEH recti dimidius: igitur EHZ angulus æqualis ipſi ZEH; quare & latus HZ [per 6. 1.] lateri EZ eſt æquale. & cum EΓ ſit æqualis ΓA, & quadratum ex EΓ æquale eſt ei quod ex AΓ quadrato: ergo quadrata ex EΓ, ΓA dupla ſunt quadrati ex ΓA. quadratis autem ex EΓ, ΓA æquale eſt [per 47. 1.] quadratum ex EA: quadratum igitur ex EA duplum eſt quadrati ex AΓ. rurſus, quoniam HZ eſt æqualis EZ, æquale eſt & ex ZH quadratum quadrato ex ZE: quadrata igitur ex ZH, ZE quadrati ex EZ ſunt dupla. at quadratis ex HZ, ZE æquale eſt [per 47. 1.] quod ex EH quadratum: ergo quadratum ex EH duplum eſt quadrati ex EZ. æqualis autem eſt EZ ipſi ΓΔ: quadratum igitur ex EH quadrati ex ΓΔ duplum erit. ſed oſtenſum eſt quadratum ex EA duplum eſſe quadrati ex AΓ: ergo quadrata ex AE, EH

ſunt

ſunt dupla quadratorum ex AΓ, ΓΔ. quadratis vero ex AE, EH æquale eſt [per 47. 1.] quod ex AH quadratum: quadratum igitur ex AH duplum eſt quadratorum ex AΓ, ΓΔ. at quadrato ex AH æqualia ſunt [per 47. 1.] ex AΔ, ΔH quadrata: ergo quadrata ex AΔ, ΔH ſunt dupla quadratorum ex AΓ, ΓΔ. ſed ΔH eſt æqualis ΔB: quadrata igitur ex AΔ, ΔB ſunt dupla quadratorum ex AΓ, ΓΔ.

Si igitur recta linea ſecetur bifariam & illi recta quæcunque linea in directum adjiciatur, quadratum compoſitæ ex tota & adjecta & quadratum adjectæ ſimul ſumpta ſunt dupla & quadrati ex dimidia & quadrati compoſitæ ex dimidia & adjecta tanquam una linea. quod erat demonſtrandum.

διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν AE, EH τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AH διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AH ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔH· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AΔ, ΔH τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓΔ τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ ΔH τῇ ΔB· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦτε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔτι τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XI. Probl.

Datam rectam lineam ita ſecare, ut rectangulum ſub tota & altero ſegmento æquetur quadrato reliqui ſegmenti.

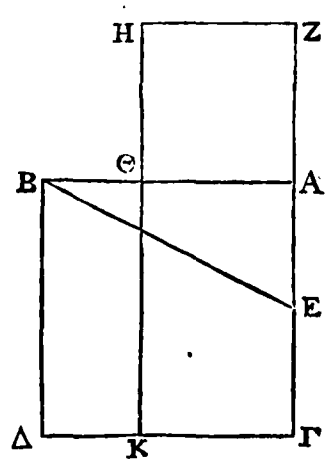
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

SIT data recta linea AB: oportet ipſam AB ita ſecare, ut quod ſub tota & altera parte continetur rectangulum æquale ſit ei quod à reliqua parte fit quadrato.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex AB quadratum ABΔΓ, ſeceturque [per 10. 1.] AΓ bifariam in E, & BE jungatur; deinde, producta ΓA in Z [per 3. 1.] ponatur ipſi BE æqualis EZ, deſcribaturque ex AZ quadratum ZΘ, & HΘ ad K producatur: dico AB ita ſectam eſſe in Θ, ut rectangulum ſub AB, BΘ æquale ſit quadrato ex AΘ.

Quoniam enim recta linea AΓ bifariam ſecatur in E, adjiciturque ipſi in directum AZ; rectangulum ſub ΓZ, ZA una cum quadrato ex AE æquale erit [per 6. 2.] quadrato ex EZ. ſed EZ eſt æqualis EB: rectangulum igitur ſub ΓZ, ZA una cum quadrato ex AE æquale eſt ei quod fit ex EB quadrato. quadrato autem ex EB æqualia ſunt [per 47. 1.] quadrata ex BA, AE, etenim angulus ad A rectus eſt: ergo rectangulum ſub ΓZ, ZA una cum quadrato ex AE æquale eſt quadratis ex BA, AE. commune auferatur quod ex AE quadratum: reliquum igitur rectangulum ſub ΓZ, ZA æquale eſt quadrato ex AB. eſt autem ſub ΓZ, ZA quidem rectangulum ZK, ſiquidem AZ eſt æqualis ZH; quadratum autem ex AB eſt ipſum AΔ: rectangulum igitur ZK æquale eſt quadrato AΔ. commune auferatur AK: ergo reliquum ZΘ reliquo ΘΔ eſt æquale. atque eſt ΘΔ rectangulum ſub AB, BΘ, cum AB



Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB· δεῖ δὴ τὴν AB τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ ABΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ AΓ δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ ἐπιζευχθῶ ἡ BE, καὶ διήχθω ἡ ΓA ἐπὶ τὸ Z, καὶ κείσθω τῇ BE ἴση ἡ EZ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AZ τετραγώνου τὸ ZΘ, καὶ διήχθω ἡ HΘ ἐπὶ τὸ K· λέγω ὅτι ἡ AB τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς AΘ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ AΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ E, προσκεῖται δὲ αὐτῇ ἡ AZ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ EZ τῇ EB· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EB τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς EB ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν BA, AE, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ A γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA, AE. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς AE· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA τὸ ZK, ἴση γὰρ ἡ AZ τῇ ZH· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AB τὸ AΔ· τὸ ἄρα ZK ἴσον ἐστὶ τῷ AΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ AK· λοιπὸν ἄρα τὸ ZΘ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΘ, ἴση γὰρ ἡ AB

τῇ

τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τὰ ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

sit æqualis ΒΔ; & ΖΘ est quadratum ex ΑΘ: rectangulum igitur sub ΑΒ, ΒΘ quadrato ex ΑΘ æquale erit.

Quare data recta linea ΑΒ ita secatur in puncto Θ, ut rectangulum sub ΑΒ, ΒΘ æquale sit quadrato ex ΑΘ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσα ἡ καθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

Prop. XII. Theor.

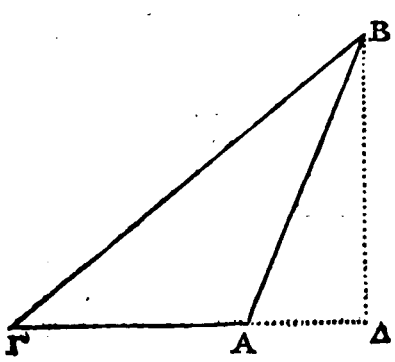
In triangulis amblygoniis quadratum lateris subtendentis angulum obtusum majus est quam quadrata laterum angulum obtusum comprehendentium, rectangulo bis comprehenso sub uno laterum circa angulum obtusum in quod productum perpendicularis cadit, & recta extra intercepta à perpendiculari ad angulum obtusum.

Ἔστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΔ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Α σημεῖον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μεῖζόν ἐστι, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SIT amblygonium triangulum ΑΒΓ obtusum angulum habens ΒΑΓ, & ducatur à puncto Β ad ΓΑ productam perpendicularis ΒΔ: dico quadratum ex ΒΓ majus esse quam quadrata ex ΒΑ, ΑΓ, rectangulo quod bis sub rectis ΓΑ, ΑΔ continetur.



Quoniam enim recta linea ΓΔ secta est utcunque in puncto Α: erit [per 4. 2.] quadratum ex ΓΔ æquale & quadratis ex ΓΑ, ΑΔ & ei rectangulo quod bis continetur sub rectis ΓΑ, ΑΔ. commune addatur ex ΔΒ quadratum: quadrata igitur ex ΓΔ, ΔΒ æqualia sunt & quadratis ex ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ & rectangulo quod bis continetur sub rectis ΓΑ, ΑΔ. sed quadratis ex ΓΔ, ΔΒ æquale est [per 47. 1.] quadratum ex ΓΒ; rectus enim est angulus ad Δ: quadratis vero ex ΑΔ, ΔΒ æquale est quadratum ex ΑΒ: quadratum igitur ex ΓΒ æquale est & quadratis ex ΓΑ, ΑΒ & rectangulo bis contento sub rectis ΓΑ, ΑΔ: ergo quadratum ex ΓΒ majus est quam quadrata ex ΓΑ, ΑΒ, rectangulo quod bis continetur sub rectis ΓΑ, ΑΔ.

In triangulis igitur amblygoniis quadratum lateris subtendentis angulum obtusum majus est quam quadrata laterum angulum obtusum comprehendentium, rectangulo bis comprehenso sub uno laterum circa angulum obtusum in quod productum perpendicularis cadit, & recta extra intercepta à perpendiculari ad angulum obtusum. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

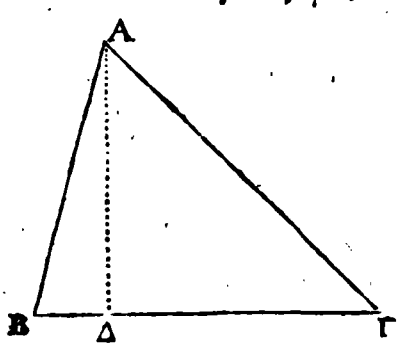
Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον

Prop. XIII. Theor.

In triangulis oxygoniis quadratum lateris subtendentis angulum acutum

minus eſt quam quadrata laterum comprehendentium angulum acutum, rectangulo bis comprehenſo ſub uno laterum circa angulum acutum in quod perpendicularis cadit, & recta intus intercepta à perpendiculari ad angulum acutum.

SIT oxygonium triangulum ABΓ acutum habens angulum ad B, & ducatur à puncto A ad BΓ perpendicularis AΔ: dico quadratum quod fit ex AΓ minus eſſe quam quadrata quæ fiunt ex ΓB, BA, rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΓB, BΔ.



Quoniam enim recta linea ΓB ſecta eſt utcunque in Δ: erunt [per 7. 2.] quadrata ex ΓB, BΔ æqualia & rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΓB, BΔ & quadrato ex ΔΓ. commune addatur ex AΔ quadratum: quadrata igitur ex ΓB, BΔ, ΔA æqualia ſunt & rectangulo bis contento ſub rectis ΓB, BΔ & quadratis ex AΔ, ΔΓ. ſed quadratis ex BΔ, ΔA æquale eſt [per 47. 1.] ex AB quadratum, rectus enim eſt angulus qui ad Δ; quadratis vero ex AΔ, ΔΓ æquale eſt quadratum ex AΓ: quadrata igitur ex ΓB, BA ſunt æqualia quadrato ex AΓ & ei rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΓB, BΔ: quare ſolum quadratum ex AΓ minus eſt quam quadrata ex ΓB, BA, rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΓB, BΔ.

In triangulis igitur oxygoniis, quadratum lateris ſubtendentis angulum acutum minus eſt quam quadrata laterum comprehendentium angulum acutum, rectangulo bis comprehenſo ſub uno laterum circa angulum acutum in quod perpendicularis cadit, & recta intus intercepta à perpendiculari ad angulum acutum. quod erat demonſtrandum.

PROP. XIV. PROBL.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.

SIT datum rectilineum A: oportet ipſi A rectilineo æquale quadratum conſtituere.

Conſtituatur rectilineo A [per 45. 1.] æquale parallelogrammum rectangulum BΔ. ſi igitur BE eſt æqualis EΔ, factum jam erit quod proponebatur: etenim rectilineo A æquale quadratum conſtitutum eſt BΔ. ſin minus, una ipſarum BE, EΔ major eſt. ſit BE major; & producatur ad Z, ponaturque ipſi EΔ [per 3. 1.] æqualis EZ: deinde ſecta ZB bifariam in H, centro quidem H, intervallo autem æquali uni ipſarum HB, HZ [per 3. poſt.] ſemicirculus deſcribatur BΘZ, producaturque ΔE in Θ, & HΘ jungatur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

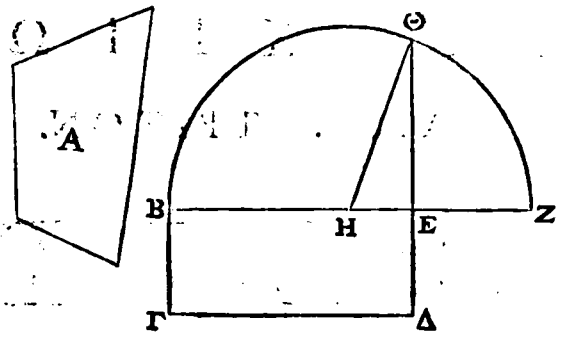
ΕΣτω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ A· δεῖ δὴ τῷ A εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συνεστάτω τῷ A εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ BΔ· εἰ μὲν οὖν ἐστὶν ἡ BE τῇ EΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· συνέστηται γὰρ τῷ A εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ BΔ· εἰ δὲ οὔ, μία τῶν BE, EΔ μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ BE, καὶ ἐκβεβλήθω ἐπὶ τὸ Z, καὶ κείσθω τῇ EΔ ἴση ἡ EZ, καὶ τετμήσθω ἡ ZB δίχα κατὰ τὸ H, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ H, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν HB, HZ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ BΘZ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔE ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HΘ.

Επὶ

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ,ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ,ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ,ΗΕ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ,ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΗΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ,ΕΖ τὸ ΒΔ ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. ἴσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ· τὸ Α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνέσταται, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Quoniam igitur recta linea BZ ſecta eſt in partes æquales ad H & inæquales ad E, erit [per 5. 2.] rectangulum ſub BE, EZ una cum quadrato quod ſit ex EH æquale quadrato ex HZ. eſt autem HZ æqualis HΘ: rectangulum igitur ſub BE, EZ una cum quadrato ex HE æquale eſt quadrato ex HΘ. ſed quadrato ex HΘ æqualia ſunt [per 47. 1.] ex ΘE, HE quadrata: ergo rectangulum ſub BE, EZ una cum quadrato ex HE æquale eſt quadratis ex ΘE, HE. commune auferatur ex HE quadratum: reliquum igitur rectangulum ſub BE, EZ eſt æquale quadrato ex EΘ. ſed rectangulum ſub BE, EZ eſt ipſum BΔ parallelelogrammum, quoniam EZ eſt æqualis EΔ: ergo BΔ parallelogrammum quadrato ex ΘE eſt æquale. parallelogrammum autem BΔ, eſt [per conſtr.] æquale rectilineo A: rectilineum igitur A quadrato ex EΘ deſcripto æquale erit.

Dato igitur rectilineo A æquale quadratum à recta EΘ deſcriptum conſtituitur. quod erat faciendum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

1. ÆQUALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales: vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.

2. Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum & producta ipſum non ſecat.

3. Circuli contingere ſeſe dicuntur, qui contingentes ſe mutuo non ſecant.

4. In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æquales.

5. Magis autem diſtare à centro dicitur ea in quam major perpendicularis cadit.

6. Segmentum circuli eſt figura, quæ recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.

7. Angulus ſegmenti eſt, qui recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.

8. Angulus in ſegmento eſt, quando in circumferentia ſegmenti ſumitur aliquod punctum atque ab ipſo ad terminos lineæ ejus quæ baſis eſt ſegmenti rectæ lineæ ducuntur, angulus à ductis lineis comprehenſus.

9. Quando autem comprehendentes angulum rectæ lineæ aſſumunt circumferentiam, illi inſiſtere angulus dicitur.

10. Sector circuli eſt, quando angu-

ΟΡΟΙ.

α'. ΙΣΟΙ κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι· ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι.

ε'. Μᾶλλον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

ϛ'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η'. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστίν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ὑπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

ι'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέν-

τρῳ

πρὸς αὐτῇ δὲ κύκλου ςαθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῶν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

ια. Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶν τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

lus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus & circumferentia ab ipſis aſſumpta.

11. Similia circulorum ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales: vel in quibus anguli ſunt inter ſe æquales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Propositio I. Problema.

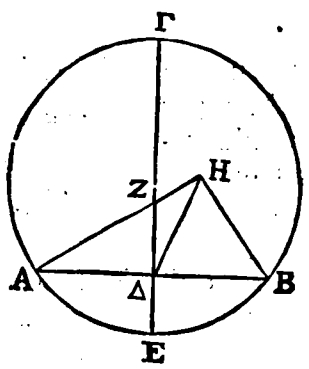
Dati circuli centrum invenire.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Διήχθω τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ μὲν Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΓ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ τετμήθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΗ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, οὐκ κέντρον γὰρ τὸ Η· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ ἐστὶν ἴση. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν ςαθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΔΒ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΔΒ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἡ μείζων τῇ ἐλάττονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Η κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλό τι πλὴν τοῦ Ζ.

Τὸ Ζ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



SIT datus circulus ΑΒΓ: oportet circuli ΑΒΓ centrum invenire.

Ducatur in ipſo quædam recta linea ΑΒ utcunque, & in puncto Δ [per 10. 1.] bifariam ſecetur, à puncto autem Δ ipſi ΑΒ ad rectos angulos [per 11. 1.] ducta ΔΓ producatur in Β, & ſecetur ΓΕ bifariam in Ζ: dico punctum Ζ centrum eſſe circuli ΑΒΓ.

Non ſit enim Ζ, ſed, ſi fieri poteſt, ſit Η, & ducantur ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. itaque quoniam ΑΔ eſt æqualis ΔΒ, communis autem ΔΗ, erunt duæ ΑΔ, ΔΗ duabus ΗΔ, ΔΒ æquales, altera alteri, & baſis ΗΑ [per 15. def. 1.] æqualis eſt baſi ΗΒ, ſunt enim ex centro Η: angulus igitur ΑΔΗ [per 8. 1.] angulo ΗΔΒ eſt æqualis. cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens angulos qui ſunt deinceps æquales inter ſe fecerit, [per 10. def. 1.] rectus eſt uterque æqualium angulorum: ergo angulus ΗΔΒ eſt rectus. ſed & rectus ΖΔΒ: æqualis igitur eſt angulus ΖΔΒ angulo ΗΔΒ, major minori, quod fieri non poteſt. quare Η non eſt circuli ΑΒΓ centrum. ſimiliter oſtendemus, neque aliud eſſe præter ipſum Ζ.

Ergo punctum Ζ centrum eſt circuli ΑΒΓ. quod erat faciendum.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ τινὶ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Corollarium.

Ex hoc perſpicuum eſt, ſi in circulo recta linea rectam bifariam & ad angulos rectos ſecet, circuli centrum eſſe in ſecante.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Prop. II. Theor.

Si in circumferentia circuli duo quælibet puncta ſumantur, quæ ipſa conjungit recta linea intra circulum cadet.

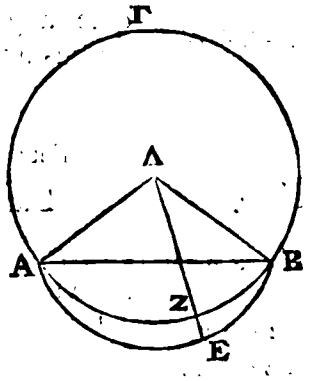
Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω τυχόντα δύο σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖ ἐπὶ τὸ Ε.

SIT circulus ΑΒΓ, & in circumferentia ipſius ſumantur duo quælibet puncta ΑΒ: dico rectam lineam, quæ à puncto Α ad Β ducitur, intra circulum cadere.

Si enim non, fieri ſi poteſt, cadat extra, ut ΑΕΒ; & ſumatur [per 1. 3.] circuli ΑΒΓ centrum, & ſit Δ, junganturque ΑΔ, ΔΒ, & producatur ΔΖ in Ε.

Quoniam igitur Δ A eſt æqualis Δ B, erit & angulus Δ A E [per 5. 1.] angulo Δ B E æqualis: & quoniam trianguli Δ A E unum latus A E B producitur, angulus Δ E B [per 16. 1.] angulo Δ A E major erit. angulus autem Δ A E æqualis eſt angulo Δ B E: ergo Δ E B angulus angulo Δ B E eſt major. ſed majori angulo [per 18. 1.] majus latus ſubtenditur: major igitur eſt Δ B ipſa Δ E. eſt autem rectæ Δ B æqualis Δ Z: ergo Δ Z eſt major Δ E, minor majore, quod fieri non poteſt. recta igitur linea à puncto A ad B ducta non cadet extra circulum. ſimiliter oſtendemus, neque in ipſam cadere circumferentiam: ergo intus cadat neceſſe eſt.



Si igitur in circumferentia circuli duo quælibet puncta ſumantur, quæ ipſa conjungit recta linea intra circulum cadet. quod erat demonſtrandum.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Δ Α τῇ Δ Β, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ Δ Α Ε τῇ ὑπὸ Δ Β Ε· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ Δ Α Ε μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ Α Ε Β, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ Δ Ε Β γωνία τῆς ὑπὸ Δ Α Ε. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ Δ Α Ε τῇ ὑπὸ Δ Β Ε· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ Δ Ε Β τῆς ὑπὸ Δ Β Ε. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ Δ Β τῆς Δ Ε. ἴση δὲ ἡ Δ Β τῇ Δ Ζ· μείζων ἄρα ἡ Δ Ζ τῆς Δ Ε, ἡ ἐλάττων τοῦ μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς ἡ περιφερείας· ἐντὸς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῶσι δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. III. Theor.

Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam non ductam per centrum bifariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit: quod ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, & bifariam ſecabit.

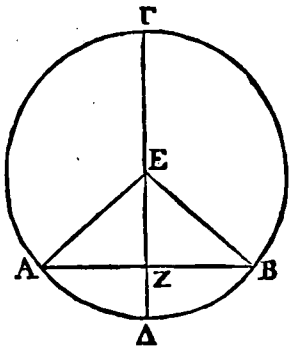
ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

SIT circulus A B Γ, & in ipſo recta linea per centrum ducta Γ Δ rectam lineam A B non ductam per centrum bifariam ſecet in puncto Z: dico quod etiam ad angulos rectos ipſam ſecat.

Sumatur enim [per 1. 3.] circuli A B Γ centrum, & ſit E, junganturque E A, E B.

Quoniam igitur A Z eſt æqualis Z B, communis autem Z E, duæ duabus æquales ſunt, & baſis E A baſi E B eſt æqualis; ergo & angulus A Z E [per 8. 1.] angulo B Z E æqualis erit. cum autem recta linea ſuper rectam inſiſtens angulos qui ſunt deinceps æquales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque æqualium angulorum: uterque igitur A Z E, B Z E eſt rectus. quare recta linea Γ Δ per centrum ducta rectam lineam A B non ductam per centrum bifariam ſecans, & ad angulos rectos ipſam ſecat.



Quod ſi recta Γ Δ rectam A B ad rectos angulos ſecet: dico quod etiam bifariam ipſam ſecat, hoc eſt, quod A Z ipſi Z B æqualis eſt.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam E A quæ ex centro æqualis eſt E B, & angulus E A Z ipſi E B Z [per 5. 1.] æqualis erit. eſt autem & A Z E rectus, æqualis recto B Z E: duo igitur triangula ſunt E A Z, E B Z, duos angulos duobus angulis æquales habentia, unumque latus uni lateri æquale E Z, commune ſci-

Ἔστω κύκλος ὁ Α Β Γ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ Γ Δ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν Α Β δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ Α Β Γ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Ε Α, Ε Β.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Α Ζ τῇ Ζ Β, κοινὴ δὲ ἡ Ζ Ε, δύο δὴ δύο ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ Ε Α βάσει τῇ Ε Β ἴση, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ Α Ζ Ε γωνίᾳ τῇ ὑπὸ Β Ζ Ε ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ Α Ζ Ε, Β Ζ Ε ὀρθή ἐστιν. ἡ Γ Δ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα τὴν Α Β μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἡ Γ Δ τὴν Α Β πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τουτέστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ Α Ζ τῇ Ζ Β.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ Ε Α τῇ Ε Β, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ Ε Α Ζ τῇ ὑπὸ Ε Β Ζ. ἔστι δὲ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ Α Ζ Ε ὀρθῇ τῇ ὑπὸ Β Ζ Ε ἴση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ Ε Α Ζ, Ε Β Ζ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν Ε Ζ, ὑποτείνουσαν

πάντων τὸ αὐτὸ μέσον τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς τῶν λοιπῶν πλευρῶν ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

licet utrique, quod uni angulorum æqualium ſubtenditur: ergo & reliqua latera reliquis lateribus [per 26. 1.] æqualia habebunt; æqualis igitur eſt AZ ipſi BZ.

Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam non ductam per centrum bifariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit: & ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, & bifariam ſecabit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα, ὥστε ἴσον εἶναι τὸ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὸ δὲ ΒΕ τῇ ΕΔ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένην τὴν ΑΓ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΑ. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΑ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΑ τῇ ὑπὸ ΖΕΒ, ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

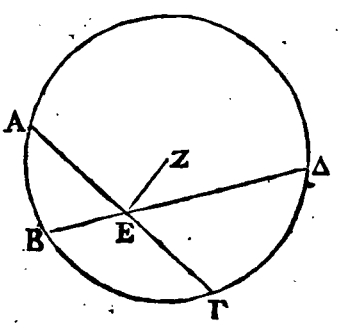
Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ, non ductæ per centrum, ſe invicem ſecent; ſeſe bifariam non ſecabunt.

SIT circulus ABΓΔ; & in ipſo duæ rectæ lineæ AΓ, BΔ, non ductæ per centrum, ſe invicem ſecent in puncto E: dico eas ſeſe bifariam non ſecare.

Si enim fieri poteſt, ſecent ſeſe bifariam, ita ut AE ſit æqualis EΓ, & BE ipſi EΔ: ſumaturque [per 1. 3.] centrum circuli ABΓΔ, & ſit Z, jungaturque ZE.



Quoniam igitur recta linea ZE per centrum ducta rectam lineam AΓ non ductam per centrum bifariam ſecat, [per 3. 3.] & ad rectos angulos ipſam ſecabit: quare rectus eſt ZEA angulus. rurſus, quoniam recta linea ZE rectam lineam BΔ non ductam per centrum bifariam ſecat, & ad angulos rectos ipſam ſecabit: rectus igitur angulus eſt ZEB. oſtenſus autem eſt rectus & ZEA: ergo ZEA angulus ipſi ZEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur AΓ, BΔ ſeſe bifariam ſecant.

Quare ſi in circulo duæ rectæ lineæ, non ductæ per centrum, ſe invicem ſecent; ſeſe bifariam non ſecabunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

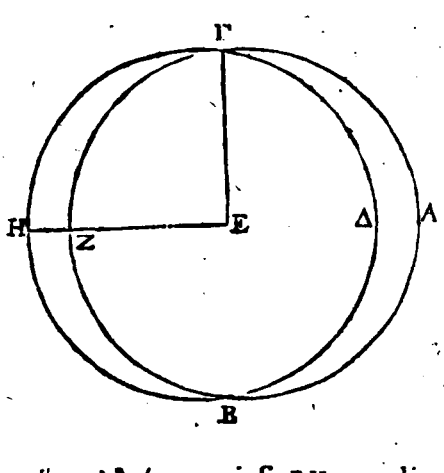
Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΗ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΗ ὡς ἔτυχε.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖόν κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΗ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον.

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum.



DUO enim circuli ABΓ, ΓΔH ſe invicem ſecent in punctis B, Γ: dico ipſorum idem centrum non eſſe.

Si enim fieri poteſt, ſit illud E, jungaturque EΓ, & EZH utcunque ducatur.

Et quoniam E centrum eſt circuli ABΓ, erit EΓ [per 15. def. 1.] ipſi EZ æqualis. rurſus, quoniam E centrum eſt ΓΔH circuli, æqualis eſt EΓ ipſi EH. ſed oſtenſa eſt EΓ æqualis EZ: ergo EZ ipſi EH æqualis erit, minor majori, quod fieri non

poteſt. non eſt igitur punctum E centrum circulorum ABΓ, ΓΔH.

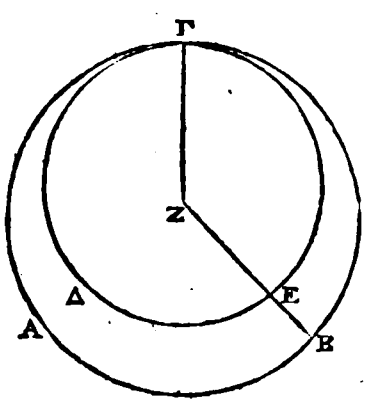
Quare ſi duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum. quod erat demonſtrandum.

Prop. VI. Theor.

Si duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit.

DUO enim circuli ABΓ, ΓΔE ſeſe intra contingant in puncto Γ: dico ipſorum non eſſe idem centrum.

Si enim fieri poteſt, ſit Z, jungaturque ZΓ, & ducatur utcunque ZEB.



Quoniam igitur Z centrum eſt circuli ABΓ, æqualis eſt ZΓ ipſi ZB. rurſus, quoniam Z centrum eſt circuli ΓΔE, erit ZΓ æqualis ZE. oſtenſa autem eſt ZΓ æqualis ZB: ergo & ZE ipſi ZB eſt æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. non eſt igitur Z punctum centrum circulorum ABΓ, ΓΔE.

Quare ſi duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit. quod erat demonſtrandum.

Prop. VII. Theor.

Si in circuli diametro aliquod punctum ſumatur quod non ſit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quædam rectæ lineæ; maxima quidem erit in qua centrum, reliqua vero minima: aliarum autem, ſemper propinquior ei quæ per centrum major eſt remotiore; duæque tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent, ex utraque parte minimæ.

SIT circulus ABΓΔ, ejus autem diameter ſit AΔ, & in ipſa AΔ ſumatur aliquod punctum Z quod non ſit centrum circuli, ſit autem circuli centrum E, & à puncto Z in circulum ABΓΔ cadant rectæ lineæ ZB, ZΓ, ZH: dico ZA maximam eſſe, ZΔ vero minimam; aliarum autem, ZB quidem majorem quam ZΓ, & ZΓ quam ZH.

Jungantur enim BE, ΓE, HE.

Et quoniam omnis trianguli duo latera [per 20. 1.] reliquo ſunt majora, erunt EB, EZ majores quam BZ. eſt autem AE æqualis BE, ergo BE, EZ ipſi AZ ſunt æquales: major igitur eſt AZ quam BZ. rurſus, quoniam BE eſt æqualis ΓE, communis autem ZE, duæ BE, EZ duabus ΓE, EZ ſunt æquales. ſed BEZ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ABΓ, ΓΔE ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZΓ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ZEB.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZΓ τῇ ZB. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔE κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZΓ τῇ ZE. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZΓ τῇ ZB ἴση· καὶ ἡ ZE ἄρα τῇ ZB ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ABΓ, ΓΔE κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον· μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπὴ τῆς δ' ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί· δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

ΕΣτω κύκλος ὁ ABΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ AΔ, καὶ ἐπὶ τῆς AΔ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Z, ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ E, καὶ ἀπὸ τοῦ Z πρὸς τὸν ABΓΔ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ZB, ZΓ, ZH· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ZA, ἐλαχίστη δὲ ἡ ZΔ· τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν ZB τῆς ZΓ μείζων, ἡ δὲ ZΓ τῆς ZH.

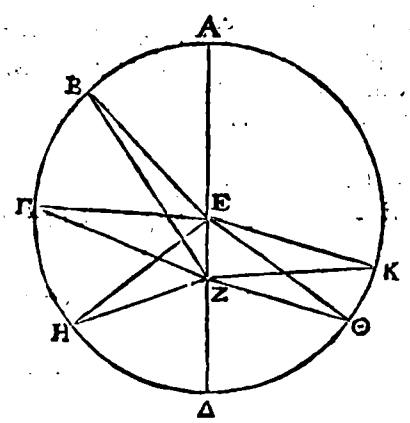
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ BE, ΓE, HE.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ἄρα EB, EZ τῆς BZ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ AE τῇ BE, αἱ ἄρα BE, EZ ἴσαι εἰσὶ τῇ AZ· μείζων ἄρα ἡ AZ τῆς BZ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ ΓE, κοινὴ προσκείσθω ἡ ZE, δύο δὴ αἱ BE, EZ δυσὶ ταῖς ΓE, EZ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ

ὑπὸ ΒΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσεως τῆς ΓΖ μείζων ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ μείζων.

ΠΑΛΙΝ, ἐπεὶ αἱ ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΗ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΕΔ· αἱ ἄρα ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι· κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ λοιπῆς τῆς ΖΔ μείζων ἐστί. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· μείζων δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου δύο μόναι ἴσαι εὐθεῖαι προσπεσοῦνται πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε, τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστίν. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἄλλη ἴση ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. εἰ γὰρ δυνατὸν, προσπιπτέτω ἡ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἴση ἐστὶν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΖΘ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐγγὺς τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.



ΗΚΑΙ ΟΥΤΩΣ. ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, καὶ βάσις ἡ ΗΖ βάσει τῇ ΖΚ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἴση ἐστίν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΕΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν εἰς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἡ ἐγγὺς τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί· τῶν δὲ εἰς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἡ ἐγγὺς τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἐστὶ μείζων. δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

ἘΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν

angulus major est angulo ΓΕΖ: basis igitur ΒΖ [per 24. 1.] basi ΓΖ est major. eadem ratione & ΓΖ major est quam ΖΗ.

Rursus, quoniam ΗΖ, ΖΕ majores sunt quam ΕΗ, æqualis autem ΕΗ ipsi ΕΔ: erunt ΗΖ, ΖΕ majores quam ΕΔ. communis auferatur ΕΖ: ergo reliqua ΗΖ major est quam reliqua ΖΔ. maxima igitur est ΖΑ, & ΖΔ minima: major vero ΖΒ quam ΖΓ, & ΖΓ quam ΖΗ.

Dico etiam à puncto Ζ duas tantum æquales rectas cadere in circulum ΑΒΓΔ, ex utraque parte minimæ ΖΔ. constituatur enim [per 23. 1.] ad lineam ΕΖ, atque ad datum in ea punctum Ε, angulo ΗΕΖ æqualis angulus ΖΕΘ, & ducatur ΖΘ. quoniam igitur ΗΕ est æqualis ΕΘ, communis autem ΕΖ, duæ ΗΕ, ΕΖ duabus ΘΕ, ΕΖ sunt æquales, & angulus ΗΕΖ [per constr.] æqualis angulo ΘΕΖ: basis igitur ΖΗ [per 4. 1.] basi ΖΘ æqualis erit. dico à puncto Ζ in circulum non cadere aliam ipsi ΖΗ æqualem. si enim fieri potest, cadat ΖΚ. & quoniam ΖΚ est æqualis ΖΗ, estque ipsi ΖΗ æqualis ΖΘ: erit & ΖΚ ipsi ΖΘ æqualis, videlicet propinquior ei quæ per centrum æqualis remotiori, quod fieri non potest.

Vel hoc modo. jungatur ΕΚ. & quoniam ΗΕ ipsi ΕΚ est æqualis, communis autem ΖΕ, & basis ΗΖ æqualis basi ΖΚ; erit & angulus ΗΕΖ [per 8. 1.] æqualis angulo ΚΕΖ. sed angulus ΗΕΖ angulo ΘΕΖ est æqualis: angulus igitur ΘΕΖ ipsi ΚΕΖ æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. quare à puncto Ζ in circulum non cadet alia recta linea æqualis ipsi ΗΖ: ergo una tantum cadet.

Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

Prop. VIII. Theor.

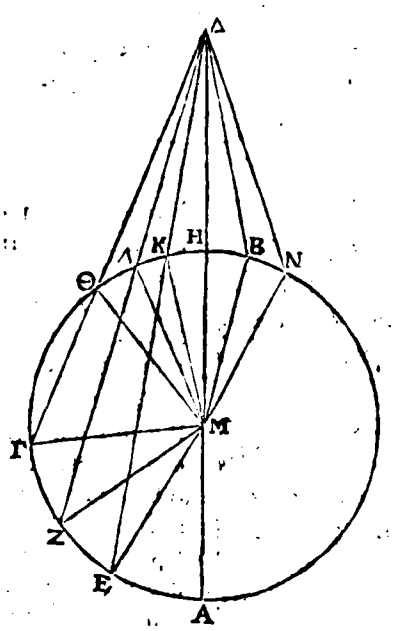
Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum una per centrum transeat, reliquæ vero utcunque. earum quidem, quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quæ per centrum transit: aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum major est remotiore: earum vero, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est quæ inter punctum & diametrum interjicitur: aliarum autem, semper quæ propinquior minimæ minor est remotiore: duæque tantum æquales à puncto in circulum cadunt, ex utraque parte minimæ.

SIT circulus ΑΒΓ, & extra circulum sumatur aliquod punctum Δ, ab eo autem in

circulum ducantur rectæ lineæ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ſitque ΔΑ per centrum: dico earum quidem, quæ in ΑΕΖΓ concavam circumferentiam cadunt, maximam eſſe ΔΑ, quæ per centrum tranſit; & quæ propinquior eſt ei quæ per centrum ſemper erit major remotiore, videlicet ΔΕ quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΔΓ; earum vero, quæ in convexam circumferentiam ΘΛΚΗ cadunt, minima eſt ΔΗ, quæ inter Δ & diametrum ΑΗ interjicitur; & quæ propinquior minimæ ſemper eſt minor remotiore, videlicet ΔΚ quam ΔΛ, & ΔΛ quam ΔΘ.

Sumatur enim [per 1. 3.] centrum circuli ΑΒΓ, quod ſit Μ; junganturque ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Et quoniam ΑΜ eſt æqualis ΕΜ, communis addatur ΜΔ: ergo ΑΔ eſt æqualis ipſis ΕΜ, ΜΔ. ſed ΕΜ, ΜΔ [per 20. 1.] ſunt majores quam ΕΔ: ergo & ΑΔ quam ΕΔ eſt major. rurſus, quoniam æqualis eſt ΜΕ ipſi ΜΖ, ΜΔ vero communis; erunt ΕΜ, ΜΔ ipſis ΜΖ, ΜΔ æquales, & angulus ΕΜΔ major eſt angulo ΖΜΔ: baſis igitur ΕΔ [per 24. 1.] baſi ΖΔ major erit. ſimiliter demonſtrabimus & ΖΔ majorem eſſe quam ΓΔ: ergo maxima eſt ΔΑ; major autem ΔΕ quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΔΓ.



Præterea quoniam ΜΚ, ΚΔ [per 20. 1.] ſunt majores quam ΜΔ, & ΜΗ eſt æqualis ΜΚ, erit reliqua ΚΔ major reliqua ΗΔ: quare ΗΔ minor quam ΚΔ, & idcirco minima eſt. & quoniam ſuper trianguli ΜΛΔ uno latere ΜΔ duæ rectæ lineæ ΜΚ, ΚΔ intus conſtituuntur, erunt ΜΚ, ΚΔ [per 21. 1.] minores ipſis ΜΛ, ΛΔ, quarum ΜΚ eſt æqualis ΜΛ: reliqua igitur ΔΚ minor eſt quam reliqua ΔΛ. ſimiliter oſtendemus & ΔΛ quam ΔΘ minorem eſſe: eſt ergo ΔΗ minima, minor vero ΔΚ quam ΔΛ, & ΔΛ quam ΔΘ.

Dico etiam duas tantum æquales à puncto Δ in circulum cadere, ex utraque parte minimæ conſtituatur [per 23. 1.] ad rectam lineam ΜΔ, & ad datum in ea punctum Μ, angulo ΚΜΔ æqualis angulus ΔΜΒ, & ΔΒ jungatur. itaque quoniam ΜΚ eſt æqualis ΜΒ, communis autem ΜΔ, duæ ΚΜ, ΜΔ duabus ΒΜ, ΜΔ æquales ſunt, utraque utriquè, & angulus ΚΜΔ æqualis angulo ΒΜΔ: baſis igitur ΔΚ [per 4. 1.] baſi ΔΒ eſt æqualis. dico autem à puncto Δ nullam aliam ipſi ΔΚ æqualem in circulum cadere. ſi enim fieri poteſt, cadat ΔΝ. & quoniam ΔΚ eſt æqualis ΔΝ, & ΔΒ ipſi ΔΚ æqualis; erit & ΔΒ æqualis ΔΝ, propinquior ſcilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt.

εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἐστὶ τῶν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· αἰεὶ δὲ ἡ ἐγγύτερον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· αἰεὶ δὲ ἡ ἐγγύτερον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Μ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἐστὶ ταῖς ΕΜ, ΜΔ. ἀλλ' αἱ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΕ τῇ ΜΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΜΖ, ΜΔ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστί· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΗΔ τῆς ΚΔ ἐλάσσων ἐστίν, ἐλαχίστη ἄρα ἐστί. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΛΔ παρὰ μιᾶς τῶν πλευρῶν τὴν ΜΔ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν αἱ ΜΚ, ΚΔ, αἱ ἄρα ΜΚ, ΚΔ τῶν ΜΛ, ΛΔ ἐλάττονές εἰσιν, ὧν ἐστιν ἴση ἡ ΜΚ τῇ ΜΛ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΛ ἐλάττων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΘ ἐλάττων ἐστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω ὅτι καὶ δύο μόναι ἴσαι εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου συσταθήσονται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης. συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ, τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΔ δυσὶ ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστί. λέγω δὴ ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἐστιν ἴση, ἀλλὰ ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἴση ἐστίν, ἡ ἐγγὺς τῆς ΔΗ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον ἐστιν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη.

Η ΚΑΙ ΑΛΛΩΣ. ἐπιζεύχθω ἡ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΜΝ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, καὶ βάσις ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΜΝ ἴση ἐστίν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΚΜΔ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΜΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τὴν ΑΒΓ κύκλου ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τὴν ΗΔ ἐλαχίστης προσπεσοῦνται).

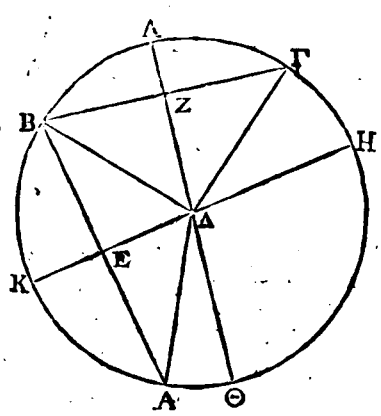
Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπ' αὐτοῦ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὴν κύκλου προσπίπτωσιν πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖόν τι τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὴν ΑΒΓ κύκλου προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ διῃχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΔΖ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Κ, Θ, Λ σημεῖα.



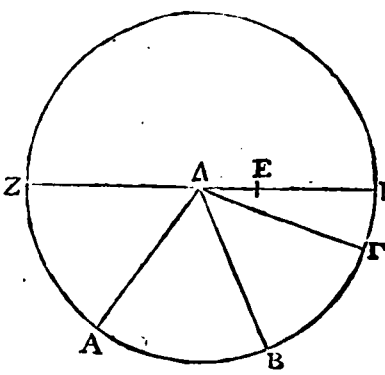
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΒΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΒΕΔ γωνιῶν· ἡ ΗΚ ἄρα τὴν ΑΒ δίχα τέμνουσα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. καὶ ἐπεί, ἐάν ἐν κύκλῳ τινὲς εὐθεῖαι εὐθεῖάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τοῦ τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τοῦ ΗΚ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τοῦ ΘΛ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ. καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ ΗΚ, ΘΛ εὐθεῖαι, ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαι πλείους ἢ δύο ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὴν ΑΒΓ κύκλου προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ Ε, καὶ διῃχθεῖσα ἡ ΔΕ διήχθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η σημεῖα, ἡ ἄρα ΖΗ διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ



Vel aliter. jungatur MN. & quoniam æqualis est KM ipsi MN, communis autem MΔ; & basis ΔK basi ΔN æqualis: angulus KMΔ æqualis erit [per 8. 1.] angulo ΔMN. sed KMΔ angulus est æqualis angulo BMΔ: angulus igitur BMΔ angulo NMΔ æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. quare non plures quam duæ rectæ lineæ à puncto Δ in circulum ABΓ cadent, ex utraq; parte minimæ HΔ.

Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

Prop. IX. Theor.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, punctum quod sumitur erit centrum circuli.

Sit circulus ABΓ, & intra ipsum sumatur punctum Δ, à quo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, videlicet ΔA, ΔB, ΔΓ: dico punctum Δ centrum esse circuli ABΓ.

Jungantur enim AB, BΓ, secenturque bifariam [per 10. 1.] in punctis E, Z, & junctæ EΔ, ΔZ ad puncta H, K, Θ, Λ producantur.

Quoniam igitur AE est æqualis EB, communis autem EΔ: erunt duæ AE, EΔ duabus BE, EΔ æquales. & basis ΔA est æqualis basi ΔB: angulus igitur AEΔ angulo BEΔ [per 8. 1.] æqualis erit: & idcirco [per 10. def. 1.] uterque angulorum AEΔ, BEΔ est rectus: ergo HK bifariam secans AB, & ad angulos rectos ipsam secat. & quoniam, si in circulo recta linea rectam lineam bifariam & ad rectos angulos secet, circuli centrum est [per cor. 1. 3.] in secante: erit in HK centrum circuli ABΓ. eadem ratione & in ΘΛ erit centrum circuli ABΓ. nullum autem aliud commune habent rectæ lineæ HK, ΘΛ præter punctum Δ: est ergo Δ centrum circuli ABΓ.

Si igitur intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, punctum quod sumitur erit centrum circuli. quod erat demonstrandum.

Aliter.

Sumatur enim intra circulum ABΓ punctum aliquod Δ, atque à puncto Δ in circulum ABΓ cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales ΔA, ΔB, ΔΓ: dico assumptum punctum Δ centrum esse circuli ABΓ.

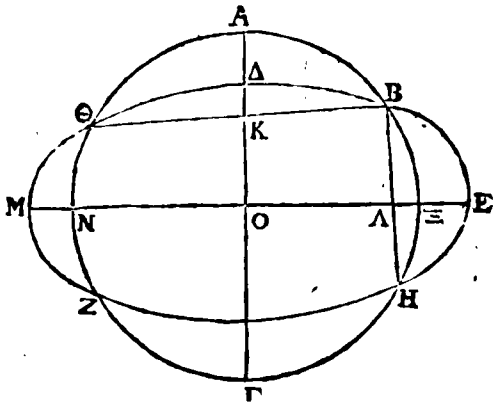
Si enim non sit, fieri si potest, sit E, & junctæ ΔE producatur in Z, H: ergo ZH diameter est circuli ABΓ. itaque quoniam in

ΣΗ diametro circuli ΑΒΓ ſumptum eſt aliquod punctum Δ, quod non eſt centrum circuli; [per 7. 3.] maxima quidem erit ΔΗ, major autem ΔΓ quam ΔΒ, & ΔΒ quam ΔΑ. ſed & æquales, quod fieri non poteſt: non eſt igitur Ε centrum circuli ΑΒΓ. ſimiliter oſtendemus neque aliud punctum centrum eſſe præter ipſum Δ: erit igitur Δ centrum circuli ΑΒΓ.

Prop. X. Theor.

Circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non ſecat.

SI enim fieri poteſt, circulus ΑΒΓ circulum ΔΕΖ ſecet in pluribus punctis quam duobus, videlicet in Β, Η, Θ, & junctæ ΒΗ, ΒΘ bifariam ſecentur in Κ, Λ, atque à punctis Κ, Λ ipſis ΒΗ, ΒΘ ad rectos angulos ductæ ΚΓ, ΛΜ in puncta Α, Ε producantur.

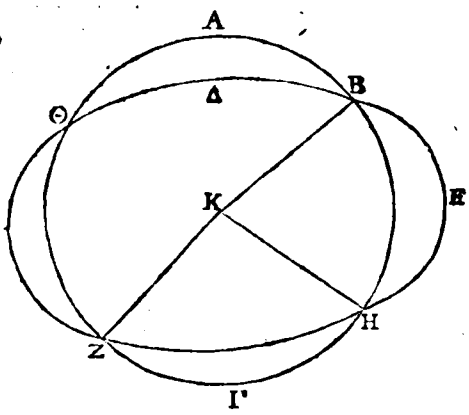


Quoniam igitur in circulo ΑΒΓ, recta linea ΑΓ rectam lineam ΒΘ bifariam & ad angulos rectos ſecat, in ipſa ΑΓ [per cor. 1. 3.] erit centrum circuli ΑΒΓ. rurſus, quoniam in eodem circulo ΑΒΓ recta linea ΝΞ rectam lineam ΒΗ bifariam ſecat & ad angulos rectos, in ipſa ΝΞ centrum erit circuli ΑΒΓ. oſtenſum autem eſt & in ipſa ΑΓ centrum eſſe, & in nullo alio puncto conveniunt inter ſe rectæ lineæ ΑΓ, ΝΞ, præterquam in Ο: eſt igitur Ο centrum circuli ΑΒΓ. ſimiliter oſtendemus punctum Ο centrum eſſe circuli ΔΕΖ: ergo duorum circulorum ſeſe ſecantium ΑΒΓ, ΔΕΖ idem erit centrum Ο, quod [per 5. 3.] fieri non poteſt.

Circulus igitur non ſecat circulum in pluribus punctis quam duobus. quod erat demonſtrandum.

Aliter.

Circulus enim ΑΒΓ rurſus circulum ΔΕΖ ſecet in pluribus punctis quam duobus, nempe in Β, Η, Ζ, & circuli ΑΒΓ centrum ſumatur quod ſit Κ, & ΚΖ, ΚΗ, ΚΒ jungantur.



Quoniam igitur intra circulum ΔΕΖ ſumptum eſt punctum Κ, à quo in circulum ΔΕΖ incidant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ, punctum Κ erit [per 9. 3.] centrum circuli ΔΕΖ. eſt autem Κ centrum circuli ΑΒΓ: duorum igitur circulorum, qui ſeſe ſecant, erit idem centrum Κ, quod [per 5. 3.] fieri non poteſt.

Quare circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non ſecat. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

ΕΙ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Β, Η, Θ, καὶ ἤχθωσαν αἱ ΒΗ, ΒΘ δίχα τμηθεῖσαι κατὰ τὰ Κ, Λ σημεῖα. καὶ ἀπὸ τῶν Κ, Λ τῇ ΒΗ, ΒΘ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ, ΛΜ ἐπὶ τὰ Α, Ε διήχθωσαν σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΘ δίχα τέμνει καὶ πρὸς ὀρθὰς, ἐπὶ τοῦ ΑΓ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΝΞ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΗ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τοῦ ΝΞ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ ΑΓ, καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ ΑΓ, ΝΞ εὐθεῖαι ἀλλήλαις ἢ κατὰ τὸ Ο· τὸ Ο ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ Ο· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τὸ Ο, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Κύκλος γὰρ πάλιν ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Β, Η, Ζ, Ĉ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ, ΚΒ.

Ἐπεὶ οὖν τοῦ ΔΕΖ εἴληπταί τινα σημεῖα ἐντὸς, τὸ Κ, Ĉ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς τὸν ΔΕΖ κύκλον προσπίπτωσαι τρεῖς ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ· τὸ Κ ἄρα σημεῖόν ἐστι κέντρον τοῦ ΔΕΖ κύκλου. ἔστι δὲ Ĉ τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ Κ, ὅπερ ἀδύνατον.

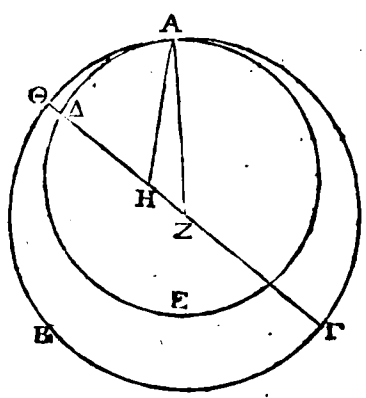
Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Εὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ λη-φθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Α σημεῖον πεσεῖται.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ὡς ἡ ΖΗΔΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.



Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ τῆς ΖΑ μείζονές εἰσι τῆς ΖΘ (ἴση γὰρ ἡ ΖΑ τῇ ΖΘ, ἀπὸ κέντρου γὰρ ἀμφω) μείζονες εἰσιν, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ· καὶ ἡ ΗΔ ἄρα τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶν, ἡ ἐλάττων τοῦ μείζονος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ Α συναφῆς πεσεῖται· ἐπ' αὐτῷ ἄρα.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Ἀλλὰ δὴ πιπτέτω ὡς ἡ ΗΖΓ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΓΖΗ ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΖ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ μείζους εἰσὶ τῆς ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΑΖ ἴση ἐστὶ τῇ ΓΖ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΖΘ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΗΔ τῆς ΗΘ, ἡ ἐλάττων τοῦ μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁμοίως δὴ δείκνυμεν ὅτι οὐδὲ ἐκτὸς ἡ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli ſeſe intus contingant, & ſumantur centra ipſorum; recta linea ipſorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

DUO enim circuli ΑΒΓ, ΑΔΕ ſeſe intus contingant in puncto Α, & ſumatur circuli quidem ΑΒΓ centrum, quod ſit Ζ, circuli vero ΑΔΕ centrum Η: dico rectam lineam à puncto Η ad Ζ ductam, ſi producatur, in punctum Α cadere.

Si enim non, fieri ſi poteſt, cadat ut ΖΗΔΘ, & jungantur ΑΖ, ΑΗ.

Quoniam igitur ΑΗ, ΗΖ majores ſunt [per 20. 1.] quam ΖΑ, hoc eſt quam ΖΘ, (eſt enim ΖΑ æqualis ΖΘ, ambæ ab eodem centro) communis auferatur ΖΗ, reliqua igitur ΑΗ major eſt quam reliqua ΗΘ. ſed ΑΗ eſt æqualis ΗΔ: ergo ΗΔ major eſt ipſa ΗΘ, minor majore, quod fieri non poteſt. non igitur à puncto Ζ ad Η ducta recta linea extra contactum Α cadet: quare in ipſum cadat neceſſe eſt.

Si igitur duo circuli ſeſe intus contingant, recta linea ipſorum centra conjungens, ſi producatur, in contactum circulorum cadet. quod erat demonſtrandum.

ALITER.

Sed cadat ut ΗΖΓ, & producatur in directum ΓΖΗ ad punctum Θ, junganturque ΑΗ, ΑΖ.

Quoniam igitur ΑΗ, ΗΖ majores ſunt quam ΑΖ, & ΑΖ eſt æqualis ΓΖ, hoc eſt ipſi ΖΘ, communis auferatur ΖΗ: reliqua igitur ΑΗ reliqua ΗΘ eſt major; hoc eſt ΗΔ major ipſa ΗΘ, minor majore, quod fieri non poteſt. ſimiliter & ſi extra circulum parvum ſit centrum majoris circuli, idem ſequi abſurdum oſtendemus.

Hæc demonſtratio vix differt à priori, adeo ut videamur non eſſe Euclidis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Εὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἁφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον, τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἁφῆς ἐλεύσεται.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἐρχέσθω ὡς αἱ ΖΓΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

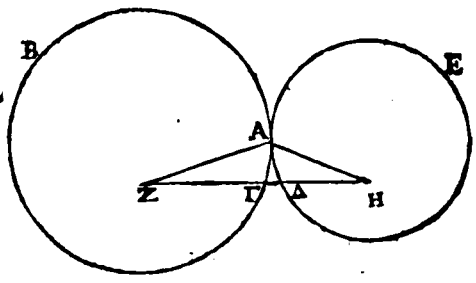
PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit.

DUO enim circuli ΑΒΓ, ΑΔΕ ſeſe extra contingant in puncto Α; & ſumatur circuli quidem ΑΒΓ centrum quod ſit Ζ, circuli vero ΑΔΕ centrum Η: dico rectam lineam, quæ à puncto Ζ ad Η ducitur, per contactum Α tranſire.

Si enim non, fieri ſi poteſt, cadat ut ΖΓΔΗ, & ΑΖ, ΑΗ jungantur.

Quoniam igitur Z centrum eſt circuli ABΓ, erit ZA æqualis ZΓ. rurſus, quoniam H centrum eſt AΔE circuli, erit AH ipſi HΔ æqualis. oſtenſa eſt autem & ZA æqualis ZΓ. ſunt igitur ZA, AH ipſis, ZΓ, ΔH æquales: ergo tota ZH major eſt quam ZA, AH. ſed & [per 20. 1.] minor; quod fieri non poteſt. non igitur à puncto Z ad H ducta recta linea per contactum A non tranſibit: quare per ipſum tranſeat neceſſe eſt.



Si igitur duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit. quod erat demonſtrandum.

Επεὶ γὰρ τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZA τῇ ZΓ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ AΔE κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AH τῇ HΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZA τῇ ZΓ ἴση· αἱ ἄρα ZA, AH τῇ ZΓ, ΔH ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ZH τῶν ZA, AH μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ διὰ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν διὰ ζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIII. Theor.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, ſive intus ſive extra contingat.

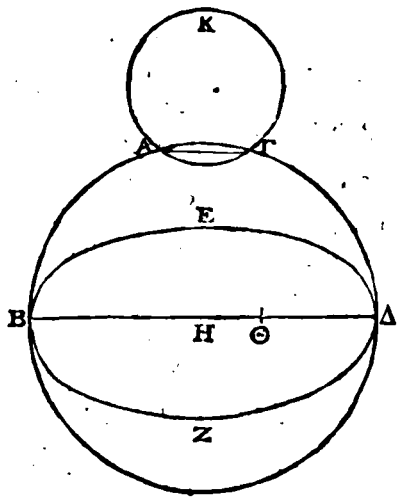
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ κατ' ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

SI enim fieri poteſt, circulus ABΔΓ circulum EBZΔ contingat primum intus in pluribus punctis quam uno, videlicet in B, Δ.

Et ſumatur [per 1. 3.] circuli quidem ABΔΓ centrum H, circuli vero EBZΔ centrum Θ.

Ergo recta linea, quæ à puncto H ad Θ ducitur, [per 11. 3.] in puncta B, Δ cadet. cadat ut BHΘΔ. & quoniam H centrum eſt circuli ABΔΓ, erit BH ipſi HΔ æqualis: major eſt igitur BH quam ΘΔ, & BΘ quam ΘΔ multo major. rurſus, quoniam Θ centrum eſt EBZΔ circuli, æqualis eſt BΘ ipſi ΘΔ. atqui oſtenſa eſt ipſa multo major, quod fieri non poteſt: non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis quam uno.



Dico etiam neque extra. ſi enim fieri poteſt, circulus AΓK circulum ABΔΓ extra contingat in pluribus punctis quam uno, videlicet in A, Γ, & ducatur AΓ.

Quoniam igitur in circumferentia circulorum ABΔΓ, AΓK ſumpta ſunt duo quælibet puncta A, Γ; recta linea quæ ipſa conjungit [per 2. 3.] intra utrumq; ipſorum cadet. ſed [per 3. def. 3.] quæ intra circulum quidem ABΔΓ cadit, extra circulum AΓK cadet, quod abſurdum: circulus igitur non contingit circulum extra in pluribus punctis quam uno. oſtenſum autem eſt neque intus contingere.

Circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, ſive intus ſive extra contingat. quod erat demonſtrandum.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ ABΔΓ κύκλου τοῦ EBZΔ ἁπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν, τὰ B, Δ.

Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ABΔΓ κύκλου κέντρον, τὸ H· τοῦ δὲ EBZΔ, τὸ Θ.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Θ διὰ ζευγνυμένη εὐθεῖα ἐπὶ τὰ B, Δ πεσεῖται. πιπτέτω ὡς ἡ BHΘΔ. Καὶ ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΔΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BH τῇ HΔ· μείζων ἄρα ἡ BH τῆς ΘΔ· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ BΘ τῆς ΘΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ EBZΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BΘ τῇ ΘΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

ΑΒΓΩ δὴ ὅτι οὐδὲ ἐκτός. εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ AΓK κύκλου τοῦ ABΔΓ ἐφαπτέσθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν, τὰ A, Γ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ AΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν ABΔΓ, AΓK εἴληπταί τινα ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρας δύο τυχόντα σημεῖα τὰ A, Γ, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα διὰ ζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρας πεσεῖται. ἀλλὰ τοῦ μὲν ABΔΓ ἐντὸς ἔπεσε, τοῦ δὲ AΓK ἐκτὸς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

Κύκλος ἄρα κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

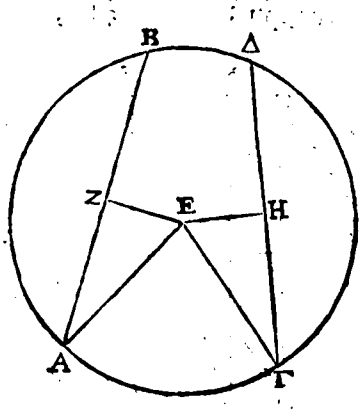
Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

PROP. XIV. THEOR.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro, & quæ æqualiter distant à centro sunt inter se æquales.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΔΓ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΔΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΓ.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, ὥστε καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ, ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστίν, ἴση ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ. ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τουτ' ἔστιν, ἴση ἔστω ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστίν. ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ΑΖ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλῆ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SIT circulus ΑΒΔΓ, & in ipso æquales rectæ lineæ ΑΒ, ΓΔ: dico eas à centro æqualiter distare.

Sumatur enim circuli ΑΒΔΓ centrum quod sit Ε, & ab ipso ad ΑΒ, ΓΔ perpendiculares ducantur ΕΖ, ΕΗ, & jungantur ΑΕ, ΕΓ.

Quoniam igitur recta linea per centrum ducta ΕΖ rectam lineam ΑΒ non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam [per 3. 3.] ipsam secat: quare ΑΖ est æqualis ΖΒ, ideoque ΑΒ ipsius ΑΖ dupla. eadem ratione & ΓΔ dupla est ΓΗ, atque est ΑΒ ipsi ΓΔ æqualis: æqualis igitur & ΑΖ ipsi ΓΗ. & quoniam ΑΕ est æqualis ΕΓ, erit & quadratum ex ΑΕ quadrato ex ΕΓ æquale. sed quadrato ex ΑΕ æqualia sunt [per 47. 1.] ex ΑΖ, ΖΕ quadrata, rectus est enim angulus ad Ζ: quadrato autem ex ΕΓ æqualia sunt quadrata ex ΕΗ, ΗΓ, cum angulus ad Η sit rectus: quadrata igitur ex ΑΖ, ΖΕ æqualia sunt quadratis ex ΓΗ, ΗΕ, è quibus quadratum ex ΑΖ quadrato ex ΓΗ est æquale; æqualis enim est ΑΖ ipsi ΓΗ: reliquum igitur quod fit ex ΖΕ quadratum æquale est reliquo ex ΕΗ; ac propterea ΖΕ ipsi ΕΗ est æqualis. in circulo autem æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, [per 4. def. 3.] quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ sunt æquales: ergo ΑΒ, ΓΔ à centro æqualiter distant.

SED ΑΒ, ΓΔ æqualiter distent à centro, hoc est, sit ΖΕ æqualis ipsi ΕΗ: dico ΑΒ ipsi ΓΔ æqualem esse.

Iisdem enim constructis similiter ostendemus, ΑΒ duplam esse ipsius ΑΖ, & ΓΔ duplam ipsius ΓΗ: & quoniam æqualis est ΑΕ ipsi ΕΓ, erit & ex ΑΕ quadratum quadrato ex ΕΓ æquale. sed quadrato quidem ex ΑΕ æqualia sunt [per 47. 1.] quadrata ex ΕΖ, ΖΑ, quadrato autem ex ΕΓ æqualia quadrata ex ΕΗ, ΗΓ: quadrata igitur ex ΕΖ, ΖΑ quadratis ex ΕΗ, ΗΓ sunt æqualia, è quibus quadratum ex ΕΗ æquale est quadrato ex ΕΖ. est autem ΕΖ ipsi ΕΗ æqualis: reliquum igitur ex ΑΖ quadratum æquale est reliquo ex ΓΗ; ergo ΑΖ ipsi ΓΗ est æqualis. atque est ΑΒ ipsius ΑΖ dupla, & ΓΔ dupla ipsius ΓΗ; quare ΑΒ ipsi ΓΔ æqualis erit.

In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, & quæ æqualiter à centro distant inter se sunt æquales. quod erat demonstrandum.

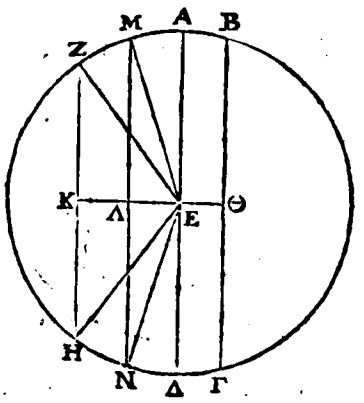
PROP.

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem eſt diameter: aliarum vero, ſemper propinquior centro major eſt remotiore.

SIT circulus ABΓΔ, cujus diameter AΔ, centrum E, & propinquior quidem centro E ſit BΓ, remotior vero ZH: dico AΔ maximam eſſe, & BΓ majorem quam ZH.

Ducantur enim à centro ad BΓ, ZH perpendiculares EΘ, EK. & quoniam BΓ propinquior eſt centro, remotior autem ZH; erit [per 5. def. 3.] EK major quam EΘ. ponatur ipſi EΘ æqualis EΛ, & per Λ ipſi EK ad rectos angulos ducta ΛM producatur in N, & jungantur EM, EN, EZ, EH.



Quoniam igitur EΘ eſt æqualis EΛ, erit [per 14. 3.] & BΓ ipſi MN æqualis. rurſus, quoniam æqualis eſt AE ipſi EM, & EΔ ipſi EN: erit AΔ ipſis ME, EN æqualis. ſed ME, EN majores ſunt quam MN: ergo & AΔ major eſt quam MN. at MN eſt æqualis BΓ: eſt igitur AΔ major quam BΓ. & quoniam duæ ME, EN duabus ZE, EH ſint æquales, angulusque MEN major angulo ZEH; & baſis MN [per 24. 1.] baſi ZH major erit. oſtenſa autem eſt MN æqualis BΓ: ergo & BΓ eſt major quam ZH. maxima igitur eſt AΔ diameter, & BΓ eſt major quam ZH.

Quare in circulo maxima eſt diameter: aliarum vero, ſemper propinquior centro major eſt remotiore. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Εν κύκλῳ μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διάμετρος· τῆς δὲ ἄλλης, ἀεὶ ἡ ἐγγίον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐγγίον μὲν τοῦ Ε κέντρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Ηχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Ε ταῖς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. καὶ ἐπεὶ ἐγγίον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΛΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΑΔ τῶν ΜΕ, ΕΝ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ αἱ ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονές εἰσιν, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ, ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ, γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. μεγίστη ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Εν κύκλῳ ἄρα μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ διάμετρος· τῆς δὲ ἄλλης, ἀεὶ ἡ ἐγγίον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XVI. THEOR.

Recta diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur altera recta linea non cadet: & ſemicirculi angulus major eſt quovis angulo rectilineo acuto: reliquus autem minor.

SIT circulus ABΓ circa centrum Δ & diametrum AB: dico rectam lineam, quæ à puncto A ipſi AB ad rectos angulos ducitur, extrà circulum cadere.

Si enim non, fieri ſi poteſt, cadat intus ut AΓ, & jungatur ΔΓ.

Quoniam igitur æqualis eſt ΔA ipſi ΔΓ, erit & angulus ΔAΓ [per 5. 1.] angulo AΓΔ æqualis. rectus autem eſt ΔAΓ, ergo & AΓΔ eſt rectus: ac propterea anguli ΔAΓ, AΓΔ duobus rectis ſunt æquales, quod [per 17. 1.] fieri

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Η τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία παύσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύ-

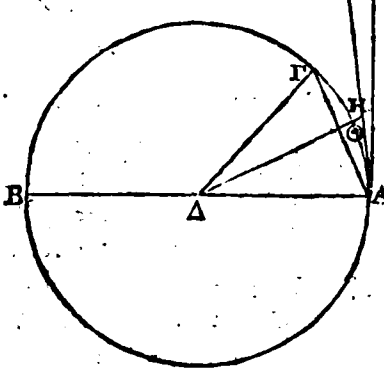
natum.

ἐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἐκτὸς ἄρα πεσεῖται, οἷον ἡ ΑΕ.

ΑΕΓΩ ὅτι εἰς τὴν μεταξὺ τόπον, τῆς τε ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἡ ἐλάττων τοῦ μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.



ΑΕΓΩ ὅτι καὶ ἡ μὲν τῆς ἡμικυκλίου γωνίας, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπή, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γάρ ἐστί τις γωνία εὐθύγραμμος, μείζων μὲν ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἐλάττων δὲ ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα, ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. ἀπὸ παρεμπίπτει δέ· οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἔστιν μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὴν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου κατ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον. ἐπὶ δήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη.

non potest. recta igitur à puncto A ipsi ΔA ad rectos angulos ducta non cadet intra circulum. similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere: extra igitur cadat necesse est, ut AE.

Dico in locum, qui inter rectam lineam AE & circumferentiam ΓΘA interjicitur, alteram rectam lineam non cadere.

Si enim fieri potest, cadat ut ZA, & à puncto Δ ad ZA perpendicularis ducatur ΔH.

Et quoniam rectus est angulus AHΔ, minor autem recto ΔAH, erit AΔ [per 19. 1.] major quam ΔH. æqualis autem est AΔ ipsi ΔΘ: major igitur est ΔΘ ipsa ΔH, minor majore, quod fieri non potest. in locum igitur, qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta linea non cadet.

Dico præterea angulum semicirculi, qui à recta linea BA & circumferentia ΓΘA comprehenditur, quovis angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero, comprehensum à circumferentia ΓΘA & recta linea AE, quovis angulo acuto rectilineo esse minorem.

Si enim est aliquis angulus rectilineus major comprehenso à recta linea BA & circumferentia ΓΘA, vel aliquis minor comprehenso à ΓΘA circumferentia & recta linea AE; in locum, qui inter circumferentiam ΓΘA & rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum majorem quidem comprehenso à recta linea BA & ΓΘA circumferentia, qui scilicet rectis lineis comprehenditur, minorem vero comprehenso à circumferentia ΓΘA & AE recta linea. non cadit autem: angulus igitur acutus, qui à rectis lineis comprehenditur, non est major angulo comprehenso à recta linea BA & ΓΘA circumferentia, neque minor comprehenso à circumferentia ΓΘA & AE recta linea. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Ex his manifestum est, quod recta linea, quæ ad rectos angulos ducitur diametro circuli ab extremitate ejusdem, circulum contingit: & quod recta linea circulum contingit in unico tantum puncto. quoniam quæ circulo in duobus punctis occurrit [per 2. 3.] intra ipsum cadere ostendebatur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.

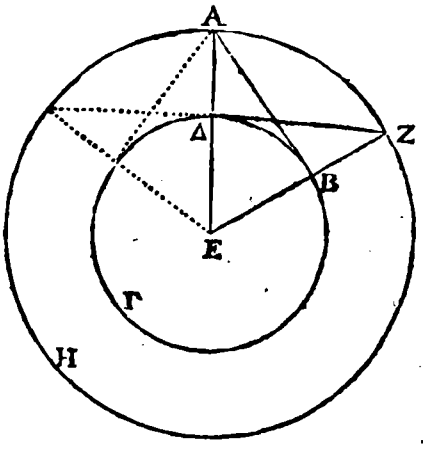
Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύ-

SIT datum quidem punctum A, datus autem circulus BΓΔ: oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BΓΔ contingat.

Sumatur enim centrum circuli E, & jungatur AE, & centro quidem E intervallo autem BA [per 3. post.]

poſt.] circulus AZH deſcribatur; & à puncto Δ ipſi EA ad rectos angulos [per 11. 1.] ducatur ΔZ, junganturque EBZ, AB: dico à puncto A ductam eſſe AB, quæ circulum BΓΔ contingit.



Quoniam enim E centrum eſt circulorum BΓΔ, AZH, erit EA æqualis EZ, & EΔ ipſi EB: duæ igitur AE, EB duabus ZE, EΔ ſunt æquales, & angulum communem continent, qui eſt ad E: baſis igitur ΔZ [per 4. 1.] baſi AB eſt æqualis, triangulumque ΔEZ æquale triangulo EBA, & reliqui anguli reliquis angulis: æqualis igitur eſt angulus EBA angulo EΔZ. rectus autem eſt EΔZ, quare & EBA rectus. atque eſt EB ex centro: quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur [per 16. 3.] circulum contingit: ergo AB contingit circulum.

A dato igitur puncto A ducta eſt recta linea AB, quæ circulum BΓΔ contingit. quod erat faciendum.

κλος γεγράφθω ὁ AZH, καὶ ἀπὸ τῦ Δ τῇ EA πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔZ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EBZ, AB· λέγω ὅτι ἀπὸ τῦ A σημείυ τῦ BΓΔ κύκλυ ἐφαπτομένη ἦται ἡ AB.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ E κέντρον ἐστὶ τῶ BΓΔ, AZH κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν EA τῇ EZ, ἡ δὲ EΔ τῇ EB· δύο δὴ αἱ AE, EB δυσὶ ταῖς ZE, EΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχυσι, τὴν πρὸς τῷ E· βάσις ἄρα ἡ ΔZ βάσει τῇ AB ἴση ἐστί. καὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον τῷ EBA τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα τῇ ὑπὸ EΔZ ἡ ὑπὸ EBA. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ EΔZ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ EBA. καὶ ἐστὶν ἡ EB ἐκ τῦ κέντρυ· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τῦ κύκλυ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τῦ κύκλυ· ἡ AB ἄρα ἐφάπτεται τῦ κύκλυ.

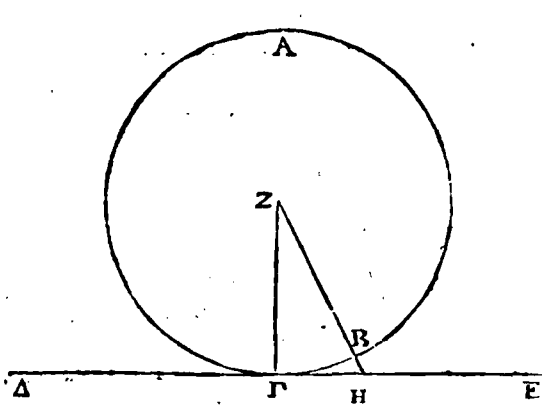
Ἀπὸ τῦ δοθέντος ἄρα σημείυ τῦ A τῦ δοθέντος κύκλυ τῦ BΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦται ἡ AB. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XVIII. Theor.

Si recta linea circulum contingat, à centro autem ad contactum recta linea ducatur, ea perpendicularis erit tangenti.

CIrculum enim ABΓ contingat recta linea ΔB in puncto Γ, & circuli ABΓ centrum ſumatur Z, à quo ad Γ ducatur ZΓ: dico ZΓ perpendicularem eſſe ad ipſam ΔB.

Si enim non fit ita, ducatur [per 12. 1.] à puncto Z ad ΔB perpendicularis ZH.



Quoniam igitur angulus ZHΓ rectus eſt, erit [per 17. 1.] HΓZ acutus: majorem autem angulum [per 19. 1.] majus latus ſubtendit, major igitur eſt ZΓ quam ZH. eſt autem ZΓ æqualis ipſi ZB: ergo ZB eſt major ipſa ZH, minor majore, quod fieri non poteſt. non eſt igitur ZH perpendicularis rectæ ΔE. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam eſſe præter ipſam ZΓ: ergo ZΓ ad ΔB eſt perpendicularis.

Si igitur recta linea circulum contingat, à centro autem ad contactum recta linea ducatur, ea perpendicularis erit tangenti. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν κύκλυ ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῦ κέντρυ τῦ κύκλυ ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλυ γὰρ τῦ ABΓ ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα ἡ ΔB κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῦ ABΓ κύκλυ τὸ Z, καὶ ἀπὸ τῦ Z ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ZΓ· λέγω ὅτι ἡ ZΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τῦ Z ἐπὶ τὴν ΔE κάθετος ἡ ZH.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ZHΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ HΓZ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἡ ZΓ τῆς ZH. ἴση δὲ ἡ ZΓ τῇ ZB· μείζων ἄρα ἡ ZB τῆς ZH, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ZH κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ZΓ· ἡ ZΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE.

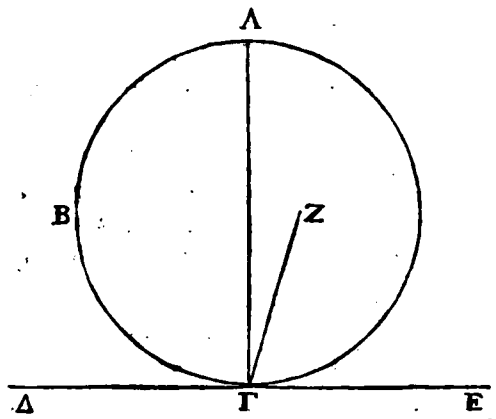
Ἐὰν ἄρα κύκλυ ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῦ κέντρυ ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ ταύτης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἀπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ.



Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλό τι πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XIX. THEOR.

Si recta linea circulum contingat, à contactu autem recta linea ducatur ad angulos rectos tangenti, centrum circuli erit in eadem.

CIrculum enim ΑΒΓ contingat quædam recta linea ΔΕ in Γ, & à puncto Γ ipsi ΔΕ ad rectos angulos ducatur ΓΑ: dico circuli centrum esse in ipsa ΑΓ.

Si enim non, fieri si potest, sit Ζ centrum, & jungatur ΓΖ.

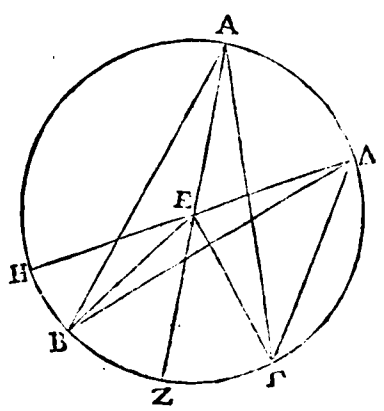
Quoniam igitur circulum ΑΒΓ contingit quædam recta linea ΔΕ, & à centro ad contactum ducta est ΖΓ, erit [per 18. 3.] ΖΓ ad ipsam ΔΕ perpendicularis: rectus igitur est angulus ΖΓΕ. est autem & ΑΓΕ rectus: ergo ΖΓΕ angulus est æqualis angulo ΑΓΕ, minor majori, quod fieri non potest. non est igitur Ζ centrum circuli ΑΒΓ. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquam in ipsa ΑΓ.

Quare si recta linea circulum contingat, à contactu autem recta linea ducatur ad angulos rectos tangenti, centrum circuli erit in eadem. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΕ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἴση ἐστίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλάσιαί εἰσιν. ἴση δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΕΖ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶ διπλῆ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστὶ διπλῆ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶ διπλῆ.

Κεκλάσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω γωνία ἑτέρα ἡ

PROP. XX. THEOR.

In circulo, angulus qui ad centrum duplus est ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem habent pro basi.

SIT circulus ΑΒΓ, ad cujus centrum sit angulus ΒΕΓ, ad circumferentiam vero ΒΑΓ, & eandem circumferentiam ΒΓ habeant pro basi: dico angulum ΒΕΓ anguli ΒΑΓ duplum esse.

Jungatur enim ΑΕ & ad Ζ producatur.

Itaque quoniam ΕΑ est æqualis ΕΒ, erit & angulus ΕΑΒ [per 5. 1.] angulo ΕΒΑ æqualis: anguli igitur ΕΑΒ, ΕΒΑ dupli sunt ipsius anguli ΕΑΒ. sed angulus ΒΕΖ est [per 32. 1.] æqualis angulis ΕΑΒ, ΕΒΑ: ergo angulus ΒΕΖ duplus est anguli ΕΑΒ. eadem ratione & angulus ΖΕΓ duplus est ipsius ΕΑΓ: totus igitur ΒΕΓ totius ΒΑΓ duplus erit.

Rursus inclinetur, & sit alter angulus ΒΔΓ,

junctaque Δ E ad H producatur. similiter ostendemus angulum H E Γ anguli H Δ Γ duplum esse, è quibus H E B duplus est ipsius H Δ B: ergo reliquus B E Γ reliqui B Δ Γ est duplus.

In circulo igitur, angulus qui ad centrum duplus est ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem habent pro basi. quod erat demonstrandum.

ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΗΔΓ, ἐν ᾗ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΗΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΔΓ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

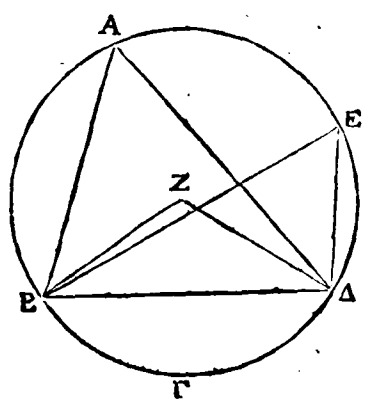
Prop. XXI. Theor.

Anguli in eodem circuli segmento sunt inter se æquales.

SIT circulus A B Γ Δ, & in eodem segmento B A E Δ anguli sint B A Δ, B E Δ: dico eos inter se esse æquales.

Sumatur enim [per 1. 3.] circuli A B Γ Δ centrum quod sit Z, jungantur B Z, Z Δ.

Quoniam autem angulus B Z Δ est ad centrum, angulus vero B A Δ ad circumferentiam, & circumferentiam eandem B Γ Δ habent pro basi, erit [per 20. 3.] angulus B Z Δ duplus anguli B A Δ. eadem ratione angulus B Z Δ duplus est etiam anguli B E Δ: ergo angulus B A Δ [per 7. ax.] angulo B E Δ æqualis erit.



Anguli igitur in eodem circuli segmento sunt inter se æquales. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ἔχουσι δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστὶ διπλασίων· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

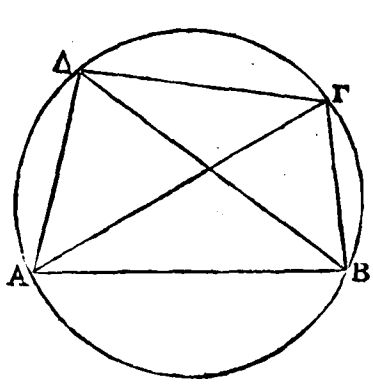
Prop. XXII. Theor.

Quadrilaterorum, quæ circulis inscribuntur, anguli oppositi sunt duobus rectis æquales.

SIT circulus A B Γ Δ, & in ipso quadrilaterum A B Γ Δ: dico angulos ipsius oppositos duobus rectis esse æquales.

Jungantur A Γ, B Δ.

Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli sunt [per 32. 1.] duobus rectis æquales, erunt trianguli A B Γ tres anguli Γ A B, A B Γ, B Γ A æquales duobus rectis. sed angulus Γ A B est [per 21. 3.] æqualis angulo B Δ Γ, in eodem enim sunt segmento B A Δ Γ, & angulus A Γ B æqualis ipsi A Δ B, quod sint in eodem A Δ Γ B segmento: totus igitur angulus A Δ Γ angulis B A Γ, A Γ B est æqualis. communis apponatur A B Γ angulus: sunt igitur anguli A B Γ, B A Γ, A Γ B, angulis A B Γ, A Δ Γ æquales. sed A B Γ, B A Γ, A Γ B sunt duobus rectis æquales: ergo & anguli A B Γ, A Δ Γ sunt duobus rectis æquales. similiter ostendemus angulos quoque B A Δ, Δ Γ B duobus rectis esse æquales.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ ΑΒΓ αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΒΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ σὺν τῇ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστί. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ σὺν ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Τῶν

Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quadrilaterorum igitur, quæ circulis inſcribuntur, anguli oppoſiti ſunt duobus rectis æquales. quod erat demonſtrandum.

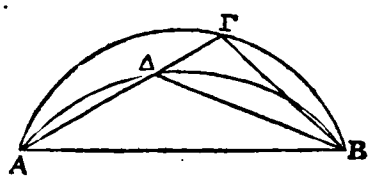
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσονται πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη.

Prop. XXIII. Theor.

Super eadem recta linea duo circulorum ſegmenta ſimilia & inæqualia ex eadem parte non conſtituentur.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΔΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.



Ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΒ τμῆμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσονται πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim fieri poteſt, ſuper eadem recta linea AB duo circulorum ſegmenta ſimilia & inæqualia conſtituantur ex eadem parte AΓB, AΔB, ducaturque AΔΓ, & jungantur ΓB, ΔB.

Quoniam igitur ſegmentum AΓB ſimile eſt ſegmento AΔB, ſimilia autem circulorum ſegmenta ſunt [per 11. def. 3.] quæ angulos capiunt æquales; erit AΓB angulus æqualis angulo AΔB, exterior interiori, quod [per 16. 1.] fieri non poteſt.

Non igitur ſuper eadem recta linea duo circulorum ſegmenta ſimilia & inæqualia ex eadem parte conſtituentur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

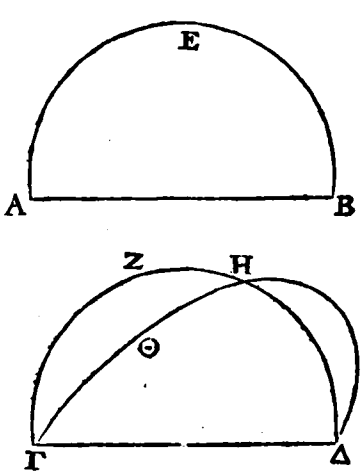
Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Prop. XXIV. Theor.

Super æqualibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

Ἐστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα τῷ ΓΖΔ τμήματι.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΕΒ τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ, καὶ τεθειμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἀλλὰ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ. κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ ΓΘΗΔ τὸν ΓΖΔ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.



Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt enim ſuper æqualibus rectis lineis AB, ΓΔ ſimilia circulorum ſegmenta AEB, ΓZΔ: dico ſegmentum AEB ſegmento ΓZΔ eſſe æquale.

Segmento enim AEB congruente ſegmento ΓZΔ, & poſito puncto quidem A ſuper Γ, recta vero linea AB ſuper ΓΔ, congruet & B punctum puncto Δ, propterea quod AB ipſi ΓΔ ſit æqualis: congruente autem recta linea AB rectæ ΓΔ, congruet & AEB ſegmentum ſegmento ΓZΔ. ſi enim AB congruat ipſi ΓΔ, ſegmentum vero AEB ſegmento ΓZΔ non congruat, ſitum mutet ut ΓΘHΔ. ſed circulus circulum in pluribus quam duobus punctis [per 10. 3.] non ſecat: at vero circulus ΓΘHΔ circulum ΓZΔ ſecat in pluribus punctis quam duobus, videlicet in punctis Γ, H, Δ, quod fieri non poteſt. congruente igitur recta linea AB rectæ ΓΔ, non poteſt non congruere AEB ſegmento ΓZΔ: quare congruet, & proinde ipſi æquale erit.

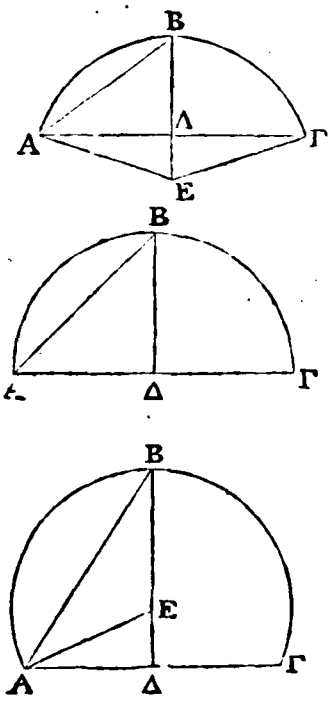
Super æqualibus igitur rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXV. PROBL.

Dato circuli ſegmento, deſcribere circulum cujus eſt ſegmentum.

SIT datum circuli ſegmentum ABΓ: oportet autem circulum deſcribere, cujus ABΓ eſt ſegmentum.

Secetur AΓ [per 10. 1.] bifariam in Δ, & à puncto Δ ipſi AΓ ad rectos angulos [per 11. 1.] ducatur ΔB, & jungatur AB: angulus igitur ABΔ vel major eſt angulo BAΔ, vel æqualis, vel minor.



Sit primum major, & ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A, conſtituatur [per 23. 1.] angulus BAE æqualis angulo ABΔ, & ΔB producatur ad E, jungaturque EΓ. quoniam igitur angulus ABE eſt æqualis angulo BAE, erit recta linea BE [per 6. 1.] ipſi EA æqualis. & quoniam AΔ eſt æqualis ΔΓ, communis autem ΔE, duæ AΔ, ΔE duabus ΓΔ, ΔE ſunt æquales, altera alteri; & angulus AΔE æqualis angulo ΓΔE, rectus enim eſt uterque: ergo & baſis AE [per 4. 1.] baſi EΓ eſt æqualis. ſed oſtenſa eſt AE æqualis EB: quare & BE ipſi EΓ eſt æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE, EB, EΓ inter ſe ſunt æquales: centro igitur E intervallo autem æquali uni ipſarum AE, EB, EΓ circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & circulus deſcriptus erit. quare circuli ſegmento dato deſcriptus eſt [per 9. 3.] circulus, cujus eſt ſegmentum. ſed & illud conſtat, ſegmentum ABΓ ſemicirculo minus eſſe; propterea quod E centrum ipſius cadit extra.

Similiter & ſi angulus ABΔ ſit æqualis angulo BAΔ, facta AΔ æquali utrivis ipſarum BΔ, ΔΓ, erunt tres rectæ lineæ ΔA, ΔB, ΔΓ inter ſe æquales, atque erit [per 9. 3.] Δ circuli completi centrum, & ſegmentum ABΓ ſemicirculus.

Si vero angulus ABΔ minor ſit angulo BAΔ, & conſtituatur ad rectam lineam BA & ad punctum in ea datum A angulus BAE æqualis angulo ABΔ, intra ſegmentum ABΓ erit centrum E, in ipſa ΔB, atque erit ABΓ ſegmentum ſemicirculo majus.

Circuli igitur ſegmento dato, deſcriptus eſt circulus cujus eſt ſegmentum. quod erat faciendum.

PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus inſiſtunt circumferentiis, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant.

SInt æquales circuli ABΓ, ΔEZ, & in ipſis æquales anguli, ad centra quidem BHΓ,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Κύκλε τμήματος δοθέντος, περιγράψαι τὸν κύκλον ὅπερ ἐστὶ τμῆμα.

ΕΣτω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλε, τὸ ABΓ· δεῖ δὴ περιγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τὸ ABΓ τμῆμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ AΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ AΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔB, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AB· ἡ μὲν ὑπὸ ABΔ ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ BAΔ ἤτοι μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων.

Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ BA εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A, τῇ ὑπὸ ABΔ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAE, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ E ἡ ΔB, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ BAE, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ BE εὐθεῖα τῇ EA. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔE, δύο δὴ αἱ AΔ, ΔE δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΔE ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AΔE γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔE ἴση ἐστὶν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ βάσις ἄρα ἡ AE βάσει τῇ ΓE ἴση ἐστίν. ἀλλὰ ἡ AE τῇ EB ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ BE ἄρα τῇ ΓE ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ AE, EB, EΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ E, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν AE, EB, EΓ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος. κύκλε ἄρα τμήματος δοθέντος, περιγεγραπται ὁ κύκλος. καὶ δῆλον ὡς τὸ ABΓ τμῆμα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τὸ, τὸ E κέντρον αὐτοῦ ἐκτὸς τυγχάνειν.

Ὁμοίως δὲ κἂν ᾖ ἡ ὑπὸ ABΔ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ BAΔ, τουτέστιν αἱ AΔ ἴσης οὔσης ἑκατέρᾳ τῶν BΔ, ΔΓ, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔA, ΔB, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, καὶ δῆλον ὅτι ἔσται τὸ ABΓ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ ABΔ ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ BAΔ, καὶ συνιστάμενα πρὸς τῇ BA εὐθείᾳ, καὶ τῷ A σημείῳ, τῇ ὑπὸ ABΔ γωνίᾳ ἴσην, ἐντὸς τοῦ ABΓ τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔB, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ABΓ τμῆμα μεῖζον ἡμικυκλίου.

Κύκλε ἄρα τμήματος δοθέντος, περιγεγραπται ὁ κύκλος, ὅπερ ἐστὶ τὸ τμῆμα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

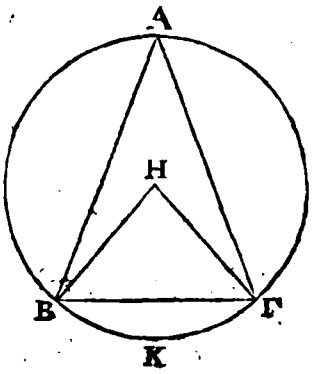
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

ΕΣτωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ABΓ, ΔEZ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ

ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

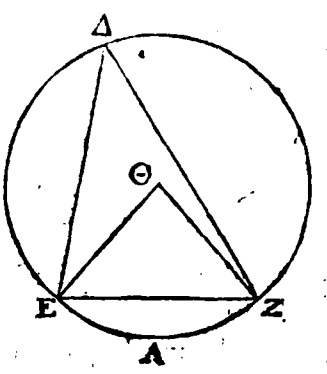
Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ, ΘΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Η γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι, καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ· τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι. ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος, λοιπὸν ἄρα ΒΚΓ τμῆμα λοιπῷ ΕΛΖ ἴσον· ἡ ἄρα ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση.



Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Jungantur enim ΒΓ, ΕΖ.

Et quoniam æquales ſunt ΑΒΓ, ΔΕΖ circuli, erunt & quæ ex centris æquales: duæ igitur ΒΗ, ΗΓ duabus ΕΘ, ΘΖ ſunt æquales, & angulus ad Η æqualis angulo ad Θ: ergo & baſis ΒΓ [per 4. 1.] baſi ΕΖ eſt æqualis. & quoniam æqualis eſt angulus ad Α angulo ad Δ, ſegmentum ΒΑΓ ſimile erit [per 11. def. 3.] ſegmento ΕΔΖ, & ſunt ſuper æquales rectas lineas ΒΓ, ΕΖ; quæ autem ſuper æquales rectas lineas ſimilia ſunt circulorum ſegmenta [per 24. 3.] ſunt inter ſe æqualia: ſegmentum igitur ΒΑΓ ſegmento ΕΔΖ eſt æquale. ſed & totus ΑΒΓ circulus æqualis eſt toti ΔΕΖ: reliquum igitur ſegmentum ΒΚΓ reliquo ΕΛΖ eſt æquale, circumferentia igitur ΒΚΓ circumferentiæ ΕΛΖ æqualis erit.



In æqualibus igitur circulis, æquales anguli æqualibus inſiſtunt circumferentiis, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant. quod erat demonſtrandum.

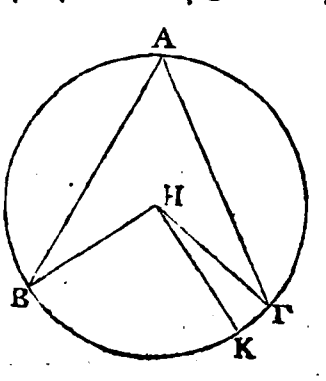
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ὑπὸ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Prop. XXVII. Theor.

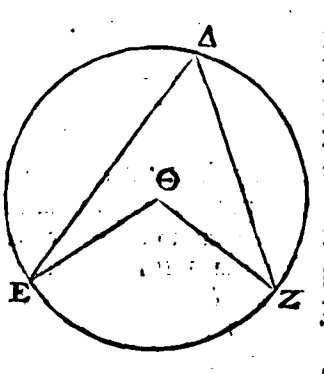
In æqualibus circulis anguli qui æqualibus inſiſtunt circumferentiis ſunt inter ſe æquales, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant.

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, πρὸς μὲν ταῖς Η, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.



Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, φανερόν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν. εἰ δὲ ἄ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η, τῇ ὑπὸ ΕΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΚ· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις

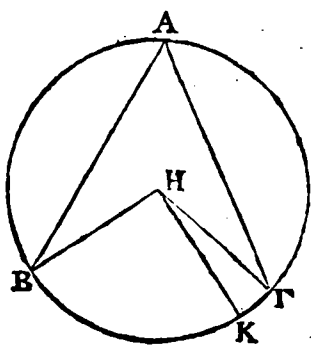
IN æqualibus enim circulis ΑΒΓ, ΔΕΖ æqualibus circumferentiis ΒΓ, ΕΖ inſiſtant anguli ad centra quidem ΒΗΓ, ΕΘΖ, ad circumferentias vero ΒΑΓ, ΕΔΖ: dico angulum ΒΗΓ angulo ΕΘΖ, & angulum ΒΑΓ angulo ΕΔΖ æqualem eſſe.



Si enim angulus ΒΗΓ æqualis ſit angulo ΕΘΖ, manifeſtum eſt [per 20. 3.] angulum quoque ΒΑΓ angulo ΕΔΖ eſſe æqualem. ſin minus, unus ipſorum eſt major. ſit major ΒΗΓ, & conſtituatur [per 23. 1.] ad rectam lineam ΒΗ, & ad punctum in ipſa Η angulo ΕΘΖ æqualis angulus ΒΗΚ; æquales autem anguli [per 26. 3.] æqualibus inſiſtunt circumferentiis, quando ad

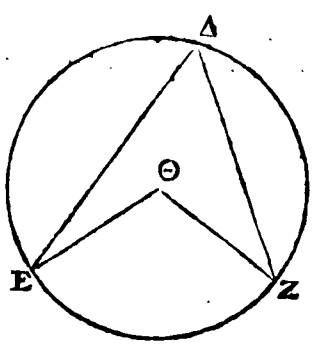
centra

centra fuerint: ergo circumferentia BK æqualis eſt circumferentiæ EZ. ſed circumferentia EZ æqualis eſt ipſi BΓ: ergo & BK ipſi BΓ eſt æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. non eſt igitur inæqualis angulus BHΓ angulo EΘZ: ergo eſt æqualis. eſt autem angulus ad A [per 20. 3.] dimidius anguli BHΓ, anguli vero EΘZ dimidius qui ad Δ: angulus igitur qui ad A angulo qui ad Δ eſt æqualis.



In æqualibus igitur circulis anguli qui æqualibus inſiſtunt circumferentiis ſunt inter ſe æquales, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant. quod erat demonſtrandum.

ἴσων· ἴση ἄρα ἡ BK περιφέρεια τῇ EZ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ EZ τῇ BΓ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ BK ἄρα τῇ BΓ ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ BHΓ γωνία τῇ ὑπὸ EΘZ· ἴση ἄρα. καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ BHΓ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ A, τῆς δὲ ὑπὸ EΘZ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ A γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ.



Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν ἐάντε πρὸς τοῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVIII. Theor.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

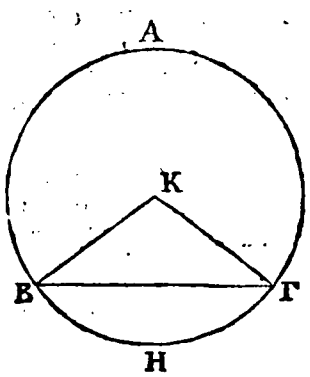
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

SInt æquales circuli ABΓ, ΔEZ, & in ipſis æquales rectæ lineæ BΓ, EZ, quæ circumferentias quidem auferant majores BAΓ, EΔZ, minores vero BHΓ, EΘZ: dico circumferentiam BAΓ majorem majori circumferentiæ EΔZ, & minorem circumferentiam BHΓ minori EΘZ æquales eſſe.

Sumantur enim [per 1. 3.] centra circulorum K, Λ, junganturque BK, KΓ, EΛ, ΛZ.

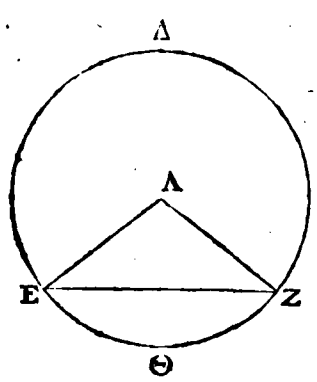
Quoniam autem circuli ſunt æquales, erunt & quæ ex centris æquales: duæ igitur BK, KΓ ſunt æquales duabus EΛ, ΛZ, & baſis BΓ æqualis eſt baſi EZ: ergo angulus BKΓ [per 8. 1.] angulo EΛZ eſt æqualis. æquales autem anguli [per 26. 3.] æqualibus inſiſtunt circumferentiis, quando ad centra fuerint: quare circumferentia BHΓ æqualis eſt circumferentiæ EΘZ. ſed & totus ABΓ circulus toti ΔEZ eſt æqualis: reliqua igitur circumferentia BAΓ reliquæ EΔZ æqualis erit.



Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. quod erat demonſtrandum.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ABΓ, ΔEZ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ BΓ, EZ, τὰς μὲν BAΓ, EΔZ περιφερείας μείζονας ἀφαιρούσας, τὰς δὲ BHΓ, EΘZ ἐλάττονας· λέγω ὅτι ἡ μὲν BAΓ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ EΔZ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ BHΓ ἐλάττων περιφέρεια ἴση τῇ EΘZ ἐλάττονι.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω τὰ K, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BK, KΓ, EΛ, ΛZ.



Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ BK, KΓ δυσὶ ταῖς EΛ, ΛZ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ BΓ βάσει τῇ EZ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ BKΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EΛZ ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ περιφέρεια BHΓ τῇ EΘZ περιφερείᾳ. ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ABΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔEZ κύκλῳ ἴσος· λοιπὴ ἄρα ἡ BAΓ περιφέρεια λοιπῇ τῇ EΔZ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν.

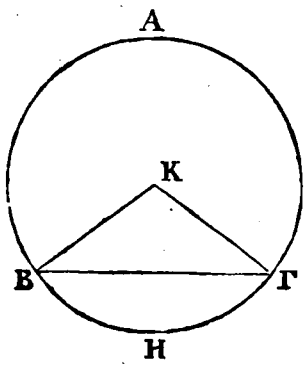
Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις οἱ ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσας εὐθείας ὑποτείνουσιν.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ εὐθεῖα τῇ ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν.

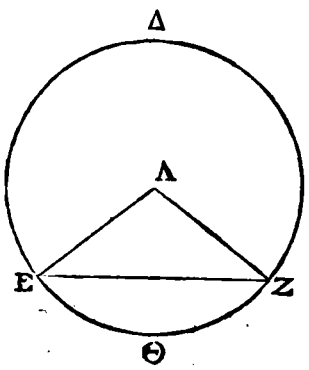
Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσας εὐθείας ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXIX. THEOR.

In æqualibus circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

SInt æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, & in ipſis æquales ſumantur circumferentiæ ΒΗΓ, ΕΘΖ, & ΒΓ, ΕΖ jungantur: dico rectam lineam ΒΓ rectæ ΕΖ æqualem eſſe.

Sumantur enim centra circulorum Κ, Λ, & jungantur ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.



Quoniam igitur circumferentia ΒΗΓ eſt æqualis circumferentiæ ΕΘΖ, erit [per 27. 3.] & angulus ΒΚΓ angulo ΕΛΖ æqualis. & quoniam circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ ſunt æquales, & quæ ex centris æquales erunt: duæ igitur ΒΚ, ΚΓ ſunt æquales duabus ΕΛ, ΛΖ, & æquales angulos continent: quare baſis ΒΓ [per 4. 1.] baſi ΕΖ eſt æqualis.

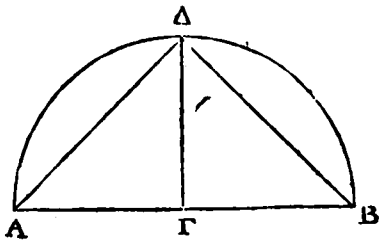
In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ ΑΔΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΔΒ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ· δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ βάσις ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσας εὐθείας ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καὶ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΔΒ περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ περιφερείᾳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam ſecare.

SIT data circumferentia ΑΔΒ: oportet ΑΔΒ circumferentiam bifariam ſecare.

Jungatur ΑΒ, & [per 10. 1.] bifariam ſecetur in Γ: à puncto autem Γ ipſi ΑΒ [per 11. 1.] ad rectos angulos ducatur ΓΔ, & jungantur ΑΔ, ΔΒ.

Quoniam igitur ΑΓ eſt æqualis ΓΒ, communis autem ΓΔ, duæ ΑΓ, ΓΔ duabus ΒΓ, ΓΔ ſunt æquales. & angulus ΑΓΔ æqualis angulo ΒΓΔ, rectus enim eſt uterque: ergo baſis ΑΔ [per 4. 1.] baſi ΔΒ eſt æqualis. æquales autem rectæ lineæ [per 28. 3.] circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori; & eſt utraque ipſarum ΑΔ, ΔΒ circumferentiarum ſemicirculo minor: quare circumferentia ΑΔ circumferentiæ ΔΒ æqualis erit.

Data igitur circumferentia bifariam ſecta eſt. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

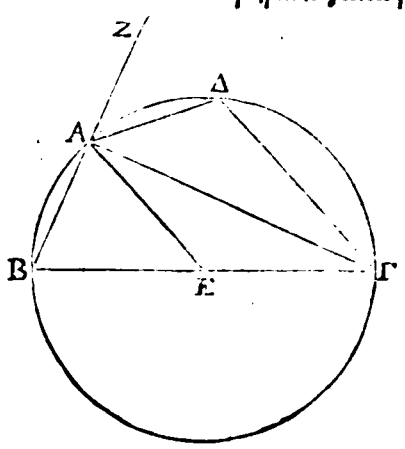
Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulo, angulus qui in ſemicirculo rectus eſt: qui vero in majori ſegmento minor eſt recto: & qui in mi-

nori major recto. & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est; minoris vero segmenti angulus recto minor.

SIT circulus ABΓΔ, cujus diameter BΓ, centrum autem E, & jungantur BA, AΓ, AΔ, ΔΓ: dico angulum quidem, qui est in semicirculo BAΓ, rectum esse; qui vero in segmento ABΓ majore semicirculo, videlicet angulum ABΓ, minorem esse recto; & qui in segmento AΔΓ minore semicirculo, [hoc est angulum AΔΓ] recto majorem esse.



Jungatur AE, & BA ad Z producatur.

Itaque quoniam BE est æqualis EA, erit & angulus EAB [per 5. 1.] angulo EBA æqualis. rursus, quoniam EA est æqualis EΓ, & angulus AΓE angulo ΓAE æqualis erit: totus igitur angulus BAΓ est æqualis duobus angulis ABΓ, AΓB. est autem & angulus ZAΓ, extra triangulum ABΓ, [per 32. 1.] duobus ABΓ, AΓB æqualis: angulus igitur BAΓ est æqualis angulo ZAΓ, ac propterea [per 10. def. 1.] uterque ipsorum rectus: quare in semicirculo BAΓ angulus BAΓ rectus est.

ET quoniam trianguli ABΓ duo anguli ABΓ, BAΓ [per 17. 1.] duobus rectis sunt minores, rectus autem BAΓ; erit ABΓ angulus recto minor, atque est in segmento ABΓ majore semicirculo.

CUM autem in circulo quadrilaterum sit ABΓΔ, quadrilaterorum vero, qui in circulis describuntur, anguli oppositi [per 22. 3.] duobus rectis sint æquales; erunt ABΓ, AΔΓ anguli æquales duobus rectis. & angulus ABΓ minor est recto: reliquus igitur AΔΓ recto major erit, atque est in segmento AΔΓ minore semicirculo.

DICO præterea majoris segmenti angulum, comprehensum à circumferentia ABΓ & recta linea AΓ, recto esse majorem; angulum vero minoris segmenti, comprehensum à circumferentia AΔΓ & recta linea AΓ, recto minorem. quod quidem perspicue apparet. Quoniam enim angulus à rectis lineis BA, AΓ comprehensus rectus est, erit & comprehensus à circumferentia ABΓ & recta linea AΓ major recto. rursus, quoniam angulus comprehensus à rectis lineis ΓA, AZ rectus est; erit angulus, qui comprehenditur à recta ΓA & AΔΓ circumferentia, minor recto.

In circulo igitur, angulus qui in semicirculo rectus est: qui vero in majore segmento minor est recto: & qui in minore major. & insuper majoris segmenti angulus est recto major, minoris vero segmenti minor. quod erat demonstrandum.

ALITER.

Demonstratur angulus BAΓ rectum esse.

καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ. λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΕ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΓ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστι.

ΚΑΙ ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, ἡ ἐστιν ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. καὶ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ ἔστιν ἐν τῷ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΑΔΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἔστιν αὐτόθεν φανερόν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθή γωνία ἐστίν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΖ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΔΓ περιφερείας ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἄρα, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ

διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση γὰρ δυσὶ τοῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ διπλασίονές εἰσι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστι· λέγω τὴν ἐπὶ τῷ κέντρῳ ἐφεξῆς τῇ αὐτῇ ἴσην εἶναι. ὅταν δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ἴσαι ὦσιν, ὀρθαὶ εἰσιν.

quoniam enim angulus AEΓ duplus eſt anguli BAE, etenim duobus interioribus & oppoſitis [per 32. 1.] eſt æqualis: eſt autem & AEB duplus ipſius BAΓ: anguli AEB, AEΓ dupli erunt anguli BAΓ. ſed AEB, AEΓ anguli [per 13. 1.] duobus rectis ſunt æquales: ergo angulus BAΓ rectus eſt. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Hinc manifeſtum eſt, quod ſi unus angulus trianguli ſit æqualis duobus reliquis, eſt rectus: propterea quod ejus angulus deinceps iiſdem eſt æqualis. quando autem anguli deinceps ſunt æquales, [per 10. def. 1.] ſunt recti.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσας ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

PROP. XXXII. THEOR.

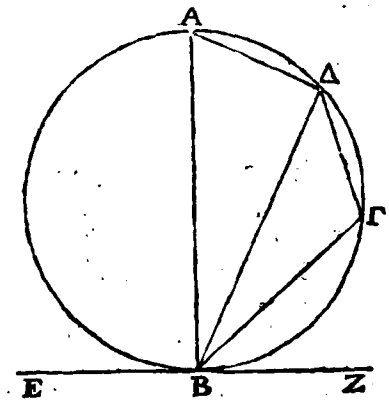
Si recta linea circulum contingat, à contactu autem ducatur recta linea circulum ſecans; anguli quos hæc cum contingente facit æquales erunt iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου διήχθω τις εὐθεῖα διὰ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης ἴσας ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΑΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, ἀπὸ δὲ τοῦ κατὰ τὸ Β ἀφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ, τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπί τινα κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσας ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



CIrculum enim ABΓΔ contingat recta linea EZ in B, & à puncto B per circulum ABΓΔ ducatur recta linea BΔ ſecans illum utcunque: dico angulos quos BΔ cum contingente EZ facit æquales eſſe iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt; hoc eſt, angulum ZBΔ eſſe æqualem angulo qui conſtituitur in ΔAB ſegmento, angulum vero EBΔ æqualem angulo qui in ſegmento ΔΓB conſtituitur.

Ducatur enim [per 11. 1.] à puncto B ipſi EZ ad rectos angulos BA, & in circumferentia BΔ ſumatur quodvis punctum Γ, junganturque AΔ, ΔΓ, ΓB.

Quoniam igitur circulum ABΓΔ contingit recta linea EZ in puncto B, & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta eſt BA, erit [per 19. 3.] in ipſa BA centrum circuli ABΓΔ: angulus igitur AΔB in ſemicirculo [per 31. 3.] eſt rectus; reliqui igitur anguli BAΔ, ABΔ uni recto ſunt æquales. eſt autem [per conſtr.] ABZ rectus: ergo [per 10. ax.] angulus ABZ æqualis eſt angulis BAΔ, ABΔ. communis auferatur ABΔ: reliquus igitur ΔBZ ei qui in alterno circuli ſegmento conſiſtit, videlicet angulo BAΔ, eſt æqualis. & quoniam in circulo quadrilaterum eſt ABΓΔ, anguli ejus oppoſiti [per 22. 3.] æquales ſunt duobus rectis; erunt igitur ΔBZ, ΔBE anguli [per 13. 1.] angulis BAΔ, BΓΔ æquales, è quibus BAΔ oſtenſus eſt æqualis ipſi ΔBZ: ergo reliquus ΔBE ei qui in alterno circuli ſegmento ΔΓB conſtituitur, videlicet angulo ΔΓB, æqualis erit.

Si igitur recta linea circulum contingat, à contactu autem ducatur recta linea ſecans; anguli quos hæc cum contingente facit æquales erunt iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXXIII. THEOR.

Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

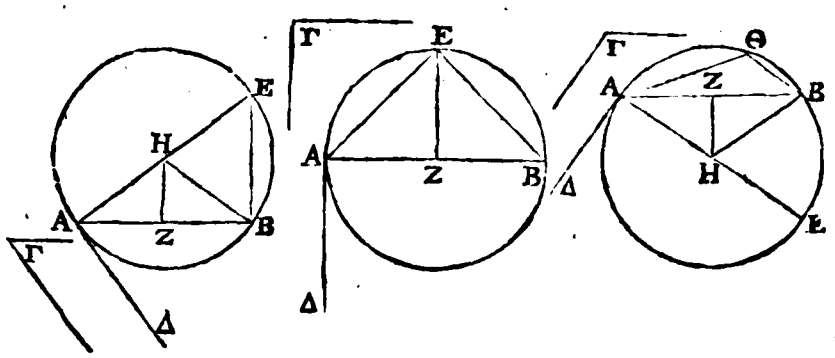
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Επὶ τ δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλυ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

SIT data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus qui ad Γ: itaque oportet ſuper data recta linea AB deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem angulo qui eſt ad Γ. angulus igitur ad Γ vel eſt acutus, vel rectus, vel obtuſus.

Sit primum acutus, ut in prima figura, & ad rectam lineam AB & ad punctum in ea A conſtituatur [per 23. 1.] angulus BAΔ angulo qui eſt ad Γ æqualis: acutus igitur angulus eſt BAΔ & à puncto A ipſi AΔ [per 11. 1.] ad rectos angulos ducatur AE, ſecetur autem [per 10. 1.] AB bifariam in Z, atque à puncto Z ducatur ZH ad rectos angulos ipſi AB, & HB jungatur. quoniam igitur AZ eſt æqualis ZB, communis autem ZH, duæ AZ, ZH duabus ZB, ZH ſunt æquales, & angulus AZH æqualis angulo HZB: ergo baſis AH [per 4. 1.] baſi HB eſt æqualis. itaque centro H, intervallo autem AH, circulus deſcriptus tranſibit etiam per B. deſcribatur, & ſit ABE, jungaturque EB. Quoniam igitur à puncto A extremitate diametri AE ipſi AE ad rectos angulos ducta eſt AΔ, ipſa AΔ [per 16. 3.] circulum continget. & quoniam circulum ABE contingit recta linea AΔ, & à contactu qui eſt ad A in circulum ABE ducta eſt recta linea AB; erit [per 32. 3.] angulus ΔAB æqualis angulo qui in alterno circuli ſegmento conſtituitur, videlicet ipſi AEB. ſed angulus ΔAB angulo qui ad Γ eſt æqualis: ergo & angulus ad Γ angulo AEB æqualis erit. Super data igitur recta linea AB ſegmentum circuli deſcriptum eſt AEB, quod capiat angulum AEB, dato angulo qui ad Γ æqualem.

Sit deinde angulus qui ad Γ rectus: & oporteat rurſus ſuper rectam lineam AB deſcribere circuli ſegmentum, quod capiat angulum æqualem recto angulo qui eſt ad Γ. Conſtituatur enim rurſus angulo recto qui ad Γ [per 23. 1.] æqualis angulus BAΔ, ut in ſecunda figura; ſeceturque AB [per 10. 1.] bifariam in Z, & centro Z intervallo autem æquali alterutri ipſarum AZ, ZB circulus deſcribatur AEB. Ergo AΔ recta linea [per 16. 3.] circulum ABE contingit, propterea quod rectus eſt qui ad A angulus. & angulus BAΔ æqualis angulo, qui eſt in ſegmento AEB; rectus enim & ipſe eſt [per



Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ· δεῖ δὴ ὅλως τ δοθείσης εὐθείας τ AB γράψαι τμῆμα κύκλυ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ. ἡ γὰρ πρὸς τῷ Γ ἤτοι ὀξεῖά ἐστιν, ἢ ὀρθὴ, ἢ ἀμβλεῖα.

Εστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς ὅλως τ πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAΔ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BAΔ. καὶ ἤχθω τῇ AΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ AE, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ ἤχθω ἀπὸ τ Z σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ ZH, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HB. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB, κοινὴ δὲ ἡ ZH, δύο δὴ αἱ AZ, ZH δυσὶ τ ZB, ZH ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AZH τῇ ὑπὸ HZB ἴση· βάσις ἄρα ἡ AH βάσει τῇ HB ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ H, διαστήματι δὲ τῷ AH, κύκλος γεγραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ B. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ABE, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EB. ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τ AE διαμέτρου, ἀπὸ δὲ A, τῇ AE πρὸς ὀρθὰς ἐστιν ἡ AΔ, ἡ AΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τ A ABE κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα ἡ AΔ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἁφῆς ἐπὶ τὸν ABE κύκλον διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ AB· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔAB γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ AEB. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔAB τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ AEB. Επὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τμῆμα κύκλυ γέγραπται τὸ AEB, δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ AEB ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Αλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ· καὶ δέον πάλιν ἔστω ἐπὶ τῆς AB γράψαι τμῆμα κύκλυ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ. Συνεστάτω δὴ πάλιν τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAΔ, ὡς ἔχει ἡ δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Z, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν AZ, ZB, κύκλος γεγράφθω ὁ AEB· ἐφάπτεται ἄρα ἡ AΔ εὐθεῖα τοῦ ABE κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ A γωνίαν. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ BAΔ γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμήματι ἴση, ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ

μείζων οὖσα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση. Γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Λοιπὸν δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεῖα ἔστω, καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΖΗ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΑΗ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. εἰληφθω ὡς ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ τῇ ΑΕ διαμέτρου ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάψεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. Καὶ δοτὸ τοῦ κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς δήκται ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἐπὶ δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ γέγραπται τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

31. 3.] in ſemicirculo conſiſtens. ſed anguli BAΔ æqualis eſt ei qui ad Γ. Deſcripta igitur eſt rurſus ſuper recta linea AB ſegmentum circuli AEB, quod capiat angulum angulo recto qui ad Γ æqualem.

Denique ſit angulus ad Γ obtuſus, & ad rectam lineam AB & ad punctum A conſtituatur [per 23. 1.] ipſi æqualis angulus BAΔ, ut in tertia figura; & ipſi AΔ rectæ lineæ ad rectos angulos [per 11. 1.] ducatur AE, ſeceturque rurſus AB [per 10. 1.] bifariam in Z, ipſi vero AB ducatur ad rectos angulos ZH, & jungatur HB. quoniam autem AZ eſt æqualis ZB, communis autem ZH, duæ ZH, AZ duabus BZ, ZH ſunt æquales, & angulus AZH angulo BZH æqualis: baſis igitur AH [per 4. 1.] eſt æqualis baſi HB. quare centro H, intervallo autem AH, circulus deſcriptus etiam per B tranſibit. tranſeat ut AEB. Et quoniam diametro AE, ab extremitate ad rectos angulos ducta eſt AΔ, ipſa AΔ [per 16. 3.] circulum AEB continget. & à contactu qui eſt ad A ducta eſt AB: quare angulus BAΔ ei qui in alterno circuli ſegmento AΘB conſtituitur eſt æqualis. ſed BAΔ angulus æqualis eſt angulo qui ad Γ: angulus igitur qui in ſegmento AΘB angulo qui ad Γ æqualis erit. Ergo ſuper data recta linea AB deſcriptum eſt AΘB circuli ſegmentum, quod capiat angulum æqualem ei qui eſt ad Γ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὴ δοτὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΒΓ.

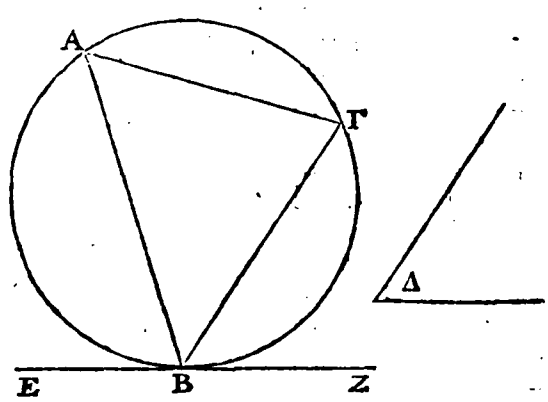
Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ δοτὸ τοῦ κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς δήκται ἡ ΒΓ· ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΓ ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμῆμα ἀφῄρηται τὸ ΒΑΓ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XXXIV. PROBL.

A dato circulo ſegmentum abſcindere, quod capiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

SIT datus circulus ABΓ, datus autem angulus rectilineus qui ad Δ: oportet à circulo ABΓ ſegmentum abſcindere, quod capiat angulum angulo qui ad Δ æqualem.



Ducatur [per 17. 3.] recta linea EZ contingens circulum ABΓ in puncto B, & ad rectam lineam ZE: & ad punctum in ea B conſtituatur [per 23. 1.] angulus ZBΓ angulo qui eſt ad Δ æqualis.

Quoniam igitur circulum ABΓ contingit recta linea EZ, & à contactu B ducta eſt BΓ, erit [per 32. 3.] angulus ZBΓ æqualis ei qui in BAΓ alterno circuli ſegmento conſtituitur. ſed ZBΓ angulus angulo qui ad Δ eſt æqualis: ergo & angulus qui in ſegmento BAΓ angulo qui ad Δ æqualis erit.

A dato igitur circulo ABΓ abſciſſum eſt ſegmentum BAΓ, quod capiat angulum dato angulo rectilineo qui eſt ad Δ æqualem. quod erat faciendum.

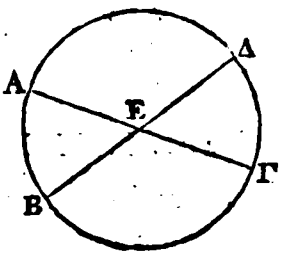
PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, rectangulum ſub ſegmentis unius comprehenſum æquale eſt ei quod ſub alterius ſegmentis comprehenditur.

IN circulo enim ABΓΔ duæ rectæ lineæ AΓ, BΔ ſeſe mutuo ſecent in puncto E: dico rectangulum comprehenſum ſub AE, EΓ æquale eſſe ei quod comprehenditur ſub ΔE, EB.

Si igitur AΓ, BΔ per centrum tranſeant, ita ut E ſit centrum circuli ABΓΔ; manifeſtum eſt, æqualibus exiſtentibus AE, EΓ, ΔE, EB, & rectangulum comprehenſum ſub AE, EΓ æquale eſſe ei quod ſub ΔE, EB comprehenditur.

Rectæ autem AΓ, ΔB non tranſeant per centrum, & ſumatur [per 1. 3.] centrum circuli ABΓΔ quod ſit Z, & à Z ad rectas lineas AΓ, ΔB [per 12. 1.] perpendiculares ducantur ZH, ZΘ, jungantúrque ZB, ZΓ, ZE.



Quoniam igitur recta linea HZ per centrum ducta rectam lineam AΓ non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, [per 3. 3.] & bifariam ipſam ſecabit: quare AH ipſi HΓ eſt æqualis. & quoniam recta linea AΓ ſecta eſt in partes æquales in puncto H, & in partes inæquales in E, erit [per 5. 2.] rectangulum ſub AE, EΓ comprehenſum una cum iplius HE quadrato æquale quadrato ex HΓ. commune addatur ex HZ quadratum: ergo rectangulum ſub AE, EΓ una cum iis quæ ex HE, HZ quadratis æquale eſt quadratis ex ΓH, HZ. ſed quadratis quidem ex EH, HZ æquale eſt [per 47. 1.] quadratum ex ZE; quadratis vero ex ΓH, HZ æquale quod ex ZΓ quadratum: rectangulum igitur ſub AE, EΓ una cum quadrato ex ZE æquale eſt quadrato ex ZΓ. eſt autem ZΓ æqualis ZB: ergo rectangulum ſub AE, EΓ una cum quadrato ex EZ æquale eſt ei quod ex ZB quadrato. eadem ratione & rectangulum ſub ΔE, EB una cum quadrato ex ZE æquale eſt quadrato ex ZB. oſtenſum autem eſt & rectangulum ſub AE, EΓ una cum quadrato ex ZE æquale ei quod ex ZB quadrato: ergo rectangulum ſub AE, EΓ una cum quadrato ex EZ æquale eſt rectangulo ſub ΔE, EB una cum quadrato ex ZE. commune auferatur quod ex ZE quadratum: reliquum igitur rectangulum ſub AE, EΓ reliquo ſub ΔE, EB rectangulo æquale erit.

Quare ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, rectangulum ſub ſegmentis unius

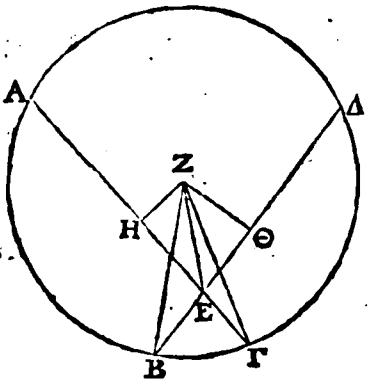
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΕΝ γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ ABΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ AΓ, BΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AE, EΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔE, EB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εἰ μὲν οὖν αἱ AΓ, BΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσίν, ὥστε τὸ E κέντρον εἶναι τοῦ ABΓΔ κύκλου· φανερὸν ὅτι, ἴσων οὐσῶν τῶν AE, EΓ, ΔE, EB, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔE, EB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐχέτωσαν δὴ αἱ AΓ, ΔB μὴ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ABΓΔ, ὃ ἔστω τὸ Z, καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὰς AΓ, ΔB εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ZH, ZΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZB, ZΓ, ZE.



Καὶ ἐπεὶ εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ HZ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν AΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ· ἴση ἄρα ἡ AH τῇ HΓ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ AΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ H, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ E, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AE, EΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς HE τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς HΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς HZ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AE, EΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν HE, HZ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓH, HZ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν EH, HZ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZE, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓH, HZ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AE, EΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZΓ. ἴση δὲ ἡ ZΓ τῇ ZB· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AE, EΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς EZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZB. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔE, EB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZB. ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZB· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AE, EΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔE, EB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ZE· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν AE, EΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔE, EB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχό-

μενον

μένου ὀρθογωνίου ἴσου ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

comprehenſum æquale eſt ei quod ſub alterius ſegmentis comprehenditur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

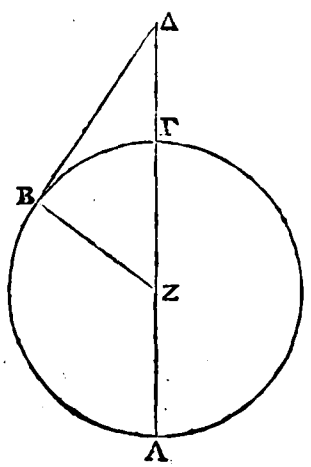
Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπ' αὐτοῦ δὲ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται· ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Prop. XXXVI. Theor.

Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera vero contingat; rectangulum, comprehenſum ſub tota ſecante & exteriore ſegmento inter punctum & convexam circumferentiam, æquale erit ei quod à contingente fit quadrato.

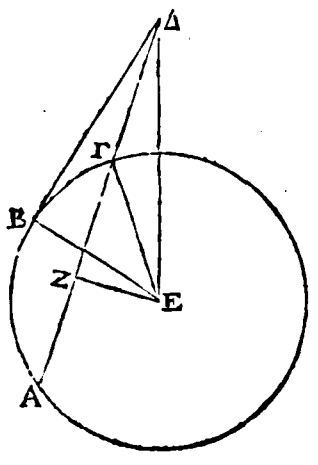
Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἐφαπτέσθω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ. ἡ ΔΓΑ ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστίν, ἢ οὔ.

Ἐχω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐφαπτομένης.



EXtra circulum enim ΑΒΓ ſumatur aliquod punctum Δ, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ ΔΓΑ, ΔΒ; & ΔΓΑ quidem circulum ΑΒΓ ſecet; ΔΒ vero contingat: dico rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ æquale eſſe quadrato, quod fit ex ΔΒ. vel igitur ΔΓΑ per centrum tranſit, vel non.

Tranſeat primum per centrum circuli ΑΒΓ, quod ſit Ζ, & jungatur ΖΒ: erit igitur [per 18. 3.] angulus ΖΒΔ rectus. itaque, quoniam recta linea ΑΓ bifariam ſecta eſt in Ζ & ipſi adjicitur ΓΔ, rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΖΓ æquale erit [per 6. 2.] ei quod fit ex ΖΔ quadrato. æqualis autem eſt ΖΓ ipſi ΖΒ: ergo rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΖΒ æquale eſt quadrato ex ΖΔ. ſed quadratum ex ΖΔ [per 47. 1.] eſt æquale quadratis ipſarum ΖΒ, ΒΔ, rectus enim eſt angulus ΖΒΔ: rectangulum igitur ſub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΖΒ æquale eſt ipſarum ΖΒ, ΒΔ quadratis. commune auferatur quadratum ex ΖΒ: ergo reliquum ſub ΑΔ, ΔΓ rectangulum æquale erit quadrato quod fit à contingente ΔΒ.

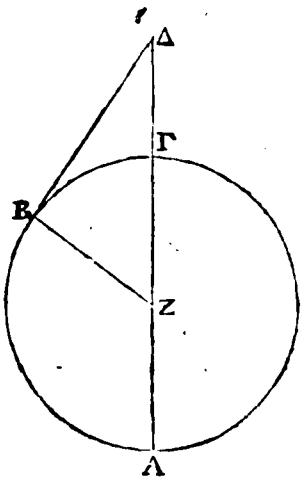


Ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. κοινὸν πρόσκειται

Sed ΔΓΑ non tranſeat per centrum circuli ΑΒΓ, ſumaturque centrum Ε, & ab ipſo Ε ad ΑΓ [per 12. 1.] perpendicularis agatur ΕΖ, & jungantur ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ: rectus igitur eſt ΕΖΔ angulus. & quoniam recta linea ΕΖ per centrum ducta rectam lineam ΑΓ non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, [per 3. 3.] & bifariam ipſam ſecabit: quare ΑΖ ipſi ΖΓ eſt æqualis. rurſus, quoniam recta linea ΑΓ bifariam ſecta eſt in Ζ atque ipſi adjicitur ΓΔ, erit [per 6. 2.] rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΖΓ æquale quadrato ex ΖΔ. com-

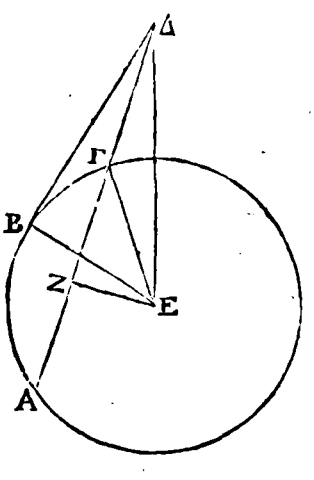
mune

mune addatur ex ΖΕ quadratum: rectangulum igitur ſub ΑΔ, ΔΓ una cum quadratis ex ΓΖ, ΖΕ eſt æquale quadratis ex ΔΖ, ΖΕ. ſed quadratis quidem ex ΔΖ, ΖΕ æquale eſt [per 47. 1.] ex ΔΕ quadratum, etenim rectus eſt angulus ΕΖΔ; quadratis vero ex ΓΖ, ΖΕ æquale eſt quadratum ex ΓΕ: ergo rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΓΕ eſt æquale quadrato ex ΕΔ. æqualis autem eſt ΓΕ ipſi ΕΒ: rectangulum igitur ſub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΕΒ æquale eſt ei quod ex ΕΔ fit quadrato. ſed quadrato ex ΕΔ æqualia ſunt [per 47. 1.] quadrata ex ΕΒ, ΒΔ, ſiquidem rectus eſt angulus ΕΒΔ: ergo rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΕΒ æquale eſt eis quæ ex ΕΒ, ΒΔ fiunt quadratis. commune auferatur quadratum ex ΕΒ: reliquum igitur ſub ΑΔ, ΔΓ rectangulum quadrato quod fit ex ΔΒ æquale erit.



Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

κείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ· τοῖς δὲ ἀπὸ τῆς ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. ἴση δὲ ἡ ΓΕ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ.



Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXVII. Theor.

Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero in eum incidat, ſit autem rectangulum comprehenſum ſub tota ſecante & exteriore ſegmento inter punctum & convexam circumferentiam æquale ei quod ab incidente fit quadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim ΑΒΓ ſumatur aliquod punctum Δ, atque à puncto Δ in circulum ΑΒΓ cadant duæ rectæ lineæ ΔΓΑ, ΔΒ, & ΔΓΑ quidem circulum ſecet, ΔΒ vero in illum incidat, ſitque rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ æquale quadrato quod fit ex ΔΒ: dico ipſam ΔΒ circulum ΑΒΓ contingere.

Ducatur enim [per 17. 3.] recta linea ΔΕ contingens circulum ΑΒΓ, & ſumatur [per 1. 3.] circuli ΑΒΓ centrum quod ſit Ζ, jungunturque ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ: ergo [per 18. 3.] angulus ΖΕΔ rectus eſt.

Et quoniam ΔΕ circulum ΑΒΓ contingit, ſecat autem ΔΓΑ, rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ æquale erit [per 36. 3.] quadrato ex ΔΕ. ſed rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ ponitur æquale quadrato ex ΔΒ: quadratum igitur

Προτασις λζ'.

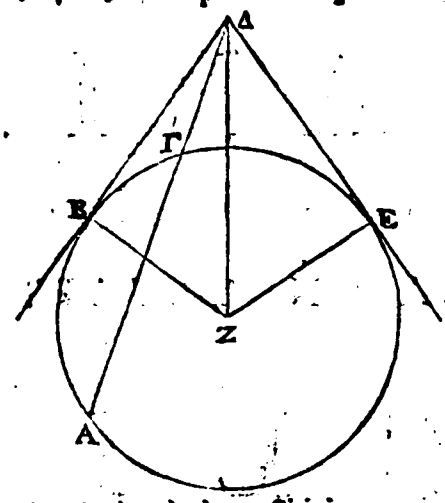
Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ προσπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς

ΔΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. ἡ ἄρα ΖΒ ἐκβαλλομένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀναμένη ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται κἂν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνῃ.



ex Δ Ε quadrato ex Δ Β æquale erit, ac propterea linea Δ Ε ipſi Δ Β æqualis. eſt autem & Ζ Ε æqualis Ζ Β: duæ igitur Δ Ε, Ε Ζ duabus Δ Β, Β Ζ ſunt æquales, & baſis ipſarum communis Ζ Δ: angulus igitur Δ Ε Ζ [per 8. 1.] eſt æqualis angulo Δ Β Ζ. rectus autem eſt Δ Ε Ζ: ergo & Δ Β Ζ eſt rectus. atque Ζ Β producta eſt diameter: quæ vero diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur [per 16. 3.] contingit circulum Α Β Γ. ſimiliter etiam demonſtrabitur ſi centrum ſit in ipſa Α Γ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur extra circulum ſumatur aliquod punctum, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

1. FIGURA rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, quando unuſquiſque figuræ inſcriptæ angulus contingit unumquodque latus ejus in qua inſcribitur.

2. Figura ſimiliter circa figuram circumſcribi dicitur, quando unumquodque latus circumſcriptæ contingit unumquemque angulum ejus circa quam circumſcribitur.

3. Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, quando unuſquiſque inſcriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.

4. Figura rectilinea circa circulum circumſcribi dicitur, quando unumquodque latus circumſcriptæ circuli circumferentiam contingit.

5. Circulus ſimiliter in figura rectilinea inſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus in qua inſcribitur contingit.

6. Circulus circa figuram rectilineam circumſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam circumſcribitur contingit.

7. Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus termini in circuli circumferentia fuerint.

ΟΡΟΙ.

α'. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς ἓν εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

β. Σχῆμα δὲ ὁμοίως δὲι σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας ἓν τοῦ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

γ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.

ε'. Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς ἓν εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

ϛ'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας ἓν περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

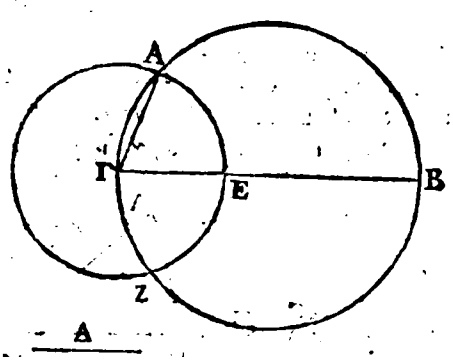
ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ὦσι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εἰς τὸ δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. ἐναρμόσεται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΒΓ. εἰ δὲ οὔ, μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, καὶ κείσθω τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. ἀλλὰ ἡ Δ τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν κύκλον τὸν ΑΒΓ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, τῇ Δ, ἴση ἐτέθη ἡ ΓΑ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Propositio I. Problema.

In dato circulo datæ rectæ lineæ, quæ diametro ejus major non sit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABΓ, data autem recta linea Δ non major circuli diametro: oportet in circulo ABΓ rectæ lineæ Δ æqualem rectam lineam aptare.

Ducatur circuli ABΓ diameter BΓ. si igitur BΓ sit æqualis ipsi Δ, factum jam erit quod proponebatur. etenim in circulo ABΓ aptata est BΓ rectæ lineæ Δ æqualis. sin minus, major est BΓ quam Δ, ponaturque [per 3. 1.] ipsi Δ æqualis ΓE, & centro quidem Γ intervallo autem ΓE [per 3. post.] circulus describatur AEZ, & [per 1. post.] ΓA jungatur.

Itaque quoniam punctum Γ centrum est AEZ circuli, erit ΓA ipsi ΓE æqualis. sed Δ est æqualis rectæ ΓE; ergo & Δ ipsi ΓA æqualis erit.

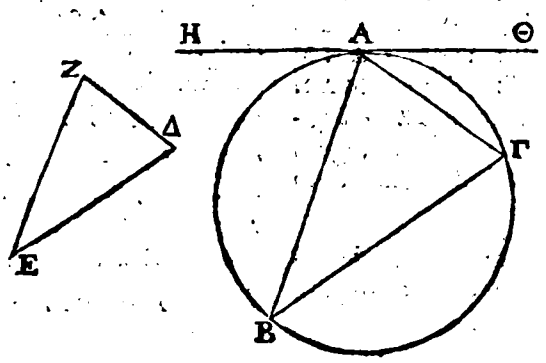
In dato igitur circulo ABΓ, datæ rectæ lineæ Δ, non majore circuli diametro, æqualis aptata est ΓA. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Εἰς τὸ δοθὲν κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΗΑΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνεστάτω πρὸς μὲν τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΓ· πρὸς δὲ τῇ ΗΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΖΔΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.



Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα ἡ ΘΑΗ, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς διῆκταί τις ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον.

Prop. II. Probl.

In dato circulo inscribere triangulum, æquiangulum dato triangulo.

Sit datus circulus ABΓ, datum autem triangulum ΔEZ: oportet in circulo ABΓ inscribere triangulum, triangulo ΔEZ æquiangulum.

Ducatur recta linea HAΘ contingens circulum ABΓ in puncto A, & ad rectam lineam AΘ & ad punctum in ea A constituatur [per 23. 1.] angulus ΘAΓ æqualis angulo ΔEZ: rursus, ad rectam lineam HA & ad punctum in ipsa A constituatur angulus HAB æqualis angulo ZΔE, & BΓ jungatur.

Quoniam igitur circulum ABΓ contingit recta ΘAH, à contactu autem ducta est AΓ, ΘAΓ angulus [per 32. 3.] æqualis ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet ipsi ABΓ. sed ΘAΓ angulus æqualis est angulo ΔEZ: ergo & angulus ABΓ angulo ΔEZ est æqualis. eadem ratione & angulus AΓB est æqualis angulo ZΔE: reliquus igitur BAΓ angulus reliquo EZΔ [per 32. 1.] æqualis erit: ergo triangulum ABΓ triangulo ΔEZ est æquiangulum, & inscriptum est [per 3. def. 4.] in circulo ABΓ.

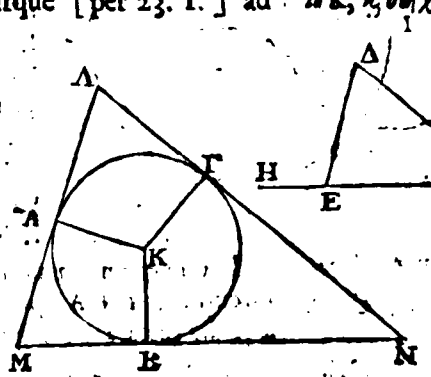
In dato igitur circulo inſcriptum eſt triangulum æquiangulum dato triangulo. quod erat faciendum.

PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum circumſcribere triangulum, æquiangulum dato triangulo.

SIT datus circulus ABΓ, datum autem triangulum ΔEZ: oportet circa circulum ABΓ circumſcribere triangulum, æquiangulum triangulo ΔEZ.

Protrahatur [per 2. poſt.] EZ ex utraque parte ad puncta Θ, H, & ſumatur [per 1. 3.] circuli ABΓ centrum K, & recta linea KB utcunque ducatur, conſtituaturque [per 23. 1.] ad lineam KB & ad punctum in ea K angulus BKA æqualis angulo ΔEH, angulo autem ΔZΘ æqualis angulus BKΓ, & per A, B, Γ puncta ducantur [per 17. 3.] rectæ lineæ ΛAM, MBN, NΓΛ circulum ABΓ contingentes.



Quoniam igitur circulum ABΓ contingunt AM, MN, NΛ in punctis A, B, Γ; à centro autem K ad puncta A, B, Γ ducuntur rectæ KA, KB, KΓ; erunt [per 18. 3.] anguli ad puncta A, B, Γ recti. & quoniam quadrilateri AMBK anguli quatuor [per 32. 1.] quatuor rectis ſunt æquales (enim in duo triangula dividitur quadrilaterum AMBK) è quibus anguli KAM, KBM ſunt recti; erunt reliqui AKB, AMB duobus rectis æquales. ſunt autem [per 13. 1.] & ΔEH, ΔEZ æquales duobus rectis: anguli igitur AKB, AMB angulis ΔEH, ΔEZ ſunt æquales, è quibus AKB ipſi ΔEH eſt æqualis: ergo reliquus AMB reliquo ΔEZ æqualis erit. ſimiliter demonſtrabitur angulus ANM ipſi ΔZE æqualis: ergo & reliquus MΛN [per 32. 1.] eſt æqualis reliquo EΔZ. eſt igitur ΛMN triangulum æquiangulum triangulo ΔEZ, & [per 4. def. 4.] circumſcribitur circa circulum ABΓ.

Circa datum igitur circulum circumſcriptum eſt triangulum, æquiangulum dato triangulo. quod erat faciendum.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum inſcribere.

SIT datum triangulum ABΓ: oportet in triangulo ABΓ circulum inſcribere.

Secentur [per 9. 1.] anguli ABΓ, BΓA bifariam à rectis lineis BΔ, ΓΔ, quæ conveniant inter ſe in puncto Δ, & à puncto Δ ad rectas lineas AB, BΓ, ΓA [per 12. 1.] perpendiculares ducantur ΔE, ΔZ, ΔH.

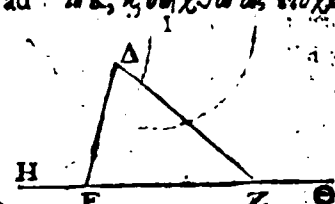
Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

ΕΣτω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ABΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔEZ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ABΓ κύκλον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐκβεβλήθω ἑφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἡ EZ ἐπὶ τὰ Θ, H σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τὸ ABΓ κύκλου κέντρον τὸ K, καὶ ἤχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ KB, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ KB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ K τῇ μὲν ὑπὸ ΔEH γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ EKA, τῇ δὲ ὑπὸ ΔZΘ ἴση ἡ ὑπὸ BKΓ; καὶ διὰ τῶν A, B, Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ABΓ κύκλου αἱ ΛAM, MBN, NΓΛ.



Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται τοῦ ABΓ κύκλου αἱ ΛM, MN, NΛ κατὰ τὰ A, B, Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ K κέντρου ἐπὶ τὰ A, B, Γ σημεῖα ἐπιζευγνύμεναι εἰσὶν αἱ KA, KB, KΓ· ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς A, B, Γ σημείοις γωνίαι. καὶ ἐπεὶ τοῦ AMBK τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν (ἐπεὶ δύνατον καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ AMBK τετράπλευρον) ὧν αἱ ὑπὸ KAM, KBM γωνίαι δύο ὀρθαί εἰσιν· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ AKB, AMB δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔEH, ΔEZ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ AKB, AMB ταῖς ὑπὸ ΔEH, ΔEZ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ AKB τῇ ὑπὸ ΔEH ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AMB λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ANM τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστιν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ MΛN λοιπῇ τῇ ὑπὸ EΔZ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛMN τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ABΓ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

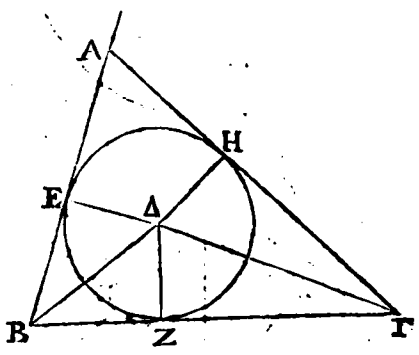
Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

ΕΣτω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ABΓ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ABΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ABΓ, BΓA γωνίαι δίχα ταῖς BΔ, ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς AB, BΓ, ΓA εὐθείας κάθετοι αἱ ΔE, ΔZ, ΔH.

Καὶ

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ, διῖχται γὰρ δίχα ὑπὸ τῆς ΒΔ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΒΔ, ΔΒΖ, τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Δ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς ὑπὸ τοῖς Ε, Ζ, Η σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτὰς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου ὑπὸ ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Δ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν, καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον.



Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ ΕΖΗ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Et quoniam angulus ΑΒΔ est æqualis angulo ΓΒΔ, bifariam enim sectus est angulus ΑΒΓ; estque etiam ΒΕΔ rectus æqualis recto ΒΖΔ; erunt ΕΒΔ, ΔΒΖ duo triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales & unum latus uni lateri æquale & utrique commune ΒΔ, quod scilicet uni æqualium angulorum subtenditur: ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, eritque ΔΕ æqualis ΔΖ. eadem ratione erit etiam ΔΗ æqualis ΔΖ: quare centro Δ intervallo autem æquali uni ipsarum ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ continget; propterea quod recti sunt ad Ε, Ζ, Η anguli. si enim ipsas secet, quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur intra circulum cadet, quod [per 16. 3.] est absurdum: circulus igitur centro Δ intervallo autem æquali uni ipsarum ΔΒ, ΔΖ, ΔΗ descriptus non secabit rectas lineas ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ: quare ipsas continget, atque circulus erit [per 5. def. 4.] inscriptus in triangulo ΑΒΓ.

In dato igitur triangulo ΑΒΓ inscriptus est circulus ΕΖΗ. quod erat faciendum.

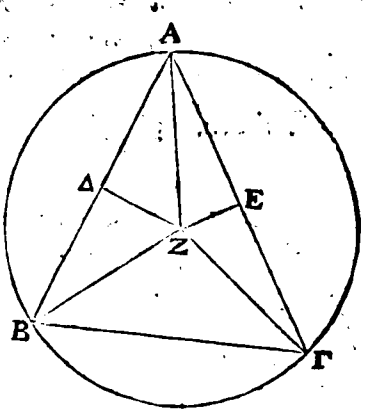
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλον περιγράψαι.

Τετμήθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ δίχα κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἤχθω τῶν Δ, Ε σημείων τῇς ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἥτχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΖ· συμπεσοῦνται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας, ἢ ἐκτὸς *τῆς ΒΓ.

Συμπιπτέτωσαν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΓ, ΖΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΑ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓ.



*Legimus τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ.

PROP. V. PROBL.

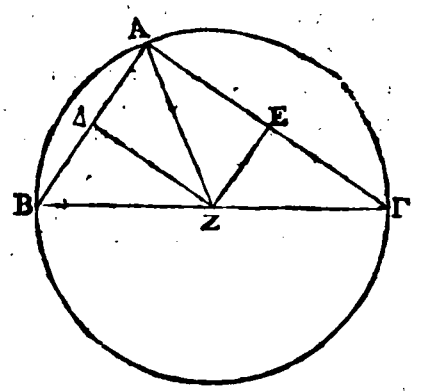
Circa datum triangulum circulum circumscribere.

SIT datum triangulum ΑΒΓ: oportet circa datum triangulum ΑΒΓ circulum circumscribere.

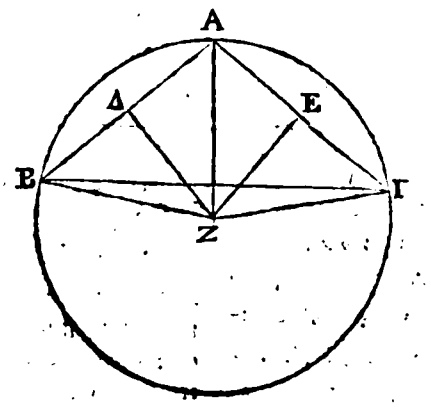
Secentur ΑΒ, ΑΓ [per 10. 1.] bifariam in Δ, Ε punctis, & à punctis Δ, Ε ipsis ΑΒ, ΑΓ [per 11. 1.] ad rectos angulos ducantur ΔΖ, ΕΖ; quæ vel intra triangulum ΑΒΓ conveniant, vel in recta linea ΒΓ, vel extra triangulum ΑΒΓ.

Conveniant primum intra triangulum in puncto Ζ; & ΒΖ, ΖΓ, ΖΑ jungantur. quoniam igitur ΑΔ est æqualis ΔΒ, communis autem & ad rectos angulos ΔΖ; erit [per 4. 1.] basis ΑΖ basi ΖΒ æqualis. similiter ostendetur & ΓΖ æqualis ΖΑ: ergo & ΒΖ est æqualis ΖΓ: tres igitur ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ inter se sunt æquales. quare centro Ζ, intervallo autem æquali uni ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit [per 6. def. 4.] circulus circumscriptus circa triangulum ΑΒΓ. circumscribatur igitur ut ΑΒΓ.

Sed Δ Z, E Z conveniant in recta linea B Γ, in puncto Z, ut in ſecunda figura, & A Z jungatur. ſimiliter demonſtrabimus punctum Z centrum eſſe circuli circa triangulum A B Γ circumſcripti.



Poſtremo Δ Z, E Z conveniant extra triangulum A B Γ rurſus in Z puncto, ut in tertia figura; & jungantur A Z, Z B, Z Γ. & quoniam A Δ eſt æqualis Δ B, communis autem & ad rectos angulos Δ Z; baſis A Z [per 4. I.] baſi Z B æqualis erit. ſimiliter demonſtrabimus & Γ Z ipſi Z A æqualem eſſe; quare & B Z eſt æqualis Z Γ; rurſus igitur centro Z, intervallo autem æquali uni ipſarum Z A, Z B, Z Γ circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; atque erit circa triangulum A B Γ circumſcriptus. deſcribatur igitur ut A B Γ.



Circa datum igitur triangulum circulus eſt circumſcriptus. quod erat faciendum.

Corollarium.

Et manifeſtum eſt, quod, ſi centrum circuli intra triangulum ceciderit, angulus B A Γ exiſtens in ſegmento ſemicirculo majore minor eſt recto: ſi autem ceciderit in recta linea B Γ, angulus in ſemicirculo rectus erit: & ſi extra triangulum A B Γ, angulus in ſegmento minore ſemicirculo erit major recto. Quare ſi datum triangulum ſit oxygonium, Δ Z, E Z intra triangulum convenient: ſin in eo ſit angulus rectus B A Γ, in ipſa B Γ: & ſi ſit major recto, extra A B Γ.

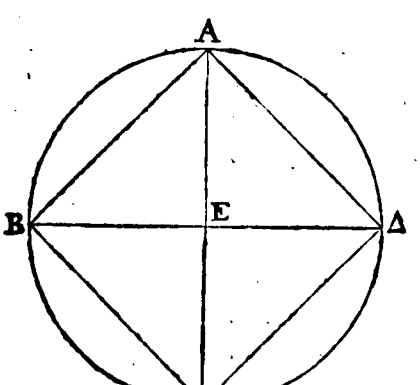
PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum inſcribere.

SIT datus circulus A B Γ Δ: oportet in circulo A B Γ Δ quadratum inſcribere.

Ducantur [per 11. I.] circuli A B Γ Δ diametri ad rectos angulos inter ſe A Γ, B Δ; & A B, B Γ, Γ Δ, Δ A jungantur.

Quoniam igitur B E eſt æqualis E Δ, eſt enim E centrum, communis autem & ad rectos angulos E A; erit [per 4. I.] baſis A B æqualis baſi A Δ. & eadem ratione utraque ipſarum B Γ, Γ Δ utrique B A, A Δ eſt æqualis: æquila-



Αλλὰ δὴ αἱ Δ Z, E Z συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὸ Β Γ εὐθείας κατὰ τὸ Z, ὡς ἔχει ἐπὶ τὸ δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ A Z. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ A B Γ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου.

Αλλὰ δὴ αἱ Δ Z, E Z συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ A B Γ τριγώνου, κατὰ τὸ Z πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ A Z, Z B, Z Γ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ A Δ τῇ Δ B, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ Δ Z· βάσις ἄρα ἡ A Z βάσει τῇ Z B ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ Γ Z τῇ Z A ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ B Z τῇ Z Γ ἴση· ὁ ἄρα πάλιν κέντρῳ τῷ Z διαστήματι ἑνὶ τῶν Z A, Z B, Z Γ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ A B Γ τρίγωνον. καὶ γεγράφθω ὡς ὁ A B Γ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν, ὅτι, ὅταν μὲν ἐντὸς ὁ τοῦ τριγώνου πίπτῃ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ B A Γ γωνία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτι δὲ ἐπὶ τὸ B Γ, ἐν ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ὀρθὴ ἔσται· ὅταν δὲ ἐκτὸς * τὸ B Γ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ, ἡ ὑπὸ B A Γ, ἐν ἐλάττονι τμήματι ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὡς δὲ ὅταν † ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται αἱ Δ Z, E Z· ὅταν δὲ ὀρθὴ, ἐπὶ τὸ B Γ· ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τὸ B Γ,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

ΕΣτω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ A B Γ Δ· δεῖ δὴ εἰς τὸν A B Γ Δ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ηχθωσαν τοῦ A B Γ Δ κύκλου διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ A Γ, B Δ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ A B, B Γ, Γ Δ, Δ A.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ B E τῇ E Δ, κέντρον γὰρ τὸ E, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς ὀρθὰς ἡ E A· βάσις ἄρα ἡ A B βάσει τῇ A Δ ἴση ἐστί. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν B Γ, Γ Δ ἑκατέρᾳ τῶν B A, A Δ ἴση ἐστί· ἰσό-

* Legimus τοῦ A B Γ τριγώνου. † Hic locus in omnibus (quos vidimus) codicibus Græcis, tam MSS. quam impreſſo, male ſe habet. Nos in verſione (paucis immutatis) reſtituimus; quod & antea fecerunt Campanus & Clavius.

πλευρον

πλάγιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου διάμετρός ἐστι, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ ὀρθή ἐστιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί. καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ ΑΒΓΔ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

terum igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim recta linea ΒΔ diameter est ΑΒΓΔ circuli, erit ΒΑΔ semicirculus: quare [per 31. 3.] angulus ΒΑΔ rectus est. & eadem ratione unusquisque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ rectus erit: rectangulum igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. ostensum autem est æquilaterum esse: igitur quadratum est. & inscriptum est in circulo ΑΒΓΔ.

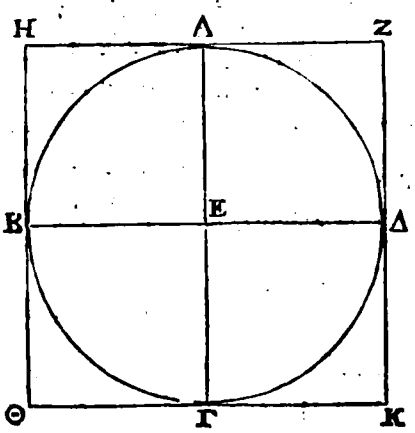
In dato igitur ΑΒΓΔ circulo inscriptum est quadratum ΑΒΓΔ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγεγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγεγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.



Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἁπτομένην ἐπέζευκται ἡ ΕΑ· αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ· ἀπέναντες ἄρα εἰσὶν αἱ ΗΘ τῇ ΑΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ ἀπέναντές ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ τῇ ΒΕΔ ἐστὶ παράλληλος. παραλληλόγραμμα ἄρα ἐστὶ τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΖΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. λέγω ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΗΒΕΑ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. VII. Probl.

Circa datum circulum quadratum circumscribere.

SIT datus circulus ΑΒΓΔ: oportet circa ΑΒΓΔ circulum quadratum circumscribere.

Ducantur circuli ΑΒΓΔ duæ diametri ΑΓ, ΒΔ ad rectos inter se angulos, & per puncta Α, Β, Γ, Δ ducantur [per 17. 3.] rectæ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ contingentes circulum ΑΒΓΔ.

Quoniam igitur ΖΗ contingit circulum ΑΒΓΔ, à centro autem Ε ad contactum qui est ad Α ducitur ΕΑ; erunt [per 18. 3.] anguli ad Α recti. eadem ratione & anguli ad puncta Β, Γ, Δ sunt recti. & quoniam angulus ΑΕΒ est rectus, & ΕΒΗ etiam rectus; erit [per 28. 1.] ΗΘ ipsi ΑΓ parallela. eadem ratione & ΑΓ parallela est ΖΚ. similiter demonstrabimus & utramque ipsarum ΗΖ, ΘΚ ipsi ΒΕΔ parallelam esse. parallelogramma igitur sunt ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ; ac propterea ΗΖ est [per 34. 1.] æqualis ΘΚ; ΗΘ vero ipsi ΖΚ. & quoniam ΑΓ æqualis est ΒΔ; sed & ΑΓ quidem utrique ipsarum ΗΘ, ΖΚ est æqualis, ΒΔ vero æqualis utrique ΗΖ, ΘΚ; & utraque ΗΘ, ΖΚ utrique ΗΖ, ΘΚ æqualis erit. æquilaterum igitur est ΖΗΘΚ quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim parallelogrammum est ΗΒΕΑ, atque est rectus ΑΕΒ angulus, & ipse ΑΗΒ [per 34. 1.] rectus erit. similiter demonstrabimus angulos etiam, qui ad puncta Θ, Κ, Ζ, rectos esse: rectangulum igitur est quadrilaterum ΖΗΘΚ. demonstratum autem est & æquilaterum: igitur quadratum est. & circumscriptum est circa circulum ΑΒΓΔ.

Igitur circa datum circulum circumscriptum est quadratum. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΑΔ δίχα κατὰ τὰ

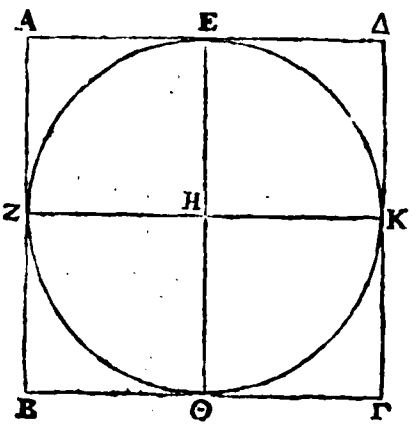
Prop. VIII. Probl.

In dato quadrato circulum inscribere.

SIT datum quadratum ΑΒΓΔ: oportet in ΑΒΓΔ quadrato circulum inscribere.

Secetur [per 10. 1.] utraque ipsarum ΑΒ, ΑΔ bifariam

bifariam in punctis Z, E, & per E alterutri ipsarum AB, ΓΔ [per 31. 1.] parallela ducatur EΘ, per Z vero ducatur ZK parallela alterutri AΔ, BΓ: parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum AK, KB, AΘ, ΘΔ, AH, HΓ, BH, HΔ; & latera ipsorum opposita [per 34. 1.] sunt æqualia. & quoniam AΔ est æqualis AE, & ipsius quidem AΔ dimidia est AE, ipsius vero AB dimidia AZ; erit AE ipsi AZ æqualis: & latera etiam ipsis opposita sunt æqualia, ergo ZH est æqualis HE. similiter demonstrabimus & utramque ipsarum HΘ, HK utrique ZH, HE æqualem esse. quatuor igitur HE, HZ, HΘ, HK inter se sunt æquales. itaque centro quidem H intervallo autem æquali uni ipsarum HE, HZ, HΘ, HK circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; & rectas lineas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA continget, propterea quod anguli ad E, Z, Θ, K sunt recti. si enim circulus secat rectas lineas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA, quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur intra circulum cadet, quod [per 16. 3.] est absurdum. non igitur centro quidem H intervallo autem æquali uni ipsarum HE, HZ, HΘ, HK circulus descriptus rectas lineas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA secabit. ipsas igitur continget, atque erit [per 5. def. 4.] inscriptus in quadrato ABΓΔ.



In dato igitur quadrato circulus est inscriptus. quod erat faciendum.

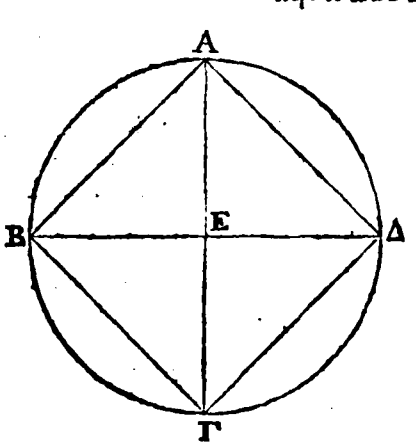
Prop. IX. Probl.

Circa datum quadratum circulum circumscribere.

SIT datum quadratum ABΓΔ: oportet circa quadratum ABΓΔ circulum circumscribere.

Jungantur enim AΓ, BΔ, quæ se invicem in puncto E secent.

Et quoniam ΔA est æqualis AB, communis autem AΓ, duæ ΔA, AΓ duabus BA, AΓ sunt æquales, & basis ΔΓ æqualis basi BΓ, erit [per 8. 1.] & angulus ΔAΓ æqualis angulo BAΓ: angulus igitur ΔAB bifariam sectus est à recta linea AΓ. similiter demonstrabimus unumquemque angulorum ABΓ, BΓΔ, ΓΔA bifariam secari à rectis lineis AΓ, ΔB. quoniam igitur angulus ΔAB angulo ABΓ est æqualis, est autem anguli ΔAB dimidium angulus EAB, anguli vero ABΓ dimidium EBA: & EAB angulus angulo EBA æqualis erit; quare [per 6. 1.] & latus EA lateri EB est æquale. similiter demonstrabimus & utramque rectarum EΓ, EΔ utrique EA, EB



Z, E σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ E ὁποτέρα τῶν AB, ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ EΘ, διὰ δὲ τοῦ Z ὁποτέρα τῶν AΔ, BΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ZK· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν AK, KB, AΘ, ΘΔ, AH, HΓ, BH, HΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AΔ τῇ AB, ἐστὶ δὲ τοῦ μὲν AΔ ἡμίσεια ἡ AE, τοῦ δὲ AB ἡμίσεια ἡ AZ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ AE τῇ AZ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσίν, ἴση ἄρα καὶ ἡ ZH τῇ HE. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν HΘ, HK ἑκατέρᾳ τῶν ZH, HE ἐστὶν ἴση. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ HE, HZ, HΘ, HK ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ H διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν HE, HZ HΘ, HK κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάψεται τῶν AB, BΓ, ΓΔ, ΔA εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς ταῖς E, Z, Θ, K γωνίας. εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς AB, BΓ, ΓΔ, ΔA, ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀχθεῖσα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ H διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν HE, HZ, HΘ, HK κύκλος γραφόμενος τεμεῖ τὰς AB, BΓ, ΓΔ, ΔA εὐθείας. ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ABΓΔ τετράγωνον.

Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

ΕΣτω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ABΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ABΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ AΓ, BΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ AB, κοινὴ δὲ ἡ AΓ, δύο δὴ αἱ ΔA, AΓ δυσὶ ταῖς BA, AΓ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ BΓ ἐστὶν ἴση· ἡ ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ ΔAΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ BAΓ ἐστὶν ἴση· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔAB γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τὴν AΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἑκάστη τῶν ὑπὸ ABΓ, BΓΔ, ΓΔA δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν AΓ, ΔB εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔAB γωνία τῇ ὑπὸ ABΓ, καί ἐστι τοῦ μὲν ὑπὸ ΔAB ἡμίσεια ἡ ὑπὸ EAB, τοῦ δὲ ὑπὸ ABΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ EBA· καὶ ἡ ὑπὸ EAB ἄρα τῇ ὑπὸ EBA ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ EA πλευρᾷ τῇ EB ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν EΓ, EΔ εὐθειῶν ἑκατέρᾳ

τέρα

τέρα τῶν ΕΑ, ΕΒ ἴσαι ἐσται· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

æqualem esse; ergo quatuor rectæ lineæ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ inter se sunt æquales. centro igitur Ε intervallo autem æquali uni ipsarum ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit, atque erit circumscriptus circa quadratum ΑΒΓΔ. describatur ut ΑΒΓΔ.

Circa datum igitur quadratum circulus est circumscriptus. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

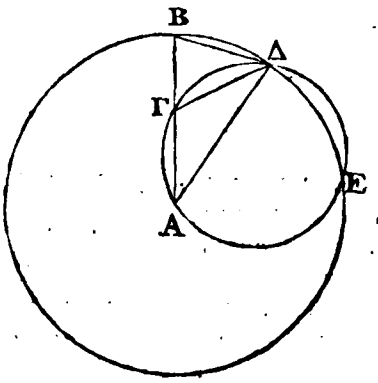
Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Prop. X. Probl.

Isosceles triangulum constituere, habens alterutrum angulorum qui sunt ad basim duplum reliqui.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου, ἴση εὐθεῖα ἡ ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΓ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΓΔ εἴληπταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸν ΑΓΔ κύκλον προσπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ· ἡ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ κύκλου. ἐπεὶ δὲ ἐφάπτεται, ἡ δὲ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΔΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. ἀλλὰ ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ διπλασίονές εἰσιν. ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῶν ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΔΑΒ ἐστὶ διπλῆ.



POnatur recta quædam linea ΑΒ, & secetur [per 11.2.] in puncto Γ, ita ut rectangulum comprehensum sub ΑΒ, ΒΓ æquale sit quadrato ex ΓΑ; & centro quidem Α intervallo autem ΑΒ [per 3. post.] circulus describatur ΒΔΕ; apteturque [per 1.4.] in ΒΔΕ circulo recta linea ΒΔ, æqualis ipsi ΑΓ, quæ non est major diametro circuli ΒΔΕ; & junctis ΔΑ, ΔΓ, triangulo ΑΓΔ [per 5.4.] circumscribatur circulus ΑΓΔ.

Itaque quoniam rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ æquale est quadrato quod fit ex ΑΓ; æqualis autem est ΑΓ ipsi ΒΔ; erit sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum quadrato quod ex ΒΔ æquale. & quoniam extra circulum ΑΓΔ sumptum est punctum Β, & à puncto Β in circulum ΑΓΔ cadunt duæ rectæ lineæ ΒΓΑ, ΒΔ, quarum altera quidem secat, reliqua vero in eum incidit, & rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ est æquale quadrato quod ex ΒΔ; recta linea ΒΔ [per 37. 3.] circulum ΑΓΔ continget. quoniam igitur ΒΔ contingit, & à contactu Δ ducta est ΔΓ; erit [per 32. 3.] ΒΔΓ angulus æqualis ei qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet angulo ΔΑΓ. cum autem angulus ΒΔΓ æqualis sit ipsi ΔΑΓ, communis addatur ΓΔΑ: totus igitur ΒΔΑ est æqualis duobus angulis ΓΔΑ, ΔΑΓ. sed ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ exterior angulus ΒΓΔ [per 32.1.] est æqualis: ergo & ΒΔΑ æqualis est ipsi ΒΓΔ. sed ΒΔΑ angulus [per 5. 1.] est æqualis angulo ΓΒΔ, quoniam & latus ΑΔ lateri ΑΒ est æquale: ergo & ΔΒΑ ipsi ΒΓΔ æqualis erit. tres igitur anguli ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ inter se sunt æquales. & quoniam angulus ΔΒΓ æqualis est angulo ΒΓΔ, latus ΒΔ lateri ΔΓ [per 6. 1.] est æquale. sed ΒΔ ponitur æqualis ipsi ΓΑ: ergo & ΑΓ est æqualis ΓΔ: quare & angulus ΓΔΑ [per 5.1.] æqualis est angulo ΔΑΓ: anguli igitur ΓΔΑ, ΔΑΓ simul ipsius anguli ΔΑΓ dupli sunt. est autem [per 32.1.] & ΒΓΔ angulus æqualis angulis ΓΔΑ, ΔΑΓ: ergo & ΒΓΔ duplus est ipsius ΔΑΓ. sed ΒΓΔ est æqualis alterutri ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ: quare & alteruter ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ ipsius ΔΑΒ est duplus.

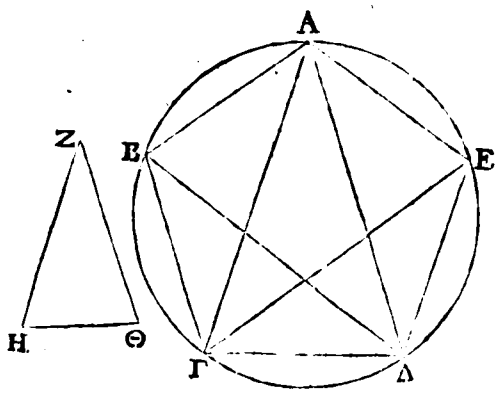
Iſoſceles igitur triangulum ΑΔΒ conſtitutum eſt, habens alterutrum eorum angulorum qui ſunt ad baſim ΒΔ duplum reliqui. quod erat faciendum.

Prop. XI. Probl.

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

SIT datus circulus ΑΒΓΔΕ: oportet in ΑΒΓΔΕ circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

Ponatur [per 10. 4.] triangulum iſoſceles ΖΗΘ, habens alterutrum angulorum ad Η, Θ duplum anguli qui eſt ad Ζ: & inſcribatur [per 2. 4.] in circulo ΑΒΓΔΕ triangulo ΖΗΘ æquiangulum triangulum ΑΓΔ; ita ut angulo quidem qui eſt ad Ζ æqualis ſit angulus ΓΑΔ, utrique vero ipſorum qui ad Η, Θ ſit æqualis uterque ΑΓΔ, ΓΔΑ: alteruter igitur ΑΓΔ, ΓΔΑ duplus eſt anguli ΓΑΔ. ſecetur [per 9. 1.] uterque ipſorum ΑΓΔ, ΓΔΑ bifariam à rectis lineis ΓΕ, ΔΒ, & ducantur ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.



Quoniam igitur uterque ipſorum ΑΓΔ, ΓΔΑ duplus eſt ipſius ΓΑΔ, & ſecti ſunt bifariam à rectis lineis ΓΕ, ΔΒ; quinque anguli ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ſunt inter ſe æquales. æquales autem anguli [per 26. 3.] æqualibus circumferentiis inſiſtunt: quinque igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales ſunt inter ſe. ſed [per 29. 3.] æquales circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt: ergo & quinque rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ inter ſe ſunt æquales: æquilaterum eſt igitur ΑΒΓΔΕ pentagonum. dico & æquiangulum eſſe. quoniam enim circumferentia ΑΒ æqualis eſt circumferentiæ ΔΕ, communis addatur ΒΓΔ: tota igitur ΑΒΓΔ circumferentia toti circumferentiæ ΕΔΓΒ eſt æqualis. & circumferentiæ quidem ΑΒΓΔ inſiſtit angulus ΑΕΔ, circumferentiæ vero ΕΔΓΒ inſiſtit angulus ΒΑΕ: ergo & ΒΑΕ angulus [per 27. 3.] eſt æqualis angulo ΑΕΔ. eadem ratione & unuſquiſque angulorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ alterutri ipſorum ΒΑΕ, ΑΕΔ eſt æqualis: æquiangulum igitur eſt ΑΒΓΔΕ pentagonum. oſtenſum autem eſt & æquilaterum eſſe.

In dato igitur circulo inſcriptum eſt pentagonum æquilaterum & æquiangulum. quod erat faciendum.

Prop. XII. Probl.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circumſcribere.

SIT datus circulus ΑΒΓΔΕ: oportet circa circulum ΑΒΓΔΕ pentagonum æquilaterum & æquiangulum circumſcribere.

Ισοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνέστηται τὸ ΑΔΒ, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΒΔ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

ΕΣτω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Εκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τὴν μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶ διπλῆ. τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Επεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημένων εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσας γωνίας ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ ἴση ἐστί, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒ περιφερείᾳ ἴση ἐστί. καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τὴν ΑΒΓΔ περιφέρειαν γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τὴν ΕΔΓΒ περιφέρειαν γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

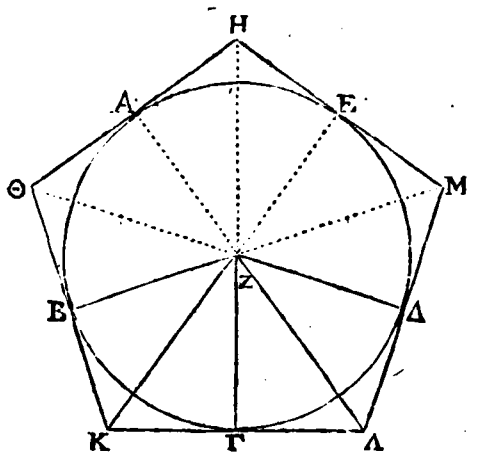
ΕΣτω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω δὲ ἐγγεγραμμένης πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερείας· καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν δὲ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ· καὶ εἰλήφθω δὲ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Intelligantur pentagoni in circulo [per 11.4.] deſcripti angulorum puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε, ita ut circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ſint æquales; & per puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε ducantur [per 17. 3.] circulum contingentes ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ: & ſumpto circuli ΑΒΓΔΕ centro Ζ, jungantur ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὸ κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ ΒΚ τῇ ΓΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἐστὶν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΓ τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ τῆς ὑπὸ ΓΖΛ ἐστὶ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΛΔ τῆς ὑπὸ ΓΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΓ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΛΖΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΛ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ, καὶ ἔστι διπλῆ ἡ μὲν ΚΛ τῆς ΚΓ, ἡ δὲ ΘΚ τῆς ΒΚ· καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΗΘ, ΗΜ, ΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ, ΚΛ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πενταγώνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΛ,

Quoniam igitur recta linea ΚΛ contingit circulum ΑΒΓΔΕ in puncto Γ, & à centro Ζ ad contactum qui eſt ad Γ ducta eſt ΖΓ; erit [per 18. 3.] ΖΓ ad ipſam ΚΛ perpendicularis: rectus igitur eſt uterque angulorum qui ſunt ad Γ. eadem ratione & anguli qui ad puncta Β, Δ ſunt recti. & quoniam rectus eſt angulus ΖΓΚ, quadratum quod fit ex ΖΚ [per 47. 1.] æquale eſt quadratis ex ΖΓ, ΓΚ. & ob eandem cauſam quadratis ex ΖΒ, ΒΚ æquale eſt ex ΖΚ quadratum: quadrata igitur ex ΖΓ, ΓΚ quadratis ex ΖΒ, ΒΚ ſunt æqualia; è quibus quod fit ex ΖΓ ei quod fit ex ΖΒ eſt æquale: ergo reliquum quod fit ex ΓΚ reliquo ex ΒΚ æquale erit; æqualis igitur eſt ΒΚ ipſi ΓΚ. & quoniam ΖΒ eſt æqualis ΖΓ, communis autem ΖΚ; duæ ΒΖ, ΖΚ duabus ΓΖ, ΖΚ ſunt æquales, & baſis ΒΚ eſt æqualis baſi ΓΚ; erit igitur [per 8. 1.] angulus ΒΖΚ æqualis angulo ΚΖΓ, & angulus ΒΚΖ angulo ΖΚΓ æqualis: duplus igitur eſt angulus ΒΖΓ anguli ΚΖΓ, & angulus ΒΚΓ duplus ipſius ΖΚΓ. eadem ratione & angulus ΓΖΔ duplus eſt anguli ΓΖΛ, angulus vero ΓΛΔ duplus anguli ΓΛΖ. & quoniam circumferentia ΒΓ circumferentiæ ΓΔ eſt æqualis, & angulus ΒΖΓ [per 27. 3.] angulo ΓΖΔ æqualis erit. atque eſt angulus quidem ΒΖΓ anguli ΚΖΓ duplus, angulus vero ΔΖΓ duplus ipſius ΛΖΓ: æqualis igitur eſt angulus ΚΖΓ angulo ΓΖΛ. ſunt igitur ΖΚΓ, ΖΛΓ duo triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod ipſis commune eſt nempe ΖΓ; ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habent, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem: recta igitur linea ΚΓ eſt æqualis rectæ ΓΛ, & angulus ΖΚΓ æqualis angulo ΖΛΓ. & quoniam ΚΓ eſt æqualis ΓΛ, erit ΚΛ ipſius ΚΓ dupla. eadem ratione & ΘΚ ipſius ΒΚ dupla oſtendetur. rurſus, quoniam ΒΚ oſtenſa eſt æqualis ipſi ΚΓ, atque eſt ΚΛ quidem dupla ΚΓ, ΘΚ vero ipſius ΒΚ dupla; erit ΘΚ ipſi ΚΛ æqualis. ſimiliter & unaquæque ipſarum ΗΘ, ΗΜ, ΜΛ oſtendetur æqualis alterutri ΘΚ, ΚΛ: æquilaterum igitur eſt ΗΘΚΛΜ pentagonum. dico etiam æquiangulum eſſe. quoniam enim angulus ΖΚΓ eſt æqualis angulo ΖΛΓ, & oſtenſus eſt ipſius quidem ΖΚΓ duplus angulus ΘΚΛ; ipſius vero ΖΛΓ duplus ΚΛΜ: erit & ΘΚΛ angulus angulo ΚΛΜ æqualis. ſimili ratione oſtendetur & unuſquiſque ipſorum ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ alterutri ΘΚΛ,



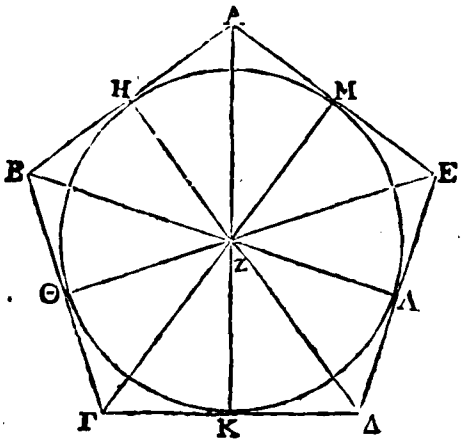
ΚΛΜ æqualis: quinque igitur anguli ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ inter ſe ſunt æquales. ergo æquiangulum eſt ΗΘΚΛΜ pentagonum. oſtenſum autem eſt etiam æquilaterum: & circumſcriptum eſt circa ΑΒΓΔΕ circulum. quod erat faciendum.

Prop. XIII. Probl.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere.

SIT datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ΑΒΓΔΕ: oportet in ΑΒΓΔΕ pentagono circulum inſcribere.

Secetur [per 9. 1.] uterque angulorum ΒΓΔ, ΓΔΕ bifariam à rectis lineis ΓΖ, ΔΖ; & à puncto Ζ, in quo conveniunt inter ſe ΓΖ, ΔΖ, ducantur rectæ lineæ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. quoniam autem ΒΓ eſt æqualis ΓΔ, communis autem ΓΖ, duæ ΒΓ, ΓΖ duabus ΔΓ, ΓΖ ſunt æquales, & angulus ΒΓΖ eſt æqualis angulo ΔΓΖ: baſis igitur ΒΖ baſi ΔΖ [per 4. 1.] eſt æqualis, & ΒΖΓ triangulum æquale triangulo ΔΓΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur: angulus igitur ΓΒΖ angulo ΓΔΖ æqualis erit. & quoniam angulus ΓΔΕ anguli ΓΔΖ eſt duplus, & angulus quidem ΓΔΕ angulo ΑΒΓ æqualis, angulus vero ΓΔΖ angulo ΓΒΖ æqualis; erit & ΓΒΑ angulus duplus anguli ΓΒΖ; ac propterea angulus ΑΒΖ angulo ΖΒΓ æqualis: angulus igitur ΑΒΓ bifariam ſecatur à recta linea ΒΖ. ſimiliter demonſtrabitur & unumquemque angulorum ΒΑΕ, ΑΕΔ à rectis lineis ΖΑ, ΖΕ bifariam ſecari. itaque à puncto Ζ ad rectas lineas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ducantur perpendiculares ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. & quoniam angulus ΘΓΖ eſt æqualis angulo ΚΓΖ, eſt autem & rectus ΖΘΓ recto ΖΚΓ æqualis: erunt ΖΘΓ, ΖΚΓ duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune ſcilicet utrique ΖΓ, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur: ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, atque erit perpendicularis ΖΘ perpendiculari ΖΚ æqualis. ſimiliter oſtendetur & unaquæque ipſarum ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ æqualis alterutri ΖΘ, ΖΚ: quinque igitur rectæ lineæ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ inter ſe ſunt æquales. quare centro Ζ intervallo autem æquali uni ipſarum ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & rectas lineas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ continget, propterea quod anguli ad Η, Θ, Κ, Λ, Μ ſunt recti. ſi enim ipſas non contingit, ſed ſecat; quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate du-



ΚΛΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

ΕΣτω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑφ' ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ δὴ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσει τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσίν, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ διπλῆ, ἴση δέ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τὴν ΒΖ εὐθεῖαν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέραν τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ δὲ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθέτῳ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἐστίν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς ταῖς Η, Θ, Κ, Λ, Μ σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν ἀλλὰ τεμεῖ αὐτάς, συμβήσεται τὴν διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ-

ὑπ' ἄκρας ἀγομβύλου ἐκτὸς πίπτῃ τῆ κύκλε, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας οὐ τεμεῖ. ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν. γεγράφθω ὡς ὁ ΗΘΚΛΜ.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

citur intra circulum cadet, quod abſurdum eſſe [per 16. 3.] oſtenſum eſt. centro igitur Z & intervallo æquali uni rectarum ZH, ZΘ, ZK, ZΛ, ZM circulus deſcriptus rectas lineas AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA non ſecabit: ipſas igitur continget. deſcribatur ut HΘKΛM.

In dato igitur pentagono æquilatero & æquiangulo circulus eſt inſcriptus. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

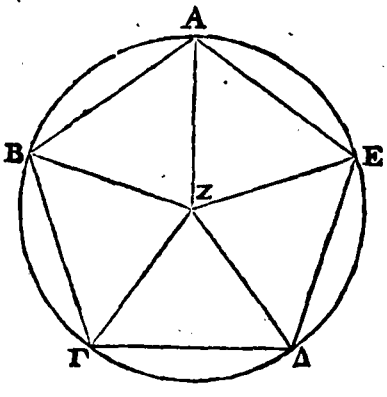
Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Prop. XIV. Probl.

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum circumſcribere.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅπερ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ.



ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΒΖ, ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καὶ ἔστι τοῦ μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΖΓΔ, τοῦ δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΓΔΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΓ πλευρᾷ τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΓ, ΖΔ ἐστὶν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον. περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΑΒΓΔΕ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ΑΒΓΔΕ: oportet circa pentagonum ΑΒΓΔΕ circulum circumſcribere.

Secetur [per 9. 1.] uterque ipſorum ΒΓΔ, ΓΔΕ angulorum bifariam à rectis lineis ΓΖ, ΖΔ; & à puncto Z, in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta Β, Α, Β ducantur ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. ſimiliter ut in antecedenti demonſtrabitur unumquemque angulorum ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ à rectis lineis ΒΖ, ΖΑ, ΖΕ bifariam ſecari. & quoniam angulus ΒΓΔ angulo ΓΔΕ eſt æqualis, atque eſt anguli ΒΓΔ dimidius angulus ΖΓΔ, anguli vero ΓΔΕ dimidius ΓΔΖ; erit ΖΓΔ angulus æqualis angulo ΖΔΓ: quare [per 6. 1.] & latus ΖΓ lateri ΖΔ eſt æquale. ſimiliter demonſtrabitur unaquæque ipſarum ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ æqualis alterutri ΖΓ, ΖΔ: quinque igitur rectæ lineæ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ſunt inter ſe æquales. ergo centro Z & intervallo æquali uni ipſarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, eritque circumſcriptus circa pentagonum æquilaterum & æquiangulum ΑΒΓΔΕ. deſcribatur, & ſit ΑΒΓΔΕ.

Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum circumſcriptus eſt circulus. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Prop. XV. Probl.

In dato circulo hexagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

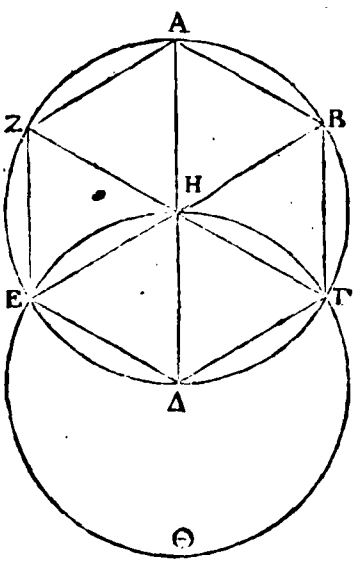
Ἤχθω δὴ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΓΗ διήχθωσαν δὲ ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ,

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕΖ: oportet in circulo ΑΒΓΔΕΖ hexagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

Ducatur circuli ΑΒΓΔΕΖ diameter ΑΔ, ſumaturque centrum circuli Η, & centro Δ intervallo autem ΔΗ [per 3. poſt.] circulus deſcribatur ΕΗΓΘ, junctæque ΕΗ, ΓΗ ad puncta Β, Ζ producantur, & jungantur ΑΒ, ΒΓ,

ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ: dico hexagonum ΑΒΓΔΕΖ æquilaterum eſſe & æquiangulum.

Quoniam enim Η punctum centrum eſt circuli ΑΒΓΔΕΖ, erit ΗΕ ipſi ΗΔ æqualis. rurſus, quoniam Δ centrum eſt circuli ΕΗΓΘ, erit ΔΕ æqualis ΔΗ. ſed ΗΕ ipſi ΗΑ æqualis oſtenſa eſt, ergo ΗΕ ipſi ΕΔ eſt æqualis: æquilaterum igitur eſt ΕΗΔ triangulum, ideoque tres ipſius anguli ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ſunt inter ſe æquales, quoniam [per 5. 1.] triangulorum iſoſcelium anguli ad baſim ſunt inter ſe æquales. & ſunt [per 32. 1.] trianguli tres anguli æquales duobus rectis: angulus igitur ΕΗΔ eſt tertia pars duorum rectorum. ſimiliter oſtendetur & ΔΗΓ duorum rectorum pars tertia. & quoniam [per 13. 1.] recta linea ΓΗ ſuper rectam ΕΒ inſiſtens angulos qui deinceps ſunt ΕΗΓ, ΓΗΒ duobus rectis æquales efficit, erit & reliquus ΓΗΒ pars tertia duorum rectorum: anguli igitur ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ inter ſe ſunt æquales. & qui ipſis ad verticem ſunt anguli ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ æquales ſunt [per 15. 1.] angulis ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ: quare ſex anguli ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ſunt inter ſe æquales. ſed [per 26. 3.] æquales anguli æqualibus circumferentiis inſiſtunt: ſex igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ inter ſe ſunt æquales. æquales autem circumferentias [per 29. 3.] æquales rectæ lineæ ſubtendunt: ergo & ſex rectæ lineæ inter ſe æquales ſunt, ac propterea æquilaterum eſt ΑΒΓΔΕΖ hexagonum. dico & æquiangulum eſſe. quoniam enim circumferentia ΑΖ circumferentiæ ΕΔ eſt æqualis, communis addatur circumferentia ΑΒΓΔ: tota igitur ΖΑΒΓΔ circumferentia æqualis eſt toti circumferentiæ ΕΔΓΒΑ, & circumferentiæ ΖΑΒΓΔ angulus ΖΕΔ inſiſtit, circumferentiæ vero ΕΔΓΒΑ inſiſtit angulus ΑΖΕ: angulus igitur ΑΖΕ [per 27. 3.] angulo ΔΕΖ eſt æqualis. ſimiliter oſtendentur & reliqui anguli hexagoni ΑΒΓΔΕΖ ſigillatim æquales alterutri ipſorum ΑΖΕ, ΖΕΔ: eſt igitur æquiangulum ΑΒΓΔΕΖ hexagonum. oſtenſum autem eſt & æquilaterum eſſe: & inſcriptum eſt in circulo ΑΒΓΔΕΖ.



In dato igitur circulo inſcriptum eſt hexagonum æquilaterum & æquiangulum. quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus circuli ſemidiametro æquale eſſe.

Et ſi per puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ducamus contingentes circulum, circa circulum circumſcribetur hexagonum æquilaterum & æquiangulum, ad modum eorum, quæ de pentagono dicta ſunt. ad quorum modum etiam dato hexagono circulum inſcribemus & circumſcribemus.

ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. ἀλλὰ ἡ ΗΕ τῇ ΗΑ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐπειδήπερ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καί εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. ἐπεὶ καὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΕΒ εὐθεῖαν τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἓξ ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒΑ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκε ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Καὶ ἐὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων ἐφαπτόμενοι τοῦ κύκλου ἀχθῶσιν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀχθέντων τῶν ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένων. καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

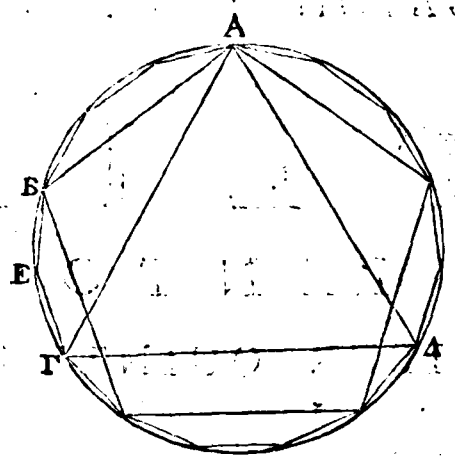
Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσόπλευρου τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγραφόμενον πλευρὰ ἡ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσόπλευρος ἡ ΑΒ· οἵων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τέτταρα ἔσται τοῦ κύκλου ἴσης πέντε. ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πέμπτον ἔσα τοῦ κύκλου, ἴσης τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερῶν πεντεκαιδεκάτη ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες ταῖς ΒΕ, ΕΓ εὐθείας, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἁρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΟΜΟΙΩΣ δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, ἐὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγαγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ἔτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαιδεκάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

SIT datus circulus ΑΒΓΔ: oportet in circulo ΑΒΓΔ quindecagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.



Inscribatur circulo ΑΒΓΔ trianguli quidem æquilateri ipsi inscripti latus ΑΓ, pentagoni vero æquilateri latus ΑΒ: qualium igitur partium circulus ΑΒΓΔ est quindecim, talium circumferentia ΑΒΓ (tertia existens circuli) erit quinque. circumferentia vero ΑΒ, quæ quinta est circuli, erit trium: ergo reliqua ΒΓ est duarum. secetur [per 30. 3.] ΒΓ bifariam in puncto Ε: quare utraque ipsarum ΒΕ, ΕΓ circumferentiarum quintadecima pars est ΑΒΓΔ circuli. si igitur jungentes ΒΕ, ΕΓ æquales ipsis in continuum rectas lineas circulo ΑΒΓΔ [per 1. 4.] aptemus, erit in ipso inscriptum quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. quod erat faciendum.

AD MODUM autem eorum quæ dicta sunt de pentagono, si per circuli divisiones ducamus rectas lineas circulum contingentes, circa ipsum circumscribetur quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. & insuper, ad modum eorum quæ dicta sunt de pentagono, dato quindecagono æquilatero & æquiangulo, circulum inscribemus & circumscribemus.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

1. PARS eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

2. Multiplex eſt major minoris, quando minor majorem metitur.

3. * Ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis ſecundum quantuplicitatem mutua quædam habitudo.

4. Rationem inter ſe magnitudines habere dicuntur, quæ multiplicatæ ſe invicem ſuperare poſſunt.

5. In eadem ratione magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam & tertia ad quartam; quando primæ & tertiæ æque multiplices ſecundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una ſuperant, vel una æquales ſunt, vel una deficiunt inter ſe comparatæ.

6. Magnitudines quæ eandem rationem habent, proportionales vocentur.

7. Quando autem æque multiplicium, multiplex primæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ, multiplex autem tertiæ non ſuperaverit multiplicem quartæ: tunc prima ad ſecundam majorem habere dicitur rationem, quam tertia ad quartam.

ΟΡΟΙ.

α'. ΜΕΡΟΣ ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλαττον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β'. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά τις πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

δ'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δυνάται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ε'. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ μὲν δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν, ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλληλα.

ϛ'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἀνάλογον καλείσθω.

ζ'. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

η'. Ανα-

* *i. e.* Ratio eſt ea magnitudinum homogenearum inter ſe relatio (ſeu habitudo) qua innuitur quomodo ſe habet altera ad alteram, ſecundum quantuplicitatem conſiderata. Vide Cl. *Walliſii* opera Mathematica, Vol. 2. p. 665.

η'. Ἀναλογία δέ ἐστιν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

θ'. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν.

ι'. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ια'. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· ᾗ ἀεὶ ἑξῆς ἐπὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

ιβ'. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

ιγ'. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

ιδ'. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

ιε'. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ις'. Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ιζ'. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

ιη'. Δι᾽ ἴσου λόγος ἐστί, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος οἱ δύο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. ἢ ΑΛΛΩΣ. Λῆψις τῶν ἄκρων καθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

ιθ'. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ᾖ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ ᾗ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι.

κ'. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, λέγῃ, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

8. Proportio eſt rationum ſimilitudo.

9. Proportio in tribus ad minimum terminis conſiſtit.

10. Si tres magnitudines ſint proportionales, prima ad tertiam duplicatam habere dicitur rationem ejus quam habet ad ſecundam.

11. Si quatuor magnitudines ſint proportionales, prima ad quartam triplicatam habere dicitur rationem ejus quam habet ad ſecundam; & ſic deinceps uno amplius, quamdiu proportio exſtiterit.

12. Homologæ magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

13. Alterna ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

14. Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis ut antecedentis ad antecedentem ut ad conſequentem.

15. Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis una cum conſequente tanquam unius ad ipſam conſequentem.

16. Diviſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

17. Converſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

18. Ex æqualitate ratio eſt, quando, pluribus exiſtentibus magnitudinibus & aliis ipſis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in ſecundis magnitudinibus prima ad ultimam. VEL ALITER. Sumptio extremarum per ſubſtractionem mediarum.

19. Ordinata proportio eſt, quando fuerit ut antecedens ad conſequentem ita antecedens ad conſequentem; ut autem conſequens ad aliam quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

20. Perturbata vero proportio eſt, quando, tribus exiſtentibus magnitudinibus & aliis ipſis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliam quampiam, ita in ſecundis magnitudinibus alia quæpiam ad antecedentem.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices; quam multiplex eſt una magnitudo unius, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SInt quotcunque magnitudines AB, ΓΔ quotcunque magnitudinum E, Z æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices: dico quam multiplex eſt AB ipſius E, tam multiplices eſſe & AB, ΓΔ ipſarum E, Z.

Quoniam enim AB æque multiplex eſt ipſius E, atque ΓΔ ipſius Z; quot magnitudines ſunt in AB æquales ipſi E, tot erunt & in ΓΔ æquales ipſi Z. dividatur AB quidem in partes ipſi E æquales, quæ ſint AH, HB; ΓΔ vero dividatur in partes æquales ipſi Z, videlicet ΓΘ, ΘΔ: erit igitur multitudo partium ΓΘ, ΘΔ æqualis multitudini ipſarum AH, HB. & quoniam AH eſt æqualis E, & ΓΘ æqualis Z; erunt & AH, ΓΘ æquales ipſis E, Z. eadem ratione HB eſt æqualis E, & ΘΔ ipſi Z; erunt igitur & HB, ΘΔ æquales ipſis E, Z: quot igitur ſunt in AB æquales ipſi E, tot ſunt & in AB, ΓΔ æquales ipſis E, Z: ergo quam multiplex eſt AB ipſius E, tam multiplices erunt & AB, ΓΔ ipſarum E, Z.

Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices; quam multiplex eſt una magnitudo unius, tam multiplices erunt & omnes omnium. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ AB, ΓΔ ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν E, Z ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ AB τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ E, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Z· ὅσα ἄρα μερίδες ἐστὶν ἐν τῷ AB ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Z. διῃρήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰς τῷ E μερίδας ἴσας τὰς AH, HB, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰς τῷ Z ἴσας τὰς ΓΘ, ΘΔ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΘ, ΘΔ τῷ πλήθει τῶν AH, HB. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH τῷ E, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ AH, ΓΘ τοῖς E, Z. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἴσα ἐστὶ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ AB ἴσαι τῷ E, τοσαῦται καὶ ἐν τοῖς AB, ΓΔ ἴσαι τοῖς E, Z· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου πολλαπλάσιον· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. II. PROBL.

Si prima ſecundæ æque multiplex fuerit atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex atque ſexta quartæ; erunt etiam prima & quinta, ſimul ſumptæ, ſecundæ æque multiplices atque tertia & ſexta quartæ.

PRima enim AB ſecundæ Γ æque multiplex ſit atque tertia ΔE quartæ Z; ſit autem & quinta BH ſecundæ Γ æque multiplex atque ſexta EΘ quartæ Z: dico primam & quintam ſimul ſumptas AH ſecundæ Γ æque multiplices eſſe atque tertiam & ſextam ΔΘ quartæ Z.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

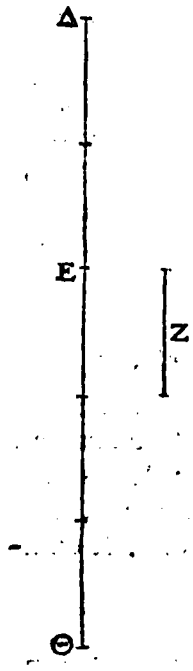
Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ AB δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔE τετάρτου τοῦ Z, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ BH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ EΘ τετάρτου τοῦ Z· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Z.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ ΒΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ ΑΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ἰσοπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ· καὶ συνεπτύχθω ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον δύτερον τοῦ Γ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τέταρτον, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τέταρτον· καὶ συνεπτυχθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτου καὶ ἕκτου τετάρτου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Quoniam enim AB æque multiplex eſt ipſius Γ atque ΔE ipſius Z; quot magnitudines ſunt in AB æquales Γ, tot erunt & in ΔE æquales Z. eadem ratione & quot ſunt in BH æquales Γ, tot & in EΘ erunt æquales Z: quot igitur ſunt in tota AH æquales Γ, tot erunt & in tota ΔΘ æquales Z: ergo quam multiplex eſt AH ipſius Γ, tam multiplex eſt & ΔΘ ipſius Z: prima igitur & quinta ſimul ſumptæ AH ſecundæ Γ æque multiplices erunt atque tertia & ſexta ΔΘ quartæ Z.

Quare ſi prima ſecundæ æque multiplex fuerit atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex atque ſexta quartæ; erunt prima & quinta ſimul ſumptæ æque multiplices ſecundæ atque tertia & ſexta quartæ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

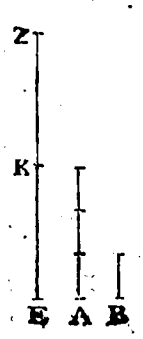
Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, λαμβάνῃ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δίσου τῶν λαμβανομένων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Prop. III. Theor.

Si prima ſecundæ æque multiplex fuerit atque tertia quartæ, ſumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æquo ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ· ἴσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα δὴ καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. διῃρήσθω τὸ ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλήθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ· ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β, καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ. ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ, ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ· καὶ συνεπτύχθω ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ



PRima enim A ſecundæ B æque multiplex ſit atque tertia Γ quartæ Δ: & ſumantur ipſarum A, Γ æque multiplices EZ, HΘ: dico EZ æque multiplicem eſſe ipſius B atque HΘ ipſius Δ.

Quoniam enim EZ æque multiplex eſt ipſius A, atque HΘ ipſius Γ; quot magnitudines ſunt in EZ æquales A, tot erunt & in HΘ æquales Γ. dividatur EZ quidem in magnitudines ipſi A æquales EK, KZ; HΘ vero dividatur in magnitudines æquales ipſi Γ, videlicet HΛ, ΛΘ: erit igitur ipſarum EK, KZ multitudo æqualis multitudini ipſarum HΛ, ΛΘ. & quoniam æque multiplex eſt A ipſius B atque Γ ipſius Δ, æqualis autem EK ipſi A, & HΛ ipſi Γ; erit EK æque multiplex ipſius B atque HΛ ipſius Δ. eadem ratione æque multiplex erit KZ ipſius B atque ΛΘ ipſius Δ. quoniam igitur prima EK ſecundæ B æque multiplex eſt atque tertia HΛ quartæ Δ; eſt autem & quinta KZ ſecundæ B æque multiplex atque ſexta ΛΘ quartæ Δ: erit [per 2. 5.] & compoſita è prima & quinta EZ

ſecundæ B æque multiplex atque tertia & ſexta HΘ quartæ Δ.

Si igitur prima ſecundæ æque fuerit multiplex atque tertia quartæ, ſumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æquo ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ. quod erat demonſtrandum.

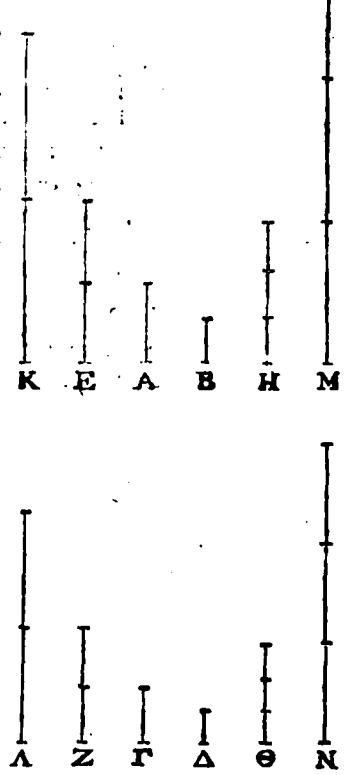
Prop. IV. Theor.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; & æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter ſe comparatæ.

PRima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat quam tertia Γ ad quartam Δ, & ſumantur ipſarum quidem A, Γ utcunque æque multiplices E, Z, ipſarum vero B, Δ aliæ utcunque æque multiplices HΘ: dico E ad H ita eſſe, ut Z ad Θ.

Sumantur enim ipſarum quidem E, Z æque multiplices K, Λ, & ipſarum H, Θ æque multiplices M, N.

Quoniam igitur E æque multiplex eſt ipſius A atque Z ipſius Γ, ſumuntur autem; ipſarum E, Z æque multiplices K, Λ: erit [per 3. 5.] K æque multiplex ipſius A atque Λ ipſius Γ. eadem ratione M æque multiplex erit ipſius B atque N ipſius Δ. & quoniam eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, ſumptæ autem ſunt ipſarum A, Γ æque multiplices K, Λ, & ipſarum B, Δ aliæ utcunque æque multiplices M, N; ſi K ſuperat M, ſuperabit [per 5. def. 5.] & Λ ipſam N; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor erit. ſuntque K, Λ quidem ipſarum E, Z æque multiplices; M, N vero ipſarum H, Θ aliæ utcunque æque multiplices: ut igitur E ad H, ita erit [per 5. def. 5.] Z ad Θ.



Quare ſi prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter ſe comparatæ. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Quoniam igitur demonſtratum eſt, ſi K ſuperat M, & Λ ipſam N ſuperare; & ſi æqualis,

δευτέρου τῦ B ἰσάκις ἐσόμενα πολλαπλάσια καὶ τρίτου καὶ ἕκτου τὸ HΘ τετάρτου τῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δύσι τ̃ ληφθέντων ἑκατέρου ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσια, τὸ μὲν τῦ δευτέρου, τὸ δὲ τῦ τετάρτου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τ̃ αὐτὸν ἔχῃ λόγον ᾧ τρίτον πρὸς τέταρτον· ᾧ καὶ ἰσάκις πολλαπλάσια τῦ τε πρώτου ᾧ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τ̃ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν, τ̃ αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα καταλλήλα.

ΠΡῶτον γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τ̃ μὲν A, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ E, Z, τ̃ δὲ B, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ H, Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ E πρὸς τὸ H οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ Θ.

Εἰλήφθω γὰρ τ̃ μὲν E, Z ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ K, Λ, τ̃ δὲ H, Θ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ M, N.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν E τῦ A, τὸ δὲ Z τῦ Γ, καὶ εἴληπται τ̃ E, Z ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ K, Λ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ K τῦ A καὶ τὸ Λ τῦ Γ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ M τῦ B καὶ τὸ N τῦ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τ̃ μὲν A, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ K, Λ, τῶν δὲ B, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ M, N· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ K τῦ M, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τῦ N· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὰ μὲν K, Λ τ̃ E, Z ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ M, N τ̃ H, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ E πρὸς τὸ H, οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ Θ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τ̃ αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν, τ̃ αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα καταλλήλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὅτι, εἰ ὑπερέχει τὸ K τῦ M, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τῦ N· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον·

ἴλασσον· ὁμοίως δὴ κἂν ἴσον ᾖ τὸ Μ τῷ Κ, ὑπάρχει καὶ τὸ Ν τῷ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ ἐφ' ὧν ἔφαμεν καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Ζ. * Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

æqualem esse; & si minor, minorem: constat etiam si Μ superat Κ, & Ν superare ipsam Λ; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem: ac propterea ut Η ad Ε, ita erit Θ ad Ζ. Ex hoc manifestum est, si quatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Prop. V. Theor.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ; erit & reliqua reliquæ æque multiplex atque tota totius.

Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ, κεῖται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ ἑκάτερον τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τὸ ΗΓ τῷ ΔΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

MAgnitudo enim ΑΒ magnitudinis ΓΔ æque multiplex sit atque ablata ΑΕ ablatæ ΓΖ: dico & reliquam ΕΒ reliquæ ΖΔ æque multiplicem esse atque totam ΑΒ totius ΓΔ.

Quam multiplex enim est ΑΕ ipsius ΓΖ, tam multiplex fiat & ΕΒ ipsius ΓΗ.

Et quoniam [per 1. 5.] ΑΕ æque multiplex est ipsius ΓΖ atque ΑΒ ipsius ΗΖ, ponitur autem ΑΕ æque multiplex ipsius ΓΖ atque ΑΒ ipsius ΓΔ; æque multiplex est ΑΒ utriusque ΗΖ, ΓΔ: ac propterea ΗΖ ipsi ΓΔ est æqualis. communis auferatur ΓΖ: reliqua igitur ΗΓ æqualis est reliquæ ΔΖ. itaque quoniam ΑΕ æque multiplex est ΓΖ atque ΕΒ ipsius ΗΓ, estque ΗΓ æqualis ΔΖ; erit ΑΕ æque multiplex ΓΖ atque ΕΒ ipsius ΖΔ. æque multiplex autem ponitur ΑΒ ipsius ΓΖ atque ΑΒ ipsius ΓΔ: ergo ΕΒ est æque multiplex ipsius ΖΔ atque ΑΒ ipsius ΓΔ: & reliqua igitur ΕΒ reliquæ ΖΔ æque multiplex est atque tota ΑΒ totius ΓΔ.

Quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ; erit & reliqua reliquæ æque multiplex atque tota totius. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Prop. VI. Theor.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

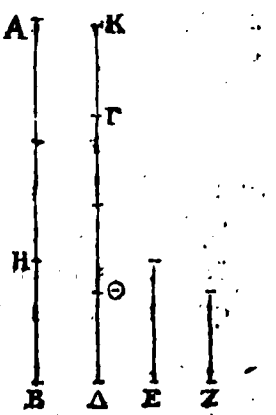
Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστί. κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ.

DUÆ enim magnitudines ΑΒ, ΓΔ, duarum magnitudinum Ε, Ζ sint æque multiplices, & ablatæ ΑΗ, ΓΘ earundem Ε, Ζ sint æque multiplices: dico & reliquas ΗΒ, ΘΔ vel ipsis Ε, Ζ æquales esse, vel ipsarum æque multiplices.

Sit enim primum ΗΒ æqualis Ε: dico & ΘΔ ipsi Ζ esse æqualem. ponatur enim ipsi Ζ æqualis ΓΚ.

* Aliis in libris Corollarium incipit ad hæc verba, Ἐκ δὴ τούτου, &c.

Et quoniam AH æque multiplex eſt ipſius E atque Γ Θ ipſius Z, eſtque H B quidem æqualis E; Γ K vero æqualis Z: erit [per 2. 5.] AB æque multiplex ipſius E, atque KΘ ipſius Z. æque autem multiplex ponitur AB ipſius E atque Γ Δ ipſius Z: ergo KΘ æque multiplex eſt ipſius Z atque Γ Δ ipſius Z. quoniam igitur utraque ipſarum KΘ, Γ Δ eſt æque multiplex ipſius Z, erit KΘ æqualis Γ Δ. communis auferatur Γ Θ: ergo reliqua KΓ reliquæ ΘΔ eſt æqualis. ſed KΓ eſt æqualis Z: ΘΔ igitur ipſi Z eſt æqualis. ſi igitur HB ipſi E æqualis fuerit, etiam ΘΔ ipſi Z æqualis erit.



Similiter demonſtrabimus ſi HB [ut in fig. 2.] multiplex fuerit ipſius E, &c ΘΔ ipſius Z æque multiplicem eſſe.

Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices ſint, & ablatæ quædam ſint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ vel iiſdem æquales, vel ipſarum æque multiplices. quod erat demonſtrandum.

Prop. VII. Theor.

Æquales magnitudines eandem habent rationem ad eandem, & eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A, B, alia autem quævis magnitudo Γ: dico utramque ipſarum A, B ad Γ eandem habere rationem; & etiam Γ ad utramque A, B eandem habere rationem.

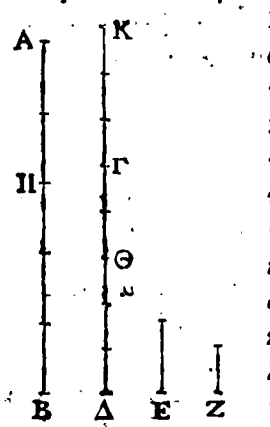
Sumantur enim ipſarum A, B æque multiplices Δ, E, & ipſius Γ alia utcunque multiplex Z.

Quoniam igitur æque multiplex eſt Δ ipſius A atque E ipſius B, eſtque A ipſi B æqualis; erit & Δ æqualis E. alia autem eſt Z utcunque multiplex ipſius Γ: ergo ſi Δ ſuperat Z, & E ipſam Z ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. & ſunt Δ, E quidem ipſarum A, B æque multiplices, Z vero alia utcunque multiplex ipſius Γ: erit igitur [per 5. def. 5.] ut A ad Γ, ita B ad Γ.

Dico inſuper Γ ad utramque ipſarum A, B eandem habere rationem.

Iiſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus Δ ipſi E æqualem eſſe, aliam vero quandam Z. ſi igitur Z ſuperat Δ, ipſam quoque E ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. atque eſt Z quidem ipſius Γ multiplex, Δ, E vero aliæ utcunque æque multiplices ipſarum A, B: ergo [per 5. def. 5.] ut Γ ad A ita erit Γ ad B.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ Γ Θ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΚ τῷ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. ἰσάκις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ τὸ Γ Δ τοῦ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. ἐπεὶ οὖν ἴσα ἐστὶ τὰ ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΚΓ τῷ Ζ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἐστιν ἴσον. ὥστε ἐὰν τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ᾖ, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Ζ.



Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, ποιοῦμεν πλάσιον ἴσον καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

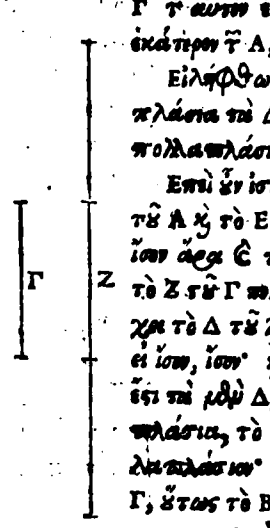
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι ὃ ἔτυχε μέγεθος τὸ Γ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Δ τῷ Ε. ἄλλο δέ τι ὃ ἔτυχε τὸ Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὰ μὲν Δ, Ε τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.



Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε, ἄλλο δέ τι τὸ Ζ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ Ε· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ, Ε τῶν Α, Β ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β.

Τὰ

Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Æquales igitur ad eandem eandem habent rationem, & eadem ad æquales. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

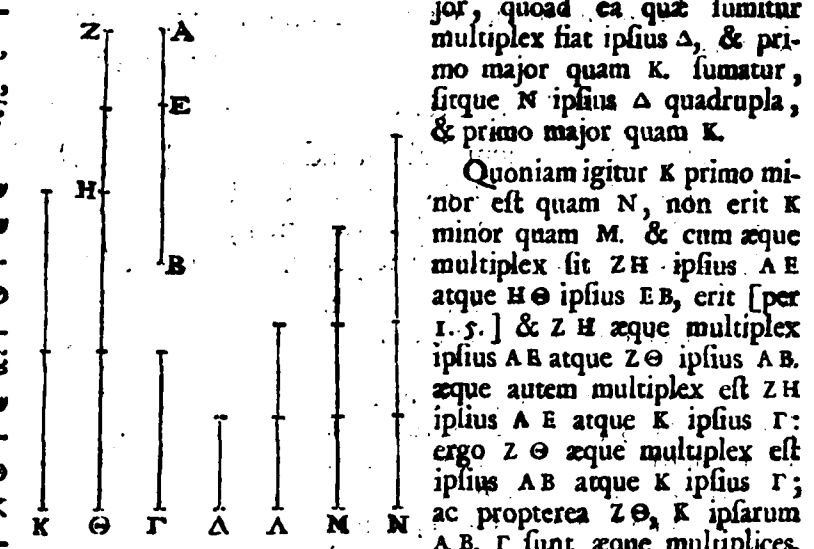
Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Prop. VIII. Theor.

Inæqualium magnitudinum, major ad eandem majorem habet rationem quam minor: & eadem ad minorem majorem habet rationem quam ad majorem.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι ὁ ἔτυχε τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΕ, τὸ δὲ ἔλασσον τὸ ΑΕ, ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ ἔλαττον τοῦ ΕΒ, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ ΑΕ ἕως ἂν τὸ γινόμενον μεῖζον ᾖ τοῦ Δ. καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἑξῆς ἐπὶ πλεῖον ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ. εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τῷ Κ. τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον· οὐδ' ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἔλαττόν ἐστι. μεῖζον δὲ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ συναμφότερα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἐστιν ἴσα· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἔστι τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τοῦ δὲ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἔστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια·

Sint inæquales magnitudines AB, Γ, & ſit AB major Γ, alia vero utcunque Δ: dico AB ad Δ majorem habere rationem quam Γ ad Δ; & Δ ad Γ majorem habere rationem quam ad AB.

Quoniam enim AB major eſt quam Γ, ponatur [per 3. 1.] ipſi Γ æqualis BE; minor igitur ipſarum AE, EB multiplicata major aliquando erit [per 4. def. 5.] quam Δ. ſit primum AE minor quam EB, & multiplicetur AE quoad fiat major quam Δ: ſitque ZH ipſius AE multiplex, quæ ipſa Δ eſt major. quam multiplex autem eſt ZH ipſius AE, tam multiplex fiat & HΘ ipſius EB, & K ipſius Γ: ſumaturque ipſius Δ dupla quidem Λ, tripla vero M, & deinceps una major, quoad ea quæ ſumitur multiplex fiat ipſius Δ, & primo major quam K. ſumatur, ſitque N ipſius Δ quadrupla, & primo major quam K.

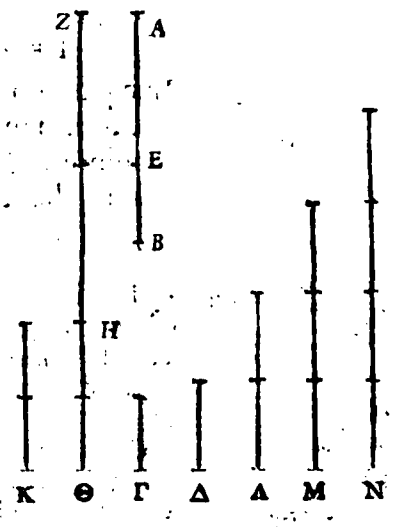
Quoniam igitur K primo minor eſt quam N, non erit K minor quam M. & cum æque multiplex ſit ZH ipſius AE atque HΘ ipſius EB, erit [per 1. 5.] & ZH æque multiplex ipſius AE atque ZΘ ipſius AB. æque autem multiplex eſt ZH ipſius AE atque K ipſius Γ: ergo ZΘ æque multiplex eſt ipſius AB atque K ipſius Γ; ac propterea ZΘ, K ipſarum AB, Γ ſunt æque multiplices. rurſus, quoniam HΘ æque multiplex eſt ipſius EB atque K ipſius Γ, eſtque EB æqualis Γ; erit & HΘ ipſi K æqualis. ſed K non eſt minor quam M: non eſt igitur HΘ minor quam M. major autem eſt [per conſtr.] ZH quam Δ: ergo tota ZΘ utriſque ſimul Δ, M major erit. ſed utrique ſimul Δ, M ſunt æquales N: quare ZΘ ſuperat N; K vero ipſam N non ſuperat. & ſunt ZΘ, K æque multiplices ipſarum AB, Γ; & N ipſius Δ alia quædam multiplex: ergo [per 7. def. 5.] AB ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad Δ.

Dico præterea & Δ ad Γ majorem habere rationem, quam Δ ad AB.

Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus N ſuperare K, ipſam vero ZΘ non ſuperare. atque eſt N multiplex ipſius Δ, & ZΘ, K aliæ quædam ipſarum AB, Γ æque multiplices;

tiplices; ergo [per 7. def. 5.] Δ ad Γ majorem rationem habet, quam Δ ad AB.

Sed ſit AB major quam EB: erit igitur [per 4. def. 5.] minor EB multiplicata aliquando major quam Δ. multiplicetur, & ſit HΘ multiplex quidem ipſius EB, major vero quam Δ. & quam multiplex eſt HΘ ipſius EB, tam multiplex fiat ZH ipſius AE, & K ipſius Γ. ſimili ratione qua prius oſtendemus ZΘ, K ipſarum AB, Γ æque multiplices eſſe. ſumaturque ſimiliter N multiplex ipſius Δ, primo autem major quam ZH: ergo rurſus ZH non eſt minor quam M. major autem HΘ quam Δ: tota igitur ZΘ ſuperat Δ & M ſimul, hoc eſt N. at K ipſam N non ſuperat, quoniam ZH, quæ major eſt quam HΘ, hoc eſt quam K, non ſuperat N. & ſimiliter ut in iis, quæ ſuperius dicta ſunt, demonſtrationem abſolvemus.



Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet rationem, quam minor: & eadem ad minorem majorem rationem habet, quam ad majorem. quod erat demonſtrandum.

Prop. IX. Theor.

Quæ eandem rationem habent ad eandem, ſunt inter ſe æquales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipſæ etiam ſunt inter ſe æquales.

HAbeat enim utraque ipſarum A, B ad Γ eandem rationem: dico A ipſi B æqualem eſſe.

Si enim non eſſet æqualis, non haberet [per 8. 5.] utraque ipſarum A, B ad Γ eandem rationem. habet autem: æqualis igitur eſt A ipſi B.

HABEAT rurſus Γ ad utramque ipſarum A, B eandem rationem: dico A æqualem eſſe ipſi B.

Si enim non ſit, [per 8. 5.] non haberet Γ ad utramque A, B eandem rationem. habet autem: ergo A ipſi B eſt æqualis.

Quæ igitur eandem rationem habent ad eandem, ſunt inter ſe æquales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipſæ etiam ſunt inter ſe æquales. quod erat demonſtrandum.

Prop. X. Theor.

Magnitudinum rationem habentium ad eandem, quæ majorem habet rationem, eſt major; ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa eſt minor.

HAbeat enim A ad Γ majorem rationem, quam B ad Γ: dico A majorem eſſe quam B.

πλείονα· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ AB.

Ἀλλὰ δὴ τὸ AE μεῖζον ἔστω τοῦ EB· τὸ δὴ ἔλαττον τὸ EB πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ HΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ EB, μεῖζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ HΘ τοῦ EB, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ZH τοῦ AE, τὸ δὲ K τοῦ Γ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ZΘ, K τῶν AB, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ N πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ ZH· ὥστε πάλιν τὸ ZH τοῦ M οὐκ ἔστιν ἔλασσον. μεῖζον δὲ τὸ HΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ZΘ τῶν Δ, M ὑπερέχει τοσούτῳ τοῦ N ὑπερέχει, τὸ δὲ K τοῦ N οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ ZH μεῖζον ὂν τοῦ HΘ, τοσούτῳ τὸ K, τοῦ N οὐχ ὑπερέχει. καὶ ὁσαυτῶς κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν.

Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ΕΧΕΤΩ γὰρ ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B.

ΕΧΕΤΩ δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

ΕΧΕΤΩ γάρ τὸ A πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ B πρὸς τὸ Γ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ A τοῦ B.

Εἰ

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β, ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Α τῷ Β, ἑκάτερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. ἀλλὰ μὴν οὐδὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β, τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ τὸν ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.

ΕΧΕΤΩ δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ μεῖζον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Β τῷ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. ἀλλὰ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ πρὸς τὸ Α. οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α.

Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστι καὶ πρὸς ὃ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim non eſt major, vel æqualis eſt, vel minor. æqualis autem non eſt A ipſi B, utraque enim ipſarum A, B ad Γ [per 7. 5.] eandem haberet rationem. atqui eandem non habet: non eſt igitur A æqualis ipſi B. ſed neque minor eſt A quam B, haberet enim A ad Γ [per 8. 5.] minorem rationem quam B ad Γ. atqui non habet minorem: non eſt igitur A minor quam B. oſtenſum autem eſt neque eſſe æqualem: ergo A quam B major erit.

HABEAT rurſus Γ ad B majorem rationem quam Γ ad A: dico B minorem eſſe quam A.

Si enim non eſt minor, vel æqualis eſt, vel major. æqualis utique non eſt B ipſi A, etenim Γ ad utramque ipſarum A, B [per 7. 5.] eandem rationem haberet. non habet autem: ergo A ipſi B non eſt æqualis. ſed neque major eſt B quam A, haberet enim [per 8. 5.] Γ ad B minorem rationem quam ad A. atqui non habet: non eſt igitur B major quam A. oſtenſum autem eſt neque æqualem eſſe: ergo B minor erit quam A.

Magnitudinum igitur rationem habentium ad eandem, quæ majorem habet rationem illa major eſt: & ad quam eadem majorem habet rationem, illa eſt minor. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

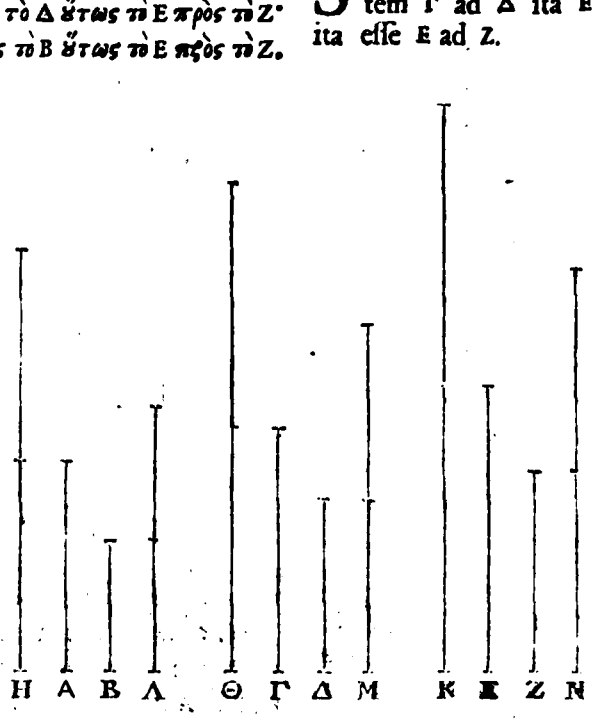
PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eædem ſunt rationes, & inter ſe ſunt eædem.

Ἔστω γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἰλήπται τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια ἃ ἔτυχε τὰ Λ, Μ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἰλήπται τῶν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ

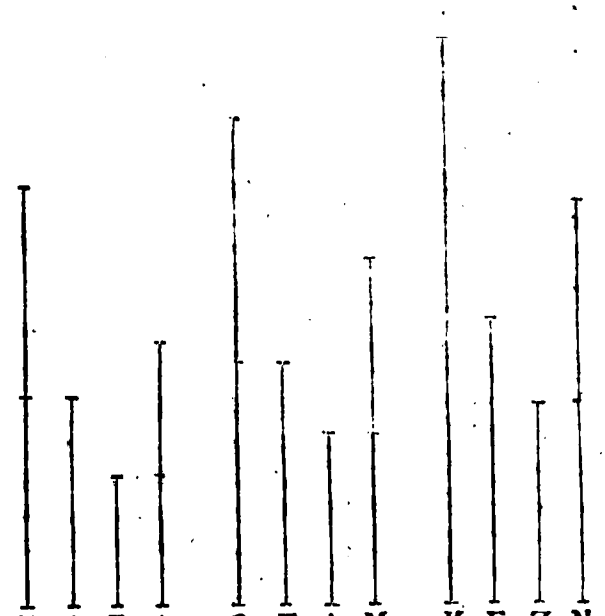


SInt enim ut A ad B ita Γ ad Δ, ut autem Γ ad Δ ita E ad Z: dico ut A ad B ita eſſe E ad Z.

Sumantur enim ipſarum quidem A, Γ, E æque multiplices H, Θ, K; ipſarum vero B, Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N.

Quóniam igitur eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, & ſumptæ ſunt ipſarum A, Γ æque multiplices H, Θ, & ipſarum B, Δ aliæ utcunque æque multiplices Λ, M: ſi H ſuperat Λ, [per 5. def. 5.] & Θ ipſam M ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. rurſus, quoniam eſt ut Γ ad Δ ita E ad Z, & ſumptæ ſunt ipſarum Γ, E æque multiplices Θ, K; ipſarum vero Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices M, N: ſi Θ ſuperat M, & K ipſam N ſuperabit;

perabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſed ſi Θ ſuperat M, & H ſuperabit Λ; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor: quare ſi H ſuperat Λ, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. & ſunt H, K quidem ipſarum A, E æque multiplices, Λ, N vero ipſarum B, Z aliæ utcunque æque multiplices: ergo [per 5. def. 5.] ut A ad B ita erit E ad Z.



Quæ igitur eidem eædem ſunt rationes, & inter ſe ſunt eædem. quod erat demonſtrandum.

Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· ἀλλὰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Β, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοί, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XII. Theor.

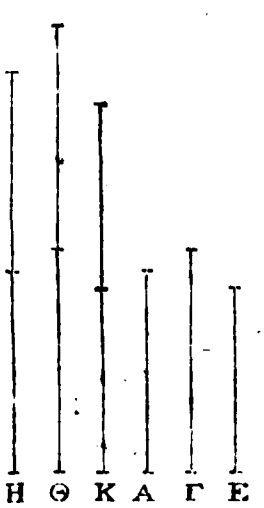
Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

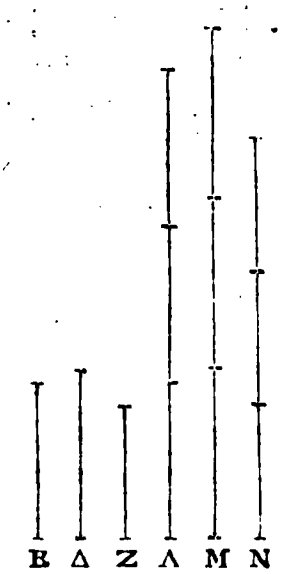
Sint quotcunque magnitudines proportionales A, B, Γ, Δ, E, Z; & ut A ad B ita ſit Γ ad Δ, & E ad Z: dico ut A ad B ita eſſe A, Γ, E ad B, Δ, Z.

Sumantur enim ipſarum A, Γ, E æque multiplices H, Θ, K, & ipſarum B, Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N.



Quoniam igitur ut A ad B ita eſt Γ ad Δ, & E ad Z; & ſumptæ ſunt ipſarum quidem A, Γ, E æque multiplices H, Θ, K, ipſarum vero B, Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N: ſi H ſuperat Λ, [per 5. def. 5.] & Θ ipſam M ſuperabit, & K ipſam N; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. quare & ſi H ſuperat Λ, ſuperabunt & H, Θ, K ipſas Λ, M, N; & ſi æqualis, æquales; & ſi minor, minores. ſuntque H & H, Θ, K ipſarum A & Λ, Γ, E æque multiplices: quoniam [per 1. 5.] ſi fuerint quotcunq; magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices, quam multiplex eſt una magnitudo unius, tam multiplices erunt &

Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Λ, Μ, Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἐλάσσονα. καὶ ἔστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια· ἐπεδήπερ ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια

σια ἔσεσθε καὶ τῶν πάντων τῶν πάντων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ Δ καὶ τοῦ Α, Μ, Ν τὰ Β καὶ τὰ Β, Δ, Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσεσθε ὡς τὸ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

omnes omnium. eadem ratione Α & Λ, Μ, Ν ipſarum Β & Β, Δ, Ζ ſunt æque multiplices: eſt igitur [per 5. def. 5.] ut Α ad Β, ita Α, Γ, Ε ad Β, Δ, Ζ.

Quare ſi quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

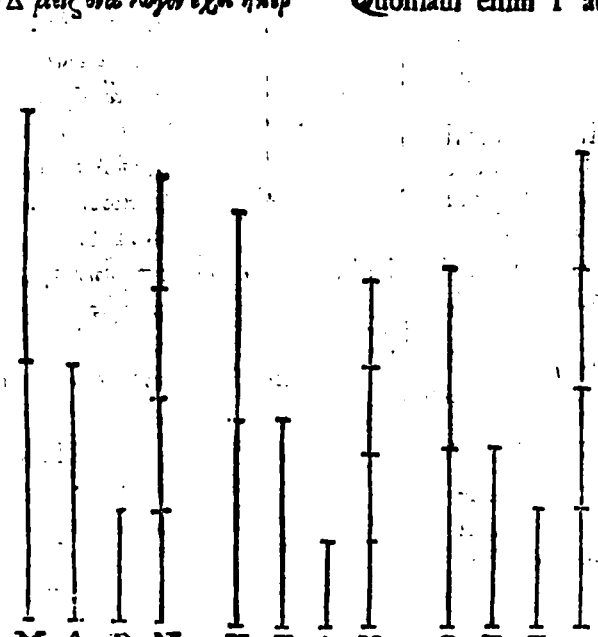
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem habeat rationem quam quinta ad ſextam: & prima ad ſecundam majorem habebit rationem quam quinta ad ſextam.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστι τινὰ τοῦ μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον ὑπερέχει τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει. εἰλήφθω, καὶ ἔστω τοῦ μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α· ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καὶ ἔστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Prima enim Α ad ſecundam Β eandem rationem habeat quam tertia Γ ad quartam Δ; tertia autem Γ ad quartam Δ majorem habeat rationem quam quinta Ε ad ſextam Ζ: dico & primam Α ad ſecundam Β majorem habere rationem quam quintam Ε ad ſextam Ζ.

Quoniam enim Γ ad Δ majorem habet rationem quam Ε ad Ζ, ſunt [per 7. def. 5.] quædam ipſarum Γ, Ε æque multiplices, & ipſarum Δ, Ζ aliæ quædam æque multiplices: & multiplex quidem ipſius Γ ſuperat multiplicem ipſius Δ, multiplex vero ipſius Ε non ſuperat multiplicem ipſius Ζ. ſumantur, & ſint ipſarum Γ, Ε æque multiplices Η, Θ & ipſarum Δ, Ζ aliæ quædam æque multiplices Κ, Λ, ita ut Η quidem ſuperet Κ, Θ vero ipſam Λ non ſuperet: & quam multiplex eſt Η ipſius Γ, tam multiplex ſit & Μ ipſius Α; quam multiplex autem Κ ipſius Δ, tam multiplex ſit & Ν ipſius Β.

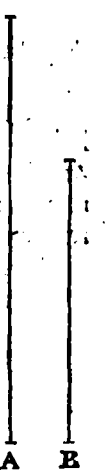
Et quoniam eſt ut Α ad Β ita Γ ad Δ, & ſumptæ ſunt ipſarum Α, Γ æque multiplices Μ, Η, & ipſarum Β, Δ aliæ æque multiplices Ν, Κ: [per 5. def. 5.] ſi Μ ſuperat Ν, & Η ipſam Κ ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſed Η ſuperat Κ: ergo & Μ ipſam Ν ſuperabit. Θ vero non ſuperat Λ; ſuntque Μ, Θ ipſarum Α, Ε æque multiplices, & Ν, Λ ipſarum Β, Ζ aliæ quædam æque multiplices: ergo [per 7. def. 5.] Α ad Β majorem rationem habebit quam Ε ad Ζ.

Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem rationem habeat quam quinta ad ſextam: & prima ad ſecundam majorem habebit rationem quam quinta ad ſextam. quod erat demonſtrandum.

Prop. XIV. Theor.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima autem major ſit quam tertia: & ſecunda quam quarta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

Prima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat quam tertia Γ ad quartam Δ, major autem ſit A quam Γ: dico & B quam Δ majorem eſſe.



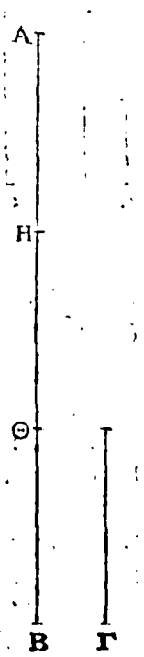
Quoniam enim A major eſt quam Γ, & alia utcunque magnitudo B; habebit [per 8. 5.] A ad B majorem rationem quam Γ ad B. ſed ut A ad B ita Γ ad Δ: ergo & Γ ad Δ majorem habebit rationem [per 13. 5.] quam Γ ad B. ad quam vero eadem majorem habet rationem [per 10. 5.] illa minor eſt; quare Δ eſt minor quam B: ac propterea B quam Δ major erit.

Similiter demonſtrabimus & ſi A æqualis ſit ipſi Γ, & B ipſi Δ eſſe æqualem: & ſi A ſit minor quam Γ, & B quam Δ minorem eſſe.

Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima autem major ſit quam tertia: & ſecunda quam quarta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. quod erat demonſtrandum.

Prop. XV. Theor.

Partes inter ſe comparatæ eandem habent rationem, quam habent earum æque multiplices inter ſe.



Sit enim AB æque multiplex ipſius Γ atque ΔE ipſius Z; dico ut Γ ad Z ita eſſe AB ad ΔE.

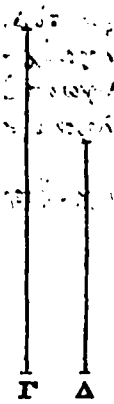
Quoniam enim æque multiplex eſt AB ipſius Γ atque ΔE ipſius Z; quot ſunt magnitudines in AB æquales ipſi Γ, totidem erunt & in ΔE æquales Z. dividatur AB in magnitudines ipſi Γ æquales, quæ ſint AH, HΘ, ΘB; & ΔE dividatur in magnitudines æquales Z, videlicet in ΔK, KΛ, ΛE: erit igitur ipſarum AH, HΘ, ΘB multitudo æqualis multitudini ipſarum ΔK, KΛ, ΛE. & quoniam æquales ſunt inter ſe AH, HΘ, ΘB, ſuntque ΔK, KΛ, ΛE etiam inter ſe æquales; erunt

Ἐαν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸ αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸ αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸ αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Β τοῦ Δ μεῖζόν ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζόν ἐστιν, ἄλλο δέ τί ἐστιν ὃ ἐστὶ μέγεθος τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μεῖζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μεῖζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Δ τοῦ Β· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Δ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ· καὶ ἐλασσον ᾖ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται τὸ Β τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Ἔστω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθη ἴσα, τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα

ὡς

ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ ἕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ· ἔσαι ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγεμόνων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, ἕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ ἕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ ἕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Τὰ ἄρα μέρη τῶν ἰσακισοῦν πολλαπλασίων τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

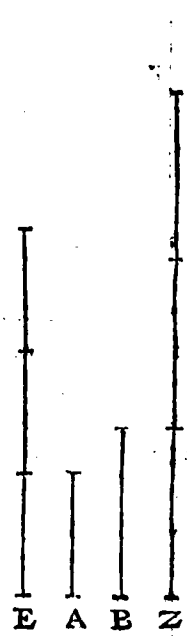
Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β ἕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ ἕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσακις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσακις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσακις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τῶν ὡσαυτως πολλαπλασίων τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β ἕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β ἕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ ἕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσακις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ ἕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ ἕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ ἕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσακις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσακις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ ἕτως

[per 7. 5.] ut ΑΗ ad ΔΚ ita ΗΘ ad ΚΛ, & ΘΒ ad ΛΕ: & erit [per 12. 5.] ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut ΑΗ ad ΔΚ ita ΑΒ ad ΔΕ. sed ΑΗ ipsi Γ est æqualis, & ΔΚ ipsi Ζ: ergo ut Γ ad Ζ ita erit ΑΒ ad ΔΕ.

Partes igitur inter se comparatæ eandem habent rationem, quam habent earum æque multiplices inter se. quod erat demonstrandum.

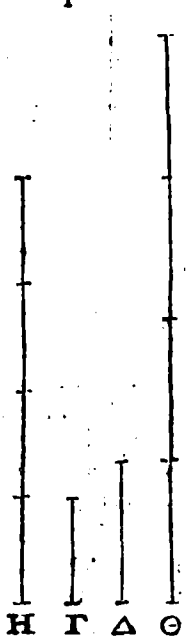
PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & alterne proportionales erunt.

SInt quatuor magnitudines Α, Β, Γ, Δ proportionales, sitque ut Α ad Β ita Γ ad Δ: dico & alterne proportionales esse; videlicet ut Α ad Γ ita esse Β ad Δ.

Sumantur enim ipsarum Α, Β æque multiplices Ε, Ζ, ipsarum vero Γ, Δ aliæ utcunque æque multiplices Η, Θ.

Et quoniam æque multiplex est Ε ipsius Α atque Ζ ipsius Β; partes autem inter se comparatæ [per 15. 5.] eandem habent rationem, quam habent earum æque multiplices inter se: erit ut Α ad Β ita Ε ad Ζ. ut autem Α ad Β ita Γ ad Δ: ergo [per 11. 5.] ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. rursus, quoniam Η, Θ sunt ipsarum Γ, Δ æque multiplices; erit ut Γ ad Δ ita Η ad Θ. ut autem Γ ad Δ ita Ε ad Ζ: ergo [per 11. 5.] ut Ε ad Ζ ita Η ad Θ. quod si quatuor magnitudines proportionales sint, prima autem major sit quam tertia; [per 14. 5.] & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. si igitur Ε superat Η, & Ζ ipsam Θ superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. suntque Ε, Ζ ipsarum Α, Β æque multiplices, & Η, Θ ipsarum Γ, Δ aliæ utcunque æque multiplices: ergo [per 5. def. 5.] ut Α ad Γ ita erit Β ad Δ.



Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & alterne proportionales erunt. quod erat demonstrandum.

PROP. XVII. THEOR.

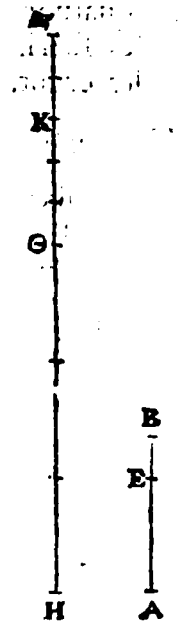
Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.

SInt compositæ magnitudines ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ proportionales, sitque ut ΑΒ ad ΒΕ ita

ΓΔ ad ΔΖ: dico etiam diviſas proportionales eſſe; videlicet ut ΑΕ ad ΕΒ ita eſſe ΓΖ ad ΖΔ.

Sumantur enim ipſarum quidem ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ æque multiplices ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ; ipſarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΚΞ, ΝΠ.

Et quoniam æque multiplex eſt ΗΘ ipſius ΑΕ atque ΘΚ ipſius ΕΒ; erit [per 1. 5.] ΗΘ ipſius ΑΕ æque multiplex atque ΗΚ ipſius ΑΒ. æque autem multiplex eſt ΗΘ ipſius ΑΕ atque ΛΜ ipſius ΓΖ: ergo ΗΚ æque multiplex eſt ipſius ΑΒ atque ΛΜ ipſius ΓΖ. rurſus, quoniam æque multiplex eſt ΛΜ ipſius ΓΖ atque ΜΝ ipſius ΖΔ; erit ΛΜ æque multiplex ipſius ΓΖ atque ΛΝ ipſius ΓΔ. ſed æque multiplex erat ΛΜ ipſius ΓΖ atque ΗΚ ipſius ΑΕ: æque igitur multiplex eſt ΗΚ ipſius ΑΒ atque ΛΝ ipſius ΓΔ: quare ΗΚ, ΛΝ ipſarum ΑΒ, ΓΔ æque multiplices erunt. rurſus, quoniam æque multiplex eſt ΘΚ ipſius ΕΒ atque ΜΝ ipſius ΖΔ; eſt autem & ΚΞ ipſius ΕΒ æque multiplex atque ΝΠ ipſius ΖΔ: etiam [per 2. 5.] compoſita ΘΞ ipſius ΕΒ æque multiplex eſt atque ΜΠ ipſius ΖΔ. cum autem ſit ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ, & ſumptæ ſint ipſarum quidem ΑΒ, ΓΔ æque multiplices ΗΚ, ΛΝ, ipſarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΘΞ ΜΠ: igitur [per 5. def. 5.] ſi ΗΚ ſuperat ΘΞ, & ΛΝ ſuperabit ΜΠ; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſuperet igitur ΗΚ ipſam ΘΞ, communique ablata ΘΚ, & ΗΘ ipſam ΚΞ ſuperabit. ſed ſi ΗΚ ſuperat ΘΞ, & ΛΝ ſuperat ΜΠ: ſuperat itaque ΛΝ ipſam ΜΠ; communique ΜΝ ablata, & ΛΜ ſuperabit ΝΠ: quare ſi ΗΘ ſuperat ΚΞ, & ΛΜ ipſam ΝΠ ſuperabit. ſimiliter demonſtrabimus & ſi ΗΘ ſit æqualis ΚΞ, & ΛΜ ipſi ΝΠ eſſe æqualem; & ſi minor, minorem. ſunt autem ΗΘ, ΛΜ ipſarum ΑΕ, ΓΖ æque multiplices, & ipſarum ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΚΞ, ΝΠ: ergo [per 5. def. 5.] ut ΑΕ ad ΕΒ ita erit ΓΖ ad ΖΔ.



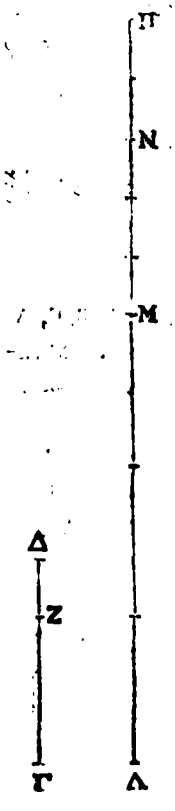
Si igitur compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & diviſæ proportionales erunt. quod erat demonſtrandum.

Prop. XVIII. Theor.

Si diviſæ magnitudines ſint proportionales, & compoſitæ proportionales erunt.

Sint diviſæ magnitudines ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ proportionales, & ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ: dico etiam compoſitas proportionales eſſe; videlicet ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ.

Si enim non ſit ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ, erit ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ vel ad minorem quam ΔΖ, vel ad majorem. ſit primum ad minorem ΔΗ. & ſint ipſarum quidem ΑΒ, ΓΔ æque multiplices ΘΚ, ΛΜ, ipſarum vero ΒΕ, ΔΗ aliæ utcunque æque multiplices ΚΝ, ΜΞ: igitur [per 5. def. 5.] ſi ΘΚ ſuperat ΚΝ, & ΛΜ ſuperabit ΜΞ; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſuperet primum ΘΚ ipſam ΚΝ, communique ablata ΚΛ, & ΘΛ ipſam ΝΜ ſuperabit. ſed ſi ΘΚ ſuperat ΚΝ, & ΛΜ ſuperat ΜΞ: ſuperat itaque ΛΜ ipſam ΜΞ; communique ΜΝ ablata, & ΛΜ ſuperabit ΝΞ: quare ſi ΘΛ ſuperat ΝΜ, & ΛΜ ipſam ΝΞ ſuperabit. ſimiliter demonſtrabimus & ſi ΘΛ ſit æqualis ΝΜ, & ΛΜ ipſi ΝΞ eſſe æqualem; & ſi minor, minorem. ſunt autem ΘΛ, ΛΜ ipſarum ΑΕ, ΓΖ æque multiplices, & ipſarum ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΜΝ, ΝΞ: ergo [per 5. def. 5.] ut ΑΕ ad ΕΒ ita erit ΓΖ ad ΖΔ. ſed ut ΑΕ ad ΕΒ ita ponitur & ΓΖ ad ΖΔ: ergo & ut ΓΖ ad ΖΔ ita ΓΔ ad ΔΖ. ſed ut ΓΖ ad ΖΔ ita ponitur ΓΔ ad minorem quam ΔΖ: quod eſt abſurdum. non igitur ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad minorem quam ΔΖ. ſimiliter oſtendemus neque ad majorem. ad ipſam igitur ΔΖ. quare ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ.



Si igitur diviſæ magnitudines ſint proportionales, & compoſitæ proportionales erunt. quod erat demonſtrandum.

Προτασις ιη'.

Ἐὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ· τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ΚΞ, ΝΠ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δὲ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΛΜ, τοῦ ΓΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ· τὰ ΗΚ, ΛΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ συντεθὲν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσεται καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΝΠ· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι δὲ τὰ μὲν ΗΘ, ΛΜ τῶν ΑΕ, ΓΖ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Προτασις ιθ'.

Ἐὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς

πρὸς

ad ZΔ: dico etiam compositas proportionales esse; videlicet ut AB ad BE ita esse ΓΔ ad ZΔ.

Si enim non est ut AB ad BE ita ΓΔ ad ZΔ; erit ut AB ad BE ita ΓΔ vel ad minorem quam ZΔ, vel ad majorem.

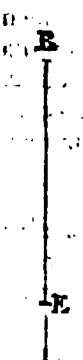
Sit primum ad minorem, nempe ad ΔH. & quoniam est ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔH, compositæ magnitudines sunt proportionales: ergo [per 17. 5.] & divisæ proportionales erunt: est igitur ut AE ad EB ita ΓH ad HΔ. ponitur autem & ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ: quare [per 11. 5.] & ut ΓH ad HΔ ita ΓZ ad ZΔ. at prima ΓH major est quam tertia ΓZ: ergo [per 14. 5.] & secunda HΔ major erit quam quarta ZΔ. sed & minor, quod fieri non potest: non est igitur ut AB ad BE ita ΓΔ ad minorem quam ZΔ. Similiter ostendemus neque esse ad majorem: est igitur ad ipsam.

Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. quod erat demonstrandum.

PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam; erit reliqua ad reliquam ut tota ad totam.

SIT enim ut tota AB ad totam ΓΔ ita ablata AE ad ablatam ΓZ; dico & reliquam EB ad reliquam ZΔ ita esse ut tota AB ad totam ΓΔ.



Quoniam enim est ut tota AB ad totam ΓΔ ita AE ad ΓZ; & alterne erit [per 16. 5.] ut BA ad AE ita ΔΓ ad ΓZ. & quoniam compositæ magnitudines sunt proportionales, & [per 17. 5.] divisæ proportionales erunt: ut igitur BE ad EA ita ΔZ ad ΓZ; rursusque alterne, ut BE ad ΔZ ita EA ad ZΓ. sed ut AE ad ΓZ ita posita est AB ad ΓΔ: & igitur [per 11. 5.] reliqua EB erit ad reliquam ZΔ ut tota AB ad totam ΓΔ.

Quare si fuerit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam; erit reliqua ad reliquam ut tota ad totam. quod erat demonstrandum.

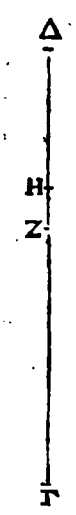
Corollarium.

Et quoniam ostensum est [per 16. 5.] ut AB ad ΓΔ ita esse EB ad ZΔ; si fuerit alterne ut

---

ὡσὶς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι καὶ συνθέντι ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ· ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ, ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΖΔ, ἢ πρὸς μεῖζον.



Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον, τὸ ΔΗ. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι· καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΖΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα.

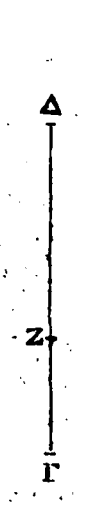
Ἐὰν ἄρα διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Εἰὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

ΕΣτω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.



Ἐὰν ἄρα ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

* Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς

---

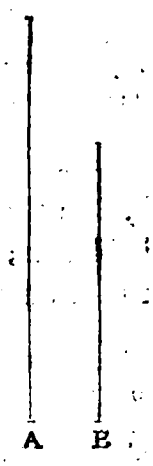
* *Corruptissimus est hic locus; nec ope veterum exemplarium restitui potest: versionem ideo mutavimus, ut sensus constaret. Magis legitima tamen demonstratio conversionis rationis est hæc.* Si sit AB ad BE ut ΓΔ ad ΔZ, erit, dividendo, AE ad BE ut ΓZ ad ΔZ: &, invertendo, BE ad AE ut ΔZ ad ΓZ: &, componendo, erit AB ad AE, ut ΓΔ ad ΓZ, quod est per conversionem rationis.

AB ad BE ita Γ Δ ad Δ Z, nempe compoſitæ magnitudines proportionales. oſtenſum autem eſt [per 16. & 19. 5.] ut AB ad AE ita eſſe Γ Δ ad Γ Z, quod [per 17. def. 5.] eſt per converſionem rationis. Ex hoc igitur perſpicuum eſt ſi compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & per converſionem rationis proportionales eſſe. quod erat demonſtrandum.

Prop. XX. Theor.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem ratione, ex æquo autem prima major ſit quam tertia: & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

SInt tres magnitudines A, B, Γ, & aliæ ipſis numero æquales Δ, E, Z, binæ ſumptæ in eadem ratione, ſitque ut A ad B ita Δ ad E, & ut B ad Γ ita E ad Z, ex æquo autem major ſit A quam Γ: dico & Δ quam Z majorem eſſe; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem.



Quoniam enim A major eſt quam Γ, alia vero utcunque B, & [per 8. 5.] major ad eandem majorem habet rationem quam minor; habebit A ad B majorem rationem quam Γ ad B. ſed ut A ad B ita Δ ad E; & invertendo ut Γ ad B ita Z ad E: ergo & Δ ad E majorem habet rationem quam Z ad E. ad eandem vero rationem habentium, quæ majorem habet rationem illa [per 10. 5.] major eſt; major igitur eſt Δ quam Z. Similiter oſtendemus, & ſi A ſit æqualis Γ & Δ ipſi Z æqualem eſſe; & ſi minor, minorem.

Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem ratione, ex æquo autem prima major ſit quam tertia: & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXI. Theor.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur & in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio, & ex æquo prima major ſit quam tertia: & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

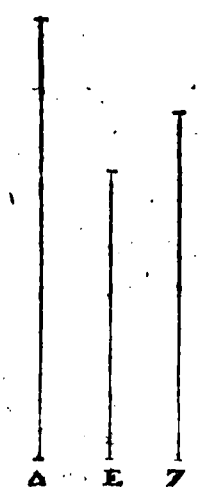
SInt tres magnitudines A, B, Γ, & aliæ ipſis numero æquales Δ, B, Z, binæ ſumptæ &

τὸ BE ἔτως τὸ Γ Δ πρὸς τὸ Δ Z· συγκείσθω ἄρα μεζὼν ἀνάλογον ἔσται. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ A B πρὸς τὸ A E ἔτως τὸ Γ Δ πρὸς τὸ Γ Z, ἐναλλάξ. ἔστιν ἀναστρέψαντι. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείσθωσι μεζόνων ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, E, Z, σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B ἔτως τὸ Δ πρὸς τὸ E, ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ ἔτως τὸ E πρὸς τὸ Z, δι᾽ ἴσου δὲ μεῖζον ἔστω τὸ A τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Z μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.



Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ A τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι ἐστὶ τὸ B, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ B. ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B ἔτως τὸ Δ πρὸς τὸ E, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ B ἀνάπαλιν ἔτως τὸ Z πρὸς τὸ E· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ E μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Z πρὸς τὸ E. τὰ δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα, τὸ τὰ μείζονα λόγον ἔχον ἐκείνου μεῖζόν ἐστι· μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Z. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ A τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Z· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

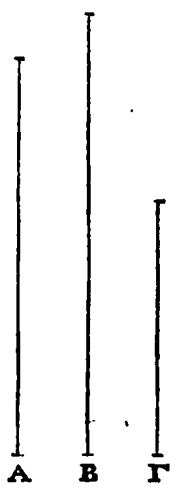
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, E, Z σὺν δύο λαμ-

βανόμενα

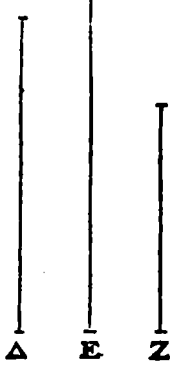
λαμβανόμενα κ᾽ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, διὰ δὲ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζον ἔστω· λέγω ὅτι κ᾽ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλαττον, ἔλαττον.



Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον, ἴσον· δηλονότι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· καὶ ἐὰν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, κ᾽ διὰ σου τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B ita E ad Z, ut vero B ad Γ ita Δ ad E, & ex æquo A major ſit quam Γ: dico & Δ quam Z majorem eſſe; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem.



Quoniam enim major eſt A quam Γ, alia vero B; habebit [per 8. 5.] A ad B majorem rationem quam Γ ad B. ſed ut A ad B ita E ad Z, & invertendo ut Γ ad B ita E ad Δ: quare & E ad Z majorem habebit rationem quam E ad Δ. ad quam vero eadem majorem habet rationem [per 10. 5.] illa minor eſt: minor igitur eſt Z quam Δ: ac propterea Δ quam Z major erit. Similiter oſtendemus & ſi æqualis, æqualem: viz. ſi A ſit æqualis Γ, & Δ ipſi Z eſſe æqualem; & ſi minor, minorem.

Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ ſumantur & in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio, & ex æquo prima major ſit quam tertia: & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. quod erat demonſtrandum.

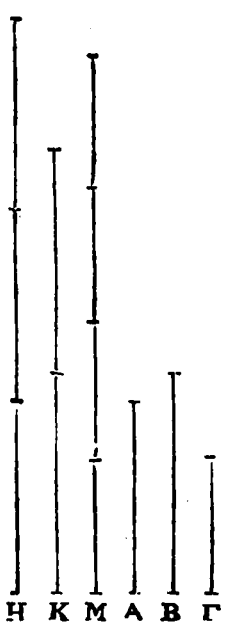
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, κ᾽ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· κ᾽ διὰ σου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Prop. XXII. Theor.

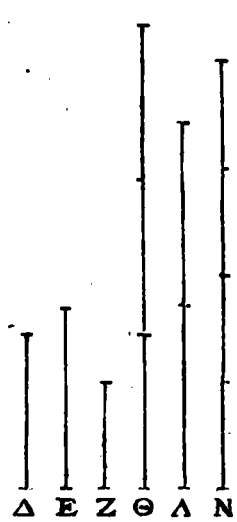
Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem ratione; & ex æquo in eadem ratione erunt.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ συνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ διὰ σου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Sint quotcunque magnitudines Α, Β, Γ, & aliæ ipſis numero æquales Δ, Ε, Ζ binæ ſumptæ in eadem ratione, ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut autem Β ad Γ ita Ε ad Ζ: dico & ex æquo in eadem ratione eſſe ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.



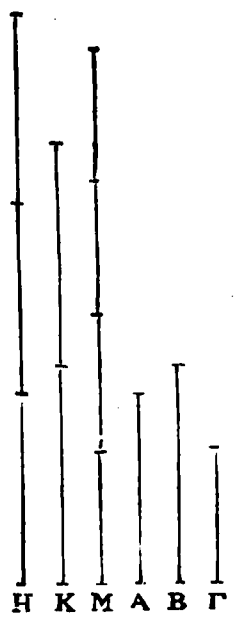
Sumantur enim ipſarum quidem Α, Δ æque multiplices Η, Θ, ipſarum vero Β, Ε aliæ utcunque æque multiplices Κ, Λ, & ipſarum Γ, Ζ aliæ utcunque æque multiplices Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια

Quoniam igitur eſt ut Α ad Β ita Δ ad Ε, & ſumptæ ſunt ipſarum Α, Δ æque multiplices

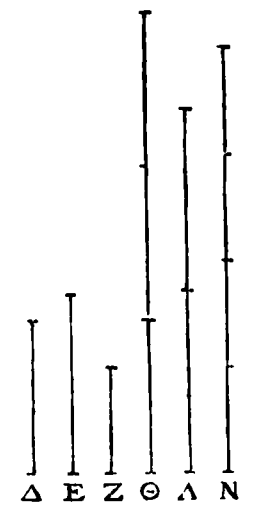
Η, Θ,

H, Θ, & ipſarum B, E aliæ utcunque æque multiplices K, Λ; erit [per 4. 5.] ut H ad K ita Θ ad Λ. eadem quoque ratione erit ut K ad M ita Λ ad N. & cum ſint tres magnitudines H, K, M, & aliæ ipſis numero æquales Θ, Λ, N binæ ſumptæ & in eadem ratione: ex æquo igitur [per 20. 5.] ſi H ſuperat M & Θ ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſuntque H, Θ ipſarum A, Δ æque multiplices, & M, N ipſarum Γ, Z aliæ utcunque æque multiplices: ut igitur A ad Γ ita erit [per 5. def. 5.] Δ ad Z.



Quare ſi ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem ratione; & ex æquo in eadem ratione erunt. quod erat demonſtrandum.

τὰ H, Θ, τῶν δὲ B, E ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ K, Λ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ H πρὸς τὸ K οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ K πρὸς τὸ M οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ N. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ H, K, M, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος Θ, Λ, N σύνδυο λαμβανόμενα καθ' ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δι' ἴσου ἄρα ἐὰν ὑπερέχῃ τὸ H τοῦ M, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ N· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὰ μὲν H, Θ τῶν A, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ M, N τῶν Γ, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z.



Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καθ' ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δι' ἴσου καθ' ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

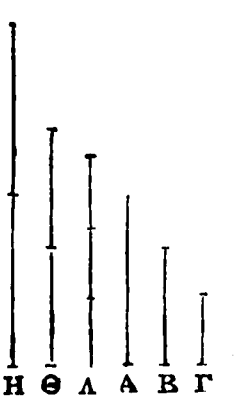
Prop. XXIII. Theor.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem ratione, ſit autem perturbata earum proportio; & ex æquo in eadem ratione erunt.

SInt tres magnitudines A, B, Γ, & aliæ ipſis numero æquales binæ ſumptæ in eadem ratione Δ, E, Z, ſit autem perturbata earum proportio, *viz.* ut A ad B ita E ad Z, & ut B ad Γ ita Δ ad E: dico ut A ad Γ ita eſſe Δ ad Z.

Sumantur ipſarum quidem A, B, Δ æque multiplices H, Θ, K, ipſarum vero Γ, E, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N.

Et quoniam H, Θ æque multiplices ſunt ipſarum A, B; partes autem [per 15. 5.] eandem habent rationem quam earum æque multiplices; erit ut A ad B ita H ad Θ. & ſimili ratione ut E ad Z ita M ad N: atque eſt ut A ad B ita E ad Z. ut igitur H ad Θ ita [per 11. 5.] M ad N. &, quoniam eſt ut B ad Γ ita Δ ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum quidem B, Δ æque multiplices Θ, K, ipſarum vero



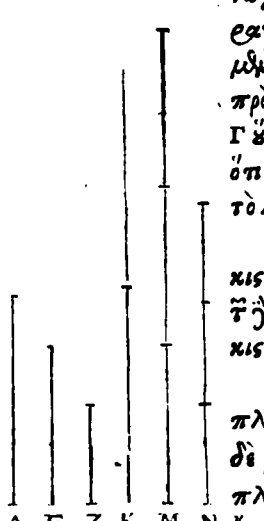
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, E, Z, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z.

Εἰλήφθω τῶν μὲν A, B, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, K, τῶν δὲ Γ, E, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, M, N.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ H, Θ τῶν A, B, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ H πρὸς τὸ Θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ E πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N· καὶ ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z. καὶ ὡς ἄρα τὸ H πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E, καὶ εἴληπται τῶν μὲν B, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, K,



τῶν

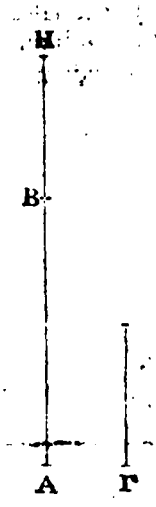
τῶν ἢ Γ, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· * ἐπὶ ἴσων ἄρα μειζόνων ἐστὶ, τῶν Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Κ, Μ, Ν, συνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἐστὶν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία· δι' ἴσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τῶν μὲν Η, Κ τὰ Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τὰ Γ, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα ἡ πρώτη μείζων, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος συνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸ αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν τὸ πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.



Ἐπεὶ γὰρ ἐστιν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΒ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘΕ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΗΒ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

* Antea fuit ἐστὶν ἡ πρώτη μείζων ἐστὶν ἀνάλογον.

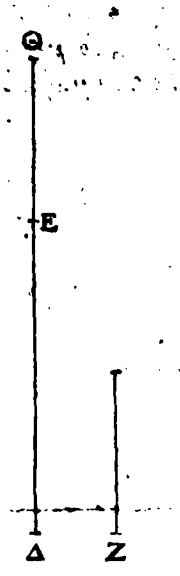
Γ, B aliæ utcunque æque multiplices A, M; erit [per 15. 5.] ut Θ ad A ita K ad M. oſtenſum autem eſt & ut H ad Θ ita eſſe M ad N: quoniam igitur tres ſunt magnitudines H, Θ, A, & aliæ ipſis numero æquales K, M, N binæ ſumptæ in eadem ratione, eſtque perturbata earum proportio, ex æquo [per 21. 5.] ſi H ſuperat A, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſunt autem H, K ipſarum A, Δ æque multiplices, & A, N æque multiplices ipſarum Γ, Z: ut igitur A ad Γ ita erit [per 5. def. 5.] Δ ad Z.

Quare ſi fuerint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem ratione, ſit autem perturbata earum proportio; & ex æquo in eadem ratione erunt: quod erat demonſtrandum.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad ſecundam eandem rationem quam ſexta ad quartam: & compoſita è prima & quinta ad ſecundam eandem rationem habebit quam compoſita è tertia & ſexta ad quartam.

PRima enim AB ad ſecundam Γ eandem habeat rationem quam tertia ΔE ad quartam Z; habeat autem & quinta BH ad ſecundam Γ rationem eandem quam ſexta EΘ ad quartam Z: dico & compoſitam è prima & quinta AH ad ſecundam Γ eandem habere rationem quam compoſita è tertia & ſexta ΔΘ ad quartam Z.



Quoniam enim eſt ut BH ad Γ ita EΘ ad Z; erit invertendo [per cor. 4. 5.] ut Γ ad BH ita Z ad EΘ. & quoniam ut AB ad Γ ita eſt ΔE ad Z, ut autem Γ ad BH ita Z ad EΘ; erit ex æquo [per 22. 5.] ut AB ad BH ita ΔE ad EΘ. cum autem diviſæ magnitudines ſint proportionales, & [per 18. 5.] compoſitæ proportionales erunt: ut igitur AH ad HB ita eſt ΔΘ ad ΘE. ut autem HB ad Γ ita EΘ ad Z: ergo ex æquo [per 22. 5.] ut AH ad Γ ita erit ΔΘ ad Z.

Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad ſecundam eandem rationem quam ſexta ad quartam: & compoſita è prima & quinta ad ſecundam eandem rationem habebit quam compoſita è tertia & ſexta ad quartam. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima duabus reliquis majores erunt.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστω δὲ μέγιστον αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, Ζ τῶν ΓΔ, Ε μείζονά ἐστι.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν Ε ἴση τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ ἴση τὸ ΓΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴση δὲ τῷ μὲν Ε τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ τὸ ΓΘ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΘΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. μεῖζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ· τὰ ἄρα ΑΗ, Ζ ἴσα ἐστὶ τοῖς ΓΘ, Ε. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἄνισοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα· καὶ ἐστὶν ἄρα τὰ ΗΒ, ΘΔ ἀνίσων ὄντων, καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ, τῷ ΗΒ προστεθῇ τὰ ΑΗ, Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προστεθῇ τὰ ΓΘ, Ε, συνάμφω ἄρα τὰ ΑΒ, Ζ μείζονά ἐστι τῶν ΓΔ, Ε.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον δυσὶ τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον δυσὶ τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, ΓΔ, E, Z, & sit ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; sit autem maxima ipsarum AB, & Z minima: dico AB & Z ipsis ΓΔ & E majores esse.

Ponatur enim ipsi quidem E æqualis AH, ipsi vero Z æqualis ΓΘ.

Quoniam igitur est ut AB ad ΓΔ ita E ad Z, estque AH æqualis E, & ΓΘ æqualis Z; erit ut AB ad ΓΔ ita AH ad ΓΘ. & quoniam est ut tota AB ad totam ΓΔ ita ablata AH ad ablatam ΓΘ; erit [per 19. 5.] & reliqua HB ad reliquam ΘΔ ut tota AB ad totam ΓΔ. major autem est [ex hyp.] AB quam ΓΔ; ergo & HB major est quam ΘΔ. cum autem AH sit æqualis ipsi E, & ΓΘ ipsi Z; erunt AH & Z æquales ipsis ΓΘ & E. si autem inæqualibus æqualia addantur, tota erunt inæqualia: cum igitur HB, ΘΔ sint inæqualia, sitque major HB, si ipsi quidem HB addantur AH & Z, ipsi vero ΘΔ addantur ΓΘ & E, fient AB & Z ipsis ΓΔ & E majores.

Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima duabus reliquis majores erunt. quod erat demonstrandum.

ΕΥΚΛΕΙ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

ΟΡΟΙ.

α'. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β'. Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσι.

γ'. Ἀκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμ�ᾶσθαι λέγεται, ὅταν ἡ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

δ'. Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

ε'. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιαθεῖσαι ποιῶσί τινα.

DEFINITIONES.

1. Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & singulos angulos singulis æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.

2. Reciprocæ figuræ sunt, quando in utraque figura antecedentes & consequentes rationum terminι fuerint.

3. Secundum extremam ac mediam rationem recta linea secta esse dicitur, quando ut tota ad majus segmentum ita majus segmentum ad minus se habuerit.

4. Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basim ducta.

5. Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum † quantitates inter se multiplicatæ illius faciunt quantitatem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Propositio I. Problema.

Triangula & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, sunt inter se ut baſes.

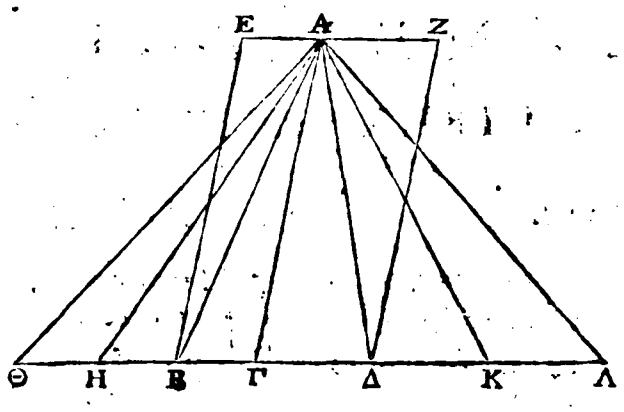
Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ, τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγομένην· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Sint triangula quidem ΑΒΓ, ΑΓΔ, parallelogramma vero ΕΓ, ΓΖ, quæ eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto Α ad ΒΔ ductam: dico ut basis ΒΓ ad ΓΔ basim ita esse triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΑΓΔ, & parallelogrammum ΕΓ ad ΓΖ parallelogrammum.

* In cum *Theone.* in libb. vulgatis ποιῶ. † Rectius *exponentes* vertit *Cl. Wallisius*; cum *rationis exponens* sit *mensura* quantitatis *ejusdem.* vide *Opera ejus mathematica*, vol. 2. p. 666.

Producatur enim ΒΔ ex utraque parte ad puncta Θ, Λ, & ipsi quidem basi ΒΓ æquales quotcunque ponantur ΒΗ, ΗΘ, ipsi vero basi ΓΔ ponantur quotcunque æquales ΔΚ, ΚΛ, & ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ jungantur.

Quoniam igitur ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ inter se sunt æquales, erunt [per 38. 1.] & triangula ΑΗΘ, ΑΗΒ, ΑΒΓ inter se æqualia: ergo quam multiplex est basis ΘΓ ipsius ΒΓ basis, tam multiplex est ΑΘΓ triangulum trianguli ΑΒΓ. eadem ratione quam multiplex est basis ΛΓ ipsius basis ΓΔ, tam multiplex est & triangulum ΑΛΓ ipsius ΑΓΔ trianguli; & [per 38. 1.] si æqualis est basis ΘΓ basi ΓΛ, & triangulum ΑΘΓ triangulo ΑΛΓ est æquale; & si basis ΘΓ basim ΓΛ superat, & triangulum ΑΘΓ superabit triangulum ΑΛΓ; & si minor, minus erit. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus ΒΓ, ΓΔ & duobus triangulis ΑΒΓ, ΑΓΔ, sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem ΒΓ & ΑΒΓ trianguli, videlicet ΘΓ basis & ΑΘΓ triangulum; basis vero ΓΔ & trianguli ΑΓΔ alia utcunque æque multiplicia, nempe ΓΛ basis & ΑΛΓ triangulum. atque ostensum est, si basis ΘΓ basim ΓΛ superat, & triangulum ΑΘΓ superare triangulum ΑΛΓ; & si æqualis, æquale; & si minor, minus: est igitur [per 5. def. 5.] ut ΒΓ basis ad basim ΓΔ ita triangulum ΑΒΓ ad ΑΓΔ triangulum.



Et quoniam [per 41. 1.] trianguli ΑΒΓ duplum est parallelogrammum ΕΓ, & trianguli ΑΓΔ parallelogrammum ΖΓ duplum, partes autem [per 15. 5.] eandem inter se rationem habent quam earum æque multiplices; erit ut ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΓΔ ita parallelogrammum ΕΓ ad ΖΓ parallelogrammum. quoniam igitur ostensum est, ut basis ΒΓ ad ΓΔ basim ita esse ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΓΔ; ut autem ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΓΔ ita parallelogrammum ΕΓ ad ΖΓ parallelogrammum: erit [per 11. 5.] ut ΒΓ basis ad basim ΓΔ ita parallelogrammum ΕΓ ad ΖΓ parallelogrammum.

Triangula igitur & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, sunt inter se ut bases. quod erat demonstrandum.

Prop. II. Theor.

Si uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trian-

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΗΘ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλήλοις· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλάσιον ἐστὶν ἡ ΛΓ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΛΓ τριγώνῳ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΔ δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἤτοι ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον· τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, ἤτοι ΓΛ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον. καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλάττων, ἔλαττον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς ἡ μὲν ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΑΓΔ οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν τριγώνου παραλληλόγραμμον παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· κἂν αἱ τοῦ τριγώ-

νϑ πλϑρὰ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὸ λοιπὸν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευρὰν παράλληλος.

guli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ſectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.

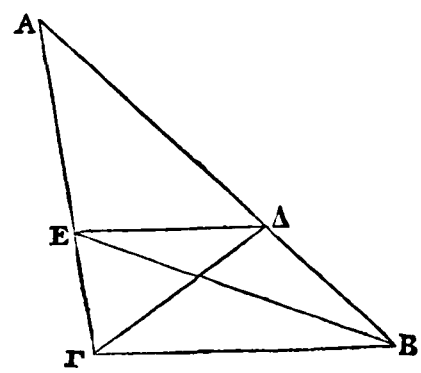
Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ. ἄλλο δέ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον· τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην, πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Triangulum igitur ΒΔΕ [per 37. 1.] triangulo ΓΔΕ eſt æquale; in eadem enim ſunt baſi ΔΕ & intra eaſdem parallelas ΔΕ, ΒΓ. aliud autem triangulum eſt ΑΔΕ; & [per 7. 5.] æqualia ad idem eandem habent rationem: ergo ut triangulum ΒΔΕ ad triangulum ΑΔΕ ita eſt ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ. ut autem triangulum ΒΔΕ ad triangulum ΑΔΕ ita eſt ΒΔ ad ΔΑ: nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto Ε ad ΑΒ ductam [per 1. 6.] inter ſe ſunt ut baſes. & ob eandem cauſam ut ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ ita ΓΕ ad ΕΑ: ut igitur ΒΔ ad ΔΑ ita eſt [per 11. 5.] ΓΕ ad ΕΑ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατεσκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καὶ εἰσὶν ὑπὸ τὴν αὐτὴν βάσιν τὴν ΔΕ. τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ ὑπὸ τὴν αὐτὴν βάσιν ὄντα καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ἐστί. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

RIanguli enim ΑΒΓ uni laterum ΒΓ parallela ducatur ΔΕ: dico ut ΒΔ ad ΔΑ ita eſſe ΓΕ ad ΕΑ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΔ.

Triangulum igitur ΒΔΕ [per 37. 1.] triangulo ΓΔΕ eſt æquale; in eadem enim ſunt baſi ΔΕ & intra eaſdem parallelas ΔΕ, ΒΓ. aliud autem triangulum eſt ΑΔΕ; & [per 7. 5.] æqualia ad idem eandem habent rationem: ergo ut triangulum ΒΔΕ ad triangulum ΑΔΕ ita eſt ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ. ut autem triangulum ΒΔΕ ad triangulum ΑΔΕ ita eſt ΒΔ ad ΔΑ: nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto Ε ad ΑΒ ductam [per 1. 6.] inter ſe ſunt ut baſes. & ob eandem cauſam ut ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ ita ΓΕ ad ΕΑ: ut igitur ΒΔ ad ΔΑ ita eſt [per 11. 5.] ΓΕ ad ΕΑ.

SED trianguli ΑΒΓ latera ΑΒ, ΑΓ proportionaliter ſecta ſint in punctis Δ, Ε, ut ΒΔ ad ΔΑ ita ſit ΓΕ ad ΕΑ, & jungatur ΔΕ: dico ΔΕ ipſi ΒΓ parallelam eſſe.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam eſt ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ; ut autem ΒΔ ad ΔΑ ita [per 1. 6.] ΒΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ; & ut ΓΕ ad ΕΑ ita ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ: erit [per 11. 5.] ut triangulum ΒΔΕ ad triangulum ΑΔΕ ita ΓΔΒ triangulum ad triangulum ΑΔΕ. utrumque igitur triangulorum ΒΔΕ, ΓΔΒ ad triangulum ΑΔΕ eandem habet rationem. ideo [per 9. 5.] triangulum ΒΔΕ triangulo ΓΔΕ æquale eſt: & ſunt ſuper eadem baſi ΔΕ. æqualia autem triangula & ſuper eadem baſi conſtituta [per 39. 1.] etiam intra eaſdem ſunt parallelas. ergo ΔΕ ipſi ΒΓ parallela eſt.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὸ λοιπὸν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευρὰν παράλληλος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur uni laterum trianguli parallela recta linea ducta fuerit, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera: & ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ſectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea ſecet etiam baſim; baſis ſegmenta eandem rationem habebunt quam reliqua trianguli latera: & ſi baſis ſegmenta

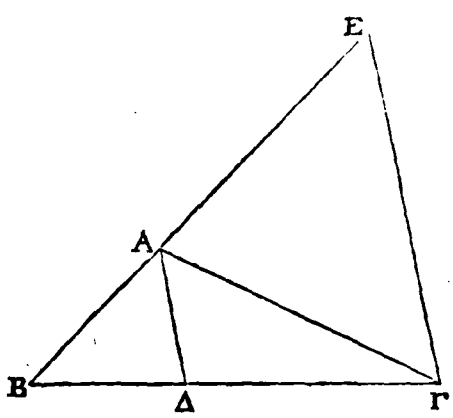
menta eandem habeant rationem, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad ſectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifariam ſecabit.

τμήματα τ αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τ τριγώνυ πλευραῖς, ἀπὸ τ κορυφῆς ἐπὶ τ τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τ τ τριγώνυ γωνίαν.

SIT triangulum ABΓ, & ſecetur angulus BAΓ bifariam à recta linea AΔ: dico ut BΔ ad ΔΓ ita eſſe BA ad AΓ.

Ducatur enim [per 31. 1.] per Γ ipſi ΔA parallela ΓE, & producta BA conveniat cum ipſa in puncto E.

Quoniam igitur in parallelas AΔ, EΓ incidit recta linea AΓ; erit [per 29. 1.] AΓE angulus angulo ΓAΔ æqualis. ſed ΓAΔ angulus ponitur æqualis angulo BAΔ: ergo & BAΔ ipſi AΓE angulo æqualis erit. rurſus, quoniam in parallelas AΔ, EΓ recta linea BAE incidit, exterior angulus BAΔ æqualis eſt [per 29. 1.] interiori AEΓ. oſtenſus autem eſt & angulus AΓE angulo BAΔ æqualis; ergo & AΓE ipſi AEΓ æqualis erit: & propterea [per 6. 1.] latus AE æquale lateri AΓ. & quoniam uni laterum trianguli BΓE, videlicet ipſi EΓ, parallela ducta eſt AΔ; erit [per 2. 6.] ut BΔ ad ΔΓ ita BA ad AE. æqualis autem eſt AE ipſi AΓ: eſt igitur [per 7. 5.] ut BΔ ad ΔΓ ita BA ad AΓ.



SIT autem ut BΔ ad ΔΓ ita BA ad AΓ; & AΔ jungatur: dico angulum BAΓ bifariam ſectum eſſe à recta linea AΔ.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam eſt ut BΔ ad ΔΓ ita BA ad AΓ; eſt autem [per 2. 6.] ut BΔ ad ΔΓ ita BA ad AE (etenim uni laterum trianguli BΓE, videlicet ipſi EΓ, parallela ducta eſt AΔ) erit ut BA ad AΓ ita BA ad AE: ergo [per 9. 5.] AΓ eſt æqualis AE, ac propterea [per 5. 1.] & angulus AEΓ angulo AΓE æqualis. ſed angulus quidem AEΓ [per 29. 1.] eſt æqualis angulo exteriori BAΔ, angulus vero AΓE æqualis alterno ΓAΔ: quare & BAΔ angulus ipſi ΓAΔ æqualis erit. angulus igitur BAΓ bifariam ſectus eſt à recta linea AΔ.

Ergo ſi trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea ſecet etiam baſim; baſis ſegmenta eandem rationem habebunt quam reliqua trianguli latera: & ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad ſectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifariam ſecabit. quod erat demonſtrandum.

ΕΣτω τρίγωνον τὸ ABΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία δίχα ὑπὸ τ ΑΔ εὐθείας· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τ ΔΓ ἕτως ἡ ΒΑ πρὸς τ ΑΓ.

Ηχθω γὰρ διὰ τ Γ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΓΕ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ τριγώνυ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ ἕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ ἕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

ΑΛΛΑ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ ἕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τ ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ ἕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ ἕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνυ γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τ πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται παράλληλος ἡ ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ἕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΑΕ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση, ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τ ΑΔ εὐθείας.

Ἐὰν ἄρα τριγώνυ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα αὐτὴν εὐθεῖα τέμνει καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τ αὐτὸν ἔξει λόγον τ λοιπαῖς τ τριγώνυ πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τ βάσεως τμήματα τ αὐτὸν ἔχῃ λόγον τ λοιπαῖς τ τριγώνυ πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τ κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τ γωνίαν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

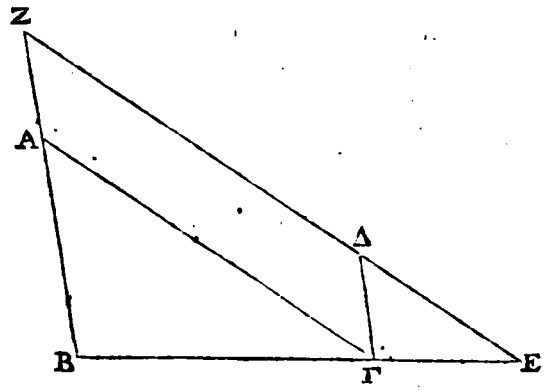
PROP.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Ἔστωσαν ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ ΒΑ, ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ πρὸς τῷ ΑΒΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΖΑ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΖΕ ἦκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ.

Τῶν ἄρα ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν

Prop. IV. Theor.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera quæ circum æquales angulos; & homologa ſunt latera quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABΓ, ΔΓE, quæ angulum quidem ABΓ angulo ΔΓE, angulum vero AΓB angulo ΔEΓ æqualem habeant, & præterea angulum BAΓ angulo ΓΔE: dico triangulorum ABΓ, ΔΓE proportionalia eſſe latera, quæ ſunt circa æquales angulos; & homologa eſſe latera quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

Ponatur enim BΓ in directum ipſi ΓE. & quoniam [per 17. 1.] anguli ABΓ, AΓB duobus rectis ſunt minores, æqualis autem eſt angulus AΓB angulo ΔBΓ; erunt ABΓ, ΔBΓ anguli duobus rectis minores: quare [per 11.ax.] BA, EΔ productæ inter ſe convenient. producantur, & conveniant in puncto Z.

Et quoniam angulus ΔΓE æqualis eſt angulo ABΓ; erit [per 28. 1.] BZ ipſi ΓΔ parallela. rurſus, quoniam æqualis eſt angulus AΓB angulo ΔBΓ, parallela erit AΓ ipſi ZE: parallelogrammum igitur eſt ZAΓΔ: ac propterea [per 34. 1.] ZA quidem ipſi ΓΔ; AΓ vero ipſi ZΔ eſt æqualis. & quoniam uni laterum trianguli ZBE, videlicet ipſi ZE, parallela ducta eſt AΓ; erit [per 2. 6.] ut BA ad AZ ita BΓ ad ΓE. æqualis autem eſt AZ ipſi ΓΔ: ut igitur BA ad ΓΔ ita [per 7. 5.] BΓ ad ΓE, & alterne [per 16. 5.] ut AB ad BΓ ita ΔΓ ad ΓE. rurſus, quoniam ΓΔ parallela eſt BZ, erit ut BΓ ad ΓE ita ZΔ ad ΔE. ſed ΔZ eſt æqualis AΓ: ergo ut BΓ ad ΓE ita AΓ ad EΔ, & alterne ut BΓ ad ΓA ita ΓE ad EΔ. itaque quoniam oſtenſum eſt, ut AB ad BΓ ita ΔΓ ad ΓE, ut autem BΓ ad ΓA ita ΓE ad EΔ; erit ex æquo [per 22. 5.] ut BA ad AΓ ita ΓΔ ad ΔE.

Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia ſunt latera quæ circum æquales angulos, & homologa ſunt latera quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. quod erat demonſtrandum.

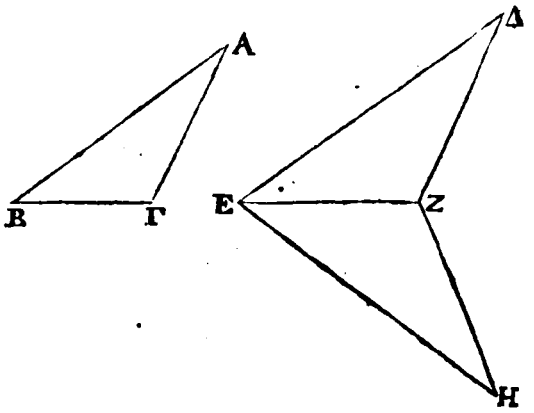
Prop. V. Theor.

Si duo triangula latera habeant proportionalia, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ABΓ, ΔEZ, quæ latera proportionalia habeant; ſitque ut AB quidem

dem ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ; ut autem ΒΓ ad ΓΑ ita ΕΖ ad ΖΔ; & adhuc ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΕΔ ad ΔΖ: dico triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ æquiangulum eſſe, & æquales habere angulos quibus homologa latera ſubtenduntur; angulum quidem ΑΒΓ angulo ΔΕΖ, angulum vero ΒΓΑ angulo ΕΖΔ; & præterea angulum ΒΑΓ angulo ΕΔΖ.

Conſtituatur enim [per 23. 1.] ad rectam lineam ΕΖ, & ad puncta in ipſa Ε, Ζ, angulo quidem ΑΒΓ æqualis angulus ΖΕΗ; angulo autem ΒΓΑ angulus ΕΖΗ: quare [per 32. 1.] reliquus ΒΑΓ angulus reliquo ΕΗΖ eſt æqualis.



Ideoque æquiangulum eſt triangulum ΑΒΓ triangulo ΕΗΖ; triangulorum igitur ΑΒΓ, ΕΗΖ [per 4. 6.] proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa quæ æqualibus angulis ſubtenduntur: ergo ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΗΕ ad ΕΖ. ſed ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ: ut igitur ΔΕ ad ΒΖ ita [per 11. 5.] ΗΕ ad ΕΖ: utraque igitur ipſarum ΔΕ, ΗΕ eandem habet rationem ad ΕΖ; & idcirco [per 9. 5.] erit ΔΕ ipſi ΗΕ æqualis. eadem ratione & ΔΖ æqualis erit ΗΖ. itaque quoniam ΔΕ eſt æqualis ΕΗ, communis autem ΕΖ: duæ ΔΕ, ΕΖ duabus ΗΕ, ΕΖ ſunt æquales, & baſis ΔΖ baſi ΗΖ æqualis: angulus igitur ΔΕΖ eſt [per 8. 1.] æqualis angulo ΗΕΖ. & ΔΕΖ triangulum æquale triangulo ΗΕΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur: angulus igitur ΔΖΕ quidem eſt æqualis angulo ΗΖΕ, angulus vero ΕΔΖ æqualis angulo ΕΗΖ. & quoniam angulus ΔΕΖ eſt æqualis angulo ΗΕΖ, & [per conſtruct.] angulus ΗΕΖ æqualis angulo ΑΒΓ; erit & angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ æqualis. eadem ratione & angulus ΑΓΒ æqualis eſt angulo ΔΖΕ, & etiam angulus ad Α angulo ad Δ: ergo ΑΒΓ triangulum eſt æquiangulum triangulo ΔΕΖ.

Si igitur duo triangula latera habeant proportionalia, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. quod erat demonſtrandum.

Prop. VI. Theor.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur.

SInt duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, unum angulum ΒΑΓ uni angulo ΕΔΖ æqualem

ΒΓ ὅτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ τλὼ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ ὅτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς τ' ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ὅτως τὴν ΕΔ πρὸς τλὼ ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ, ἔτι δὲ τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Ε, Ζ, τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ ἐστὶν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ τριγώνῳ· τ' ἄρα ΑΒΓ, ΕΗΖ τρίγωνα ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τ' ΒΓ ὅτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ ὅτως [κατεσκευάσθη] ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τ' ΕΖ ὅτως ἡ ΗΕ πρὸς τλὼ ΕΖ· ἑκατέρα ἄρα τ' ΔΕ, ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΗΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ τ' ΗΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστὶν ἴση. καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

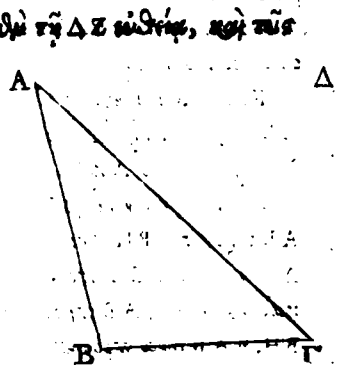
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

ΕΣτω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν τλὼ ὑπὸ ΒΑΓ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην

ἴσλυ ἔχωσι, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τριγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσλυ ἔξει τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς μὲν τῇ ΔΖ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ζ, ἑκατέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΗ.

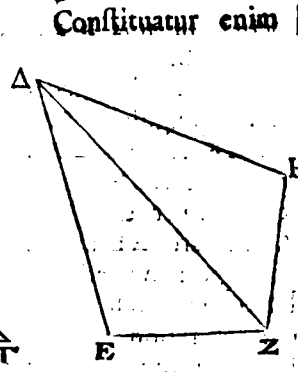


Λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τριγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. ἀλλὰ μὴν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΖΗ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τριγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Η τῇ πρὸς τῷ Ε. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ μὴν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τριγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τριγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσλυ ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τριγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΕΔ ad ΔΖ: dico triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ æquiangulum esse, & angulum quidem ΑΒΓ habere æqualem angulo ΔΕΖ, angulum vero ΑΓΒ angulo ΔΖΕ.

Constituatur enim [per 23. 1.] ad rectam lineam ΔΖ, & ad puncta in ipsa Δ, Ζ, alterutri angulorum ΒΑΓ, ΕΔΖ æqualis angulus ΖΔΗ, angulo autem ΑΓΒ æqualis ΔΖΗ.



Reliquus igitur qui ad Β [per 32. 1.] reliquo qui ad Η est æqualis: ergo triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΗΖ æquiangulum est; ac propterea [per 4. 6.] ut ΒΑ ad ΑΓ ita est ΗΔ ad ΔΖ. ponitur autem ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΕΔ ad ΔΖ: ut igitur ΕΔ ad ΔΖ ita [per 11. 5.] ΗΔ ad ΔΖ: igitur [per 9. 5.] ΒΔ æqualis est ipsi ΔΗ, & communis ΔΖ: ergo duæ ΕΔ, ΔΖ duabus ΗΔ, ΔΖ sunt æquales, & angulus ΕΔΖ angulo ΗΔΖ est æqualis: basis igitur ΕΖ [per 4. 1.] est æqualis basi ΖΗ, triangulumque ΔΕΖ æquale triangulo ΗΔΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: angulus igitur ΔΖΗ est æqualis angulo ΔΖΕ; angulus vero ad Η angulo ad Ε. sed angulus ΔΖΗ æqualis est [per constr.] angulo ΑΓΒ: angulus igitur ΑΓΒ angulo ΔΖΕ est æqualis. ponitur autem & ΒΑΓ angulus æqualis angulo ΕΔΖ: ergo [per 32. 1.] & reliquus qui ad Β æqualis reliquo qui ad Ε: æquiangulum igitur est triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ.

Quare si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν δύο τριγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσλυ ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Prop. VII. Theor.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia.

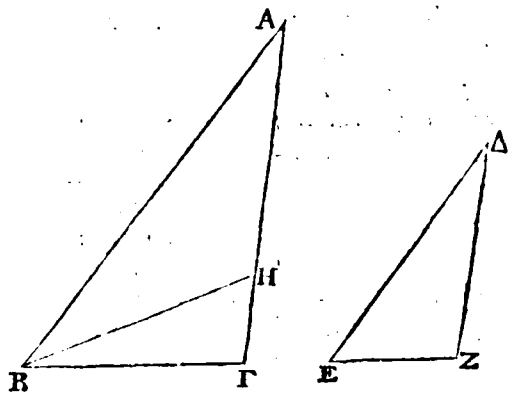
Ἔστω δύο τριγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσλυ ἐχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum ΒΑΓ angulo ΕΔΖ æqualem, circa alios autem angulos ΑΒΓ, ΔΕΖ latera proportionalia, ut sit ΔΕ ad ΕΖ sicut ΑΒ ad ΒΓ, & reliquorum qui ad Γ, Ζ primo utrumque simul mi-

norem recto: dico triangulum ABΓ triangulo ΔEZ æquiangulum esse, angulumque ABΓ æqualem angulo ΔEZ, & reliquum videlicet qui ad Γ reliquo qui ad Z æqualem.

Si enim inæqualis est angulus ABΓ angulo ΔEZ, unus ipsorum major erit. sit major ABΓ, & constituatur [per 23. 1.] ad rectam lineam AB & ad punctum in ipsa B angulo ΔEZ æqualis angulus ABH.

Et quoniam angulus quidem A est æqualis angulo Δ, angulus vero ABH angulo ΔEZ; erit [per 32. 1.] reliquus AHB reliquo ΔZE æqualis: æquiangulum igitur est ABH triangulum triangulo ΔEZ; quare [per 4. 6.] ut AB ad BH sic ΔE ad EZ. ut vero ΔE ad EZ sic ponitur AB ad BΓ: ut igitur AB ad BΓ, [per 11. 5.] sic AB ad BH, ideo AB ad utramque BΓ, BH eandem habet rationem; erit igitur BΓ ipsi BH æqualis; ac propterea [per 5. 1.] angulus BHΓ est æqualis angulo BΓH. minor autem recto ponitur angulus qui ad Γ: ergo & BHΓ minor est recto, & ob id [per 13. 1.] qui ei deinceps est AHB major recto. atque ostensus est angulus AHB æqualis angulo qui ad Z: angulus igitur qui ad Z recto major est. atqui ponitur minor recto; quod est absurdum: non est igitur angulus ABΓ inæqualis angulo ΔEZ; ergo ipsi est æqualis. est autem & angulus ad A æqualis ei qui ad Δ: quare & reliquus qui ad Γ æqualis reliquo qui ad Z: æquiangulum igitur est ABΓ triangulum triangulo ΔEZ.



Sed rursus ponatur uterque angulorum qui ad Γ, Z non minor recto: dico rursus & sic triangulum ABΓ triangulo ΔEZ æquiangulum esse.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus BΓ æqualem ipsi BH, angulumque ad Γ angulo BHΓ æqualem. sed angulus qui ad Γ non est minor recto: non est igitur minor recto BHΓ. quare trianguli BHΓ duo anguli non sunt duobus rectis minores; quod [per 17. 1.] fieri non potest: non igitur rursus est ABΓ angulus inæqualis angulo ΔEZ; ergo æqualis. est autem & qui ad A æqualis ei qui ad Δ: reliquus igitur qui ad Γ [per 32. 1.] reliquo ad Z est æqualis; ac propterea triangulum ABΓ triangulo ΔEZ æquiangulum est.

Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia. quod erat demonstrandum.

ὀρθῆς. λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ὑπόκειται ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ ΒΗΓ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ ΒΓΗ ἐστιν ἴση. ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστίν. οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ. τριγώνου δὲ τοῦ ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττονες, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

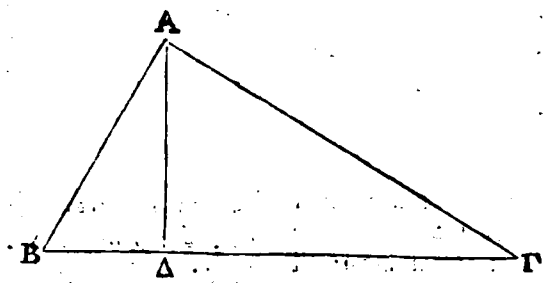
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰ δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ τρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ὀρθὴ γάρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ, τοῦ ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου. καὶ ἔτι ἡ ΑΓ τρὸς τῷ ΑΔ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, κοινὴν τῶν δύο τριγώνων τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι, καὶ τὰς τρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις πλευρὰς ἀνάλογον ἔχον· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστιν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ τρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ, πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν τρὸς τῷ Γ γωνίαν, οὕτως τὴν ὑπὸ ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, τρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, οὕτως τῇ τρὸς τῷ Β. καὶ ἔτι ἡ ΒΑ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula & toti & inter se sunt similia.

SIT triangulum rectangulum ABΓ, rectum habens angulum BAΓ; & à puncto A ad BΓ perpendicularis ducatur AΔ: dico triangula ABΔ, AΔΓ toti triangulo ABΓ & inter se similia esse.

Quoniam enim angulus BAΓ est æqualis angulo AΔB, rectus enim est uterque, & angulus qui ad B communis duobus triangulis ABΓ, ABΔ; erit [per 32. 1.] reliquus AΓB reliquo BAΔ æqualis: æquiangulum igitur est triangulum ABΓ triangulo ABΔ. quare [per 4. 6.] ut BΓ quæ subtendit angulum rectum trianguli ABΓ ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABΔ, sic ipsa AB subtendens angulum qui ad Γ trianguli ABΓ ad BΔ subtendentem angulum æqualem angulo qui ad Γ, videlicet BAΔ ipsius ABΔ trianguli. & sic etiam AΓ ad AΔ subtendentem angulum qui ad B communem duobus triangulis: ergo triangulum ABΓ triangulo ABΔ æquiangulum est, & circa æquales angulos latera habet proportionalia: simile igitur est [per 1. def. 6.] triangulum ABΓ triangulo ABΔ. eadem ratione demonstrabimus etiam AΔΓ triangulum triangulo ABΓ simile esse: quare utrumque ipsorum ABΔ, AΔΓ, toti triangulo ABΓ est simile.

Dico insuper triangula ABΔ, AΔΓ etiam inter se similia esse.

Quoniam enim angulus BΔA rectus est æqualis recto AΔΓ; sed & BAΔ ostensus æqualis ei qui ad Γ; erit [per 32. 1.] reliquus qui ad B reliquo ΔAΓ æqualis: æquiangulum igitur est triangulum ABΔ triangulo AΔΓ. ergo [per 4. 6.] ut BΔ trianguli ABΔ, subtendens BAΔ angulum, ad ΔA trianguli AΔΓ subtendentem angulum qui ad Γ, æqualem angulo BAΔ; sic ipsa AΔ trianguli ABΔ, subtendens angulum qui ad B, ad ΔΓ trianguli AΔΓ subtendentem angulum ΔAΓ, ei qui ad B æqualem. & sic etiam BA subtendens rectum angulum AΔB, ad AΓ subtendentem angulum rectum AΔΓ: est igitur [per 1. def. 6.] ABΔ triangulum simile triangulo AΔΓ.

Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula & toti & inter se sunt similia. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, in triangulo rectangulo perpendicularem ab angulo recto ad baſim ductam mediam proportionalem eſſe inter ſegmenta baſis: & præterea inter baſim & baſis ſegmentum utrumlibet, latus ſegmento conterminum medium eſſe proportionale.

Πόρισμα.

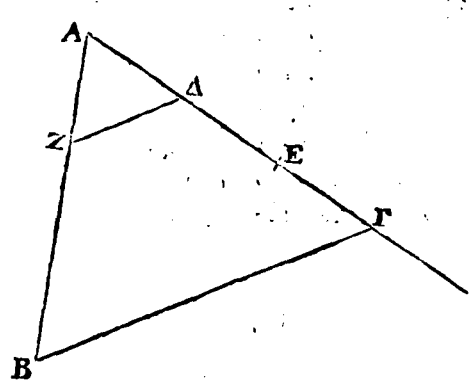
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστι· καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ἑκατέρου τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

PROP. IX. PROBL.

A data recta linea imperatam partem abſcindere.

SIT data recta linea AB: oportet ab ipſa AB imperatam partem abſcindere.

Imperetur pars tertia; & ducatur à puncto A quælibet recta linea AΓ, quæ cum ipſa AB angulum quemlibet contineat; ſumaturque in AΓ quodvis punctum Δ, & ipſi AΔ [per 3. 1.] æquales ponantur ΔE, EΓ; deinde jungatur BΓ, & per Δ ipſi BΓ [per 31. 1.] parallela ducatur ΔZ.



Itaque quoniam uni laterum trianguli ABΓ, videlicet ipſi BΓ, parallela ducta eſt ZΔ; erit [per 2. 6.] ut ΓΔ ad ΔA ita BZ ad ZA. dupla autem eſt ΓΔ ipſius ΔA; ergo & BZ ipſius ZA dupla: tripla igitur eſt BA ipſius AZ.

Quare à data recta linea AB imperata pars tertia AZ abſciſſa eſt. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ ποσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB· δεῖ δὴ τῆς AB τὸ ποσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον· καὶ διήχθω τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ A ἡ AΓ, γωνίαν ποιοῦσα μετὰ τῆς AB τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς AΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ AΔ ἴσαι αἱ ΔE, EΓ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος ἤχθω τῇ BΓ ἡ ΔZ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ABΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν BΓ ἦκται ἡ ZΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔA οὕτως ἡ BZ πρὸς τὴν ZA. διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔA· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ BZ τῆς ZA· τριπλῆ ἄρα ἡ BA τῆς AZ.

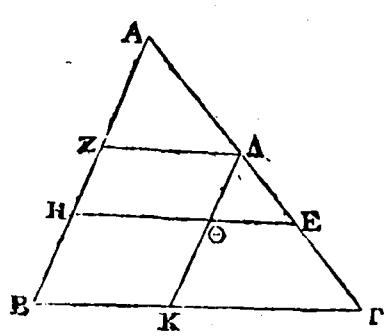
Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς AB τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται τὸ AZ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam infectam ſimiliter ſecare, ut data recta ſecta eſt.

SIT data recta linea infecta AB, ſecta vero AΓ: oportet rectam lineam AB infectam ſimiliter ſecare ut AΓ ſecta eſt.

Sit AΓ ſecta in punctis Δ, E, & ponantur ita ut angulum quemvis comprehendant, jungaturque BΓ, & per puncta Δ, E ipſi BΓ [per 31. 1.] parallelæ ducantur ΔZ, EH, per Δ vero ipſi AB ducatur parallela ΔΘK.



Parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum ZΘ, ΘB: ac propterea [per 34. 1.] ΔΘ eſt æqualis ZH; ΘK vero ipſi HB. & quoniam uni laterum trianguli ΔKΓ, ipſi ſcilicet KΓ, parallela ducta eſt ΘE; erit [per 2. 6.] ut ΓE ad EΔ ita KΘ ad ΘΔ. æqualis autem eſt KΘ quidem ipſi BH; ΘΔ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τμηθῆναι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ AB, ἡ δὲ τετμημένη ἡ AΓ· δεῖ δὴ τὴν AB ἄτμητον τῇ AΓ τετμημένῃ ὁμοίως τμηθῆναι.

Ἐχέτω τετμημένη ἡ AΓ κατὰ τὰ Δ, E σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BΓ, καὶ διὰ τῶν Δ, E τῇ BΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔZ, EH, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘK.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ZΘ, ΘB· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΘ τῇ ZH, ἡ δὲ ΘK τῇ HB. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔKΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν KΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΘE· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓE πρὸς τὴν EΔ οὕτως ἡ KΘ πρὸς τὴν ΘΔ. ἴση δὲ ἡ μὲν KΘ τῇ BH, ἡ δὲ ΘΔ

τῇ

τῇ ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΗΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΗ ἦκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Η ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ ἄτμητος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ ΑΓ ὁμοίως τετμήται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

vero ipsi ΗΖ: est igitur ut ΓΕ ad ΕΔ ita ΒΗ ad ΗΖ. rursus, quoniam uni laterum trianguli ΑΗΕ, nimirum ipsi ΕΗ, parallela ducta est ΖΔ; ut ΕΔ ad ΔΑ ita erit ΗΖ ad ΖΑ. sed ostensum est ut ΓΕ ad ΕΔ ita esse ΒΗ ad ΗΖ: ut igitur ΓΕ ad ΕΔ ita est ΒΗ ad ΗΖ, & ut ΕΔ ad ΔΑ ita ΗΖ ad ΖΑ.

Ergo data recta linea infecta ΑΒ similiter secta est ut data recta ΑΓ. quod erat faciendum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

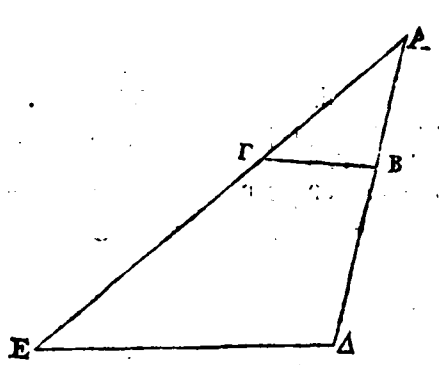
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον πορίσασθαι.

Prop. XI. Probl.

Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem invenire.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον πορίσασθαι.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ.



Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ, τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς πορίσματι ἡ ΓΕ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Producantur enim ΑΒ, ΑΓ ad puncta Δ, Ε, ponaturque ipsi ΑΓ æqualis ΒΔ, & jungatur ΒΓ, ducaturque [per 31. 1.] per Δ ipsi ΒΓ parallela ΔΕ.

Quoniam igitur uni laterum trianguli ΑΔΕ, videlicet ipsi ΔΕ, parallela ducta est ΒΓ; erit [per 2. 6.] ut ΑΒ ad ΒΔ ita ΑΓ ad ΓΕ. æqualis autem est ΒΔ ipsi ΑΓ: ut igitur ΑΒ ad ΑΓ ita est ΑΓ ad ΓΕ.

Quare duabus datis rectis lineis ΑΒ, ΑΓ, tertia proportionalis inventa est ΓΕ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

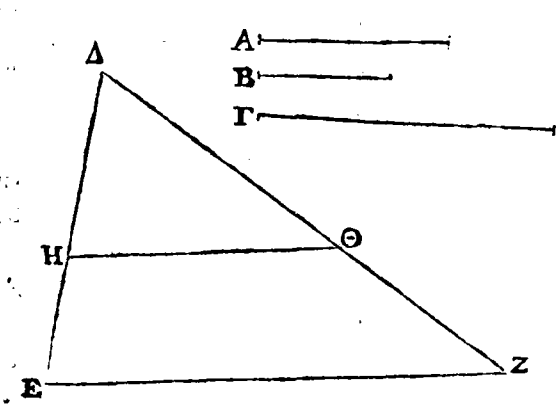
Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον πορίσασθαι.

Prop. XII. Probl.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον πορίσασθαι.

Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΕ, ΔΖ, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ διὰ μὲν τῶν Η, Θ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ.



Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

Itaque quoniam uni laterum trianguli ΔΕΖ, nimirum ipsi ΕΖ, parallela ducta est ΗΘ; erit [per 2. 6.] ut ΔΗ ad ΗΕ ita ΔΘ ad ΘΖ. est autem ΔΗ ipsi Α æqualis, ΗΕ vero æqualis Β, & ΔΘ æqualis Γ: ut igitur Α ad Β ita Γ ad ΘΖ.

Quare

Quare datis tribus rectis lineis A, B, Γ, quarta proportionalis inventa eſt Θ Z. quod erat faciendum.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ, τετάρτη ἀνάλογον συνεστάτω ἡ Θ Ζ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

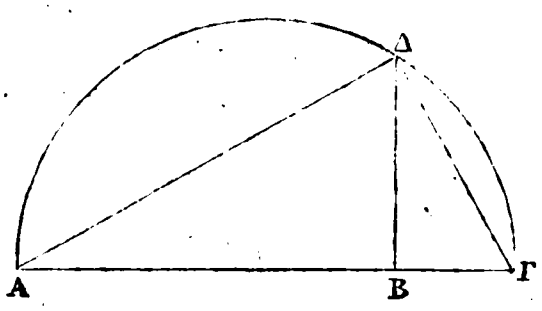
Prop. XIII. Probl.

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem invenire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον συνεστήσασθαι.

SInt datæ duæ rectæ lineæ AB, BΓ: oportet inter ipſas mediam proportionalem invenire.



Ponantur in directum, & ſuper ipſa AΓ deſcribatur ſemicirculus AΔΓ, ducaturque [per 11. 1.] à puncto B ipſi AΓ ad rectos angulos BΔ, & AΔ, ΔΓ jungantur.

Quoniam igitur angulus AΔΓ eſt in ſemicirculo, is [per 31. 3.] rectus eſt. & quoniam in triangulo rectangulo AΔΓ ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducta eſt ΔB; erit [per cor. 8. 6.] ΔB media proportionalis inter ſegmenta baſis AB, BΓ.

Duabus igitur datis rectis lineis AB, BΓ, media proportionalis inventa eſt Δ B. quod erat faciendum.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον συστήσασθαι.

Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ· ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέση ἀνάλογον συνέσταται ἡ ΔΒ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

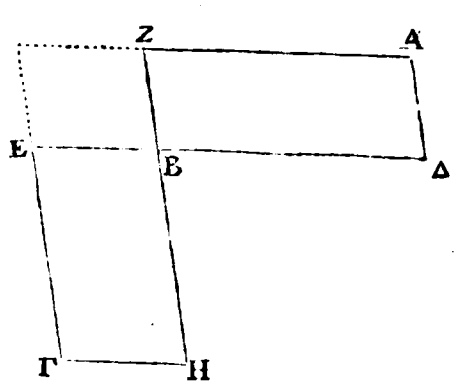
Prop. XIV. Probl.

Parallelogrammorum æqualium & unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum parallelogrammorum unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa inter ſe ſunt æqualia.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τῶν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν παραλληλογράμμων, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

SInt æqualia parallelogramma AB, BΓ, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directum ΔB, BE; ergo [per 14. 1.] & in directum erunt ZB, BH: dico parallelogrammorum AB, BΓ latera, quæ ſunt circa æquales angulos, eſſe reciproce proportionalia; hoc eſt ut ΔB ad BE ita eſſe HB ad BZ.



Compleatur enim parallelogrammum ZE.

Et quoniam parallelogrammum AB æquale eſt parallelogrammo BΓ, eſt autem ZB parallelogrammum aliud: erit [per 7. 5.] ut AB ad ZE ita BΓ ad ZE. ſed [per 1. 6.] ut AB quidem ad ZE ita eſt ΔB ad BE, ut autem BΓ ad ZB ita HB ad BZ: erit igitur [per 11. 5.] ut ΔB ad BE ita

Ἔστω ἴσα παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ, ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ

ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΓ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

ΑΛΛΑ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ᾗ ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ οὕτως τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν παραλληλογράμμων, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

HB ad BZ. ergo parallelogrammorum AB, BΓ latera, quæ circum æquales angulos, ſunt reciproce proportionalia.

SINT autem latera, quæ circum æquales angulos, reciproce proportionalia; ſitque ut ΔB ad BE ita HB ad BZ: dico parallelogrammum AB eſſe æquale parallelogrammo BΓ.

Quoniam enim eſt ut ΔB ad BE ita HB ad BZ, ut autem ΔB ad BE ita [per 1. 6.] AB parallelogrammum ad parallelogrammum ZE, & ut HB ad BZ ita BΓ parallelogrammum ad parallelogrammum ZE; erit [per 11. 5.] ut AB ad ZE ita BΓ ad ZE: æquale igitur eſt [per 9. 5.] AB parallelogrammum parallelogrammo BΓ.

Ergo parallelogrammorum æqualium & unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum parallelogrammorum unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa inter ſe ſunt æqualia. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Τῶν ἴσων τριγώνων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις.

PROP. XV. THEOR.

Triangulorum æqualium & unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa inter ſe ſunt æqualia.

ΕΣτω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ, μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΕ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.

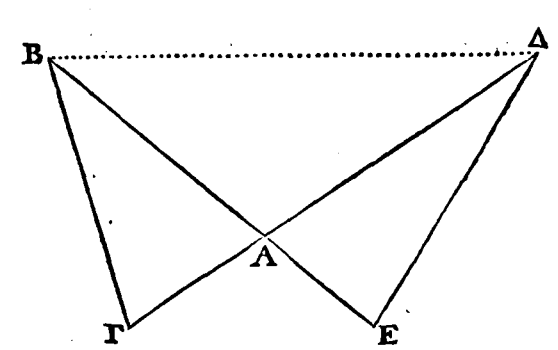
Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, ἄλλο δέ τί ἐστι τὸ ΑΒΔ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

ΑΛΛΑ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, ᾗ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

SINT æqualia triangula ABΓ, ΑΔΕ, unum angulum uni æqualem habentia, angulum ſcilicet BAΓ angulo ΔΑΕ: dico triangulorum ABΓ, ΑΔΕ latera, quæ circum æquales angulos, eſſe reciproce proportionalia, hoc eſt ut ΓΑ ad ΑΔ ita eſſe ΕΑ ad AB.

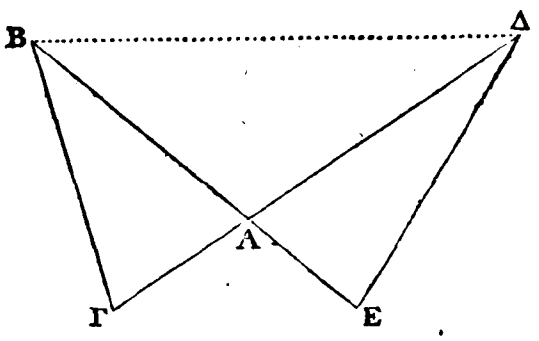
Ponantur enim ita ut in directum ſit ΓΑ ipſi ΑΔ: ergo [per 14. 1.] & ΕΑ ipſi AB in directum erit. & jungatur BΔ.



Quoniam igitur triangulum ABΓ æquale eſt triangulo ΑΔΕ, eſt autem aliud triangulum ABΔ; erit [per 7. 5.] ut ΓΑB triangulum ad triangulum BAΔ ita triangulum ΑΔΕ ad triangulum BAΔ. ſed [per 1. 6.] ut triangulum quidem ΓΑB ad BAΔ triangulum ita ΓΑ ad ΑΔ, ut autem triangulum ΕΑΔ ad ipſum BAΔ ita ΕΑ ad AB: erit igitur [per 11. 5.] ΓΑ ad ΑΔ ut ΕΑ ad AB: quare triangulorum ABΓ, ΑΔΕ latera, quæ circum æquales angulos, ſunt reciproce proportionalia.

SINT autem latera triangulorum ABΓ, ΑΔΕ reciproce proportionalia; & ſit ut ΓΑ ad ΑΔ ita ΕΑ ad AB: dico triangulum ABΓ triangulo ΑΔΕ eſſe æquale.

Junctæ enim rurſus BΔ, quoniam ut ΓA ad AΔ ita eſt EA ad AB; ut autem ΓA ad AΔ ita [per 1. 6.] ABΓ triangulum ad triangulum BAΔ, & ut EA ad AB ita triangulum EAΔ ad BAΔ triangulum: erit [per 11. 5.] ut ABΓ triangulum ad triangulum BAΔ ita triangulum EAΔ ad BAΔ triangulum: utrumque igitur triangulorum ABΓ, AΔE ad triangulum BAΔ eandem habet rationem; ac propterea [per 9. 5.] æquale eſt ABΓ triangulum triangulo EAΔ.



Æqualium igitur & unum angulum uni æqualem habentium triangulorum reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa inter ſe ſunt æqualia. quod erat demonſtrandum.

Επιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΑΔ τριγώνῳ.

Τῶν ἄρα ἴσην καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἑκάτερα ἴσα εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XVI. Theor.

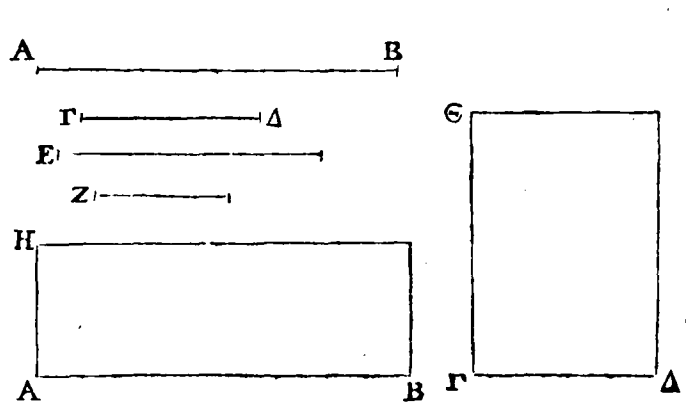
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis comprehenſum æquale eſt rectangulo quod ſub mediis comprehenditur: & ſi rectangulum ſub extremis comprehenſum æquale fuerit ei quod ſub mediis comprehenditur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales AB, ΓΔ, E, Z; ut quidem AB ad ΓΔ ita E ad Z: dico rectangulum comprehenſum ſub rectis lineis AB, Z æquale eſſe ei quod ſub ipſis ΓΔ, E comprehenditur.

Ducantur enim [per 11. 1.] à punctis A, Γ ipſis AB, ΓΔ ad rectos angulos AH, ΓΘ; ponaturque ipſi Z æqualis AH; ipſi vero E æqualis ΓΘ; & compleantur BH, ΔΘ parallelogramma.



Quoniam igitur eſt ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; eſt autem E quidem æqualis ΓΘ, & Z ipſi AH; erit [per 7. 5.] ut AB ad ΓΔ ita ΓΘ ad AH: parallelogrammorum igitur BH, ΔΘ reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos. quorum autem æquiangulorum parallelogrammorum reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos,

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ, E, Z ἀνάλογον, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν A, Γ σημείων τῇ AB, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ AH, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Z ἴση ἡ AH, τῇ δὲ E ἴση ἡ ΓΘ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ BH, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z, ἴση δὲ ἡ μὲν E τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Z τῇ AH· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν AH· τῶν BH, ΔΘ παραλληλογράμμων ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας

γωνίας, ὅτα ἐστὶν ἐκείνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. Ἐστὶ δὲ τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τὰ ΑΒ, Ζ, ἴση γὰρ ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τὰ ΓΔ, Ε περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τὰ ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΑΛΛΑ δὴ τὸ ὑπὸ τὰ ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τὰ ΑΒ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τὰ ΓΔ, Ε, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τὰ ΑΒ, Ζ τὸ ΒΗ, ἴση γὰρ τῇ Ζ ἡ ΑΗ· τὸ δὲ ὑπὸ τὰ ΓΔ, Ε τὸ ΔΘ, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ. καί εἰσιν ἰσογώνια. τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ea [per 14. 6.] inter se sunt æqualia; parallelogrammum igitur BH æquale est parallelogrammo ΔΘ. est autem parallelogrammum BH sub rectis lineis A B, Z comprehensum, est enim AH æqualis Z; parallelogrammum vero Δ Θ comprehenditur sub ipsis Γ Δ, E, cum Γ Θ ipsi E sit æqualis: rectangulum igitur comprehensum sub rectis A B, Z est æquale ei quod sub ipsis Γ Δ, E comprehenditur.

SED rectangulum comprehensum sub A B, Z sit æquale ei quod comprehenditur sub ipsis Γ Δ, E: dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut A B ad Γ Δ ita E ad Z.

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum comprehensum sub rectis A B, Z est æquale ei quod sub rectis Γ Δ, E comprehenditur, est autem rectangulum BH comprehensum sub rectis A B, Z, etenim AH est æqualis Z; comprehensum vero sub rectis Γ Δ, E est rectangulum Δ Θ, quod Γ Θ ipsi E sit æqualis: erit parallelogrammum BH æquale parallelogrammo Δ Θ; & sunt æquiangula. æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos [per 14. 6.] sunt reciproce proportionalia: quare ut A B ad Γ Δ ita Γ Θ ad A H. æqualis autem est Γ Θ ipsi E, & A H ipsi Z: ut igitur A B ad Γ Δ ita E ad Z.

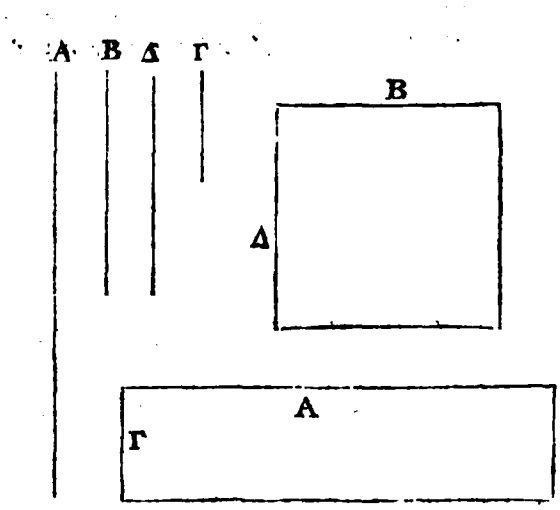
Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum æquale est ei quod sub mediis comprehenditur: & si rectangulum sub extremis comprehensum æquale fuerit ei quod sub mediis comprehenditur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum æquale est ei quod à media fit quadrato: & si rectangulum sub extremis comprehensum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.



ΕΣτωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τὰ Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς Β τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

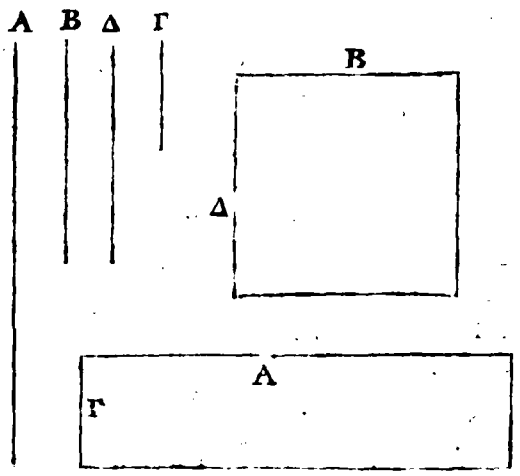
Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἐὰν δὴ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιε-

SInt tres rectæ lineæ proportionales A, B, Γ, ut quidem A ad B ita B ad Γ: dico rectangulum comprehensum sub rectis A, Γ æquale esse ei quod à media B fit quadrato.

Ponatur ipsi B æqualis Δ.

Et quoniam ut A ad B ita B ad Γ, æqualis autem est B ipsi Δ; erit ut A ad B ita Δ ad Γ. si autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum [per 16. 6.] est æquale ei quod sub mediis compre-

henditur: ergo rectangulum comprehenſum ſub rectis A, Γ æquale eſt ei quod comprehenditur ſub rectis B, Δ. ſed rectangulum comprehenſum ſub rectis B, Δ eſt æquale quadrato quod fit ex ipſa B; etenim B eſt æqualis Δ: rectangulum igitur comprehenſum ſub rectis A, Γ eſt æquale ei quod ex B fit quadrato.



SED rectangulum comprehenſum ſub rectis A, Γ æquale ſit quadrato quod fit ex B: dico ut A ad B ita eſſe B ad Γ.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam rectangulum comprehenſum ſub rectis A, Γ æquale eſt quadrato quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B eſt rectangulum quod ſub ipſis B, Δ comprehenditur, eſt enim B æqualis ipſi Δ: erit rectangulum comprehenſum ſub rectis A, Γ æquale ei quod ſub rectis B, Δ comprehenditur. ſi autem rectangulum ſub extremis comprehenſum æquale fuerit ei quod ſub mediis comprehenditur, quatuor rectæ lineæ [per 16. 6.] proportionales erunt: eſt igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. ſed B æqualis eſt Δ: ut igitur A ad B ita B ad Γ.

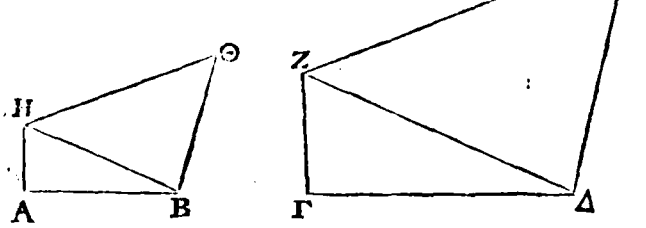
Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis comprehenſum eſt æquale ei quod à media fit quadrato: & ſi rectangulum ſub extremis comprehenſum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. quod erat demonſtrandum.

PROP. XVIII. PROBL.

A data recta linea rectilineo ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.

SIT data recta linea AB, datum autem rectilineum ΓE: oportet à recta linea AB rectilineo ΓE ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.

Jungatur ΔZ; & [per 23. 1.] ad rectam lineam AB & ad puncta in ipſa A, B angulo quidem Γ æqualis angulus conſtituatur HAB, angulo autem ΓΔZ angulus ABH: reliquus igitur ΓZΔ angulus [per 32. 1.] reliquo AHB eſt æqualis: ergo æquiangulum eſt ZΓΔ triangulum triangulo HAB; ac propterea [per 4. 6.] ut ZΔ ad HB ita ZΓ ad HA & ΓΔ ad



χομβῳ ὀρθογωνίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τ̃ Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τ̃ Β, Δ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τ̃ Β, Δ τῷ ἀπὸ τ̃ Β ἐστὶν ἴσον, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

ΑΛΛΑ δὴ τὸ ὑπὸ τ̃ Α, Γ ἴσον ὑποκείσθω τῷ ἀπὸ τ̃ Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τ̃ Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τ̃ Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Β, Δ. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἀπὸ τ̃ δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

ΕΣΤΩ ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Α, Β τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἡ ὑπὸ ΗΑΒ ἴση, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ ἡ ὑπὸ ΑΒΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΓΔ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν

AB.

AB. πάλιν, συνεστάτω πρὸς τῇ BH εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς B, H τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BHΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ HBΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ HBΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν HB οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν HΘ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘB. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν HB οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν HA καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν AB· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς τὴν HA οὕτως ἦτοι ΓΔ πρὸς τὴν AB καὶ ΖΕ πρὸς τὴν HΘ, καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘB. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ AHB, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ BHΘ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλῃ τῇ ὑπὸ AHΘ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ABΘ ἐστὶν ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ A ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ AΘ τῷ ΓΕ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ AΘ εὐθυγράμμων τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΓΕ ὁμοίων τε καὶ ὁμοίως κειμένων εὐθυγράμμων ἀναγέγραπται τὸ AΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

AB. rursus, constituatur ad rectam lineam BH & ad puncta in ipsa B, H angulo quidem ΔZE æqualis angulus BHΘ, angulo autem ZΔE æqualis HBΘ: ergo reliquus qui ad E reliquo qui ad Θ est æqualis: æquiangulum igitur est triangulum ZΔE triangulo HBΘ: quare [per 4. 6.] ut ZΔ ad HB ita ZE ad HΘ & EΔ ad ΘB. ostensum autem est & ut ZΔ ad HB ita esse ZΓ ad HA & ΓΔ ad AB: & igitur [per 11. 5.] ut ZΓ ad HA ita ΓΔ ad AB & ZE ad HΘ, & adhuc EΔ ad ΘB. itaque quoniam angulus ΓZΔ est [per constr.] æqualis angulo AHB, angulus autem ΔZE angulo BHΘ: erit totus ΓZE angulus toti AHΘ æqualis. eadem ratione & ΓΔE est æqualis ipsi ABΘ, & præterea angulus ad Γ angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad Θ; æquiangulum igitur est AΘ ipsi ΓE, & latera circum æquales angulos habet proportionalia: ergo [per 1. def. 6.] rectilineum AΘ rectilineo ΓB simile erit.

A data igitur recta linea AB dato rectilineo ΓE simile & similiter positum rectilineum AΘ descriptum est. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

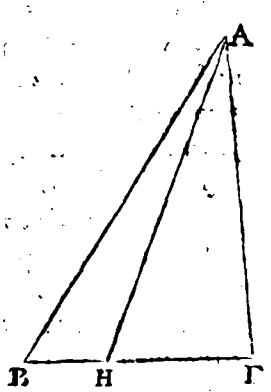
Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Prop. XIX. Theor.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ABΓ, ΔEZ, ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν τῇ πρὸς τῷ E, ὡς μὲν τὴν AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὴν ΔE πρὸς τὴν EZ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν BΓ τῇ EZ· λέγω ὅτι τὸ ABΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔEZ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ BΓ πρὸς τὴν EZ.

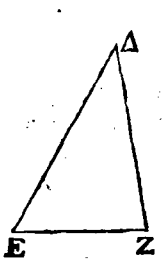
Εἰλήφθω γὰρ τῶν BΓ, EZ τρίτη ἀνάλογον ἡ BH, ὥστε εἶναι ὡς τὴν BΓ πρὸς τὴν EZ οὕτως τὴν EZ πρὸς τὴν BH· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HA.



Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ ΔE πρὸς τὴν EZ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΔE οὕτως ἡ BΓ πρὸς τὴν EZ. ἀλλ' ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἐστὶν ἡ EZ πρὸς τὴν BH· καὶ ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν ΔE οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν BH· τῶν ABH, ΔEZ τριγώνων ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶ κἀκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ABH τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν BH· ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον

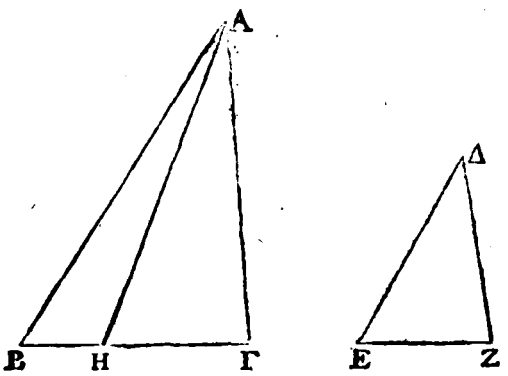
Sint similia triangula ABΓ, ΔEZ, habentia angulum ad B æqualem angulo ad E; & sit ut AB ad BΓ ita ΔE ad EZ, ita ut latus BΓ homologum sit [per 12. def. 5.] lateri EZ: dico ABΓ triangulum ad triangulum ΔEZ duplicatam rationem habere ejus quam habet BΓ ad EZ.

Sumatur enim [per 11. 6.] ipsis BΓ, EZ tertia proportionalis BH, ut sit sicut BΓ ad EZ ita EZ ad BH: & jungatur HA.



Quoniam igitur ut AB ad BΓ ita est ΔE ad EZ; erit permutando [per 16. 5.] ut AB ad ΔE ita BΓ ad EZ. sed ut BΓ ad EZ ita EZ ad BH, & igitur [per 11. 5.] ut AB ad ΔE ita EZ ad BH: quare triangulorum ABH, ΔEZ latera, quæ circum æquales angulos, reciproce sunt proportionalia. quorum autem triangulorum, unum angulum uni æqualem habentium, latera, quæ circum æquales angulos, reciproce sunt proportionalia, ea [per 15. 6.] inter se sunt æqualia: æquale igitur est ABH triangulum triangulo ΔEZ. & quoniam est ut BΓ ad EZ ita EZ ad BH; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint [per 10. def. 5.] prima ad tertiam duplicatam rationem

habet ejus quam habet ad ſecundam; habebit ΒΓ ad ΒΗ duplicatam rationem ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ. ut autem ΒΓ ad ΒΗ ita [per 1. 6.] ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΒΗ: ergo & ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΒΗ duplicatam rationem habet ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ. eſt autem ΑΒΗ triangulum triangulo ΔΕΖ æquale: & igitur [per 7. 5.] triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ duplicatam rationem habebit ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ.



Similia igitur triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam ita eſſe triangulum quod fit à prima ad triangulum à ſecunda ſimile & ſimiliter deſcriptum: quoniam oſtenſum eſt ut ΓΒ ad ΒΗ ita ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΒΗ, hoc eſt ad triangulum ΔΕΖ.

Prop. XX. Theor.

Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur & numero æqualia & homologa totis: & polygonum ad polygonum duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad latus homologum.

Sint ſimilia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, & ſit latus ΑΒ homologum ipſi ΖΗ: dico polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ in ſimilia triangula dividi & numero æqualia & homologa totis; & polygonum ΑΒΓΔΕ ad polygonum ΖΗΘΚΛ duplicatam rationem habere ejus quam habet ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Et quoniam ſimile eſt ΑΒΓΔΕ polygonum polygono ΖΗΘΚΛ; angulus ΒΑΕ angulo ΗΖΛ eſt æqualis: atque eſt ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΗΖ ad ΖΛ. quoniam igitur ΑΒΕ, ΖΗΛ ſunt duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia; erit [per 6. 6.] triangulum ΑΒΕ triangulo ΖΗΛ æquiangulum; ergo [per 4. 6.] & ſimile; angulus igitur ΑΒΕ æqualis eſt angulo ΖΗΛ. eſt autem & totus ΑΒΓ angulus æqualis toti ΖΗΘ, propter ſimilitudinem polygonorum: ergo reliquus ΕΒΓ reliquo ΛΗΘ eſt æqualis. & quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ΑΒΕ, ΖΗΛ eſt ut ΒΕ ad ΒΑ ita ΛΗ ad ΗΖ; ſed & propter ſimilitudinem polygonorum ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΖΗ ad ΗΘ.

ἔχειν λέγεται ἥπερ πρὸς τὴν Δ. ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ ἕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ ἕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἰς τε τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

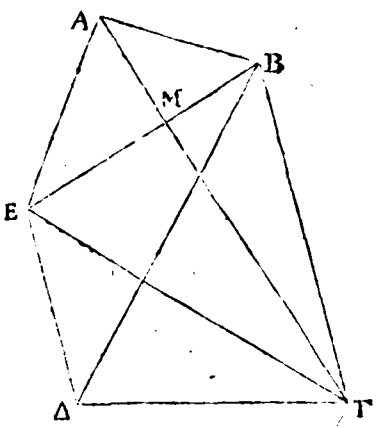
Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ· καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ ἕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΛ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ ἕτως ἡ ΛΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ ἕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν

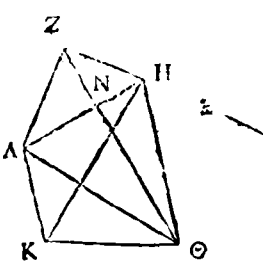
ΗΘ· δίσα ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διήρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

ΑΕΓΩ ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· τυτέστιν, ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τυτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ ὑπὸ ΖΗΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ ΒΜΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΗΝΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΒ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς τὴν ΝΘ· ὥστε καὶ δι᾽ ἴσου, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΘ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς ΕΜΓ, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ΑΜΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΘ οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον, καὶ συναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ἐπεζευχθεισῶν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς





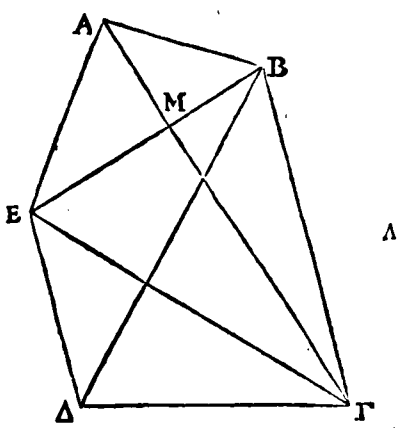
ΗΘ: erit [per 22. 5.] ex æquo ut ΕΒ ad ΒΓ ita ΛΗ ad ΗΘ; nempe circum æquales angulos ΕΒΓ, ΛΗΘ latera ſunt proportionalia: æquiangulum igitur eſt [per 6. 6.] ΕΒΓ triangulum triangulo ΛΗΘ, quare [per 4. 6.] & ſimile. eadem ratione & ΕΓΔ triangulum ſimile eſt triangulo ΛΘΚ: ſimilia igitur polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ in ſimilia triangula dividuntur & numero æqualia.

Dico & homologa totis: hoc eſt, ut proportionalia ſint triangula, & antecedentia quidem eſſe ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, conſequentia autem ipſorum ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ; & ΑΒΓΔΕ polygonum ad polygonum ΖΗΘΚΛ duplicatam rationem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur enim ΑΓ, ΖΘ.

Et quoniam, propter ſimilitudinem polygonorum, angulus ΑΒΓ eſt æqualis angulo ΖΗΘ, atque eſt ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΖΗ ad ΗΘ; erit [per 6. 6.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΖΗΘ æquiangulum: æqualis igitur eſt angulus quidem ΒΑΓ angulo ΗΖΘ, angulus vero ΒΓΑ angulo ΗΘΖ. præterea quoniam æqualis eſt ΒΑΜ angulus angulo ΗΖΝ, oſtenſus autem eſt & ΑΒΜ angulus æqualis angulo ΖΗΝ; erit [per 32. 1.] & reliquus ΑΜΒ reliquo ΖΝΗ æqualis: ergo æquiangulum eſt ΑΒΜ triangulum triangulo ΖΗΝ. ſimiliter oſtendemus & triangulum ΒΜΓ triangulo ΗΝΘ æquiangulum eſſe; igitur [per 4. 6.] ut ΑΜ ad ΜΒ ita eſt ΖΝ ad ΝΗ, & ut ΒΜ ad ΜΓ ita ΗΝ ad ΝΘ: quare & ex æquo [per 22. 5.] ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΖΝ ad ΝΘ. ſed ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΑΒΜ triangulum ad triangulum ΜΒΓ, & triangulum ΑΜΕ ad ipſum ΕΜΓ, inter ſe enim ſunt [per 1. 6.] ut baſes: & [per 12. 5.] ut unum antecedentium ad unum conſequentium ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia: ut igitur ΑΜΒ triangulum ad triangulum ΒΜΓ ita triangulum ΑΒΕ ad ipſum ΓΒΕ. ſed ut ΑΜΒ ad ΒΜΓ ita ΑΜ ad ΜΓ; & igitur [per 11. 5.] ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΑΒΕ triangulum ad triangulum ΕΒΓ. eadem ratione & ut ΖΝ ad ΝΘ ita ΖΗΛ triangulum ad triangulum ΗΛΘ. atque eſt ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΖΝ ad ΝΘ: ergo [per 11. 5.] ut triangulum ΑΒΕ ad triangulum ΒΕΓ ita triangulum ΖΗΛ ad ΗΛΘ triangulum; & permutando [per 16. 5.] ut ΑΒΕ triangulum ad triangulum ΖΗΛ ita triangulum ΒΕΓ ad triangulum ΗΛΘ. ſimiliter oſtendemus, junctis ΒΔ, ΗΚ, ut

BEΓ triangulum ad triangulum HΛΘ ita esse triangulum EΓΔ ad triangulum ΛΘK. & quoniam est ut ABE triangulum ad triangulum ZHΛ ita triangulum EBΓ ad triangulum ΛHΘ, & adhuc ita triangulum EΓΔ ad ipsum ΛΘK; erit [per 12. 5.] & ut unum antecedentium ad unum consequentium sic omnia antecedentia ad omnia consequentia: ergo ut triangulum ABE ad triangulum ZHΛ ita ABΓΔE polygonum ad polygonum ZHΘKΛ. sed ABE triangulum ad triangulum ZHΛ duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus ZH; similia enim triangula sunt [per 19. 6.] in duplicata ratione laterum homologorum: ergo & ABΓΔE polygonum ad polygonum ZHΘKΛ duplicatam rationem habet ejus quam AB latus homologum habet ad ZH homologum latus.



Similia igitur polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia & homologa totis: & polygonum ad polygonum duplicatam habet rationem ejus quam habet latus homologum ad latus homologum. quod erat demonstrandum.

Corollarium 1.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur, ea esse in duplicata ratione laterum homologorum. ostensum autem est [ad corol. 19. 6.] & in triangulis: quare universe similes rectilineæ figuræ inter se sunt in duplicata ratione homologorum laterum.

Corollarium 2.

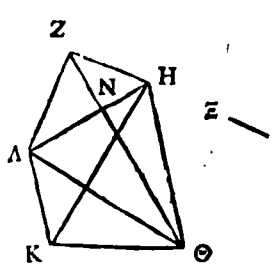
Et si ipsis AB, ZH tertiam proportionalem sumamus, quæ sit Ξ; habebit [per 10. def. 5.] AB ad Ξ duplicatam rationem ejus quam habet AB ad ZH. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam rationem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quam AB ad ZH: atque ostensum est hoc in triangulis. universe igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam ita esse figuram rectilineam, quæ fit à prima, ad similem & similiter descriptam à secunda.

ALITER.

Ostendemus etiam & aliter expeditius hомologa esse triangula.

Exponantur enim rursus polygona ABΓΔE, ZHΘKΛ, & jungantur BE, EΓ, HΛ, ΛΘ: dico ut ABE triangulum ad triangulum ZHΛ ita esse triangulum EBΓ ad triangulum ΛHΘ, & triangulum ΓΔE ad ipsum ΘKΛ.

τὸ BEΓ τρίγωνον πρὸς τὸ HΛΘ τρίγωνον ἔτως τὸ EΓΔ πρὸς τὸ ΛΘK τρίγωνον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHΛ ἔτως τὸ EBΓ πρὸς τὸ ΛHΘ, καὶ ἔτι EΓΔ πρὸς τὸ ΛΘK· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων ἔτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHΛ τρίγωνον ἔτως τὸ ABΓΔE πολύγωνον πρὸς τὸ ZHΘKΛ πολύγωνον. ἀλλὰ τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHΛ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ AB ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ZH ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ τὸ ABΓΔE ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ZHΘKΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ AB ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ZH ὁμόλογον πλευράν.



Τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα α'.

Ωσαύτως δὴ καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πόρισμα β'.

Καὶ ἐὰν τῶν AB, ZH τρίτιον ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ, ἡ AB πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ AB πρὸς τὴν ZH. ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον, τουτέστιν ἡ AB πρὸς τὴν ZH· ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων. ὥστε καὶ καθόλου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

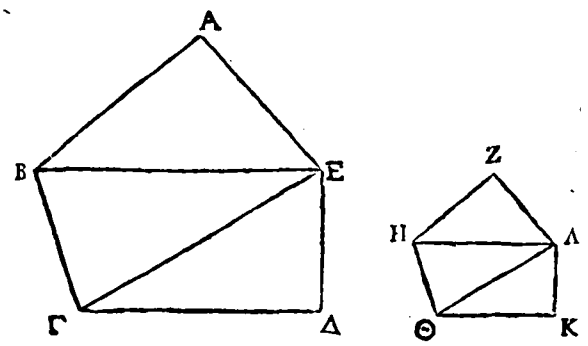
ΑΛΛΩΣ.

Δείξομεν δὴ καὶ ἑτέρως εὐχειρότερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ABΓΔE, ZHΘKΛ πολύγωνα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BE, EΓ, HΛ, ΛΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHΛ οὕτως τὸ EBΓ πρὸς τὸ ΛHΘ καὶ τὸ ΓΔE πρὸς τὸ ΘKΛ.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, τὸ ΑΒΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ· τὸ ΕΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΛΗΘ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΘΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν τῇ πρώτῃ δείξομεν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Quoniam enim ſimile eſt ABE triangulum triangulo ZHΛ, habet ABE triangulum ad ZHΛ [per 19. 6.] duplicatam rationem ejus quam habet BE ad HΛ. eadem ratione & triangulum BEΓ ad HΛΘ triangulum duplicatam rationem habet ejus quam BE ad HΛ: eſt igitur [per 11. 5.] ut ABE triangulum ad triangulum ZHΛ ita triangulum EBΓ ad ΛHΘ triangulum. rurſus, quoniam ſimile eſt triangulum EBΓ triangulo ΛHΘ, habet [per 19. 6.] EBΓ triangulum ad triangulum ΛHΘ duplicatam rationem ejus quam recta linea ΓE habet ad rectam ΘΛ. eadem ratione & EΓΔ triangulum ad triangulum ΛΘK duplicatam rationem habet ejus quam ΓE ad ΘΛ: eſt igitur [per 11. 5.] ut triangulum EBΓ ad triangulum ΛHΘ ita EΓΔ triangulum ad triangulum ΛΘK. oſtenſum autem eſt & ut EBΓ triangulum ad triangulum ΛHΘ ita triangulum ABE ad triangulum ZHΛ: ergo & ut triangulum ABE ad triangulum ZHΛ ita triangulum BEΓ ad HΛΘ triangulum, & triangulum EΓΔ ad ipſum ΛΘK: & igitur [per 12. 5.] ut unum antecedentium ad unum conſequentium ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia, & reliqua ut in priori demonſtratione. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

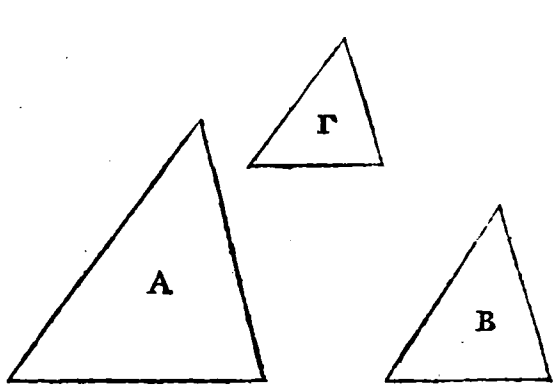
Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Prop. XXI. Theor.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶν ὅμοιον.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστιν ὅμοιον τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιόν τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιόν τε ἐστὶν αὐτῷ καὶ τὰς πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιόν τε ἐστὶ καὶ τὰς πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὥστε καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιόν τε ἐστὶ καὶ τὰς πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



SIT enim utrumque rectilineorum A, B ſimile rectilineo Γ: dico & rectilineum A rectilineo B ſimile eſſe.

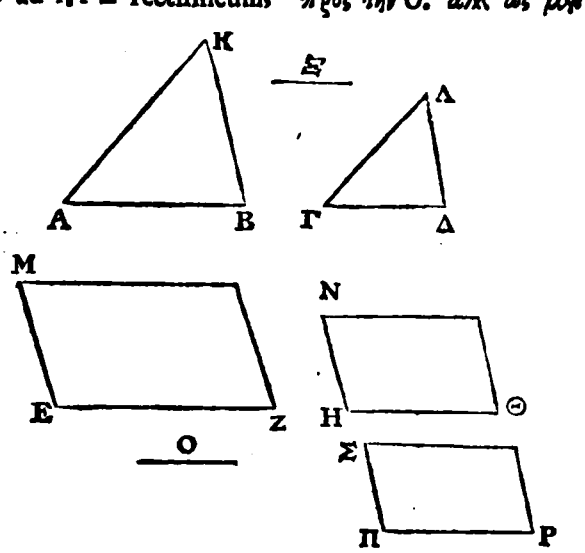
Quoniam enim ſimile eſt A rectilineum rectilineo Γ, & ipſi [per 1. def. 6.] æquiangulum erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. rurſus, quoniam ſimile eſt rectilineum B rectilineo Γ, æquiangulum ipſi erit & circum æquales angulos latera proportionalia habebit; utrumque igitur rectilineorum A, B ipſi Γ æquiangulum eſt, & circum æquales angulos latera habet proportionalia: quare & rectilineum A ipſi B eſt [per 1. ax.] æquiangulum, lateraque circum æquales angulos [per 11. 5.] proportionalia habet; ac propterea [per 1. def. 6.] A ipſi B eſt ſimile. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia & ſimiliter deſcripta, proportionalia erunt: & ſi rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia fuerint; & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales AB, ΓΔ, EZ, HΘ, ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ; deſcribanturque ab ipſis quidem AB, ΓΔ ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea KAB, ΛΓΔ, ab ipſis vero EZ, HΘ deſcribantur rectilinea ſimilia & ſimiliter poſita MZ, NΘ: dico ut KAB rectilineum ad rectilineum ΛΓΔ ita eſſe rectilineum MZ ad ipſum NΘ rectilineum.

Sumatur enim [per 11.6.] ipſis quidem AB, ΓΔ tertia proportionalis Ξ; ipſis vero EZ, HΘ tertia proportionalis O. & quoniam eſt ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ, ut autem ΓΔ ad Ξ ita HΘ ad O: erit ex æquo [per 22. 5.] ut AB ad Ξ ita EZ ad O. ſed [per 2. cor. 20. 6.] ut AB ad Ξ ita eſt rectilineum KAB ad ΛΓΔ rectilineum, ut autem EZ ad O ita rectilineum MZ ad rectilineum NΘ: igitur [per 11. 5.] ut KAB ad ΛΓΔ ita MZ ad NΘ.



SED ſit ut KAB rectilineum ad rectilineum ΛΓΔ ita rectilineum MZ ad rectilineum NΘ: dico ut AB ad ΓΔ ita eſſe EZ ad HΘ.

Fiat enim [per 12. 6.] ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠP, & deſcribatur [per 18. 6.] ab ipſa ΠP alterutri rectilineorum MZ, NΘ ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum ΣP.

Quoniam igitur eſt ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠP, & deſcripta ſunt ab ipſis quidem AB, ΓΔ ſimilia & ſimiliter poſita KAB, ΛΓΔ rectilinea, ab ipſis vero EZ, ΠP ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea MZ, ΣP; eſt [per part. prior. huj.] ut KAB ad rectilineum ΛΓΔ ita rectilineum MZ ad ΣP rectilineum. ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum ΛΓΔ ita MZ rectilineum ad rectilineum NΘ; rectilineum igitur MZ [per 11. 5.] ad utrumque ipſorum NΘ, ΣP eandem habet rationem: ergo [per 9. 5.] rectilineum NΘ eſt ipſi ΣP æquale. eſt autem ipſi ſimile & ſimiliter poſitum: ergo [per lemma ſequens] HΘ eſt æqualis ΠP. & quoniam ut AB ad ΓΔ ita eſt EZ ad ΠP, æqualis autem ΠP ipſi HΘ; erit [per 7. 5.] ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

ΕΣτωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB, ΓΔ, EZ, HΘ, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν HΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν AB, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ KAB, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν EZ, HΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ MZ, NΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ NΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν AB, ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ, τῶν δὲ EZ, HΘ τρίτη ἀνάλογον ἡ O. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μὲν AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν HΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ HΘ πρὸς τὴν O· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν O. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν Ξ οὕτως τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν O οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ NΘ· ὡς ἄρα τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ NΘ.

ΑΛΛΑ δὴ ἔστω ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ NΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν HΘ.

Γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΠP, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠP ὁποτέρῳ τῶν MZ, NΘ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣP.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΠP, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν AB, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ KAB, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν EZ, ΠP ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ MZ, ΣP· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ ΣP. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ NΘ· τὸ MZ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν NΘ καὶ ΣP τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ NΘ τῷ ΣP. ἔστι δὲ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ HΘ τῇ ΠP. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΠP, ἴση δὲ ἡ ΠP τῇ HΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν HΘ.

Ἐὰν

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & rectilinea quæ ab ipſis fiunt, ſimilia & ſimiliter deſcripta, proportionalia erunt: & ſi rectilinea quæ ab ipſis fiunt, ſimilia & ſimiliter deſcripta, proportionalia fuerint; & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt. quod erat demonſtrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δέ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα καὶ ὅμοια ᾖ, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, δείξομεν ἔτως.

Ἔστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ ἔτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Εἰ γὰρ ἄνισοί εἰσι, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ ἔτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ ἔτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ. μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΠΡ τῆς ΗΘ, ἴση ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

At vero, ſi rectilinea æqualia & ſimilia ſint, homologa ipſorum latera inter ſe æqualia eſſe hoc modo demonſtrabimus.

Sint æqualia & ſimilia rectilinea ΝΘ, ΣΡ; & ſit ut ΘΗ ad ΗΝ ita ΡΠ ad ΠΣ: dico ΡΠ ipſi ΘΗ eſſe æqualem.

Si enim inæquales ſint, una ipſarum major erit. ſit ΡΠ major quam ΘΗ. & quoniam eſt ut ΡΠ ad ΠΣ ita ΘΗ ad ΗΝ: & permutando erit [per 16. 5.] ut ΡΠ ad ΘΗ ita ΠΣ ad ΗΝ. major autem eſt ΠΡ quam ΗΘ; ergo & ΠΣ quam ΗΝ major erit: quare [per 20. 6.] & rectilineum ΡΣ rectilineo ΘΝ eſt majus: ſed & æquale, quod fieri non poteſt: non eſt igitur ΠΡ inæqualis ipſi ΗΘ; ergo æqualis. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

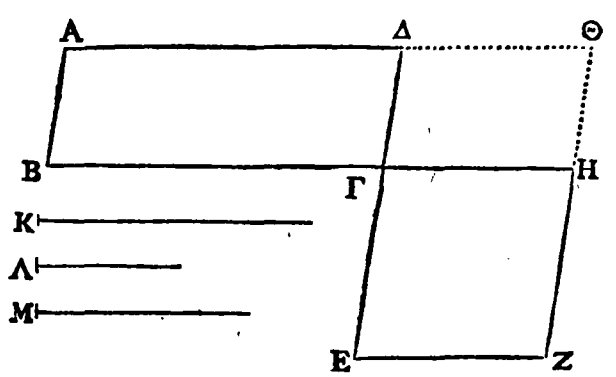
Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habent *ex lateribus compoſitam.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ, ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τουτέστι τὸν ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τὸν ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ· καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ ἔτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ ἔτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.



Sint æquiangula parallelogramma ΑΓ, ΓΖ, æqualem habentia ΒΓΔ angulum angulo ΕΓΗ: dico parallelogrammum ΑΓ ad parallelogrammum ΓΖ rationem habere compoſitam ex lateribus; hoc eſt, compoſitam ex ratione quam habet ΒΓ ad ΓΗ, & ex ratione quam ΔΓ habet ad ΓΕ.

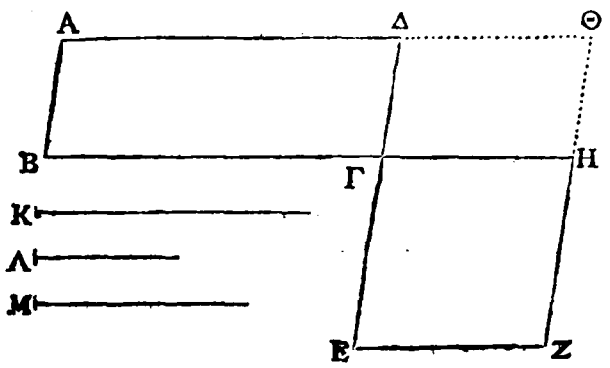
Ponatur enim ΒΓ in directum ipſi ΓΗ, ergo [per 14. 1.] & ΔΓ ipſi ΓΕ in directum erit: & compleatur ΔΗ parallelogrammum, exponaturque recta linea quædam Κ, & fiat [per 12. 6.] ut ΒΓ ad ΓΗ ita Κ ad Λ, ut autem ΔΓ ad ΓΕ ita Λ ad Μ.

Οἱ ἄρα λόγοι τοῦ τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τοῦ Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τοῦ τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἀλλ' ὁ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τοῦ Κ πρὸς τὸν Λ λόγου καὶ τοῦ τοῦ Λ πρὸς τὴν Μ· ὥστε καὶ ὁ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ ἔτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ· ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ

Rationes igitur ipſius Κ ad Λ & Λ ad Μ eædem ſunt quæ rationes laterum, videlicet ΒΓ ad ΓΗ & ΔΓ ad ΓΕ. ſed [per 5. def. 6.] ratio Κ ad Μ compoſita eſt ex ratione Κ ad Λ & ratione Λ ad Μ: quare & Κ ad Μ rationem habet ex lateribus compoſitam. & quoniam eſt [per 1. 6.] ut ΒΓ ad ΓΗ ita ΑΓ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΘ; ſed ut ΒΓ ad ΓΗ

* Rectius ex laterum rationibus.

ita K ad Λ: erit igitur [per 11. 5.] & ut K ad Λ ita parallelogrammum AΓ ad ΓΘ parallelogrammum. rursus, quoniam [per 1. 6.] est ut ΔΓ ad ΓΕ ita ΓΘ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΖ; ut autem ΔΓ ad ΓΕ ita Λ ad Μ: ut igitur Λ ad Μ ita erit [per 11. 5.] parallelogrammum ΓΘ ad ΓΖ parallelogrammum. itaque cum ostensum sit, ut K quidem ad Λ ita esse AΓ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΘ; ut autem Λ ad Μ ita parallelogrammum ΓΘ ad ΓΖ parallelogrammum: erit ex æquo [per 22. 5.] ut K ad Μ ita AΓ parallelogrammum ad ipsum ΓΖ. habet autem K ad Μ rationem ex lateribus compositam: ergo & AΓ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΖ rationem habet compositam ex lateribus.



Æquiangula igitur parallelogramma inter se rationem habent ex lateribus compositam. quod erat demonstrandum.

ἴσης ἡ Κ πρὸς τὴν Λ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ ἴσης τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ ἴσης τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ ἴσης ἡ Λ πρὸς τὴν Μ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ ἴσης τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ ἴσης τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ ἴσης τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ ἴσης τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXIV. Theor.

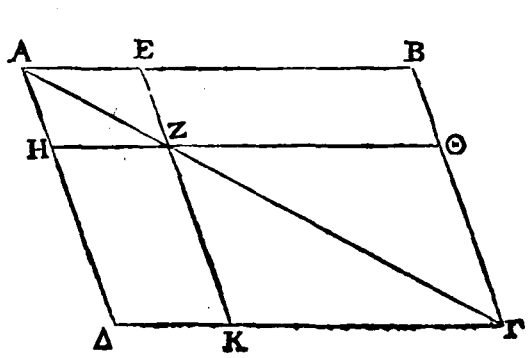
Omnis parallelogrammi quæ circa diametrum sunt parallelogramma sunt similia toti & inter se.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

SIT parallelogrammum ABΓΔ, cujus diameter AΓ; circa diametrum vero AΓ parallelogramma sint EH, ΘK: dico parallelogramma EH, ΘK & toti ABΓΔ & inter se similia esse.

Quoniam enim uni laterum trianguli ABΓ, videlicet ipsi BΓ, parallela ducta est EZ, erit [per 2. 6.] ut BE ad EA ita ΓZ ad ZA. rursus, quoniam uni laterum trianguli AΓΔ, nempe ipsi ΓΔ, ducta est parallela ZH, ut ΓZ ad ZA ita erit ΔH ad HA. sed ut ΓZ ad ZA, ita ostensa est & BE ad EA: ergo [per 11. 5.] ut BE ad EA ita ΔH ad HA; componendoque [per 18. 5.] ut BA ad AE ita ΔA ad AH; & permutando [per 16. 5.] ut BA ad AΔ ita AE ad AH: parallelogrammorum igitur ABΓΔ, EH latera quæ circa communem angulum BAΔ proportionalia sunt. & quoniam paral-



Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστι ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ ἴσης ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΔ ἦκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογόν ἐστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ ἴσης ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ ἴσης ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ ἴσης ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ ἴσης ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ ἴσης ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΗ· τὸ ΑΒΓΔ, ΕΗ ἄρα παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ

παρ-

παραλληλός ἐστω ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΑ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ, κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

lela est ΗΖ ipsi ΔΓ, angulus quidem ΑΗΖ [per 29. 1.] est æqualis angulo ΑΔΓ, angulus vero ΗΖΑ æqualis angulo ΔΓΑ, & angulus ΔΑΓ communis est duobus triangulis ΑΔΓ, ΑΗΖ; erit igitur triangulum ΑΔΓ triangulo ΑΗΖ æquiangulum. eadem ratione & triangulum ΑΒΓ æquiangulum est triangulo ΑΖΕ; totum igitur parallelogrammum ΑΒΓΔ parallelogrammo ΕΗ est æquiangulum: ergo [per 4. 6.] ut ΑΔ ad ΔΓ ita ΑΗ ad ΗΖ. ut autem ΔΓ ad ΓΑ ita ΗΖ ad ΖΑ, & ut ΑΓ ad ΓΒ ita ΑΖ ad ΖΕ; & præterea ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΖΕ ad ΕΑ: itaque quoniam ostensum est ut ΔΓ ad ΓΑ ita esse ΗΖ ad ΖΑ, ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ΑΖ ad ΖΕ; erit ex æquo [per 22. 5.] ut ΔΓ ad ΓΒ ita ΗΖ ad ΖΕ: ergo parallelogrammorum ΑΒΓΔ, ΕΗ proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos; ac propterea [per 1. def. 6.] parallelogrammum ΑΒΓΔ parallelogrammo ΕΗ est simile. eadem ratione & parallelogrammum ΑΒΓΔ simile est parallelogrammo ΚΘ: utrumque igitur ipsorum ΕΗ, ΘΚ parallelogrammorum parallelogrammo ΑΒΓΔ est simile. quæ autem eidem rectilineo sunt similia [per 21. 6.] & inter se sunt similia: parallelogrammum igitur ΕΗ simile est parallelogrammo ΘΚ.

Quare omnis parallelogrammi quæ circa diametrum sunt parallelogramma & toti & inter se sunt similia. quod erat demonstrandum.

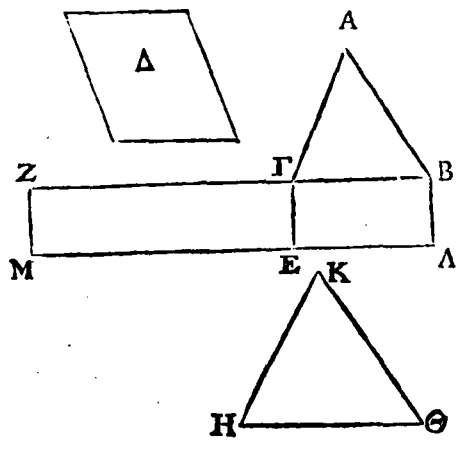
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Prop. XXV. Probl.

Dato rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ ἴσον, τὸ Δ· δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.



Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΛ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΕΜ. καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

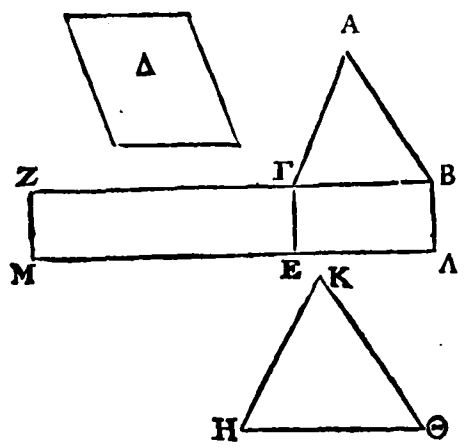
Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν ὦσιν, ἐστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς

SIT datum quidem rectilineum, cui oportet simile constituere, ΑΒΓ; cui autem æquale, sit Δ: oportet ipsi ΑΒΓ simile, & ipsi Δ æquale idem constituere.

Applicetur enim [per 44. & 45. 1.] ad rectam quidem lineam ΒΓ triangulo ΑΒΓ æquale parallelogrammum ΒΕ; ad rectam vero ΓΕ applicetur parallelogrammum ΓΜ æquale ipsi Δ in angulo ΖΓΕ, qui ΓΒΛ angulo est æqualis: in directum igitur est [per 14. 1.] ΒΓ ipsi ΓΖ; & ΛΕ ipsi ΕΜ. sumaturque [per 13. 6.] inter ipsas ΒΓ, ΓΖ media proportionalis ΗΘ, & ab ipsa ΗΘ describatur [per 18. 6.] rectilineum ΚΗΘ simile & similiter positum rectilineo ΑΒΓ.

Et quoniam est ut ΒΓ ad ΗΘ ita ΗΘ ad ΓΖ, si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam ita [per 2. cor. 20. 6.]

eſt figura rectilinea quæ ſit à prima ad ſimilem & ſimiliter deſcriptam à ſecunda: erit igitur ut ΒΓ ad ΓΖ ita ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΚΗΘ. ſed [per 1. 6.] ut ΒΓ ad ΓΖ ita parallelogrammum ΒΕ ad ΕΖ parallelogrammum: & igitur ut triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΚΗΘ ita ΒΕ parallelogrammum ad parallelogrammum ΕΖ: quare permutando [per 16. 5.] ut ΑΒΓ triangulum ad parallelogrammum ΒΕ ita triangulum ΚΗΘ ad ΕΖ parallelogrammum. eſt autem [per conſtr.] triangulum ΑΒΓ æquale parallelogrammo ΒΕ: æquale igitur eſt & ΚΗΘ triangulum parallelogrammo ΕΖ. ſed ΕΖ parallelogrammum æquale eſt rectilineo Δ: ergo & triangulum ΚΗΘ ipſi Δ eſt æquale. eſt autem [per conſtr.] ΚΗΘ ſimile triangulo ΑΒΓ.



Dato igitur rectilineo ΑΒΓ ſimile, & alteri dato æquale idem conſtitutum eſt ΚΗΘ. quod erat faciendum.

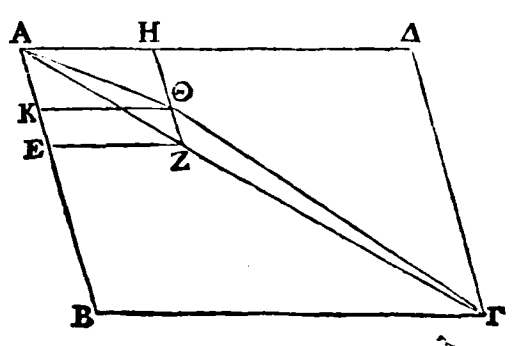
πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἀναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἐστὶν ἴσον. ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συνέστηται τὸ ΚΗΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXVI. Theor.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, ſimile toti & ſimiliter poſitum, communem cum ipſo angulum habens; circa eandem diametrum eſt cum toto.

A parallelogrammo enim ΑΒΓΔ parallelogrammum ΑΕΖΗ auferatur, ſimile ipſi ΑΒΓΔ & ſimiliter poſitum, communemque cum ipſo angulum habens ΔΑΒ: dico parallelogrammum ΑΒΓΔ circa eandem eſſe diametrum cum parallelogrammo ΑΕΖΗ.



Non enim, ſed, ſi fieri poteſt, ſit ipſorum diameter ΑΘΓ, ducaturque per Θ alterutri ipſarum ΑΔ, ΒΓ parallela ΘΚ.

Quoniam igitur circa eandem diametrum eſt ΑΒΓΔ parallelogrammum cum parallelogrammo ΚΗ, erit [per 24. 6.] parallelogrammum ΑΒΓΔ parallelogrammo ΚΗ ſimile: ergo [per 1.def.6.] ut ΔΑ ad ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΚ. eſt autem & propter ſimilitudinem parallelogrammorum ΑΒΓΔ, ΕΗ, ut ΔΑ ad ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΕ: & igitur [per 11. 5.] ut ΗΑ ad ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΚ: & proinde ΗΑ ad utramque ipſarum ΑΚ, ΑΕ eandem ra-

Προτασις κϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Ἀπὸ γὰρ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω τὸ ΑΕΖΗ, ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΕΖΗ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρα τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. ἔστι δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ· ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὴν αὐτὴν

ἔχει

ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶ πρὸς τῷ αὐτῷ διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· πρὸς τῷ αὐτῷ ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΕΖΗ παραλληλογράμμῳ.

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιον τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν ἔχον γωνίαν αὐτῷ· περὶ τὸ αὐτὸ διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tionem habet; erit igitur [per 9. 5.] ΑΕ ipſi ΑΚ æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt: non igitur circa eandem diametrum eſt ΑΒΓΔ parallelogrammum cum parallelogrammo ΚΗ: igitur circa eandem diametrum erit parallelogrammum ΑΒΓΔ cum parallelogrammo ΑΕΖΗ.

Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, ſimile toti & ſimiliter poſitum, communem cum ipſo angulum habens; circa eandem diametrum eſt cum toto. quod erat demonſtrandum.

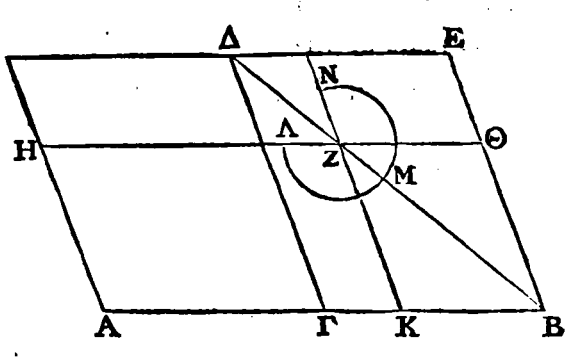
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, ſimilibus & ſimiliter poſitis ei quæ à dimidia deſcribitur, maximum eſt quod ad dimidiam eſt applicatum, ſimile exiſtens defectui.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΓΕ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ, τουτέστι τῆς ΒΓ· λέγω ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΓΕ, μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΚΘ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΓΕ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.



SIT recta linea ΑΒ, ſeceturque bifariam in Γ; & ad ΑΒ rectam lineam applicetur parallelogrammum ΑΔ deficiens figura parallelogramma ΓΕ, ſimili & ſimiliter poſita ei quæ à dimidia ipſius ΑΒ deſcripta eſt, hoc eſt à ΒΓ: dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam ΑΒ applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, ſimilibus & ſimiliter poſitis ipſi ΓΕ, maximum eſſe ΑΔ. applicetur enim ad rectam lineam ΑΒ parallelogrammum ΑΖ, deficiens figura parallelogramma ΚΘ, ſimili & ſimiliter poſita ipſi ΓΕ; dico ΑΔ parallelogrammum parallelogrammo ΑΖ majus eſſe.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὸ αὐτὸ εἰσὶ διάμετρον. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ κατεγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΛΜΝ γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

Quoniam enim ſimile eſt parallelogrammum ΓΕ parallelogrammo ΚΘ, [per 26. 6.] circa eandem diametrum ſunt. ducatur eorum diameter ΔΒ, & deſcribatur figura.

Quoniam igitur [per 43. 1.] ΓΖ eſt æquale ipſi ΖΕ, commune apponatur ΚΘ: totum igitur ΓΘ toti ΚΕ eſt æquale. ſed ΓΘ [per 36. 1.] eſt æquale ΓΗ, quoniam recta linea ΑΓ ipſi ΓΒ eſt æqualis: ergo & ΗΓ ipſi ΕΚ æquale erit. commune apponatur ΓΖ: totum igitur ΑΖ eſt æquale gnomoni ΛΜΝ; quare & ΓΕ, hoc eſt [per 36. 1.] ΑΔ parallelogrammum, parallelogrammo ΑΖ eſt majus.

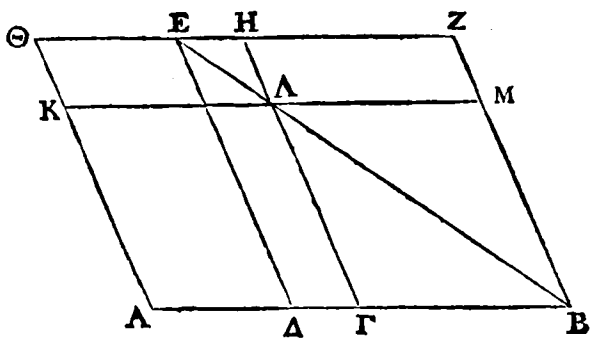
* Ἔστω γὰρ πάλιν ἡ ΑΒ τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω τὸ ΑΛ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΓΜ, καὶ

Sit enim rurſus ΑΒ ſecta bifariam in puncto Γ, & applicatum ſit ΑΛ deficiens figura ΓΜ; &

* Hic eſt hujus theorematis caſus ſecundus, (viz. cum ΑΔ minor eſt quam 4 Γ, cum primus ſit ille, quando ΑΔ major eſt quam ΑΓ,) & non altera propoſitionis demonſtratio: & ideo concluſionem univerſalem in codicibus tam MSS. quam impreſſis caſui primo ſubnexam ad ſecundi finem appoſuimus.

rurſus

rurſus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum AE deficiens figura ΔZ, ſimili & ſimiliter poſita ei quæ à dimidia AB deſcribitur, videlicet ΓM: dico parallelogrammum AΛ, quod ad dimidiam eſt applicatum, majus eſſe parallelogrammo AE.



Quoniam enim ſimile eſt ΔZ ipſi ΓM; [per 26. 6.] circa eandem ſunt diametrum: ſit ipſorum diameter EB, & deſcribatur figura.

Et quoniam [per 36. 1.] ΛZ æquale eſt ΛΘ, etenim ZH ipſi HΘ eſt æqualis: erit ΛZ ipſo EK majus. eſt autem [per 43. 1.] ΛZ æquale ΔΛ: majus igitur eſt & ΔΛ ipſo EK. commune apponatur KΔ: ergo totum AΛ toto AE eſt majus.

Omnium igitur parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, ſimilibus & ſimiliter poſitis ei quæ à dimidia deſcribitur, maximum eſt quod ad dimidiam eſt applicatum. quod erat demonſtrandum.

παραβεβλήθω πάλιν παρὰ τὴν AB τὸ AE παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον τῷ ΔZ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τ̃ ἡμισείας τ̃ης AB, τῷ ΓM· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τ̃ην ἡμισείας παραβληθὲν τὸ AΛ τοῦ AE.

Επεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΔZ τῷ ΓM, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσὶ διάμετρον· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ EB, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχ̃ημα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛZ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ ἡ ZH τ̃ῇ HΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ΛZ τοῦ EK. ἴσον δὲ τὸ ΛZ τῷ ΔΛ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ EK. κοινὸν ἔστω τὸ KΔ· ὅλον ἄρα τὸ AΛ ὅλου τοῦ AE μεῖζόν ἐστιν.

Πάντων ἄρα τ̃ῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τ̃ ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τ̃ης ἡμισείας παραβληθέν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXVIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non majus eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, ſimilibus exiſtentibus defectibus & ejus quod ad dimidiam & ejus cui oportet ſimile deficere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι· δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τ̃ ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τ̃ῶν ἐλλειμμάτων, καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

SIT data quidem recta linea AB; datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, ſit Γ, non majus exiſtens eo quod ad dimidiam applicatum eſt, ſimilibus exiſtentibus defectibus; cui autem oportet ſimile deficere ſit Δ: oportet ad datam rectam lineam AB dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit ipſi Δ.

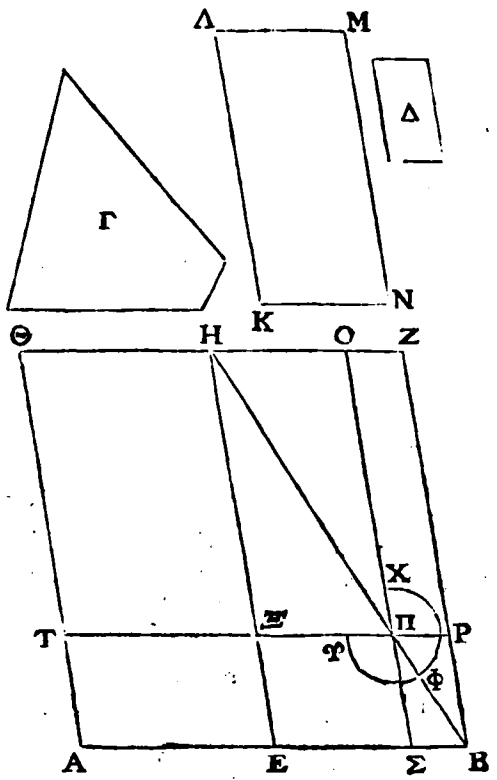
Secetur [per 10. 1.] AB bifariam in E, & ab ipſa EB [per 18. 6.] deſcribatur ſimile & ſimiliter poſitum ipſi Δ, quod ſit EBZH, & compleatur AH parallelogrammum: itaque AH vel æquale eſt ipſi Γ, vel eo majus, ob determinationem. & ſiquidem AH ſit æquale Γ, factum jam erit quod proponebatur; etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum AH applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma EZ, ipſi Δ ſimili. ſi autem non eſt æquale, erit ΘE majus quam Γ.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ, μὴ μεῖζον ὂν τοῦ ἀπὸ τ̃ ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τ̃ῶν ἐλλειμμάτων, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

Τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τ̃ EB τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ EBZH, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ AH παραλληλόγραμμον· τὸ δὴ AH ἤτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ, ἢ μεῖζον αὐτοῦ, διὰ τ̃ὸ ὁρισμένον. εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ AH, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ EZ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. εἰ δὲ οὔ, μεῖζόν ἐστι τὸ ΘE τοῦ Γ.

ἴσον

ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΕΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΖ τοῦ Γ. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ΕΖ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΛΜΝ. ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΕΖ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΕΖ ἐστὶν ὅμοιον. ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΛΚ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΖ τοῖς Γ, ΚΜ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΖ τοῦ ΚΜ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΚΛ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. κείσθω μὲν τῇ ΛΚ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΞΟ τῷ ΚΜ. ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΕΖ ὅμοιόν ἐστι· καὶ τὸ ΞΟ ἄρα τῷ ΕΖ ὅμοιόν ἐστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΞΟ τῷ ΕΖ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.



atque eſt ΘΕ æquale ΕΖ: ergo & ΕΖ quam Γ eſt majus. quo autem ΕΖ ſuperat Γ, ei exceſſui æquale, ipſi vero Δ ſimile & ſimiliter poſitum idem [per 25. 6.] conſtituatur ΚΛΜΝ. ſed Δ eſt ſimile ΕΖ: quare & ΚΜ ipſi ΕΖ ſimile erit. ſit igitur recta linea quidem ΛΚ homologa ipſi ΗΕ, ΛΜ vero ipſi ΗΖ. & quoniam æquale eſt ΕΖ ipſis Γ, ΚΜ, erit ΕΖ ipſo ΚΜ majus: major igitur eſt [per 1. cor. 20. 6.] ΗΕ ipſa ΚΛ, & ΗΖ ipſa ΛΜ. ponatur [per 3. 1.] ΗΞ æqualis ΛΚ, & ΗΟ æqualis ΛΜ, & compleatur [per 31. 1.] ΞΗΟΠ parallelogrammum: æquale igitur eſt & ſimile [per 24. 6.] ΞΟ ipſi ΚΜ. ſed ΚΜ ſimile eſt ΕΖ: ergo [per 21. 6.] & ΞΟ ipſi ΕΖ eſt ſimile: igitur [per 26. 6.] circa eandem diametrum eſt ΞΟ cum ipſo ΕΖ. ſit ipſorum diameter ΗΠΒ, & figura deſcribatur.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΖ τοῖς Γ, ΚΜ, ὧν τὸ ΞΟ τῷ ΚΜ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸς ἄρα ὁ ΤΦΧ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΡΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΤΦΧ γνώμονι ἴσον ἐστίν. ἀλλ' ὁ ΤΦΧ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ ΤΣ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΤΣ, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΡΣ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπειδήπερ τὸ ΡΣ τῷ ΟΞ ὅμοιόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Therefore ſince ΕΖ is equal to Γ, ΚΜ, of which ΞΟ is equal to ΚΜ, the remaining gnomon ΤΦΧ is equal to the remaining Γ. and becauſe [per 43. 1.] ΟΡ is equal to ΞΣ, let ΡΣ be added to each: wherefore the whole ΟΒ is equal to the whole ΞΒ. but ΞΒ is equal to ΤΕ, becauſe alſo the ſide ΑΕ is equal to the ſide ΕΒ: wherefore alſo ΤΕ is equal to ΟΒ. let ΞΣ be added to each: wherefore the whole ΤΣ is equal to the whole gnomon ΤΦΧ. but the gnomon ΤΦΧ was ſhewn equal to Γ: wherefore alſo ΤΣ is equal to Γ.

Ad datam igitur rectam lineam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum ΤΣ applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma ΡΣ ipſi Δ ſimili, quoniam & ΡΣ ſimile eſt ipſi ΟΞ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβαλεῖν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον

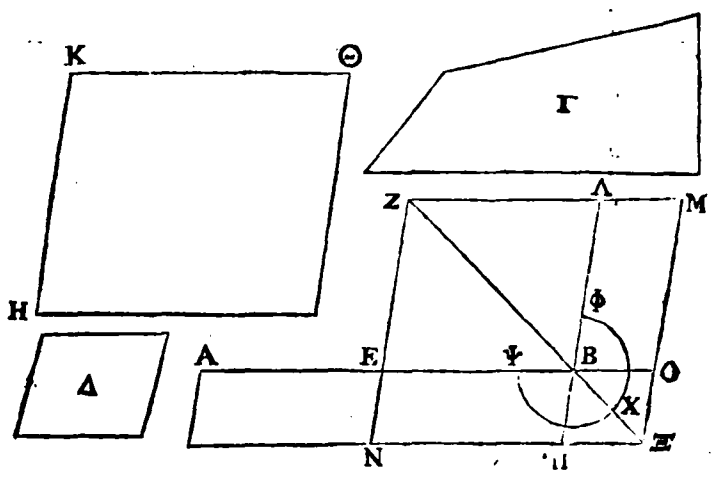
PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri datæ.

SIT data recta linea ΑΒ, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipſam ΑΒ applicare, ſit Γ; cui autem oportet ſimile excedere, ſit Δ: itaque oportet ad ΑΒ rectam lineam dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma ſimili ipſi Δ.

Secetur [per 9. 1.] ΑΒ bifariam in Ε, atque [per 18. 6.] à recta ΕΒ ipſi Δ ſimile & ſimiliter

positum parallelogrammum describatur ΕΛ, & utrisque quidem ΕΛ, Γ æquale, ipsi vero Δ simile & similiter positum [per 25. 6.] idem constituatur ΗΘ: simile igitur est ΗΘ ipsi ΕΛ. sitque ΚΘ quidem latus homologum lateri ΖΛ; ΚΗ vero ipsi ΖΕ. & quoniam parallelogrammum ΗΘ majus est ipso ΕΛ, erit recta linea ΚΘ major quam ΖΛ, & ΚΗ major quam ΖΕ. producantur ΖΛ, ΖΕ, & ipsi quidem ΚΘ [per 3. 1.] æqualis sit ΖΛΜ, ipsi vero ΚΗ æqualis ΖΕΝ, & compleatur ΜΝ parallelogrammum: ergo ΜΝ æquale est & simile ipsi ΗΘ. sed ΗΘ est simile ΕΛ: & ΜΝ igitur [per 21. 6.] ipsi ΕΛ simile erit; ac propterea [per 26. 6.] circa eandem diametrum est ΕΛ cum ipso ΜΝ. ducatur ipsorum diameter ΖΞ, & figura describatur.



Itaque quoniam ΗΘ ipsis ΕΛ, Γ est æquale, sed & ΗΘ æquale ΜΝ; erit & ΜΝ æquale ipsis ΕΛ, Γ. commune auferatur ΕΛ: reliquus igitur ΨΧΦ gnomon ipsi Γ est æqualis. & quoniam ΕΑ est æqualis ΕΒ, æquale erit [per 36. 1.] & ΑΝ parallelogrammum parallelogrammo ΝΒ, hoc est [per 43. 1.] ipsi ΛΟ. commune apponatur ΕΞ: totum igitur ΑΞ æquale est gnomoni ΦΧΨ. sed ΦΧΨ gnomon est æqualis Γ: ergo & ΑΞ ipsi Γ æquale est.

Ad datam igitur rectam lineam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΑΞ, excedens figura parallelogramma ΠΟ ipsi Δ simili, quoniam & ΕΛ simile est ΟΠ. quod erat faciendum.

παραλληλόγραμμον τὸ ΕΛ, Ĉ συναμφοτέροις μὲν τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΗΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ. ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. ἢ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΛ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΛΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τὸ ΕΛ ὁμοιόν ἐστι· τοῖς τὴν αὐτὴν ἄρα διαμέτρον ἐστὶ τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. ἤχθω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ παραγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τουτέστι τῷ ΛΟ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστί· καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστίν.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τὸ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον τῷ ΟΠ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXX. Probl.

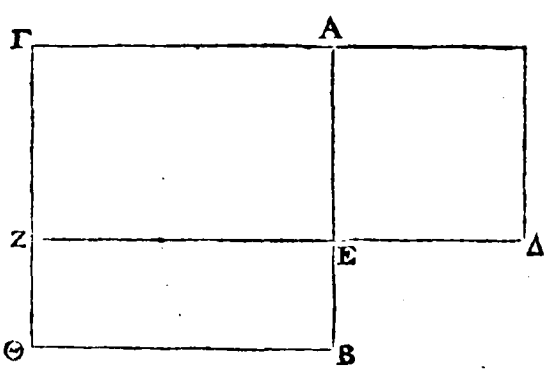
Datam rectam lineam terminatam secundum extremam ac mediam rationem secare.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

SIT data recta linea terminata ΑΒ: oportet ipsam ΑΒ secundum extremam ac mediam rationem secare.

Describatur enim [per 46. 1.] ex ΑΒ quadratum ΒΓ; & [per 29. 6.] ad ΑΓ ipsi ΒΓ æquale parallelogrammum applicetur ΓΔ, excedens figura ΑΔ ipsi ΒΓ simili.



Quadratum autem est ΒΓ: ergo & ΑΔ

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΓ τῷ ΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΑΔ ὁμοίῳ τῷ ΒΓ.

Τετράγωνον δέ ἐστι τὸ ΒΓ· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ

καὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΖ λοιπῷ τῷ ΑΔ ἐστὶν ἴσον. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΖ, ΑΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΓ, τουτέστι τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. μείζων δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ε, καὶ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ ΑΕ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

quadratum erit. & quoniam ΒΓ eſt æquale ΓΔ, commune auferatur ΓΕ: reliquum igitur ΒΖ reliquo ΑΔ eſt æquale. eſt autem & ipſi æquiangulum: ergo [per 14.6.] ipſorum ΒΖ, ΑΔ latera quæ circum æquales angulos ſunt reciproce proportionalia: ut igitur ΖΕ ad ΕΔ ita eſt ΑΕ ad ΕΒ. eſt autem [per 34. 1.] ΖΕ æqualis ΑΓ, hoc eſt ipſi ΑΒ; & ΕΔ ipſi ΑΕ: quare ut ΑΒ ad ΑΕ ita ΑΒ ad ΕΒ. ſed ΑΒ major eſt quam ΑΕ: ergo ΑΕ quam ΕΒ eſt major.

Recta igitur linea ΑΒ ſecundum extremam ac mediam rationem ſecta eſt in Ε, & majus ipſius ſegmentum eſt ΑΕ. quod erat faciendum.

ΑΛΛΩΣ.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἡ ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ALITER.

Sit data recta linea ΑΒ: oportet ipſam ΑΒ ſecundum extremam ac mediam rationem ſecare.

Secetur enim [per 11. 2.] ΑΒ in Γ, ita ut rectangulum, quod comprehenditur ſub ΑΒ, ΒΓ, æquale ſit quadrato ex ΑΓ.

Quoniam igitur rectangulum quod comprehenditur ſub ΑΒ, ΒΓ æquale eſt quadrato ex ΑΓ; erit [per 17.6.] ut ΑΒ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ. ergo [per 3. def. 6.] ΑΒ ſecundum extremam & mediam rationem ſecta eſt. quod erat faciendum.

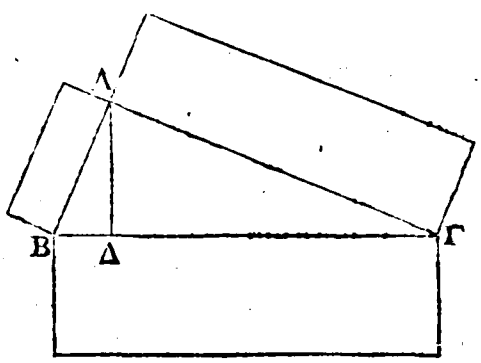
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum ſubtendente æqualis eſt eis quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.



Ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ, ἀπὸ τῆς πρὸς τὸ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ· τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς

SIT triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum habens angulum ΒΑΓ: dico figuram quæ fit à ΒΓ æqualem eſſe eis quæ à ΒΑ, ΑΓ fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis.

Ducatur perpendicularis ΑΔ.

Quoniam igitur in triangulo ΑΒΓ ab angulo recto qui eſt Α ad ΒΓ baſim perpendicularis ducta eſt ΑΔ; erunt [per 8. 6.] triangula ΑΒΔ, ΑΔΓ, quæ ſunt ad perpendicularem, ſimilia toti ΑΒΓ & inter ſe. & quoniam ſimile eſt ΑΒΓ triangulum triangulo ΑΒΔ, erit ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΑΒ ad ΒΔ. atqui cum tres rectæ lineæ proportionales ſint; ut prima ad tertiam ita erit [per 2. cor. 20. 6.] figura quæ fit à prima ad ſimilem & ſimiliter deſcriptam à ſecunda: ut igitur ΓΒ ad ΒΔ ita figura quæ fit à ΓΒ ad ſimilem & ſimiliter deſcriptam à ΒΑ. eadem ratione & ut ΒΓ ad ΓΔ ita figura quæ

fit à BΓ ad eam quæ fit à ΓA: quare & ut BΓ ad ipſas BΔ, ΔΓ ita figura quæ fit à BΓ ad eas quæ fiunt à BA, AΓ, ſimiles & ſimiliter deſcriptas. æqualis eſt autem BΓ ipſis BΔ, ΔΓ: ergo figura quæ fit à BΓ æqualis eſt eis quæ à BA, AΓ fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis.

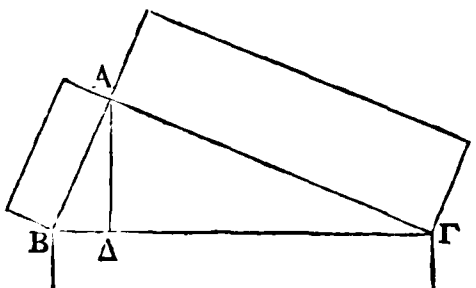
In rectangulis igitur triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum ſubtendente æqualis eſt eis quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis. quod erat demonſtrandum.

ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Aliter.

Quoniam [per 23. 6.] ſimiles figuræ ſunt in duplicata ratione laterum homologorum; figura quæ fit à BΓ ad eam quæ fit à BA duplicatam rationem habebit ejus quam habet BΓ ad BA. habet autem [per 1. cor. 20. 6.] & quadratum ex BΓ ad quadratum ex BA duplicatam rationem ejus quam habet BΓ ad BA: ergo [per 11. 5.] ut figura quæ fit à BΓ ad eam quæ fit à BA ita quadratum ex BΓ ad quadratum ex BA. eadem ratione & ut figura quæ fit à BΓ ad eam quæ fit à ΓA ita quadratum ex BΓ ad quadratum ex ΓA; & igitur ut figura quæ fit à BΓ ad eas quæ fiunt à BA, AΓ ita quadratum ex BΓ ad quadrata ex BA, AΓ. quadratum autem ex BΓ æquale eſt [per 47. 1.] quadratis ex BA, AΓ: ergo & figura quæ fit à BΓ eſt æqualis eis quæ à BA, AΓ fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis. quod erat demonſtrandum.



Αλλως.

Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα τῶν διπλασίονα λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΑ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΑ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ εἶδος ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνον· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδη ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXII. Theor.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habent, componantur ſecundum unum angulum, ita ut homologa latera ipſorum ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi invicem erunt.

Προτασις λβ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἐν παραλλήλοις εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

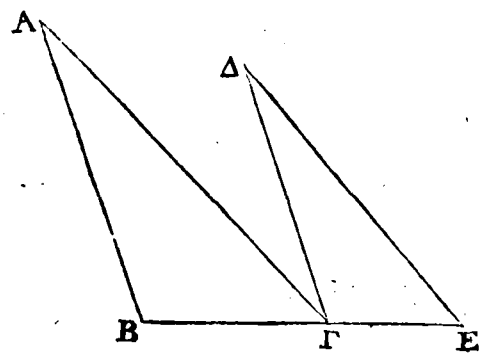
SInt duo triangula ABΓ, ΔΓE, quæ duo latera BA, AΓ duobus lateribus ΓΔ, ΔE proportionalia habeant, ut quidem BA ad AΓ ita ΓΔ ad ΔE; parallela autem ſit AB ipſi ΔΓ, & AΓ ipſi ΔE: dico BΓ ipſi ΓE in directum eſſe.

Quoniam enim AB parallela eſt ΔΓ, & in ipſas incidit recta linea AΓ; erunt [per 29. 1.] anguli alterni BAΓ, AΓΔ æquales inter ſe. ea-

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ἕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Διὰ τὰ

τὴ αὐτὴ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστί. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΑΒΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.



dem ratione & angulus ΓΔΕ æqualis eſt angulo ΑΓΔ: quare & ΒΑΓ ipſi ΓΔΕ eſt æqualis. & quoniam ΑΒΓ, ΔΓΕ ſunt duo triangula unum angulum qui ad Α uni angulo qui ad Δ æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, ſcilicet ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ; erit [per 6. 6.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΓΕ æquiangulum: ergo ΑΒΓ angulus eſt æqualis angulo ΔΓΕ. oſtenſus autem eſt & angulus ΑΓΔ æqualis angulo ΒΑΓ: totus igitur ΑΓΕ duobus ΑΒΓ, ΒΑΓ eſt æqualis. communis apponatur ΑΓΒ: ergo anguli ΑΓΕ, ΑΓΒ angulis ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΑΒΓ æquales ſunt. ſed [per 32. 1.] ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΑΒΓ anguli duobus rectis ſunt æquales: & igitur anguli ΑΓΕ, ΑΓΒ duobus rectis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineam ΑΓ, & ad punctum in ipſa Γ, duæ rectæ lineæ ΒΓ, ΓΕ, non ad eaſdem partes poſitæ, angulos qui ſunt deinceps ΑΓΕ, ΑΓΒ duobus rectis æquales faciunt: ergo [per 14. 1.] ΒΓ ipſi ΓΕ in directum erit.

Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα συνιστῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· καὶ λοιπὴ τῶν τριγώνων πλευρὰ ἐπ' εὐθείας ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habent, ita componantur ſecundum unum angulum, ut homologa latera ipſorum ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi invicem erunt. quod erat demonſtrandum.

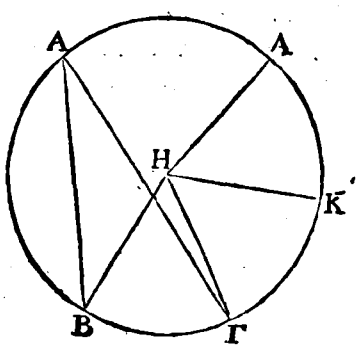
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

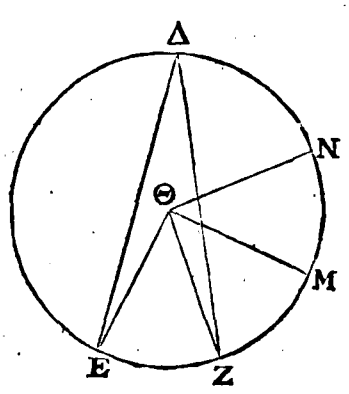
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

Prop. XXXIII. Theor.

In circulis æqualibus anguli eandem habent rationem quam circumferentiæ quibus inſiſtunt, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant: adhuc etiam & ſectores, quippe qui ad centra ſunt conſtituti.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς Η, Θ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

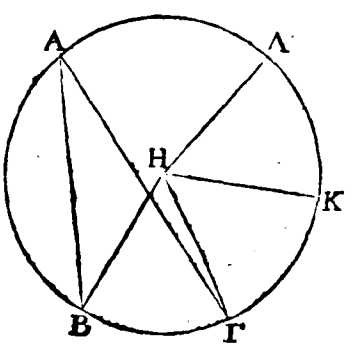




Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, & ad centra quidem ipſorum Η, Θ ſint anguli ΒΗΓ, ΕΘΖ, ad circumferentias vero anguli ΒΑΓ, ΕΔΖ: dico ut circumferentia ΒΓ ad ΕΖ circumferentiam ita eſſe & ΒΗΓ angulum ad angulum ΕΘΖ, & angulum ΒΑΓ ad angulum ΕΔΖ: & adhuc ſectorem ΗΒΓ ad ΘΕΖ ſectorem.

Ponantur enim circumferentiæ quidem ΒΓ æquales quotcumque deinceps ΓΚ, ΚΛ, circumferentiæ vero ΕΖ rursus æquales quotcumque ΖΜ, ΜΝ, & jungantur ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Quoniam igitur circumferentiæ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ inter se sunt æquales, & anguli ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ [per 27. 3.] inter se æquales erunt: quam multiplex igitur est circumferentia ΒΛ circumferentiæ ΒΓ tam multiplex est & ΒΗΛ angulus anguli ΒΗΓ. eadem ratione & quam multiplex est circumferentia ΕΝ circumferentiæ ΕΖ tam multiplex & ΕΘΝ angulus anguli ΕΘΖ. & si æqualis est ΒΛ circumferentia circumferentiæ ΕΝ, & angulus ΒΗΛ angulo ΕΘΝ [per 27. 3.] erit æqualis; & si circumferentia ΒΛ major est circumferentia ΕΝ, major erit & ΒΗΛ angulus angulo ΕΘΝ; & si minor, minor: quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis ΒΓ, ΕΖ & duobus angulis ΒΗΓ, ΕΘΖ, sumpta sunt circumferentiæ quidem ΒΓ & ΒΗΓ anguli æque multiplicia *viz.* circumferentia ΒΛ & ΒΗΛ angulus; circumferentiæ vero ΕΖ & ΕΘΖ anguli æque multiplicia, nempe circumferentia ΕΝ & angulus ΕΘΝ. atque ostensum est si circumferentia ΒΛ superat circumferentiam ΕΝ, & ΒΗΛ angulum superare angulum ΕΘΝ; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem esse: igitur [per 5. def. 5.] ut circumferentia ΒΓ ad ΕΖ circumferentiam ita angulus ΒΗΓ ad angulum ΕΘΖ. sed [per 15. 5.] ut ΒΗΓ angulus ad angulum ΕΘΖ, ita angulus ΒΑΓ ad ΕΔΖ angulum; uterque enim [per 20. 3.] utriusque est duplus: & igitur ut ΒΓ circumferentia ad circumferentiam ΕΖ ita & angulus ΒΗΓ ad angulum ΕΘΖ, & angulus ΒΑΓ ad ΕΔΖ angulum.



In circulis igitur æqualibus anguli eandem habent rationem quam circumferentiæ quibus insistunt, sive ad centra sive ad circumferentias insistant. quod erat demonstrandum.

Dico insuper & ut ΒΓ circumferentia ad circumferentiam ΕΖ ita esse sectorem ΗΒΓ ad ΘΕΖ sectorem.

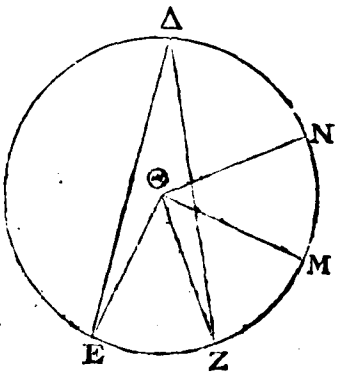
Jungantur enim ΒΓ, ΓΚ, & sumptis in circumferentiis ΒΓ, ΓΚ punctis Ξ, Ο, jungantur & ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Itaque quoniam duæ ΒΗ, ΗΓ duabus ΓΗ, ΗΚ æquales sunt & angulos æquales comprehendunt; erit & basis ΒΓ basi ΓΚ æqualis: æquale igitur est [per 4. 1.] & ΗΒΓ triangulum triangulo ΗΓΚ. & quoniam circumferentia ΒΓ circumferentiæ ΓΚ est æqualis, & re-

Κε'. Θεώρημα.

Κύκλου τῆ μὲν ΒΓ περιφερείᾳ ἴσαι ἐπιζευγνύσαι εὐθεῖαι γωνίαν περιέχουσιν ἐπὶ τοῦ κέντρου αἱ ΓΚ, ΚΛ, τῆ δὲ ΕΖ περιφερείᾳ ἐπιζευγνύσαι εὐθεῖαι γωνίαν περιέχουσιν ἐπὶ τοῦ κέντρου αἱ ΖΜ, ΜΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ γωνίαι ἀλλήλαις· ἰσοπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆ ΒΓ ποσαπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆ ὑπὸ ΒΗΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἰσοπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ ποσαπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΖ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΛ τῆ ὑπὸ ΕΘΝ· καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ γωνίας· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, εἴληπται τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΒΗΓ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων, ἥτε ΒΛ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΕΘΖ γωνίας ἥτε ΕΝ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία. καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ· καὶ εἰ ἴση, ἴση· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· ἔστιν ἄρα ὡς ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ, διπλασίων γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.



Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τοῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν· ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

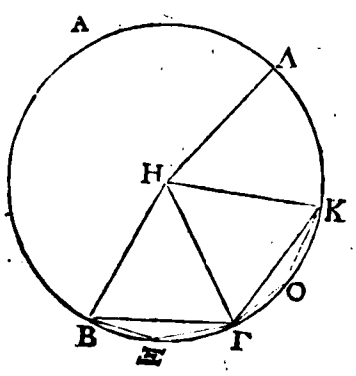
ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ, καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ξ, Ο σημείων, ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

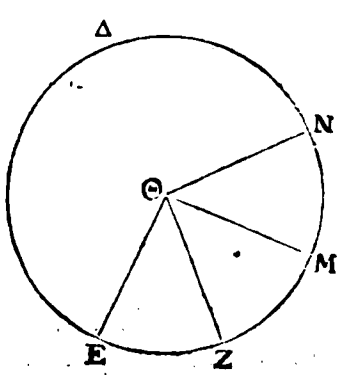
Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφερείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ

ἡ εἰς

ἡ εἰς τὸ ὅλον ΑΒΓ κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸ αὐτὸν κύκλον περιφερείᾳ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΞΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΟΚ ἐστιν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι· καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΓΗΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΗΒΓ τομεὺς ὅλῳ τῷ ΗΓΚ τομεῖ ἴσος ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΛ τομεὺς ἑκατέρῳ τῷ ΗΚΓ, ΗΓΒ ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς οἱ ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΓΒ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΗΒΓ τομέως. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομεὺς τοῦ ΘΕΖ τομέως· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τῷ ΘΕΝ τομεῖ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν ΒΓ, ΕΖ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ΗΒΓ, ΘΕΖ τομέων, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τοῦ ΗΒΓ τομέως ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ὁ ΗΒΛ τομεύς, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τοῦ ΘΕΖ τομέως ἰσάκις πολλαπλάσια ἥ τε ΕΝ περιφέρεια καὶ ὁ ΘΕΝ τομεύς. καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.



liqua circumferentia quæ complet totum circulum ΑΒΓ æqualis eſt [per 3. ax.] reliquæ quæ eundem circulum complet; quare [per 27. 3.] & angulus ΒΞΓ angulo ΓΟΚ eſt æqualis: ſimile igitur eſt [per 11. def. 3.] ΒΞΓ ſegmentum ſegmento ΓΟΚ: & ſunt ſuper æquales rectas lineas ΒΓ, ΓΚ. quæ autem ſuper æquales rectas lineas ſunt ſimilia circulorum ſegmenta [per 24. 3.] & inter ſe æqualia ſunt: ergo ſegmentum ΒΞΓ eſt æquale ſegmento ΓΟΚ. eſt autem & ΒΗΓ triangulum triangulo ΓΗΚ æquale: & totus igitur ſector ΗΒΓ [per 2. ax.] toti ſectori ΗΓΚ æqualis erit. eadem ratione & ΗΚΛ ſector utrivis ipſorum ΗΚΓ, ΗΓΒ eſt æqualis: tres igitur ſectores ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ æquales ſunt inter ſe. ſimiliter & ſectores ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ inter ſe ſunt æquales: quam multiplex igitur eſt ΒΛ circumferentia circumferentiæ ΒΓ, tam multiplex eſt & ΗΒΛ ſector ſectoris ΗΒΓ. eadem ratione & quam multiplex eſt circumferentia ΕΝ circumferentiæ ΕΖ, tam multiplex eſt & ΘΕΝ ſector ſectoris ΘΕΖ; & [ex modo oſtenſis] ſi circumferentia ΒΛ circumferentiæ ΕΝ eſt æqualis, & ſector ΗΒΛ æqualis eſt ſectori ΘΕΝ; & ſi circumferentia ΒΛ ſuperat circumferentiam ΕΝ, ſuperat & ΗΒΛ ſector ſectorem ΘΕΝ; & ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus quidem circumferentiis ΒΓ, ΕΖ, duobus vero ſectoribus ΗΒΓ, ΘΕΖ; ſumpta ſunt circumferentiæ quidem ΒΓ & ΗΒΓ ſectoris æque multiplicia, *viz.* circumferentia ΒΛ & ΗΒΛ ſector; circumferentiæ vero ΕΖ & ſectoris ΘΕΖ æque multiplicia, nempe circumferentia ΕΝ & ΘΕΝ ſector. atque oſtenſum eſt ſi ΒΛ circumferentia ſuperat circumferentiam ΕΝ, & ſectorem ΗΒΛ ſuperare ſectorem ΘΕΝ; & ſi æqualis æqualem eſſe; & ſi minor, minorem: eſt igitur [per 5. def. 5.] ut ΒΓ circumferentia ad circumferentiam ΕΖ ita ſector ΗΒΓ ad ΘΕΖ ſectorem.



Πόρισμα.

Καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα ἕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Corollarium.

Perſpicuum etiam eſt [per 11. 5.] & ut ſector ad ſectorem ita eſſe angulum ad angulum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SEPTIMUS.

DEFINITIONES.

1. UNITAS eſt, ſecundum quam unumquodque eorum quæ ſunt unum dicitur.

2. Numerus autem, ex unitatibus conſtans multitudo.

3. Pars eſt numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem.

4. Partes autem, quando non metitur.

5. Multiplex eſt major minoris, quando minor majorem metitur.

6. Par numerus eſt qui bifariam dividitur.

7. Impar vero, qui bifariam non dividitur: vel qui à pari numero unitate differt.

8. Pariter par numerus eſt, quem par numerus per parem numerum metitur.

9. Pariter vero impar eſt, quem par numerus per numerum imparem metitur.

10. Impariter vero impar numerus eſt, quem impar numerus per numerum imparem metitur.

11. Primus numerus eſt, quem unitas ſola metitur.

12. Primi inter ſe numeri ſunt, quos ſola unitas communis menſura metitur.

13. Compoſitus numerus eſt, quem numerus aliquis metitur.

ΟΡΟΙ.

α'. ΜΟΝΑΣ ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

β'. Ἀριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

γ'. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

δ'. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

ε'. Πολλαπλάσιος δὲ, ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

ϛ'. Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος.

ζ'. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα· ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.

η'. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατ' ἄρτιον ἀριθμόν.

θ'. Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

ι'. Περισσάκις δὲ περισσός ἐστιν ἀριθμὸς, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

ια'. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

ιβ'. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιγ'. Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

ιδ'. Σύνθετοι

ιδ'. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιε'. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι ἴσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες τοσαῦται συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις.

ιϛ'. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

ιζ'. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

ιη. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

ιθ'. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

κ'. Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.

κα'. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

κβ'. Τέλειος ἀριθμός ἐστιν, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν.

14. Compositi inter se numeri sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

15. Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot unitates sunt in ipso toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

16. Quando duo numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus est planus appellatur; latera vero ipsius numeri sese multiplicantes.

17. Quando autem tres numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, factus solidus appellatur: latera vero ipsius, numeri sese multiplicantes.

18. Quadratus numerus est qui æqualiter æqualis; vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

19. Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter; vel qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

20. Numeri proportionales sunt, quando primus secundi & tertius quarti æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes.

21. Similes plani & solidi numeri sunt, qui latera habent proportionalia.

22. Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

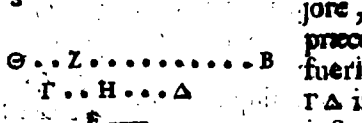
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si duobus numeris inæqualibus expositis detracto semper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem quoad assumpta fuerit unitas; numeri à principio positi primi inter se erunt.

Δύο γὰρ ἀνίσων ἀριθμῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρείτω τὸν πρὸ ἑαυτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· λέγω ὅτι οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, τουτέστιν, ὅτι τοὺς ΑΒ, ΓΔ μονὰς μόνη μετρεῖ.



DUobus enim inæqualibus numeris AB, ΓΔ detracto semper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem, quoad assumpta fuerit unitas: dico numeros AB, ΓΔ inter se primos esse, hoc est, ipsos AB, ΓΔ unitatem solam metiri.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΑΒ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΑ, ὁ δὲ ΑΖ τὸν ΔΓ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ τὸν ΖΑ μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν ΘΑ.

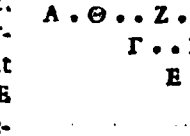
Si enim AB, ΓΔ non sint primi inter se, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitque E, & ΓΔ quidem ipsum AB metiens relinquat seipso minorem ZA; AZ vero metiens ΔΓ relinquat seipso minorem HΓ; & HΓ metiens ZA unitatem ΘA relinquat.

Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΖ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΒΖ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ

Quoniam igitur numerus E ipsum ΓΔ metitur, ΓΔ vero metitur BZ; & E ipsum BZ metitur. me-

Euclides in hoc libro literas adhibet alphabeticas pro numerorum symbolis: Nos, alios editores secuti, tot adjecimus puncta, elucidandi gratia, quot numeris istis respondeant.

titur autem & totum BA: ergo & reliquum AZ metietur. ſed AZ metitur ΔH: quare & E ipſum ΔH metietur. metitur autem & totum ΔΓ: ergo & reliquum ΓH metietur. at ΓH metitur ZΘ; & igitur E ipſum ZΘ metietur. ſed & metitur totum ZA; & igitur numerus E metietur reliquam AΘ unitatem, quod [per 3. def. 7.] fieri non poteſt: non igitur ipſos AB, ΓΔ metietur aliquis numerus: ergo AB, ΓΔ primi inter ſe ſunt. quod erat demonſtrandum.



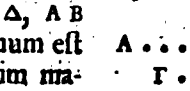
κ᾽ ὅλον τὸν BA· ἓ λοιπὸν ἄρα τὸν AZ μετρήσει ὁ E. ὁ δὲ AZ τὸν ΔH μετρεῖ· ἓ ὁ E ἄρα τὸν ΔH μετρήσει. μετρεῖ δὲ κ᾽ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓH μετρήσει ὁ E. ὁ δὲ ΓH τὸν ZΘ μετρεῖ· κ᾽ ὁ E ἄρα τὸν ZΘ μετρήσει. μετρεῖ δὲ ἓ ὅλον τὸν ZA· κ᾽ λοιπὴν ἄρα τὴν AΘ μονάδα μετρήσει. ἀριθμὸς ὤν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ AB, ΓΔ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. II. Probl.

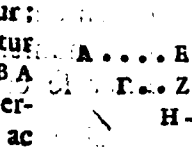
Duobus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram invenire.

SInt dati duo numeri non primi inter ſe AB, ΓΔ, quorum minor ſit ΓΔ: oportet ipſorum AB, ΓΔ maximam communem menſuram invenire.

Si igitur ΓΔ metitur AB, cum etiam ſeipſum metiatur, erit ΓΔ ipſorum ΓΔ, AB communis menſura. & perſpicuum eſt eam maximam eſſe; nullus enim major quam ΓΔ ipſum ΓΔ metietur.



Si vero ΓΔ non metitur AB, ipſorum AB, ΓΔ detracto ſemper minore de majore, relinquetur aliquis numerus, qui metietur præcedentem. unitas quidem non relinquetur. *ſi enim non, erunt AB, ΓΔ primi inter ſe, † quod non ponitur; relinquetur igitur quidem numerus qui metietur præcedentem. & ΓΔ quidem ipſum AB metiens relinquat ſeipſo minorem AE; AE vero metiens ΓΔ relinquat ſeipſo minorem ΓZ; ΓZ vero ipſum AE metiatur. itaque quoniam ΓZ ipſum AE metitur, AE vero ipſum ΔZ; & ΓZ ipſum ΔZ metietur. ſed & metitur ſeipſum; & igitur metietur totum ΓΔ. at ΓΔ ipſum BE metitur; ergo & ΓZ metitur BE. metitur autem & EA: & igitur totum BA metietur. ſed & metitur ΓΔ: ergo ΓZ ipſos AB, ΓΔ metitur; ac propterea ΓZ ipſorum AB, ΓΔ eſt communis menſura. dico etiam maximam eſſe. ſi enim ΓZ non eſt maxima communis menſura ipſorum AB, ΓΔ, ipſos AB, ΓΔ metietur aliquis numerus major ipſo ΓZ. metiatur, ſitque H. & quoniam H ipſum ΓΔ metitur; ΓΔ vero ipſum BE: & H ipſum BE metitur. metitur autem & totum BA: & reliquum igitur AE metietur. ſed AE metitur ΔZ: ergo & H ipſum ΔZ metietur. metitur autem & totum ΔΓ: quare & reliquum ΓZ metietur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur ipſos AB, ΓΔ numeros metietur numerus aliquis major ipſo ΓZ: ergo ΓZ eſt ipſorum AB, ΓΔ maxima communis menſura. quod erat demonſtrandum.



* &. ſi enim non non relinquatur, *i. e.* ſi relinquatur. † *i. e.* quod eſt contra hypotheſin.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β΄.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

ΕΣτωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ AB, ΓΔ, ἓ ἔστω ἐλάσσων ὁ ΓΔ· δεῖ δὴ τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν AB μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΓΔ, AB κοινὸν μέτρόν ἐστι. ἓ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.

Εἰ δὲ ὁ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν AB, τῶν AB, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάττονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, λειφθήσεταί τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸ πρὸ ἑαυτοῦ. μονὰς μὲν γὰρ οὐ λειφθήσεται). εἰ δὲ μή, ἔσονται οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ οὐκ ὑπόκειται), λειφθήσεταί ἄρα τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸ πρὸ ἑαυτοῦ. καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν AB μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν AE, ὁ δὲ AE τὸν ΓΔ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ τὸν ΓZ, ὁ δὲ ΓZ τὸν AE μετρείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ ΓZ τὸν AE μετρεῖ, ὁ δὲ AE τὸν ΔZ μετρεῖ· κ᾽ ὁ ΓZ ἄρα τὸν ΔZ μετρήσει. μετρεῖ δὲ κ᾽ ἑαυτόν· κ᾽ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. ὁ δὲ ΓΔ τὸν BE μετρεῖ· καὶ ὁ ΓZ ἄρα τὸν BE μετρεῖ. μετρεῖ δὲ κ᾽ τὸν EA· καὶ ὅλον ἄρα τὸν BA μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓZ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ μετρεῖ· ὁ ΓZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὁ ΓZ τῶν AB, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓZ. μετρείτω, κ᾽ ἔστω ὁ H. ἓ ἐπεὶ ὁ H τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν BE μετρεῖ· κ᾽ ὁ H ἄρα τὸν BE μετρεῖ. μετρεῖ δὲ κ᾽ ὅλον τὸν BA· ἓ λοιπὸν ἄρα τὸν AE μετρήσει. ὁ δὲ AE τὸν ΔZ μετρεῖ· καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔZ μετρήσει. μετρεῖ δὲ κ᾽ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓZ μετρήσει, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει, μείζων ὢν τοῦ ΓZ· ὁ ΓZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ μέγιστον ἐστι κοινὸν μέτρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πό-

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi numerus duos numeros metiatur, & maximam eorum communem menſuram metiri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Prop. III. Probl.

Tribus numeris datis non primis inter ſe, maximam ipſorum communem menſuram invenire.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ· ὁ δὴ Δ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον, μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς Α, Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέγιστον μέτρον, μετρήσει τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Δ. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β ἄρα μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Δ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Sint dati tres numeri non primi inter ſe A, B, Γ: oportet ipſorum A, B, Γ maximam communem menſuram invenire.

A .....
B .....
Γ ....
Δ ..
E ----

Sumatur enim duorum A, B maxima communis menſura Δ: itaque Δ vel ipſum Γ metitur, vel non metitur. metiatur primum, metitur autem & ipſos A, B: ergo Δ numeros A, B, Γ metitur: & ob id ipſorum eſt communis menſura. dico & maximam eſſe. ſi enim Δ non eſt ipſorum A, B, Γ maxima communis menſura, metietur eos aliquis numerus major ipſo Δ. metiatur, & ſit E. quoniam igitur E metitur numeros A, B, Γ, & ipſos A, B metietur, & [per cor. 2. 7.] ipſorum A, B maximam communem menſuram. ſed ipſorum A, B maxima communis menſura eſt Δ: ergo E ipſum Δ metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur A, B, Γ numeros numerus aliquis major ipſo Δ metietur: ergo Δ ipſorum A, B, Γ maxima eſt communis menſura.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Δ τὸν Γ. λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Δ, Γ οὐκ εἰσὶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός· ὁ δὴ τοὺς Α, Β, Γ μετρῶν καὶ τοὺς Α, Β μετρήσει καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· τοὺς Δ, Γ ἄρα ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Δ, Γ ἄρα οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, ὁ Ε. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, ὁ δὲ Δ τοὺς Α, Β μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὁ Ε τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμὸς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Ε. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ζ ἄρα τοὺς Δ, Γ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Δ, Γ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρεῖ. τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Ε· ὁ Ζ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Non metiatur autem Δ ipſum Γ. dico primum numeros Δ, Γ non eſſe primos inter ſe. quoniam enim A, B, Γ non ſunt inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus; & qui metitur ipſos A, B, Γ & ipſos A, B metietur, & [per cor. 2. 7.] ipſorum A, B maximam communem menſuram, videlicet Δ, metietur.

A .....
B .....
Γ ....
Δ .....
E ..
Z ---

metitur autem & ipſum Γ: ergo ipſos Δ, Γ numerus aliquis metietur; ideoque Δ, Γ non ſunt inter ſe primi. ſumatur ipſorum maxima communis menſura E. & quoniam E ipſum Δ metitur, & Δ metitur ipſos A, B, & E ipſos A, B metietur. metitur autem & Γ; ergo & ipſos A, B, Γ metietur: eritque E ipſorum A, B, Γ communis menſura. dico & maximam eſſe. ſi enim E non eſt ipſorum A, B, Γ maxima communis menſura, metietur A, B, Γ numeros numerus aliquis major ipſo E. metiatur, ſitque Z. & quoniam Z metitur numeros A, B, Γ; & ipſos A, B & ipſorum A, B maximam communem menſuram metietur. ſed ipſorum A, B maxima communis menſura eſt Δ: ergo Z ipſum Δ metitur. metitur autem & ipſum Γ: quare Z & ipſos Δ, Γ; & igitur ipſorum Δ, Γ maximam communem menſuram metietur. ſed ipſorum Γ, Δ maxima communis menſura eſt E: ergo Z ipſum E metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur A, B, Γ numeros numerus aliquis major ipſo E metietur; ergo E ipſorum A, B, Γ maxima eſt communis menſura.

Tribus igitur numeris datis non primis inter ſe, eorum maxima communis menſura inventa eſt. quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex his manifeſtum eſt, ſi numerus numeros tres metiatur, & ipſorum maximam communem menſuram metiri.

Eodem modo & pluribus numeris datis, maximam communem menſuram inveniemus.

Τριῶν ἄρα ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, εὑρεῖν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοὺς τρεῖς μετρῇ, καὶ τὸν μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ πλειόνων ἀριθμῶν δοθέντων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρήσομεν.

PROP. IV. THEOR.

Omnis numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars eſt vel partes.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

SInt duo numeri A, BΓ, quorum BΓ ſit minor: dico BΓ ipſius A vel partem eſſe vel partes.

Numeri enim A, BΓ vel primi ſunt inter ſe, vel non. ſint prius inter ſe primi, & diviſo BΓ in unitates, quæ in ipſo ſunt, erit [per 1. & 2. def. 7.] unaquæque unitas earum quæ in BΓ pars aliqua ipſius A: ergo BΓ ipſius A partes eſt.

A . . . . . .
B . . . . . Γ

Sed non ſint A, BΓ inter ſe primi: itaque BΓ vel ipſum A metitur vel non. &, ſiquidem metitur, erit BΓ pars ipſius A.

A . . . . . .
B . . . . Γ

Si vero non. ſumatur [per 2. 7.] ipſorum A, BΓ maxima communis menſura Δ; & dividatur BΓ in numeros ipſi Δ æquales BE, EZ, ZΓ. quoniam igitur Δ numerum A metitur, erit Δ pars ipſius A. æqualis autem eſt Δ unicuique ipſorum BE, EZ, ZΓ: ergo & unuſquiſque ipſorum BE, EZ, ZΓ pars eſt ipſius A: ac propterea BΓ ipſius A partes eſt.

A . . . . . .
B . . Ε . . Z . . Γ
Δ . .

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars eſt vel partes. quod erat demonſtrandum.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ A, BΓ, ὧν ἔλασσων ὁ BΓ· λέγω ὅτι ὁ BΓ τοῦ A ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Οἱ A, BΓ πρότερον γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ διῃρήσθω ὁ BΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἔσται ἑκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ BΓ μέρος τι τοῦ A· ὅστε μέρη ἐστὶν ὁ BΓ τοῦ A.

Μὴ ἔστωσαν δὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, BΓ· ὁ δὴ BΓ τὸν A ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. εἰ μὲν οὖν ὁ BΓ τὸν A μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ BΓ τοῦ A.

Εἰ δὲ οὔ. εἰλήφθω τῶν A, BΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ διῃρήσθω ὁ BΓ εἰς τὰς τῷ Δ ἴσας, τὰς BE, EZ, ZΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν A μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ A. ἴσος δὲ ὁ Δ ἑκατέρᾳ τῶν BE, EZ· ἑκάστη ἄρα τῶν BE, EZ, ZΓ τοῦ A μέρος ἐστί· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ BΓ τοῦ A.

Πᾶς ἄρα ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. V. THEOR.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & uterque utriuſque eadem pars erit, quæ unus unius.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ᾗ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ εἷς.

NUmerus A numeri BΓ pars ſit, & alter Δ alterius EZ eadem pars quæ eſt A ipſius BΓ: dico & utrumque A, Δ utriuſque BΓ, EZ eandem partem eſſe, quæ eſt A ipſius BΓ.

Quoniam enim quæ pars eſt A ipſius BΓ eadem eſt & Δ ipſius EZ, quot numeri ſunt in BΓ æquales ipſi A tot erunt & in EZ numeri æquales ipſi Δ. dividatur BΓ quidem in numeros æquales ipſi A, videlicet in BH, HΓ; EZ vero dividatur in numeros ipſi Δ æquales, hoc eſt EΘ, ΘZ; erit utique æqualis multitudo numerorum BH, HΓ multitudini ipſorum EΘ, ΘZ. & quoniam æqualis eſt BH ipſi A, & EΘ ipſi Δ; erunt BH, EΘ ipſis A, Δ,

A . . .
B . . . H . . . Γ
Δ . . . .
E . . . . Θ . . . . Z

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A ἀριθμοῦ τοῦ BΓ μέρος ἔστω, ᾗ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ EZ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ A τοῦ BΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ A, Δ συναμφοτέρου τοῦ BΓ, EZ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ A τοῦ BΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ BΓ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ EZ· ὅσοι ἄρα ἀριθμοί εἰσιν ἐν τῷ BΓ ἴσοι τῷ A, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ EZ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν BΓ εἰς τὰς τῷ A ἴσας τὰς BH, HΓ· ὁ δὲ EZ εἰς τὰς τῷ Δ ἴσας τὰς EΘ, ΘZ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν BH, HΓ τῷ πλήθει τῶν EΘ, ΘZ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν BH τῷ A, ὁ δὲ EΘ τῷ Δ· ὁ BH ἄρα καὶ EΘ τοῖς A, Δ

ἴσοι

ἴσοι εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΓ τῷ Α, καὶ ἐστὶ τὸ ΘΖ τῷ Δ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΗΓ, ΘΖ ὅλῳ τῷ Α, Δ ἴσον ἐστίν· ἴσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, ὅσοι τινὲς εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ, ΕΖ ἴσοι τοῖς Α, Δ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α, τοσαυταπλάσιον ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ, ΕΖ συναμφοτέρου τοῦ Α, Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

equales. & eadem ratione cum ΗΓ ſit æqualis ipſi Α, & ΘΖ ipſi Δ; & ΗΓ, ΘΖ ipſis Α, Δ æquales erunt: quot igitur numeri ſunt in ΒΓ, æquales ipſi Α tot ſunt & in ΒΓ, ΕΖ æquales ipſis Α, Δ: ergo quotuplex eſt ΒΓ ipſius Α totuplex erit & uterque ΒΓ, ΕΖ utriuſque Α, Δ: quæ igitur pars eſt Α ipſius ΒΓ, eadem pars erit & uterque Α, Δ utriuſque ΒΓ, ΕΖ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη, ᾖ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ· καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

PROP. VI. THEOR.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes; & uterque utriuſque eædem partes erit, quæ unus unius.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μέρη τοῦ Γ τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ.

Ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ αὐτὸ τὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΑΗ, ΔΘ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΗΒ, ΘΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ· ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

NUmerus enim ΑΒ numeri Γ partes ſit, & alter ΔΕ alterius Ζ eædem partes quæ ΑΒ ipſius Γ: dico & utrumque ΑΒ, ΔΕ utriuſque Γ, Ζ eaſdem partes eſſe, quæ ΑΒ ipſius Γ.

Quoniam enim quæ partes eſt ΑΒ ipſius Γ eædem eſt ΔΕ ipſius Ζ, quot ſunt in ΑΒ partes ipſius Γ tot erunt & in ΔΕ partes ipſius Ζ. dividatur ΑΒ quidem in partes ipſius Γ, videlicet ΑΗ, ΗΒ; ΔΕ vero dividatur in in partes ipſius Ζ, hoc eſt ΔΘ, ΘΕ.

Α . . . Η . . . Β
Γ . . . . . .
Δ . . . . Θ . . . . Ε
Ζ . . . . . .

Erit ipſorum ΑΗ, ΗΒ multitudo æqualis multitudini ipſorum ΔΘ, ΘΕ. & quoniam quæ pars eſt ΑΗ ipſius Γ eadem eſt pars & ΔΘ ipſius Ζ, quæ pars eſt ΑΗ ipſius Γ eadem pars erit [per 5.7.] & uterque ΑΗ, ΔΘ utriuſque Γ, Ζ. ſimili ratione & quæ pars eſt ΗΒ ipſius Γ eadem pars erit & uterque ΗΒ, ΘΕ utriuſque Γ, Ζ: quæ igitur partes eſt ΑΒ ipſius Γ eædem partes eſt & uterque ΑΒ, ΔΕ utriuſque Γ, Ζ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

PROP. VII. THEOR.

Si numerus numeri fuerit pars, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρος ἔστω, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὁ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ὁ γὰρ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ, ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ ὁ ΑΒ ἄρα ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΓΖ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἴσος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσος

Α . . . . Ε . . Β
Η . . . . Γ . . . . . Ζ . . . . Δ

æquales. & eadem ratione cum ΗΓ ſit æqualis ipſi Α, & ΘΖ ipſi Δ; & ΗΓ, ΘΖ ipſis Α, Δ æquales erunt: quot igitur numeri ſunt in ΒΓ, æquales ipſi Α tot ſunt & in ΒΓ, ΕΖ æquales ipſis Α, Δ: ergo quotuplex eſt ΒΓ ipſius Α totuplex erit & uterque ΒΓ, ΕΖ utriuſque Α, Δ: quæ igitur pars eſt Α ipſius ΒΓ, eadem pars erit & uterque Α, Δ utriuſque ΒΓ, ΕΖ. quod erat demonſtrandum.

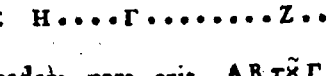
PROP. VII. THEOR.

Si numerus numeri fuerit pars, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

NUmerus enim ΑΒ numeri ΓΔ pars ſit, quæ ablatus ΑΕ ablati ΓΖ: dico & reliquum ΕΒ reliqui ΖΔ eandem partem eſſe, quæ eſt totus ΑΒ totius ΓΔ.

Quæ enim pars eſt ΑΕ ipſius ΓΖ eadem pars ſit & ΕΒ ipſius ΓΗ. & quoniam quæ pars eſt ΑΕ ipſius ΓΖ eadem pars eſt & ΕΒ ipſius ΓΗ; quæ pars eſt ΑΕ ipſius ΓΖ eadem pars eſt [per 5.7.] & ΑΒ ipſius ΗΖ. quæ autem pars eſt ΑΕ ipſius ΓΖ eadem pars ponitur & ΑΒ ipſius ΓΔ: quæ igitur pars eſt ΑΒ ipſius ΗΖ eadem eſt & ΑΒ ipſius ΓΖ: quare ΑΒ utriuſque ΗΖ, ΓΔ eadem eſt pars: æqualis igitur eſt ΗΖ ipſi ΓΔ. communis auferatur ΓΖ: ergo reliquus ΗΓ reliquo ΖΔ eſt æqualis. & quoniam quæ pars eſt ΑΕ ipſius ΓΖ eadem eſt & ΕΒ ipſius ΗΓ; æqualis

autem est HΓ ipsi ZΔ, quæ pars est AE ipsius ΓZ eadem erit & EB ipsius ZΔ. sed quæ pars est AE ipsius ΓZ eadem est [ex hyp.] & AB ipsius ΓΔ: ergo quæ pars est EB ipsius ZΔ eadem est & AB ipsius ΓΔ: & reliquus igitur EB reliqui ZΔ eadem pars erit quæ totus AB totius ΓΔ. quod erat demonstrandum.



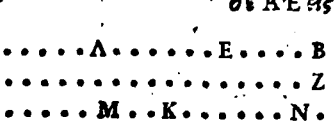
δὲ ὁ ΗΓ τῷ ΖΔ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἀλλὰ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si numerus numeri fuerit partes, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eædem partes erit, quæ totus totius.

NUmerus enim AB numeri ΓΔ sit partes, quæ ablatus AE ablati ΓZ: dico & reliquum EB reliqui ZΔ easdem partes esse, quæ totus AB totius ΓΔ.

Ponatur enim ipsi AB æqualis HΘ: quæ igitur partes est HΘ ipsius ΓΔ eædem est & AE ipsius ΓZ. dividatur HΘ quidem in partes ipsius ΓΔ, videlicet HK, KΘ; AE vero dividatur in partes ipsius ΓZ, videlicet AΛ, ΛE: erit igitur ipsarum HK, KΘ multitudo æqualis multitudini ipsarum AΛ, ΛE.



& quoniam quæ pars est HK ipsius ΓΔ eadem est & AΛ ipsius ΓZ, major autem ΓΔ quam ΓZ; & HK quam AΛ est major. ponatur ipsi AΛ æqualis HM: quæ igitur pars est HK ipsius ΓΔ eadem est & HM ipsius ΓZ: quare [per 7. 7.] & reliquus MK reliqui ZΔ eadem pars est quæ totus HK totius ΓΔ. rursus quoniam quæ pars est KΘ ipsius ΓΔ eadem est & ΛE ipsius ΓZ. major autem ΓΔ quam ΓZ: erit & KΘ quam ΛE major. ponatur ipsi ΛE æqualis KN: quæ igitur pars est KΘ ipsius ΓΔ eadem est & KN ipsius ΓZ: ergo & reliquus NΘ reliqui ZΔ eadem pars est quæ totus KΘ totius ΓΔ. ostensum autem est & reliquum MK reliqui ZΔ eandem partem esse quæ totus HK totius ΔΓ: & uterque igitur simul MK, NΘ ipsius ΔZ eædem partes est quæ totus ΘH totius ΔΓ. æqualis autem est uterque simul MK, NΘ ipsi EB; ΘH vero ipsi BA: & reliquus igitur EB reliqui ZΔ eædem partes est quæ totus AB totius ΓΔ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

ΑΡιθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρη ἔστω, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Κείσθω γὰρ τῷ ΑΒ ἴσος ὁ ΗΘ· ἀ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΗΘ τοῦ ΓΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ τοῦ ΓΔ μέρη τὰ ΗΚ, ΚΘ, ὁ δὲ ΑΕ εἰς τὰ τοῦ ΓΖ μέρη τὰ ΑΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ, ΚΘ τῷ πλήθει τῶν ΑΛ, ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΗΚ τοῦ ΑΛ. κείσθω τῷ ΑΛ ἴσος ὁ ΗΜ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΜ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΛΕ τοῦ ΓΖ. μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΚΘ τοῦ ΛΕ. κείσθω τῷ ΛΕ ἴσος ὁ ΚΝ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος καὶ ὁ ΚΝ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΝΘ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὅλος ὁ ΚΘ ὅλου τοῦ ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ὢν ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΔΓ· συναμφότερος ἄρα ὁ ΜΚ, ΝΘ τοῦ ΔΖ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ ΘΗ ὅλου τοῦ ΔΓ. ἴσος δὴ συναμφοτέρῳ μὲν ὁ ΜΚ, ΝΘ τῷ ΕΒ, ὁ δὲ ΘΗ τῷ ΒΑ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IX. Theor.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & permutando quæ pars est vel partes primus tertii, eadem erit pars vel eædem partes & secundus quarti.

NUmerus enim A numeri BΓ pars sit, & alter Δ alterius EZ eadem pars quæ A

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

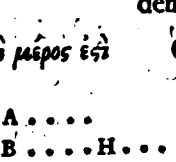
Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

ΑΡιθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος ὅπερ ὁ

A τοῦ

Α τῦ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἔστω ὁ Α τῦ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἡ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τῦ ΕΖ ἡ μέρη.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τῦ ΒΓ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τῦ ΕΖ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς τῷ Α ἴσας τὰς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰς τῷ Δ ἴσας τὰς ΕΘ, ΘΖ, ἴσον ἔσται δὴ τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΗ, ΗΓ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἡ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΓ τῦ ΘΖ ἡ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τῦ ΕΘ ἡ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ συναμφοτέρου τῦ ΕΖ ἡ τὰ αὐτὰ μέρη. ἴσος δὲ ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τῦ Δ ἡ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τῦ ΕΖ ἡ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ipſius ΒΓ, minor autem ſit Α quam Δ: dico & permutando quæ pars eſt Α ipſius Δ vel partes, eandem partem eſſe & ΒΓ ipſius ΕΖ vel eaſdem partes.

Quoniam enim quæ pars eſt Α ipſius ΒΓ eadem eſt & Δ ipſius ΕΖ; quot numeri ſunt in ΒΓ æquales ipſi Α tot ſunt & in ΕΖ æquales ipſi Δ. dividatur ΒΓ quidem in numeros ipſi Α æquales, videlicet in ΒΗ, ΗΓ: ΕΖ vero dividatur in numeros ipſi Δ æquales, ΕΘ, ΘΖ; erit ipſorum ΒΗ, ΗΓ multitudo æqualis multitudini ipſorum ΕΘ, ΘΖ.

Et quoniam numeri ΒΗ, ΗΓ inter ſe ſunt æquales, ſunt autem & æquales ΕΘ, ΘΖ; atque eſt ipſorum ΒΗ, ΗΓ multitudo æqualis multitudini ipſorum ΕΘ, ΘΖ: quæ pars eſt ΒΗ ipſius ΕΘ vel partes, eadem pars erit & ΗΓ ipſius ΘΖ vel eædem partes: ergo [per 5. & 6. 7.] quæ pars eſt ΒΗ ipſius ΕΘ vel partes, eadem pars erit & uterque ΒΓ utriuſque ΕΖ vel eædem partes. æqualis autem eſt ΒΗ ipſi Α, & ΕΘ ipſi Δ: quæ igitur pars eſt Α ipſius Δ vel partes, eadem pars erit & ΒΓ ipſius ΕΖ vel eædem partes. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ἐναλλὰξ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ μέρος.

Prop. X. Probl.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: & permutando quæ partes eſt primus tertii vel pars, eædem partes erit & ſecundus quarti vel eadem pars.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, ἔστω δὲ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἐλάσσων· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ μέρος.

Ἐπεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μέρη τοῦ Γ τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τῷ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τῦ Ζ, καὶ ἐναλλὰξ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τῷ ΘΕ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἀλλ' ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ μέρος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Numerus enim ΑΒ numeri Γ partes ſit, & alter ΔΕ alterius Ζ eædem partes; ſit autem ΑΒ minor quam ΔΕ: dico & permutando quæ partes eſt ΑΒ ipſius ΔΕ vel pars, eaſdem partes eſſe & Γ ipſius Ζ vel eandem partem.

Quoniam enim quæ partes eſt ΑΒ ipſius Γ eædem partes eſt & ΔΕ ipſius Ζ, quot ſunt in ΑΒ partes ipſius Γ tot erunt & in ΔΕ partes ipſius Ζ. dividatur ΑΒ quidem in partes ipſius Γ, videlicet ΑΗ, ΗΒ; ΔΕ vero dividatur in partes ipſius Ζ, hoc eſt ΔΘ, ΘΕ: erit utique ipſarum ΑΗ, ΗΒ multitudo multitudini ipſarum ΔΘ, ΘΕ æqualis, & quoniam quæ pars eſt ΑΗ ipſius Γ eadem pars eſt & ΔΘ ipſius Ζ, & permutando [per 9. 7.] quæ pars eſt ΑΗ ipſius ΔΘ vel partes, eadem pars erit & Γ ipſius Ζ vel eædem partes. ſimili ratione & quæ pars eſt ΗΒ ipſius ΘΕ vel partes, eadem pars erit & Γ ipſius Ζ vel eædem partes: ergo [per 5. & 6. 7.] quæ pars eſt ΑΗ ipſius ΔΘ vel partes, eadem pars erit & ΑΒ ipſius ΔΕ vel eædem partes. ſed quæ pars eſt ΑΗ ipſius ΔΘ vel partes, eadem pars eſt & Γ ipſius Ζ vel eædem partes: & igitur quæ partes eſt ΑΒ ipſius ΔΕ vel pars, eædem partes eſt & Γ ipſius Ζ vel eadem pars. quod erat demonſtrandum.

Prop. XI. Theor.

Si fuerit ut totus ad totum ita ablatus ad ablatum; & reliquus ad reliquum erit ut totus ad totum.

SIT ut totus AB ad totum ΓΔ ita ablatus AE ad ablatum ΓZ: dico & reliquum EB ad reliquum ZΔ ita esse ut totus AB ad totum ΓΔ.

Quoniam enim est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ: [per 20. def. 7.] quæ pars est AB ipsius ΓΔ vel partes, eadem pars erit & AE ipsius ΓZ vel eædem partes: ergo [per 7. & 8. 7.] & reliquus EB reliqui ZΔ eadem pars erit vel eædem partes quæ AB ipsius ΓΔ: est igitur [per 20. def. 7.] ut EB ad ZΔ ita AB ad ΓΔ. quod erat demonstrandum.

A . . . . E . . B
Γ . . . . . Z . . . Δ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον ὅτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα· καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Ἔστω ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ ὅτως ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸν ΖΔ ἐστὶν ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ ὅτως ὁ ΑΕ πρὸς τὸν ΓΖ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἡ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη, ὅπερ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ πρὸς τὸν ΖΔ ὅτως ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XII. Theor.

Si quotcunque numeri proportionales fuerint; ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SInt quotcunque numeri proportionales, A, B, Γ, Δ; sitque ut A ad B ita Γ ad Δ: dico ut A ad B ita esse A, Γ ad B, Δ.

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ; [per 20. def. 7.] quæ pars est A ipsius B vel partes, eadem pars erit & Γ ipsius Δ vel partes: & igitur [per 5. & 6. 7.] uterque A, Γ utriusque B, Δ eadem pars est vel partes, quæ A ipsius B: ergo [per 20. def. 7.] ut A ad B ita est A, Γ ad B, Δ. quod erat demonstrandum.

A . . Γ . . . .
B . . . Δ . . . . . .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον· ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, ὅτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ὅτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ὅτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ὅτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ μέρη· καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ Α, Γ συναμφοτέρου τοῦ Β, Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ Α τοῦ Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ὅτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIII. Theor.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; & permutando proportionales erunt.

SInt quatuor numeri proportionales A, B, Γ, Δ, sitque ut A ad B ita Γ ad Δ: dico & permutando proportionales esse, videlicet ut A ad Γ ita esse B ad Δ.

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ, quæ pars est A ipsius B vel partes [per 20. def. 7.] eadem pars erit & Γ ipsius Δ vel eædem partes: permutando igitur [per 9. & 10. 7.] quæ pars est A ipsius Γ vel partes, eadem pars est & B ipsius Δ vel partes: ergo [per 20. def. 7.] ut A ad Γ ita est B ad Δ. quod erat demonstrandum.

A . . . Γ . . . . . .
B . . . Δ . . . . . .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσι· καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ὅτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ ὅτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ὅτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἐναλλὰξ ἄρα ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Δ ἢ μέρη· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ ὅτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἔστωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος συνδύο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι καὶ δι᾽ ἴσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α	Δ	
Β	Ε	
Γ	Ζ . .	

PROP. XIV. THEOR.

Si fuerint quotcunque numeri, & alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur & in eadem ratione; etiam ex æquo in eadem ratione erunt.

SInt enim quotcumque numeri A, B, Γ, & alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur & in eadem ratione, ſc. Δ, E, Z; ſitque ut A ad B ita Δ ad E, ut autem B ad Γ ita E ad Z: dico etiam ex æquo ut A ad Γ ita eſſe Δ ad Z.

Quoniam enim eſt ut A ad B ita Δ ad E; erit permutando [per 13. 7.] ut A ad Δ ita B ad E. rurſus, quoniam eſt ut B ad Γ ita E ad Z; permutando ut B ad E ita erit Γ ad Z. ut autem B ad E ita eſt A ad Δ: & igitur ut A ad Δ ita Γ ad Z: ergo permutando ut A ad Γ ita Δ ad Z. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ· καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τέταρτον.

Μονὰς γὰρ ἡ Α ἀριθμόν τινα τὸν ΒΓ μετρείτω, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τὸν ΕΖ μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ΒΓ τὸν ΕΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν ΒΓ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ μοναδες τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μοναδας τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους, τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μοναδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μοναδων τῷ πλήθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμῶν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν οὕτως ἡ ΗΘ μονὰς πρὸς τὸν ΚΛ ἀριθμὸν, καὶ ἡ ΘΓ μονὰς πρὸς τὸν ΛΖ ἀριθμόν. ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΒΗ μονὰς τῇ Α μονάδι, ὁ δὲ ΕΚ ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ· ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α .	Δ . .	
Β . Η . Θ . Γ	Ε . . Κ . . Λ . . Ζ	

PROP. XV. THEOR.

Si unitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; & permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur atque ſecundus quartum.

UNitas enim A numerum aliquem BΓ metiatur, alter autem numerus Δ æqualiter metiatur alium aliquem EZ: dico & permutando unitatem A æqualiter metiri numerum Δ atque BΓ ipſum EZ.

Quoniam enim A unitas æqualiter metitur numerum BΓ atque Δ ipſum EZ, quot unitates ſunt in BΓ tot ſunt & in EZ numeri æquales ipſi Δ. dividatur BΓ quidem in unitates quæ in ipſo ſunt, videlicet BH, HΘ, ΘΓ; EZ vero dividatur in numeros ipſi Δ æquales EK, KΛ, ΛZ: erit igitur ipſorum BH, HΘ ΘΓ multitudo æqualis multitudini ipſorum EK, KΛ, ΛZ. & quoniam BH, HΘ, ΘΓ unitates inter ſe æquales ſunt, ſuntque numeri EK, KΛ, ΛZ inter ſe æquales, & unitatum BH, HΘ, ΘΓ multitudo æqualis multitudini numerorum EK, KΛ, ΛZ: erit ut BH unitas ad numerum EK ita HΘ unitas ad numerum KΛ, & unitas ΘΓ ad ΛZ numerum. & [per 12. 7.] ut unus antecedentium ad unum conſequentium ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes: eſt igitur ut unitas BH ad numerum EK ita BΓ ad EZ. æqualis autem eſt BH unitas unitati A, & EK numerus numero Δ: quare ut unitas A ad numerum Δ ita eſt BΓ ad EZ: igitur [per 20. def. 7.] unitas A numerum Δ æqualiter metitur atque BΓ ipſum EZ. quod erat demonſtrandum.

Prop. XVI. Theor.

Si duo numeri ſeſe multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipſis inter ſe æquales erunt.

SInt duo numeri A, B, & A quidem ipſum B multiplicans faciat Γ; B vero multiplicans A faciat Δ: dico Γ ipſi Δ æqualem eſſe.

Quoniam enim A ipſum B multiplicans fecit Γ [per 15. def. 7.] metietur B ipſum Γ per unitates quæ ſunt in A. metitur autem & E unitas numerum A per unitates quæ in ipſo ſunt: igitur E unitas numerum A æqualiter metitur atque B ipſum Γ: quare permutando [per 15. 7.] unitas E numerum B æqualiter metitur atque A ipſum Γ. rurſus, quoniam B ipſum A multiplicans fecit Δ; A metietur ipſum Δ per unitates quæ ſunt in B. metitur autem & B unitas numerum B per unitates quæ in ipſo ſunt: ergo E unitas numerum B æqualiter metitur atque A ipſum Δ. ſed E unitas numerum B æqualiter metitur atque A ipſum Γ: igitur A utrumque ipſorum Γ, Δ æqualiter metitur: erit ergo Γ ipſi Δ æqualis. quod erat demonſtrandum.

E.
A..
Γ.....
B...
Δ.....

Prop. XVII. Theor.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos: facti ex ipſis eandem rationem habebunt quam multiplicati.

NUmerus enim A duos numeros B, Γ multiplicans faciat ipſos Δ, E: dico ut B ad Γ ita eſſe Δ ad E.

Quoniam enim A ipſum B multiplicans fecit Δ, [per 15. def. 7.] metietur B ipſum Δ per unitates quæ ſunt in A. metitur autem & Z unitas numerum A per unitates quæ in ipſo ſunt: igitur Z unitas numerum A æqualiter metitur atque B ipſum Δ: ergo [per 20. def. 7.] ut Z unitas ad numerum A ita eſt B ad Δ. eadem ratione & ut Z unitas ad numerum A ita Γ ad E: & igitur ut B ad Δ ita Γ ad E; & permutando [per 13. 7.] ut B ad Γ ita Δ ad E. quod erat demonſtrandum.

Z.
A..
B...
Δ.....
Γ....
E.....

Prop. XVIII. Theor.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipſis eandem rationem habebunt quam multiplicantes.

DUO enim numeri A, B numerum aliquem Γ multiplicantes faciant ipſos Δ, E: dico ut A ad B ita eſſe Δ ad E.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ.

Ε.
Β...
Δ.....

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ ὁ Β τὸν Γ· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ ὁ Α τὸν Γ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Β μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Β κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Δ. ἰσάκις δὲ ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ· ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ, Δ ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τοῖς πολλαπλασιαθεῖσιν.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ποιείτω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Γ....
Ε.....
Ε.....

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν καὶ αὐτὸν ἔξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασι.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Ἐπεὶ

Επεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ὁ ἄρα Γ ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim A ipſum Γ multiplicans fecit Δ, & Γ multiplicans A [per 16. 7.] ipſum Δ fecit. eadem ratione & Γ ipſum B multiplicans fecit E: numerus igitur Γ duos numeros A, B multiplicans ipſos Δ, E fecit: eſt igitur [per 17.7.] ut A ad B ita Δ ad E. quod erat demonſtrandum.

A . . .
B . . . .
Γ . .
E . . . . . Δ . . . . . .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν τοῦτον καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ὑπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου γινομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ὑπὸ τῶν πρώτου καὶ δευτέρου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Prop. XIX. Theor.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo & quarto fit numerus æqualis erit ei qui fit ex ſecundo & tertio: & ſi numerus qui fit ex primo & quarto æqualis fuerit ei qui ex ſecundo & tertio, quatuor numeri proportionales erunt.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ὁ γὰρ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκε· δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Ζ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ· ὁ Η ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ἔστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ Ε τῷ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. ἴσος δὲ ὁ Ε τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt quatuor numeri proportionales A, B, Γ, Δ; ſitque ut A ad B ita Γ ad Δ; & A quidem ipſum Δ multiplicans faciat E; B vero multiplicans ipſum Γ faciat Z: dico E eſſe æqualem ipſi Z.

A enim multiplicans Γ faciat H. quoniam igitur A ipſum quidem Γ multiplicans fecit H, ipſum vero Δ multiplicans fecit E; numerus A duos numeros Δ, Γ multiplicans fecit ipſos H, E: eſt igitur [per 17. 7.] ut Γ ad Δ ita H ad E. ut autem Γ ad Δ ita A ad B: quare & ut A ad B ita H ad E. rurſus, quoniam A ipſum Γ multiplicans fecit H; ſed & B ipſum Γ multiplicans fecit Z: duo numeri A, B numerum quendam Γ multiplicantes fecerunt ipſos H, Z; igitur [per 18. 7.] ut A ad B ita eſt H ad Z. ſed & ut A ad B ita H ad E: ergo & ut H ad E ita eſt H ad Z: igitur H ad utrumque ipſorum E, Z eandem rationem habet; erit igitur E ipſi Z æqualis.

A . . . . . .
B . . . .
Γ . . .
Δ . .
E . . . . . .
Z . . . . . .
H . . . . . .

SEd ſit E æqualis ipſi Z: dico ut A ad B ita eſſe Γ ad Δ.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam A ipſos Γ, Δ multiplicans fecit H, E; erit ut Γ ad Δ ita H ad E. eſt autem E ipſi Z æqualis: ut igitur H ad E ita H ad Z. ſed ut H ad E ita Γ ad Δ: ergo & ut Γ ad Δ ita H ad Z. ut autem H ad Z ita [per 18. 7.] A ad B: & igitur ut A ad B ita Γ ad Δ. quod erat demonſtrandum.

Prop. XX. Theor.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei qui fit à medio: ſi autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei qui à medio, tres numeri proportionales erunt.

SInt tres numeri proportionales A, B, Γ; ſitque ut A ad B ita B ad Γ: dico numerum qui fit ex A, Γ æqualem eſſe ei qui fit ex B.

Ponatur enim ipſi B æqualis Δ: eſt igitur ut A ad B ita Δ ad Γ: ergo [per 19. 7.] qui fit ex A, Γ æqualis eſt ei qui ex B, Δ. qui autem fit ex B, Δ eſt æqualis ei qui fit ex B; æqualis etenim eſt B ipſi Δ: qui igitur fit ex A, Γ ipſi qui fit ex B eſt æqualis.

A ..... B ..... Δ ..... Γ ....

Sed qui fit ex A, Γ æqualis ſit ei qui ex B: dico ut A ad B ita eſſe B ad Γ.

Quoniam enim qui ex A, Γ fit æqualis eſt ei qui fit ex B; qui autem fit ex B eſt æqualis ei qui ex B, Δ: erit [per 19. 7.] ut A ad B ita Δ ad Γ. ſed B ipſi Δ eſt æqualis: ut igitur A ad B ita eſt B ad Γ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου· καὶ ἐὰν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

Κείσθω γὰρ τῷ Β ἴσος ὁ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ὁ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β· ἴσος γὰρ ὁ Β τῷ Δ· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

Ἀλλὰ δὴ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσος ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἴσος τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. ἴσος δὲ ὁ Β τῷ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXI. Probl.

Minimi numeri eandem cum ipſis rationem habentium eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσοπλασίως, ὁ μείζων τὸν μείζονα, ὁ δὲ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα.

SInt ΓΔ, ΕΖ enim minimi numeri eandem cum Α, Β rationem habentium: dico ΓΔ æqualiter metiri ipſum Α atque ΕΖ ipſum Β.

Numerus enim ΓΔ ipſius Α non eſt partes. ſi enim fieri poteſt, ſit ΓΔ partes ipſius Α: ergo [per 20. def. 7.] ΕΖ ipſius Β eædem partes erit quæ ΓΔ ipſius Α: quot igitur ſunt in ΓΔ partes ipſius Α tot erunt & in ΕΖ partes ipſius Β. dividatur ΓΔ quidem in ipſius Α partes ΓΗ, ΗΔ; ΕΖ vero dividatur in ipſius Β partes ΕΘ, ΘΖ: erit igitur ipſarum ΓΗ, ΗΔ multitudo æqualis multitudini ipſarum ΕΘ, ΘΖ. & quoniam ΓΗ, ΗΔ æquales inter ſe ſunt: ſunt autem & ΕΘ, ΘΖ inter ſe æquales; atque eſt ipſarum ΓΗ, ΗΔ multitudo multitudini ipſarum ΕΘ, ΘΖ æqualis: erit ut ΓΗ ad ΕΘ ita ΗΔ ad ΘΖ: erit igitur [per 12. 7.] ut unus antecedentium ad unum conſequentium ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes: quare ut ΓΗ ad ΕΘ ita eſt ΓΔ ad ΕΖ: ac propterea ΓΗ, ΕΘ in eadem ſunt ratione in qua ΓΔ, ΕΖ, minores ipſis exiſtentes, quod fieri non poteſt; ponuntur enim ΓΔ, ΕΖ minimi numeri eandem quam ipſi rationem habentium: non igitur ΓΔ ipſius Α partes eſt: ergo eſt pars: & ΕΖ ipſius Β pars eadem eſt

Α ..... Β ..... Γ ...Η..Δ Ε..Θ.Ζ

Ἔστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β οἱ ΓΔ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἰσοπλασίως ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β.

Ο ΓΔ γὰρ τὸν Α οὐκ ἔστι μέρη. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ὁ ΕΖ ἄρα τὸν Β τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὁ ΓΔ τὸν Α· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΓΔ μέρη τοῦ Α τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΕΖ μέρη τοῦ Β. διῃρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρη τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρη τὰ ΕΘ, ΘΖ· ἴσον δή ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΓΗ, ΗΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἴσαι δὲ καὶ αἱ ΕΘ, ΘΖ ἀλλήλαις ἴσαι, καὶ ἔστιν ἴσον πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΘΖ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς ΓΔ, ΕΖ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκοῦν μέρη γὰρ οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΓΔ τοῦ Α· μέρος ἄρα· καὶ ὁ ΕΖ τοῦ Β αὐτὸ τὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ΓΔ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ δὲ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ ἄρα σκ τοῦ Α, Ζ ἴσος ἐστὶ τῷ σκ τοῦ Β, Ε. πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὁ ἄρα σκ τοῦ Γ, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ σκ τοῦ Β, Ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ σκ τοῦ Α, Ζ ἴσος τῷ σκ τοῦ Β, Ε· καὶ ὁ σκ τοῦ Α, Ζ ἄρα ἴσος τῷ σκ τοῦ Γ, Δ· ἐστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α . . . . . Β . . . . Γ . . .
Δ . . . . . Ε . . . . . Ζ . . . . . .

PROP. XXII. THEOR.

Si sint tres numeri, & alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur & in eadem ratione; sit autem perturbata eorum proportio: etiam ex æquo in eadem ratione erunt.

SInt tres numeri A, B, Γ, & alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur & in eadem ratione sc. Δ, E, Z; sitque perturbata eorum proportio, ut A quidem ad B ita sit E ad Z, ut autem B ad Γ ita Δ ad E: dico etiam ex æquo ut A ad Γ ita esse Δ ad Z.

Quoniam enim est ut A ad B ita E ad Z; qui fit ex A, Z æqualis erit [per 19. 7.] ei qui ex B, E. rursus, quoniam est ut B ad Γ ita Δ ad E; qui fit ex Γ, Δ æqualis erit ei qui ex B, E. ostensum autem est & qui fit ex A, Z æqualem esse ei qui ex B, E: ergo & qui fit ex A, Z æqualis est ei qui fit ex Γ, Δ: igitur [per 19. 7.] ut A ad Γ ita Δ ad Z. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Α, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, ἔσονταί τινες τῶν Α, Β ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β. ἔστωσαν οἱ Γ, Δ.

Ἐπεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἐχοντας ἰσάκις, ὅ,τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὅ,τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Β. ὁσάκις δὴ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μοναδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Α, Β ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β· οἱ Α, Β ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α . . . . . Γ ----- Ε ----
Β . . . . Δ ----

PROP. XXIII. THEOR.

Numeri primi inter se minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

SInt numeri A, B primi inter se: dico eos minimos esse omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Si enim A, B non sint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium, erunt minimi numeri omnium eandem cum A, B rationem habentium, minores quam A, B. sint Γ, Δ.

Quoniam igitur [per 21. 7.] minimi numeri eandem cum ipsis rationem habentium, eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem & consequens consequentem; numerus Γ ipsum A æqualiter metietur atque Δ ipsum B. quoties autem Γ metitur ipsum A tot unitates sint in E: ergo & Δ ipsum B metitur per unitates quæ sunt in E. & quoniam Γ metitur ipsum A per unitates quæ sunt in E, numerus E ipsum A per unitates quæ sunt in Γ metietur. & eadem ratione E metietur B per unitates quæ sunt in Δ: ergo E ipsos A, B metitur, primos inter se existentes, quod fieri non potest: non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis A, B, eandem habentes rationem cum ipsis A, B: ergo A, B minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium. quod erat demonstrandum.

Prop. XXIV. Theor.

Minimi numeri eorum qui eandem cum ipſis rationem habent, primi inter ſe ſunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

SInt A, B minimi numeri eorum qui eandem cum ipſis rationem habent, : dico A, B primos inter ſe eſſe.

Si enim non ſunt A, B inter ſe primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, ſitque Γ. & quoties Γ ipſum quidem A metitur tot unitates ſint in Δ; quoties vero Γ metitur ipſum B tot unitates ſint in E.

A ..... Γ ------- Δ ----- B ..... E ---

Et quoniam Γ ipſum A metitur per unitates quæ ſunt in Δ; Γ multiplicans ipſum Δ fecit A. eadem ratione & Γ multiplicans E ipſum B fecit: itaque cum numerus Γ duos numeros Δ, E multiplicans fecerit A, B, erit [per 17. 7.] ut Δ ad E ita A ad B: ergo Δ, E in eadem ſunt ratione in qua A, B, minores ipſis exiſtentes, quod [ex hyp.] fieri non poteſt: non igitur A, B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A, B primi inter ſe ſunt. quod erat demonſtrandum.

Ἐστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ A, B· λέγω ὅτι οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B μετρήσῃ τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Γ τὸν A μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν B μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ, E πολλαπλασιάσας τοὺς A, B πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B· οἱ Δ, E ἄρα τοῖς A, B ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς A, B ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ A, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXV. Theor.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, qui unum ipſorum metitur numerus ad reliquum primus erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὲ ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

SInt duo numeri primi inter ſe A, B, & aliquis numerus Γ ipſum A metiatur: dico & B, Γ inter ſe primos eſſe.

Si enim B, Γ non ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitque Δ. & quoniam Δ ipſum Γ metitur, & Γ ipſum A; & Δ ipſum A metietur. metitur autem & ipſum B: ergo Δ numeros A, B metitur primos inter ſe exiſtentes, quod [per 12. def. 7.] fieri non poteſt: non igitur numeros Γ, B numerus aliquis metietur; ideoque Γ, B inter ſe primi ſunt. quod erat demonſtrandum.

A ..... B ..... Γ ... Δ —

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B, τὸν δὲ A μετρείτω τις ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι καὶ οἱ B, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ B, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσῃ τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ Γ τὸν A μετρεῖ· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν A μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν B· ὁ Δ ἄρα τοὺς A, B μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς A, B ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Γ, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVI. Theor.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, & qui fit ex ipſis ad eum primus erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

DUO enim numeri A, B ad aliquem numerum Γ primi ſint, & A ipſum B multiplicans faciat Δ: dico Γ, Δ inter ſe primos eſſe.

Si enim Γ, Δ non ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitque E. & quoniam Γ, A primi inter ſe ſunt, & ipſum

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Γ ἔστωσαν πρῶτοι, καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ E. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, A πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τὸν δὲ

Γ με-

Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ Ε· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὁσάκις δὲ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· ὁ Ε ἄρα τὸ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Ζ τῷ ἐκ τῶν Α, Β. ἐὰν δὲ ὁ τοῦ ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ τοῦ μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὁ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Β, Γ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Δ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Γ metitur aliquis numerus Ε; erunt [per 25.7.] Β, Α inter ſe primi. quoties autem Ε ipſum Δ metitur tot unitates ſint in Ζ: quare & Ζ metitur ipſum Δ per unitates quæ ſunt in Ε: ergo Ε ipſum Ζ multiplicans fecit Δ. ſed & Α multiplicans Β ipſum Δ fecit: qui igitur fit ex Ε, Ζ eſt æqualis ei qui ex Α, Β. ſi vero qui fit ex extremis æqualis fuerit ei qui ex mediis, [per 19.7.] quatuor numeri proportionales erunt: eſt igitur ut Ε ad Α ita Β ad Ζ. ſunt autem Α, Ε inter ſe primi, & qui primi etiam [per 23.7.] minimi ſunt; minimi vero eandem cum ipſis rationem habentium eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21.7.] major majorem, minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: ergo Ε ipſum Β metitur. metitur autem & ipſum Γ: quare Ε ipſos Β, Γ metitur, primos inter ſe exiſtentes: quod fieri non poteſt. non igitur Γ, Δ numeros numerus aliquis metietur; ac propterea Γ, Δ inter ſe primi ſunt. quod erat demonſtrandum.

Α . .
Β . . .
Γ . . . . .
Δ . . . . . .
Ε ——
Ζ —

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ θ' ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

PROP. XXVII. THEOR.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, qui fit ab uno ipſorum ad reliquum primus erit.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί.

Κείσθω γὰρ τῷ Α ἴσος ὁ Δ. ἐπεὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ Α τῷ Δ· καὶ οἱ Δ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Α, Δ πρὸς τὸν Β πρῶτος ἐστί· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Δ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Β πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Α, Δ γενόμενος ἀριθμός ἐστιν ὁ Γ· οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α . .
Β . . .
Γ . . . .
Δ . .

SInt duo numeri inter ſe primi Α, Β, & Α ſeipſum multiplicans faciat Γ: dico Β, Γ inter ſe primos eſſe.

Ponatur enim ipſi Α æqualis Δ. & quoniam Α, Β ſunt primi inter ſe, æqualis autem Α ipſi Δ; & Δ, Β inter ſe primi erunt: uterque igitur ipſorum Α, Δ ad Β primus eſt: ergo & qui ex Α, Δ fit [per 26.7.] primus erit ad Β. ſed qui fit ex Α, Δ eſt numerus Γ: quare Γ, Β inter ſe primi ſunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμούς, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ὦσι· καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γενόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint; & qui fiunt ex ipſis inter ſe primi erunt.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Ε, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Α, Β πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστι, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Β ἄρα γενόμενος πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν Γ. ὁ δὲ ἐκ τῶν Α, Β γενόμενός ἐστιν ὁ Ε· οἱ Ε, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ Ε, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλή-

Α . . . Β . . . . .
Ε . . . . . .
Γ . . Δ . . . .
Ζ . . . . . .

DUO enim numeri Α, Β ad duos numeros Γ, Δ, uterque ad utrumque, primi ſint; & Α quidem ipſum Β multiplicans faciat Ε; Γ vero multiplicans Δ faciat Ζ: dico Ε, Ζ inter ſe primos eſſe.

Quoniam enim uterque ipſorum Α, Β ad Γ primus eſt, & qui fit ex Α, Β [per 26.7.] ad Γ primus erit. qui autem fit ex Α, Β eſt Ε: ergo Ε, Γ primi inter ſe ſunt. eadem ratione & Ε, Δ primi ſunt

inter ſe: uterque igitur ipſorum Γ, Δ ad E primus eſt: ac propterea [per 26. 7.] qui fit ex Γ, Δ primus erit ad E. qui vero ex Γ, Δ fit eſt numerus Z: ergo E, Z primi inter ſe erunt. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXIX. THEOR.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & uterque ſeipſum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipſis primi inter ſe erunt: & ſi numeri à principio poſiti eos qui facti ſunt multiplicantes aliquos faciant; & ipſi inter ſe primi erunt: & ſemper circa extremos hoc continget.

SInt duo numeri inter ſe primi A, B, & A ſeipſum quidem multiplicans faciat Γ, multiplicans vero Γ faciat E; & B ſeipſum multiplicans faciat Δ, multiplicans autem Δ faciat ipſum Z: dico Γ, Δ & E, Z inter ſe primos eſſe.

Quoniam enim A, B primi inter ſe ſunt; & A ſeipſum multiplicans fecit Γ; erunt [per 27. 7.] Γ, B primi inter ſe. & quoniam Γ, B inter ſe primi ſunt, & B ſeipſum multiplicans fecit Δ; erunt Γ, Δ inter ſe primi. Rurſus quoniam A, B primi ſunt inter ſe, & B ſeipſum multiplicans fecit Δ; A, Δ inter ſe primi erunt: cum igitur duo numeri A, Γ ad duos numeros B, Δ uterque ad utrumque primi ſint; & qui ex A, Γ fit ad eum qui fit ex B, Δ [per 28. 7.] primus erit. ſed qui fit ex A, Γ eſt numerus E, qui vero ex B, Δ fit eſt Z: ergo E, Z primi inter ſe ſunt. quod erat demonſtrandum.

A.. B...
Γ.... Δ.....
E..... Z.....

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἐξαρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B, καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν E ποιείτω, ὁ δὲ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιείτω· λέγω ὅτι οἵτε Γ, Δ καὶ οἱ E, Z πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Γ, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. ἐπεὶ ἄρα οἱ Γ, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· οἱ A, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ A, Γ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς B, Δ ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρωτοί εἰσι· καὶ ὁ ἐκ τῶν A, Γ ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν B, Δ πρῶτός ἐστι. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν A, Γ ὁ E, ὁ δὲ ἐκ τῶν B, Δ ὁ Z· οἱ E, Z ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXX. THEOR.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & uterque ſimul ad utrumque ipſorum primus erit: quod ſi uterque ſimul ad unum aliquem ipſorum ſit primus, & numeri à principio poſiti inter ſe primi erunt.

COmponantur enim duo numeri inter ſe primi, AB, BΓ: dico & utrumque ſimul, videlicet AΓ, ad utrumque ipſorum AB, BΓ primum eſſe.

Si enim non ſint ΓA, AB inter ſe primi, metietur eos numerus aliquis. metiatur, & ſit Δ. quoniam igitur Δ metitur ipſos ΓA, AB; & reliquum BΓ metietur. metitur autem & BA: ergo Δ ipſos AB, BΓ metitur, primos inter ſe exiſtentes; quod fieri non poteſt: non igitur

A.....B....Γ
Δ——

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ ἐὰν συναμφότερος πρός τινα αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξαρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ AB, BΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ AΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν AB, BΓ πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΓA, AB πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τοὺς ΓA, AB μετρεῖ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν BΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν BA· ὁ Δ ἄρα τοὺς AB, BΓ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς

ΓA,

ΓΑ, ΑΒ ἀριθμὲς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ ΑΒ, ΑΓ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὁ ΓΑ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρῶτός ἐστιν.

ΕΣΤΩΣΑΝ δὴ πάλιν οἱ ΓΑ, ΑΒ πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι· λέγω ὅτι καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τις αὐτὲς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΑ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΑΒ· ὁ Δ ἄρα τὲς ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὲς ΑΒ, ΒΓ ἀριθμὲς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΓΑ, ΑΒ numeros numerus aliquis metietur; ac propterea ΑΒ, ΑΓ inter ſe primi ſunt: ergo ΓΑ ad utrumque ipſorum ΑΒ, Β, Γ eſt primus.

SINT rurſus ΓΑ, ΑΒ primi inter ſe: dico & ipſos ΑΒ, ΒΓ inter ſe primos eſſe.

Si enim ΑΒ, ΒΓ non ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitque Δ. & quoniam Δ metitur utrumque ipſorum ΑΒ, ΒΓ, & totum ΓΑ metietur. metitur autem & ΑΒ: ergo Δ ipſos ΓΑ, ΑΒ metitur, primos inter ſe exiſtentes, quod fieri non poteſt: non igitur ipſos ΑΒ, ΒΓ numeros numerus aliquis metietur, ideoque ΑΒ, ΒΓ inter ſe primi ſunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Απας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν.

ΕΣΤΩ πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Α, καὶ τὸν Β μὴ μετρείτω· λέγω ὅτι οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτὲς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα οὐκ ἔστι μονάς. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Α τὸν Β οὐ μετρεῖ· ὁ Γ ἄρα τῷ Α οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὲς Β, Α μετρεῖ· καὶ τὸ Α ἄρα μετρεῖ πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὲς Β, Α μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α ... Β .....
Γ ——

PROP. XXXI. THEOR.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

SIT primus numerus Α, & numerum Β non metiatur: dico Β, Α inter ſe primos eſſe.

Si enim non ſint Β, Α inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, & ſit Γ: ergo [per 11. def. 7.] Γ non eſt unitas. & quoniam Γ ipſum Β metitur, Α vero non metitur ipſum Β; non erit Γ idem qui Α. & quoniam Γ ipſos Β, Α metitur, & metietur ipſum Α primum exiſtentem, licet non ſit idem cum eo, quod fieri non poteſt: non igitur ipſos Β, Α numeros numerus aliquis metietur: quare Α, Β inter ſe primi ſunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸ δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός· καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

ΔΥΟ γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες τὸ Γ ποιείτωσαν, τὸν δὲ Γ μετρείτω τις πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Δ ἕνα τῶν Α, Β μετρεῖ.

Τὸν γὰρ Α μὴ μετρείτω, καὶ ἔστι πρῶτος ὁ Δ· οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε τῷ ἐκ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Δ, Α πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἴσάκις, ὅ, τε μεῖζων τὸ μεῖζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸ ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Δ ἄρα τὸν Β

Α .. Β .....
Γ .....
Δ ...
Ε ....

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo numeri ſeſe multiplicantes aliquem faciant; eum vero, qui ex ipſis fit, metiatur aliquis numerus primus: & unum ipſorum, qui à principio poſiti ſunt, metietur.

DUO enim numeri Α, Β ſe invicem multiplicantes faciant Γ, ipſum vero Γ metiatur aliquis numerus primus, qui ſit Δ: dico Δ unum ipſorum Α, Β metiri.

Ipſum enim Α non metiatur, atque eſt Δ numerus primus: ergo [per 31. 7.] Α, Δ primi inter ſe ſunt. & quoties Δ ipſum Γ metitur, tot unitates ſint in Ε. quoniam igitur Δ metitur ipſum Γ per eas quæ ſunt in Ε unitates; numerus Δ ipſum Ε multiplicans fecit Γ. ſed & Α multiplicans Β ipſum Γ fecit: ergo qui fit ex Δ, Ε æqualis eſt ei qui ex Α, Β: eſt igitur [per 19. 7.] ut Δ ad Α ita Β ad Ε. & ſunt Δ, Α primi inter ſe; primi vero [per 23. 7.] ſunt & minimi, ſed [per 21. 7.] minimi eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem & conſequens conſequentem; ergo Δ ipſum Β metitur

tur. Similiter demonſtrabimus ſi Δ non metiatur B, metiri ipſum A: quare Δ metitur unum ipſorum A, B. quod erat demonſtrandum.

μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κ᾽ ἐὰν ὁ Δ τὸν Β μὴ μετρῇ, τὸν Α μετρήσει· ὁ Δ ἄρα ἕνα τῶν Α, Β μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIII. Theor.

Omnem numerum compoſitum primus aliquis numerus metitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ΄.

Ἅπας συνθετὸς ἀριθμὸς ὑπό τινος πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

SIT compoſitus numerus A: dico primum aliquem numerum metiri ipſum A.

Quoniam enim A eſt compoſitus numerus, [per 13. def. 7.] metietur ipſum aliquis numerus. metiatur, & ſit B. & ſi quidem primus eſt B, manifeſtum eſt quod quæritur. ſi vero compoſitus, ipſum aliquis numerus metietur. metiatur, ſitque Γ. & quoniam Γ metitur ipſum B, B vero ipſum A; & Γ ipſum A metitur. & ſi quidem primus eſt Γ, manifeſtum eſt quod quæritur. ſi vero compoſitus, eum aliquis numerus metitur, & hac conſideratione facta relinquetur tandem aliquis numerus primus, & qui ipſum A metietur. ſi enim non relinquitur, metientur ipſum A infiniti numeri, quorum alter altero eſt minor, quod [per 2. def. 7.] in numeris fieri non poteſt; ergo relinquetur aliquis qui & præcedentem metietur & ipſum A.

A . . . . . .
B . . . .
Γ . .

Omnem igitur numerum compoſitum primus aliquis numerus metitur. quod erat demonſtrandum.

ΕΣΤΩ συνθετὸς ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπό τινος πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐπεὶ γὰρ συνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Β. κ᾽ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Β, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ συνθετός, μετρήσῃ τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Β τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. κ᾽ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ συνθετός μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός, τοιαύτης δὴ γινομένης ὑποστάσεως λημφθήσεταί τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν Α ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοί, ὧν ὁ ἕτερος ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς· λημφθήσεταί τις ἄρα, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει.

Ἅπας ἄρα συνθετὸς ἀριθμὸς ὑπό πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Aliter.

SIT compoſitus numerus A: dico primum aliquem numerum ipſum metiri.

Quoniam enim A compoſitus eſt [per 13. def. 7.] metietur ipſum aliquis numerus. ſit B minimus eorum, qui ipſum A metiuntur: dico B primum eſſe.

Si enim non; erit compoſitus: ergo eum aliquis numerus metietur. metiatur, ſitque Γ metiens ipſum: erit igitur Γ minor quam B. & quoniam Γ ipſum B metitur, ſed & B ipſum A; & Γ ipſum A metietur, minor exiſtens ipſo B, qui eſt minimus omnium qui metiuntur A, quod eſt abſurdum: igitur B non eſt compoſitus numerus: ergo eſt primus. quod erat demonſtrandum.

A . . . . . .
B . . .
Γ --

ΑΛΛΩΣ.

ΕΣΤΩ συνθετὸς ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὑπό πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐπεὶ γὰρ συνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρηθήσεται ὑπό ἀριθμοῦ. κ᾽ ἔστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων αὐτὸν ὁ Β· λέγω ὅτι ὁ Β πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή, συνθετός ἐστι· μετρηθήσεται ἄρα ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος. μετρείσθω, καὶ ἔστω ὁ Γ ὁ μετρῶν αὐτόν· ὁ Γ ἄρα τοῦ Β ἐλάσσων ἐστί. κ᾽ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ἀλλὰ καὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ· κ᾽ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ, ἐλάσσων ὢν τοῦ Β, ἐλαχίστου ὄντος τῶν μετρούντων Α, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Β συνθετός ἐστιν ἀριθμός ἐστι· πρῶτος ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIV. Theor.

Omnis numerus vel primus eſt, vel eum primus aliquis numerus metitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ΄.

Ἅπας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπό πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

SIT numerus A: dico A vel primum eſſe, vel primum aliquem numerum ipſum A metiri.

Si quidem igitur primus eſt, manifeſtum eſt quod quæritur. ſi vero compoſitus, [per 33. 7.] ipſum aliquis primus numerus metietur.

Omnis igitur numerus vel primus eſt, vel eum primus aliquis numerus metitur. quod erat demonſtrandum.

ΕΣΤΩ ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπό πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ Α, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ συνθετός, μετρήσῃ τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός.

Ἅπας ἄρα ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπό πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν, εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Prop. XXXV. Probl.

Numeris quotcunque datis, invenire minimos omnium qui eandem cum ipsis rationem habeant.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ.

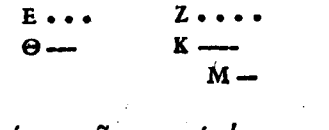
Sint dati quotcunque numeri A, B, Γ: oportet invenire minimos omnium qui eandem cum ipsis A, B, Γ rationem habeant.

Οἱ Α, Β, Γ ἄρα ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐλάχιστοί εἰσι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Vel igitur A, B, Γ primi inter se sunt, vel non. si quidem primi, & minimi erunt [per 23. 7.] omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Εἰ δὲ οὔ. εἰλήφθω τοῦ Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ ὁσάκις ὁ Δ ἑκάστου τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν Ε, Ζ, Η· ἕκαστος ἄρα τῶν Ε, Ζ, Η ἑκάστου τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῖς Α, Β, Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς τοῖς Α, Β, Γ, ἔσονταί τινες τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. ἔστωσαν οἱ Θ, Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ. ὁσάκις δὲ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Μ· καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· καὶ ὁ Μ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Μ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν Κ, Λ μονάδας· ὁ Μ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· ὁ Θ ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ τῷ ἐκ τῶν Θ, Μ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Δ. μείζων δὲ ὁ Ε τοῦ Θ· μείζων ἄρα καὶ ὁ Μ τοῦ Δ, καὶ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὑπόκειται γὰρ ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si vero non. sumatur [per 3. 7.] ipsorum A, B, Γ maxima communis mensura Δ, & quoties Δ unumquemque ipsorum A, B, Γ metitur, tot unitates sint in unoquoque horum E, Z, H: & unusquisque igitur ipsorum E, Z, H unumquemq; ipsorum A, B, Γ metitur per eas quæ sunt in Δ unitates: ergo E, Z, H ipsos A, B, Γ æqualiter metiuntur, ac propterea [per 18. 7.] E, Z, H in eadem sunt ratione in qua ipsi A, B, Γ. dico eos etiam minimos esse. si enim E, Z, H non sint minimi eandem cum ipsis A, B, Γ rationem habentium, erunt aliqui ipsis E, Z, H minores in eadem ratione in qua A, B, Γ. sint Θ, K, Λ: æqualiter igitur [per 21. 7.] Θ metitur ipsum A ac uterque ipsorum K, Λ utrumque B, Γ metitur. quoties autem Θ metitur ipsum A, tot unitates sint in M: & uterque igitur K, Λ utrumque B, Γ metitur per eas quæ sunt in M unitates. & quoniam Θ ipsum A metitur per unitates quæ sunt in M; & M ipsum A per unitates quæ sunt in Θ metietur. eadem ratione & M utrumque ipsorum B, Γ metietur per unitates quæ sunt in utroque K, Λ: ergo M ipsos A, B, Γ metitur. rursus, quoniam Θ ipsum A metitur per unitates quæ sunt in M; Θ ipsum M multiplicans fecit A. eadem ratione & E multiplicans Δ ipsum A fecit: ergo qui ex E, Δ fit ei qui fit ex Θ, M est æqualis: ut igitur E ad Θ ita [per 19. 7.] M ad Δ. major autem est E quam Θ: ergo & M quam Δ est major, & ipsos A, B, Γ metitur, quod fieri non potest; ponitur enim Δ ipsorum A, B, Γ maxima communis mensura: non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis E, Z, H in eadem ratione in qua A, B, Γ: ergo E, Z, H minimi sunt eorum qui eandem cum ipsis A, B, Γ rationem habent. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν τὸν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Prop. XXXVI. Probl.

Duobus numeris datis, invenire minimum numerum quem metiantur.

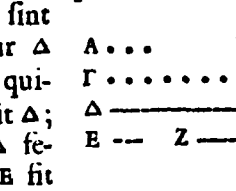
Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β· δεῖ δὴ εὑρεῖν τὸν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Sint dati duo numeri A, B: oportet invenire minimum numerum quem metiantur.

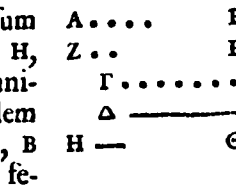
Οἱ Α, Β ἄρα ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. ἔστωσαν πρότερον οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα

Numeri enim A, B vel primi inter se sunt, vel non. sint primum A, B inter se primi, & A ipsum B multiplicans faciat Γ; ergo [per 16. 7.]

7.] & B multiplicans A ipſum Γ fecit; ac propterea numeri A, B ipſum Γ metiuntur. dico etiam Γ minimum eſſe. ſi enim non ita ſit, metientur A, B numerum aliquem minorem quam Γ. metiantur ipſum Δ. & quoties A ipſum Δ metitur tot unitates ſint in E, quoties autem B metitur Δ tot unitates ſint in Z: ergo A quidem ipſum E multiplicans fecit Δ; B vero multiplicans Z ipſum Δ fecit: quare numerus qui ex A, E fit eſt æqualis ei qui fit ex B, Z: ut igitur A ad B ita eſt [per 19. 7.] Z ad E. & ſunt A, B primi, primi autem [per 23. 7.] & minimi: ſed [per 21. 7.] minimi eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem: ergo B ipſum E metitur, conſequens conſequentem. & quoniam A numeros B, E multiplicans fecit Γ, Δ, erit [per 18. 7.] ut B ad E ita Γ ad Δ. metitur autem B ipſum E: ergo & Γ ipſum Δ metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur A, B metiuntur aliquem numerum minorem ipſo Γ, quando A, B primi inter ſe fuerint: ergo numerus Γ eſt minimus quem A, B metiantur.



Sed non ſint A, B primi inter ſe; & ſumantur [per 35. 7.] minimi numeri eandem quam A, B rationem habentium, qui ſint Z, E: æqualis igitur eſt [per 19. 7.] qui ex A, E fit ei qui ex B, Z. & A ipſum E multiplicans faciat Γ: ergo & B multiplicans Z ipſum Γ fecit: quare A, B ipſum Γ metiuntur. dico & minimum eſſe. niſi enim ita ſit, metientur A, B aliquem numerum minorem quam Γ. metiantur ipſum Δ. & quoties A ipſum Δ metitur tot unitates ſint in H, quoties autem B metitur Δ tot unitates ſint in Θ: ergo A quidem ipſum H multiplicans fecit Δ, B vero multiplicans Θ ipſum Δ fecit: qui igitur ex A, H fit eſt æqualis ei qui fit ex B, Θ: ut igitur A ad B ita [per 19. 7.] Θ ad H. ſed ut A ad B ita Z ad E: ergo & ut Z ad E ita Θ ad H. & [per conſtr.] ſunt Z, E minimi; minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] major majorem & minor minorem: quare E ipſum H metitur. & quoniam A numeros E, H multiplicans ipſos Γ, Δ fecit, ut E ad H ita erit [per 17. 7.] Γ ad Δ. ſed E metitur ipſum H: ergo [per 20. def. 7.] & Γ ipſum Δ metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur metiuntur A, B aliquem numerum minorem quam Γ: ergo Γ eſt minimus quem A, B metiantur. quod erat demonſtrandum.



Prop. XXXVII. Theor.

Si duo numeri metiantur numerum aliquem, & minimus quem illi metiuntur eundem metietur.

DUO enim numeri A, B numerum aliquem Γ Δ metiantur, minimum autem ipſum E: dico & E ipſum Γ Δ metiri.

τὸ A πολλαπλασιάσας τὸ Γ πεποίηκεν· οἱ A, B ἄρα τὸ Γ μετροῦσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ A, B ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. μετρείτωσαν τὸ Δ. καὶ ὁσάκις ὁ A τὸ Δ μετρεῖ, τοσαῦτα μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E. ὁσάκις δὲ ὁ B τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦτα μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Z· ὁ μὲν A ἄρα τὸ E πολλαπλασιάσας τὸ Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ B τὸ Z πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν A, E τῷ ἐκ τῶν B, Z· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸ B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸ E. οἱ δὲ A, B πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὁ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ B ἄρα τὸν E μετρεῖ, ὡς ἑπόμενος ἑπόμενον. καὶ ἐπεὶ ὁ A τοὺς B, E πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ B πρὸς τὸν E οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ δὲ ὁ B τὸν E· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, B μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ, ὅταν οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν A, B μετρεῖται.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, B, οἱ Z, E· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν A, E τῷ ἐκ τῶν B, Z. ἐπεὶ οὖν ὁ A τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ B ἄρα τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ A, B ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ A, B, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. μετρείτωσαν τὸν Δ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ A τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦτα μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ H, ὁσάκις δὲ ὁ B τὸ Δ μετρεῖ, τοσαῦτα μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Θ· ὁ μὲν A ἄρα τὸν H πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ B τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν A, H τῷ ἐκ τῶν B, Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H. ὡς δὲ ὁ A πρὸς τὸ B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸ E· καὶ ὡς ἄρα ὁ Z πρὸς τὸν E οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H. οἱ δὲ Z, E ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ E ἄρα τὸν H μετρεῖ. ἐπεὶ οὖν ὁ A τοὺς E, H πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν H οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὁ δὲ E τὸν H μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, B μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα τοῦ Γ· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν A, B μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

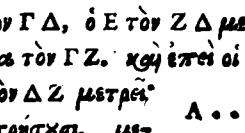
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσει.

ΔΥΟ γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B ἀριθμόν τινα τὸν Γ Δ μετρείτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν E· λέγω ὅτι καὶ ὁ E τὸν Γ Δ μετρεῖ.

Εἰ

Εἰ γὰρ ὁ μετρεῖ ὁ Ε τὸν Γ Δ, ὁ Ε τὸν Ζ Δ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν Γ Ζ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε μετροῦσιν, ὁ δὲ Ε τὸν Δ Ζ μετρεῖ· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Δ Ζ μετρήσουσι. μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν Γ Δ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν Γ Ζ μετρήσουσιν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ μετρεῖ ὁ Ε τὸν Γ Δ, μετρεῖ ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



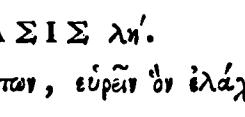
Si enim E non metitur Γ Δ, E metiens Z Δ relinquat ſeipſo minorem Γ Z. & quoniam A, B ipſum E metiuntur, E vero ipſum Δ Z, & A, B metientur Δ Z. ſed & metiuntur totum Γ Δ: ergo & reliquum Γ Z minorem ipſo E metientur, quod [ex hyp.] fieri non poteſt: non igitur E non metitur ipſum Γ Δ, metitur igitur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν τὸν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τὸν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

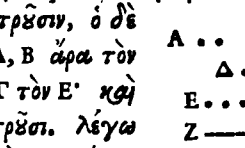
Εἰλήφθω γὰρ τοῦ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος μετρούμενος ὁ Δ. ὁ δὴ Γ τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. μετροῦσι δὴ καὶ οἱ Α, Β τὸν Δ· οἱ ἄρα Α, Β, Γ τὸν Δ μετροῦσι. λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β, Γ, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ. μετρείτωσαν τὸν Ε. ἐπεὶ δὴ οἱ Α, Β, Γ τὸν Ε μετροῦσι, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα τοῦ Α, Β μετρούμενος τὸν Ε μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ τοῦ Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα ἐλάχιστον τὸν Δ μετροῦσι.



Sint dati numeri A, B, Γ: oportet invenire minimum numerum quem metiantur.

Sumatur enim [per 36. 7.] numerus Δ minimus quem duo A, B metiuntur. itaque Γ vel metitur Δ, vel non metitur. metiatur primum. ſed & A, B metiuntur ipſum Δ: ergo A, B, Γ ipſum Δ metientur. dico illum eſſe minimum. ſi enim non, metientur A, B, Γ quendam numerum minorem ipſo Δ. metiantur E. quoniam igitur A, B, Γ metiuntur ipſum E, & A, B ipſum E metiuntur: ergo [per 37. 7.] & minimus quem metiuntur A, B ipſum E metietur. minimus autem quem metiuntur A, B eſt Δ: quare Δ metitur ipſum E, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur A, B, Γ metiuntur aliquem numerum ipſo Δ minorem: ergo Δ eſt minimus quem A, B, Γ metiuntur.

Μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ, καὶ εἰλήφθω τοῦ τῶν Γ, Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Ε. ἐπεὶ δὴ οἱ Α, Β τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν Ε μετρεῖ· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσι. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ε· καὶ οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Ε μετροῦσι. λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα οἱ Α, Β, Γ, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε. μετρείτωσαν τὸν Ζ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ τὸν Ζ μετροῦσι· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ζ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα τοῦ Α, Β μετρούμενος τὸν Ζ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ τοῦ Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ζ· οἱ Δ, Γ ἄρα τὸν Ζ μετροῦσιν· ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος τοῦ Δ, Γ μετρούμενος μετρήσει τὸν Ζ. ὁ δὲ ἐλάχιστος τοῦ Δ, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα ἐλάχιστος ὢν τοῦ Α, Β, Γ μετρεῖ). ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Non metiatur autem Γ ipſum Δ, & ſumatur [per 36. 7.] minimus numerus E, quem Γ, Δ metiantur. itaque quoniam A, B metiuntur ipſum Δ, Δ vero ipſum E; & A, B ipſum E metientur. metitur autem & Γ ipſum E: ergo A, B, Γ ipſum E metiuntur. dico illum etiam eſſe minimum. ſi enim non, metientur A, B, Γ numerum minorem ipſo E. metiantur Z. & quoniam A, B, Γ metiuntur Z, & A, B ipſum Z metientur: ergo [per 37. 7.] & minimus quem A, B metiuntur metietur ipſum Z. minimus autem quem A, B metiuntur eſt Δ: quare Δ ipſum Z metitur. ſed & Γ metitur ipſum Z: ergo Δ, Γ ipſum Z metiuntur; ac propterea minimus quem metiuntur Δ, Γ metietur & Z. ſed [per conſtr.] minimus quem metiuntur Δ, Γ, eſt E: ergo E ipſum Z metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur A, B, Γ metiuntur aliquem numerum minorem ipſo E: ergo numerus E eſt minimus quem ipſi A, B, Γ metiuntur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς τοῦ τινος ἀριθμοῦ μέρος ᾖ τὸ μερούμενον μέρος ἕξει τὸ μερῶν τὸ.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α τοῦ τινος ἀριθμοῦ τοῦ Β μετρείσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ Β.

Prop. XXXVIII. Probl.

Tribus numeris datis, invenire minimum numerum quem metiantur.

Prop. XXXIX. Theor.

Si numerum numerus aliquis metiatur, ille quem metitur partem habebit à metiente denominatam.

Numerum enim A numerus aliquis B metiatur: dico A partem habere ab ipſo B denominatam.

Quoties enim B ipſum A metitur, tot unitates ſint in Γ: & quoniam B metitur ipſum A per eas quæ ſunt in Γ unitates; metitur autem & unitas Δ ipſum Γ per unitates quæ in ipſo ſunt: & Δ unitas ipſum Γ numerum æqualiter metietur atque B ipſum A: quare permutando [per 15. 7.] unitas Δ ipſum B numerum æqualiter metietur atque Γ ipſum A: quæ igitur pars eſt unitas Δ ipſius B numeri, eadem pars eſt & Γ ipſius A. ſed unitas Δ ipſius B numeri pars eſt ab eo denominata: ergo & Γ ipſius A pars eſt denominata ab ipſo B: quare A partem habet ſc. Γ ab ipſo B denominatam. quod erat demonſtrandum.

A ..... B ... Γ .... Δ.

Prop. XL. Theor.

Si numerus partem quamcumque habeat, eum numerus à parte denominatus metietur.

NUmerus enim A partem habeat quamcumque B, & ab ipſa parte B denominatus ſit numerus Γ: dico Γ ipſum A metiri

Quoniam enim B ipſius A pars eſt & denominata ab ipſo Γ, eſt autem & unitas Δ ipſius Γ numeri pars ab ipſo denominata: quæ igitur pars eſt unitas Δ ipſius Γ numeri eadem pars eſt & B ipſius A: ergo unitas Δ æqualiter metitur ipſum Γ numerum atque B ipſum A; & permutando [per 15. 7.] unitas Δ ipſum B numerum æqualiter metitur atque Γ ipſum A: ergo Γ ipſum A metitur. quod erat demonſtrandum.

A ..... B .. Γ ..... Δ.

Prop. XLI. Probl.

Numerum invenire, qui minimus cum ſit datas partes habeat.

SInt datæ partes A, B, Γ: oportet numerum invenire, qui cum minimus ſit habeat datas partes A, B, Γ.

Sint ab ipſis A, B, Γ partibus denominati numeri Δ, E, Z, & ſumatur [per 38. 7.] minimus numerus H, quem ipſi Δ, E, Z metiuntur. quoniam igitur Δ, E, Z metiuntur ipſum H; habebit [per 39. 7.] H partes ab ipſis Δ, E, Z denominatas. partes autem denominatæ ab ipſis Δ, E, Z [per conſtr.] ſunt A, B, Γ; ergo H partes A, B, Γ habet. dico & minimum eſſe. ſi enim H non ſit minimus, partes habens A, B, Γ, erit numerus aliquis minor ipſo H, qui eaſdem partes habeat. ſit Θ. quoniam igitur Θ partes habet A, B, Γ; eum [per 40. 7.] metientur numeri ab ipſis A, B, Γ partibus denominati. ſunt autem hi numeri Δ, E, Z: ergo Δ, E, Z ipſum Θ metientur minorem ipſo H, quod [per conſtr.] fieri non poteſt: non igitur erit aliquis numerus minor ipſo H, qui partes A, B, Γ habeat. quod erat demonſtrandum.

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{3}$ Γ $\frac{1}{4}$ H ..... Θ ----------

Δ.. E... Z....

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Εὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁπιονοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

ΑΡιθμὸς γὰρ ὁ Α μέρος ἐχέτω ὁπιονοῦν τὸν Β, καὶ τῷ Β μέρει ὁμώνυμος ἔστω ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Α μέρος ἐστὶ καὶ ὁμώνυμον τῷ Γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμώνυμον αὐτῷ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α· συναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ δοθέντα μέρη.

ΕΣτω τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ.

Ἐστωσαν τοῖς Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί, οἱ Δ, Ε, Ζ, καὶ εἰλήφθω ὁ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Η. ἐπεὶ οὖν ὁ Η ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ μετρεῖται, ὁ Η ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς Δ, Ε, Ζ. τοῖς δὲ Δ, Ε, Ζ ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ Α, Β, Γ· ὁ Η ἄρα ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη. λέγω δὴ ὅτι ἐλάχιστος ὢν. εἰ γὰρ μὴ ὁ Η ἐλάχιστος ὢν ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη, ἔσται δέ τις Η ἐλάσσων ἀριθμὸς ὃς ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη. ἔστω ὁ Θ. ἐπεὶ ὁ Θ ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς Α, Β, Γ μέρεσι. τοῖς δὲ Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί εἰσιν οἱ Δ, Ε, Ζ· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ μετρεῖται, καὶ ἔστιν ἐλάσσων ὁ Η, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμὸς, ὃς ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΥΚΛΕΙ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εἀν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

ΕΣΤΩΣΑΝ ὁποσοιῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ γὰρ μή, ἔστωσαν ἐλάσσονες τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν

Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τὰ Ε,	Α, *8.	Β, 12.	Γ, 18.	Δ, 27.
Ζ, Η, Θ· δίστε ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α	Ε —	Ζ —	Η —	Θ —

πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ.

καί εἰσι Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἐχοντας ἰσάκις, ὅ,τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐλάσσονες ὄντες τῶν Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς· οἱ Α, Β, Γ, Δ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. I. Theor.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, quorum extremi ſint inter ſe primi; minimi erunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

SINT quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, quorum extremi A, Δ primi inter ſe ſint: dico A, B, Γ, Δ minimos eſſe omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

Si enim non, ſint minores ipſis A, B, Γ, Δ numeri E, Z, H, Θ & in eadem ratione. & quoniam A, B, Γ, Δ ſunt in eadem ratione in qua E, Z, H, Θ, atque eſt ipſorum A, B, Γ, Δ multitudo æqualis multitudini ipſorum E, Z, H, Θ: erit ex æquo [per 14. 7.] ut A ad Δ ita E ad Θ. & ſunt A, Δ primi; primi autem & minimi numeri æqualiter metiuntur eos qui eandem rationem habent, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: ergo A ipſum E metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur E, Z, H, Θ minores ipſis A, B, Γ, Δ exiſtentes in eadem ſunt ratione cum ipſis: ac propterea A, B, Γ, Δ minimi ſunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ὑπὸ τάξῃ τις, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὁ ὃν Α πρὸς τὸν Β· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἐξῆς

Prop. II. Probl.

Numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in data ratione.

SIT data ratio in minimis numeris, ea ſc. quam habet A ad B: oportet numeros invenire dein-

* *In hoc & ſequenti Libro Literis adjecimus numeros illis reſpondentes; ne ingens punctorum multitudo, quandoque ex neceſſitate adhibenda, moleſtiam crearet lectoribus.*

ceps

ceps proportionales minimos, quotcumque quis imperaverit, in ratione A ad B.

Imperentur quatuor, & A ſeipſum multiplicans faciat Γ, multiplicans vero B faciat Δ, & B ſeipſum multiplicans faciat E; & adhuc A multiplicans Γ, Δ, E ipſos Z, H, Θ faciat, B vero multiplicans E faciat K.

Quoniam igitur A ſeipſum multiplicans fecit Γ, multiplicans vero B ipſum Δ fecit, numerus A duos numeros A, B multiplicans fecit Γ, Δ: eſt igitur [per 17. 7.] ut A ad B ita Γ ad Δ. rurſus, quoniam A ipſum B multiplicans fecit Δ, & B ſeipſum multiplicans fecit E; uterque ipſorum A, B multiplicans B utrumque ipſorum Δ, E fecit: ut igitur A ad B ita [per 18. 7.] Δ ad E. ſed ut A ad B, ita Γ ad Δ: ergo & ut Γ ad Δ ita Δ ad E. & quoniam A numeros Γ, Δ multiplicans ipſos Z, H fecit: ut Γ ad Δ ita erit Z ad H. ut autem Γ ad Δ ita erat A ad B: & igitur ut A ad B ita Z ad H. rurſus, quoniam A numeros Δ, E multiplicans fecit H, Θ: erit ut Δ ad E ita H ad Θ. ſed ut Δ ad E ita A ad B: ergo & ut A ad B ita H ad Θ. & quoniam A, B ipſum E multiplicantes fecerunt Θ, K; erit ut A ad B ita Θ ad K. oſtenſum autem eſt & ut A ad B ita eſſe & Z ad H & H ad Θ: ergo ut Z ad H ita H ad Θ & Θ ad K: numeri igitur Γ, Δ, E & etiam Z, H, Θ, K proportionales ſunt in ratione quam habet A ad B. dico etiam & minimos eſſe. quoniam enim [ex hyp.] A, B minimi ſunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium; minimi vero eandem cum ipſis rationem habentium [per 23. 7.] & primi ſunt inter ſe: erunt ipſi A, B inter ſe primi. & uterque quidem ipſorum A, B ſeipſum multiplicans utrumque Γ, E fecit; utrumque vero Γ, E multiplicans fecit utrumque Z, K: ergo [per 29. 7.] Γ, E & Z, K primi inter ſe ſunt. ſi autem ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, & eorum extremi ſint inter ſe primi; [per 1. 8.] minimi erunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium: ergo & Γ, Δ, E & etiam Z, H, Θ, K minimi ſunt omnium eandem cum ipſis A, B rationem habentium. quod erat demonſtrandum.

A, 2.	B, 3.	
Γ, 4.	Δ, 6.	E, 9.
Z, 8.	H, 12.	Θ. 18.
K, 27.		

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint omnium eandem cum ipſis rationem habentium, extremos eorum quadratos eſſe; ſi vero quatuor, eſſe cubos.

PROP. III. THEOR.

Si ſint quotcunque numeri deinceps pro-

ἀνάλογον ἐλαχίστοι, ὅσοι ἂν τις ὑπάρχῃ, ἐν τῷ δοθείσῃ τῷ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ.

Ἐπιτετάχθωσαν δὴ πλείονες, ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιήτω, καὶ ἔτι ὁ Α τοὺς Γ, Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η, Θ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Α, Β τὸν Β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Δ, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ἦν ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Θ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Θ, Κ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὅ, τε Ζ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὅ, τε Η πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ ἀνάλογόν εἰσιν, ἐν τῷ δοθείσῃ τῷ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἑκάτερος μὲν τῶν Α, Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, Ε πεποίηκεν, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Ε πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ζ, Κ πεποιήκασιν· οἱ Γ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Κ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ὦσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν· ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι

ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγων ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

portionales, minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; eorum extremi primi inter ſe erunt.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ μετὰ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Β, Γ, Δ λόγῳ, οἱ Ε, Ζ, τρεῖς δὲ οἱ Η, Θ, Κ, καὶ αἰεὶ ἑξῆς ἓνὶ πλείους, ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον πλῆθος ἴσον γένηται τῷ πλήθει τῶν Α, Β, Γ, Δ. εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium: dico eorum extremos Α, Δ inter ſe primos eſſe.

Sumantur enim [per 2. 8.] duo numeri minimi in ratione ipſorum Α, Β, Γ, Δ, qui ſint Ε, Ζ, tres vero Η, Θ, Κ, & ſemper deinceps uno plures, quoad aſſumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipſorum Α, Β, Γ, Δ. ſumantur & ſint Λ, Μ, Ν, Ξ.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27.
Ε, 2. Ζ, 3.
Η, 4. Θ, 6. Κ, 9.
Λ, 8. Μ, 12. Ν. 18. Ξ, 27.

Οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ οἱ Ε, Ζ πρῶτοί εἰσιν, ἑκάτερος δὲ αὐτῶν ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Η, Κ πεποίηκεν, ἑκάτερος δὲ τῶν Η, Κ πολλαπλασιάσας τὸν ἕτερον τῶν Λ, Ξ πεποίηκεν· οἱ Η, Κ ἄρα πρῶτοι πρὸς οἱ Λ, Ξ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ πρὸς οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ, Δ, πρὸς ἴσον ἐστὶν τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ· ἕκαστος ἄρα τῶν Α, Β, Γ, Δ ἑκάστῳ τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Α τῷ Λ, ὁ δὲ Δ τῷ Ξ. καὶ ἐπεὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ μὲν Λ τῷ Α, ὁ δὲ Ξ τῷ Δ· καὶ οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Extremi igitur ipſorum Λ, Ξ primi inter ſe ſunt. quoniam enim Ε, Ζ primi inter ſe ſunt, & uterque ipſorum ſeipſum multiplicans utrumque Η, Κ fecit; utrumque vero Η, Κ multiplicans fecit utrumque Λ, Ξ: erunt [per 29. 7.] & Η, Κ & Λ, Ξ primi. & quoniam Α, Β, Γ, Δ minimi ſunt eorum eandem cum ipſis rationem habentium; ſunt autem & Λ, Μ, Ν, Ξ minimi in eadem ratione in qua Α, Β, Γ, Δ; eſtque ipſorum Α, Β, Γ, Δ multitudo æqualis multitudini ipſorum Λ, Μ, Ν, Ξ: erit unuſquiſque ipſorum Α, Β, Γ, Δ unicuique ipſorum Λ, Μ, Ν, Ξ æqualis: ergo Α quidem eſt æqualis Λ, & Δ ipſi Ξ. & quoniam Λ, Ξ primi ſunt inter ſe, Λ vero ipſi Α æqualis, & Ξ ipſi Δ; & Α, Δ inter ſe primi erunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.

PROP. IV. PROBL.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, numeros invenire deinceps minimos in datis rationibus.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὅ τε τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους, ἐντὸς τοῦ τὸν Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Sint datæ rationes in minimis numeris, videlicet ratio Α ad Β, & ratio Γ ad Δ, & ratio Ε ad Ζ: oportet numeros invenire deinceps minimos in ratione Α ad Β, & in ratione Γ ad Δ; & adhuc in ratione Ε ad Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ τοῦ Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Η. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Β τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις ὁ Α τὸν Θ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Δ τὸν Κ μετρείτω· ὁ δὲ Ε τὸν Κ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. καὶ ὁσάκις ὁ Ε τὸν Κ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Λ μετρείτω. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Α τὸν Θ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἔτι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἐντὸς τοῦ τὸν Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι.

Sumatur enim [per 36. 7.] minimus numerus, quem Β, Γ metiuntur; ſitque Η. & quoties Β metitur Η toties Α ipſum Θ metiatur: quoties vero Γ ipſum Η metitur toties & Δ metiatur Κ: itaque Ε ipſum Κ vel metitur, vel non metitur. metiatur primum. & quoties Ε metitur Κ, toties Ζ ipſum Λ metiatur. & quoniam Α æqualiter metitur Θ atque Β ipſum Η; erit [per 13. 7.] ut Α ad Β ita Θ ad Η. eadem ratione & ut Γ ad Δ ita Η ad Κ, & adhuc ut Ε ad Ζ ita Κ ad Λ: ergo Θ, Η, Κ, Λ deinceps proportionales ſunt in ratione Α ad Β, & in ratione Γ ad Δ, & adhuc in ratione Ε ad Ζ. dico etiam minimos eſſe. ſi

Α, 2. Β, 5. Γ, 3. Δ, 4. Ε, 5, Ζ, 6.
Θ, 6. Η, 15. Κ, 20. Λ, 24.
Ν —. Ξ —— Μ —— Ο ——

enim non ſint Θ, H, K, Λ deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z; erunt aliqui numeri minores ipſis Θ, H, K, Λ deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z. ſint N, Ξ, M, O. & quoniam eſt ut A ad B ita N ad Ξ; & ſunt A, B minimi; minimi autem eos qui eandem habent rationem [per 21. 7.] æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: metietur B ipſum Ξ. eadem ratione & Γ ipſum Ξ metietur: quare B, Γ metiuntur Ξ: ac propterea [per 37. 7.] minimus, quem metiuntur B, Γ, ipſum Ξ metietur. minimus autem quem metiuntur B, Γ [ex hyp.] eſt H: ergo H metietur Ξ, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis Θ, H, K, Λ deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z.

A, 2. B, 5. Γ, 3. Δ, 4. E, 5. Z, 6.
Θ, 6. H, 15. K, 20. Λ, 24.
N — Ξ — M — O —

εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Θ, H, K, Λ ἐξῆς ἐλάχιστοι, ἔστω τῶν Α πρὸς τὸν Β, καὶ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τῶν Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἐσόντων τινῶν τῶν Θ, H, K, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἔχοντες τοὺς τῶν Α πρὸς τὸν Β, καὶ τὸν Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τὸν Ε πρὸς τὸν Ζ λόγους. ἔστωσαν οἱ N, Ξ, M, O. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ N πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσιν, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα τὸν τὸ αὐτὸ Β, Γ μετροῦντα τὸν Ξ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ τὸν τὸ Β, Γ μετροῦντα ἐστὶν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Θ, H, K, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς, ἔστι τῶν τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ.

Sed non metiatur E ipſum K. & ſumatur [per 36. 7.] minimus numerus, quem ipſi E, K metiuntur; ſitque M. quoties autem K metitur M toties & uterque ipſorum Θ, H utrumque N, Ξ metiatur, & quoties E metitur M toties & Z metiatur O. quoniam igitur Θ ipſum N æqualiter metitur atque H ipſum Ξ; erit [per 13. 7.] ut Θ ad H ita N ad Ξ. ut autem Θ ad H ita A ad B: & igitur ut A ad B ita N ad Ξ. eadem ratione & ut Γ ad Δ ita Ξ ad M. rurſus, quoniam B ipſum M æqualiter metitur atque Z ipſum O; erit ut E ad Z ita M ad O: quare N, Ξ, M, O deinceps proportionales ſunt in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z. dico minimos quoque eſſe. ſi enim non ſint N, Ξ, M, O deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z, erunt aliqui numeri minores ipſis N, Ξ, M, O deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z. ſint Π, P, Σ, T. & cum ſit ut Π ad P ita A ad B; ſintque A, B minimi; minimi vero eos qui eandem habent rationem [per 21. 7.] æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: numerus B ipſum P metietur. eadem ratione & Γ metietur ipſum P: ergo B, Γ ipſum P metiuntur: & ob id [per 37. 7.] minimus, quem metiuntur B, Γ, ipſum P metietur. minimus autem, quem metiuntur B, Γ, eſt H: ergo H metitur ipſum P. atque eſt [per 13. 7.] ut H ad P ita K ad Σ: quare [per 20. def. 7.] & K ipſum Σ metitur. metitur autem & E ipſum Σ; ideoque E, K ipſum Σ metiuntur: & minimus igitur, quem metiuntur E, K, metietur ipſum Σ. ſed minimus, quem metiuntur E, K, [ex hyp.] eſt M: ergo M ipſum Σ metietur, major minorem, quod fieri non poteſt: non

A, 4. B, 5. Γ, 2. Δ, 3. E, 4. Z, 3.
Θ, 8. H, 10. K, 15.
N, 32. Ξ, 40. M, 60. O, 45.
Π — P — Σ — T —

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Ε τὸν Κ. καὶ εἰλήφθω ὁ τὸ αὐτὸ τοῦ Ε, Κ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Μ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Κ τὸν Μ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Η ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Ο μετρείτω. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Θ τὸν Ν μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Ξ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Μ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἐν τοῖς Α πρὸς τὸν Β, καὶ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἐξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις, ἔσονταί τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάττονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. ἔστωσαν οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Ρ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ρ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ρ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα τὸν τὸ αὐτὸ Β, Γ μετροῦντα τὸν Ρ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ τὸν τὸ Β, Γ μετροῦντα ἐστὶν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ρ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Σ· καὶ ὁ Κ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ· οἱ Ε, Κ ἄρα τὸν Σ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα τὸν τὸ αὐτὸ Ε, Κ μετροῦντα τὸν Σ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ τὸν τὸ Ε, Κ μετροῦντα ἐστὶν ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα

ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ N, Ξ, M, O ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ὑπὸ τοῖς Δ A πρὸς τὸν B καὶ Δ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τὸ E πρὸς τὸν Z λόγους· οἱ N, Ξ, M, O ἄρα ἐξῆς ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς A, B, Γ, Δ, E, Z λόγοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

igitur erunt aliqui numeri minores ipſis N, Ξ, M, O deinceps minimi in rationibus A ad B & Γ ad Δ & E ad Z; ergo N, Ξ, M, O deinceps minimi ſunt in rationibus A ad B & Γ ad Δ & E ad Z. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Οἱ ὑπὸπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἐστωσαν ὑπόπεδοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, καὶ τοῦ μὲν A πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ B αἱ E, Z· λέγω ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Prop. V. Theor.

Plani numeri inter ſe rationem habent *ex lateribus compoſitam.

Sint plani numeri A, B, & ipſius quidem A latera ſint Γ, Δ numeri: ipſius vero B latera ſint E, Z: dico A ad B rationem habere ex lateribus compoſitam.

Λόγων γὰρ δοθέντων, τοῦτον ὃν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν E καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Z, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Γ, E, Δ, Z λόγοις, οἱ H, Θ, K, ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν E ἕτως τὸν H πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ τὸν Δ πρὸς τὸν Z ἕτως τὸν Θ πρὸς τὸν K. [† οἱ ἄρα H, Θ, K πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι τὸν τῶν πλευρῶν λόγον. ἀλλ' ὁ τοῦ H πρὸς τὸν K λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ H πρὸς τὸν Θ καὶ τοῦ τοῦ Θ πρὸς τὸν K· ὁ H ἄρα πρὸς τὸν K λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· λέγω δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B ἕτως ὁ H πρὸς τὸν K.] ὁ Δ γὰρ τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν A ποιείτω. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν E ἕτως ὁ A πρὸς τὸν Λ. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν E ἕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ H πρὸς τὸν Θ ἕτως ὁ A πρὸς τὸν Λ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ E τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z ἕτως ὁ Λ πρὸς τὸν B. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z ἕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν K ἕτως ὁ Λ πρὸς τὸν B. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ H πρὸς τὸν Θ ἕτως ὁ A πρὸς τὸν Λ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ H πρὸς τὸν K ἕτως ὁ A πρὸς τὸν B. ὁ δὲ H πρὸς τὸν K λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Rationibus enim datis, videlicet quam habet Γ ad E & quam Δ ad Z, ſumantur [per 4. 8.] numeri deinceps minimi H, Θ, K in rationibus Γ ad E & Δ ad Z, ſitque ut Γ ad E ita H ad Θ: ut autem Δ ad Z ita Θ ad K. [ergo H, Θ, K inter ſe rationes habent laterum. ſed [per 5. def. 6.] ratio H ad K compoſita eſt ex ratione H ad Θ & ratione Θ ad K: quare H ad K rationem habet ex lateribus compoſitam; dico igitur ut A ad B ita eſſe H ad K.] numerus Δ ipſum E multiplicans faciat Λ. & quoniam [per 16. def. 7.] Δ multiplicans Γ ipſum A fecit, multiplicans vero E fecit Λ: erit [per 17. 7.] ut Γ ad E ita A ad Λ. ut autem Γ ad E ita [per conſtr.] H ad Θ: ergo & ut H ad Θ ita A ad Λ. rurſus, quoniam E ipſum quidem Δ multiplicans fecit Λ, multiplicans vero Z ipſum B fecit; ut Δ ad Z ita erit Λ ad B. ſed ut Δ ad Z ita eſt Θ ad K: & igitur ut Θ ad K ita Λ ad B. oſtenſum autem eſt & ut H ad Θ ita A ad Λ: quare ex æquo [per 14. 7.] ut H ad K ita A ad B. ſed [per 5. def. 6.] H ad K rationem habet compoſitam ex lateribus: ergo & A ad B rationem habebit ex lateribus compoſitam. quod erat demonſtrandum.

A, 6. B, 20. Λ, 12. Γ, 2. Δ, 3. E, 4. Z, 5. H, 3. Θ, 6. K, 10.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρεῖ· οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Prop. VI. Theor.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur: neque alius aliquis ullum metietur.

Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ A, B, Γ, Δ, E, ὁ δὲ A τὸν B μὴ μετρείτω· λέγω ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, E, & A ipſum B non metiatur. dico neque alium aliquem ullum metiri.

* Rectius ex laterum rationibus. † Quæ uncis includi dedimus in quibuſdam exemplaribus deſiderantur: & commode quidem abeſſe poſſunt. Deinde eadem exemplaria pro ὁ Δ γὰρ τ habent ὁ Δ τ &c.

Et quidem numeros A, B, Γ, Δ, E deinceps sese non metiri, perspicuum est. neque enim A ipsum B metitur. dico neque alium aliquem ullum metiri. dico enim A, ex. gr. non metiri ipsum Γ. nam quot sunt A, B, Γ,

tot sumantur [per 35. 7.] A, 16. B, 24. Γ, 36. Δ, 54. E, 81.
minimi numeri eandem Z, 4. H, 6. Θ, 9.
cum ipsis A, B, Γ rationem habentes, & sint Z, H, Θ. quoniam igitur Z, H, Θ in eadem sunt ratione in qua A, B, Γ, atque est ipsorum A, B, Γ multitudo æqualis multitudini ipsorum Z, H, Θ; erit ex æquo [per 14. 7.] ut A ad Γ ita Z ad Θ. & quoniam est ut A ad B ita Z ad H, non metitur autem A ipsum B, neque [per 20. def. 7.] Z ipsum H metietur: non igitur Z unitas est; unitas enim [per 1. def. 7.] omnem numerum metitur, & sunt Z, Θ primi inter se: ergo [per 12. def. 7.] neque Z metitur ipsum Θ, atque est ut Z ad Θ ita A ad Γ: neque igitur A ipsum Γ metietur. similiter demonstrabimus neque alium ullum aliquem metiri. quod erat demonstrandum.

Οτι μὴν οὐδὲ οἱ A, B, Γ, Δ, E ἑξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσιν, φανερόν. οὐδὲ γὰρ ὁ A τὸν B μετρεῖ. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. λέγω γὰρ ὅτι οὐδὲ μετρεῖ ὁ A τὸν Γ. ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ A, B, Γ τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντες τοῖς A, B, Γ, οἱ Z, H, Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ Z, H, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς A, B Γ, ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν A, B, Γ τῷ πλήθει τῶν Z, H, Θ· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H, ὁ δὲ μετρεῖ τὸν B· ὁ μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Z τὸν H· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ Z, ἢ γὰρ μονὰς πάντα μετρεῖ ἀριθμόν, καί ἐστιν οἱ Z, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· οὐδὲ ὁ Z ἄρα τὸν Θ μετρεῖ. καί ἐστιν ὡς ὁ Z πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Γ· οὐδὲ ὁ A ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VII. Theor.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; & secundum metietur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρεῖ· καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

SInt quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, & A ipsum Δ metiatur: dico A ipsum quoque B metiri.

Si enim A non metitur ipsum B [per 6. 8.] neque alius aliquis ullum metietur, quod est absurdum: ponitur enim A ipsum Δ metiri. metitur autem A ipsum Δ: ergo & A ipsum B metietur. quod erat demonstrandum.

Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ A, B, Γ, Δ, ὁ δὲ A τὸν Δ μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ A τὸν B μετρεῖ.

Εἰ γὰρ μὴ μετρεῖ ὁ A τὸν B, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὁ A τὸν Δ μετρῶν. μετρεῖ δὲ ὁ A τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ A τὸν B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Γ, 8. Δ, 16.

Prop. VIII. Theor.

Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alios eandem cum ipsis rationem habentes cadent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

INter duos numeros A, B cadant numeri deinceps proportionales Γ, Δ; & fiat ut A ad B ita E ad Z: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem & inter E, Z deinceps proportionales cadere.

Quot enim numeri sunt A, Γ, Δ, B, totidem sumantur [per 35. 7.] minimi numeri eandem cum ipsis A, Γ, Δ, B rationem habentium H, Θ, K, Λ: ergo [per 3. 8.] extremi ipsorum H, Λ primi inter se sunt. & quoniam A, Γ, Δ, B

Δύο δὴ ἀριθμῶν τῶν A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς E, Z μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὅσοι γὰρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ A, Γ, Δ, B, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, Γ, Δ, B· οἱ H, Θ, K, Λ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ H, Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ἐστιν ὡς οἱ A, Γ, Δ, B

Α, Γ, Δ, Β τοῖς Η, Θ, Κ, Λ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔστω ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Β, Δ τῷ πλήθει τῶν Η, Θ, Κ, Λ· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ἕτως ὁ Η πρὸς τὸν Α. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β ἕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Α ἕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Η, Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὁ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ἰσάκις ἄρα τὸν Ε μετρεῖ ὁ Η καὶ ὁ Λ τὸν Ζ. ὁσάκις δὲ ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Κ ἑκάτερον τῶν Μ, Ν μετρείτω· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἀλλὰ οἱ Η, Θ, Κ, Λ τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν· καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. οἱ δὲ Α, Γ, Δ, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι· καὶ οἱ Ε, Μ, Ν, Ζ ἄρα ἀνάλογόν εἰσιν ἐξῆς· ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογόν ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, 2.	Γ, 4.	
Δ, 8.	Β, 16.	
Ε, 4.	Α, 8.	
Ν, 12.	Ζ, 24.	

ad ipsos Η, Θ, Κ, Λ in eadem sunt ratione, atque est ipsorum Α, Γ, Δ, Β multitudo æqualis multitudini ipsorum Η, Θ, Κ, Λ; erit ex æquo [per 14. 7.] ut Α ad Β ita Η ad Λ. ut autem Α ad Β ita Ε ad Ζ: & igitur ut Η ad Λ ita Ε ad Ζ. & sunt Η, Λ primi; sed primi [per 23. 7.] sunt & minimi; minimi verò eos qui eandem rationem habent [per 21. 7.] æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem: ergo Η æqualiter metitur ipsum Ε atque Λ ipsum Ζ. quoties autem Η metitur ipsum Ε toties & uterque ipsorum Θ, Κ utrumque Μ, Ν metiatur: numeri igitur Η, Θ, Κ, Λ ipsos Ε, Μ, Ν, Ζ æqualiter metiuntur: ideoque [per 20. def. 7.] Η, Θ, Κ, Λ in eadem sunt ratione in qua ipsi Ε, Μ, Ν, Ζ. at Η, Θ, Κ, Λ similiter in eadem sunt ratione in qua Α, Γ, Δ, Β: ergo Α, Γ, Δ, Β in eadem ratione erunt in qua Ε, Μ, Ν, Ζ. sed [ex hyp.] Α, Γ, Δ, Β sunt deinceps proportionales: ergo & Ε, Μ, Ν, Ζ deinceps proportionales erunt: quot igitur deinceps proportionales cadunt inter Α, Β, totidem deinceps proportionales & inter Ε, Ζ cadent. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος εἰς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Prop. IX. Theor.

Si duo numeri inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter ipsos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter utrumque ipsorum & unitatem deinceps proportionales cadent.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α, Β, καὶ εἰς αὐτοὺς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ εἰκείσθω ἡ Ε μονάς· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς Ε μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Sint duo numeri inter se primi Α, Β, & inter ipsos deinceps proportionales cadant Γ, Δ; exponaturque unitas Ε: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipsos Α, Β, totidem & inter utrumque ipsorum Α, Β & unitatem Ε numeros deinceps proportionales cadere.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Γ, Δ, Β λόγῳ ὄντες, οἱ Ζ, Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ, Κ, Λ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους ἕως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, Β, εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκε, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκε, καὶ ὁ Η ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκε, τὸν δὲ Λ πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ, Η, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ, Η, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο τῷ πλήθει τῶν

Sumantur enim [per 2. 8.] duo quidem numeri minimi Ζ, Η in eadem ratione in qua sunt Α, Γ, Δ, Β; tres vero Θ, Κ, Λ, & semper deinceps uno plures, quoad fiat ipsorum multitudo æqualis multitudini ipsorum Α, Γ, Δ, Β, sumantur, & sint Μ, Ν, Ξ, Ο: itaque manifestum est [per constr. 2. 8.] Ζ seipsum quidem multiplicantem fecisse Θ, multiplicantem vero Θ fecisse Μ, & Η seipsum multiplicantem fecisse Λ, multiplicantem vero Λ fecisse Ο. & quoniam Μ, Ν, Ξ, Ο minimi sunt eandem cum ipsis Ζ, Η rationem habentium; sunt autem & Α, Γ, Δ, Β minimi eandem quam Ζ, Η rationem habentium; atque est ipsorum Μ, Ν, Ξ, Ο multitudo æqualis

Α, 8.	Γ, 12.		
		Β, 1.	
		Ζ, 2.	
	Θ, 4.	Κ, 6.	
Μ, 8.	Ν, 12.		
Δ, 18.	Β, 27.		
	Η, 3.		
		Λ, 9.	
Ξ, 18.	Ο, 27.		

multitudini ipſorum A, Γ, Δ, B: erit unuſquiſque ipſorum M, N, Ξ, O unicuique ipſorum A, Γ, Δ, B æqualis: æqualis igitur eſt M ipſi A & O ipſi B. & quoniam Z ſeipſum multiplicans fecit Θ, metitur Z ipſum Θ per unitates quæ ſunt in Z. metitur autem & E unitas numerum Z per unitates quæ in ipſo ſunt: ergo E unitas numerum Z æqualiter metitur atque Z ipſum Θ: eſt igitur [per 20. def. 7.] ut E unitas ad numerum Z ita Z ad Θ, rurſus, quoniam Z multiplicans Θ fecit M; metitur Θ ipſum M per unitates quæ ſunt in Z. metitur autem & E unitas numerum Z per unitates quæ in ipſo ſunt: æqualiter igitur E unitas numerum Z metitur atque Θ ipſum M: ergo ut E unitas ad numerum Z ita Θ ad M. oſtenſum eſt autem & ut E unitas ad numerum Z ita eſſe Z ad Θ: & igitur ut E unitas ad numerum Z ita Z ad Θ & Θ ad M. ſed M eſt æqualis ipſi A: quare ut E unitas ad numerum Z ita Z ad Θ & Θ ad A. eadem ratione & ut E unitas ad numerum H ita H ad Λ & Λ ad B: quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B totidem & inter utrumque ipſorum A, B & unitatem E numeri deinceps proportionales cadent. quod erat demonſtrandum.

A, 8. Γ, 12. E, 1.
Z, 2. Θ, 4. K, 6.
M, 8. N, 12.

Prop. X. Theor.

Si inter duos numeros & unitatem deinceps proportionales numeri cecideriſt; quot inter utrumque ipſorum & unitatem cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipſos numeri proportionales cadent.

INter duos enim numeros A, B & unitatem Γ numeri deinceps proportionales cadant Δ, E & Z, H: dico quot inter utrumque ipſorum A, B & unitatem Γ cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipſos A, B numeros deinceps proportionales cadere.

Numerus enim Δ ipſum Z multiplicans faciat Θ: uterque autem ipſorum Δ, Z ipſum Θ multiplicans faciat utrumque K, Λ.

Et quoniam eſt ut Γ unitas ad numerum Δ ita Δ ad E, unitas Γ ipſum Δ numerum æqualiter metietur atque Δ ipſum E. ſed unitas Γ numerum Δ metitur per unitates quæ ſunt in Δ: ergo & numerus Δ ipſum E per unitates quæ ſunt in Δ metitur: ac propterea numerus Δ ſeipſum multiplicans fecit E. rurſus, quoniam ut unitas Γ ad Δ numerum ita eſt E ad A; unitas Γ ipſum Δ numerum

A, 8. K, 12. E, 4. Θ, 6. Δ, 2. Γ, 1.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἱ Δ, Ε καὶ οἱ Ζ, Η· λέγω ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὁ Δ γὰρ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Λ ποιείτω.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε. ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε. πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Α· ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ

A, 18. B, 27. H, 9. Λ, 9. Ξ, 11. O, 27. Z, 3.

μετρῇ κ̀ ὁ Ε τὸν Α. ἡ δὲ Γ μονὰς τ̀ Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· κ̀ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ κ̀ ὁ Ζ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τ̀ Β πεποίηκε, κ̀ ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τ̀ Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τ̀ Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ κ̀ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. κ̀ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τ̀ Θ οὕτως ὁ Θ πρὸς τ̀ Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τ̀ Ε, Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τ̀ Α, Κ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Δ πρὸς τ̀ Ζ· κ̀ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τ̀ Κ, Λ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τ̀ Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τ̀ Λ. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ· ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔτι ἐπεὶ ὁ Ζ ἑκάτερον τ̀ Η, Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τ̀ Λ, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ κ̀ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὅ,τε Α πρὸς τὸν Κ, κ̀ ὁ Κ πρὸς τ̀ Λ, κ̀ ὁ Λ πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Κ, Λ, Β ἄρα κατὰ τὸ συνεχὲς ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον· ὅσοι ἄρα ἑκατέρᾳ τ̀ Α, Β καὶ τῇ Γ μονάδι μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι κ̀ εἰς τὰς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

merum æqualiter metitur atque Ε ipſum Α. ſed unitas Γ ipſum Δ numerum metitur per unitates quæ ſunt in Δ: quare & Ε ipſum Α per unitates quæ ſunt in Δ metitur: ideoque Δ ipſum Ε multiplicans fecit Α. eadem ratione & Ζ ſeipſum multiplicans fecit Η, multiplicans vero Η ipſum Β fecit, & quoniam Δ ſeipſum multiplicans fecit Ε, multiplicans vero Ζ fecit Θ; erit [per 17. 7.] ut Δ ad Ζ ita Ε ad Θ. & ob eandem cauſam ut Δ ad Ζ ita Θ ad Η. ut igitur Ε ad Θ ita Θ ad Η. rurſus, quoniam Δ utrumque ipſorum Ε, Θ multiplicans fecit utrumque Α, Κ, erit [per 17. 7.] ut Ε ad Θ ita Α ad Κ. ſed ut Ε ad Θ ita Δ ad Ζ: & igitur ut Δ ad Ζ ita Α ad Κ. rurſus, quoniam uterque Δ, Ζ ipſum Θ multiplicans utrumque Κ, Λ fecit; [per 18. 7.] ut Δ ad Ζ ita eſt Κ ad Λ. ut autem Δ ad Ζ ita eſt Α ad Κ: & igitur ut Α ad Κ ita Κ ad Λ. præterea cum Ζ utrumque Θ, Η multiplicans utrumque Λ, Β faciat, erit ut Θ ad Η ita Λ ad Β. ſed ut Θ ad Η ita Δ ad Ζ: ergo & ut Δ ad Ζ ita Λ ad Β. oſtenſum autem eſt & ut Δ ad Ζ ita Α ad Κ & Κ ad Λ & Λ ad Β: quare Α, Κ, Λ, Β numeri deinceps proportionales ſunt: quot igitur inter utrumque ipſorum Α, Β & unitatem Γ cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter Α, Β numeri deinceps proportionales cadent. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, κ̀ ὁ τετράγωνος πρὸς τ̀ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Prop. XI. Theor.

Inter duos numeros quadratos unus medius proportionalis cadit; & quadratus ad quadratum duplicatam rationem habet ejus quam latus habet ad latus.

Ἐστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, κ̀ ὁ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, ὁ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, κ̀ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τ̀ Δ.

Ο Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω. καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Α, πλευρὰ δέ αὐτοῦ ἐστιν ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ κ̀ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε· ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑκάτερον τ̀ Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τ̀ Α, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τ̀ Ε πεποίηκεν, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ ἕνα ἀριθμὸν κ̀ τὸν αὐτὸν τ̀ Δ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Ε, Β πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα

Α, 4. Ε, 6. Β, 9. Γ, 2. Δ, 3.

SInt quadrati numeri Α, Β & ipſius quidem Α latus ſit Γ, ipſius vero Β latus Δ: dico inter ipſos Α, Β unum medium proportionalem cadere, & Α ad Β duplicatam rationem habere ejus quam habet Γ ad Δ.

Numerus enim Γ multiplicans Δ faciat Ε. & quoniam Α numerus quadratus eſt cujus latus Γ; [per 18. def. 7.] numerus Γ ſeipſum multiplicans fecit Α. eadem ratione & Δ ſeipſum multiplicans fecit Β: quoniam igitur Γ utrumque ipſorum Γ, Δ multiplicans utrumque Α, Ε fecit, ut Γ ad Δ ita erit [per 17. 7.] Α ad Ε. rurſus, quoniam Γ multiplicans Δ ipſum Ε fecit, & Δ ſeipſum multiplicans fecit Β; duo numeri Γ, Δ unum & eundem numerum Δ multiplicantes ipſos Ε, Β fecerunt: eſt igitur [per 18. 7.] ut Γ

ad

ad Δ ita E ad B. ſed ut Γ ad Δ ita eſt A ad E: ergo & ut A ad E ita E ad B. inter numeros igitur A, B unus medius proportionalis E cadit.

Dico etiam A ad B duplicatam habere rationem ejus quam habet Γ ad Δ. quoniam enim tres numeri proportionales ſunt A, E, B, habebit A ad B duplicatam rationem ejus quam habet A ad E. ut autem A ad E ita Γ ad Δ: ergo A ad B duplicatam rationem habet ejus quam latus Γ habet ad latus Δ. quod erat demonſtrandum.

A, 4. E, 6. B, 9.
Γ, 2. Δ, 3.

Prop. XII. Theor.

Inter duos numeros cubos duo medii proportionales cadunt; & cubus ad cubum triplicatam habet rationem ejus quam latus habet ad latus.

SInt numeri cubi A, B; & ipſius quidem A latus ſit Γ, ipſius vero B latus Δ: dico inter ipſos A, B duos numeros medios proportionales cadere; & A ad B triplicatam habere rationem ejus quam Γ habet ad Δ.

Numerus enim Γ ſeipſum multiplicans faciat E, multiplicans vero Δ ipſum Z faciat; & Δ ſeipſum multiplicans faciat H, & uterque ipſorum Γ, Δ multiplicans Z utrumque Θ, K faciat.

Quoniam igitur A cubus eſt, & ejus latus Γ, numerus Γ ſeipſum multiplicans fecit E; multiplicans vero E [per 19. def. 7.] ipſum A fecit. ſimiliter & Δ ſeipſum multiplicans fecit H, multiplicans vero H fecit ipſum B. & quoniam Γ utrumque ipſorum Γ, Δ multiplicans utrumque E, Z fecit, [per 17. 7.] ut Γ ad Δ ita eſt E ad Z. eadem ratione & ut Γ ad Δ ita Z ad H. rurſus, quoniam Γ utrumque ipſorum E, Z multiplicans fecit utrumque A, Θ, erit ut E ad Z ita A ad Θ. ut autem E ad Z ita Γ ad Δ; & igitur ut Γ ad Δ ita A ad Θ. rurſus, quoniam uterque ipſorum Γ, Δ multiplicans Z utrumque Θ, K fecit, [per 18. 7.] ut Γ ad Δ ita erit Θ ad K. rurſus, quoniam Δ utrumque Z, H multiplicans fecit utrumque K, B, erit ut Z ad H ita K ad B. ut autem Z ad H ita Γ ad Δ: & igitur ut Γ ad Δ ita K ad B. oſtenſum autem eſt ut Γ ad Δ ita eſſe A ad Θ & Θ ad K & K ad B: ac propterea inter ipſos numeros A, B duo numeri medii proportionales Θ, K cadunt.

A, 8. Θ, 12. K, 18. B, 27.
E, 4. Z, 6. H, 9.
Γ, 2. Δ, 3.

Dico etiam A ad B triplicatam rationem habere ejus quam habet Γ ad Δ. quoniam enim quatuor numeri A, Θ, K, B proportionales ſunt, habe-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἔστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ, οἱ A, B, καὶ ἔστω μὲν τοῦ A πλευρὰ ἑστὼ ὁ Γ, τοῦ δὲ B ὁ Δ· λέγω ὅτι τῶν A, B δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ A πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν H ποιήτω, ἑκάτερος δὴ τῶν Γ, Δ τὸν Z πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, K ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ A, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε. ἀφ' ἃ ἄρα ὁ Γ τὸν E πεποίηκε καὶ ὁ E τὸν A πεποίηκε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν H πεποίηκε, τὸν δὲ H πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν E, Z πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z. ἀφ' ἃ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν E, Z πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν A, Θ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ. ὡς δὲ ὁ E πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Γ, Δ τὸν Z πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, K πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Z, H πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν K, B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Z πρὸς τὸν H οὕτως ὁ K πρὸς τὸν B. ὡς δὲ ὁ Z πρὸς τὸν H οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ K πρὸς τὸν B. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὅ, τε A πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν K καὶ ὁ K πρὸς τὸν B· τῶν A, B ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ οἱ Θ, K.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ A πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ A, Θ, K, B· ὁ A ἄρα

πρὸς

πρὸς τὸ Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Α πρὸς τὸν Θ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

bit A ad B triplicatam rationem ejus quam habet A ad Θ. ut autem A ad Θ ita Γ ad Δ: ergo A ad B triplicatam habet rationem ejus quam Γ habet ad Δ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται, καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Prop. XIII. Theor.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, & unuſquiſque ſeipſum multiplicans faciat aliquos, facti ex ipſis proportionales erunt: & ſi poſiti à principio numeri factos multiplicantes alios faciant, & ipſi proportionales erunt; & ſemper circa extremos hoc contingit.

Ἐστωσαν ὁποσοιῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ Α, Β, Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε, Ζ ποιείτωσαν, τοὺς δὲ Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Θ, Κ ποιείτωσαν· λέγω ὅτι οἵτε Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ Η, Θ, Κ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν.

Ὁ μὲν γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ἑκάτερος δὲ τῶν Α, Β τὸν Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Μ, Ν ποιείτω. καὶ πάλιν, ὁ μὲν Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Β, Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ο, Π ποιείτω.

Ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ ἐποίησεν ὁ μὲν Α τὸν Β τὸν Δ, ὁ δὲ Β τὸν Γ τὸν Ξ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ξ οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Γ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Ξ πρὸς τὸν Γ οὕτως ἐστὶν ὁ Β πρὸς τὸν Α. καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ξ οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Γ, καὶ ὡς ὁ Ξ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Α. ἐὰν δὲ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, καὶ ὁ πρῶτος τὸν δεύτερον πολλαπλασιάσας τινὰ ποιῇ, ὁ δὲ δεύτερος ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν ποιῇ, καὶ ὁ τρίτος τὸν αὐτὸν πολλαπλασιάσας ποιήσει τινά, πάντες ἄρα ἀνάλογον ἔσονται. καὶ ἐπεὶ ἐποίησεν ὁ μὲν Α τὸν Β τὸν Δ, ὁ δὲ Β τὸν Γ τὸν Ξ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Γ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ξ, καὶ ὁ Ξ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ ἐποίησεν ὁ μὲν Α τὸν Β τὸν Δ, ὁ δὲ Β τὸν Δ τὸν Ξ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Γ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ξ, καὶ ὁ Ξ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐποίησεν ὁ μὲν Α τὸν Δ τὸν Η, ὁ δὲ Β τὸν Ξ τὸν Θ, ὁ δὲ Γ τὸν Ξ τὸν Κ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ, καὶ ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt quotcunque numeri proportionales A, B, Γ, ſitque ut A ad B ita B ad Γ, & ipſi A, B, Γ ſeipſos multiplicantes faciant Δ, E, Z, ipſos vero Δ, E, Z multiplicantes faciant H, Θ, K; dico numeros Δ, E, Z & H, Θ, K deinceps proportionales eſſe.

Numerus enim A ipſum B multiplicans faciat Δ; uterque autem ipſorum A, B multiplicans Δ faciat utrumque M N. & rurſus, B quidem multiplicans Γ ipſum Ξ faciat; uterque vero ipſorum B, Γ multiplicans Ξ faciat utrumque O, Π.

		A, 2.	B, 4.	
	Δ, 4.	Λ, 8.	E, 16.	
H, 8.	M, 16.	N, 32.	Θ, 64.	
	Γ, 8.	Ξ, 32.	Z, 64.	
	O, 128.	Π, 256.	K. 512.	

Eodem modo quo prius oſtendemus Δ, Λ, E & H, M, N, Θ deinceps proportionales eſſe in ratione A ad B: & adhuc E, Ξ, Z & Θ, O, Π, K deinceps eſſe proportionales in ratione B ad Γ. atque eſt ut A ad B ita B ad Γ: ergo & Δ, Λ, E in eadem ſunt ratione in qua E, Ξ, Z; & præterea H, M, N, Θ in eadem ratione in qua Θ, O, Π, K. eſtque ipſorum quidem Δ, Λ, E multitudo multitudini ipſorum E, Ξ, Z æqualis. multitudo autem ipſorum H, M, N, Θ æqualis multitudini ipſorum Θ, O, Π, K: ex æquo igitur [per 14.7.] ut Δ ad E ita E ad Z, & ut H ad Θ ita Θ ad K. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Prop. XIV. Theor.

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur: & ſi latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur.

Ἐστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν οἱ Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Β μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω· οἱ Α, Ε, Β ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Ε, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, καὶ ὁ Ε τὸν Β μετρήσει. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ.

A, 4.	E, 8.	B, 16.
Γ, 2.	Δ, 4.	

SInt quadrati numeri A, B, quorum latera Γ, Δ, & A ipſum B metiatur: dico & latus Γ ipſum Δ metiri.

Numerus enim Γ multiplicans Δ ipſum E faciat: ergo A, E, B deinceps proportionales ſunt in ratione Γ ad Δ. & quoniam A, E, B deinceps ſunt proportionales, metiturque A

ipſum B; & [per 7. 8.] A ipſum E metietur. atque eſt ut A ad E ita Γ ad Δ: ergo [per 20. def. 7.] & Γ metitur ipſum Δ.

A, 4. E, 8. Γ, 2.

SED Γ metiatur ipſum Δ: dico & A ipſum B metiri.

Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus A, E, B deinceps proportionales eſſe in ratione Γ ad Δ. & quoniam eſt ut Γ ad Δ ita A ad E, metitur autem Γ ipſum Δ; & A ipſum E metietur. & ſunt A, E, B deinceps proportionales; metitur igitur & A ipſum B.

Si igitur numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur: & ſi latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur. quod erat demonſtrandum.

PROP. XV. THEOR.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum, & latus latus metietur: & ſi latus latus metiatur, & cubus cubum metietur.

NUmerus enim cubus A cubum numerum B metiatur, & ipſius quidem A latus ſit Γ, ipſius vero B latus Δ: dico Γ ipſum Δ metiri.

Numerus enim Γ ſeipſum multiplicans faciat E, & multiplicans Δ faciat Z; Δ vero ſeipſum multiplicans faciat H, & uterque ipſorum Γ, Δ multiplicans Z utrumque Θ, K faciat. manifeſtum autem eſt E, Z, H & A, Θ, K, B deinceps proportionales eſſe in ratione Γ ad Δ; & quoniam A, Θ, K, B deinceps proportionales ſunt, metiturque A ipſum B; [per 7. 8.] & A ipſum Θ metietur. eſt autem ut A ad Θ ita Γ ad Δ: ergo [per 20. def. 7.] Γ ipſum Δ metietur.

A, 8. Θ, 16. E, 4. Z, 8. H, 16. Γ, 2. K, 32. B, 64. Δ, 4.

SED Γ metiatur Δ: dico & A ipſum B metiri.

Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus A, Θ, K, B deinceps proportionales eſſe in ratione Γ ad Δ. & quoniam Γ ipſum Δ metitur, eſtque ut Γ ad Δ ita A ad Θ; & A metitur ipſum Θ: quare & A ipſum B metietur. quod erat demonſtrandum.

PROP. XVI. THEOR.

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur: & ſi latus non metiatur latus, neque hic quadratus quadratum.

SInt quadrati numeri A, B, quorum latera Γ, Δ & A non metiatur ipſum B: dico neque Γ ipſum Δ metiri.

τὸν Β· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

Ἀλλὰ δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι οἱ Α, Ε, Β ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. καί εἰσιν οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β.

Ἐὰν ἄρα τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Ὁ Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιείτω. φανερὸν δή ἐστιν ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η καὶ οἱ Α, Θ, Κ, Β ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ, καί ἐστιν οἱ Α, Θ, Κ, Β ἑξῆς ἀνάλογον εἰσιν, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

Ἀλλὰ δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οἱ Α, Θ, Κ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ, καί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Θ μετρεῖ· ὥστε καὶ τὸν Β μετρεῖ ὁ Α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Ἐστωσαν τετράγωνοι οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν οἱ Γ, Δ, καὶ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Β· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, μετρήσει καὶ ὁ Α τὸν Β. καὶ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· καὶ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. A, 9. Γ, 3.

Μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ. καὶ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· καὶ ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim metitur Γ ipſum Δ, [per 14. 8.] & A ipſum B metietur. non metitur autem A ipſum B: non igitur Γ ipſum Δ metietur. B, 16. Δ, 4.

SED non metiatur Γ ipſum Δ: dico neque A ipſum B metiri.

Si enim A metitur ipſum B, [per 14. 8.] & Γ ipſum Δ metietur. atqui Γ non metitur Δ; neque igitur A ipſum B metietur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

PROP. XVII. THEOR.

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur: & ſi latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μὴ μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδὲ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ. A, 8. Γ, 2.

ΑΛΛΑ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδὲ ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

NUmerus enim cubus A cubum numerum B non metiatur; & ipſius quidem A latus ſit Γ, ipſius vero B latus Δ: dico Γ ipſum Δ non metiri.

Si enim Γ metitur ipſum Δ, [per 15. 8.] & A ipſum B metietur. atqui non metitur A ipſum B: non igitur Γ ipſum Δ metietur. B, 27. Δ, 3.

SED non metiatur Γ ipſum Δ: dico neque A ipſum B metiri.

Si enim A ipſum B metitur, [per 15. 8.] & Γ metietur ipſum Δ. non metitur autem Γ ipſum Δ: neque igitur A ipſum B metietur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

PROP. XVIII. THEOR.

Inter duos ſimiles planos numeros unus medius proportionalis cadit: & planus ad planum duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοί, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. λέγω δή ὅτι τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ὁ Γ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Γ, Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ὁ Δ δὴ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. πάλιν ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η

ita Δ ad Z: & igitur ut Δ ad Z ita A ad H. rurſus, quoniam E ipſum Δ multiplicans fecit H, multiplicans vero Z ipſum B fecit; ut Δ ad Z ita erit H ad B.

oſtenſum eſt autem & ut Δ ad Z ita eſſe A ad H: & igitur ut A ad H ita H ad B:

A, 6. H, 12. B, 24.
Γ, 2. Δ, 3. E, 4, Z, 6.

ergo A, H, B deinceps proportionales ſunt: ac propterea inter A, B unus medius proportionalis cadit.

DICO & A ad B duplicatam rationem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt quam Γ ad E vel Δ ad Z. quoniam enim A, H, B deinceps proportionales ſunt, A ad B duplicatam rationem habebit ejus quam habet ad H. atque eſt ut A ad H ita Γ ad E & Δ ad Z: ergo & A ad B duplicatam rationem habet ejus quam Γ habet ad E vel Δ ad Z. quod erat demonſtrandum.

Ἔστωσαν ὁ Δ πρὸς τὸν Z· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Z ἔστως ὁ A πρὸς τὸν H. πάλιν, ἐπεὶ ὁ E τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν H πεποίηκε, τὸν δὲ Z πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z ἔστως ὁ H πρὸς τὸν B. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z ἔστως ὁ A πρὸς τὸν H· καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν H ἔστως ὁ H πρὸς τὸν B· οἱ A, H, B ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι· τὸν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

ΑΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν E ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Z. ἐπεὶ γὰρ οἱ A, H, B ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸν H. ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν H ἔστως ὅ,τε Γ πρὸς τὸν E καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Z· καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν E ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Z. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XIX. THEOR.

Inter duos ſimiles ſolidos numeros duo medii proportionales cadunt; & ſolidus ad ſimilem ſolidum triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

SInt duo numeri ſolidi inter ſe ſimiles A, B, & ipſius quidem A latera ſint Γ, Δ, E, ipſius vero B latera Z, H, Θ. & quoniam [per 21. def. 7.] ſimiles ſolidi ſunt qui latera habent proportionalia: erit ut Γ ad Δ ita Z ad H, ut autem Δ ad E ita H ad Θ. dico inter ipſos A, B duos medios proportionales cadere, & A ad B triplicatam rationem habere ejus quam habet Γ ad Z & Δ ad H & adhuc E ad Θ.

Numerus enim Γ ipſum Δ multiplicans faciat K, Z vero multiplicans H ipſum Λ faciat. & quoniam Γ, Δ in eadem ſunt ratione in qua Z, H, & ex ipſis Γ, Δ fit K, ex ipſis vero Z, H fit Λ; erunt K, Λ ſimiles plani numeri:

A, 30. N, 60. Ξ, 120. B, 240.
K, 6. M, 12. Λ, 24.
Γ, 2. Δ, 3. E, 5. Z, 4. H, 6. Θ, 10.

quare [per 18. 8.] inter ipſos unus medius proportionalis cadit. ſit is numerus M: ergo M fit ex Δ, Z, ut oſtenſum eſt in præcedenti theoremate: eſt igitur ut K ad M ita M ad Λ. & quoniam Δ ipſum Γ multiplicans fecit K, multiplicans vero Z fecit M; erit [per 17. 7.] ut Γ ad Z ita K ad M. ſed ut K ad M ita M ad Λ: ergo K, M, Λ deinceps proportionales ſunt in ratione Γ ad Z. & quoniam ut Γ ad Δ ita Z ad H, erit [per 13. 7.] permutando ut Γ ad Z ita Δ ad H. rurſus, quoniam ut Δ ad E ita H ad Θ; & permutando erit ut Δ ad H ita E ad Θ

λ ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἕως τοῦ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ τοῦ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι τοῦ τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ λόγου. ἑκάτερος δὴ τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ ποιείτω. ἐπεὶ στερεός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Γ, Δ, Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Θ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τῶν Ζ, Η τὸν Β πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὅ, τε Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β. ἀλλ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ἑ μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν Β ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ· οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Ν, Ξ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν οὕτως ἐδείχθη ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ceps proportionales ſunt in ratione Γ ad Ζ & Δ ad Η & Ε ad Θ. uterque autem ipſorum Ε, Θ multiplicans Μ faciat utrumque Ν, Ξ. & quoniam ſolidus eſt Α, latera autem ipſius Γ, Δ, Ε, numerus Ε eum qui fit ex Γ, Δ multiplicans fecit Α, qui vero fit ex Γ, Δ eſt Κ: ergo Ε multiplicans Κ ipſum Α fecit. eadem ratione & Θ multiplicans Λ, qui fit ex Ζ, Η, fecit ipſum Β. & quoniam Ε ipſum Κ multiplicans fecit Α, ſed & multiplicans Μ fecit Ν; erit [per 17. 7.] ut Κ ad Μ ita Α ad Ν. ut autem Κ ad Μ ita Γ ad Ζ & Δ ad Η & adhuc Ε ad Θ: ergo ut Γ ad Ζ & Δ ad Η & Ε ad Θ ita Α ad Ν. rurſus, quoniam uterque ipſorum Ε, Θ multiplicans Μ fecit utrumque Ν, Ξ, erit ut Ε ad Θ ita Ν ad Ξ. ſed ut Ε ad Θ ita Γ ad Ζ & Δ ad Η: eſt igitur ut Γ ad Ζ & Δ ad Η ita & Α ad Ν & Ν ad Ξ. rurſus, quoniam Θ multiplicans Μ fecit ipſum Ξ, ſed & multiplicans Λ fecit Β: erit ut Μ ad Λ ita Ξ ad Β. ſed ut Μ ad Λ ita Γ ad Ζ & Δ ad Η & Ε ad Θ: & igitur ut Γ ad Ζ & Δ ad Η & Ε ad Θ ita non ſolum Ξ ad Β ſed & Α ad Ν & Ν ad Ξ: ergo Α, Ν, Ξ, Β deinceps proportionales ſunt in dictis laterum rationibus.

DICO & Α ad Β triplicatam rationem habere ejus quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc eſt quam habet numerus Γ ad Ζ vel Δ ad Η vel Ε ad Θ. quoniam enim quatuor numeri proportionales ſunt Α, Ν, Ξ, Β, habebit Α ad Β triplicatam rationem ejus quam habet Α ad Ν. ſed ut Α ad Ν ita oſtenſus eſt & Γ ad Ζ & Δ ad Η & Ε ad Θ: ergo Α ad Β triplicatam habet rationem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt quam Γ habet ad Ζ & Δ ad Η & Ε ad Θ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμός, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται ἀριθμοί.

ΔΥΟ γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπιπτέτω ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, οἱ Δ, Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ. ὁσάκις δὴ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ·

PROP. XX. THEOR.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat; numeri ſimiles plani erunt.

INter duos enim numeros Α, Β unus medius proportionalis cadat Γ: dico numeros Α, Β ſimiles planos eſſe.

Sumantur enim [per 35. 7.] Α, 8. Γ, 12. Ε, 18. Δ, Ε minimi omnium eandem cum ipſis Α, Γ, rationem habentium: eſt igitur ut Δ ad Ε ita Α ad Γ. ut autem Α ad Γ ita Γ ad Β: Δ, 2. Ε, 3. Ζ, 4. Η, 6.

æqualiter igitur Δ ipſum Α metitur atque Ε ipſum Γ. & quoties Δ metitur Α, tot unitates ſint

in Z; propterea quæ Z multiplicans Δ ipſum A fecit, multiplicans vero E fecit Γ: quare A planus numerus eſt, cujus latera Δ, Z. rurſus, quoniam Δ, B ſunt minimi omnium eandem cum Γ, B rationem habentium; Δ æqualiter ipſum Γ metitur atque E ipſum B. quoties autem E ipſum B metitur, tot unitates ſint in H: ergo E ipſum B metitur per eas quæ ſunt in H unitates: quare H ipſum E multiplicans fecit B: ideoque B numerus planus eſt, cujus latera E, H: ergo numeri A, B ſunt plani. dico & ſimiles eſſe. quoniam enim uterque ipſorum Z, H multiplicans E utrumque Γ, B fecit, [per 18. 7.] ut Z ad H ita erit Γ ad B. ut autem Γ ad B ita Δ ad E: & igitur ut Δ ad E ita Z ad H: quare [per 21. def. 7.] A, B ſimiles plani ſunt; cum ipſorum latera ſint proportionalia. quod erat demonſtrandum.

A, 8.	Γ, 12,	B, 18,		
Δ, 2.	E, 3.	Z, 4.	H, 6.	

ὁ Z ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὥστε ὁ A ἐπίπεδός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Δ, Z. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ, E ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, B· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν B. ὁσάκις δὴ ὁ E τὸν B μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ H· ὁ E ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ H μονάδας· ὁ H ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ὁ B ἄρα ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ E, H· οἱ A, B ἄρα ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν Z, H τὸν E πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Z πρὸς τὸν H οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν B. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H· οἱ A, B ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί εἰσιν, αἱ γὰρ αὐτῶν πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXI. Probl.

Si inter duos numeros duo medii proportionales cadant; numeri ſimiles ſolidi erunt.

Inter duos enim numeros A, B duo medii proportionales cadant Γ, Δ: dico ipſos A, B ſimiles ſolidos eſſe.

Sumantur enim [per 35. 7.] numeri tres minimi omnium eandem cum A, Γ, Δ rationem habentium, qui ſint E, Z, H: extremi igitur ipſorum E, H [per 3. 8.] primi inter ſe ſunt. & quoniam inter E, H unus medius proportionalis Z cecidit, erunt [per 20. 8.] numeri E, H ſimiles plani. ſint ipſius quidem E latera Θ, K, ipſius vero H latera Λ, M: manifeſtum igitur eſt ex antecedente E, Z, H deinceps proportionales eſſe in ratione Θ ad Λ & in ratione K ad M. & quoniam E, Z, H minimi ſunt eandem quam A, Γ, Δ rationem habentium, erit ex æquo [per 14. 7.] ut E ad H ita A ad Δ. ſunt autem E, H primi, ſed [per 23. 7.] primi ſunt & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.]

major majorem & minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem & conſequens conſequentem:	A, 24.	Γ, 72.	Δ, 216.	B, 648.
	E, 1.	Z, 3.	H, 9.	
	Θ, 1.	K, 1.	N, 24.	Λ, 3. M, 3. Ξ, 72.

ergo E ipſum A æqualiter metitur atque H ipſum Δ. quoties autem E metitur A, tot unitates ſint in N: ergo N ipſum E multiplicans fecit A. ſed E fit ex Θ, K: ac propterea N eum qui fit ex Θ, K multiplicans ipſum A fecit: ſolidus igitur eſt A, cujus latera Θ, K, N. rurſus, quoniam E, Z, H minimi ſunt eandem quam ipſi Γ, Δ, B rationem habentium, E ipſum Γ æqualiter metitur atque H ipſum B. & quoties H metitur B tot unitates ſint in Ξ: ergo H ipſum B metitur per eas quæ ſunt in Ξ unitates; ideoque Ξ mul-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν A, B δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοί, οἱ Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ A, B ὅμοιοι στερεοί εἰσιν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ τρεῖς ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, Γ, Δ, οἱ E, Z, H· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ E, H πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ἐπεὶ τῶν E, H εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπέπτωκεν ἀριθμὸς ὁ Z· οἱ E, H ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. ἔστωσαν ἄν ὁ μὲν E πλευραὶ οἱ Θ, K, ὁ δὲ H οἱ Λ, M· φανερὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τούτου ὅτι οἱ E, Z, H ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἔντε τῷ τὸ Θ πρὸς τὸν Λ λόγῳ καὶ τῷ ὃν K πρὸς τὸν M. καὶ ἐπεὶ οἱ E, Z, H ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, Γ, Δ· δίσα ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς τὸν H οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Δ. οἱ δὲ E, H πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τοῦτέστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ E τὸν A μετρεῖ καὶ ὁ H τὸν Δ. ὁσάκις δὴ ὁ E τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ N· ὁ N ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. ὁ δὲ E ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Θ, K· ὁ N ἄρα τὸν ἐκ τῶν Θ, K πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε· στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ A, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Θ, K, N. πάλιν, ἐπεὶ οἱ E, Z, H ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, Δ, B· ἰσάκις ἄρα ὁ E τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ H τὸν B. ὁσάκις δὲ ὁ H τὸν B μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ξ· ὁ H ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα

ἄρα τὸ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ δὲ Η ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Λ,Μ· ὁ Ξ ἄρα τὸν ἀπὸ τοῦ Λ,Μ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν [*τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν] στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Β, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Λ,Μ, Ξ· οἱ Α, Β ἄρα στερεοὶ εἰσί. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ Ν, Ξ τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τὰς Α, Γ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. καί εἰσιν οἱ μὲν Θ, Κ, Ν πλευραὶ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Λ, Μ πλευραὶ τοῦ Β· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tiplicans Η ipſum Β fecit. at Η fit ex Λ, Μ: ergo Ξ eum qui fit ex Λ, Μ multiplicans fecit Β; [multiplicans vero Ε ipſum Γ fecit.] ſolidus igitur eſt Β, & ejus latera Λ, Μ, Ξ: quare Α, Β ſolidi ſunt. dico etiam eos ſimiles eſſe. quoniam enim Ν, Ξ multiplicantes Ε ipſos Α, Γ fecerunt, [per 17. 7.] ut Ν ad Ξ ita erit Α ad Γ, hoc eſt Ε ad Ζ. ſed ut Ε ad Ζ ita Θ ad Λ & Κ ad Μ: & igitur ut Θ ad Λ ita Κ ad Μ & Ν ad Ξ. ſunt autem Θ, Κ, Ν latera ipſius Α, & Λ, Μ, Ξ latera ipſius Β: ergo Α, Β ſimiles ſolidi erunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϚ'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ· καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἔσται.

Prop. XXII. Theor.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem ſit quadratus; & tertius quadratus erit.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Γ εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Β· οἱ Α, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. τετράγωνος δὲ ὁ Α· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, 4. Β, 6. Γ, 9.

SInt tres numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, ſitque primus Α quadratus: dico & tertium Γ quadratum eſſe.

Quoniam enim inter Α, Γ unus medius proportionalis cadit Β, erunt [per 20. 8.] Α, Γ ſimiles plani. ſed Α eſt quadratus: ergo & Γ quadratus erit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ· καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.

Prop. XXIII. Theor.

Si quatuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem ſit cubus; & quartus cubus erit.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α κύβος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Δ κύβος ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Δ δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ· οἱ Α, Δ ἄρα ὅμοιοί εἰσι στερεοὶ ἀριθμοί. κύβος δὲ ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27.

SInt quatuor numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, & Α ſit cubus: dico & Δ cubum eſſe.

Quoniam enim inter Α, Δ duo medii proportionales cadunt Β, Γ, erunt [per 21. 8.] Α, Δ ſimiles ſolidi. eſt autem Α cubus: ergo & Δ cubus erit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ· καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Prop. XXIV. Theor.

Si duo numeri inter ſe rationem habeant quam numerus quadratus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus; & ſecundus quadratus erit.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τε-

DUO enim numeri Α, Β inter ſe rationem habeant quam numerus quadratus

* Illa uncis inclusa desunt in *MS. Bodl.* & commode abesse possunt.

Γ ad

Γ ad quadratum numerum Δ, ſitque A quadratus: dico & B quadratum eſſe.

Quoniam enim Γ, Δ quadrati ſunt, erunt Γ, Δ ſimiles plani: ideoque [per 18. 8.] inter ipſos Γ, Δ unus medius proportionalis cadit. eſt autem ut Γ ad Δ ita A ad B: quare [per 8. 8.] etiam inter A, B cadit unus medius proportionalis. eſtque A quadratus: ergo [per 22. 8.] & B quadratus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 4. Γ, 16. B, 9. Δ, 36.

Prop. XXV. Theor.

Si duo numeri inter ſe rationem habeant quam numerus cubus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit.

DUO enim numeri A, B inter ſe rationem habeant quam cubus numerus Γ ad numerum cubum Δ, ſitque A cubus: dico & B cubum eſſe.

Quoniam enim Γ, Δ cubi ſunt, erunt Γ, Δ ſimiles ſolidi: idcirco [per 19. 8.] inter ipſos duo medii proportionales cadent. quot autem inter Γ, Δ cadunt medii proportionales, totidem [per 8. 8.] cadent & inter eos qui eandem quam ipſi rationem habent: ergo inter A, B duo medii cadent proportionales. cadant E, Z. quoniam igitur quatuor numeri A, E, Z, B deinceps proportionales ſunt, eſtque A cubus; & [per 23. 8.] B cubus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 8. E, 12. Γ, 64. Z, 18. B, 27. Δ, 216.

Prop. XXVI. Theor.

Similes plani numeri inter ſe rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

SInt ſimiles plani numeri A, B: dico A ad B rationem habere quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Quoniam enim A, B ſimiles plani ſunt, [per 18. 8.] inter eos cadit unus medius proportionalis. cadat, ſitque Γ, & ſumantur [per 35. 7.] minimi numeri eandem quam A, Γ, B rationem habentium ſc. Δ, E, Z: ergo [per coroll. 2. 8.] ipſorum extremi Δ, Z quadrati ſunt. & quoniam eſt ut Δ ad Z ita A ad B, & ſunt Δ, Z quadrati; habebit A ad B rationem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod erat demonſtrandum.

A, 6. Γ, 12. B, 24. Δ, 1. E, 2. Z, 4.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ἦ· καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ, κύβος δὲ ἔστω ὁ Α· λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Β κύβος ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ κύβοι εἰσίν, οἱ Γ, Δ ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Γ, Δ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς Γ, Δ μετοῦ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς· ὥστε καὶ τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ἐμπιπτέτωσαν οἱ Ε, Ζ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Ε, Ζ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἐστι κύβος ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐμπιπτέτω, καὶ ἔστω ὁ Γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Β, οἱ Δ, Ε, Ζ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοί εἰσι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β καί εἰσιν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοι· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος, οἱ Ε, Ζ, Η, Θ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Θ κύβοι εἰσί. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A, 16. Γ, 24. E, 8. Z, 12.

PROP. XXVII. THEOR.

Similes ſolidi numeri inter ſe rationem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

SInt ſimiles ſolidi numeri A, B: dico A ad B rationem habere quam numerus cubus ad cubum numerum.

Quoniam enim A, B ſimiles ſolidi ſunt, [per 19. 8.] inter ipſos duo medii proportionales cadent: cadant Γ, Δ; & ſumantur [per 2. 8.] minimi numeri, qui eandem quam A, Γ, Δ, B rationem habeant, ipſis multitudine æquales E, Z, H, Θ: ergo [per corol. 2. 8.] eorum extremi E, Θ cubi ſunt. atque eſt ut E ad Θ ita A ad B: habet igitur A ad B rationem quam numerus cubus ad cubum numerum. quod erat demonſtrandum.

A, 36. B, 54. H, 18. Θ, 27.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER NONUS.

PROP. I. THEOR.

Si duo ſimiles plani numeri ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

SINT duo ſimiles plani numeri A, B, & A ipſum B multiplicans faciat Γ: dico Γ quadratum eſſe.

Numerus enim A ſeipſum multiplicans faciat Δ: ergo Δ quadratus eſt. quoniam igitur A ſeipſum multiplicans
fecit Δ, multiplicans vero B — A, 6.
ipſum Γ fecit; ut A ad B — Δ, 36.
ita erit [per 17. 7.] Δ ad
Γ. & quoniam A, B ſimiles plani ſunt, [per 18. 8.] inter ipſos unus medius proportionalis cadet. ſi autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipſos cadunt [per 8. 8.] totidem cadent & inter eos qui eandem habent rationem: quare & inter Δ, Γ unus medius proportionalis cadit. atque eſt Δ quadratus: ergo & Γ quadratus erit. quod erat demonſtrandum.

PROP. II. THEOR.

Si duo numeri ſeſe multiplicantes quadratum numerum efficiant, ſimiles plani erunt.

DUO enim numeri A, B ſeſe multiplicantes quadratum numerum Γ efficiant: dico A, B ſimiles planos eſſe.

Numerus enim A ſeipſum multiplicans, faciat Δ: ergo Δ quadratus — A, 3.
eſt. quoniam igitur A ſeipſum mul- — Δ, 9.
tiplicans fecit Δ, multiplicans vero
B ipſum Γ fecit; ut A ad B [per 17. 7.] ita erit Δ ad Γ. & quoniam Δ quadratus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

ΕΣΤΩΣΑΝ δύο ὅμοιοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Ο γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐὰν δὲ δύο μεταξὺ ἀριθμῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὥστε καὶ τῶν Δ, Γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστι τετράγωνος ὁ Δ· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Β, 54.	
Γ, 324.	

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι.

ΔΥΟ γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τετράγωνον τὸν Γ ποιείτωσαν· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Ο γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ

Β, 12.	
Γ, 36.	

τετράγωνός

περάγωνός ἐστι, ἀλλὰ καὶ ὁ Γ· οἱ Δ, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Δ, Γ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ Α πλευρά, ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· φανερὸν δή ἐστιν ὅτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. ἐπεὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Α. ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α· τῶν ἄρα μονάδος καὶ τοῦ Α ἀριθμοῦ δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, οἱ Γ, Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. τοῦ δὲ μονάδος καὶ τοῦ Α δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν, ὁ μὲν πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται. καί ἐστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. III. THEOR.

Si cubus numerus ſeipſum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

CUbus enim numerus A ſeipſum multiplicans faciat B: dico B cubum eſſe.

Sumatur enim ipſius A latus Γ, & Γ ſeipſum multiplicans faciat Δ: manifeſtum igitur eſt [per 19. def. 7.] Γ multiplicantem Δ facere ipſum A. & quoniam Γ ſeipſum multiplicans fecit Δ, metitur Γ ipſum Δ per unitates quæ in ipſo ſunt, ſed & unitas metitur Γ per eas quæ in ipſo ſunt unitates: eſt igitur [per 20. def. 7.] ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ. rurſus, quoniam Γ multiplicans Δ ipſum A fecit, metitur Δ ipſum A per unitates quæ ſunt in Γ. metitur autem & unitas ipſum Γ per unitates quæ in ipſo ſunt: ergo ut unitas ad Γ ita Δ ad A. ſed ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ: ut igitur unitas ad Γ ita Γ ad Δ & Δ ad A: ideoque inter unitatem & numerum A duo medii deinceps proportionales cadunt Γ, Δ. rurſus, quoniam A ſeipſum multiplicans fecit B, & A ipſum B metitur per unitates quæ in ipſo ſunt. metitur autem & unitas ipſum A per unitates quæ ſunt in ipſo: eſt igitur [per 20. def. 7.] ut unitas ad A ita A ad B. ſed inter unitatem & A cadunt duo medii proportionales: ergo [per 8. 8.] & inter A & B duo medii proportionales cadent. quod ſi inter duos numeros cadant duo medii proportionales, primus autem ſit cubus [per 23. 8.] & quartus cubus erit. atque eſt A cubus: ergo & B cubus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 8. Δ, 4. Γ, 2. 1. B, 64.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ κύβος ἐστίν.

Ὁ Α γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστίν. καί, ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. ἐπεὶ οἱ

A, 8. Δ, 64.

PROP. IV. THEOR.

Si numerus cubus cubum numerum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

CUbus enim numerus A cubum numerum B multiplicans ipſum Γ facit: dico Γ cubum eſſe.

Numerus enim A ſeipſum multiplicans faciat Δ: ergo [per 3. 9.] Δ cubus eſt. & quoniam A ſeipſum multiplicans fecit Δ; multiplicans vero B ipſum Γ fecit: ut A ad B [per 17. 7.] ita erit Δ ad Γ. & quoniam

B, 27. Γ, 216.

A, B cubi ſunt, erunt ſimiles ſolidi numeri: ac propterea [per 19. 8.] inter A, B cadent duo medii proportionales: quare [per 8. 8.] & inter Δ, Γ duo medii proportionales cadent. eſtque Δ cubus: ergo [per 23. 8.] & Γ cubus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 8. Δ, 64.

Prop. V. Theor.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, & multiplicatus cubus erit.

CUbus enim A numerum aliquem B multiplicans faciat cubum Γ: dico B cubum eſſe.

Numerus enim A ſeipſum multiplicans faciat Δ: ergo [per 3. 9.] Δ cubus eſt. & quoniam A ſeipſum quidem multiplicans fecit Δ, multiplicans vero B ipſum Γ fecit; ut A ad B ita erit Δ ad Γ. [per 17. 7.] & quoniam Δ, Γ cubi ſunt, ſimiles ſunt ſolidi; ac propterea [per 19. 8.] inter ipſos cadunt duo medii proportionales. atque eſt ut Δ ad Γ ita A ad B: ergo [per 8. 8.] & inter A, B duo medii proportionales cadent. eſtque A cubus; ergo [per 23. 8.] & B cubus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 8. Δ, 64. B, 27. Γ, 216.

Prop. VI. Theor.

Si numerus ſeipſum multiplicans cubum faciat, & ipſe cubus erit.

NUmerus enim A ſeipſum multiplicans cubum B faciat: dico & A cubum eſſe.

Numerus enim A multiplicans B faciat Γ. quoniam igitur A ſeipſum multiplicans fecit B, multiplicans vero B ipſum Γ fecit, erit [per 19. def. 7.] Γ cubus. & quoniam A ſeipſum quidem multiplicans fecit B, multiplicans vero B fecit Γ, ut A ad B [per 17. 7.] ita erit B ad Γ. & quoniam B, Γ cubi ſunt, ſimiles ſolidi erunt: ideoque [per 19. 8.] inter B, Γ, duo medii proportionales cadunt. & eſt ut B ad Γ ita A ad B: quare [per 8. 8.] & inter A, B duo medii proportionales cadunt. atque eſt B cubus: ergo [per 23. 8.] & A cubus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 8. B, 64. Γ, 512.

Prop. VII. Theor.

Si compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat, factus ſolidus erit.

COmpoſitus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipſum Γ faciat: dico Γ ſolidum eſſe.

Quoniam enim A compoſitus eſt, [per 13. def. 7.] eum numerus aliquis metietur. metiatur Δ. &

A, B κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν A, B ἄρα B, 27. δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· Γ, 216. ὥστε καὶ τῶν Δ, Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. καὶ ἔστι κύβος ὁ Δ· κύβος ἄρα καὶ ὁ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιαθεὶς κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ὁ A ἀριθμόν τινα τὸν B πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ B κύβος ἐστίν.

Ὁ γὰρ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. ἐπεὶ οὖν Δ, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Δ, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B· καὶ τῶν A, B ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καὶ ἔστι κύβος ὁ A· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν B ποιείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ A κύβος ἐστίν.

Ὁ γὰρ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκε, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα κύβος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκε, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ B, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν B, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καὶ ἔστιν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B· καὶ τῶν A, B ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καὶ ἔστι κύβος ὁ B· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ A. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.

Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ A ἀριθμόν τινα τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ στερεός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ A συνθετός ἐστιν, ὑπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ μετρηθήσεται. μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Δ. καὶ ὁσάκις

ὁ Δ

ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ ποσάκις μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ δὲ Α ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ, Ε τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν ἐκ τῶν Δ, Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα στερεός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Δ, Ε, Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A, 6. B, 7. Γ, 42. Δ, 3. E, 2.

quoties Δ ipsum A metitur tot unitates sint in E: ergo E multiplicans Δ fecit A. & quoniam A ipsum B multiplicans fecit Γ, estque A qui fit ex Δ, E, numerus qui fit ex Δ, B ipsum B multiplicans fecit Γ: ergo [per 16. 7.] B multiplicans eum qui fit ex Δ, E ipsum Γ fecit: ac propterea [per 17. def. 7.] Γ solidus est, cujus latera Δ, E, B. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνός ἐστιν καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες.

Prop. VIII. Theor.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab unitate quadratus est, & unum intermittentes omnes; quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes; septimus vero cubus simul & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ Ζ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες ἅπαντες.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. ἡ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε· τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ Β. καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Β τετράγωνός ἐστι· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ζ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες τετράγωνοί εἰσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστί, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε· κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος· καὶ ὁ Ζ ἄρα κύβος ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Ζ κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες ἅπαντες κύβοι τέ εἰσι καὶ τετράγωνοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, E, Z: dico tertium quidem ab unitate sc. B quadratum esse, & unum intermittentes omnes; quartum autem Γ cubum, & duos intermittentes omnes; septimum vero Z cubum simul & quadratum, & quinque intermittentes omnes.

Quoniam enim ut unitas ad A ita A ad B, unitas æqualiter metitur numerum A [per 20. def. 7.] atque A ipsum B. sed unitas metitur A per unitates quæ in ipso sunt: ergo & A ipsum B per unitates quæ sunt in A metitur: quare A seipsum multiplicans fecit B; quadratus igitur est B. & quoniam B, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, estque B quadratus; [per 22. 8.] & Δ quadratus erit. eadem ratione erit & Z quadratus. similiter demonstrabimus & unum intermittentes omnes quadratos esse. Dico & quartum ab unitate, videlicet Γ, esse cubum, & duos intermittentes omnes. quoniam enim est ut unitas ad A ita B ad Γ: unitas numerum A æqualiter metitur [per 20. def. 7.] atque B ipsum Γ. sed unitas numerum A metitur per unitates quæ in A sunt: ergo & B metitur Γ per unitates quæ sunt in A; & ob id A multiplicans B ipsum Γ fecit. quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit B, multiplicans vero B fecit Γ; erit [per 19. def. 7.] Γ cubus. quod cum Γ, Δ, E, Z deinceps proportionales sint, sitque Γ cubus, [per 23. 8.] & Z cubus erit. ostensum autem est quadratum esse: septimus igitur ab unitate Z & cubus est & quadratus. similiter quoque demonstrabimus quinque intermittentes omnes & cubos & quadratos esse. quod erat demonstrandum.

A, 81. E, 243. Z, 729.

Prop. IX. Theor.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt unitatem ſit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt. ſi poſt unitatem ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SInt ab unitate numeri quotcunque deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, E, Z, & qui poſt unitatem A ſit quadratus: dico & reliquos omnes quadratos eſſe.

Tertium quidem ab unitate B eſſe quadratum, & unum intermittentes omnes demonſtratum jam eſt [in præc.]: dico & reliquos omnes quadratos eſſe. quoniam enim A, B, Γ deinceps ſunt proportionales eſtque A quadratus; [per 22. 8.] & Γ quadratus erit. rurſus, quoniam B, Γ, Δ, deinceps proportionales ſunt; eſt autem B quadratus: & Δ quadratus erit. ſimiliter oſtendemus & reliquos omnes quadratos eſſe.

1. A, 4. B, 16. Γ, 64. Δ, 256. E, 1024. Z, 4096.

Sit autem A cubus: dico & reliquos cubos eſſe.

Quartum quidem ab unitate Γ eſſe cubum, & duos intermittentes omnes, jam demonſtratum eſt [in præc.]: dico & reliquos omnes cubos eſſe.

quoniam enim eſt ut unitas ad A ita A ad B [per 20. def. 7.] unitas numerum A æqualiter metitur atque A ipſum B. ſed unitas metitur numerum A per unitates quæ ſunt in ipſo: quare & A numerum B metitur per unitates quæ in ipſo ſunt: ergo A ſeipſum multiplicans fecit B, atque eſt A cubus. ſi autem cubus numerus ſeipſum multiplicans fecerit aliquem, [per 3. 9.] factus cubus erit; ergo B eſt cubus. & quoniam quatuor numeri A, B, Γ, Δ deinceps proportionales ſunt, eſtque A cubus; [per 23. 8.] & Δ cubus erit. eadem ratione & E eſt cubus, & ſimiliter reliqui omnes cubi ſunt. quod erat demonſtrandum.

1. A, 8. B, 64. Γ, 512. Δ, 4096. E, 32768. Z, 262144.

Prop. X. Theor.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt unitatem non ſit quadratus; neque alius ullus quadratus erit præter tertium ab unitate & unum intermittentes omnes. ſi qui poſt unitatem non ſit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate & duos intermittentes omnes.

SInt ab unitate deinceps proportionales numeri A, B, Γ, Δ, E, Z, & qui poſt unitatem ipſe A non ſit quadratus: dico neque alium ullum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὁποσοιοῦν ἀριθμοί, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα παραλειπόμενοι πάντες, δέδεικται· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Γ ἄρα τετράγωνός ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Β τετράγωνος· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι εἰσιν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ Α κύβος· λέγω ὅτι οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ πέμπτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο παραλειπόμενοι πάντες, δέδεικται· λέγω δὴ ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος. ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἐστί· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε κύβος ἐστί, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος· οὐδεὶς ἄλλος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἑνὸς παραλειπόντων πάντων. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ· οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο παραλειπόντων πάντων.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος

πετράγωνος ἔσῃ, τελεῖ δὲ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑνὸς ἀμφοτέρους.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Γ πετράγωνος. ἔστι δὲ καὶ ὁ Β πετράγωνος· οἱ Β, Γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν πετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς πετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Β ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν πετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς πετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. καὶ ἔστι πετράγωνος ὁ Β· πετράγωνος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α, ὅπερ ἐκ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Γ πετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς, χωρὶς δὲ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑνὸς ἀμφοτέρους.

Α Α Α δὴ μὴ ἔστω ὁ Α κύβος. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο ἀμφοτέρων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Δ κύβος. ἔστι δὴ καὶ ὁ Γ κύβος, τέταρτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ λόγον ἔχει ὃν κύβος πρὸς κύβον· οἱ Β, Γ ἄρα ὅμοιοι στερεοί. καὶ ἔστιν ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β πεποίηκεν. ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται· κύβος ἄρα καὶ ὁ Α, ὅπερ ἐκ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Δ κύβος ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ, χωρὶς δὲ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο ἀμφοτέρων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quadratum esse, præter tertium ab unitate & unum intermittentes omnes.

Si enim fieri potest, sit Γ quadratus. est autem [per 8. 9.] & Β quadratus: ergo Β, Γ inter se rationem habent quam numerus quadratus ad quadratum numerum. atque est ut Β ad Γ ita Α ad Β: habent igitur Α, Β inter se rationem eam quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ideoque [per 21. def. 1.] Α, Β similes plani sunt. & est Β quadratus: ergo & Α quadratus est, * quod non supponitur; non igitur Γ quadratus erit. similiter ostendemus neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate & unum intermittentes omnes.

1. Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16. Ε, 32. Ζ, 64.

Sed non sit Α cubus. dico neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

Si enim fieri potest sit Δ cubus. est autem [per 8. 9.] & cubus Γ, quartus enim est ab unitate; & ut Γ ad Δ ita est Β ad Γ: ergo & Β ad Γ rationem habet quam cubus ad cubum; ac propterea [per 21. def. 7.] Β, Γ similes solidi sunt. atque est Γ cubus; ergo & Β cubus erit. & quoniam est ut unitas ad numerum Α ita Α ad Β, unitas autem numerum Α metitur per unitates quæ sunt in ipso; & Α metietur Β [per 20. def. 7.] per unitates quæ in ipso sunt: quare Α seipsum multiplicans cubum Β fecit. si autem numerus seipsum multiplicans cubum faciat, [per 6. 9.] & ipse cubus erit: cubus igitur est Α, quod non supponitur: ergo neque Δ est cubus. similiter demonstrabimus neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate & duos intermittentes omnes. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Prop. XI. Theor.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, minor majorem metitur per aliquem eorum qui sunt in numeris proportionalibus.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Β, Γ, Δ, Ε· λέγω ὅτι τὸν Β, Γ, Δ, Ε ὁ Β τὸν Ε μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν Γ, Δ.

Sint ab unitate Α quotcunque numeri deinceps proportionales Β, Γ, Δ, Ε: dico horum Β, Γ, Δ, Ε minorem numerum Β majorem Ε metiri per aliquem ipsorum Γ, Δ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Ε. ἡ δὲ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὥστε ὁ ἐλάσσων ὁ Β τὸν μείζονα τὸν Ε μετρεῖ κατά τινα ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. Α, 3. Β, 9. Γ, 27. Δ, 81. Ε.

Quoniam enim est ut Α unitas ad Β ita Δ ad Ε; Α unitas numerum Β æqualiter metitur [per 20. def. 7.] atque Δ ipsum Ε: quare permutando [per 15. 7.] Α unitas numerum Δ æqualiter metitur atque Β ipsum Ε. sed Α unitas metitur Δ per eas quæ sunt in ipso Δ unitates: ergo & Β metitur Ε per unitates quæ sunt in Δ: minor igitur Β majorem Ε metitur per aliquem eorum qui sunt in numeris proportionalibus. quod erat demonstrandum.

* i. e. *Quod est contra Hypothesim.* Atque hoc sæpius in decursu.

Prop.

PROP. XII. THEOR.

Si ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint: quicunque primorum numerorum metiuntur ultimum, iidem & eum qui unitati proximus eſt metientur.

SInt ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ: dico quicunque primorum numerorum metiuntur Δ, eoſdem & ipſum A metiri.

Metiatur enim aliquis primus numerus E ipſum Δ: dico E ipſum quoque A metiri. non enim metiatur E ipſum A, atque E eſt primus; omnis autem primus numerus [per 31. 7.] ad omnem numerum quem non metitur primus eſt: ergo E, A numeri inter ſe primi ſunt. & cum E metitur ipſum Δ, metiatur per unitates quæ ſunt in Z: ergo E multiplicans Z ipſum Δ fecit. rurſus, quoniam [per 11. 9.] A metitur ipſum Δ per eas quæ ſunt in Γ unitates, A multiplicans Γ ipſum Δ fecit. ſed & E multiplicans Z fecit Δ: qui igitur fit ex A, Γ ei qui fit ex E, Z eſt æqualis: ergo [per 19. 7.] ut A ad E ita Z ad Γ. ſuntque A, E primi, primi autem [per 23. 7.] & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: metitur igitur E ipſum Γ. metiatur per H: ergo E ipſum H multiplicans fecit Γ. ſed & A multiplicans B ipſum Γ fecit: qui igitur fit ex A, B æqualis eſt ei qui ex E, H: ergo ut A ad E ita H ad B. & ſunt A, E primi, ſed primi etiam & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: quare & E ipſum B metitur. metiatur per Θ: multiplicans igitur E ipſum Θ fecit B. ſed & A ſeipſum multiplicans fecit B; ergo qui fit ex Θ, E eſt æqualis ei qui fit ab ipſo A: eſt igitur [per 20. 7.] ut E ad A ita A ad Θ. ſuntque A, E primi, ſed primi etiam & minimi, minimi vero æqualiter metiuntur eos qui eandem quam ipſi rationem habent, [per 21. 7.] major majorem & minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: ergo E metitur ipſum A. ſed & non metitur, quod fieri non poteſt: non igitur A, E ſunt inter ſe primi: ergo compoſiti erunt. compoſitos vero [per 14. def. 7.] primus aliquis numerus metitur: quare ipſos A, E metietur aliquis numerus primus. & quoniam E primus ponitur, primum autem non metitur alius numerus [per 11. def. 7.] præter ſeipſum: metitur igitur E ipſos A, E: ideoque E ipſum A metitur. metitur autem & ipſum Δ: ergo E ipſos A, Δ metietur. ſimiliter demonſtrabimus quicunque primorum numerorum E ipſos A, B metitur.

I. A, 4. B, 16. Γ, 64. Δ, 256. E, 2. Θ, 8. H, 32. Z, 128.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν· ὑφ' ὅσων ἂν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρῇ, καὶ τὸν πρὸ αὐτοῦ μετρήσει.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι ὑφ' ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, καὶ τὸν Γ αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρήσει.

Μετρείσθω γὰρ ὁ Δ καί τινες πρῶτοι ἀριθμοί, οἱ Ε· λέγω ὅτι ὁ Ε καὶ τὸν Α μετρεῖ. μὴ γάρ· μετρείτω ὁ Ε τὸν Α, καὶ ἔστω ὁ Ε πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν ὃν μὴ μετρεῖ πρῶτος ἐστίν· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Γ. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η· ὁ Ε ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Β. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸ Θ· ὁ Ε ἄρα τὸ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Ε τὸν Α. * ἀλλὰ μὴν καὶ μετρεῖ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Ε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί· συνθετοὶ ἄρα. οἱ δὲ συνθετοὶ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται· οἱ Α, Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρῶτος ἐστίν, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται, ἢ ὑφ' ἑαυτόν· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Ε μετρεῖ· ὥστε καὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὑφ' ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων

* In quibuſdam codicibus quæ ſequuntur rectius abſunt, ſcribiturque ἐπεὶ ἄρα ὁ μετρῶν ὁ Ε τὸν Α· μετρεῖ ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τῶν

των ἀριθμῶν μετρεῖται, καὶ τὸν τ αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιῶν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾖ· ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἐστωσαν ὁποσοιῶν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἔστω· λέγω ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τ Α, Β, Γ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπό τινος Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τ Α, Β, Γ ἔστω ὁ αὐτός· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ Ε πρῶτος οὐκ ἔστιν. εἰ γὰρ ὁ Ε πρῶτός ἐστι καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Ε πρῶτός ἐστι· σύνθετος ἄρα· ἅπας δὴ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπό πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δὴ ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται πρώτου, πλὴν ὧν Α. εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ Ε, ὁ δὲ Ε τὸν Δ μετρεῖ· καὶεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τ Ε μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸ Ζ. λέγω ὅτι ὁ Ζ οὐδενὶ τ Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός.

εἰ γὰρ ὁ Ζ ἑνί τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός, καὶ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε· καὶ εἷς ἄρα τ Α, Β, Γ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε. ἀλλὰ εἷς τ Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατά τινα τ Α, Β, Γ· καὶ ὁ Ε ἄρα ἑνί τ Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός, ὅπερ οὐκ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Ζ ἑνί τ Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι μετρεῖται ὁ Ζ ὑπό τινος Α, δεικνύντες πάλιν ὅτι οὐκ ἔστιν ὁ Ζ πρῶτος. εἰ γὰρ ἐστὶ πρῶτος καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ Ζ· σύνθετος ἄρα· ὑπό πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δὴ ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου ἢ μετρηθήσεται πλὴν Α. εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ δὲ Ζ τὸν Δ μετρεῖ· καὶεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τ Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τ Ε, Ζ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. ὁ δὲ Α τὸν Ε μετρεῖ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τ Α, Β ἐστὶν ὁ αὐτός, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπό τινος Α. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Η· ὁ Ζ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν

I.	A, 5.	B, 25.	
	E ——	Θ ——	
Γ, 125.	Δ, 625.		
H ——	Z ——		

merorum metiuntur ipſum Δ, eoſdem & ipſum A metiri. quod erat demonſtrandum.

PROP. XIII. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt unitatem primus ſit; maximum nullus alius metietur, præter eos qui ſunt in numeris proportionalibus.

SInt quotcunque numeri ab unitate deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, & qui poſt unitatem videlicet A ſit primus: dico maximum Δ nullum alium metiri, præter ipſos A, B, Γ.

Si enim fieri poteſt, metiatur E ipſum Δ, & non ſit E idem qui aliquis ipſorum A, B, Γ: manifeſtum eſt E primum non eſſe. ſi enim primus ſit, & metiatur Δ; [per 12. 9.] ipſum quoque A metietur primum exiſtentem, cum non ſit idem qui A, quod fieri non poteſt: non igitur E primus eſt; ergo compoſitus: omnem autem compoſitum numerum [per 33. 7.] primus aliquis numerus metitur. dico nullum alium primum metiri ipſum E, præterquam A. ſi enim alius metitur E, & E metitur Δ, & alius ille ipſum Δ metietur: quare [per 12. 9.] & ipſum A primum exiſtentem, cum non ſit idem qui A, quod fieri non poteſt: ergo A ipſum E metitur. & quoniam E metitur Δ, metiatur ipſum per Z. dico non eſſe Z eundem cum aliquo ipſorum A, B, Γ. ſi enim eſt idem, metiturque ipſum Δ per E; & unus ipſorum A, B, Γ ipſum Δ per E metietur. ſed [per 11. 9.] quilibet ipſorum A, B, Γ metitur Δ per aliquem ipſorum A, B, Γ: quare & E idem erit qui unus ipſorum A, B, Γ, quod non ſupponitur: non igitur eſt Z idem qui unus ipſorum A, B, Γ. ſimiliter oſtendemus A metiri ipſum Z, rurſus oſtendentes non eſſe Z primum numerum. ſi enim eſt primus, & metitur ipſum Δ, [per 12. 9.] ipſum quoque A metietur primum exiſtentem, cum non ſit idem qui A, quod fieri non poteſt: non igitur Z primus eſt: ergo compoſitus, & [per 33. 7.] eum aliquis primus metietur. dico nullum alium metiri ipſum Z præterquam A. ſi enim alius metitur Z, & Z metitur Δ; & alius ille ipſum Δ metietur: quare [per 12. 9.] & ipſum A primum exiſtentem, cum non ſit idem qui A, quod fieri non poteſt: ergo A ipſum Z metitur. & quoniam E metitur Δ per Z; & E multiplicans Z ipſum Δ fecit. ſed [ex hyp.] & A multiplicans Γ fecit Δ: qui igitur fit ex A, Γ eſt æqualis ei qui ex E, Z: ergo [per 19. 7.] ut A ad E ita eſt Z ad Γ. ſed A metitur E: quare [per 20. def. 7.] & Z ipſum Γ metitur. metiatur per H. ſimiliter demonſtrabimus H non eſſe eundem qui unus ipſorum A, B, & A ipſum H metiri. & quoniam Z ipſum Γ metitur per H, multiplicans Z ipſum H fecit Γ. ſed & A multiplicans B ipſum Γ fecit: ergo

qui fit ex A, B ei qui ex Z, H eſt æqualis: ut igitur A ad Z ita eſt H ad B. metitur autem A ipſum Z: ergo & H ipſum B metietur. metiatur per Θ. ſimiliter demonſtrabimus Θ non eſſe eundem qui A. &

quoniam H ipſum B per	I. A, 5.	B, 25.
Θ metitur, H multipli-	E ——	Θ ——
cans Θ ipſum B fecit,		

ſed & A ſeipſum multiplicans [ex hyp.] fecit B: qui igitur fit ex Θ, H eſt æqualis quadrato qui ex A: ergo [per 20. 7.] ut Θ ad A ita A ad H. metitur autem A ipſum H; quare & Θ ipſum A metietur, primum exiſtentem, cum non ſit idem qui A; quod eſt abſurdum: non igitur aliquis alius metietur ipſum Δ maximum, præter ipſos A, B, Γ. quod erat demonſtrandum.

Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Ζ, Η· ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ζ ἕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Η τὸν Β. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ Θ τῷ Α ἀπὸ ἐστιν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Θ· ὁ Η ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ Θ, Η ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α τετραγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α ἕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑφ' ἑτέρου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIV. Theor.

Si minimum numerum primi numeri metiantur: nullus alius numerus metietur ipſum, præter eos qui à principio metiebantur.

Minimum enim numerum A primi numeri B, Γ, Δ metiantur: dico nullum alium primum numerum metiri ipſum A, præter ipſos B, Γ, Δ.

Si enim fieri poteſt, metiatur E ipſum A; & non ſit E idem qui aliquis ipſorum B, Γ, Δ. & quoniam E metitur A, ipſum per Z metiatur: ergo E multiplicans Z ipſum A fecit. & metiuntur A primi numeri B, Γ, Δ.

		A, 30.	
ſi autem duo numeri ſeſe mul-			
tiplicantes aliquem faciant, & fa-	B, 2.	Γ, 3.	Δ, 5.
ctum ex ipſis metiatur aliquis pri-	E ——		
mus numerus, [per 32. 7.] &	Z ——		

unum eorum qui à principio poſiti ſunt metietur: ergo numeri B, Γ, Δ metientur unum ipſorum E, Z. ipſum quidem E non metientur, etenim [ex hyp.] E primus eſt; & non idem qui aliquis ipſorum B, Γ, Δ: ergo metientur ipſum Z qui eſt minor quam A, quod fieri non poteſt; ponitur enim A minimus eorum quos B, Γ, Δ metiantur: non igitur ipſum A metietur aliquis primus numerus, præter ipſos B, Γ, Δ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται· ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ἐλάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ μετρείσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Β, Γ, Δ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ἔστω ὁ αὐτός. ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. καὶ μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν γινόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρώτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει· οἱ Β, Γ, Δ ἄρα ἕνα τῶν Ε, Ζ μετρήσουσι. τὸν μὲν οὖν Ε οὐ μετρήσουσιν, ὁ γὰρ Ε πρῶτός ἐστι, καὶ οὐδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός· τὸν Ζ ἄρα μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Α, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὁ γὰρ Α ὑποκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ μετρούμενος· οὐκ ἄρα τὸν Α μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς, πάρεξ τῶν Β, Γ, Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XV. Theor.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; duo quilibet compoſiti ad reliquum primi erunt.

Sint A, B, Γ tres numeri deinceps proportionales, minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium: dico duos quoſlibet compoſitos ad reliquum primos eſſe, videlicet A, B ad Γ, & B, Γ ad A, & A, Γ ad B.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ· λέγω ὅτι δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν Α, Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β, Γ πρὸς τὸν Α, καὶ ἔτι οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β.

Εἰλήφθω-

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ δύο οἱ ΔΕ, ΕΖ. φανερὸν δὲ ὅτι ὁ μὲν ΔΕ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, καὶ ἔτι ὁ ΕΖ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ ἐλάχιστοί εἰσι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστιν· καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστι· οἱ ΔΖ, ΔΕ ἄρα πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν ΕΖ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Ζ Δ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ· πρῶτός ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ καὶ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΕ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ ΔΕ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστι. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Β ἄρα συνπεθέντες πρὸς τὸν Γ πρῶτοί εἰσιν· ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ Β, Γ πρὸς τὸν Α πρῶτοί εἰσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστι· ὥστε καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. διλόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν· ἔτι διλόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Γ ἄρα συνπεθέντες πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sumantur enim duo minimi numeri eandem cum ipſis A, B, Γ rationem habentes, ΔΕ, ΕΖ. manifeſtum eſt [per 2. 8.] ΔΕ ſeipſum quidem multiplicantem facere A; multiplicantem vero ΕΖ facere B, & ΕΖ ſeipſum multiplicantem facere Γ. & quoniam ΔΕ, ΕΖ minimi ſunt, [per 24. 7.] primi erunt inter ſe. ſi autem duo numeri primi inter ſe fuerint, [per 30. 7.] & uterque ſimul ad utrumque primus erit: ergo ΔΖ ad utrumque ipſorum ΔΕ, ΕΖ primus eſt. ſed & ΔΕ ad ΕΖ eſt primus: quare ΔΖ, ΔΕ ad ΕΖ primi ſunt: ac propterea [per 26. 7.] qui fit ex ΖΔ, ΔΕ primus eſt ad ΕΖ. ſi autem duo numeri primi inter ſe fuerint [per 27. 7.] qui fit ex uno ipſorum ad reliquum primus erit: ergo qui fit ex ΖΔ, ΔΕ ad eum qui fit ex ΕΖ eſt primus. ſed * qui ex ΖΔ, ΔΕ eſt is qui fit ex ΔΕ una cum eo qui ex ΔΕ, ΕΖ: qui igitur ex ΔΕ una cum eo qui ex ΔΕ, ΕΖ primus eſt ad eum qui ex ΕΖ. ſed qui fit ex ΔΕ eſt A; qui vero ex ΔΕ, ΕΖ eſt B, & qui ex ΕΖ eſt Γ: ergo A, B compoſiti ad ipſum Γ primi ſunt: ſimiliter oſtendemus & B, Γ ad A eſſe primos. Dico & A, Γ ad B primos eſſe. quoniam enim [per 30. 7.] ΔΖ ad utrumque ipſorum ΔΕ, ΕΖ eſt primus; & [per 26. & 27. 7.] qui fit ex ΔΖ ad eum qui ex ΔΕ, ΕΖ primus erit. ſed [per 4. 2.] ei qui fit ex ΔΖ æquales ſunt qui ex ΔΕ & ΕΖ fiunt una cum eo qui bis fit ex ΔΕ, ΕΖ: qui igitur ex ΔΕ & ΕΖ fiunt una cum eo qui bis ex ΔΕ, ΕΖ primi ſunt ad eum qui ex ΔΕ, ΕΖ: ergo & dividendo qui fiunt ex ΔΕ & ΕΖ una cum eo qui ſemel fit ex ΔΕ, ΕΖ primi ſunt ad eum qui ex ΔΕ, ΕΖ; & rurſus dividendo, qui fiunt ex ΔΕ & ΕΖ ad eum qui fit ex ΔΕ, ΕΖ primi ſunt. ſed qui fit ex ΔΕ eſt A; qui vero ex ΔΕ, ΕΖ eſt B; & qui ex ΕΖ eſt Γ: ergo A, Γ compoſiti ad ipſum B primi erunt. quod erat demonſtrandum.

Α, 9. Β, 12. Γ, 16.
Δ . . . Ε . . . . Ζ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Prop. XVI. Theor.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; non erit ut primus ad ſecundum ita ſecundus ad alium ullum.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς ἄλλον τινά.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὁ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β, ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἄτοπόν ἐστιν· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, 5. Β, 8. Γ ——

Duo enim numeri Α, Β primi inter ſe ſint: dico non eſſe ut Α ad Β ita Β ad alium ullum.

Si enim fieri poteſt, ſit ut Α ad Β ita Β ad Γ. & ſunt Α, Β primi, primi vero ſunt [per 23. 7.] & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem; metitur igitur Α ipſum Β, ut antecedens antecedentem. ſed & ipſe ſeipſum metitur: ergo Α metitur ipſos Α, Β primos inter ſe exiſtentes, quod eſt abſurdum: non igitur eſt ut Α ad Β ita Β ad Γ. quod erat demonſtrandum.

* Hoc ab *Euclide* demonſtratur in lineis ad *prop. 3. lib. 2.* ſed in numeris à *Barlaam Monacho Theor. 3.* Nos, in ſimilibus caſibus, ſolas *Euclidis* correſpondentes propoſitiones *libri 2.* poſthac citabimus.

PROP. XVII. THEOR.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; non erit ut primus ad ſecundum ita ultimus ad alium ullum.

SInt quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, extremi autem ipſorum A, Δ primi ſint inter ſe: dico non eſſe ut A ad B ita Δ ad alium ullum.

Si enim fieri poteſt, ſit ut A ad B ita Δ ad E: quare permutando ut A ad Δ ita erit [per 13. 7.] B ad E. & etiam [ex hyp.] ſunt A, Δ primi, [per 23. 7.] primi etiam & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: metitur igitur A ipſum B. atque eſt ut A ad B ita B ad Γ: ergo & B metitur ipſum Γ, & ob id A quoque ipſum Γ metitur. & quoniam eſt ut B ad Γ ita Γ ad Δ, metitur autem B ipſum Γ; & Γ ipſum Δ metitur. ſed A metitur Γ; quare & A metitur ipſum Δ. metitur autem & ſeipſum: ergo A ipſos A, Δ primos inter ſe exiſtentes metitur; quod fieri non poteſt: non igitur erit ut A ad B ita Δ ad alium ullum. quod erat demonſtrandum.

A, 8. B, 12. Γ, 18. Δ, 27. E ——

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά.

Ἔστωσαν ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ A, B, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ A, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E· συναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ B πρὸς τὸν E. οἱ δὲ A, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἴσακις, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ A τὸν B. ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ B ἄρα τὸν Γ μετρεῖ, ὥστε καὶ ὁ A τὸν Γ μετρεῖ. ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ δὲ ὁ B τὸν Γ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. ἀλλ' ὁ A τὸν Γ μετρεῖ· ὥστε καὶ ὁ A τὸν Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ A ἄρα τοὺς A, Δ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A, 8. B, 12. Γ, 18. Δ, 27. E ——

PROP. XVIII. THEOR.

Duobus numeris datis conſiderare, an tertius ipſis proportionalis inveniri poſſit.

SInt dati duo numeri A, B, & oporteat conſiderare, an poſſit tertius ipſis proportionalis inveniri.

Itaque A, B vel primi inter ſe ſunt, vel non primi. ſi quidem primi, jam oſtenſum eſt [ad 16. 9.] fieri non poſſe, ut tertius ipſis proportionalis inveniatur.

A, 4. B, 7.

Sed non ſint A, B inter ſe primi, & B ſeipſum multiplicans faciat Γ. vel igitur A metitur Γ, vel non metitur. metiatur primum per Δ: ergo A multiplicans Δ ipſum Γ fecit. ſed & B ſeipſum multiplicans fecit Γ: qui igitur fit ex A, Δ eſt æqualis ei qui ex B: ergo [per 20. 7.] ut A ad B ita B ad Δ; ac propterea ipſis A, B tertius proportionalis Δ inventus eſt.

A, 4. B, 6. Δ, 9. Γ, 36.

Sed non metiatur A ipſum Γ: dico fieri non poſſe, ut ipſis A, B tertius proportionalis inveniatur. ſi enim fieri poteſt, inventus ſit Δ: ergo [per 20. 7.] qui fit ex A, Δ æqualis eſt ei qui fit ex B, ſed qui fit ex B eſt Γ; qui igitur fit ex A, Δ ipſi Γ eſt æqualis: ergo A ipſum Δ multiplicans fecit

A, 6. B, 4. Δ —— Γ, 16.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς, τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Οἱ δὴ A, B ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. ὁ A δὴ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν Δ· ὁ A ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἐποίησεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἐποίησεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ B· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Δ· τοῖς A, B ἄρα τρίτος ἀριθμὸς προσεύρηται, ὁ Δ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ A τὸν Γ· λέγω ὅτι τοῖς A, B ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Δ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ B ἐστὶν ὁ Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ Γ· ὥστε ὁ A τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἐποίησεν· ὁ A

ὁ Δ ἄρα τ̃ Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Δ. ἀλλὰ μὴν οὐ μετρεῖ αὐτὴν καὶ μὴ μετρῶν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τῶν Α, Β τρίτον ἀνάλογον εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅταν ὁ Α τ̃ Γ μὴ μετρῇ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ὑπισχνεῖσθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, δεῖ δὴ ὑπισχνεῖσθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν.

Οἱ δὴ Α, Β, Γ ἤτοι ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ οὔ [*ἀνάλογον μὲν ἐξῆς εἰσιν, οἱ ἄκροι δὲ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἢ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς, οὐ πρῶτοι δὲ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἢ οὔτε ἀνάλογον ἐξῆς, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.]

Εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, δέδεικται ὅτι ἀδυνάτου ἐστὶν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. Α, 4. Β, 6. Γ, 9.

[Εἰδ' οὐκ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς εἰσι, ἄκροι δὲ οἱ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἐστιν ἀδύνατον. εἰ γὰρ μή, προσευρήσθω, καὶ ἔστω ὁ Δ· ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τ̃ Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τ̃ Δ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τ̃ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τ̃ Ε· ἐξ ἴσου ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τ̃ Ε. ἀλλὰ μὴν οἱ Α, Γ πρῶτοί εἰσι, πρῶτοι δὲ καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Γ μετρῶν πρώτους πρὸς ἀλλήλους ὄντας, ὅπερ ἀδύνατον· τοῖς Α, Β, Γ ἄρα τέταρτον ἀνάλογον οὐκ ἐνδέχεται εὑρεῖν ἀδύνατον.] Α, 4. Β, 6. Γ, 9. Δ, 13½.

Πάλιν, οἱ Α, Β, Γ ἀνάλογον ἐξῆς ἔστωσαν μὴ, οἱ δὲ Α, Γ ἄκροι μὴ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν δυνατόν ἐστιν. ὁ Β γὰρ τὸν Γ πολλαπλασιάσας τ̃ Δ ποιείτω· ὁ δὴ Α τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν Ε· ὁ Α ἄρα τ̃ Ε πολλαπλασιάσας τ̃ Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τ̃ Γ πολλαπλασιάσας τ̃ Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τ̃ Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τ̃ Β, Γ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τ̃ Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τ̃ Ε· τ̃ Α, Β, Γ ἄρα τέταρτος προσεύρηται ἀνάλογον ὁ Ε. Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Ε, 27. Δ, 216.

Γ, & ob id A ipſum Γ per Δ metitur. ſed & non metiri poſitum eſt, quod eſt abſurdum: non igitur fieri poteſt, ut ipſis A, B tertius inveniatur proportionalis, quando A ipſum Γ non metitur. quod erat demonſtrandum.

PROP. XIX. PROBL.

Tribus numeris datis conſiderare, an quartus ipſis proportionalis inveniri poſſit.

SInt dati tres numeri A, B, Γ, & oporteat conſiderare, an poſſit quartus ipſis proportionalis inveniri.

Itaque A, B, Γ vel deinceps ſunt proportionales, & eorum extremi primi inter ſe ſunt; vel non [*deinceps proportionales, & eorum extremi ſunt primi inter ſe; vel proportionales quidem deinceps, non autem extremi ipſorum inter ſe primi; vel neque proportionales deinceps, neque eorum extremi inter ſe ſunt.]

Si quidem igitur A, B, Γ deinceps ſunt proportionales, & eorum extremi A, Γ primi inter ſe; jam demonſtratum eſt [ad 17. 9.] fieri non poſſe ut quartus ipſis proportionalis inveniatur. A, 4. B, 6. Γ, 9.

[Si vero non ſunt deinceps proportionales, & extremi ipſorum ſunt primi: dico quartum proportionalem inveniri non poſſe. ſi enim inveniri poteſt, ſit Δ: ut igitur A ad B ita Γ ad Δ, & ut B ad Γ ita ſit Δ ad Ε: ergo ex æquo [per 14. 7.] ut A ad Γ ita Γ ad Ε. ſed ſunt A, Γ primi, primi autem [per 23. 7.] & minimi, minimi vero eos qui eandem rationem habent æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: ergo A ipſum Γ metitur, antecedens antecedentem. metitur autem & ſeipſum: quare A ipſos A, Γ primos inter ſe exiſtentes metitur; quod fieri non poteſt: ipſis igitur A, B, Γ non poteſt quartus proportionalis inveniri.] A, 4. B, 6. Γ, 5. Δ —— Ε ——

Rurſus A, B, Γ proportionales quidem ſint deinceps, non autem extremi eorum primi: dico quartum proportionalem inveniri poſſe. multiplicans enim B ipſum Γ faciat Δ: itaque vel A metitur ipſum Δ vel non metitur. metiatur primum per Ε: ergo A multiplicans Ε fecit Δ. ſed & B multiplicans Γ ipſum Δ fecit: qui igitur fit ex A, Ε eſt æqualis ei qui ex B, Γ: proptereaque [per 19. 7.] ut A ad B ita eſt Γ ad Ε: ipſis igitur A, B, Γ quartus proportionalis Ε inventus eſt. A, 8. B, 12. Γ, 18. Ε, 27. Δ, 216.

* Corruptiſſima eſt hæc propoſitio. Nos ex auctoritate Codicum MSS. ita corrigendam cenſemus, ut quæ uncis ſunt incluſa pro deletis habeantur. In univerſum datis tribus numeris quartus proportionalis inveniri poteſt, quando primus metitur eum qui fit cum ſecundus multiplicat tertium; alioquin ἀδυνάτου: & quartus eſt numerus per quem primus metitur numerum ita creatum. Ideoque Propoſitionis diviſio in quatuor caſus non eſt neceſſaria, certe *Euclidis* concinnitati minime reſpondet: immo caſus ſecundus paralogiſmus merus eſt, cum quod falſum probat, tum quod ἀλογίστως: Patet enim tribus numeris 4, 8, 9 poſſe quartum proportionalem inveniri nempe 18, licet non ſunt deinceps proportionales, & eorum extremi ſunt inter ſe primi.

Sed non metiatur A ipſum Δ: dico fieri non poſſe, ut ipſis A, B, Γ inveniatur quartus proportionalis. ſi enim inveniri poteſt, inveniatur, ſitque E: ergo [per 19. 7.] qui fit ex A, E eſt æqualis ei qui ex B, Γ. ſed qui fit ex B, Γ eſt Δ; quare qui fit ex A, E ipſi Δ eſt æqualis, & ob id A ipſum E multiplicans fecit Δ: metitur igitur A ipſum Δ per E; quare A ipſum Δ metitur. ſed & non metitur; quod eſt abſurdum: non igitur fieri poteſt, ut ipſis A, B, Γ inveniatur quartus proportionalis, quando A ipſum Δ non metitur.

A, 20. B, 30. Γ, 45. E —— Δ, 1350.

[Sed non ſint A, B, Γ neque deinceps proportionales, neque A, Γ inter ſe primi, & B ipſum Γ multiplicans faciat Δ, ſimiliter demonſtrabimus ſi A ipſum Δ metiatur, inveniri poſſe quartum proportionalem: ſin minus, inveniri non poſſe.] quod erat demonſtrandum.

A, 3. B, 4. Γ, 9. E, 12. Δ, 36.

A, 4. B, 5. Γ, 14. E —— Δ, 70.

Αλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Δ· λέγω ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατόν, εὑρήσθω ὁ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τ̃ Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τ̃ Β, Γ. ἀλλ' ὁ ἐκ τ̃ Β, Γ ἐστὶν ὁ Δ· καὶ ὁ ἐκ τ̃ Α, Ε ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τοὺς Ε· ὥστε μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ. ἀλλὰ μὴ μετρεῖ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὅταν ὁ Α τὸν Δ μὴ μετρῇ.

[Αλλὰ μὴν ἀλλ' ἀνάλογον ἐχέτω οἱ Α, Β, Γ, ὅτι πρῶτοι οἱ Α, Γ ἄκροι ἔστωσαν, καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, ὁμοίως δείξομεν ἐὰν ὁ Α τὸν Δ μετρῇ ὅτι τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν δυνατόν ἐστιν· ἐὰν δὲ μὴ μετρῇ, ὅτι ἀδύνατον.] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XX. Theor.

Primi numeri plures ſunt omni propoſita multitudine primorum numerorum.

SInt propoſiti primi numeri A, B, Γ: dico ipſis A, B, Γ plures eſſe primos numeros.

Sumatur enim [per 38. 7.] minimus, quem ipſi A, B, Γ metiantur, ſitque Δ E, & ipſi Δ E apponatur unitas Δ Z: ergo E Z vel primus eſt, vel non. ſit primum primus: inventi igitur ſunt primi numeri A, B, Γ, E Z plures quam ipſi A, B, Γ.

A, 2. B, 3. Γ, 5. E 30. Δ . Z.

Sed non ſit E Z primus: ergo [per 33. 7.] eum primus metitur. metiatur H: dico H nulli ipſorum A, B, Γ eundem eſſe. ſi enim H idem ſit qui unus ipſorum A, B, Γ, ipſi autem A, B, Γ metiantur Δ E; & H ipſum Δ E metietur. metitur autem & E Z; & reliquam igitur Δ Z unitatem metietur H numerus exiſtens, quod eſt abſurdum: ergo H non eſt idem qui unus ipſorum A, B, Γ. & ponitur primus. inventi igitur ſunt primi numeri A, B, Γ, H plures propoſita multitudine primorum numerorum A, B, Γ. quod erat demonſtrandum.

A, 2. B, 3. Γ, 7. E 105. Δ . Z H, 53.

Prop. XXI. Theor.

Si pares numeri quotcunque componantur, totus par erit.

COmponantur enim pares numeri quotcunque A B, B Γ, Γ Δ, Δ E: dico totum A E parem eſſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ· λέγω ὅτι τ̃ Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τ̃ Α, Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος, καὶ ἔστω ὁ Δ Ε, προσκείσθω τῷ Δ Ε μονὰς ἡ Δ Ζ· ὁ δὴ Ε Ζ ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Ε, Ζ πλείους τ̃ Α, Β, Γ.

Αλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ Ε Ζ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Η· λέγω ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τ̃ Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ ὁ Η ἑνί τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός, οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν Δ Ε μετροῦσι· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν Δ Ε μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Ε Ζ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὴν Δ Ζ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὤν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Η ἑνί τ̃ Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τ̃ Α, Β, Γ, οἱ Α, Β, Γ, Η. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν, οἱ Α Β, Β Γ, Γ Δ, Δ Ε· λέγω ὅτι ὅλος ὁ Α Ε ἄρτιός ἐστιν.

Επεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ ὅλος ὁ ΑΕ ἔχει μέρος ἥμισυ. ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΕ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim unusquisque ipsorum AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ par est, [per 6. def. 7.] habet partem dimidiam: quare & totus AE partem dimidiam habebit. par autem numerus est qui bifariam dividitur: ergo AE par est. quod erat demonstrandum.

A . . . . B . . . . . Γ . . Δ . . . . . E

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϚ'.

Ἐὰν τεθῶσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ· ὅλος ἄρτιος ἔσται.

PROP. XXII. THEOR.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit.

Συγκείσθωσαν γὰρ τεθεισοὶ ἀριθμοὶ ὁσοιδηποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Επεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ περισσός ἐστιν, ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκάστου ἑκαστος ἄρα τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται· ὥστε ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται. ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COmponantur enim impares numeri quotcunque multitudine pares AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ: dico totum AE parem esse.

Quoniam enim unusquisque ipsorum AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ impar est, detracta ab unoquoque unitate, erit unusquisque reliquorum par: quare [per 21. 9.] & compositus ex ipsis par erit. est autem par & unitatum multitudo: & totus igitur AE par est. quod erat demonstrandum.

A . . . B . . . . . Γ . . . . . Δ . . . . . E

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν τεθῶσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν τεθεισῶν περισσὸν ᾖ· καὶ ὅλος περισσὸς ἔσται.

PROP. XXIII. THEOR.

Si impares numeri quotcunque componantur, & multitudo ipsorum sit impar; & totus impar erit.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἀριθμοὶ τεθεισοὶ ὁποσοιοῦν, ὧν τὸ πλῆθος τεθεισῶν ἔστω, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ὅλος ὁ ΑΔ τεθεισός ἐστιν.

Αφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΓΔ μονὰς ἡ ΔΕ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΓ ἄρτιος· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστι. καί ἐστιν ἡ μονὰς ἡ ΔΕ· τεθεισὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COmponantur enim numeri impares quotcunque, quorum multitudo sit impar, AB, BΓ, ΓΔ: dico & totum AΔ imparem esse.

Auferatur ab ipso ΓΔ unitas ΔΕ: reliquus igitur ΓΕ [per 7. def. 7.] par est. est autem [per 22. 9.] & AΓ par; ergo [per 21. 9.] & totus AE par erit. atque est ΔΕ unitas: impar igitur est AΔ. quod erat demonstrandum.

A . . . Γ . . . . . E . Δ . . . B

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

PROP. XXIV. THEOR.

Si à pari numero par auferatur, & reliquus par erit.

Απο γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Επεὶ γὰρ ὁ ΑΒ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΒΓ ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἥμισυ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

APari enim numero AB par auferatur BΓ: dico & reliquum ΓA parem esse.

Quoniam enim AB par est, habet partem dimidiam. eadem ratione & BΓ habet partem dimidiam: quare & reliquus ΓA partem habet dimidiam: par igitur est AΓ. quod erat demonstrandum.

A . . . . . Γ . . . . B

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

PROP. XXV. THEOR.

Si à pari numero impar auferatur, & reliquus impar erit.

Απο γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν.

APari enim numero AB impar BΓ auferatur: dico & reliquum ΓA imparem esse.

Aufe-

Auferatur ab ipſo B Γ unitas Γ Δ: ergo [per 7. def. 7.] Δ B par eſt. eſt autem par & A B: & reliquus igitur A Δ [per 24. 9.] eſt par. atque eſt Γ Δ unitas: ergo Γ A impar eſt. quod erat demonſtrandum.

A ..... Γ . Δ .... B

Αφηρήθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. καὶ ἔστι μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΓΑ ἄρα περισσός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVI. Theor.

Si ab impari numero impar auferatur, & reliquus par erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

AB impari enim numero AB impar BΓ auferatur: dico reliquum ΓA parem eſſe.

Quoniam enim AB impar eſt, auferatur unitas BΔ: reliquus AΔ igitur eſt par. eadem ratione & ΓΔ eſt par: quare [per 24. 9.] & reliquus AΓ par eſt. quod erat demonſtrandum.

A .... Γ ..... Δ . B

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφηρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ περισσός ἐστιν, ἀφηρήσθω μονὰς ἡ ΒΔ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVII. Theor.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

AB impari enim numero AB par auferatur BΓ: dico reliquum ΓA imparem eſſe.

Auferatur enim unitas AΔ: ergo ΔB par eſt. eſt autem par & BΓ: & reliquus igitur ΓΔ [per 24. 9.] eſt par. atque eſt ΔA unitas: ergo [per 7. def. 7.] ΓA impar eſt. quod erat demonſtrandum.

A . Δ .... Γ .... B

Ἀπὸ δὲ περισσοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ΑΒ ἄρτιος ἀφηρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν.

Ἀφηρήσθω γὰρ μονὰς ἡ ΑΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἡ ΔΑ· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΑ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVIII. Theor.

Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται.

IMpar enim numerus A parem numerum B multiplicans faciat Γ: dico Γ parem eſſe.

Quoniam enim A multiplicans B ipſum Γ fecit, componitur Γ ex tot numeris æqualibus ipſi B quot unitates ſunt in A. atque eſt B par: ergo Γ ex paribus numeris componitur. ſi autem pares numeri quotcunque componantur, [per 21. 9.] totus par erit: ergo Γ eſt par. quod erat demonſtrandum.

A ...
B ....
Γ .....

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. καὶ ἔστιν ὁ Β ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἀρτίων. ἐὰν δὲ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXIX. Theor.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.

IMpar enim numerus A numerum imparem B multiplicans faciat Γ: dico Γ imparem eſſe.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α περισσὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ περισσός ἐστιν.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β ὅσοι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τῶν Α, Β περισσός· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν. ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν, περισσός ἐστιν· ὥστε ὁ Γ περισσός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim A multiplicans B ipſum Γ fecit, componitur Γ ex tot numeris æqualibus ipſi B quot ſunt in A unitates. atque eſt uterque ipſorum A, B impar: ergo Γ ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo eſt impar. qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar, [per 23. 9.] & ipſe impar erit: ergo Γ eſt impar. quod erat demonſtrandum.

A . . .
B . . . . .
Γ . . . . . .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ τὴν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Prop. XXX. Theor.

Si impar numerus parem numerum metiatur, & dimidium ejus metietur.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ τὴν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ οὐκ ἔστι περισσός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ κατὰ τοὺς Γ· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα Β σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὁ Β ἄρα περισσός ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἄρτιος· οὐκ ἄρα ὁ Γ περισσός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ὁ Γ. ὡς ὁ Α τὸν Β μετρεῖ ἀρτιάκις, λέγω δὴ ὅτι καὶ τὴν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Impar enim numerus A parem numerum B metiatur: dico & dimidium ejus metiri.

Quoniam enim A metitur B, metiatur ipſum per Γ: dico Γ non eſſe imparem. nam ſi fieri poteſt, ſit impar. & quoniam A ipſum B metitur per Γ; A multiplicans ipſum Γ fecit B: ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo eſt impar; ac propterea impar eſt B, quod eſt abſurdum, par enim ponitur: non igitur Γ eſt impar: ergo par: quare A ipſum B pariter metitur, & ob id ejus quoque dimidium metietur. quod erat demonſtrandum.

A . . .
B . . . . . .
Γ . . . .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.

Prop. XXXI. Theor.

Si impar numerus ad aliquem numerum ſit primus, & ad ipſius duplum primus erit.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Β πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ Β διπλάσιος ἔστω ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Α καὶ πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Α, Γ πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καὶ ἔστιν ὁ Α περισσός· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ περισσὸς ὢν τὸν Γ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὁ Γ ἄρτιος· καὶ τὸν ἥμισυν ἄρα τοῦ Γ μετρήσει ὁ Δ. τοῦ δὲ Γ ἥμισύς ἐστιν ὁ Β· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Α· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Γ πρῶτος οὐκ ἔστιν· οἱ Α, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B ſit primus, & ſit Γ ipſius B duplus: dico A etiam ad Γ primum eſſe.

Si enim non ſint A, Γ primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, ſitque Δ. & eſt A impar: impar igitur eſt & Δ. & quoniam Δ impar exiſtens metitur ipſum Γ, atque eſt Γ par; & Δ [per 30. 9.] ipſius Γ dimidium metietur. ſed ipſius Γ dimidium eſt B: ergo Δ ipſum B metitur. metitur autem & ipſum A: quare Δ ipſos A, B metitur, primos inter ſe exiſtentes, quod fieri non poteſt: non igitur A ad Γ primus non eſt: ergo A, Γ inter ſe primi ſunt. quod erat demonſtrandum.

A . . .
B . . . . .
Γ . . . . . .
Δ ------

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Τῶν ἀπὸ διάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον.

Prop. XXXII. Theor.

Numerorum à binario duplatorum unuſquiſque pariter par eſt tantum.

Ἀπὸ γὰρ διάδος τὸ Α δεδιπλασιάσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσι μόνον.

A binario enim A duplentur quotlibet numeri B, Γ, Δ: dico B, Γ, Δ pariter pares eſſe tantum.

At vero unumquemque ipſorum B, Γ, Δ pariter parem eſſe [per 8. def. 7.] manifeſto conſtat: à binario namque duplatus eſt. dico & tantum. exponatur enim unitas E. quoniam igitur ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales ſunt, & poſt unitatem A primus eſt; maximum ipſorum numerorum A, B, Γ, Δ, videlicet Δ, nullus alius metietur [per 13. 9.] præter ipſos A, B, Γ. atque eſt unuſquiſque ipſorum A, B, Γ par; ergo Δ pariter par eſt tantum. ſimiliter demonſtrabimus & unumquemque ipſorum A, B, Γ pariter parem eſſe tantum. quod erat demonſtrandum.

E, 1. A, 2. B, 4. Γ, 8. Δ, 16.

Οτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν B, Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι, φανερόν· ἀπὸ γὰρ δυάδος ἐστὶ διπλασιαθείς. λέγω δὴ ὅτι καὶ μόνον. ὑποκείσθω γὰρ μονὰς ἡ E. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὁποσωνοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὸν μονάδα ὁ A πρῶτος ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν A, B, Γ, Δ ὁ Δ ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται πάρεξ τῶν A, B, Γ. καὶ ἔστιν ἕκαστος τῶν A, B, Γ ἄρτιος· ὁ Δ ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστερος τῶν A, B, Γ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIII. Theor.

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar eſt tantum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸ ἥμισυ ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

NUmerus enim A dimidium imparem habeat: dico A pariter imparem eſſe tantum.

At vero pariter imparem eſſe [per 9. def. 7.] perſpicuum eſt: dimidium enim ipſius impar exiſtens ipſum pariter metitur. dico & tantum. nam ſi A ſit etiam pariter par, [*dimidius ipſius par erit; atque] eum par numerus [per 8. def. 7.] per parem numerum metietur: ergo dimidium ipſius parem numerum metitur, impar exiſtens, quod eſt abſurdum: quare A pariter impar eſt tantum. quod erat demonſtrandum.

A .....

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A τὸν ἥμισυ ἐχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ A ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

Οτι μὲν οὖν ἀρτιάκις περισσός ἐστι, φανερόν· ὁ γὰρ ἥμισυς αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις. λέγω δὴ ὅτι καὶ μόνον. εἰ γὰρ ἔστιν ὁ A καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, [*ὁ ἥμισυς αὐτοῦ ἄρτιός ἐστι, καὶ] μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ, περισσὸς ὤν, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· ὁ A ἄρα ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIV. Theor.

Si par numerus neque ſit à binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par eſt & pariter impar.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἐὰν ἄρτιος ἀριθμὸς μήτε τῷ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένῳ ᾖ, μήτε τὸ ἥμισυ ἔχῃ περισσόν. ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

NUmerus enim A neque ſit à binario duplatus, neque dimidium imparem habeat: dico A & pariter parem & pariter imparem eſſe.

At vero A pariter parem eſſe [per 8. def. 7.] manifeſtum eſt; dimidium enim imparem non habet. dico etiam pariter imparem eſſe. nam ſi A bifariam ſecemus, & dimidium ipſius bifariam, & hoc ſemper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem qui ipſum A per numerum parem metietur. ſi enim non incidemus in aliquem imparem qui ipſum A per numerum parem metietur, incidemus in binarium, atque erit A à binario duplatus; quod non ponitur: quare A pariter impar eſt. oſtenſum autem eſt & pariter eſſe parem: eſt igitur A & pariter par & pariter impar. quod erat demonſtrandum.

A .....

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A μήτε τῷ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένῳ ἔστω, μήτε τὸ ἥμισυ ἐχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ A ἀρτιάκις τε ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Οτι μὲν οὖν ὁ A ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἥμισυ οὐκ ἔχει περισσόν. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἀρτιάκις ἐστὶ περισσός. ἐὰν γὰρ τὸν A πεμπάσω διχα, καὶ τὸν ἥμισυ αὐτοῦ διχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταντήσομεν εἴς τινα περισσὸν, ὃς μετρήσει τὸν A κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. εἰ γὰρ οὐ καταντήσομεν εἴς τινα περισσὸν ὃς μετρήσει τὸν A κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν, καταντήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔστιν ὁ A τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων, ὅπερ οὐχ ὑπέκειτο· ὥστε ὁ A καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος· ὁ A ἄρα ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXV. Theor.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, auferantur autem à ſecundo & ultimo æquales primo; erit ut ſecundi exceſſus ad primum ita ul-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπό τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσος τῷ πρώτῳ· ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπερο-

* *Illa uncis incluſa non agnoſcunt Codd. MSS. & rectius quidem abeſſe poſſunt.*

timi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.

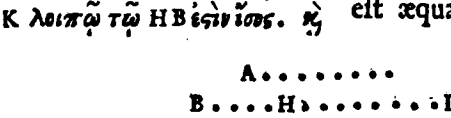
καὶ πρὸς τὴν πρώτην, ὅτως ἡ ἐσχάτη ὑπεροχὴ πρὸς τὰς πρὸ ἑαυτῆς ἁπάντας.

Ἑστωσαν ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ, ἀρχόμενοι ἀπὸ ἐλαχίστου τοῦ Α, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν ΒΓ τῷ ΕΖ τῷ Α ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΗΓ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸν Α ὅτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Α, ΒΓ, Δ.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, τῷ δὲ Δ ἴσος ὁ ΖΛ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΖΚ τῷ ΒΓ ἴσος ἐστίν, ὧν ὁ ΖΘ τῷ ΗΓ ἴσος· λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚ λοιπῷ τῷ ΗΒ ἐστὶν ἴσος. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸ Δ ὅτως ὁ Δ πρὸς τὸ ΒΓ καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸ Α, ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ τῷ ΖΛ, ὁ δὲ ΒΓ τῷ ΖΚ, ὁ δὲ Α τῷ ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸ ΛΖ ὅτως ὁ ΛΖ πρὸς τὸ ΖΚ, καὶ ὁ ΖΚ πρὸς τὸ ΖΘ· δηλονότι, ὡς ὁ ΕΛ πρὸς τὸ ΛΖ ὅτως ὁ ΛΚ πρὸς τὸ ΖΚ, καὶ ὁ ΚΘ πρὸς τὸ ΖΘ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων ὅτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΚΘ πρὸς τὸ ΖΘ ὅτως οἱ ΕΛ, ΛΚ, ΚΘ πρὸς τοὺς ΛΖ, ΚΖ, ΘΖ. ἴσος δὲ ὁ μὲν ΚΘ τῷ ΒΗ, ὁ δὲ ΖΘ τῷ Α, οἱ δὲ ΛΖ, ΚΖ, ΘΖ τοῖς Δ, ΒΓ, Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸ Α ὅτως ὁ ΕΘ πρὸς τὸ Δ, ΒΓ, Α· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ἐσχάτη ὑπεροχὴ πρὸς τὸ πρῶτον ὅτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τὰς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, BΓ, Δ, EZ incipientes à minimo A, & auferatur ab ipſo BΓ & ab EZ æqualis ipſi A, videlicet HΓ, ZΘ: dico ut BH ad A ita eſſe EΘ ad A, BΓ, Δ.

Ponatur enim ipſi quidem BΓ æqualis ZK; ipſi vero Δ æqualis ZΛ. quoniam igitur ZK eſt æqualis ipſi BΓ, quorum ZΘ eſt æqualis HΓ; erit reliquus ΘK reliquo HB æqualis. & quoniam eſt ut EZ ad Δ ita Δ ad BΓ & BΓ ad A; æqualis autem eſt Δ ipſi ZΛ, & BΓ ipſi ZK, & A ipſi ZΘ: erit ut EZ ad ΛZ ita ΛZ ad ZK & ZK ad ZΘ: quare dividendo ut EΛ ad ΛZ ita ΛK ad ZK & KΘ ad ZΘ, & ut unus antecedentium ad unum conſequentium ita [per 12. 7.] omnes antecedentes ad omnes conſequentes; eſt igitur ut KΘ ad ZΘ ita EΛ, ΛK, KΘ ad ΛZ, KZ, ΘZ. atque eſt KΘ quidem æqualis BH; ZΘ vero ipſi A, & ΛZ, KZ, ΘZ æquales ipſis Δ, BΓ, A: ergo ut BH ad A ita eſt EΘ ad Δ, BΓ, A: eſt igitur ut ſecundi exceſſus ad primum ita exceſſus ultimi ad omnes ipſum antecedentes. quod erat demonſtrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

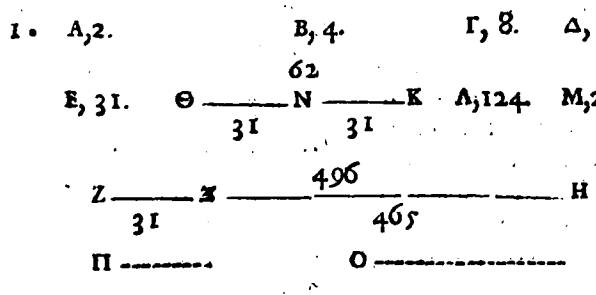
Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ὁπόσιν ἐστὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα· ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

Prop. XXXVI. Theor.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales exponantur in dupla analogia, quoad totus compoſitus primus fiat, & totus in ultimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.

Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὁποσοιῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ ΖΗ τέλειός ἐστιν.

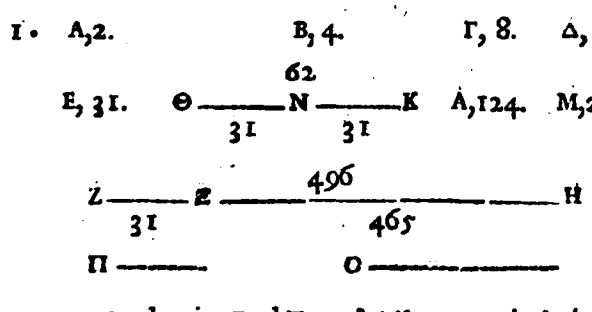
AB unitate enim exponantur quotcunque numeri deinceps proportionales in dupla analogia, ſc. A, B, Γ, Δ, quoad totus compoſitus primus fiat, & toti æqualis ſit E, & E ipſum Δ multiplicans faciat ZH: dico ZH perfectum eſſe.



Ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τοσοῦτοι ἀπὸ τοῦ Ε ἐκκείσθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ ὅτως ὁ Ε πρὸς τὸ Μ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Ε, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Α, Μ. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ ὁ ΖΗ· ὁ Α ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ὁ Μ ἄρα τὸν ΖΗ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. καὶ ἔστι δυὰς ὁ Α· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ τοῦ Μ. ἔστι δὲ καὶ οἱ Μ, Λ, ΘΚ, Ε ἑξῆς διπλάσιοι ἀλλήλων

Quot enim ſunt A, B, Γ, Δ multitudine tot ſumantur ab ipſo E in dupla analogia, qui ſint E, ΘK, Λ, M: ergo ex æquo ut A ad Δ ita erit E ad M: ac propterea [per 19. 7.] qui fit ex B, Δ eſt æqualis ei qui ex A, M. eſt autem qui ex E, Δ ipſe ZH: quare ZH eſt qui fit ex A, M: multiplicans igitur A ipſum M fecit ZH: & M metitur ZH per unitates quæ ſunt in A. atque eſt A binarius: duplus igitur eſt ZH ipſius M. ſunt autem & M, Λ, ΘK, E deinceps dupli

inter ſe: ergo E, ΘK, Λ, M, ZH deinceps proportionales ſunt in dupla analogia. auferatur à ſecundo ΘK, & ab ultimo ZH ipſi primo E æqualis uterque ΘN, ZΞ: eſt igitur [per 35. 9.] ut ſecundi numeri exceſſus ad primum ita exceſſus ultimi ad omnes ipſum antecedentes: quare ut NK ad E ita ΞH ad M, Λ, ΘK, E. atque eſt [per conſtruct.] NK ipſi E æqualis: ergo & ΞH eſt æqualis ipſis M, Λ, ΘK, E. eſt autem [per conſtr.] ZΞ æqualis ipſi E; atque E ipſis A, B, Γ, Δ & unitati æqualis: totus igitur ZH æqualis eſt [per 2. ax.] & ipſis E, ΘK, Λ, M & ipſis A, B, Γ, Δ & unitati, omneſque [per 11. 9.] ipſum ZH metiuntur. dico nullum alium metiri ZH præter ipſos A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, & unitatem. ſi enim fieri poteſt, metiatur aliquis numerus ipſum ZH, qui ſit O: ſitque O nulli ipſorum A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M idem. & quoties O ipſum ZH metitur tot unitates ſint in Π: ergo Π ipſum O multiplicans fecit ZH. ſed [per conſtr.] & E multiplicans Δ ipſum ZH fecit: eſt igitur [per 19. 7.] ut E ad Π ita O ad Δ. & quoniam ab unitate deinceps proportionales ſunt A, B, Γ, Δ, & qui unitatem ſequitur A primus eſt; non metietur ipſum Δ aliquis alius numerus præter ipſos A, B, Γ [per 13. 9.]: & ponitur O nulli ipſorum A, B, Γ idem: non igitur O ipſum Δ metietur. ut autem O ad Δ ita E ad Π: ergo [per 20. def. 7.] neque E metietur ipſum Π. atque [ex hyp.] eſt E primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur [per 31. 7.] primus eſt: quare E, Π primi inter ſe ſunt. ſed [per 23. 7.] primi etiam & minimi, minimi vero eos qui eandem quam ipſi rationem habent æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem, atque eſt ut E ad Π ita O ad Δ: ergo E æqualiter metitur ipſum O atque Π ipſum Δ. ſed nullus alius metitur numerum Δ præter ipſos A, B, Γ: quare Π idem eſt qui unus ipſorum A, B, Γ. ſit idem qui B, & quot ſunt B, Γ, Δ multitudine tot ab ipſo E ſumantur E, ΘK, Λ: ſuntque [per conſtr.] E, ΘK, Λ in eadem ratione in qua B, Γ, Δ: ex æquo igitur ut B ad Δ ita eſt E ad Λ; ergo [per 19. 7.] qui fit ex B, Λ eſt æqualis ei qui ex Δ, E. ſed qui fit ex Δ, E eſt æqualis ei qui ex Π, O: qui igitur fit ex Π, O ei qui ex B, Λ æqualis erit: quare [per 19. 7.] ut Π ad B ita eſt Λ ad O. eſtque Π idem qui B: ergo & Λ idem erit qui O, quod fieri non poteſt, etenim O nulli ipſorum expoſitorum idem ponitur: non igitur ipſum ZH metitur aliquis numerus præter ipſos A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, & unitatem. atque oſtenſus eſt ZH æqualis ipſis A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, & unitati, perfectus autem numerus eſt [per 22. def. 7.] qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis: ergo ZH perfectus eſt. quod erat demonſtrandum.



λων· οἱ E, ΘK, Λ, M, ZH ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ ὑπερέχοντος τοῦ ΘK καὶ τοῦ ἐλάττονος τοῦ ZH τῷ πρώτῳ τῷ E ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΘN, ZΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ ὑπερέχοντος ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον οὕτως ἡ τοῦ ἐλάττονος ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτῶν πάντας· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ NK πρὸς τὸν E οὕτως ὁ ΞH πρὸς τοὺς M, Λ, ΘK, E. καὶ ἔστιν ὁ NK ἴσος τῷ E· καὶ ὁ ΞH ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς M, Λ, ΘK, E. ἔστι δὲ καὶ ὁ ZΞ τῷ E ἴσος, ὁ δὲ E τοῖς A, B, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι· ὅλος ἄρα ὁ ZH ἴσος ἐστὶ τοῖς τε E, ΘK, Λ, M καὶ τοῖς A, B, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι, καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. λέγω ὅτι ὁ ZH ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M καὶ τῆς μονάδος. εἰ γὰρ δυνατὸν μετρείτω τις τὸν ZH ὁ O, καὶ ὁ O μηδενὶ τῶν A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M ἔστω ὁ αὐτός. καὶ ὁσάκις ὁ O τὸν ZH μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Π· ὁ Π ἄρα τὸν O πολλαπλασιάσας τὸν ZH πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ E τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ZH πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ O πρὸς τὸν Δ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ A, B, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ A πρῶτός ἐστιν· ὁ Δ ἄρα ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν A, B, Γ, καὶ ὑπάρξει τῷ O ὑπ' οὐδενὶ τῶν A, B, Γ ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ O τὸν Δ. ἀλλ' ὡς ὁ O πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Π· ὁ δὲ E ἄρα τὸν Π μετρεῖ. καὶ ἔστιν ὁ E πρῶτος, πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν ὃν μὴ μετρεῖ πρῶτός ἐστιν· οἱ E, Π ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὁ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, καὶ ἔστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ O πρὸς τὸν Δ· ἰσάκις ἄρα ὁ E τὸν O μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ. ὁ δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται πάρεξ τῶν A, B, Γ· ὁ Π ἄρα ἑνὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. ἔστω τῷ B ὁ αὐτός. καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ B, Γ, Δ τῷ πλήθει τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ E, οἱ E; ΘK, Λ, καί εἰσιν οἱ E, ΘK, Λ τοῖς B, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Λ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν B, Λ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Δ, E. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν Δ, E ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Π, O· καὶ ὁ ἐκ τῶν Π, O ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν B, Λ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Π πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν O. καὶ ἔστιν ὁ Π τῷ B ὁ αὐτός· καὶ ὁ Δ ἄρα τῷ O ἐστὶν ὁ αὐτός, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γὰρ O ὑπ' οὐδενὶ τῶν ἐκκειμένων ἐστὶν ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα τὸν ZH μετρεῖ τις ἀριθμὸς παρὲξ τῶν A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M καὶ ἡ μονάδος. καὶ ἐδείχθη ὁ ZH τοῖς A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, καὶ τῇ μονάδι ἴσος, τέλειος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὢν· τέλειος ἄρα ἐστὶν ὁ ZH. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

EYKΛEI-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER DECIMUS.

ΟΡΟΙ.

α'. ΣΥΜΜΕΤΡΑ μεγέθη λέγεται, τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα.

β'. Ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ'. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται.

δ'. Ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

ε'. Τούτων ὑποκειμένων, δείκνυται ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει μόνον. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα, ῥητή.

ϛ'. Καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι, εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον, ῥηταί.

ζ'. Αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

η'. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον, ῥητόν.

θ'. Καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα, ῥητά.

ι'. Τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα, ἄλογα καλείσθω.

ια'. Καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτά, ἄλογοι· εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐτὴ καὶ πλευρά·

DEFINITIONES.

1. COMMENSURABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

3. Rectæ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum ea quæ ab ipsis fiunt quadrata idem spatium metitur.

4. Incommensurabiles autem, cum quadrata quæ ab ipsis fiunt nullum commune spatium metiri contingit.

5. His positis ostenditur, cuicunque rectæ lineæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia, alias vero potentia solum. vocetur autem proposita recta linea, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine & potentia sive potentia solum, rationales.

7. Incommensurabiles vero irrationales vocentur.

8. Et quadratum quod à recta linea proposita fit, dicatur rationale.

9. Et huic commensurabilia quidem, rationalia.

10. Incommensurabilia vero dicantur irrationalia.

11. Et lineæ, quæ incommensurabilia possunt, vocentur irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera;

tera; si vero alia quæpiam rectilinea, ipsæ à quibus æqualia quadrata describuntur.

εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

Prop. I. Theor.

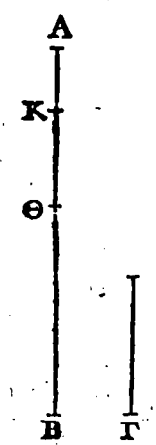
Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod reliquum est rursus auferatur majus quam dimidium, & hoc semper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine exposita minor erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται· λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

SInt duæ magnitudines inæquales AB, Γ, quarum major AB: dico si ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod reliquum est rursus auferatur majus quam dimidium, atque hoc semper fiat; relinqui tandem magnitudinem quandam quæ magnitudine Γ minor erit.

Etenim Γ multiplicata fiet aliquando major magnitudine AB. multiplicetur, & sit ΔE ipsius quidem Γ multiplex, major autem quam AB, dividaturque ΔE in partes ipsi Γ æquales ΔZ, ZH, HE, & ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium BΘ, ab ipsa vero AΘ rursus majus quam dimidium auferatur ΘK, atque hoc semper fiat quoad divisiones quæ sunt in AB multitudine æquales fiant divisionibus quæ in ΔE: sint igitur divisiones AK, KΘ, ΘB divisionibus ΔZ, ZH, HE multitudine æquales.



Et quoniam major est ΔE quam AB, & ablatum est ab ipsa quidem ΔE minus quam dimidium, sc. EH, ab ipsa vero AB majus quam dimidium, sc. BΘ; erit reliquum HΔ reliquo ΘA majus. rursus, quoniam major est HΔ quam ΘA, & ablatum est ab ipsa quidem HΔ dimidium HZ, ab ipsa vero ΘA majus quam dimidium ΘK; reliquum ΔZ reliquo AK majus erit. estque ΔZ æqualis ipsi Γ: ergo Γ quam AK est major. minor igitur est AK quam Γ: ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK exposita minori magnitudine Γ minor. quod erat demonstrandum.

Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ AB, Γ, ὧν μεῖζον τὸ AB· λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ AB ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους.

Τὸ γὰρ Γ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ AB μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔE τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ AB μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ ΔE εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔZ, ZH, HE, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ AB μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ BΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ AΘ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘK, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ AB διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔE διαιρέσεσιν· ἔστωσαν δὴ αἱ AK, KΘ, ΘB διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι τῇ τε ΔZ, ZH, HE.

Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΔE τοῦ AB, καὶ ἀφῄρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔE ἔλασσον τοῦ ἡμίσεως τὸ EH, ἀπὸ δὲ τοῦ AB μεῖζον τοῦ ἡμίσεως τὸ BΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ HΔ λοιποῦ τοῦ ΘA μεῖζόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ HΔ τοῦ ΘA, καὶ ἀφῄρηται τοῦ μὲν HΔ ἥμισυ τὸ HZ, τοῦ δὲ ΘA μεῖζον τοῦ ἡμίσεως τὸ ΘK· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔZ λοιποῦ τοῦ AK μεῖζόν ἐστιν. ἴσον δὲ τὸ ΔZ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ AK μεῖζόν ἐστιν. ἔλασσον ἄρα τὸ AK τοῦ Γ· καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ AB μεγέθους τὸ AK μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίσεια ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα.

Aliter.

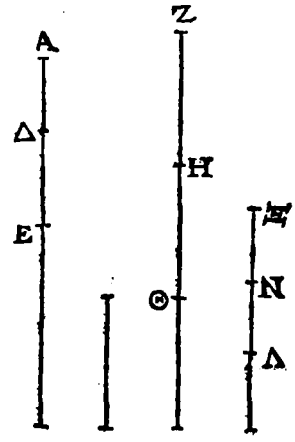
Exponantur duæ magnitudines inæquales AB, Γ, sitque Γ minor; & quoniam minor est Γ; multiplicata erit aliquando magnitudine AB major. fiat ut ZM, dividaturque in partes ipsi Γ æquales MΘ, ΘH, HZ; & ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium BE, & ab EA majus quam dimidium EΔ; atque hoc semper fiat, quoad divisiones quæ sunt in AB numero æquales fiant divisionibus quæ in ZM. fiant igitur ut BE, EΔ, ΔA, & ipsi ΔA una-

Αλλως.

Ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ AB, Γ, ἔστω δὲ τὸ Γ ἔλασσον, καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ Γ, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ AB μεῖζον. γεγονέτω ὡς τὸ ZM, καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ἴσα τῷ Γ τὰ MΘ, ΘH, HZ, καὶ ἀπὸ τοῦ AB ἀφῃρήσθω μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ BE, καὶ ἀπὸ τοῦ EA μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ EΔ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω ἕως αἱ ἐν τῷ AB διαιρέσεις ἴσαι γένωνται τοῖς ἐν τῷ ZM διαιρέσεσι. γεγονέτωσαν ὡς αἱ BE, EΔ, ΔA, καὶ τῷ ΔA ἕκα-

ση τῇ ΚΛ, ΛΝ, ΝΞ ἴσῳ ἴσαν, καὶ τοσαυταπλασίων ἔστω ἡ ΚΞ τοῦ ΚΛ ὁσαπλασία ἐστὶν ἡ ΖΜ τῆς ΖΜ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ΒΕ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΑΒ, τὸ ΒΕ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΕΑ. πολλῷ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. ἀλλὰ τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΞΝ· τὸ ΒΕ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΝ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΕΔ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΕΑ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. ἀλλὰ τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΝΛ· τὸ ΕΔ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΛ. ἀλλὰ τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μεῖζόν ἐστιν ὅλου τοῦ ΞΚ. ἀλλὰ τοῦ ΒΑ μεῖζόν ἐστι τὸ ΜΖ· πολλῷ ἄρα τὸ ΜΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΚ. καὶ ἐπεὶ τὰ ΞΝ, ΝΛ, ΛΚ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ ΜΖ τῷ πλήθει τῶν ἐν τῷ ΞΚ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΛ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως τὸ ΞΚ πρὸς τὸ ΖΜ. μεῖζον δὲ τὸ ΖΜ τοῦ ΞΚ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τοῦ ΛΚ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΗ ἴσον τῷ Γ, τὸ δὲ ΚΛ τῷ ΑΔ· τὸ Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



quæque ipsarum ΚΛ, ΛΝ, ΝΞ sit æqualis, atque hoc fiat quoad divisiones ipsius ΚΞ numero æquales sint divisionibus ipsius ΖΜ.

Et quoniam ΒΕ major est quam dimidium ipsius ΑΒ, erit ΒΕ major quam ΕΑ: multo igitur major est ΒΕ quam ΔΑ. sed ipsi ΔΑ æqualis est ΞΝ: ergo ΒΕ major est quam ΞΝ. rursus, quoniam ΕΔ major est quam dimidium ΕΑ, erit ΕΔ major quam ΔΑ. sed ipsi ΔΑ est æqualis ΝΛ: quare ΕΔ quam ΝΛ est major: tota igitur ΔΒ major est quam ΞΛ. ipsi vero ΔΑ æqualis est ΛΚ: quare tota ΑΒ quam tota ΞΚ major erit. sed ΜΖ major est quam ΒΑ: multo igitur ΜΖ quam ΞΚ est major. & quoniam ΞΝ, ΝΛ, ΛΚ inter se æquales sunt; sunt autem & ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ inter se æquales, atque est multitudo earum quæ sunt in ΜΖ æqualis multitudini ipsarum quæ in ΞΚ: erit [per 12. 5.] ut ΚΛ ad ΖΗ ita ΞΚ ad ΖΜ. major autem est ΖΜ quam ΞΚ: ergo [per 14. 5.] & ΖΗ quam ΛΚ est major. atque est ΖΗ ipsi Γ æqualis; & ΚΛ æqualis ipsi ΑΔ: ergo Γ quam ΑΔ major erit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

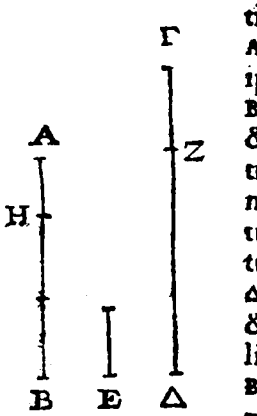
Ἐὰν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἀνθυφαιρούμενον ἀεὶ τὸ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Prop. II. Theor.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, detracta semper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommensurabiles erunt.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, ΓΔ, καὶ ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ, ἀνθυφαιρούμενον ἀεὶ τὸ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

Εἰ γὰρ ἔστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω εἰ δυνατὸν, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΔΖ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως ἂν λειφθῇ τι μέγεθος, ὃ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Ε. γεγονέτω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΔΖ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.



Duabus enim magnitudinibus inæqualibus expositis ΑΒ, ΓΔ, quarum minor sit ΑΒ, & detracta semper minore de majore, reliqua minime metiatur præcedentem: dico magnitudines ΑΒ, ΓΔ incommensurabiles esse.

Si enim commensurabiles sint, eas magnitudo quædam metietur. metiatur, si fieri potest; sitque Ε; & ΑΒ quidem metiens ΔΖ relinquat seipsa minorem ΓΖ; ΓΖ vero metiens ΒΗ relinquat seipsa minorem ΑΗ; & hoc semper fiat quoad relinquatur quædam magnitudo quæ sit minor ipsa Ε. itaque fiat, & relinquatur ΑΗ ipsa Ε minor. quoniam igitur Ε metitur ΑΒ, ΑΒ vero metitur ΔΖ; & Ε ipsam ΔΖ metitur. sed & metitur totam ΓΔ: ergo & reliquam ΓΖ metietur. at ΓΖ metitur ΒΗ: quare & Ε ipsam ΒΗ metitur. metitur autem & totam ΑΒ: & reliquam igitur ΑΗ metietur, majot minorem, quod fieri non potest: non igitur magnitudines ΑΒ, ΓΔ aliqua magnitudo metietur: ergo ΑΒ, ΓΔ magnitudines incommensurabiles erunt.

Si

Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, detracta ſemper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommenſurabiles erunt. quod erat demonſtrandum.

Prop. III. Probl.

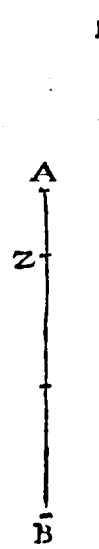
Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram invenire.

SInt datæ duæ magnitudines commenſurabiles AB, ΓΔ, quarum minor AB: oportet ipſarum AB, ΓΔ maximam communem menſuram invenire.

Vel igitur AB metitur ΓΔ, vel non metitur. & ſi quidem AB metitur ΓΔ, metitur autem & ſeipſam; erit AB ipſarum AB, ΓΔ communis menſura. & perſpicuum eſt maximam eſſe; magnitudo enim major magnitudine AB ipſam AB non metietur.

Si vero AB non metitur ΓΔ; detracta ſemper minore de majore, relinquetur tandem [per 2. 10.] quædam magnitudo quæ præcedentem metietur, propterea quod AB, ΓΔ non ſint incommenſurabiles; & AB quidem metiens ΓΔ relinquat ſeipſa minorem EΓ, EΓ vero metiens ZB relinquat ſeipſa minorem AZ; & AZ ipſam ΓE metiatur.

Quoniam igitur AZ metitur ΓE, ſed ΓE metitur ZB: & AZ ipſam ZB metitur. metitur autem & ſeipſam: & totam igitur AB metietur. ſed AB metitur ΔE: ergo AZ ipſam ΔE metitur. metitur autem & ΓE; & totam igitur ΓΔ metietur: ergo AZ ipſas AB, ΓΔ metitur: ac propterea AZ ipſarum AB, ΓΔ eſt communis menſura. dico & maximam eſſe. niſi enim ita ſit, erit aliqua magnitudo major ipſa AZ quæ ipſas AB, ΓΔ metietur. itaque metiatur, & ſit H. & quoniam H metitur AB, AB vero metitur EΔ; & H ipſam EΔ metitur. metitur autem & totam ΓΔ: ergo & reliquam ΓE metietur. ſed ΓB metitur ZB: quare H ipſam ZB metitur. metitur autem & totam AB: & reliquam igitur AZ metietur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur magnitudo quædam major ipſa AZ magnitudines AB, ΓΔ metietur: ergo AZ ipſarum AB, ΓΔ maxima erit communis menſura.



Duabus igitur magnitudinibus commenſurabilibus datis AB, ΓΔ, maxima ipſarum communis menſura AZ inventa eſt. quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipſarum communem menſuram metiri.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων, ἀνθυφαιρεμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο σύμμετρα μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Τὸ ΑΒ δὴ ἤτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· τὸ ΑΒ ἄρα κοινὸν μέτρον ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ. καὶ φανερὸν ὅτι μέτρον ἐστὶ μέγιστον· μεῖζον γὰρ τοῦ ΑΒ μεγέθος τὸ ΑΒ οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ· ἀνθυφαιρουμένου ἄρα τοῦ ἐλάττονος ἀεὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ ὑπολειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΓΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΖ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρείτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μετρήσει τὸ ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΔΕ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ ΑΒ, ΓΔ. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Η. ἐπεὶ οὖν τὸ Η τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΕΔ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΖ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστί.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν ΑΒ, ΓΔ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρηται τὸ ΑΖ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

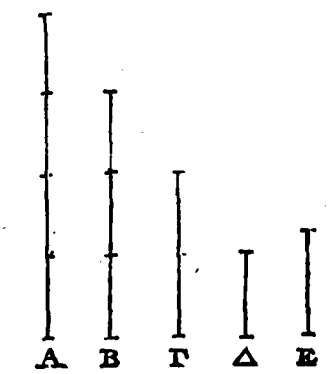
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

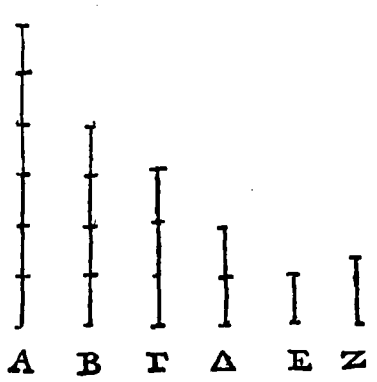
Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β· τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, μεῖζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ Α, Β, Γ οὐ μετρήσει. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω τὰ Α, Β, Γ μεῖζον τοῦ Δ μέγεθος, τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Δ, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἀδύνατον.



Μὴ μετρείτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. λέγω πρῶτον ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· ὥστε καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Γ, Δ. εἰλήφθω αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν μέτρον ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε μεῖζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρείτω τὰ Α, Β, Γ. καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· καὶ τὸ τῶν Α, Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρεῖ, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μεῖζόν τι τοῦ Ε μέγεθος μετρήσει τὰ Α, Β, Γ μεγέθη μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν, ἐὰν μὴ μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ· ἐὰν δὲ μετρῇ, αὐτὸ τὸ Δ.



Τριῶν ἄρα μεγεθῶν δοθέντων συμμέτρων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὕρηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν μέγεθος τρία με-

PROP. IV. PROBL.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

SInt datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, Γ: oportet ipsarum A, B, Γ maximam communem mensuram invenire.

Sumatur enim [per 3. 10.] duarum A, B maxima communis mensura quæ sit Δ; itaque Δ ipsam Γ vel metitur, vel non metitur. metiatur primum. & quoniam Δ ipsam Γ metitur, metitur autem & A, B, & ipsas A, B, Γ metietur: quare Δ ipsarum A, B, Γ communis est mensura. & manifestum est maximam esse; magnitudo enim major magnitudine Δ ipsas A, B, Γ non metietur. nam si fieri potest, metiatur eas magnitudo major ipsa Δ, quæ sit E. quoniam igitur E magnitudines A, B, Γ metitur, & ipsas A, B metietur, & [per coroll. 3. 10.] ipsarum A, B maximam communem mensuram Δ, major minorem, quod fieri non potest.

Sed non metiatur Δ ipsam Γ. dico primum Γ, Δ commensurabiles esse. quoniam enim commensurabiles sunt A, B, Γ, metitur eas aliqua magnitudo, quæ scilicet & ipsas A, B metitur; ergo & ipsarum A, B maximam communem mensuram Δ. metitur autem & ipsam Γ: quare dicta magnitudo ipsas Γ, Δ metitur: ideoque [per 1. def. 1.] Γ, Δ commensurabiles sunt. sumatur [per 3. 10.] ipsarum maxima communis mensura; & sit E. quoniam igitur E metitur Δ, Δ vero metitur A, B, & E ipsas A, B metietur. metitur autem & Γ: ergo E ipsarum A, B, Γ communis est mensura. dico & maximam esse. si enim fieri potest, sit aliqua magnitudo Z major ipsa E, quæ magnitudines A, B, Γ metiatur. & quoniam Z metitur A, B, Γ, & ipsas A, B metietur; & igitur [per coroll. 3. 10.] ipsarum A, B maximam communem mensuram metietur. sed Δ est maxima communis mensura ipsarum A, B; ergo Z metitur Δ. metitur autem & Γ: quare Z ipsas Γ, Δ metitur; & igitur Z metitur ipsarum Γ, Δ maximam communem mensuram. sed ipsarum Γ, Δ maxima communis mensura est E: ergo Z ipsam E metietur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur magnitudo major ipsa E magnitudines A, B, Γ metietur: ergo E ipsarum A, B, Γ maxima erit communis mensura, si Δ ipsam Γ non metiatur; si vero metiatur, erit ipsa Δ.

Tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis, maxima ipsarum communis mensura inventa est. quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex hoc perspicue constat, si magnitudo tres

metiatur magnitudines, & ipſarum maximam communem menſuram metiri.

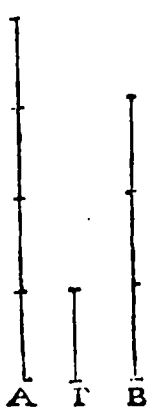
Similiter & in pluribus magnitudinibus maxima communis menſura invenietur, & corollarium procedet.

Prop. V. Theor.

Commenſurabiles magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

SInt commenſurabiles magnitudines A, B: dico magnitudinem A ad B rationem habere quam numerus ad numerum.

Quoniam enim A, B commenſurabiles ſunt, metietur ipſas aliqua magnitudo. metiatur, & ſit Γ. & quoties Γ ipſam A metitur tot unitates ſint in Δ; quoties autem Γ metitur B tot unitates ſint in E.



Quoniam igitur Γ ipſam A metitur per unitates quæ ſunt in Δ, metitur autem & unitas numerum Δ per unitates quæ in ipſo ſunt; unitas æqualiter metietur numerum Δ atque magnitudo Γ ipſam A: ergo ut Γ ad A ita eſt unitas ad Δ, & convertendo ut A ad Γ ita Δ ad unitatem. rurſus, quoniam Γ ipſam B metitur per unitates quæ ſunt in E, metiturque unitas numerum E per unitates quæ in ipſo ſunt; unitas numerum E æqualiter metietur atque Γ ipſam B: eſt igitur ut Γ ad B ita unitas ad E. oſtenſum autem eſt & ut A ad Γ ita eſſe Δ ad unitatem: quare ex æquo ut A ad B ita numerus Δ ad E numerum.

Commenſurabiles igitur magnitudines A, B inter ſe rationem habent quam Δ numerus ad numerum E. quod erat demonſtrandum.

Prop. VI. Theor.

Si duæ magnitudines inter ſe rationem habeant quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commenſurabiles.

DUÆ enim magnitudines A, B inter ſe rationem habeant quam Δ numerus ad numerum E: dico A, B magnitudines commenſurabiles eſſe.

Quot enim unitates ſunt in Δ, in tot partes æquales dividatur magnitudo A, & uni ipſarum æqualis ſit Γ: quot autem unitates ſunt in E, ex tot magnitudinibus æqualibus ipſi Γ componatur magnitudo Z.

Quoniam igitur quot ſunt in Δ unitates tot magnitudines ſunt in A ipſi Γ æquales; quæ pars eſt unitas ipſius Δ eadem pars erit & Γ ipſius A: ut igitur Γ ad A ita eſt unitas ad Δ. [metitur autem unitas ipſum Δ numerum: ergo

μέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέιζον αὐτῶν κοινὸν μετρήσει μέτρον.

Ομοίως δὲ καὶ ὅπι πλειόνων τὸ μέιζον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, ὃ τὸ πόρισμα προσχωρήσει.

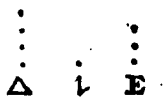
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

ΕΣτω σύμμετρα μεγέθη τὰ A, B· λέγω ὅτι τὸ A πρὸς τὸ B λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Επεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ A, B, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. ὁσάκις τὸ Γ τὸ A μετρεῖ τοσαύτας μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ τὸ Γ τὸ B μετρεῖ τοσαύτας μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E.

Επεὶ οὖν τὸ Γ τὸ A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Δ μετρεῖ καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ A· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ A οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Γ τὸ B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν E κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν E μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ B· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ B οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν E. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν μονάδα· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν E.



Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ A, B πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸν E. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς'.

Εὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

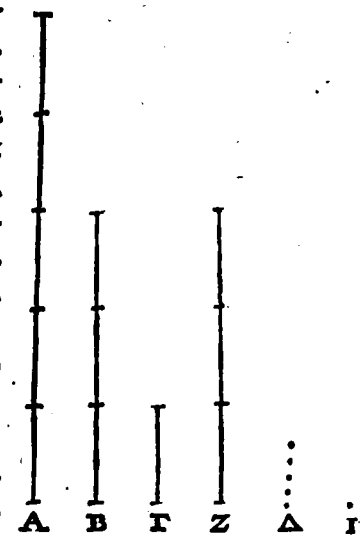
ΔΥΟ γὰρ μεγέθη πρὸς ἄλληλα τὰ A, B λόγον ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν E· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ A, B μεγέθη.

Οσαι γὰρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρήσθω τὸ A, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δέ εἰσιν ἐν τῷ E μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Z.

Επεὶ οὖν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες τοσαῦτα εἰσὶ καὶ ἐν τῷ A μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τὸν Δ τοῦτο μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τὸν A· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ A οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. [* μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ

* Illa uncis inclusa desiderantur in utroque Cod. MS.

καὶ τὸ Γ τὸ Α. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν] ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν, ἐπεὶ ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες τοσαῦτα εἶσι καὶ ἐν τῷ Ζ μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Ζ· τὸ Α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τῷ Ζ. μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.



& Γ ipſam A metietur. & quoniam eſt ut Γ ad A ita unitas ad Δ numerum:] erit igitur convertendo ut A ad Γ ita Δ numerus ad unitatem. rurſus, quoniam quot unitates ſunt in E tot ſunt & in Z magnitudines ipſi Γ æquales; ut Γ ad Z ita erit unitas ad E numerum. oſtenſum autem eſt & ut A ad Γ ita Δ eſſe ad unitatem: ergo ex æquo ut A ad Z ita Δ ad E. ſed ut Δ ad E ita A ad B: & igitur ut A ad B ita A ad Z. quod cum A ad utramque ipſarum B, Z eandem habeat rationem, erit [per 9. 5.] B ipſi Z æqualis. metitur autem Γ ipſam Z: ergo & ipſam B metietur. ſed & metitur A: quare Γ ipſas A, B metitur: commenſurabilis igitur eſt [per 1. def. 10.] A ipſi B.

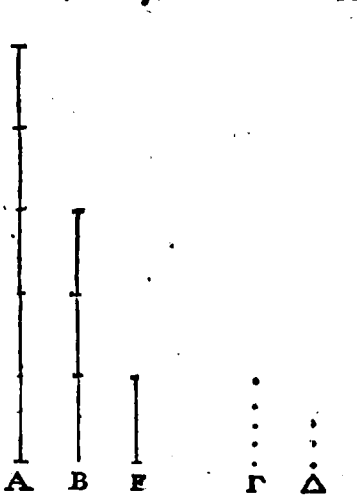
Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quare ſi duæ magnitudines inter ſe rationem habeant quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commenſurabiles. quod erat demonſtrandum.

ΑΛΛΩΣ.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη.

Ὅσαι γὰρ εἰσὶν ἐν τῷ Γ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμὸν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸν Β. μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Ε τὸ Β. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπεὶ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα ἑκάτερον τῶν Α, Β μετρεῖ· τὰ Α, Β ἄρα σύμμετρά ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ Ε.



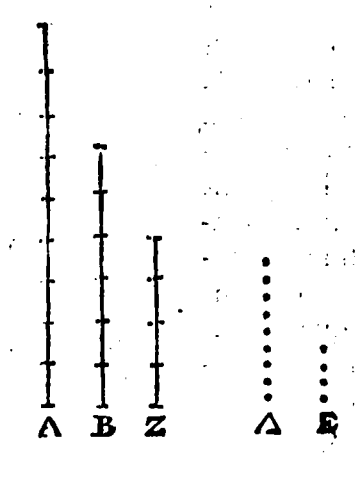
ALITER.

Duæ enim magnitudines A, B inter ſe rationem habeant quam numerus Γ ad numerum Δ: dico magnitudines commenſurabiles eſſe.

Quot enim unitates ſunt in Γ, in tot partes æquales dividatur A, & uni ipſarum æqualis ſit E: eſt igitur ut unitas ad Γ numerum ita E ad A. eſt autem & ut Γ ad Δ ita A ad B: ergo ex æquo ut unitas ad Δ numerum ita E ad B. ſed unitas metitur Δ: ergo & E ipſam B metitur. metitur autem & E ipſam A, quoniam & unitas metitur Γ: quare E utramque ipſarum A, B metietur; ideoque A, B commenſurabiles ſunt; atque eſt E communis ipſarum menſura.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεῖα ὡς ἡ Α, δυνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς τὸν Δ ἀριθμὸν πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως τὴν εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. ἐὰν δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ὡς ἡ Β, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς



Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo numeri ut Δ, E & recta linea ut A, fieri poſſe, ut Δ numerus ad numerum E ita eſſe rectam lineam A ad aliam rectam lineam. ſi autem inter ipſas A, Z media proportionalis ſumatur ut B, erit [per cor. 20. 6.] ut A ad Z ita quod fit ex A ad id quod ex B, hoc eſt ut prima ad tertiam ita figura quæ fit à prima ad eam quæ à ſecunda ſimilem & ſimiliter deſcriptam. ſed ut A ad Z ita Δ numerus

ad numerum B: factum igitur eſt & ut Δ numerus ad numerum B ita quod fit ex recta linea A ad id quod ex recta linea B.

πρὸς τὸ Ε ἀριθμόν· γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α εὐθείας πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β εὐθείας.

Prop. VII. Theor.

Incommenſurabiles magnitudines inter ſe rationem non habent quam numerus ad numerum.

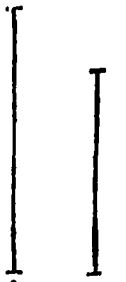
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

SInt commenſurabiles magnitudines A, B: dico A ad B rationem non habere quam numerus ad numerum.

Si enim A ad B rationem habet quam numerus ad numerum; commenſurabilis erit [per 6. 10.] A ipſi B. atqui non eſt commenſurabilis: non igitur A ad B rationem habet quam numerus ad numerum.

Quare incommenſurabiles magnitudines inter ſe rationem non habent quam numerus ad numerum. quod erat demonſtrandum.



Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si duæ magnitudines inter ſe rationem non habeant quam numerus ad numerum, incommenſurabiles erunt.

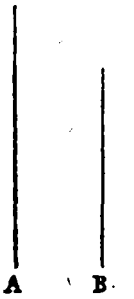
ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

DUÆ enim magnitudines A, B inter ſe rationem non habeant quam numerus ad numerum: dico magnitudines A, B incommenſurabiles eſſe.

Si enim commenſurabilis eſt A ipſi B, rationem habet [per 5. 10.] quam numerus ad numerum. atqui non habet: incommenſurabiles igitur ſunt A, B magnitudines.

Ergo ſi duæ magnitudines inter ſe rationem non habeant quam numerus ad numerum, incommenſurabiles erunt. quod erat demonſtrandum.



Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Εἰ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, λόγον ἔχει ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IX. Theor.

Quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata inter ſe rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & quadrata inter ſe rationem habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum & latera habebunt longitudine commenſurabilia: quadrata vero quæ à longitudine incommenſurabilibus rectis lineis fiunt inter ſe rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & quadrata inter ſe rationem non habentia quam quadratus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα ὃν τετράγωνος

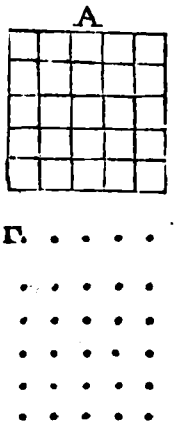
ἀριθμὸς

ἀριθμὸς πρὸς πετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

numerus ad quadratum numerum neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

Ἐστωσαν αἱ Α, Β μήκει σύμμετροι· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α πετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β πετράγωνον λόγον ἔχει ὃν πετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς πετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω δὴ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν, ἀλλὰ μὴν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγος διπλασίων ἐστὶν ὁ ἀπὸ τῆς Α πετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β πετράγωνον (τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν)· καὶ ὁ ἄρα τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν λόγος διπλασίων ἐστὶν ὁ ἀπὸ τῆς Γ πετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ πετράγωνον, δύο γὰρ πετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ πετράγωνος πρὸς τὸν πετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β πετράγωνον οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ ἀριθμοῦ πετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ ἀριθμοῦ πετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

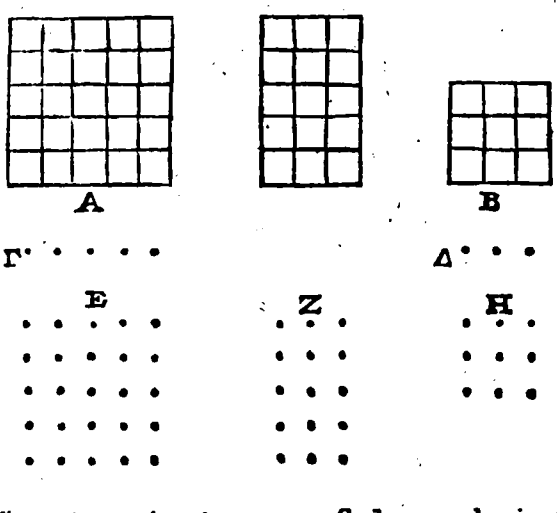


SInt rectæ lineæ A, B longitudine commenſurabiles: dico quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B eam rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Quoniam enim A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis, habebit [per 5. 10.] A ad B rationem quam numerus ad numerum. habeat eam quam numerus Γ ad numerum Δ. quoniam igitur eſt ut A ad B ita Γ numerus ad numerum Δ, & rationis quidem quam habet A ad B duplicata eſt ratio quadrati quod fit ex A ad quadratum quod ex B, ſimiles enim figuræ [per 20. 6.] in duplicata ſunt ratione homologorum laterum; rationis vero quam habet numerus Γ ad numerum Δ duplicata eſt ratio quadrati ipſius Γ ad ipſius Δ quadratum, nam [per 11. 8.] inter duos numeros quadratos unus medius proportionalis eſt numerus; & quadratus ad quadratum duplicatam rationem habet ejus quam latus habet ad latus: erit ut quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B ita quadratus numerus qui fit ex Γ numero ad quadratum numerum qui ex Δ. quod erat demonſtrandum.

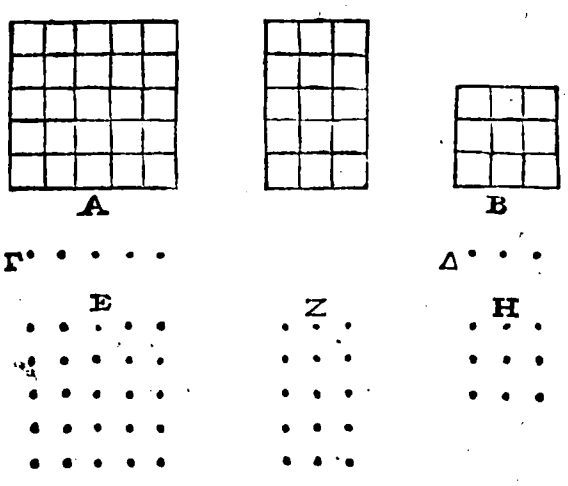
ΑΛΛΑΩΣ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει, λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω δὴ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τοῦτον ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τὰς Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τὰς Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τοῦτον ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ὑπὸ τὰς Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τὰς Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τὰς Α, Β οὕτως ἴσος ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ

ALITER. Quoniam enim commenſurabilis eſt A ipſi B longitudine, [per 5. 10.] rationem habet quam numerus ad numerum. habeat quam Γ ad Δ, & Γ ſeipſum quidem multiplicans faciat E, multiplicans vero Δ faciat Z, & Δ ſeipſum multiplicans faciat H. itaque quoniam Γ ſeipſum quidem multiplicans fecit E, multiplicans vero Δ fecit Z; erit [per 17. 7.] ut Γ ad Δ, hoc eſt [per conſtr.] ut A ad B ita E ad Z. ſed [per 1. 6.] ut A ad B ita quadratum quod fit ex A ad rectangulum quod fit ſub A, B: eſt igitur ut quadratum quod ex A ad rectangulum ſub A, B ita E ad Z. rurſus, quoniam Δ ſeipſum multiplicans fecit H, multiplicans vero Γ ipſum Z fecit, ut Γ ad Δ, hoc eſt ut A ad B, ita erit [per 17. 7.] Z ad H. ut autem A ad B ita rectangulum quod fit ſub A, B ad quadratum quod fit ex B: ergo ut rectangulum ſub A, B ad quadratum quod ex B ita Z ad H. ſed ut quadratum quod fit ex A ad rectangulum ſub A, B, ita erat E ad Z: ex æquo igitur ut



quadratum ex A ad quadratum ex B ita E ad H. . eſt autem uterque ipſorum E, H quadratus, & E quidem eſt à numero Γ, H vero ab ipſo Δ: quadratum igitur quod fit ex A ad quadratum quod ex B rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quod erat demonſtrandum.

SED ſit ut quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B ita quadratus numerus qui eſt à numero Γ ad quadratum numerum qui à numero Δ: dico A ipſi B longitudine commenſurabilem eſſe. quoniam enim eſt ut quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B ita quadratus numerus qui eſt à numero Γ ad quadratum numerum qui à numero Δ, ſed [per 20. 6.] ratio quidem quadrati quod fit ex A ad quadratum quod ex B duplicata eſt rationis quam habet A ad B; ratio vero quadrati numeri qui eſt à numero Γ ad quadratum numerum qui à numero Δ [per 11. 8.] itidem duplicata eſt rationis quam habet Γ numerus ad numerum Δ: eſt igitur ut A ad B ita Γ ad Δ: ergo A ad B rationem habet quam numerus Γ ad Δ numerum: ac propterea [per 6. 10.] A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis. quod erat demonſtrandum. ALITER. Sed quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B rationem habeat quam quadratus numerus E ad quadratum numerum H: dico A ipſi B longitudine commenſurabilem eſſe. Sit enim ipſius quidem E latus Γ, ipſius vero H latus Δ, & Γ ipſum Δ multiplicans faciat Z: ergo [per 17. 7.] E, Z, H deinceps proportionales ſunt in ratione ipſius Γ ad Δ. & quoniam [per 1. 6.] inter quadrata quæ fiunt ex A, B medium proportionale eſt rectangulum ſub A, B: inter numeros vero quadratos E, H [per 11. 8.] medius proportionalis eſt Z, erit ut quadratum quod fit ex A ad rectangulum ſub A, B ita E ad Z. [* ut autem rectangulum ſub A, B ad quadratum ex B ita Z ad H;] ſed ut quadratum ex A ad rectangulum ſub A, B ita A ad B: ergo A, B commenſurabiles ſunt; rationem enim habent quam numerus E ad numerum Z, hoc eſt quam Γ ad Δ. [ut enim Γ ad Δ ita E ad Z: nam Γ ſeipſum quidem multiplicans fecit E, multiplicans autem Δ ipſum Z fecit: eſt igitur [per 17. 7.] ut Γ ad Δ ita E ad Z. quod erat demonſtrandum.]



SED incommenſurabilis ſit A ipſi B longitudine: dico quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim quadratum ex A ad quadratum ex

τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β ἕτως ἑω ὁ Ε πρὸς τὸν Η. ἔστι δὲ ἑκάτερος τῶν Ε, Η τετράγωνος, ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ ἐστίν, ὁ δὲ Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τοῦ Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΑ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τοῦ Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον ἕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον· λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τοῦ Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Β τετράγωνον ἕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Β τετράγωνον λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ ἀριθμοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Δ ἀριθμοῦ τετράγωνον ἀριθμὸν λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ ἀριθμοῦ λόγου· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὸν Β ἕτως ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν· ἡ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ΑΛΛΩΣ. Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. Ἐσω γὰρ τοῦ μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η, ὁ Δ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β ἕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. [* ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β ἕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η,] ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β ἕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β· αἱ Α, Β ἄρα σύμμετροί εἰσι, λόγον γὰρ ἔχουσιν ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτέστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. [† ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ ἕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ ἕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ.] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΑ δὴ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ Α τῇ Β μήκει· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ

* Deſiderantur in *Codd. MSS.* † Illa uncis incluſa non agnoſcunt *Codd. MSS.* Videntur gloſſemata, & commode abeſſe poſſunt.

ἀπὸ

ἀπὸ τῆς Β πτραγωνον λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, σύμμετρος ἔσται ἡ Α τῇ Β μήκει. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

ΠΑΛΙΝ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον μὴ ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. Εἰ γὰρ ἔστι σύμμετρος ἡ Α τῇ Β μήκει, ἕξει τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ἐκ τῶν δεδειγμένων ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι οὐ πάντως καὶ μήκει, καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει.

Εἴπερ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν σύμμετρά ἐστιν· ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον εἰσὶ μήκει σύμμετροι ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπεὶ ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μήκει ἐδείχθη σύμμετρα, καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα, τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἔσται ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλ' ἁπλῶς ὃν ἕτερός τις ἀριθμὸς πρὸς ἕτερόν τινα ἀριθμόν, σύμμετρά ἐστι τὰ τετράγωνα, τυγχάνει αἱ εὐθεῖαι αἱ δυνάμει μόνον σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ τῶν λόγον ἔχοιεν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι. ἐπειδήπερ αἱ δυνάμει σύμμετροι δυνάμεναι λόγον μὴ ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο

B rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, [ex demonſtratis] commenſurabilis erit A ipſi B longitudine. non eſt autem: non igitur quadratum ex A ad quadratum ex B rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Rursus quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum: dico A ipſi B longitudine incommenſurabilem eſſe. Si enim commenſurabilis ſit A ipſi B longitudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. atqui non habet: non igitur A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis.

Ergo quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata inter ſe rationem habent quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Et manifeſtum eſt ex jam demonſtratis, lineas quæ longitudine ſunt commenſurabiles omnino & potentia commenſurabiles eſſe; quæ vero potentia commenſurabiles non ſemper & longitudine; & quæ longitudine incommenſurabiles ſunt non ſemper & potentia incommenſurabiles; quæ vero potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles eſſe.

Quoniam enim quadrata quæ fiunt à rectis lineis longitudine commenſurabilibus rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quæ vero rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum commenſurabilia ſunt: erunt rectæ lineæ longitudine commenſurabiles, non ſolum longitudine ſed & etiam potentia commenſurabiles.

Rurſus, quoniam quæcunque quadrata inter ſe rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum latera habent longitudine commenſurabilia, ut oſtenſum eſt, quæ etiam latera potentia commenſurabilia ſunt, cum eorum quadrata rationem habeant quam numerus ad numerum: quæcunque igitur quadrata rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſed ſimpliciter quam aliquis alius numerus ad alium numerum, commenſurabilia ſunt, hoc eſt rectæ lineæ, à quibus ipſa deſcribuntur, commenſurabiles ſunt potentia, non autem & longitudine: ergo rectæ lineæ longitudine quidem commenſurabiles omnino & potentia commenſurabiles ſunt; potentia vero commenſurabiles non ſemper & longitudine, niſi earum quadrata rationem habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Dico & longitudine incommenſurabiles non ſemper potentia incommenſurabiles eſſe. quoniam potentia commenſurabiles poſſunt rationem non habere quam numerus ad numerum, ideoque

ideoque cum potentia commenſurabiles ſint, longitudine ſunt incommenſurabiles: ergo non quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, omnino & potentia: ſed longitudine incommenſurabiles exiſtentes poſſunt potentia & incommenſurabiles & commenſurabiles eſſe.

Potentia vero incommenſurabiles omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt: ſi enim longitudine ſint commenſurabiles, [ex hactenus oſtenſis] & potentia commenſurabiles erunt. atqui ponuntur incommenſurabiles, quod eſt abſurdum: potentia igitur incommenſurabiles omnino & longitudine incommenſurabiles erunt.

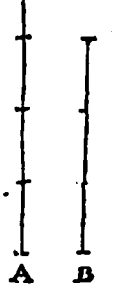
*Prop. X. Theor.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. & ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis; & tertia quartæ incommenſurabilis erit.

Sint quatuor magnitudines proportionales, A, B, Γ, Δ; ſitque ut A ad B ita Γ ad Δ, & ſit A ipſi B commenſurabilis: dico & Γ ipſi Δ commenſurabilem eſſe.

Quoniam enim A commenſurabilis eſt ipſi B, habebit [per 5. 10.] A ad B rationem quam numerus ad numerum. atque eſt ut A ad B ita Γ ad Δ: ergo & Γ ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum: commenſurabilis igitur [per 6. 10] eſt Γ ipſi Δ.

Sed A ipſi B ſit incommenſurabilis: dico & Γ ipſi Δ incommenſurabilem eſſe. quoniam enim incommenſurabilis eſt A ipſi B, non habebit [per 7. 10.] A ad B rationem quam numerus ad numerum. eſt autem ut A ad B ita Γ ad Δ: ergo neque Γ ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum. ſi enim Γ ad Δ rationem habeat quam numerus ad numerum; & A ad B [per 11. 5.] eam quam numerus ad numerum habebit: atque [per 6. 10.] erit A ipſi B commenſurabilis, quod eſt abſurdum; incommenſurabilis enim ponitur: ergo Γ ad Δ rationem non habet quam numerus ad numerum; ideoq; [per 8. 10.] Γ ipſi Δ eſt incommenſurabilis.



Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

Oſtenſum eſt in arithmeticis [ad 26. 8.] numeros planos ſimiles inter ſe rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ſi duo numeri inter ſe rationem habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos ſimiles planos eſſe. & manifeſtum eſt ex his, diſſimiles planos numeros, hoc eſt non habentes latera inter ſe proportionales, duos quadratos numeros non habere inter ſe rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ſi duo numeri inter ſe rationem non habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque eos ſimiles planos eſſe. & manifeſtum eſt ex his, diſſimiles planos numeros, hoc eſt non habentes latera inter ſe proportionales, duos quadratos numeros non habere inter ſe rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

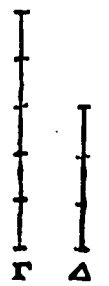
*ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾖ· καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται. καὶ ἐὰν τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ· καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ δὲ Α τῷ Β σύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἔχει λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, καὶ ἔσται σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἀσύμμετρον· τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.



Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ.

Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ, τουτέστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τοὺς πλευρὰς

* *Codd. MSS.* hanc undecimam, ſequentem vero decimam faciunt.

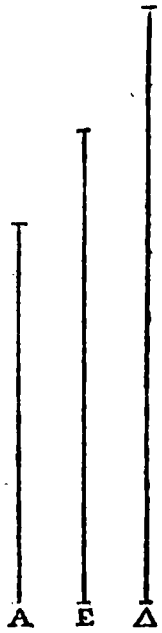
πολλαπλάσιος πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἔχουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· εἰ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

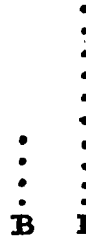
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· δεῖ δὴ τῇ Α προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τουτέστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον, ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει. εἰλήφθω τῶν Α, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. ἀσύμμετρος δέ ἐστιν ἡ Α τῇ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς Ε τετραγώνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Ε δυνάμει· τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ *τῇ ῥητῇ, ἀφ' ἧς ἐφάμεθα τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι, οἱονεὶ τῇ Α, δυνάμει μόνον σύμμετρός ἐστιν ἡ Δ, τουτέστι ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε. [† ἄλογος γὰρ καθόλου καλεῖται τὰ καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους τῇ ῥητῇ.] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.





tionalia) rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. si enim haberent, similes plani essent, contra hypothesin: ergo dissimiles plani inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Prop. XI. Probl.

Propositæ rectæ lineæ invenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT proposita recta linea A: oportet ipsi A invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

Exponantur enim duo numeri B, Γ, inter se rationem non habentes quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est dissimiles plani; & [per coroll. 6. 10.] fiat ut B ad Γ ita quadratum ex A ad quadratum ex Δ, hoc enim ante traditum est: ergo quadratum ex A commensurabile est quadrato ex Δ. & quoniam B ad Γ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex A ad quadratum ex Δ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur [per 9. 10.] est A ipsi Δ longitudine. sumatur inter ipsas A, Δ media proportionalis E: est igitur [per coroll. 2. 20. 6.] ut A ad Δ ita quadratum ex A ad quadratum ex E. sed A ipsi Δ longitudine est incommensurabilis: ergo [per 10. 10.] & quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit: incommensurabilis igitur est A ipsi E potentia: ergo propositæ rectæ lineæ rationali, à qua [in 5. def. 10.] dicebamus mensuras sumi, nempe A, potentia quidem commensurabilis inventa est Δ, hoc est rationalis potentia tantum commensurabilis, irrationalis vero E. [† irrationales enim universe appellantur quæ rationali & longitudine & potentia incommensurabiles sunt.] quod erat demonstrandum.

In numeris, sit A, 6. B, 4. Γ, 10. Erit $\Delta = \sqrt{45}$. & $E = \sqrt{\sqrt{1620}}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Ἕκάτερον γὰρ τῶν Α, Β τῷ Γ ἔστω σύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶ σύμμετρον.

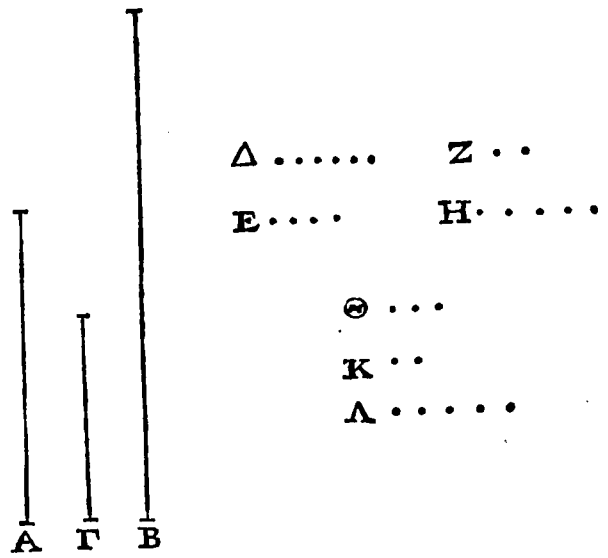
Prop. XII. Theor.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles & inter se commensurabiles sunt.

UTraque enim ipsarum A, B ipsi Γ sit commensurabilis: dico & A ipsi B commensurabilem esse.

* Rectius in Codd. MSS. τῇ Α προσκείσθω δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι, αἱ Δ, Ε, μήκει μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε.
† Videtur Scholion.

Quoniam enim A commenſurabilis eſt ipſi Γ, habebit [per 5. 10.] A ad Γ rationem quam numerus ad numerum. habeat quam numerus Δ ad ipſum E. Rurſus, quoniam commenſurabilis eſt B ipſi Γ, habebit Γ ad B rationem quam numerus ad numerum. habeat quam Z ad H. & rationibus datis quibuſcunque, videlicet quam habet Δ ad E & quam habet Z ad H, ſumantur numeri deinceps proportionales Θ, K, Λ in datis rationibus; ſitque ut Δ ad E ita Θ ad K, ut autem Z ad H ita K ad Λ.



Quoniam igitur eſt ut A ad Γ ita Δ ad E; ſed ut Δ ad E ita Θ ad K: erit & ut A ad Γ ita Θ ad K. rurſus, quoniam eſt ut Γ ad B ita Z ad H, ſed ut Z ad H ita K ad Λ; erit & ut Γ ad B ita K ad Λ. eſt autem & ut A ad Γ ita Θ ad K: ex æquo igitur [per 23.5.] ut A ad B ita Θ ad Λ: ergo A ad B rationem habet quam numerus Θ ad Λ numerum: ac propterea [per 6. 10.] A ipſi B eſt commenſurabilis.

Quæ igitur eidem magnitudini ſunt commenſurabiles & inter ſe commenſurabiles ſunt. quod erat demonſtrandum.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν, τοῦτο ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις, οἱ Θ, Κ, Λ· ὥστε εἶναι ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸν Λ.

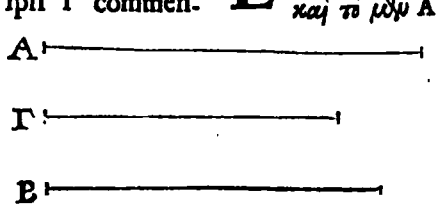
Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Λ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIII. Theor.

Si ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera vero incommenſurabilis; magnitudines inter ſe incommenſurabiles erunt.

SInt enim duæ magnitudines A, B, alia autem ſit Γ, & A quidem ipſi Γ commenſurabilis ſit, B vero eidem incommenſurabilis: dico & A ipſi B incommenſurabilem eſſe.



Si enim commenſurabilis eſt A ipſi B, eſt autem & Γ commenſurabilis ipſi A; erit [per 12. 10.] & Γ ipſi B commenſurabilis quod eſt contra hypotheſin.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ᾖ τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Ἔστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι τὸ Γ, καὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ Β τῷ Γ ἀσύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ ἐστι σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ τῷ Α· καὶ τὸ Γ ἄρα τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν. ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

Prop. XIV. Theor.

Si duæ magnitudines commenſurabiles ſint, altera autem ipſarum alicui magnitudini ſit incommenſurabilis; &

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

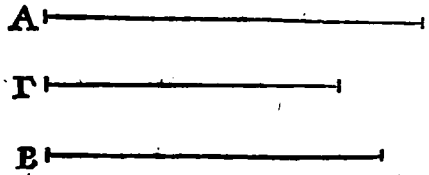
Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ· καὶ τὸ

τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

reliqua eidem incommenſurabilis erit.

ΕΣτω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἑτέρῳ τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ ἔστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ τὸ Α τῷ Β σύμμετρον· καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.



Εἰσὶν ἄρα δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt duæ magnitudines commenſurabiles A, B: altera vero ipſarum A alicui magnitudini Γ ſit incommenſurabilis: dico & reliquam B ipſi Γ incommenſurabilem eſſe.

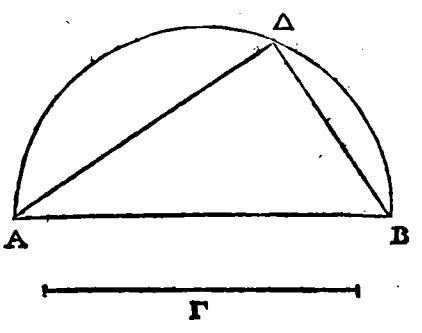
Si enim commenſurabilis eſt B ipſi Γ, eſt autem & A commenſurabilis ipſi B; & [per 12. 10.] A ipſi Γ commenſurabilis erit. ſed & incommenſurabilis, quod fieri non poteſt: non igitur commenſurabilis eſt B ipſi Γ: ergo eſt incommenſurabilis.

Si igitur duæ magnitudines commenſurabiles ſint, altera autem ipſarum alicui magnitudini ſit incommenſurabilis; & reliqua eidem incommenſurabilis erit. quod erat demonſtrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, εὑρεῖν τινὶ μεῖζον δύνασθαι ἢ μείζων τὴν ἐλάσσονος.

Ἐκκείσθωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τινὶ μεῖζον δύνασθαι ἢ ΑΒ τὴν Γ.



Γεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον, τὸ ΑΔΒ, καὶ εἰς αὐτὸ ἐναρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. Φανερὸν δή ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία, καὶ ὅτι ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῇ Γ, μεῖζον δύναται τῇ ΔΒ.

Describatur ſuper rectam lineam ΑΒ ſemicirculus ΑΔΒ, & [per 1.4.] in eo aptetur recta linea ΑΔ ipſi Γ æqualis, & ΔΒ jungatur. perſpicuum eſt [per 31.3.] angulum ΑΔΒ rectum eſſe & ipſam ΑΒ [per 47.1.] plus poſſe quam ΑΔ, hoc eſt quam Γ, quantum eſt rectæ lineæ ΔΒ quadratum.

ΟΜΟΙΩΣ δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἡ δυναμένη αὐτὰς εὑρίσκεται ὧδε.

Ἐκκείσθωσαν αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ· δεῖ δὴ ἔτι εὑρεῖν τὰς τὰ δυναμένην αὐτάς. ἐκκείσθωσαν γάρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ.

SIMILITER autem & datis duabus rectis lineis, quæ ipſas poteſt hoc modo invenietur.

Sint duæ datæ rectæ lineæ ΑΔ, ΔΒ, & oporteat invenire rectam lineam quæ ipſas poſſit. exponantur enim ita ut rectum angulum ΑΔΒ contineant, & ΑΒ jungatur: patet rurſus [per 47. 1.] rectam lineam ΑΒ ipſas ΑΔ, ΔΒ poſſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον δύνηται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

PROP. XV. THEOR.

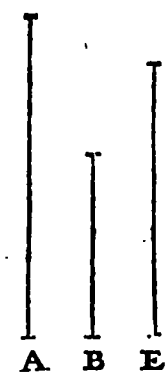
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus poſſit quam ſecunda quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; & tertia tanto plus poterit quam quarta quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. quod ſi prima tanto plus poſſit quam ſecunda quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; & tertia quam quarta tanto plus poterit quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

ΕΣτωσαν δὴ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, Γ, Δ, ſitque ut A ad B ita Γ ad Δ;

& A quidem plus poſſit quam B quadrato quod fit ex E; Γ vero plus poſſit quam Δ quadrato ex Z: dico ſi A ipſi B ſit commenſurabilis, & Γ ipſi Z commenſurabilem eſſe; ſi vero A ipſi E ſit incommenſurabilis, & Γ ipſi Z incommenſurabilem eſſe.

Quoniam enim eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, erit [per 1. cor. 22. 6.] ut quadratum ex A ad quadratum ex B ita quadratum ex Γ ad id quod ex Δ fit quadratum. ſed quadrato quidem quod fit ex A æqualia ſunt [ex hyp.] quadrata quæ ex ipſis E, B; quadrato autem ex Γ æqualia ſunt quadrata ex Z, Δ: igitur ut quadrata quæ fiunt ex E, B ad quadratum ex B ita quadrata quæ fiunt ex Z, Δ ad quadratum ex Δ: & dividendo [per 17. 5.] ut quadratum ex E ad quadratum ex B ita quadratum ex Z ad quadratum ex Δ: quare [per 22. 6.] ut E ad B ita eſt Z ad Δ, & [per 4. 5.] convertendo ut B ad E ita Δ ad Z. eſt autem & ut A ad B ita Γ ad Δ: ex æquo igitur [per 22. 5.] ut A ad E ita eſt Γ ad Z: ergo [per 10. 10.] ſi A eſt commenſurabilis ipſi E, & Γ ipſi Z erit commenſurabilis; ſi vero incommenſurabilis eſt A ipſi E, & Γ ipſi Z incommenſurabilis erit.



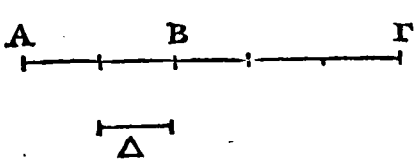
Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales ſint, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

PROP. XVI. PROBL.

Si duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo utrique ipſarum commenſurabilis erit. quod ſi tota magnitudo uni ipſarum ſit commenſurabilis; & quæ à principio magnitudines commenſurabiles erunt.

COmponantur enim duæ magnitudines commenſurabiles AB, BΓ: dico & totam magnitudinem AΓ utrique ipſarum AB, BΓ commenſurabilem eſſe.

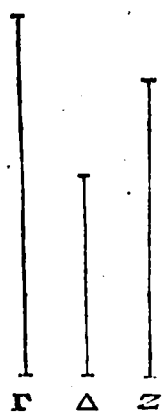
Quoniam enim commenſurabiles ſunt AB, BΓ, [per 1. def. 10.] metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, ſitque Δ. & quoniam Δ metitur ipſas AB, BΓ, & totam AΓ metietur. metitur autem & AB, BΓ: ergo Δ magnitudines AB, BΓ & ipſam AΓ metitur: commenſurabilis igitur eſt AΓ utrique ipſarum AB, BΓ.



SED AΓ uni ipſarum AB, BΓ ſit commenſurabilis, videlicet ipſi AB: dico & AB, BΓ commenſurabiles eſſe.

Quoniam enim commenſurabiles ſunt AΓ, AB, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, & ſit Δ, καὶ ἡ Α μὴν τὴν Β μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ε, ἡ δὲ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ζ· λέγω ὅτι εἰπὲ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, εἰπὲ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῶν Ε, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· δίισου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ζ· εἰπὲ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, εἰπὲ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.



Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται. καὶ ἐὰν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν σύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ τὸ ΑΓ μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

ΑΛΛΑ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἔστω σύμμετρον, ἔστω δὴ τῷ ΑΒ· λέγω δὴ ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ σύμμετρά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΓ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ

ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰς ΑΓ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰς ΑΒ, ΒΓ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

Εἰ ἄρα δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δ. itaque quoniam Δ metitur ipſas ΑΓ, ΑΒ, & reliquam ΒΓ metietur. metitur autem & ΑΒ: ergo Δ ipſas ΑΒ, ΒΓ metietur: ac propterea ΑΒ, ΒΓ commenſurabiles ſunt.

Si igitur duæ magnitudines commenſurabiles componantur, & tota magnitudo utrique ipſarum commenſurabilis erit, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

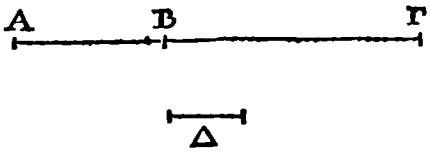
Εἰὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται. κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

PROP. XVII. THEOR.

Si duæ magnitudines incommenſurabiles componantur; & tota magnitudo utrique ipſarum incommenſurabilis erit. quod ſi tota magnitudo uni ipſarum ſit incommenſurabilis; & quæ à principio magnitudines incommenſurabiles erunt.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΒΑ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. ὑπέκειντο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἀδύνατον ἐστιν· οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρά ἐστι· τὸ ΑΓ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.



Comonantur enim duæ magnitudines incommenſurabiles ΑΒ, ΒΓ: dico & totam magnitudinem ΑΓ utrique ipſarum ΑΒ, ΒΓ incommenſurabilem eſſe.

Si enim non ſunt incommenſurabiles ΓΑ, ΑΒ, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, ſitq; Δ, ſi fieri poteſt. quoniam igitur Δ metitur ipſas ΓΑ, ΑΒ, & reliquam ΒΓ metietur. metitur autem & ΒΑ: ergo Δ ipſas ΑΒ, ΒΓ metitur; ac propterea [per 1. def. 10.] commenſurabiles ſunt ΑΒ, ΒΓ. ponuntur autem & incommenſurabiles, quod fieri non poteſt: non igitur ipſas ΓΑ, ΑΒ metietur aliqua magnitudo: quare ΓΑ, ΑΒ incommenſurabiles ſunt. ſimiliter & ΑΓ, ΓΒ incommenſurabiles eſſe demonſtrabimus: ergo ΑΓ utrique ipſarum ΑΒ, ΒΓ eſt incommenſurabilis.

ΑΛΛΑ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστω, καὶ πρῶτον τῷ ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστιν. εἰ γὰρ ἐστὶ σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ. ὑπέκειντο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν * ὅτι εἰ τὸ ΑΓ τῷ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα ἔσται.

Sed ΑΓ uni ipſarum ΑΒ, ΒΓ incommenſurabilis ſit; & primum ipſi ΑΒ: dico & ΑΒ, ΒΓ incommenſurabiles eſſe. ſi enim ſunt commenſurabiles, [per 1. def. 10.] eas aliqua magnitudo metietur. metiatur, & ſit Δ. quoniam igitur Δ metitur ipſas ΑΒ, ΒΓ, & totam ΑΓ metietur. metitur autem & ΑΒ: ergo Δ ipſas ΓΑ, ΑΒ metitur: ideoque ΓΑ, ΑΒ commenſurabiles ſunt. ponuntur autem & incommenſurabiles, quod fieri non poteſt: non igitur ipſas ΑΒ, ΒΓ metietur aliqua magnitudo: quare ΑΒ, ΒΓ incommenſurabiles erunt. ſimiliter demonſtrabimus, ſi ΑΓ incommenſurabilis ſit ipſi ΓΒ, etiam ΑΒ, ΒΓ incommenſurabiles eſſe.

Εἰὰν ἄρα δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

ΛΗΜΜΑ.

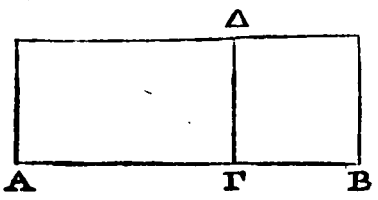
Εαὐ παρὰ εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· τὸ παραβληθὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

LEMMA.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, deficiens figura quadrata; parallelogrammum applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub partibus rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

* Ita reſtituimus ex *Codd. MSS.* antea in *Editis* erat ὅτι τὸ ΑΓ ᾧ λοιπῷ τῷ ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Ad aliquam enim rectam AB applicetur AΔ parallelogrammum, deficiens figura quadrata ΔB: dico parallelogrammum AΔ rectangulo ſub AΓ, ΓB æquale eſſe.



Atque hoc per ſe patet: quoniam enim quadratum eſt ΔB, erit ΔΓ ipſi ΓB æqualis; atq; AΔ eſt parallelogrammum quod ſub AΓ, ΓB continetur.

Si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

Παρὰ γὰρ τινα εὐθεῖαν τὴν AB παραβεβλήσθω τὸ AΔ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ΔB· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AΔ τῷ ὑπὸ τ AΓ, ΓB.

Καὶ ἔστιν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔB, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓB, καὶ ἔστι τὸ AΔ τὸ ὑπὸ τ AΓ, ΓB.

Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XVIII. Theor.

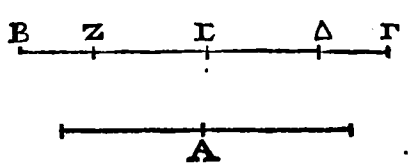
Si ſint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividat; major tanto plus poterit quam minor quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. quod ſi major tanto plus poſſit quam minor quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκη· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκη.

SInt duæ rectæ lineæ inæquales A, BΓ, quarum major BΓ, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori A (hoc eſt ei quod fit à dimidia ipſius A) æquale parallelogrammum ad BΓ applicetur deficiens figura quadrata, & ſit quod continetur ſub BΔ, ΔΓ, ſitque BΔ ipſi ΔΓ commenſurabilis longitudine: dico BΓ plus poſſe quam A quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis.

Secetur enim BΓ bifariam in puncto E, & ipſi ΔE æqualis ponatur EZ: reliqua igitur ΔΓ eſt æqualis BZ. & quoniam recta linea BΓ ſecatur in partes quidem æquales ad E punctum, in partes vero inæquales ad punctum Δ; erit [per 5. 2.] rectangulum ſub BΔ, ΔΓ una cum quadrato ex EΔ æquale quadrato ex EΓ; & eorum quadrupla: quod igitur quater ſub BΔ, ΔΓ continetur una cum quadrato quod quater fit ex EΔ æquale eſt quadrato quod quater fit ex EΓ. ſed ei quidem quod quater ſub BΔ, ΔΓ continetur æquale eſt [ex hyp.] quadratum ex A, ei vero quod quater fit ex ΔE æquale eſt quadratum ex ΔZ; etenim ΔZ ipſius ΔE eſt dupla; & ei quod quater fit ex EΓ æquale eſt quadratum ex BΓ; rurſus enim BΓ dupla eſt ipſius EΓ: ergo quadrata quæ fiunt ex A, ΔZ æqualia ſunt ei quod fit ex BΓ quadrato: ac propterea quadratum quod fit ex BΓ



Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ A, BΓ, ὧν μείζων ἡ BΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τ ἀπὸ τ ἐλάσσονος τ A, τουτέστι τῷ ἀπὸ τ ἡμισείας τ A, ἴσον παραβεβλήσθω παρὰ τὴν BΓ παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τ BΔ, ΔΓ, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ BΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ BΓ τ A μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Τετμήσθω γὰρ ἡ BΓ δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΔE ἴση ἡ EZ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἐστὶ τῇ BZ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ BΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ E, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τ ἀπὸ τ EΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EΓ τετραγώνῳ, καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετράκις ἀπὸ τ EΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τ EΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν τετράκις ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον, τῷ δὲ τετράκις ἀπὸ τῆς ΔE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τ ΔZ τετράγωνον, διπλασίων γάρ ἐστι ΔZ τ ΔE· τῷ δὲ τετράκις ἀπὸ τ EΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τ BΓ τετράγωνον, διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ BΓ τ EΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τ A, ΔZ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BΓ τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τ BΓ

τῶ

τῷ ἀπὸ τῆς Α μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τὴν Α μεῖζον δύναται τῆ ΔΖ. δεικτέον ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῆ ΔΖ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῆ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῆ ΔΓ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΔΓ ταῖς ΓΔ, ΒΖ ἐστὶ σύμμετρος μήκει, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῆ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ταῖς ΒΖ, ΓΔ ἐστὶ σύμμετρος μήκει· ὥστε καὶ λοιπῆ τῆ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΒ μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ μήκει.

ΑΛΛΑ δὴ ἡ ΒΓ τὴν Α μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ μήκει, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τὰ ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῆ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. δυνάσθω δὴ ἡ ΒΓ τὴν Α μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῆ σταμφοτέρῳ τῆ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. ἀλλὰ σταμφοτέρῳ ἡ ΒΖ, ΔΓ τῆ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΒΖ τῆ ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός ἐστι μήκει τῆ ΔΓ· δηλονότι ἄρα ἡ ΒΔ τῆ ΔΓ ἐστὶ σύμμετρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

majus est quam quadratum quod ex Α quadrato ex ΔΖ: recta igitur linea ΒΓ tanto plus potest quam Α quantum est ipsius ΔΖ quadratum. ostendendum est & ΒΓ ipsi ΔΖ commensurabilem esse. quoniam enim [ex hyp.] ΒΔ commensurabilis est ipsi ΔΓ longitudine, erit [per 16. 10.] & ΒΓ ipsi ΔΓ longitudine commensurabilis. sed [per 6.10.] ΔΓ ipsis ΓΔ, ΒΖ est commensurabilis longitudine, æqualis enim est ΓΔ ipsi ΒΖ: quare & ΒΓ ipsis ΒΖ, ΓΔ longitudine est commensurabilis: & reliquæ igitur ΖΔ [per 16. 10.] longitudine commensurabilis erit: ergo ΒΓ plus potest quam Α quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Sed ΒΓ plus possit quam Α quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit ex Α æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur deficiens figura quadrata; & sit quod continetur sub ΒΔ, ΔΓ. ostendendum est ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine commensurabilem esse.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus ΒΓ plus posse quam Α quadrato rectæ lineæ ΖΔ. sed [ex hyp.] ΒΓ plus potest quam Α quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: ergo ΒΓ commensurabilis est ipsi ΖΔ longitudine; & reliquæ igitur, utrique scilicet ΒΖ, ΔΓ, [per 16. 10.] longitudine est commensurabilis. sed utraque ΒΖ, ΔΓ ipsi ΔΓ commensurabilis est longitudine, etenim ΒΖ est æqualis ΔΓ; ergo & ΒΓ ipsi ΔΓ longitudine est commensurabilis: constat igitur [per 16.10.] ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine commensurabilem esse.

Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει.

Prop. XIX. Theor.

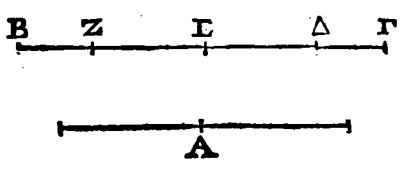
Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; major tanto plus poterit quam minor quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. quod si major tanto plus possit quam minor quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividet.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τὰ ΒΔ, ΔΓ,

Sint duæ rectæ lineæ inæquales Α, ΒΓ, quarum major ΒΓ, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori Α æquale parallelogrammum ad ipsam ΒΓ applicetur, deficiens figura quadrata, & sit quod continetur sub ΒΔ, ΔΓ, sitque

ſitque BΔ ipſi ΔΓ longitudine incommenſurabilis: dico BΓ plus poſſe quam A, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Iiſdem enim quæ ſupra conſtructis, ſimiliter oſtendemus ipſam BΓ plus poſſe quam A quadrato rectæ lineæ ΔZ. oſtendendum igitur eſt BΓ ipſi ΔZ longitudine incommenſurabilem eſſe. quoniam enim incommenſurabilis eſt BΔ ipſi ΔΓ, erit [per 17. 10.] & BΓ ipſi ΔΓ longitudine incommenſurabilis. ſed ΔΓ commenſurabilis eſt utriſque BZ, ΔΓ: ergo [per 14.10.] & BΓ utriſque BZ, ΔΓ longitudine eſt incommenſurabilis: ac propterea BΓ [per 17.10.] reliquæ ZΔ incommenſurabilis eſt longitudine, & BΓ plus poteſt quam A quadrato ex ZΔ: igitur BΓ plus poteſt quam A quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.



Sed BΓ rurſus plus poſſit quam A quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, quartæ autem parti quadrati quod fit ex A æquale parallelogrammum ad BΓ applicetur deficiens figura quadrata; & ſit quod ſub BΔ, ΔΓ continetur. oſtendendum eſt BΔ ipſi ΔΓ longitudine incommenſurabilem eſſe.

Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus BΓ plus poſſe quam A quadrato rectæ lineæ ΔZ. ſed [ex hyp.] BΓ plus poteſt quam A quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: incommenſurabilis igitur eſt BΓ ipſi ΔZ longitudine: quare [per 17.10.] & reliquæ, videlicet utrique BZ, ΔΓ, eſt incommenſurabilis. ſed [per 6. 10.] utraque BZ, ΔΓ commenſurabilis eſt longitudine ipſi ΔΓ: ergo [per 14. 10.] & BΓ ipſi ΔΓ eſt incommenſurabilis longitudine; ac propterea dividendo [per 17.10.] BΔ ipſi ΔΓ longitudine incommenſurabilis erit.

Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales ſint, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM 1.

Quoniam demonſtratum eſt [ad cor.9.10.] longitudine commenſurabiles omnino & potentia commenſurabiles eſſe, potentia vero commenſurabiles non ſemper & longitudine, ſed poſſe & longitudine commenſurabiles eſſe & incommenſurabiles; manifeſtum eſt, ſi expoſitæ rationali aliqua commenſurabilis fuerit longitudine, illam rationalem vocari, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine ſed etiam potentia: longitudine enim commenſurabiles omnino & potentia commenſurabiles ſunt. ſi vero expoſitæ rationali aliqua fuerit potentia commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic rationalis & commenſurabilis ipſi longitudine & potentia. quod ſi expoſitæ rationali rurſus aliqua commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic rationalis potentia tantum commenſurabilis.

SCHOLIUM 2.

Rationales vocat eas, quæ expoſitæ rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, vel potentia tantum. ſunt autem &

ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τοῦ Α μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρόσθεν, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ. δεικτέον ἐν ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΔΓ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρός ἐστι σωαμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρός ἐστι σωαμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει, καὶ ἡ ΒΓ τοῦ Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἡ ΒΓ ἄρα τοῦ Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

ΔΥΝΑΣΘΩ δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τοῦ Α μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ἀλλ' ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ σωαμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. ἀλλὰ σωαμφοτέρῳ ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

Ἐπειδὴ δέδεικται ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δηλαδὴ δύνανται καὶ μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι· φανερὸν ὅτι ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, αἱ γὰρ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει λέγεται, καὶ ἔστιν ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει. εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις ἐστὶ δυνάμει μήκει ἡ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ ἔστιν ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

*ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

Ῥητὰς καλεῖ ταῖς τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ ἤτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους, ἢ δυνάμει μόνον. εἰσὶ δὴ καὶ

* In editis Πρόκλου σχόλιον dicitur: ſed in *MSS.* nulla mentio *Procli*. Non tamen ideo *Euclidis* eſſe arbitramur: nam & hoc Scholium & præcedens, ut & alia pleraque Scholia & Lemmata hujuſce libri, *Euclidi* abjudicanda eſſe cenſemus.

ἄλλαι

ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὴ σύμμετροί εἰσι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καλοῦμεν δὲ τοῦτο πάλιν λέγοντες ῥηταὶ καὶ σύμμετροι τοῖς ἀλλήλαις καθ' ὁ ῥηταί, ἀλλὰ σύμμετροι τοῖς ἀλλήλαις, ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὐταὶ ῥητῇ μήκει σύμμετροι, ἐπακκολουθεῖ δὲ ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον τοῖς ἀλλήλαις εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ ῥητῇ δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὅτι δὲ αἱ ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν, ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ῥηταί εἰσιν αἱ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

aliæ rectæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles, atque ob id rursus dicuntur rationales & commensurabiles inter se quatenus rationales; sed commensurabiles inter se, vel longitudine & potentia vel potentia solum. & si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut intelligatur etiam potentia commensurabiles esse: si vero potentia solum inter se sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque rationales potentia solum commensurabiles. at vero rationales commensurabiles esse, ex his constat: quoniam enim rationales sunt quæ expositæ rationali sunt commensurabiles, quæ vero eidem commensurabiles [per 12. 10.] etiam inter se commensurabiles sunt; sequitur rationales commensurabiles esse. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

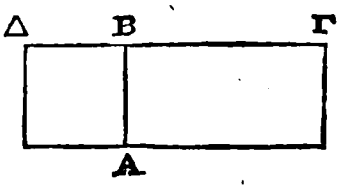
Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ῥητόν ἐστιν.

Prop. XX. Theor.

Quod sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis secundum aliquem prædictorum modorum continetur rectangulum, rationale est.

ΥΠΟ γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ ΑΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, σύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΑΓ.



Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SUB rationalibus enim longitudine commensurabilibus rectis lineis AB, BΓ contineatur rectangulum AΓ: dico AΓ rationale esse.

Describatur ex AB quadratum AΔ; ergo AΔ est rationale. & quoniam AB commensurabilis est ipsi BΓ longitudine, atque est AB æqualis BΔ; erit BΔ ipsi BΓ longitudine commensurabilis. est autem [per 1. 6.] & ut BΔ ad BΓ ita ΔA ad AΓ, & commensurabilis est BΔ ipsi BΓ: ergo [per 10. 10.] & ΔA ipsi AΓ commensurabile erit. estque rationale ΔA: quare & AΓ est rationale.

Quod igitur sub rationalibus, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

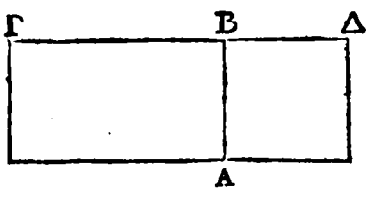
Εἰ ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ· πλάτος ποιεῖ ῥητήν, ᾗ σύμμετρον τὴν παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Prop. XXI. Theor.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, & ei ad quam applicatum est longitudine commensurabilem.

ΡΗΤΟΝ γὰρ τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν κατά τινα πάλιν τῶν εἰρημένων τρόπων τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω, πλάτος ποιεῖτω τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ΑΓ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· σύμμετρος ἄρα



RAtionale enim AΓ ad rationalem secundum aliquem rursus dictorum modorum nempe AB applicetur, latitudinem faciens BΓ: dico BΓ rationalem esse, & ipsi AB longitudine commensurabilem.

Describatur enim ex AB quadratum AΔ: ergo AΔ rationale est. sed & rationale est AΓ: ergo [per 1. schol. 19. 10.] AΔ ipsi AΓ est commensurabile. atque [per 1. 6.] est ut ΔA ad AΓ ita ΔB ad BΓ: com-

menſurabilis igitur eſt ΔB ipſi BΓ. eſt autem BΔ æqualis BA: quare AB ipſi BΓ commenſurabilis eſt. ſed AB eſt rationalis: rationalis igitur eſt & BΓ,& ipſi BA longitudine commenſurabilis.

Si igitur rationale ad rationalem applicetur, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

Recta linea quæ poteſt irrationale ſpatium, irrationalis eſt.

Poſſit enim recta linea A ſpatium irrationale, hoc eſt quadratum quod fit ab A irrationali ſpatio ſit æquale: dico A irrationalem eſſe.

A

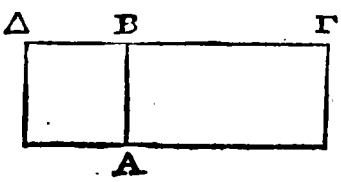
Si enim A ſit rationalis, erit quod ab ipſa fit quadratum rationale; ſic enim in definitionibus ponitur. atqui rationale non eſt: ergo A irrationalis ſit neceſſe eſt. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXII. THEOR.

Quod ſub rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale eſt; & recta linea ipſum potens eſt irrationalis, vocetur autem media.

SUB rationalibus enim potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis AB, BΓ contineatur rectangulum AΓ: dico AΓ irrationale eſſe, & rectam lineam quæ ipſum poteſt irrationalem eſſe, vocetur autem media.

Deſcribatur enim ex AB quadratum AΔ: ergo AΔ rationale eſt. & quoniam AB incommenſurabilis eſt ipſi BΓ longitudine, potentia enim ſolum ponuntur commenſurabiles, atque eſt AB æqualis BΔ: incommenſurabilis igitur eſt ΔB ipſi BΓ longitudine. eſt autem [per I. 6.] ut ΔB ad BΓ ita AΔ ad AΓ: ergo AΔ ipſi AΓ eſt incommenſurabile. ſed AΔ rationale eſt: irrationale igitur eſt AΓ: quare [per II. def. 10.] & recta linea quæ ipſum AΓ poteſt, videlicet quæ poteſt quadratum ipſi æquale, eſt irrationalis. vocetur autem media; propterea quod ipſius quadratum eſt æquale rectangulo quod ſub AB, BΓ continetur, & inter ipſas AB, BΓ media fit proportionalis. quod erat demonſtrandum.



*SCHOLIUM.

Media eſt irrationalis quæ poteſt ſpatium contentum ſub rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus.

Sub rationalibus enim potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis A, B ſpatium contineatur. oſtendendum eſt hujuſmodi ſpatium irrationale eſſe.

Sumatur enim inter ipſas A, B media proportionalis Γ; ergo [per 17. 6.] quod fit ſub A, B eſt æquale quadrato ex Γ; ac propterea Γ poteſt rectangulum quod ſub ipſis A,B continetur: eſt igitur ut A

ἐστὶ ἡ ΔB τῇ BΓ. ἴση δὲ ἡ BΔ τῇ BA· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ AB τῇ BΓ. ῥητὴ δ' ἐστὶν ἡ AB· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ BΓ, καὶ σύμμετρος τῇ BA μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν παραβληθὲν ῥητὸν ποιῇ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ.

Η δυναμένη ἄλογον χωρίον, ἄλογός ἐστι.

Δυνάσθω γὰρ ἡ A ἄλογον χωρίον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον ἴσον ἔστω ἀλόγῳ χωρίῳ· λέγω ὅτι ἡ A ἄλογός ἐστιν.

Εἰ γὰρ ἐστι ῥητὴ ἡ A, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, ὅτως γὰρ ἐν τοῖς ὅροις. οὐκ ἔστι δέ· ἄλογον ἄρα ἡ A ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέση.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB, BΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ AΓ· λέγω ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ AΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέση.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ AΔ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ BΓ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι, ἴση δὲ ἡ AB τῇ BΔ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔB τῇ BΓ μήκει. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BΓ ὅτως τὸ AΔ πρὸς τὸ AΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AΔ τῷ AΓ. ῥητὸν δὲ τὸ AΔ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ AΓ· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ AΓ, τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη, ἄλογός ἐστι. καλείσθω δὲ μέση, διότι τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AB, BΓ, καὶ μέσην ἀνάλογον αὐτὴν γίνεσθαι τῶν AB, BΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

*ΣΧΟΛΙΟΝ.

Μέση ἐστὶν ἄλογος ἡ δυναμένη χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων.

Ὑπὸ ῥητῶν γὰρ δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν A, B περιεχέσθω χωρίον. δεικτέον ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ τοιοῦτον χωρίον.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν A, B μέση ἀνάλογον ἡ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Γ· ὥστε ἡ Γ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν A, B· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν

* In *MSS.* non reperitur.

B ὅτως

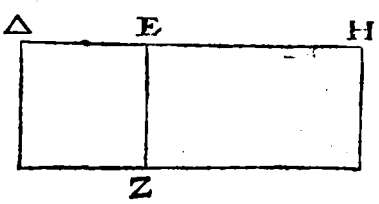
Β ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὸν τρίτον ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πορίσματι τοῦ ιθ' τοῦ ς' στοιχείου. ἀσύμμετρον δὲ ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Γ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ἄλογον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ. μέση δὲ κεκλήσθω, ὅτι ἄλογος οὖσα μέσον δύο ῥητῶν τῶν Α, Β ἀνάλογόν ἐστιν.

ad Β ita quadratum ex Α ad id quod fit ex Γ quadratum, nam ut prima ad tertiam ita quadratum quod fit ex prima ad quadratum ex ſecunda, quod demonſtratum eſt in corollario prop. 28. ſexti Elementorum. incommenſurabilis autem eſt Α ipſi Β longitudine: ergo [per 10. 10.] & quadratum ex Α quadrato ex Γ eſt incommenſurabile. ſed quadratum ex Α rationale eſt: irrationale igitur eſt quod ſub rectis lineis Α, Β continetur: ergo Γ eſt irrationalis. media autem idcirco vocatur, quod irrationalis exiſtens inter ipſas Α, Β rationales media eſt proportionalis.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ, ΕΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΗΖ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΗ ἄτως τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΖΗ, καί ἐστι τὸ μὲν ΖΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὸ δὲ ΖΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τουτέστιν ὡς τὸ ΗΖ πρὸς τὸ ΔΖ, ἄτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ.

LEMMA.

Si ſint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad ſecundam ita quadratum quod fit à prima ad rectangulum quod ſub duabus rectis lineis continetur.

Sint duæ rectæ lineæ ΖΕ, ΕΗ: dico ut ΖΕ ad ΕΗ ita eſſe quadratum ex ΖΕ ad rectangulum ſub ΖΕ, ΕΗ. Deſcribatur ex ΖΕ quadratum ΔΖ, & ΗΖ compleatur. quoniam igitur [per 1. 6.] eſt ut ΔΕ ad ΕΗ ita ΖΔ ad ΖΗ, atque eſt ΖΔ quidem quadratum ex ΖΕ, ΖΗ vero quod ſub ΔΕ, ΕΗ continetur, hoc eſt rectangulum ſub ΖΕ, ΕΗ: erit ut ΖΕ ad ΕΗ ita quadratum ex ΖΕ ad rectangulum ſub ΖΕ, ΕΗ. ſimiliter autem & ut rectangulum ſub ΗΕ, ΕΖ ad quadratum ex ΕΖ, hoc eſt ut ΗΖ ad ΔΖ, ita eſt ΗΕ ad ΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'

Τὸ ὑπὸ μέσης καὶ ῥητῆς παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητόν, καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν καλεῖται μήκει.

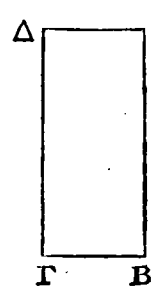
Prop. XXIII. Theor.

Quod fit à media ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem, & ei ad quam applicatum eſt longitudine incommenſurabilem.

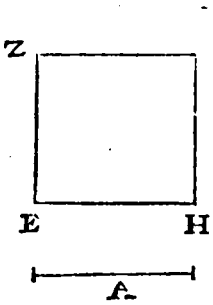
Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον τὸ ΒΔ πλάτος ποιὸν τὴν ΓΔ· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΓΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει.

SIT media quidem Α, rationalis autem ΓΒ; & ad ΓΒ ei quod fit ex Α æquale ſpatium applicetur ΒΔ latitudinem faciens ΓΔ: dico ΓΔ rationalem eſſe, & ipſi ΒΓ longitudine incommenſurabilem.

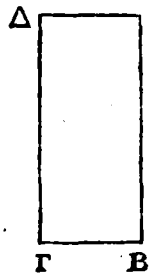
Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων. δυνάσθω τὸ ΗΖ. δύναται δὲ καὶ τὸ ΒΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔ τῷ ΗΖ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ ἄτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. σύμ-



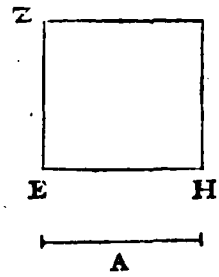
Quoniam enim media eſt Α, [per 22. 10.] poteſt ſpatium contentum ſub rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus. poſſit ΗΖ. ſed poteſt & ΒΔ: æquale igitur eſt ΒΔ ipſi ΗΖ. atque eſt illi æquiangulum, æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera quæ circum æquales angulos [per 14. 6.] ſunt reciproce proportionalia: ergo ut recta ΒΓ ad ΕΗ rectam ita eſt ΕΖ ad ΓΔ: eſt igitur & ut quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΕΗ ita [per 22. 6.] quadratum ex ΕΖ ad id quod fit ex ΓΔ quadratum. ſed



quadratum ex ΒΓ commensurabile est quadrato ex ΕΗ, utraque enim ipsarum est rationalis: commensurabile igitur est [per 10. 10.] & quadratum ex ΕΖ quadrato ex ΓΔ. est autem quadratum ex ΕΖ rationale: ergo & rationale est quadratum ex ΓΔ; ac propterea recta linea ΓΔ est rationalis. itaque quoniam ΖΕ incommensurabilis est ipsi ΕΗ longitudine, potentia enim solum [per 22. 10.] commensurabiles sunt, ut autem ΖΒ ad ΕΗ ita [per lem. præc.] quadratum ex ΕΖ ad rectangulum sub ΖΕ, ΕΗ: erit [per 10. 10.] quadratum ex ΕΖ incommensurabile rectangulo sub ΖΕ, ΕΗ. sed quadrato quidem ex ΕΖ commensurabile est quadratum ex ΓΔ, rationales enim sunt potentia; rectangulo vero sub ΕΖ, ΕΗ est commensurabile rectangulum sub ΔΓ, ΓΒ, utrumque enim est æquale quadrato ex Α: ergo [per 13. 10.] quadratum ex ΓΔ incommensurabile est rectangulo sub ΔΓ, ΓΒ. sed ut quadratum ex ΓΔ ad rectangulum sub ΔΓ, ΓΒ ita est [per lem. præc.] ΔΓ ad ΓΒ: ergo ΔΓ ipsi ΓΒ incommensurabilis est longitudine; & [per 6. def. 10.] ob id ΔΓ est rationalis & ipsi ΓΒ longitudine incommensurabilis. quod erat demonstrandum.



μετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ῥητὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τ ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τ ΕΖ σύμμετρον τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ, ἴσον γὰρ εἰσὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ περιεχομένῳ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ ἕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

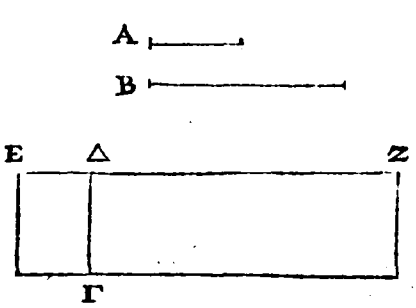


Prop. XXIV. Theor.

Mediæ commensurabilis media est.

SIT media Α, & ipsi Α commensurabilis sit Β: dico & Β mediam esse.

Exponatur enim rationalis ΓΔ, & quadrato quidem ex Α æquale ad ΓΔ applicetur spatium rectangulum ΓΕ latitudinem efficiens ΕΔ: rationalis igitur est ΕΔ [per 23. 10.] & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. quadrato autem ex Β æquale ad ΔΓ applicetur spatium rectangulum ΓΖ latitudinem efficiens ΔΖ. quoniam igitur Α commensurabilis est ipsi Β, erit [per cor. 9. 10.] quadratum ex Α quadrato ex Β commensurabile. sed [per constr.] quadrato quidem ex Α æquale est rectangulum ΕΓ; quadrato autem ex Β æquale ΓΖ: commensurabile igitur est rectangulum ΕΓ rectangulo ΓΖ. atque est [per 1. 6.] ut ΕΓ ad ΓΖ ita ΕΔ ad ΔΖ: ergo ΕΔ ipsi ΔΖ longitudine est commensurabilis. est autem [per 23. 10.] ΕΔ rationalis, & longitudine incommensurabilis ipsi ΔΓ: ergo [per 13. 10.] & ΔΖ rationalis est & ipsi ΔΓ longitudine incommensurabilis: rationales igitur sunt ΓΔ, ΔΖ potentia solum commensurabiles. quod autem sub rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est; & recta linea ipsum potens [per 22. 10.] est irrationalis, vocaturque



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Η τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστίν.

ΕΣτω μέση ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω ὅτι καὶ ἡ Β μέση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΔΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τ Α τῷ ἀπὸ τ Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τ Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΓ τῷ ΓΖ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ ἕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ μήκει. ῥητὴ δ' ἐστὶν ἡ Ε Δ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· αἱ ΓΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἡ δυναμένη μέση· ἡ ἄρα

ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυναμένη μέση ἐστί, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἡ Β· μέση ἄρα ἐστὶν ἡ Β.

media: ergo recta linea quæ potest rectangulum sub ΓΔ, ΔΖ est media. sed Β potest rectangulum sub ΓΔ, ΔΖ: quare Β media erit.

Πόρισμα.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστίν. δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι αἷς εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν. ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ τὸ τῇ μέσῃ μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μέσον, καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ ἔστω μέση καὶ μήκει καὶ δυνάμει σύμμετροι. εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέση δυνάμει μόνον σύμμετροι. * Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι, καὶ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὸ μέσαι ἄλλαι σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἦσαν μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει, ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι, ἐπειδὴ τὸ ὅτι καὶ δυνάμει. εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ ἔστω δυνάμει μόνον σύμμετροι. [† ὅτι δὲ αἱ μέσαι σύμμετροί εἰσιν, ἔστω δεικτέον. ἐπεὶ αἱ μέσαι μέσῃ τινὶ σύμμετροί εἰσι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα μέσαι σύμμετροί εἰσιν.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est spatium medio spatio commensurabile medium esse. possunt enim ipsa rectæ lineæ quæ sunt potentia commensurabiles, quarum altera media est: ergo & reliqua media erit. quemadmodum autem & in rationalibus dictum est ita & in mediis dicemus, rectam lineam mediæ longitudine commensurabilem dici mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine sed & potentia; universe enim quæ longitudine commensurabiles sunt etiam potentia sunt commensurabiles. si vero mediæ commensurabilis quædam recta linea fuerit potentia, siquidem etiam longitudine, dicuntur & sic mediæ & longitudine & potentia commensurabiles. si autem potentia solum, dicuntur mediæ potentia solum commensurabiles. * Rursus sunt & aliæ rectæ, longitudine quidem incommensurabiles mediæ, & potentia tantum illi commensurabiles, & hæ etiam mediæ dicuntur; quoniam potentia commensurabiles mediæ sunt & inter se commensurabiles: nam mediæ aliæ sunt inter se commensurabiles vel longitudine & potentia vel potentia tantum. & siquidem longitudine, dicuntur mediæ longitudine commensurabiles, & consequenter etiam & potentia. si vero sunt potentia tantum commensurabiles, dicuntur potentia tantum commensurabiles. [† quod vero mediæ sint inter se commensurabiles sic ostenditur. quoniam enim mediæ sunt cuidam mediæ commensurabiles, & quæ eidem sunt commensurabiles inter se sunt commensurabiles, erunt mediæ inter se commensurabiles.]

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

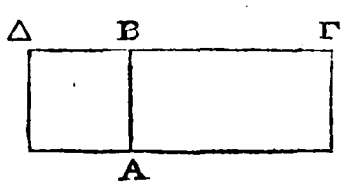
Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μέσον ἐστίν.

Prop. XXV. Theor.

Quod sub mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur, rectangulum medium est.

ΥΠΟ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ σύμμετρόν ἐστι. μέσον δὲ τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



SUB mediis enim longitudine commensurabilibus rectis lineis ΑΒ, ΒΓ contineatur rectangulum ΑΓ: dico ΑΓ medium esse.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ: ergo ΑΔ medium est. & quoniam commensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, æqualis autem ΑΒ ipsi ΒΔ; erit ΔΒ ipsi ΒΓ longitudine commensurabilis: quare ΔΑ commensurabile est ipsi ΑΓ. sed ΑΔ est medium: ergo [per coroll. 24. 10.] & ΑΓ medium erit. quod erat demonstr.

* Quæ sequuntur desunt in quibusdam exemplaribus, nec ea agnoscit *Commandinus*. † Illa uncis inclusa futilia videntur & scioli alicujus glossemata.

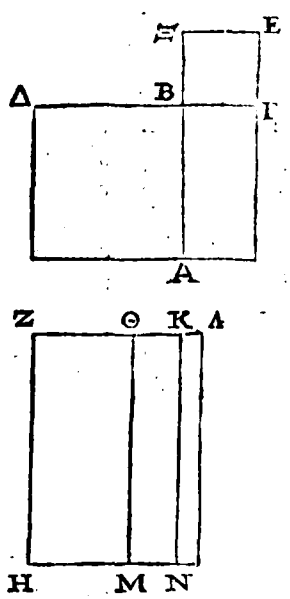
PROP. XXVI. THEOR.

Quod ſub mediis potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale eſt vel medium.

SUB mediis enim potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis AB, BΓ contineatur rectangulum AΓ: dico AΓ vel rationale eſſe vel medium.

Deſcribantur enim ex AB, BΓ quadrata AΔ, BE: utrumque igitur ipſorum AΔ, BE medium eſt. exponatur rationalis ZH, & [per 45. 1.] ipſi quidem AΔ æquale ad ZH applicetur parallelogrammum rectangulum HΘ latitudinem faciens ZΘ, ipſi vero AΓ æquale ad ΘM applicetur rectangulum MK latitudinem faciens ΘK; & inſuper ipſi BE æquale ſimiliter ad KN applicetur NΛ latitudinem faciens KΛ: in recta igitur linea [per 14. 1.] ſunt ZΘ, ΘK, KΛ. quoniam igitur medium eſt utrumque ipſorum AΔ, BE, atque eſt AΔ quidem æquale ipſi HΘ, BE vero ipſi NΛ; erit & utrumque ipſorum HΘ, NΛ medium, & ad rationalem ZH applicata ſunt: ergo [per 23. 10.] & utraque ipſarum ZΘ, KΛ eſt rationalis, & ipſi ZH longitudine incommenſurabilis. & quoniam commenſurabile eſt [ex hyp.] AΔ ipſi BE, erit & HΘ ipſi NΛ commenſurabile. ſed [per 1. 6.] eſt ut HΘ ad NΛ ita ZΘ ad KΛ: ergo [per 10. 10.] ZΘ ipſi KΛ eſt commenſurabilis longitudine; ac propterea ZΘ, KΛ rationales ſunt longitudine commenſurabiles: rationale igitur eſt rectangulum quod ſub ZΘ, KΛ continetur. & quoniam BΔ quidem ipſi BA eſt æqualis, Ξ B vero ipſi BΓ; erit ut ΔB ad BΓ ita AB ad BΞ. ſed [per 1. 6.] ut ΔB ad BΓ ita ΔA quadratum ad rectangulum AΓ. ut autem AB ad BΞ ita AΓ rectangulum ad quadratum ΓΞ: eſt igitur ut ΓΞ ad AΓ ita AΓ ad AΔ. æquale autem eſt AΔ ipſi HΘ, & AΓ ipſi MK, & ΓΞ ipſi NΛ; quare ut HΘ ad MK ita MK ad NΛ; & igitur ut ZΘ ad ΘK ita ΘK ad KΛ: ideoque [per 17. 6.] quod ſub ZΘ, KΛ continetur eſt æquale quadrato quod fit ex ΘK. eſt autem [per 20. 10.] quod continetur ſub ZΘ, KΛ rationale: ergo & rationale eſt quadratum ex ΘK; ac propterea recta linea ΘK rationalis. & ſi quidem ΘK commenſurabilis eſt ipſi ΘM, hoc eſt ipſi ZH, longitudine, erit rectangulum NΘ rationale. ſi vero ΘK eſt incommenſurabilis ipſi ZH longitudine, KΘ, ΘM rationales erunt potentia ſolum commenſurabiles, & ob id [per 22. 10.] rectangulum ΘN medium erit: ergo ΘN vel rationale eſt vel medium. ſed ΘN eſt æquale ipſi AΓ: quare AΓ vel rationale vel medium eſt.

Quod igitur ſub mediis potentia ſolum com-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κτ'.

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἤτοι ῥητόν ἐστιν ἢ μέσον.

ΥΠΟ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB, BΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ AΓ· λέγω ὅτι τὸ AΓ ἤτοι ῥητόν ἐστιν ἢ μέσον.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετράγωνα τὰ AΔ, BE· μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν AΔ, BE. καὶ ἐκκείσθω ῥητή τις ἡ ZH, καὶ τῷ μὲν AΔ ἴσον παρὰ τὴν ZH παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ HΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ZΘ, τῷ δὲ AΓ ἴσον παρὰ τὴν ΘM παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ MK πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK, καὶ ἔτι τῷ BE ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν KN παραβεβλήσθω τὸ NΛ πλάτος ποιοῦν τὴν KΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ZΘ, ΘK, KΛ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν AΔ, BE, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν AΔ τῷ HΘ, τὸ δὲ BE τῷ NΛ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκάτερον τῶν HΘ, NΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZH παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ZΘ, KΛ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει. ἐπεὶ οὖν σύμμετρόν ἐστι τὸ AΔ τῷ BE· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ HΘ τῷ NΛ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ HΘ πρὸς τὸ NΛ οὕτως ἡ ZΘ πρὸς τὴν KΛ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZΘ τῇ KΛ μήκει· αἱ ZΘ, KΛ ἄρα ῥηταί εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ZΘ, KΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν BΔ τῇ BA, ἡ δὲ ΞB τῇ BΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν BΞ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὸ ΔA πρὸς τὸ AΓ. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΞ οὕτως τὸ AΓ πρὸς τὸ ΓΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΞ πρὸς τὸ AΓ οὕτως τὸ AΓ πρὸς τὸ AΔ. ἴσον δέ ἐστι τὸ μὲν AΔ τῷ HΘ, τὸ δὲ AΓ τῷ MK, τὸ δὲ ΓΞ τῷ NΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ HΘ πρὸς τὸ MK οὕτως τὸ MK πρὸς τὸ NΛ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ZΘ πρὸς τὴν ΘK οὕτως ἡ ΘK πρὸς τὴν KΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ZΘ, KΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘK. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ZΘ, KΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘK· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘK. εἰ μὲν οὖν ἡ ΘK σύμμετρός ἐστι τῇ ΘM, τουτέστι τῇ ZH, μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ NΘ. εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ZH μήκει, αἱ KΘ, ΘM ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘN· τὸ ΘN ἄρα ἤτοι ῥητόν ἐστιν ἢ μέσον. ἴσον δὲ τὸ ΘN τῷ AΓ· τὸ AΓ ἄρα ἤτοι ῥητόν ἐστιν ἢ μέσον ἐστί.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων περιε-

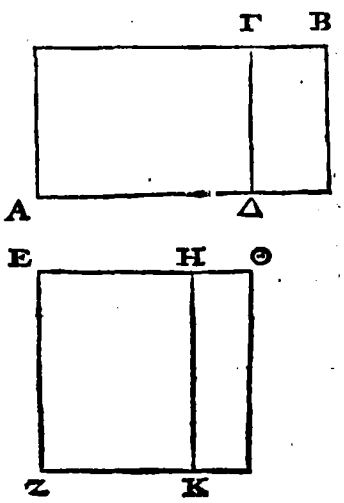
περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

menſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum vel rationale eſt vel medium. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΖΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῷ τῷ ΚΘ ἴσον ἐστίν. ῥητὸν δὲ ἐστὶ τὸ ΒΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΑΓ, καί ἐστι τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΖΗ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΖΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΒ, ἔστιν δὲ ἴσον τῷ ΚΘ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ, καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΘ μήκει. ἔστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τὰς ΕΗ, ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετράγωνα, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τὰς ΕΗ, ΗΘ, διπλάσιον γάρ ἐστι· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τὰς ΕΗ, ΗΘ τῷ δὶς ὑπὸ τὰς ΕΗ, ΗΘ· καὶ συναμφότερα ἄρα τὰ ἀπὸ τὰς ΕΗ, ΗΘ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἄλογον ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. ἀλλὰ καὶ ῥητή, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.



Οὐκ ἄρα μέσον μέσου ὑπερέχει ῥητῷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXVII. THEOR.

Medium non ſuperat medium rationali.

SI enim fieri poteſt, medium ΑΒ ſuperet medium ΑΓ rationali ΔΒ, & exponatur rationalis ΕΖ, atque [per 45. 1.] ipſi quidem ΑΒ æquale ad ΕΖ applicetur parallelogrammum rectangulum ΖΘ latitudinem faciens ΕΘ, ipſi vero ΑΓ æquale auferatur ΖΗ: reliquum igitur ΒΔ reliquo ΚΘ eſt æquale. rationale autem eſt ΒΔ: ergo & ΚΘ eſt rationale. quoniam igitur medium eſt utrumque ipſorum ΑΒ, ΑΓ, eſtque ΑΒ æquale ΖΘ, & ΑΓ æquale ΖΗ; erit & utrumque ipſorum ΖΘ, ΖΗ medium. & ad rationalem ΕΖ applicata ſunt: rationalis igitur eſt utraque earum ΕΘ, ΕΗ [per 23. 10.] & ipſi ΕΖ longitudine incommenſurabilis. & quoniam rationale eſt ΔΒ, & ipſi ΚΘ æquale; & ΚΘ rationale erit. eſt autem ad ΕΖ applicatum: rationalis igitur eſt ΗΘ [per 21. 10.] & ipſi ΕΖ commenſurabilis longitudine. ſed & ΕΗ eſt rationalis, & ipſi ΕΖ longitudine incommenſurabilis: ergo [per 13. 10.] ΕΗ incommenſurabilis eſt ipſi ΗΘ longitudine. atque eſt [per 1. 6.] ut ΕΗ ad ΗΘ ita quadratum ex ΕΗ ad rectangulum quod ſub ΕΗ, ΗΘ continetur: incommenſurabile igitur [per 10. 10.] eſt quadratum ex ΕΗ rectangulo ſub ΕΗ, ΗΘ. ſed quadrato quidem ex ΕΗ commenſurabilia ſunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata, utraque enim ſunt rationalia, rectangulo autem ſub ΕΗ, ΗΘ commenſurabile eſt quod bis ſub ΕΗ, ΗΘ continetur, eſt enim ipſius duplum: ergo [per 14. 10.] quadrata ex ΕΗ, ΗΘ incommenſurabilia ſunt ei quod bis ſub ΕΗ, ΗΘ continetur: & utraq; igitur videlicet quadrata ex ΕΗ, ΗΘ & quod bis continetur ſub ΕΗ, ΗΘ, hoc eſt [per 4. 2.] quadratum ex ΕΘ, incommenſurabilia ſunt [per 17. 10.] quadratis ex ΕΗ, ΗΘ. ſunt autem rationalia quæ fiunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata: irrationale igitur [per 10. def. 10.] eſt quadratum ex ΕΘ: ac propterea ΕΘ eſt irrationalis. ſed & rationalis, quod fieri non poteſt.

Non igitur medium ſuperat medium rationali. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Γ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ.

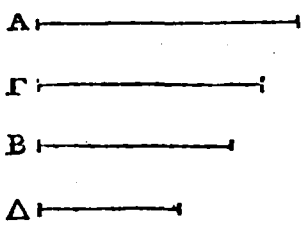
PROP. XXVIII. PROBL.

Medias invenire potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale contineant.

EXponantur duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles Α, Β, & ſumatur inter ipſas Α, Β [per 13. 6.] media proportionalis Γ, fiatque [per 12. 6.] ut Α ad Β ita Γ ad Δ.

Quoniam

Quoniam igitur A, B rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, erit [per 22. 10.] quod ſub ipſis A, B continetur rectangulum, hoc eſt [per 17. 6.] quadratum ex Γ, medium: ergo recta linea Γ media eſt. & quoniam ut A ad B ita eſt Γ ad Δ, ſuntque A, B potentia ſolum commenſurabiles; & [per 10. 10.] Γ, Δ potentia ſolum commenſurabiles erunt. eſt autem recta linea Γ media: media igitur [per 24. 10.] eſt & Δ: quare Γ, Δ mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles. dico etiam ipſas rationale continere. quoniam enim eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, erit permutando [per 16. 5.] ut A ad Γ ita B ad Δ. ſed ut A ad Γ ita Γ ad B: ergo & ut Γ ad B ita B ad Δ: quod igitur ſub ipſis Γ, Δ continetur [per 17. 6.] quadrato ex B eſt æquale. rationale autem eſt quadratum ex B: ergo & quod continetur ſub Γ, Δ rationale erit.



Inventæ igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent. quod erat faciendum.

Καὶ ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τυτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ, μέσον ἐστί· μέση ἄρα ἡ Γ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, αἱ δὲ Α, Β δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ· αἱ Γ, Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ.

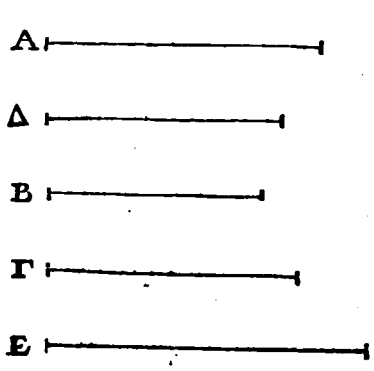
Εὑρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXIX. Probl.

Medias invenire potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant.

EXponantur tres rationales potentia ſolum commenſurabiles A, B, Γ, ſumaturque [per 13. 6.] inter ipſas A, B media proportionalis Δ, & [per 12. 6.] fiat ut B ad Γ ita Δ ad E.

Quoniam igitur A, B rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, erit [per 22. 10.] quod ſub A, B continetur rectangulum, hoc eſt [per 17. 6.] quadratum ex Δ, medium: ergo Δ media eſt. & quoniam B, Γ ſunt rationales potentia ſolum commenſurabiles, atque eſt ut B ad Γ ita Δ ad E; rectæ lineæ Δ, E [per 10. 10.] potentia ſolum commenſurabiles erunt. eſt autem Δ media: ergo [per 24. 10.] & E media eſt; ac propterea Δ, E mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles. dico ipſas etiam medium continere. quoniam enim eſt ut B ad Γ ita Δ ad E, erit permutando ut B ad Δ ita Γ ad E. ut autem B ad Δ ita eſt Δ ad A: ergo & ut Δ ad A ita Γ ad E: quod igitur ſub A, Γ continetur rectangulum [per 16. 6.] eſt æquale contento ſub Δ, E. eſt autem [per 22. 10.] quod continetur ſub A, Γ medium: ergo & quod continetur ſub Δ, E medium erit.



Inventæ igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent. quod erat faciendum.

Lemma.

Invenire duos numeros quadratos, ita ut qui ex ipſis componitur etiam quadratus ſit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιέχούσας.

ΕΚκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε.

Ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τυτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστί· μέση ἄρα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ αἱ Β, Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσί. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε. ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Α, καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὑρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

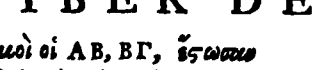
Λημμα.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Ἐκκείσθωσαν

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἴσωσαν δὴ ἤτοι ἄρτιοι ἢ περισσοί. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἀπὸ ταὐτοῦ ταὐτὸς, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν· ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστι. τετμήσθω ὁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ. ἴσωσαν ἤδη καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ ἤτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἱ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τετράγωνον· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπειδήπερ ἐδείχθη ὅτι ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν· εὕρηται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ, ὅ, τε ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, οἱ συντιθέντες ποιοῦσι τὸν ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετράγωνον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Exponantur duo numeri AB, BΓ, qui vel pares ſint vel impares. & quoniam ſive à pari par auferatur, ſive ab impari impar [per 24, & 26. 9] reliquus par eſt; erit AΓ numerus par. ſecetur AΓ bifariam in Δ. ſint autem AB, BΓ vel ſimiles plani vel quadrati, qui & ipſi ſimiles plani ſunt: ergo [per 6. 2.] qui fit ſub AB, BΓ una cum quadrato ex ΓΔ eſt æqualis ei qui fit ex BΔ quadrato. atque qui fit ex AB, BΓ eſt quadratus; oſtenſum enim eſt [ad 1. 9.] ſi duo ſimiles plani ſeſe multiplicantes aliquem faciant, factum quadratum eſſe: inventi igitur ſunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit ſub AB, BΓ & qui fit ex ΓΔ, qui quidem inter ſe compoſiti quadratum numerum faciunt, nempe eum qui fit ex BΔ. quod erat faciendum.



Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ὅτι εὕρηται πάλιν δύο τετράγωνοι, ὅ, τε ὑπὸ τῶν ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ὦσιν. ὅταν δὲ μὴ ὦσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρηται δύο τετράγωνοι, ὅ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ, ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, οὐκ ἔστι τετράγωνον.

Corollarium.

Et manifeſtum eſt rurſus inventos eſſe duos numeros quadratos, & qui fit ex BΔ & qui ex ΓΔ, ita ut ipſorum exceſſus, videlicet qui fit ſub AB, BΓ, ſit quadratus, quando AB, BΓ ſimiles plani ſunt. quando autem non ſunt ſimiles plani, inventi ſunt duo quadrati, & qui fit ex BΔ & qui ex ΓΔ, quorum exceſſus, nempe qui ſub AB, BΓ, non eſt quadratus.

ΛΗΜΜΑ β'.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμοὺς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Ἔστω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἔφαμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ὁ ΓΑ δίχα κατὰ τὸ Δ· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνῳ. ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΔΕ· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνου. λέγω δὴ ὅτι ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ οὐκ ἔστι τετράγωνος.

Εἰ γὰρ ἔστι τετράγωνος, ἤτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ ἢ ἐλάσσων, οὐκέτι δὲ μείζων, ἵνα μήτε τμηθῇ ἡ μονὰς, μήτε ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὅς ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ ΒΔ, ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ. ἔστω εἰ δυνατὸν πρότερον ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, καὶ ἔστω διπλασίων ὁ ΗΑ τῆς ΔΕ μονάδος. ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλασίων, ὧν ὁ ΑΗ ἐστὶ διπλασίων τῆς ΔΕ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΗ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστὶ διπλασίων. δίχα ἄρα τέτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ. καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ, συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῷ ΗΒ, ὅπερ ἀπο-

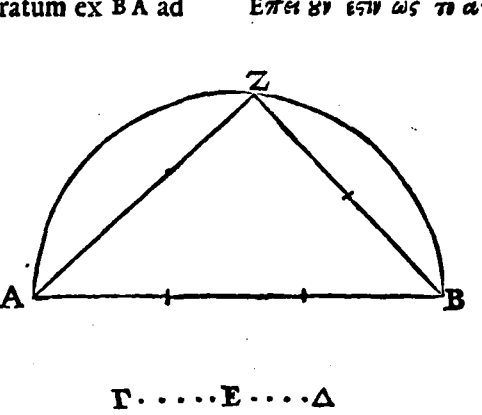
LEMMA 2.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut qui ex ipſis componitur non ſit quadratus.

Sit enim qui ſub AB, BΓ quadratus, ut dictum eſt [ad lem. præc.] & par numerus ΓA; ſeceturque ΓA bifariam in Δ: perſpicuum eſt [per 6. 2.] quadratum factum ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓΔ æqualem eſſe ei qui fit ex BΔ quadrato. auferatur unitas ΔE; ergo quadratus ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE minor eſt quadrato ex BΔ. dico igitur quadratum factum ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE quadratum non eſſe.

Si enim eſt quadratus, vel æqualis eſt quadrato ex BE vel eo minor, non autem major, ut ne unitas ſecetur, neve qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓΔ, qui eſt æqualis quadrato ex BΔ, æqualis ſit quadrato facto ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE. ſit primum, ſi fieri poteſt, qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualis quadrato ex BE; & ſit HA duplus ipſius ΔE unitatis. quoniam igitur totus AΓ totius ΓΔ eſt duplus, quorum AH eſt duplus ΔE; erit & reliquus ΓH reliqui EΓ duplus. ergo HΓ in E bifariam ſecatur: ac propterea qui ex HB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualis [per 6. 2.] ei qui fit ex BE quadrato. ſed & qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualis ponitur quadrato ex BE: ergo qui ex HB, BΓ una cum quadrato ex ΓE eſt æqualis ei qui ſub AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE. & communi detracto quadrato ex ΓE, concludetur AB ipſi HB æqualis, quod eſt abſurdum:

ſurdum: non igitur qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualis eſt quadrato ex BE. dico neque quadrato ex BE minorem eſſe. ſi enim fieri poteſt, ſit quadrato ex BZ æqualis, & ipſius ΔZ duplus ponatur ΘA. concludetur rurſus ΘΓ duplus ΓZ, ita ut & ΘΓ in Z bifariam dividatur; ac propterea qui ex ΘB, BΓ una cum quadrato ex ΓZ [per 6. 2.] æqualis ſit quadrato ex BZ. ponitur autem & qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualis quadrato ex ZB: ergo ſequitur qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualem eſſe ei qui ex ΘB, BΓ una cum quadrato ex ΓZ, quod eſt abſurdum: non igitur qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE eſt æqualis minori quam ſit quadratus ex BE. oſtenſum eſt autem neque ipſi quadrato ex BE, neque majori eo æqualem eſſe: ergo qui fit ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE non eſt quadratus. & cum fieri poſſit, ut idem pluribus modis oſtendatur, unus qui proxime dictus eſt nobis ſufficiat, ne longam tractationem longius producamus.



μην· οὐκ ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓE ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BE. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τῆς BE. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς BZ ἴσος, καὶ τῆς ΔZ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Θ, καὶ συναχθήσεται πάλιν διπλάσιος ὁ ΘΓ τοῦ ΓZ, ὥστε καὶ τὸ ΘΓ δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Z· καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὑπὸ τῶν ΘB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓZ ἴσον γίνεσθαι τῷ ἀπὸ τῆς BZ. ὑποκείσθω δὲ καὶ ὁ ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓE ἴσος τῷ ἀπὸ τῆς ZB· συναχθήσεται ἄρα ἴσος ὁ ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓE τῷ ὑπὸ τῶν ΘB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓZ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓE ἴσος ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι τοῦ ἀπὸ BE. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς BE, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ· οὐκ ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓE τετράγωνός ἐστι. δυνατὸν δὲ ὄντος καὶ κατὰ τελείονας τροπὰς τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύναι, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος, ἵνα μὴ μακροτέρας ὄσης τῆς πραγματείας ἐπιτελέσωμεν αὐτήν.

Prop. XXX. Probl.

Invenire duas rationales potentia ſolum commenſurabiles, ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

EXponatur enim quædam rationalis AB, & [per cor. lem. 1.] duo quadrati numeri ΓΔ, ΔE, ita ut ipſorum exceſſus ΓE non ſit quadratus: deſcribatur autem ſuper rectam lineam AB ſemicirculus AZB, fiatque [per cor. 6. 10.] ut ΔΓ ad ΓE ita ex AB quadratum ad quadratum ex AZ; & ZB jungatur.

Quoniam igitur eſt ut quadratum ex BA ad quadratum ex AZ ita ΔΓ ad ΓB, habebit quadratum ex BA ad quadratum ex AZ rationem eam quam numerus ΔΓ ad ΓB numerum: ergo [per 6. 10.] quadratum ex BA quadrato ex AZ eſt commenſurabile. ſed [per 8. def. 10.] rationale eſt quadratum ex AB: ergo [per 9. def. 10.] & quadratum ex AZ rationale erit; ac propterea [per 6. def. 10.] recta linea AZ eſt rationalis. & quoniam [per conſtr.] ΔΓ ad ΓB rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex BA ad quadratum ex AZ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt [per 9. 10.] recta linea BA ipſi AZ longitudine: ergo [per 3. def. 10.] AB, AZ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. quod cum ſit ut ΔΓ ad ΓB ita

Προτασις λ'.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὸν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῷ μήκει.

ΕΚκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ AB, καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔE, ὥστε τὸν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓE μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ πεπιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZB.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓE, τὸ ἀπὸ τῆς BA ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓE· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τῷ ἀπὸ τῆς AZ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ AZ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓE λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς BA ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BA τῇ AZ μήκει· αἱ AB, AZ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓE

ὕτως

ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΑ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῇ ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει.

Εὕρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΒΑ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quadratum ex ΒΑ ad quadratum ex ΖΑ, erit per converſionem rationis [per 19. 5. & 47. 1.] ut ΓΔ ad ΔΕ ita quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΖ. ſed ΓΔ ad ΔΕ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo & quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΖ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ob id recta linea ΑΒ [per 9. 10.] ipſi ΒΖ longitudine eſt commenſurabilis. atque eſt [per 47. 1.] quadratum ex ΑΒ æquale quadratis ex ΑΖ, ΖΒ: ergo ΑΒ plus poteſt quam ΑΖ quadrato rectæ lineæ ΒΖ ſibi commenſurabilis longitudine.

Inventæ igitur ſunt duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles ΒΑ, ΑΖ, ita ut major ΒΑ plus poteſt quam minor ΑΖ quadrato ipſius ΖΒ ſibi longitudine commenſurabilis. quod erat faciendum.

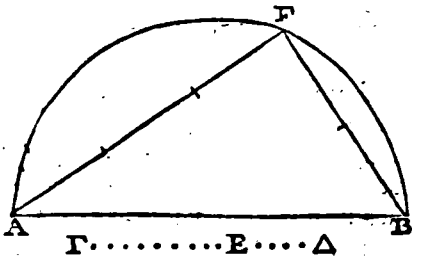
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τοῦ ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

PROP. XXXI. PROBL.

Invenire duas rationales potentia ſolum commenſurabiles, ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ δύο τετράγωνοι οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΓΔ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιείσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὡς ἐπὶ τοῦ πρὸ τούτου, ὅτι αἱ ΑΒ, ΑΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· αἱ ΑΒ, ΒΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Exponatur rationalis ΑΒ, & [per 2. lem. 30. 10.] duo numeri quadrati ΓΕ, ΕΔ, ita ut ΓΔ qui ex ipſis componitur non ſit quadratus; atque ſuper rectam lineam ΑΒ ſemicirculus ΑΖΒ deſcribatur, & fiat [per cor. 6. 10.] ut ΔΓ ad ΓΕ ita quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΑΖ, & jungatur ΖΒ: ſimiliter quidem oſtendemus, ut in antecedente, ΑΒ, ΑΖ rationales eſſe potentia ſolum commenſurabiles. & quoniam eſt ut ΔΓ ad ΓΕ ita quadratum ex ΒΑ ad id quod ex ΑΖ quadratum; erit per converſionem rationis ut ΓΔ ad ΔΕ ita quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΖ. ſed [per conſtr.] ΓΔ ad ΔΕ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum: non igitur quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΖ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 5.] ΑΒ ipſi ΒΖ longitudine eſt incommenſurabilis. & ΑΒ plus poteſt quam ΑΖ quadrato rectæ lineæ ΒΖ ſibi incommenſurabilis longitudine: quare ΑΒ, ΒΖ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & ΑΒ plus poteſt quam ΑΖ quadrato rectæ lineæ ΖΒ ſibi longitudine incommenſurabilis. quod erat faciendum.

*ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστωσαν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἐν λόγῳ τινί· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ ἄτως τὸ

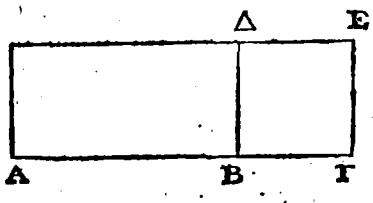
LEMMA.

Si ſint duæ rectæ lineæ in ratione aliqua, erit ut recta linea ad rectam lineam ita rectangulum ſub duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris.

Sint duæ rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ in ratione aliqua: dico ut ΑΒ ad ΒΓ ita eſſe re-

* Lemma hoc non agnoſcunt pleraque exemplaria.

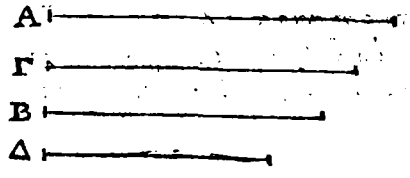
ctangulum ſub AB, BΓ ad quadratum ex BΓ. deſcribatur enim ex BΓ quadratum BΔEΓ, & compleatur AΔ parallelogrammum. manifeſtum eſt [per 1. 6.] ut AB ad BΓ ita eſſe AΔ parallelogrammum ad parallelogrammum BE. atque eſt AΔ quidem quod ſub AB, BΓ continetur, eſt enim BΓ ipſi BΔ æqualis, BE vero eſt quadratum ex BΓ: ut igitur AB ad BΓ ita rectangulum ſub AB, BΓ ad quadratum ex BΓ. quod erat demonſtrandum.



PROP. XXXII. PROBL.

Invenire duas medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale contineant; ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

EXponantur enim [per 30. 10.] duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles A, B, ita ut A major plus poſſit quam B minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. & ſit rectangulo ſub A, B æquale quadratum quod fit à recta linea Γ. medium autem eſt [per 22 10.] quod ſub A, B: ergo & quadratum ex Γ medium erit; ideoque ipſa Γ media. quadrato vero quod fit ex B æquale ſit rectangulum ſub Γ, Δ; rationale autem eſt quod ex B: ergo & rectangulum ſub Γ, Δ eſt rationale. & quoniam eſt [per lem. præc.] ut A ad B ita rectangulum ſub A, B ad quadratum ex B, ſed [per conſtr.] rectangulo quidem ſub A, B æquale eſt quadratum ex Γ, quadrato autem ex B æquale rectangulum ſub Γ, Δ: erit ut A ad B ita quadratum ex Γ ad rectangulum ſub Γ, Δ. ſed [per lem. præc.] ut quadratum ex Γ ad rectangulum ſub Γ, Δ ita recta linea Γ ad ipſam Δ: ut igitur A ad B ita Γ ad Δ. commenſurabilis autem eſt A ipſi B potentia ſolum: ergo [per 10. 10.] & Γ ipſi Δ potentia ſolum eſt commenſurabilis. atque eſt Γ media: media igitur [per 24. 10.] eſt & Δ. & quoniam eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, & A plus poteſt quam B quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; & Γ plus poterit quam Δ [per 15. 10.] quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.



Inventæ igitur ſunt duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles Γ, Δ, quæ rationale continent, & Γ plus poteſt quam Δ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. quod erat faciendum.

Similiter autem oſtendetur *inveniri poſſe duas medias potentia ſolum commenſurabiles & continentes rationale, ita ut major plus poſſit quam minor* quadrato *rectæ lineæ* ſibi incommenſurabilis *longitudine*, quando A plus poſſit *quam* B quadrato rectæ lineæ ſibi *longitudine* incommenſurabilis.

* LEMMA.

Si fuerint tres rectæ lineæ in ratione aliqua, erit ut prima ad tertiam ita rectangulum commen-

* Lemma hoc non agnoſcunt *Codd. MSS.*

τὸ τῶν AB, BΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BΓ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς BΓ τετράγωνον τὸ BΔEΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ AΔ παραλληλόγραμμον. φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ ἕτως τὸ AΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ BE παραλληλόγραμμον. καί ἐστι τὸ μὲν AΔ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ, ἴση γὰρ ἡ BΓ τῇ BΔ, τὸ δὲ BE τὸ ἀπὸ τῆς BΓ· ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν BΓ ἕτως τὸ ὑπὸ τ AB, BΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τ BΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϐ'.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

ΕΚκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A, B, ὥστε τὴν A μείζονα οὖσαν τῆς ἐλάσσονος τὴν B μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν A, B· μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ· μέση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Γ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς B· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ἀπὸ τ B, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τ Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ· ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τ Γ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B ἕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. σύμμετρος δὲ ἡ A τῇ B δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B ἕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ A τῆς B μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῷ μήκει. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ομοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ A μεῖζον δυνῇ τοῦ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

* ΛΗΜΜΑ.

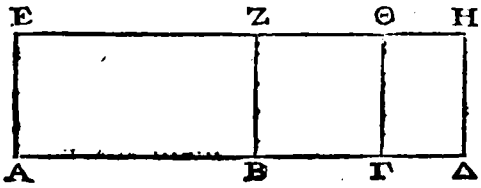
Ἐὰν ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην ἕτως τὸ ὑπὸ τῆς

πρώτης

πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Εἰσὶν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ΓΔ.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ εὐθεῖα παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΗ, διὰ δὲ τῶν Β, Γ, Δ σημείων τῇ ΑΕ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΒ, ΘΓ, ΗΔ. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΒΘ πρὸς τὸ ΓΗ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΗ παραλληλόγραμμον. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ, τὸ δὲ ΓΗ τὸ ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΓΘ.



Εἰὰν ἄρα τρεῖς ὦσιν εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης τὸ ἀπὸ τῆς μέσης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tum ſub prima & media ad id quod ſub media & tertia continetur.

Sint tres rectæ lineæ in ratione aliqua AB, BΓ, ΓΔ: dico ut AB ad ΓΔ ita eſſe rectangulum contentum ſub AB, BΓ ad id quod ſub BΓ, ΓΔ continetur.

Ducatur enim à puncto A ipſi AB ad rectos angulos AE, ponaturque AE ipſi BΓ æqualis, & per E quidem ipſi AΔ parallela recta ducatur EH, per puncta vero B,Γ,Δ ducantur ZB, ΘΓ, HΔ parallelæ ipſi AE. quoniam igitur eſt [per 1. 6.] ut AB ad BΓ ita AZ parallelogrammum ad BΘ parallelogrammum, ut autem BΓ ad ΓΔ ita parallelogrammum BΘ ad ipſum ΓH: erit ex æquo ut AB ad ΓΔ ita AZ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓH. & eſt parallelogrammum quidem AZ quod ſub AB, BΓ continetur, namque AE eſt æqualis BΓ; parallelogrammum vero ΓH eſt quod continetur ſub BΓ, ΓΔ, etenim BΓ eſt æqualis ΓΘ.

Si igitur fuerint tres rectæ lineæ in ratione aliqua, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum quod continetur ſub prima & media ad rectangulum ſub media & tertia contentum. quod erat demonſtrandum.

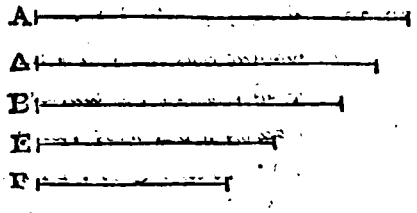
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας· ὥστε τινὶ μείζονα τὸ ἐλάττονα καὶ μᾶλλον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Prop. XXXIII. Theor.

Invenire duas medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant; ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

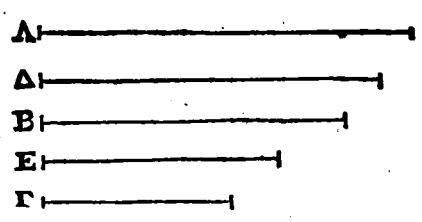
Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ αἱ Α, Β, Γ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε τὴν Α τοῦ Γ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ, * μέσον δὲ τὸ ἀπὸ τῶν Α, Β· μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστί. τῷ δὲ ἀπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ, Ε. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν Β, Γ οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ, τῷ δὲ ἀπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῶν Δ, Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ, Ε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν Δ, Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δυνάμει μόνον. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε. καὶ



Exponantur [per 30. 10.] tres rationales A, B, Γ potentia ſolum commenſurabiles, ita ut A plus poſſit quam Γ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, & [per 14. 2.] fiat rectangulo ſub ipſis A, B æquale quadratum quod fit ex Δ, medium autem eſt [per 22. 10.] rectangulum ſub A, B: ergo & quadratum ex Δ medium erit; ideoque recta linea Δ media. rectangulo autem ſub B,Γ æquale ſit [per 45. 1.] rectangulum ſub Δ, E. quoniam igitur eſt [per 1. 6.] ut rectangulum ſub A, B ad rectangulum ſub B, Γ ita recta linea A ad ipſam Γ, ſed rectangulo quidem ſub A, B æquale eſt quod fit ex Δ quadratum, rectangulo autem ſub B, Γ æquale rectangulum ſub Δ, E; erit ut A ad Γ ita quadratum ex Δ ad rectangulum ſub Δ, E. ſed [per lem. 32. 10.] ut quadratum ex Δ ad rectangulum ſub Δ, E ita Δ ad E: & igitur ut A ad Γ ita Δ ad E. commenſurabilis autem eſt [per conſtr.] A ipſi Γ potentia ſolum: ergo [per 10. 10.] & Δ ipſi E potentia ſolum eſt commenſurabilis. atque eſt Δ media: media igitur [per 24. 10.] eſt & E itaque

* Illa μέσον δὲ τὸ ἀπὸ τῶν Α, Β deſiderantur in Codd. MSS.

quoniam eſt ut A ad Γ ita Δ ad E, & A plus poteſt quam Γ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; & Δ plus poterit quam E [per 15. 10.] quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. dico præterea rectangulum ſub Δ, E medium eſſe. quoniam enim rectangulo ſub B, Γ æquale eſt [per conſtr.] rectangulum ſub Δ,E; medium autem eſt quod ſub B,Γ: ergo & quod ſub Δ,E medium erit.



Inventæ igitur ſunt duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles Δ, E, quæ medium contineant; ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. quod erat faciendum.

Rurſus ſimiliter oſtenditur *quomodo inveniuntur duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles & medium continentes, ita ut major plus poſſit quam minor* quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis *longitudine*; quando A ſcilicet plus poſſit quam Γ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ ἕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσα δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε, μέσον περιέχουσαι· ὥστε τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ομοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τοῦ ἀπὸ τῆς Γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

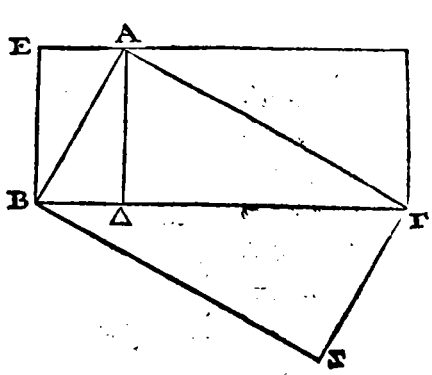
LEMMA 1.

Sit triangulum rectangulum ABΓ, rectum habens angulum BAΓ, & ducatur AΔ perpendicularis: dico rectangulum quidem ſub ΓB, BΔ æquale eſſe quadrato quod fit ex BA, quod vero ſub BΓ, ΓΔ æquale quadrato ex ΓA, & quod ſub BΔ, ΔΓ æquale quadrato ΔA, & denique rectangulum ſub BΓ, AΔ rectangulo ſub BA, AΓ æquale eſſe. & primum quod rectangulum ſub ΓB, BΔ æquale eſt quadrato ex BA.

Quoniam enim in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducta eſt AΔ, triangula ABΔ, AΔΓ [per 8. 6.] ſimilia ſunt & toti triangulo ABΓ & inter ſeſe. & quoniam ſimile eſt ABΓ triangulum triangulo ABΔ, [per 1. def. 6.] erit ut ΓB ad BA ita BA ad BΔ: ergo [per 17. 6.] rectangulum ſub ΓB, BΔ quadrato ex AB eſt æquale. eadem ratione & rectangulum ſub BΓ, ΓΔ æquale eſt quadrato ex AΓ. & quoniam ſi in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur, [per cor. 8. 6.] ducta inter ſegmenta baſis media proportionalis eſt, erit ut BΔ ad ΔA ita AΔ ad ΔΓ; ac propterea rectangulum ſub BΔ, ΔΓ eſt æquale quadrato ex AΔ. dico & rectangulum ſub BΓ, AΔ ei quod ſub BA, AΓ continetur æquale eſſe. quoniam enim, ut diximus, triangulum ABΓ triangulo ABΔ eſt ſimile, ut BΓ ad ΓA ita erit BA ad ΔA. ſi autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, [per 16. 6.] rectangulum ſub extremis eſt æquale ei quod ſub mediis: ergo rectangulum ſub BΓ, AΔ rectangulo ſub BA, AΓ æquale erit. dico præterea ſi deſcribamus parallelogrammum re-

ΛΗΜΜΑ α'.

Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. καὶ πρῶτον ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ.



Επεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ ἕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ ἕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ. λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. ἐπεὶ γὰρ, ὡς ἔφαμεν, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ ἕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. καὶ ὅτι ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ΒΓ ὀρ-

θογώνιον

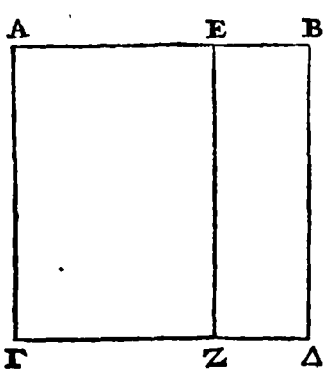
ϑηγώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ συμπληρώσωμεν τὸ ΑΖ, ἴσον ἔσται τὸ ΕΓ τῷ ΑΖ, ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τὰ ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τὰ ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τὰ ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ctangulum ΕΓ, & ipſum ΑΖ compleamus, rectangulum ΕΓ ipſi ΑΖ æquale eſſe, utrumque enim ipſorum duplum eſt trianguli ΑΒΓ: atque eſt rectangulum quidem ΕΓ id quod ſub ΒΓ, ΑΔ continetur, rectangulum vero ΑΖ id quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ: rectangulum igitur ſub ΒΓ, ΑΔ rectangulo ſub ΒΑ, ΑΓ eſt æquale. quod erat demonſtrandum.

* ΛΗΜΜΑ β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθείαν ἔτως τὸ ὑπὸ τ᾽ ὅλης & τ᾽ μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τ᾽ ὅλης & τ᾽ ἐλάσσονος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ ἔτως τὸ ὑπὸ τὰ ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τὰ ΒΑ, ΒΕ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τ᾽ ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὁποτέρᾳ τ᾽ ΑΓ, ΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. φανερὸν ἄν ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ ἔτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τὰ ΒΑ, ΑΕ, ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, τὸ δὲ ΖΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΒ τῇ ΑΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ ἔτως τὸ ὑπὸ τὰ ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τὰ ΑΒ, ΒΕ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Recta enim linea ΑΒ ſecetur in partes inæquales ad Ε: dico ut ΑΕ ad ΕΒ ita eſſe rectangulum ſub ΒΑ, ΑΕ ad id quod ſub ΒΑ, ΒΕ continetur.

Deſcribatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΓΔΒ, & per Ε quidem alterutri ipſarum ΑΓ, ΔΒ parallela ducatur ΕΖ. perſpicuum eſt [per 1. 6.] ut ΑΕ ad ΕΒ ita eſſe ΑΖ parallelogrammum ad parallelogrammum ΖΒ. atque eſt ΑΖ quidem parallelogrammum quod ſub ΒΑ, ΑΕ continetur, etenim ΑΓ ipſi ΑΒ eſt æqualis; parallelogrammum vero ΖΒ eſt quod continetur ſub ΑΒ, ΒΕ, æqualis enim eſt ΔΒ ipſi ΑΒ: ut igitur ΑΕ ad ΕΒ ita rectangulum ſub ΒΑ, ΑΕ ad id quod ſub ΑΒ, ΒΕ continetur. quode rat demonſtrandum.

* LEMMA 2.

Si recta linea in partes inæquales ſecetur, erit ut major pars ad minorem ita rectangulum ſub tota & majori parte ad rectangulum ſub tota & minori.

ΛΗΜΜΑ γ'.

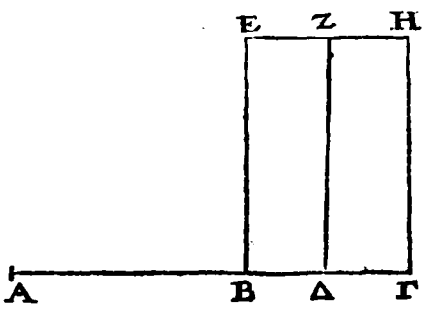
Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα· τὸ ὑπὸ τ᾽ δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ ὑπὸ τ᾽ μείζονος καὶ τ᾽ ἡμισείας τ᾽ ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τὰ ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τὰ ΑΒ, ΒΔ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ κατεσκευάσθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΓ ἔτως τὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΔΗ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΓ ἔτως τὸ ΒΗ πρὸς τὸ ΔΗ. καὶ ἔστιν ἡ ΒΓ τ᾽ ΔΓ διπλασίων· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗ τοῦ ΔΗ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, ἴση γὰρ τῇ μὲν ΒΔ ἡ ΔΓ, τῇ δὲ ΑΒ ἡ ΔΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ipſarum in partes æquales ſecetur; rectangulum contentum ſub duabus rectis lineis duplum erit ejus quod ſub majori & dimidia minoris continetur.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales ΑΒ, ΒΓ, quarum major ΑΒ; & ſecetur ΒΓ bifariam in puncto Δ: dico rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ duplum eſſe ejus quod ſub ΑΒ, ΒΔ continetur.



Ducatur enim à puncto Β ipſi ΒΓ ad rectos angulos ΒΕ, ponaturque ΒΕ ipſi ΒΑ æqualis, & figura deſcribatur. quoniam igitur [per 1. 6.] eſt ut ΔΒ ad ΔΓ ita parallelogrammum ΒΖ ad parallelogrammum ΔΗ; erit componendo ut ΒΓ ad ΔΓ ita parallelogrammum ΒΗ ad ipſum ΔΗ. eſt autem ΒΓ dupla ipſius ΔΓ: ergo & parallelogrammum ΒΗ parallelogrammi ΔΗ eſt duplum. atque eſt ΒΗ quidem, quod ſub ΑΒ, ΒΓ continetur, etenim ΑΒ eſt æqualis ΒΕ; ΔΗ vero eſt quod continetur ſub ΑΒ, ΒΔ, nam ΔΓ ipſi ΒΔ & ΔΖ ipſi ΑΒ eſt æqualis. quod erat demonſtrandum.

LEMMA 3.

* Lemmata duo ſequentia deſiderantur in noſtris *Codd. MSS.* nec ab *Euclide* eſſe arbitramur.

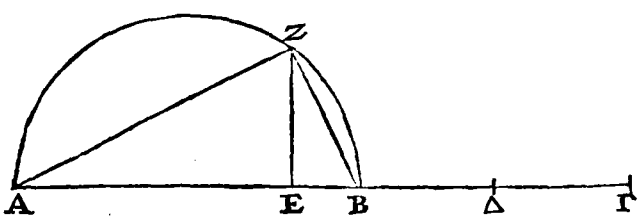
PROP. XXXIV. PROBL.

Invenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur medium.

EXponantur [per 31. 10.] duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles AB, BΓ, ita ut major AB plus poſſit quam minor BΓ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & recta BΓ ſecta ſit bifariam ad Δ, & quadrato quod fit ab alterutra ipſarum BΔ, ΔΓ æquale parallelogrammum ad rectam lineam AB applicetur [per 28. 6.] deficiens figura quadrata, & ſit quod continetur ſub AE, EB, & deſcribatur ſuper rectam lineam AB ſemicirculus AZB, ducaturque ipſi AB ad rectos angulos EZ, & AZ, ZB jungantur.

Quoniam igitur duæ rectæ lineæ AB, BΓ inæquales ſunt, & AB plus poteſt quam BΓ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori BΓ, hoc eſt quadrato dimidiæ ipſius, æquale parallelogrammum applicatum eſt ad AB, deficiens figura quadrata, quod quidem ſub AE, EB continetur; erit [per 19. 10.] AE ipſi EB incommenſurabilis. & quoniam eſt [per 1. 6.] ut AE ad EB ita rectangulum ſub BA, AE ad rectangulum ſub AB, BE, rectangulum autem ſub AB, AE [per 1. lem. præc.] quadrato ex AZ eſt æquale, & rectangulum ſub AB, BE æquale quadrato ex BZ: quadratum igitur ex AZ incommenſurabile eſt quadrato ex ZB: ideoque rectæ lineæ AZ, ZB potentia ſunt incommenſurabiles. & quoniam AB rationalis eſt, & quadratum quod fit ex AB erit rationale: ergo & rationale compoſitum ex quadratis ipſarum AZ, ZB. Rurſus, quoniam rectangulum ſub AE, EB eſt æquale quadrato ex EZ, ponitur autem rectangulum ſub AE, EB quadrato etiam ex BΔ æquale: ergo ZE eſt æqualis BΔ: ac propterea BΓ ipſius EZ eſt dupla: rectangulum igitur ſub AB, BΓ [per 1. 6.] duplum eſt rectanguli ſub AB, EZ. ſed [per 22. 10.] rectangulum ſub AB, BΓ eſt medium: ergo & medium eſt quod continetur ſub AB, EZ. eſt autem [per 1. lem. præc.] quod ſub AB, EZ continetur æquale contento ſub AZ, ZB: contentum igitur ſub AZ, ZB medium eſt. ſed & oſtenſum eſt rationale eſſe quod componitur ex ipſarum quadratis.

Inventæ igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AZ, ZB, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur medium. quod erat faciendum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον.

ΕΚκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB, BΓ, ὥστε τὸ μεῖζον τὸ AB τῆς ἐλάσσονος τῆς BΓ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ BΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀφ' ὁπωσοῦν τῶν BΔ, ΔΓ ἴσον παρὰ τὸ AB παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τὰ AE, EB, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ ἤχθω τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ EZ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, ZB.

Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ AB, BΓ, καὶ ἡ AB τῆς BΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς BΓ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὸ AB παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τὰ AE, EB· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AE τῇ EB. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA, AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, BE, ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB, AE τῷ ἀπὸ τῆς AZ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BE τῷ ἀπὸ τῆς BZ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ τῷ ἀπὸ τῆς ZB· αἱ AZ, ZB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ῥητή ἐστι, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AZ, ZB ῥητόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ, ἀναπαιστὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς BΔ ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ZE τῇ BΔ· διπλῆ ἄρα ἡ BΓ τῆς EZ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν AB, EZ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, EZ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, EZ τῷ ὑπὸ τῶν AZ, ZB· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZB. ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

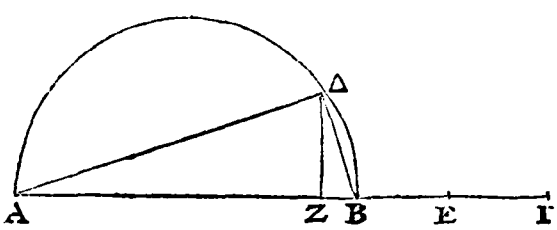
Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AZ, ZB, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔΒ ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.



Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· * αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΔΖ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ· ὥστε καὶ σύμμετρον. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὑποκειται γὰρ ὅτως· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητὸν ἐστιν.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΔ, ΔΒ, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XXXV. PROBL.

Invenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur rationale.

EXponantur [per 32. 10.] duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles AB, BΓ, quæ rationale contineant, ita ut AB plus poſſit quam BΓ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & ſuper ipſam AB deſcribatur ſemicirculus AΔB, ſeceturq; BΓ bifariam in E, & [per 28.6.] applicetur ad AB parallelogrammum æquale quadrato ipſius BE deficiens figura quadrata, & ſit quod continetur ſub AZ, ZB: incommenſurabilis igitur eſt [per 19. 10.] AZ ipſi ZB longitudine. à puncto autem Z ipſi AB ad rectos angulos ducatur ZΔ, & AΔ, ΔB jungantur.

Itaque quoniam AZ eſt incommenſurabilis ZB [per 1.6. & 10.10.] erit & rectangulum ſub BA, AZ rectangulo ſub AB, BZ incommenſurabile. eſt autem [per 1. lem. 34. 10.] rectangulum quidem ſub BA, AZ quadrato ipſius AΔ æquale, rectangulum vero ſub AB, BZ æquale quadrato ipſius ΔB: incommenſurabile igitur eſt quadratum ex AΔ ipſius ΔB quadrato; ac propterea rectæ lineæ AΔ, ΔB potentia ſunt incommenſurabiles. & quoniam eſt medium quadratum ipſius AB, erit & compoſitum ex quadratis ipſarum AΔ, ΔB medium. quod cum dupla ſit BΓ ipſius ΔZ, & rectangulum ſub AB, BΓ [per 1.6.] rectanguli ſub AB, ZΔ duplum erit: quare & commenſurabile. rationale autem eſt rectangulum ſub AB, BΓ, ita enim ponitur: ergo & rectangulum ſub AB, ZΔ eſt rationale. ſed rectangulo ſub AB, ZΔ æquale eſt [per 3. lem. 34. 10.] rectangulum ſub AΔ, ΔB: quare & ipſum ſub AΔ, ΔB rectangulum rationale erit.

Inventæ igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AΔ, ΔB, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur rationale. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου

PROP. XXXVI. PROBL.

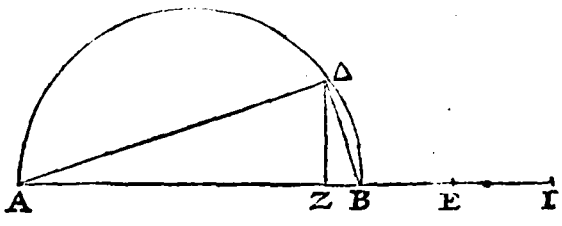
Invenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis medium, & rectangulum quod ſub ipſis continetur medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis.

EXponantur [per 33. 10.] duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles AB, BΓ, quæ medium contineant, ita ut AB plus poſſit quam BΓ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incom-

* Illud αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι abeſt Codd. MSS.

menſurabilis, & ſuper AB ſemicirculus AΔB deſcribatur, & reliqua fiant ut in iis quæ ſuperius dicta ſunt.

Quoniam igitur AZ incommenſurabilis eſt ipſi ZB longitudine, erit & AΔ ipſi ΔB potentia incommenſurabilis. & quoniam medium eſt quod fit ex AB, & compoſitum ex quadratis ipſarum ΔA, ΔB eſt medium. quod cum rectangulum ſub AZ, ZB æquale ſit quadrato alterutrius ipſarum BE, ΔZ, erit ΔZ æqualis BE; ac propterea BΓ ipſius ZΔ dupla: rectangulum igitur ſub AB, BΓ duplum eſt ejus quod ſub AB, ZΔ continetur. medium autem eſt [ex hyp.] rectangulum ſub AB, BΓ: ergo & quod continetur ſub AB, ZΔ eſt medium: atque eſt [per 1. lem. 34. 10.] æquale contento ſub AΔ, ΔB; quare & ipſum ſub AΔ, ΔB rectangulum medium erit. & quoniam incommenſurabilis eſt AB ipſi BΓ longitudine, commenſurabilis autem ΓB ipſi BE; erit & AB ipſi BE longitudine incommenſurabilis: ergo [per 1. 6. & 10. 10.] & quadratum ex AB incommenſurabile eſt rectangulo ſub AB, BE. ſed quadrato quidem ex AB æqualia ſunt quæ ex AΔ, ΔB ſunt quadrata: rectangulo autem ſub AB, BE æquale eſt rectangulum ſub AB, ZΔ, hoc eſt rectangulum ſub AΔ, ΔB: compoſitum igitur ex quadratis ipſarum AΔ, ΔB rectangulo ſub AΔ, ΔB eſt incommenſurabile.



Inventæ igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum ex ipſarum quadratis medium, & rectangulum quod ſub ipſis continetur medium, & adhuc compoſito ex ipſarum quadratis incommenſurabile. quod erat faciendum.

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AZ τῇ ZB μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ AΔ τῇ ΔB δυνάμει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῆς AB, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν AΔ, ΔB. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZB ἐστιν ἴσον τῷ ἀφ' ἑκατέρας τῶν BE, ΔZ, ἴση ἄρα ἡ ΔZ τῇ BE· διπλῆ ἄρα ἡ BΓ τῆς ZΔ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ZΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ZΔ· καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB μέσον, μέσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, AB. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ BΓ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓB τῇ BE· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AB τῇ BE μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB, BE ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BE ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ZΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB τῷ ἀπὸ τῆς AΔ, ΔB.

Εὕρηται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

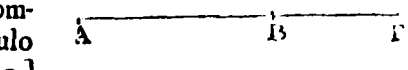
Principium Senariorum per Compoſitionem.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis nominibus.

COmponantur enim duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles AB, BΓ: dico AΓ irrationalem eſſe.

Quoniam enim incommenſurabilis eſt AB ipſi BΓ longitudine, potentia enim ſolum commenſurabiles ſunt; & ut AB ad BΓ ita [per 1. 6.] rectangulum ſub AB, BΓ ad id quod fit ex BΓ quadratum: erit [per 10. 10.] rectangulum ſub AB, BΓ quadrato ex BΓ incommenſurabile. ſed rectangulo quidem ſub AB, BΓ [per 6. 10.] commenſurabile eſt id quod bis ſub AB, BΓ continetur, quadrato autem ex BΓ commenſurabilia ſunt [per 16. 10.] quadrata ex AB, BΓ: quod igitur bis ſub AB, BΓ continetur incommenſurabile eſt qua-



Αρχὴ τῶν κατὰ συνθεσιν ἑξάδων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ AB, BΓ· λέγω ὅτι ἡ AΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ BΓ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ τῷ ἀπὸ τῆς BΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν AB, BΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἀσύμμετρόν

μετρόν ἐστι, καὶ συνθέντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

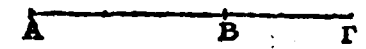
dratis ex AB, BΓ, & componendo quod bis ſub AB, BΓ continetur una cum quadratis ex AB, BΓ, hoc eſt [per 4. 2.] quadratum ex AΓ, incommenſurabile eſt compoſito ex ipſarum AB, BΓ quadratis. rationale autem eſt compoſitum ex quadratis ipſarum AB, BΓ: ergo quadratum ex AΓ irrationale eſt; & ob id recta linea AΓ eſt irrationalis, vocetur autem ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Εἰ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ῥητὸν περιέχουσαι· λέγω ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· συνθέντι ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ὑπόκειται δὲ ῥητὸν περιέχουσα· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.



Prop. XXXVIII. Theor.

Si duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles componantur, quæ rationale contineant; tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis mediis prima.

COmponantur enim duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles AB, BΓ, quæ rationale contineant: dico totam AΓ irrationalem eſſe.

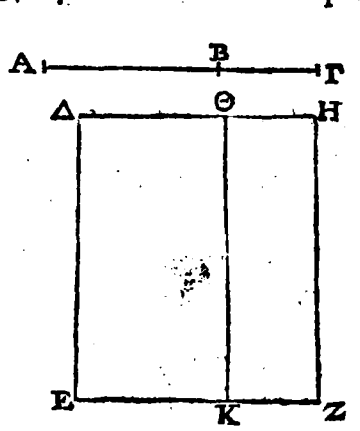
Quoniam enim incommenſurabilis eſt AB ipſi BΓ longitudine, & quadrata ex AB, BΓ [per 13. 10.] incommenſurabilia erunt rectangulo quod bis ſub AB, BΓ continetur: ergo componendo, quadrata ex AB, BΓ una cum eo quod bis ſub AB, BΓ continetur, quod [per 4. 2.] eſt ipſius AΓ quadratum, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AB, BΓ. ſed rectangulum rationale ponitur: ergo quadratum ex AΓ irrationale eſt: igitur & recta linea AΓ irrationalis, vocetur autem ex binis mediis prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Εἰ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, μέσον περιέχουσαι· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, μέσον περιέχουσαι· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΘΖ· μέσον ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΘΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται·



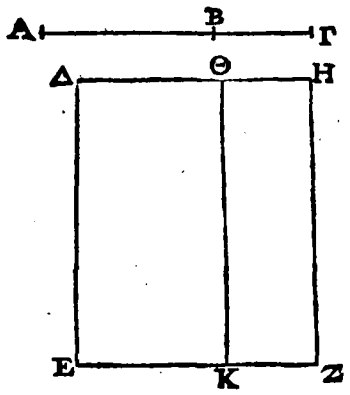
Prop. XXXIX. Theor.

Si duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles componantur, quæ medium contineant; tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis mediis ſecunda.

COmponantur enim duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles, AB, BΓ, quæ medium contineant: dico AΓ irrationalem eſſe.

Exponatur rationalis ΔE, & [per 45. 1.] quadrato ex AΓ æquale parallelogrammum rectangulum ΔZ ad ipſam ΔE applicetur, latitudinem faciens ΔH. itaque quoniam [per 4. 2.] quadratum ex AΓ æquale eſt quadratis ex AB, BΓ & rectangulo quod bis ſub AB, BΓ continetur, applicetur ad ipſam ΔE quadratis ex AB, BΓ æquale parallelogrammum rectangulum EΘ: reliquum igitur ZΘ æquale eſt ei quod bis ſub AB, BΓ continetur. & quoniam media eſt utraque ipſarum AB, BΓ, erunt & quadrata ex AB, BΓ media. medium autem ponitur & quod bis continetur ſub AB, BΓ, atque eſt quadratis quidem ex AB, BΓ æquale parallelogrammum EΘ, rectangulo autem bis ſub AB, BΓ contento æquale eſt ipſum ΘZ; medium igitur eſt utrumque ipſorum EΘ, ΘZ, & ad rationalem ΔE applicantur:

ergo [per 23. 10.] utraque recta linea Δ Θ, Θ H eſt rationalis, & ipſi Δ E longitudine incommenſurabilis. & quoniam incommenſurabilis eſt A B ipſi B Γ longitudine, atque eſt ut A B ad B Γ ita [per 1.6.] quadratum ex A B ad rectangulum ſub A B, B Γ; erit [per 10.10.] quadrato ex A B rectangulum ſub A B, B Γ incommenſurabile. ſed quadrato quidem ex A B commenſurabile eſt [ex hyp.] compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B Γ, rectangulo autem ſub A B, B Γ eſt commenſurabile quod bis ſub A B, B Γ continetur: ergo per [14. 10.] compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B Γ incommenſurabile erit ei quod bis continetur ſub A B, B Γ. ſed [per conſtr.] quadratis ex A B, B Γ æquale eſt parallelogrammum E Θ, & rectangulo quod bis ſub A B, B Γ continetur æquale Θ Z parallelogrammum: quare E Θ ipſi Θ Z eſt incommenſurabile; & ob id recta linea Δ Θ ipſi Θ H incommenſurabilis longitudine. oſtenſæ autem ſunt rationales: ergo Δ Θ, Θ H rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 37. 10.] Δ H eſt irrationalis. rationalis autem Δ E; & quod ſub irrationali & rationali continetur rectangulum irrationale eſt: ſpatium igitur Δ Z eſt irrationale; & ideo quæ ipſum poteſt eſt irrationalis. poteſt autem ipſum Δ Z [per conſtr.] recta linea A Γ: ergo A Γ irrationalis erit, vocetur autem ex binis mediis ſecunda.



SCHOLIUM.

Vocavit illam ex binis mediis ſecundam, quoniam medium eſt, non rationale quod ſub ipſis A B, B Γ continetur, medium enim rationali poſterius eſt. At vero quod ſub rationali & irrationali continetur irrationale eſſe, perſpicue conſtat. nam ſi rationale ſit, & ad rationalem applicetur, [per 21. 10.] alterum ejus latus eſſet rationale. ſed & irrationalis, quod eſt abſurdum: illud igitur quod ſub rationali & irrationali continetur eſt irrationale.

PROP. XI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem ſub ipſis continetur medium: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem major.

COmponantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles A B, B Γ, facientes ea quæ propoſita ſunt: dico A Γ irrationalem eſſe.

Quoniam enim id quod ſub A B, B Γ continetur medium eſt; & quod bis continetur ſub A B, B Γ [per cor. 24. 10.] medium erit. compoſitum autem ex ipſarum A B, B Γ quadratis eſt rationale: ergo quod bis ſub A B, B Γ

ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν Δ Θ, Θ H, καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Δ Θ τῇ Θ H μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A B τῇ B Γ μήκει, ὡς δέ ἐστιν ὡς ἡ A B πρὸς τὴν B Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A B πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A B, B Γ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς A B τὸ ὑπὸ τῶν A B, B Γ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A B σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A B, B Γ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν A B, B Γ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A B, B Γ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν A B, B Γ ἴσον ἐστὶ τὸ E Θ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ ἴσον ἐστὶ τὸ Θ Z· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ E Θ τῷ Θ Z· ὥστε καὶ ἡ Δ Θ τῇ Θ H ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ ῥηταὶ αἱ Δ Θ, Θ H ἄρα ῥηταὶ σύσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ Δ H ἄλογός ἐστι. ῥητὴ δὲ ἡ Δ E, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ Δ Z χωρίον· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δύναται δὲ τὸ Δ Z ἡ A Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ A Γ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διὰ τὸ τὸ μέσον περέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν, καὶ μὴ ῥητὸν, δευτερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. Οτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστι, δῆλον. εἰ γὰρ ἐστὶ ῥητὸν καὶ ἀναβιβασθὲν παρὰ ῥητὴν, ἔσται αὐτοῦ πλάτος ῥητή. ἀλλὰ καὶ ἄλογος, ὅπερ ἄτοπον· τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἄλογόν ἐστιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μείζων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ A B, B Γ, ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ A Γ.

Επεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν A B, B Γ μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν A B, B Γ μέσον ἐστί. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A B, B Γ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ

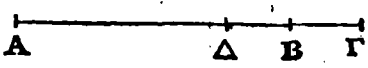
τῷ

τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μείζων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα ἀφ' οὗ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσα, καὶ δεῖν εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκειότητος τὴν ὀνομασίαν πάσχειν. ὅτι δὲ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὕστερον δειχτέον.

Φανερὸν μὲν οὖν ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ. εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσον ἂν ἦν καὶ τὸ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἄνισοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΓ. ὑποκείσθω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΒΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ καὶ τῷ ἀπὸ ΔΑ. ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντιθῶσι, ποιοῦσι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστί, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ συνθέντι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ῥητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένην αὐτὴν ἐκάλεσε, ἀφ' οὗ τὸ δυνάσθαι δύο χωρία, τὸ μὲν

continetur incommensurabile est compositio ex quadratis ipsarum AB, BΓ: & ob id quadrata ex AB, BΓ una cum eo quod bis sub AB, BΓ continetur, quod [per 4. 2.] est quadratum ex AΓ, incommensurabile est [per 17. 10.] quadratis ex AB, BΓ. rationale autem est [ex hyp.] compositum ex quadratis AB, BΓ: ergo quadratum ex AΓ irrationale erit; ac propterea recta linea AΓ est irrationalis, vocetur autem major.

SCHOLIUM.

Vocavit autem ipsam majorem, propterea quod rationalia ex AB, BΓ majora sint medio, quod bis sub AB, BΓ continetur; oporteatque à rationalium proprietate nomen imponere. at vero quadrata quæ fiunt ex AB, BΓ majora esse eo quod bis sub AB, BΓ continetur, sic ostendemus.

Manifestum quidem est AB, BΓ inter se inæquales esse. si enim sint æquales, & quadrata quæ fiunt ex AB, BΓ æqualia erunt ei quod bis sub AB, BΓ continetur, & rectangulum sub AB, BΓ rationale erit, quod non ponitur: inæquales igitur sunt AB, BΓ. supponatur major AB, & ipsi BΓ æqualis ponatur BΔ: ergo [per 7. 2.] quadrata ex AB, BΔ æqualia sunt ei quod bis sub AB, BΔ continetur una cum quadrato ex ΔA. æqualis autem est ΔB ipsi BΓ: quadrata igitur ex AB, BΓ æqualia sunt ei quod bis sub AB, BΓ continetur una cum quadrato ex AΔ: ideoque quadrata ex AB, BΓ majora sunt quam id quod bis sub AB, BΓ continetur, quadrato ipsius ΔA. quod erat demonstrandum.

PROP. XLI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur, rationale: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem rationale ac medium potens.

COmponantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AB, BΓ, facientes ea quæ proposita sunt: dico AΓ irrationalem esse.

Quoniam enim compositum ex ipsarum AB, BΓ quadratis medium est, quod autem bis sub AB, BΓ continetur rationale: erit compositum ex ipsarum AB, BΓ quadratis incommensurabile ei quod bis sub AB, BΓ continetur: quare componendo quadratum ex AΓ, est [per 17. 10.] incommensurabile ei quod bis continetur sub AB, BΓ. est autem rationale quod bis sub AB, BΓ continetur: quadratum igitur ex AΓ irrationale est: ideoque recta linea AΓ est irrationalis, vocetur autem rationale ac medium potens.

SCHOLIUM.

Rationale autem ac medium potentem ipsam appellat, quod possit bina spatia, unum quidem

rationale, alterum vero medium: & quoniam rationale præcedit irrationale, ipſius rationalis prius mentionem fecit.

ῥητὸν, τὸ δὲ μέσον· καὶ ἀεὶ τοῦ ἔ ῥητοῦ πρώτην παρ-
ξιν, πρῶτον τὸ ῥητὸν ἐκάλεσε.

Prop. XLII. Theor.

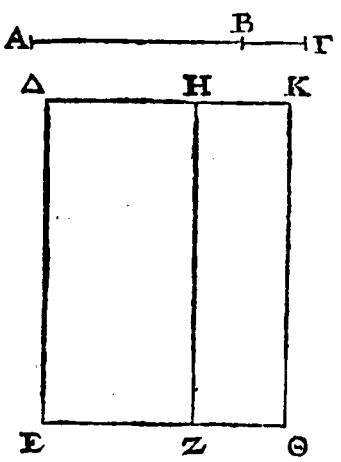
Si duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum ex ipſarum quadratis medium; & quod ſub ipſis continetur medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem bina media potens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντε-
θῶσι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν
ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ'
αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκει-
μένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων· ἡ
ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ δύο
μέσα δυναμένη.

COmponantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AB, BΓ, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum AB, BΓ quadratis medium, & quod ſub ipſis continetur medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum AB, BΓ quadratis: dico AΓ irrationalem eſſe.

Exponatur enim rationalis ΔE, & [per 45.1.] ad ipſam applicetur parallelogrammum rectangulum ΔZ æquale quadratis ipſarum AB, BΓ, & parallelogrammum HΘ æquale ei quod bis ſub AB, BΓ continetur: totum igitur ΔΘ [per 4.2.] quadrato ipſius AΓ eſt æquale. & quoniam medium eſt compoſitum ex quadratis ipſarum AB, BΓ, & æquale parallelogrammo ΔZ; erit ipſum quoque ΔZ medium, & ad rationalem ΔE applicatum eſt: rationalis igitur eſt ΔH [per 23. 10.] & ipſi ΔE longitudine incommenſurabilis. ob eandem cauſam & HK eſt rationalis, & incommenſurabilis longitudine ipſi ZH, hoc eſt ipſi ΔE. & quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum AB, BΓ incommenſurabile eſt ei quod bis ſub AB, BΓ continetur; erit & parallelogrammum ΔZ ipſi ΘH incommenſurabile: ergo & recta linea ΔH [per 1.6. & 10.10.] incommenſurabilis eſt ipſi HK. & ſunt rationales: quare ΔH, HK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 37. 10.] ΔK eſt irrationalis quæ ex binis nominibus appellatur. rationalis autem ΔE: ergo [per ſch. 39. 10.] parallelogrammum ΔΘ irrationale eſt, & ipſum potens irrationalis. ſed [per conſtr.] ipſum ΔΘ poteſt recta linea AΓ; quare AΓ irrationalis eſt, vocetur autem bina media potens.



Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ-
μετροι αἱ AB, BΓ, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον
ἐκ τῶν AB, BΓ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ
μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ
τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετραγώνων· λέγω ὅτι ἡ
AΓ ἄλογός ἐστι.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔE, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ
τὴν ΔE τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον τὸ ΔZ, τῷ δὲ
δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον τὸ HΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ
ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ μέσον
ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ, καὶ ἴσον τῷ
ΔZ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔZ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔE
παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ
ΔH, καὶ ἀσύμμετρος τῇ
ΔE μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ
καὶ ἡ HK ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμ-
μετρος τῇ ZH, τουτέστι τῇ ΔE, μήκει. καὶ ἐπεὶ
ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τῷ δὶς ὑπὸ
τῶν AB, BΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΔZ τῷ ΘH· ὥστε
καὶ ἡ ΔH τῇ HK ἀσύμμετρός ἐστι. καί εἰσι ῥηταί·
αἱ ΔH, HK ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-
μετροι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔK ἡ καλουμένη ἐκ
δύο ὀνομάτων. ῥητὴ δὲ ἡ ΔE· ἄλογον ἄρα ἐστὶ
τὸ ΔΘ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δυνα-
τὴ δὲ τὸ ΔΘ ἡ AΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ AΓ,
καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

SCHOLIUM 1.

Vocavit ipſam bina media potentem, propterea quod poteſt bina ſpatia media, videlicet compoſitum ex ipſarum AB, BΓ quadratis, & illud quod bis ſub AB, BΓ continetur.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην, διὰ
τὸ δύνασθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία, τό, τε συγκεί-
μενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ
τῶν AB, BΓ.

SCHOLIUM 2.

At vero dictas irrationales uno tantum modo dividi in rectas lineas ex quibus componuntur,

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

Οτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιρεῖ-
ται εἰς τὰς εὐθείας ἐξ ὧν σύγκεινται, ποιοῦσαι

τὰ

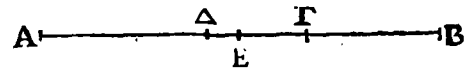
τὰ συγκείμενα εἴδη, δείξομεν ἤδη, συγκειμένου λημμάτιον τοιοῦτον.

& quæ propoſitas ſpecies conſtituunt, mox demonſtrabimus, ſi prius lemma quoddam expoſuerimus, quod hujuſmodi eſt.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκάτερα τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΔΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπῆς τῆς ΓΒ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ· τὰ Γ, Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ. ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, * ἐπερ σωαμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



LEMMA.

Exponatur recta linea AB, & ſecetur tota in partes inæquales ad utrumque punctorum Γ, Δ; ponatur autem AΓ quam ΔB major: dico quadrata ipſarum AΓ, ΓB quadratis ipſarum AΔ, ΔB majora eſſe.

Secetur enim AB bifariam in E. & quoniam major eſt AΓ quam ΔB, communis auferatur ΔΓ: reliqua igitur AΔ major erit quam reliqua ΓB. eſt autem AE ipſi EB æqualis: ergo ΔE quam EΓ eſt minor, & puncta Γ, Δ non æqualiter diſtant à bipartita ſectione. & quoniam [per 5. 2.] rectangulum ſub AΓ, ΓB una cum quadrato rectæ lineæ ΓE eſt æquale quadrato ipſius EB, ſed & rectangulum ſub AΔ, ΔB una cum quadrato rectæ lineæ ΔE eſt æquale ipſius EB quadrato; erit rectangulum ſub AΓ, ΓB una cum quadrato ipſius EΓ æquale rectangulo ſub AΔ, ΔB una cum quadrato ipſius ΔE. quorum quadratum ipſius ΔE eſt minus quadrato EΓ: & reliquum igitur rectangulum ſub AΓ, ΓB minus eſt rectangulo ſub AΔ, ΔB: quare & quod bis ſub AΓ, ΓB continetur minus eſt eo quod bis continetur ſub AΔ, ΔB: reliquum igitur, nempe compoſitum ex quadratis ipſarum AΓ, ΓB, majus eſt compoſito ex quadratis ipſarum AΔ, ΔB; * ſiquidem utraque tota æqualia ſunt [per 4. 2.] quadrato rectæ AB. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

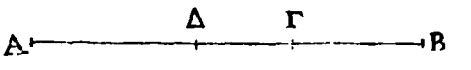
Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

PROP. XLIII. THEOR.

Quæ ex binis nominibus ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ· ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ ῥητὰς εἶναι, δυνάμει μόνον συμμέτρους. φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΒ τῇ ΔΒ οὐκ ἔστιν † ἡ αὐτή. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ ἡ αὐτή· καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, ‡ καὶ ἔσται ἡ ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ τῇ κατὰ τὸ Δ διαιρέσει διῃρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ Γ, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἡ αὐτή· διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας· ᾧ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, διὰ

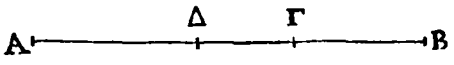


Si enim fieri poteſt, dividatur in Δ, ita ut AΔ, ΔB rationales ſint potentia ſolum commenſurabiles. itaque manifeſtum eſt AB non eſſe eandem quæ ΔB. ſi enim fieri poteſt, ſit eadem: erit igitur & AΔ eadem quæ ΓB; atque erit ut AΓ ad ΓB ita BΔ ad ΔA, & AB in Δ ſimiliter diviſa erit atque in puncto Γ, quod non ponitur: ergo AΓ non eſt eadem quæ ΔB: & propterea puncta Γ, Δ non æqualiter diſtant à bipartita ſectione: quo igitur differunt quadrata rectarum linearum AΓ, ΓB ab ipſarum AΔ, ΔB quadratis, hoc differt & quod bis ſub AΔ, ΔB continetur ab eo quod bis continetur ſub AΓ, ΓB; quo-

* Illa ἐπερ συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ deſunt in *Codd. MSS.* † i. e. ἴση. ‡ In *MSS.* ἔσται ἡ ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ Γ, διαιρεῖ διαιρεθεῖσα κατὰ τὸ Δ.

niam

niam [per 4. 2.] & quadrata rectarum linearum A Γ, Γ B una cum eo quod bis continetur ſub A Γ, Γ B & quadrata ipſarum A Δ, Δ B una cum eo quod bis ſub A Δ, Δ B continetur æqualia ſunt quadrato ipſius AB. ſed quadrata ipſarum AΓ, ΓB à quadratis ipſarum AΔ, ΔB differunt rationali, etenim rationalia utraque ſunt: ergo & quod bis ſub AΔ, ΔB continetur à contento bis ſub AΓ, ΓB differt rationali, cum ipſa media ſint. atqui [per 27. 10.] medium non ſuperat medium rationali: non igitur quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur: quare ad unum duntaxat dividitur in nomina. quod erat demonſtrandum.



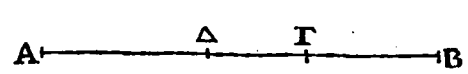
τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τ ΑΔ, ΔΒ ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τ ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ διαφέρει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τ ΑΓ, ΓΒ διαφέρει ῥητῷ μέσα ὄντα. μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLIV. Theor.

Quæ ex binis mediis prima ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

SIT ex binis mediis prima AB diviſa in punctο Γ, ita ut AΓ, ΓB mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale contineant: dico AB in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur etiam in Δ, ita ut AΔ, ΔB ſint mediæ potentia ſolum commenſurabiles quæ rationale contineant. quoniam igitur quo differt rectangulum contentum bis ſub AΔ, ΔB ab eo quod bis ſub AΓ, ΓB continetur hoc differunt etiam quadrata rectarum linearum AΓ, ΓB ab ipſarum AΔ, ΔB quadratis, rationali autem differt contentum bis ſub AΔ, ΔB ab eo quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, utraque enim ſunt rationalia; rationali igitur differunt quadrata ipſarum AΓ, ΓB à quadratis ipſarum AΔ, ΔB, exiſtentia utraque media. illud autem [per 27. 10.] fieri non poteſt: non igitur quæ ex binis mediis prima in alio atque alio puncto dividitur in nomina: quare in uno duntaxat dividatur neceſſe eſt. quod erat demonſtrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω δὴ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· ῥητῷ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ' ἓν ἄρα μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLV. Theor.

Quæ ex binis mediis ſecunda ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

SIT ex binis mediis ſecunda AB diviſa in Γ, ita ut AΓ, ΓB mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant: manifeſtum eſt punctum Γ non eſſe in bipartita ſectione, quoniam non ſunt longitudine commenſurabiles. dico ipſam AB in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur in Δ, ita ut AΓ non ſit eadem quæ ΔB, ſed AΓ major ex hyp. itaque conſtat quadrata ex AΓ, ΓB quadratis ex AΔ, ΔB majora eſſe, ut ſupra oſtendimus [ad lem. 43. 10.] & AΔ, ΔB medias eſſe potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant. exponatur rationalis EZ, & quadrato quidem ex AB æquale parallelogrammum EK ad ipſam EZ

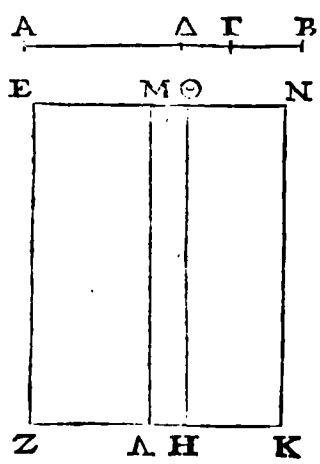
ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα κατ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φανερὸν δὴ ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι. λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ. δῆλον δὴ ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τ ΑΓ, ΓΒ μείζονα τ ἀπὸ τ ΑΔ, ΔΒ, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν, καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας. ἐκκείσθω ῥητὴ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τ ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΕΖ παραβεβλήσθω

βληθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τ ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τ ΑΔ, ΔΒ, ἅπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τ ἀπὸ τ ΑΓ, ΓΒ, ἴσον ἀφῃρήθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τ ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τ ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τ ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τ ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, δυνάμει γάρ εἰσι σύμμετροι αἱ ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὰ ἀπὸ τ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τ ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ εἰσὶ ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ΕΜ, ΜΝ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διῃρημένη, τό, τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή, ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τ ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μείζονά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ· πολλῷ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΕΗ, μεῖζόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τουτέστι τοῦ ΜΚ· ὥστε ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν· ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



applicetur, quadratis vero ex ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur ΕΗ: reliquum igitur ΘΚ [per 4. 2.] æquale eſt ei quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur. rurſus, quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, quæ minora ſunt quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, ut oſtenſum eſt, æquale parallelogrammum auferatur ΕΛ: ergo reliquum ΜΚ eſt æquale ei quod bis continetur ſub ΑΔ, ΔΒ. & quoniam media ſunt quæ ex ΑΓ, ΓΒ quadrata, erit ΕΗ medium, & ad rationalem ΕΖ applicatum eſt: quare [per 23. 10] ΕΘ rationalis eſt, & ipſi ΕΖ longitudine incommenſurabilis. eadem ratione & ΘΝ eſt rationalis, & ipſi ΕΖ incommenſurabilis longitudine. quod cum ΑΓ, ΓΒ mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, erit ΑΓ ipſi ΓΒ incommenſurabilis longitudine. ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita [per 1. 6.] quadratum ex ΑΓ ad id quod ſub ΑΓ, ΓΒ continetur: quadratum igitur ex ΑΓ incommenſurabile eſt [per 10. 10.] ei quod continetur ſub ΑΓ, ΓΒ. ſed quadrato quidem ex ΑΓ commenſurabilia ſunt [per 16. 10.] quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, etenim ΑΓ, ΓΒ potentia ſunt commenſurabiles; ei vero quod continetur ſub ΑΓ, ΓΒ commenſurabile eſt illud quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur: ergo & quadrata ex ΑΓ, ΓΒ incommenſurabilia ſunt ei quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur. quadratis autem ex ΑΓ, ΓΒ æquale eſt parallelogrammum ΕΗ, & ei quod bis continetur ſub ΑΓ, ΓΒ æquale eſt ΘΚ: ergo ΕΗ ipſi ΘΚ eſt incommenſurabile; & ob id recta linea ΕΘ ipſi ΘΝ incommenſurabilis longitudine, ſuntque rationales: ergo ΕΘ, ΘΝ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. ſi autem duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles componantur [per 37. 10.] tota irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur: quare ΕΝ ex binis nominibus eſt diviſa in puncto Θ. eadem ratione & ΕΜ, ΜΝ oſtendentur rationales potentia ſolum commenſurabiles, & erit ΕΝ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum diviſa, videlicet ad Θ & ad Μ, & non eſt ΕΘ eadem quæ ΜΝ, quoniam [per lem. 43. 10.] quadrata ex ΑΓ, ΓΒ quadratis ex ΑΔ, ΔΒ ſunt majora. quadrata autem ex ΑΔ, ΔΒ majora ſunt eo quod bis ſub ΑΔ, ΔΒ continetur: ergo quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc eſt parallelogrammum ΕΗ, multo majus eſt eo quod bis continetur ſub ΑΔ, ΔΒ, hoc eſt parallelogrammo ΜΚ: quare & ΕΘ quam ΜΝ eſt major: non igitur ΕΘ eadem eſt quæ ΜΝ. quod erat demonſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

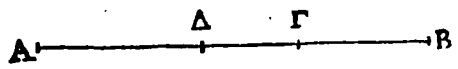
Prop. XLVI. Theor.

Major ad idem duntaxat punctum dividitur in nomina.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τ ἀπὸ τ ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπὸ τ ΑΓ, ΓΒ μέσον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

SIT major ΑΒ diviſa in Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentia incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum quidem ex ipſarum ΑΓ, ΓΒ quadratis rationale, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur medium: dico ΑΒ in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur in Δ, ita ut AΔ, ΔB potentia incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem ſub ipſis continetur medium. & quoniam quo differunt quadrata ex AΓ, ΓB à quadratis ex AΔ, ΔB, hoc differt [per 4. 2.] & id quod bis continetur ſub AΔ, ΔB ab eo quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, ſed quadrata ex AΓ, ΓB ſuperant quadrata ex AΔ, ΔB rationali, etenim utraque rationalia ſunt: ergo quod bis continetur ſub AΔ, ΔB rationali ſuperat id quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, cum media ſint, quod [per 27.10.] eſt impoſſibile: non igitur major ad aliud atque aliud punctum dividitur: ergo ad idem duntaxat dividatur neceſſe eſt. quod erat demonſtrandum.



Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. καὶ ἐπεὶ ᾧ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥητῷ ὑπερέχει τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα διαιρεῖται μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLVII. Theor.

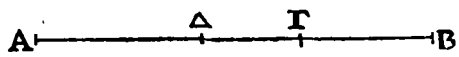
Rationale ac medium potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

Η ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

SIT rationale ac medium potens AB, diviſa in Γ, ita ut AΓ, ΓB potentia incommenſurabiles ſint, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum AΓ, ΓB quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale: dico AB in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur in Δ, ita ut etiam AΔ, ΔB potentia incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis medium; quod autem ſub ipſis continetur rationale. quoniam igitur [per 4. 2.] quo differt rectangulum bis contentum ſub AΔ, ΔB ab eo quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, hoc differunt & quadrata ex AΓ, ΓB à quadratis ex AΔ, ΔB, rectangulum autem bis contentum ſub AΔ, ΔB rationali ſuperat id quod bis ſub AΓ, ΓB continetur: ergo & quadrata ex AΓ, ΓB ſuperant quadrata ex AΔ, ΔB rationali, cum media ſint, quod [per 27.10.] eſt impoſſibile: non igitur rationale ac medium potens dividitur ad aliud atque aliud punctum: quare ad unum duntaxat punctum dividetur. quod erat demonſtrandum.



Ἔστω ῥητὸν δὲ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· καὶ τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητῷ ὑπερέξουσι, μέσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLVIII. Theor.

Bina media potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

Η δύο μέσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

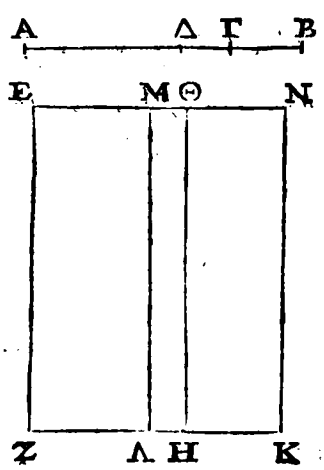
SIT bina media potens AB diviſa in Γ, ita ut AΓ, ΓB potentia incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum ex ipſarum AΓ, ΓB quadratis medium; & quod ſub ipſis continetur medium, & adhuc compoſitum ex ipſarum quadratis incommenſurabile compoſito ex binis rectangulis ſub ipſis: dico AB ad aliud punctum non dividi, ita ut faciat quæ propoſita ſunt.

Si enim fieri poteſt, dividatur in Δ, ita ut rurſus AΓ non ſit eadem quæ ΔB, ſed ſit

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται, ποιοῦσα τὰ εἰρημένα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ

μείζονα καθ' ἑαυτὸν τῷ ΑΓ, καὶ κείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. πάλιν δὴ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΘΚ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διῄρηται, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διῄρηται, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον σημεῖον διαιρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΑΓ ex hypothesi major; exponaturque rationalis ΕΖ, & ad ipsam ΕΖ quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale parallelogrammum ΕΗ applicetur; rectangulo autem bis contento sub ΑΓ, ΓΒ æquale applicetur ΘΚ: totum igitur ΒΚ [per 4. 2.] est æquale ei quod fit ex ΑΒ quadrato. rursus ad ΕΖ applicetur parallelogrammum ΕΛ æquale quadratis ex ΑΔ, ΔΒ: ergo [per 4. 2.] reliquum quod bis sub ΑΔ, ΔΒ continetur reliquo ΜΚ est æquale. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ medium ponitur, erit & parallelogrammum ΕΗ medium, & ad rationalem ΕΖ applicatum est: rationalis igitur est ΘΕ [per 23. 10.] & ipsi ΕΖ longitudine incommensurabilis. eadem ratione & ΘΝ est rationalis, ipsique ΕΖ incommensurabilis longitudine. & quoniam [ex hyp.] compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ incommensurabile est ei quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur, erit & parallelogrammum ΕΗ ipsi ΘΚ incommensurabile: ergo [per 10.10.] & recta linea est ΕΘ incommensurabilis rectæ ΘΝ. & sunt rationales: quare ΕΘ, ΘΝ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ob id ΕΝ ex binis nominibus est divisa in puncto Θ. similiter ostendemus ipsam in puncto quoque Μ dividi, & non est ΕΘ eadem quæ ΜΝ: ergo quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur quod [per 43.10.] est absurdum: non igitur bina media potens dividitur ad aliud atque aliud punctum: quare ad unum duntaxat punctum dividetur. quod erat demonstrandum.

ΟΡΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ.

α'. Ὑποκειμένης ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δυνάτω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲ τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ὅλη ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. Exposita rationali, & quæ ex binis nominibus divisa in nomina, cujus majus nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; si quidem majus nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

β'. Ἐὰν δὲ τὸ ἐλάσσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

2. Si vero minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, dicatur ex binis nominibus secunda.

γ'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

3. Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia,

δ'. Πάλιν δὴ ἐὰν τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δυνῆται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

4. Rursus si majus nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; si quidem majus nomen expositæ rationali sit commensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

5. Si vero minus, dicatur quinta.

6. Quod ſi neutrum, dicatur ſexta.

ε'. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλαττον, πέμπτη.

ϛ'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη.

* SCHOLIUM.

Cum igitur ſex rectæ lineæ ita ſumantur, primas ordine facit tres, in quibus major plus poteſt quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; ſecundas vero tres reliquas, in quibus *major* plus poteſt *quam minor*, quadrato *rectæ lineæ* ſibi incommenſurabilis *longitudine*, propterea quod commenſurabile antecedit incommenſurabile: & adhuc primam quidem, in qua majus nomen commenſurabile eſt expoſitæ rationali; ſecundam autem, in qua minus nomen, quoniam rurſus majus antecedit minus, cum ipſum contineat; tertiam vero, in qua neutrum expoſitæ rationali eſt commenſurabile; & in reliquis tribus eodem modo, primam dicti ſecundi ordinis quartam appellans, ſecundam quintam, & tertiam ſextam.

* ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐξ ὧν ἀρτίων τὰ ἄτω καταλαμβανομένων εὐθειῶν, πάλιν πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ πρότερον τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ ἐπὶ πρώτου μέν, ἐφ' ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ· δευτέρας δὲ, ἐφ' ἧς τὸ ἔλαττον διὰ τὸ πάλιν πρότερον τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος τῷ ἐμπεριέχειν τὸ ἔλασσον· τρίτου δὲ, ἐφ' ὧν μηδέτερον τῶν ὀνομάτων ἐστὶ σύμμετρον τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ· καὶ διὰ τῶν ἑξῆς τρόπων ὁμοίως, τοῦ πρώτου τὴν εἰρημένης δευτέρας τάξεως πεντάρτου καλῶν, καὶ τοῦ δευτέρου πέμπτην, καὶ τοῦ τρίτου ἕκτου.

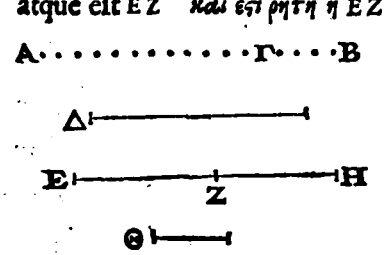
PROP. XLIX. PROBL.

Invenire ex binis nominibus primam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Εὑρεῖν τοῦ ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτου.

EXponantur [per coroll. lem. 1. 30. 10.] duo numeri AΓ, ΓB, ita ut compoſitus ex ipſis, videlicet AB ad ipſum quidem BΓ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ipſum vero ΓA rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & exponatur quædam rationalis Δ, & ipſi Δ longitudine commenſurabilis ſit EZ: ergo [per 6. def. 10.] EZ eſt rationalis. fiat autem [per coroll. 6. 10.] ut BA numerus ad numerum AΓ ita ipſius EZ quadratum ad quadratum ZH. ſed BA ad AΓ rationem habet quam numerus ad numerum: ergo & quadratum ipſius EZ ad quadratum ZH rationem habebit quam numerus ad numerum: commenſurabile igitur eſt [per 6. 10.] quadratum ex EZ quadrato ex ZH. atque eſt EZ rationalis: ergo & rationalis ZH. & quoniam BA ad AΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex EZ ad quadratum ex ZH rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] EZ ipſi ZH incommenſurabilis eſt longitudine: & ob id EZ, ZH rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: igitur [per 37. 10.] ex binis nominibus eſt EH. dico & primam eſſe.



Quoniam enim eſt ut BA numerus ad numerum AΓ ita quadratum ex EZ ad id quod ex ZH quadratum, major autem eſt BA quam AΓ: ergo & quadratum ex EZ quadrato ex ZH eſt majus. ſint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ. quoniam igitur eſt ut BA ad AΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex ZH, erit per converſionem rationis [per coroll. 19. 5.] ut AB ad BΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex Θ. ſed AB ad BΓ rationem habet quam numerus

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AΓ, ΓB, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν AB πρὸς τὸν BΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓA λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ EZ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EZ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH. ὁ δὲ BA πρὸς τὸν AΓ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ἀπὸ τῆς ZH. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ EZ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZH. καὶ ἐπεὶ ὁ BA πρὸς τὸν AΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ ZH μήκει· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ὅλη ἡ EH ἐκ δύο ἐστὶν ὀνομάτων. λέγω ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH, μείζων δὲ ὁ BA τοῦ AΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZH. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ZH, Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ BA πρὸς τὸν AΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Θ. ὁ δὲ AB πρὸς τὸν BΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

* Scholium hoc reperitur in Codice Seviliano.

ἀριθμὸς

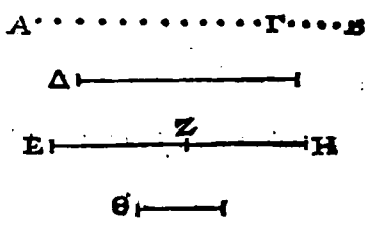
ἀριθμὸς πρὸς πετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ Θ μήκει· ἡ EZ ἄρα τῆς ZH μεῖζον δυναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ EZ, ZH, καὶ σύμμετρος ἡ EZ τῇ Δ μήκει· ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quadratus ad quadratum numerum: & quadratum igitur ex EZ ad quadratum ex Θ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: quare [per 9. 10.] EZ ipsi Θ longitudine est commensurabilis: ideoque EZ plus potest quam ZH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. sunt autem EZ, ZH rationales, & EZ ipsi Δ longitudine est commensurabilis: ergo [per 1. deff. secund. 10.] EH ex binis nominibus est prima. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AΓ, ΓB, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν AB πρὸς μὲν τὸν BΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν AΓ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ ZH μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZH· γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς HZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς HZ τῷ ἀπὸ τῇ ZE· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZE. ἐπεὶ ὁ ΓA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AB λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς HZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ HZ τῇ ZE μήκει· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.



Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH, μεῖζων δὲ ὁ BA τοῦ AΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZH. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσον τὰ ἀπὸ τῶν ZH, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἀλλ' ὁ AB πρὸς τὸν BΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ EZ τῇ ZH μεῖζον δυναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ EZ, ZH δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ZH ἔλασσον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει· ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. L. PROBL.

Invenire ex binis nominibus secundam.

EXponantur [per coroll. 1. lem. 30. 10.] duo numeri AΓ, ΓB, ita ut compositus ex ipsis sc. AB ad ipsum BΓ quidem rationem habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum, ad AΓ vero rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & exponatur rationalis Δ, & sit ZH ipsi Δ longitudine commensurabilis: ergo ZH rationalis est. fiatque [per coroll. 6. 10.] ut ΓA numerus ad numerum AB ita quadratum ex HZ ad quadratum ex ZE: commensurabile igitur est [per 6. 10.] quadratum ex HZ quadrato ex ZE: ergo [per 6. def. 10.] & ZE est rationalis. & quoniam ΓA numerus ad ipsum AB rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque quadratum ex HZ ad quadratum ex ZE rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est [per 9. 10.] HZ ipsi ZE longitudine: quare EZ, ZH rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea [per 37. 10.] ex binis nominibus est EH. ostendendum est & secundam esse.

Quoniam enim convertendo est [per 16. 5.] ut BA numerus ad numerum AΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex ZH, major autem est BA quam AΓ: ergo & quadratum ex EZ quadrato ex ZH est majus. sint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ: est igitur per conversionem rationis [per coroll. 19. 5.] ut AB ad BΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex Θ. sed AB ad BΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo & quadratum ex EZ ad quadratum ex Θ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ob id [per 9. 10.] EZ ipsi Θ longitudine est commensurabilis: quare EZ plus potest quam ZH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. suntque rationales EZ, ZH potentia solum commensurabiles, & ZH minus nomen longitudine commensurabile est ipsi Δ expositæ rationali: ergo [per 2. deff. secund. 10.] EH est ex binis nominibus secunda. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

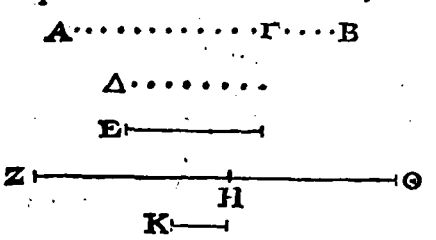
Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AΓ, ΓB, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν AB πρὸς μὲν τὸν

PROP. LI. PROBL.

Invenire ex binis nominibus tertiam.

EXponantur duo numeri AΓ, ΓB, ita ut compositus ex ipsis videlicet AB ad BΓ

quidem rationem habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ad ΑΓ vero rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponatur etiam alius numerus Δ non quadratus, qui ad utrumque ipſorum ΒΑ, ΑΓ rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; denique exponatur rationalis quædam recta linea Ε; fiatque ut Δ ad ΑΒ ita quadratum ex Ε ad quadratum ex ΖΗ: quadratum igitur ex Ε quadrato ex ΖΗ eſt commenſurabile. rationalis autem eſt Ε: ergo [per 6. 10.] & ΖΗ eſt rationalis. & quoniam Δ ad ΑΒ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex Ε ad quadratum ex ΖΗ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt [per 9. 10.] Ε ipſi ΖΗ longitudine. rurſus, fiat ut ΒΑ numerus ad numerum ΑΓ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ: ergo quadratum ex ΖΗ quadrato ex ΗΘ eſt commenſurabile. rationalis autem eſt ΖΗ: quare & ΗΘ eſt rationalis. & quoniam ΑΒ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt [per 9.10.] ΖΗ ipſi ΗΘ longitudine: quare ΖΗ, ΗΘ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: ideoque [per 37. 10.] ΖΘ ex binis nominibus eſt. dico & tertiam eſſe.



Quoniam enim eſt ut Δ numerus ad ΑΒ ita quadratum ex Ε ad quadratum ex ΖΗ; ut autem ΒΑ ad ΑΓ ita quod fit ex ΖΗ quadratum ad quadratum ex ΗΘ: erit ex æquo [per 22.5.] ut Δ ad ΑΓ ita quadratum ex Ε ad quadratum ex ΗΘ. ſed Δ ad ΑΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] Ε ipſi ΗΘ incommenſurabilis eſt longitudine. & quoniam ut ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΖΗ ad id quod ex ΗΘ quadratum; erit quadratum ex ΖΗ majus quadrato ex ΗΘ. ſint quadrato ex ΖΗ æqualia quadrata ex ΗΘ, Κ: per converſionem igitur rationis eſt [per coroll. 19. 5.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ. ſed ΑΒ ad ΒΓ rationem habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo & quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: commenſurabilis igitur eſt ΖΗ ipſi Κ longitudine; & ob id ΖΗ plus poteſt quam ΗΘ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. ſuntque ΖΗ, ΗΘ rationales potentia ſolum commenſurabiles, & neutra ipſarum commenſurabilis eſt ipſi Ε longitudine: ergo [per 3. deff. ſecund. 10.] ΖΘ eſt ex binis nominibus tertia. quod erat demonſtrandum.

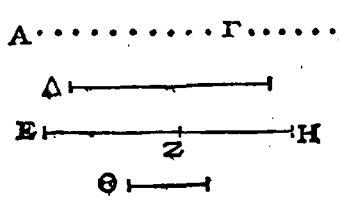
ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν ἀριθμὸς τετράγωνος πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἐκκείσθω δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον μὴ ἔχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὴ δὲ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὲ πάλιν ὡς ὁ Β ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸ ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἑκατέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϚ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μεῖζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς τετράγωνος πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. LII. PROBL.

Invenire ex binis nominibus quartam.

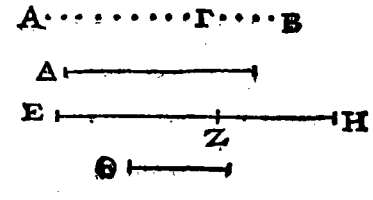
EXponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad utrumque ipſorum rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque rationalis Δ, & ipſi Δ commenſurabilis ſit ΕΖ longitudine: ergo ΕΖ eſt rationalis. fiat autem ut ΒΑ numerus ad numerum ΑΓ ita quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΖΗ: commenſurabile igitur eſt quadratum ex ΕΖ quadrato ex ΖΗ: ideoque recta linea ΖΗ eſt rationalis. & quoniam ΒΑ ad ΑΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit [per 9. 10.] ΕΖ ipſi ΖΗ longitudine incommenſurabilis: ergo ΕΖ, ΖΗ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id [per 37. 10.] ΕΗ ex binis nominibus eſt. dico eam & quartam eſſe.

Quoniam enim eſt ut ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΖΗ; major autem eſt ΒΑ quam ΑΓ: erit quadratum ex ΕΖ quadrato ex ΖΗ majus. ſint quadrato ex ΕΖ æqualia quadrata ex ΖΗ, Θ: per converſionem igitur rationis eſt ut ΑΒ numerus ad numerum ΒΓ ita quadratum ex ΕΖ ad id quod fit ex Θ quadratum. ſed ΑΒ ad ΒΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo ΕΖ ipſi Θ longitudine eſt incommenſurabilis: ac propterea ΕΖ plus poteſt quam ΖΗ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntque ΕΖ, ΖΗ rationales potentia ſolum commenſurabiles; & ΕΖ ipſi Δ commenſurabilis eſt longitudine: ergo [per 4. deff. ſecund. 10.] ΕΗ ex binis nominibus eſt quarta. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΖΗ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· οὐκ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.



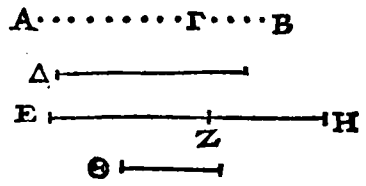
PROP. LIII. PROBL.

Invenire ex binis nominibus quintam.

EXponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad utrumq; ipſorum rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque recta linea quædam rationalis Δ, & ipſi longitudine commenſurabilis ſit ΖΗ: ergo ΖΗ eſt rationalis. & fiat ut ΓΑ ad ΑΒ ita quadratum ex ΗΖ ad id quod fit ex ΖΕ quadratum: rationalis igitur eſt ΖΕ. & quoniam ΓΑ numerus ad ΑΒ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex ΗΖ ad quadratum ex ΖΕ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] ΕΖ, ΖΗ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: & ob id [per 37. 10.] ΕΗ ex binis nominibus eſt. dico eam & quintam eſſe.

Quoniam

Quoniam enim eſt ut ΓA ad AB ita quadratum ex HZ ad quadratum ex ZE; erit convertendo [per 16. 5.] ut BA ad AΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex ZH: ergo quadratum ex EZ quadrato ex ZH eſt majus. ſint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ: per converſionem igitur rationis eſt ut AB numerus ad numerum BΓ ita quadratum ex EZ ad id quod ex Θ quadratum. ſed AB ad BΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex EZ ad quadratum ex Θ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea EZ ipſi Θ longitudine eſt incommenſurabilis: quare EZ plus poteſt quam ZH quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntque EZ, ZH rationales potentia ſolum commenſurabiles, & ZH minus nomen expoſitæ rationali Δ commenſurabilis eſt longitudine: ergo [per 5.deff.ſecund.10.] EH ex binis nominibus eſt quinta. quod erat faciend.

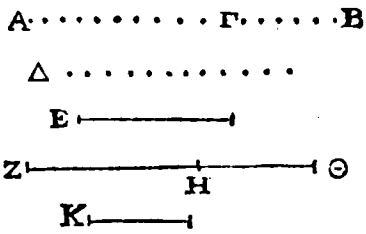


Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΓA πρὸς τὸν AB ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς HZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ὁ BA πρὸς τὸν AΓ ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς EZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZH. ἔστω ᾧ τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ZH, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB ἀριθμὸς πρὸς τὸν BΓ ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ AB πρὸς τὸν BΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ EZ τῆ ZH μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ EZ, ZH ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ZH ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει· ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. LIV. PROBL.

Invenire ex binis nominibus ſextam.

EXponantur duo numeri AΓ, ΓB, ita ut AB ad utrumque ipſorum rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ſit etiam alius numerus Δ non quadratus, qui ad utrumque ipſorum BA, AΓ rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & exponatur rationalis quædam recta linea E, fiatque ut Δ ad AB ita quadratum ex E ad quadratum ex ZH: commenſurabilis igitur eſt E ipſi ZH potentia. atque E eſt rationalis: quare [per 6. def. 10.] & rationalis eſt ZH. & quoniam Δ ad AB rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex ZH rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] E ipſi ZH longitudine eſt incommenſurabilis. itaque rurſus fiat ut BA ad AΓ ſic quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ: quadratum igitur ex ZH quadrato ex HΘ eſt commenſurabile. rationale autem eſt quadratum ex ZH: ergo & quadratum ex HΘ eſt rationale; & ob id recta linea HΘ eſt rationalis. & quoniam BA ad AΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt [per 9. 10.] ZH ipſi HΘ longitudine; & ideo ZH, HΘ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: quare [per 37. 10.] ex binis nominibus eſt ZΘ. oſtendendum eſt & ſextam eſſe.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

ΕΚκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AΓ, ΓB, ὥστε τὸν AB πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὤν, μηδὲ πρὸς ἑκάτερον τῶν BA, AΓ λόγον ἔχων ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ E, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν AB ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ E τῇ ZH δυνάμει. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ E· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZH. καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν AB λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς E ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ E τῇ ZH μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ BA πρὸς τὸν AΓ ἄτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς HΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· ῥητὴ ἄρα ἡ HΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ BA πρὸς τὸν AΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ HΘ μήκει· αἱ ZH, HΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ZΘ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ ἕκτη.

Επεὶ

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ ὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ ὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· δίσα ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ ὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα χωρὶς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΓ ὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ ὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσὶν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Ε· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἐκτή. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam enim ut Δ ad ΑΒ ita eſt quadratum ex Ε ad quadratum ex ΖΗ; eſt autem & ut ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ: ex æquo eſt ut Δ ad ΑΓ ita quadratum ex Ε ad quadratum ex ΗΘ. ſed Δ ad ΑΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex Ε ad quadratum ex ΗΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt Ε [per 9.10.] ipſi ΗΘ longitudine. oſtenſum autem eſt & ipſi ΖΗ incommenſurabilem eſſe: quare utraque ipſarum ΖΗ, ΗΘ ipſi Ε longitudine eſt incommenſurabilis. & quoniam eſt ut ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ, erit quadratum ex ΖΗ quadrato ex ΗΘ majus. ſint quadrato ex ΖΗ æqualia quadrata ex ΗΘ, Κ: ergo per converſionem rationis ut ΑΒ ad ΒΓ ita eſt quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ. ſed ΑΒ ad ΒΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea ΖΗ ipſi Κ longitudine eſt incommenſurabilis: ergo ΖΗ plus poteſt quam ΗΘ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntque ΖΗ, ΗΘ rationales potentia ſolum commenſurabiles; & neutra ipſarum longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali Ε: quare [per 6. deff. ſecund.10.] ΖΘ eſt ex binis nominibus ſexta. quod erat faciendum.

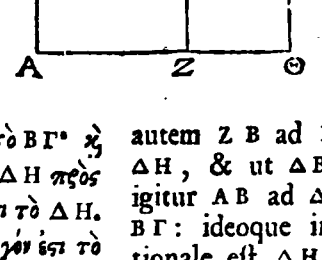
ΛΗΜΜΑ.

Εστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΔΒ τῇ ΒΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· λέγω ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ, καὶ ἔτι τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.

Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΖΒ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΒΗ μήκει· ὅλη ἄρα ἡ ΔΕ ὅλῃ τῇ ΖΗ ἐστιν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ΔΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστιν ἴση· ἰσοπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον. ἔστι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ ὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ ὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ ὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ ὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ ὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ ὕτως ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ ὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ ὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς

LEMMA.

Sint duo quadrata ΑΒ, ΒΓ, & ponantur ita ut ΔΒ ſit in directum ipſi ΒΕ: ergo [per 14. 1] & ΖΒ ipſi ΒΗ in directum erit. & compleatur ΑΓ parallelogrammum: dico ΑΓ quadratum eſſe, & inter quadrata ΑΒ, ΒΓ rectangulum ΔΗ medium eſſe proportionale, itemque inter ipſa ΑΓ, ΓΒ medium proportionale eſſe ΔΓ.



Quoniam enim ΔΒ quidem eſt æqualis ΖΒ, ΒΕ vero ipſi ΒΗ; erit tota ΔΕ toti ΖΗ æqualis. ſed ΔΕ æqualis eſt utrivis ipſarum ΑΚ, ΘΓ: ergo & utravis ΑΘ, ΚΓ utrivis ΑΚ, ΘΓ eſt æqualis; æquilaterum igitur eſt ΑΓ parallelogrammum. eſt autem & rectangulum: ergo quadratum eſt ΑΓ. & quoniam eſt ut ΖΒ ad ΒΗ ita ΔΒ ad ΒΕ, ut autem ΖΒ ad ΒΗ ita [per 1. 6.] ΑΒ ad ΔΗ, & ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΔΗ ad ΒΓ: ut igitur ΑΒ ad ΔΗ ita eſt [per 11. 5.] ΔΗ ad ΒΓ: ideoque inter ΑΒ, ΒΓ medium proportionale eſt ΔΗ. dico præterea inter ipſa ΑΓ, ΓΒ medium proportionale eſſe ΔΓ. nam cum ſit ut ΑΔ ad ΔΚ ita ΚΗ ad ΗΓ, eſt enim utraque utrique æqualis: & componendo erit ut ΑΚ ad ΚΔ ita ΚΓ ad ΓΗ. ſed [per 1. 6.] ut ΑΚ ad ΚΔ ita ΑΓ ad ΓΔ, & ut ΚΓ ad ΓΗ ita ΔΓ ad ΓΒ: & igitur ut ΑΓ ad ΓΔ

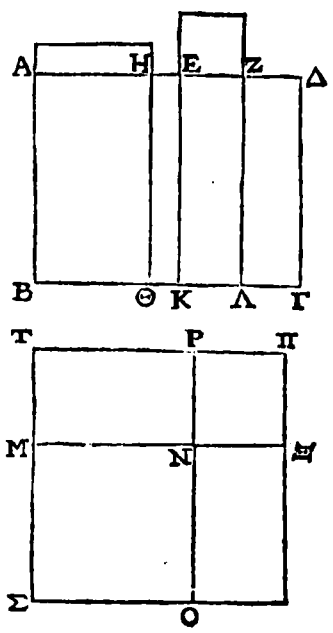
ita eſt ΔΓ ad ΓΒ: ac propterea inter ipſa ΑΓ, ΓΒ medium proportionale eſt ΓΔ. quod demonſtrandum proponebatur.

Prop. LV. Theor.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus prima; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur ſub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus prima ΑΔ: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium ΑΓ irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur.

Quoniam enim ΑΔ eſt ex binis nominibus prima, dividatur in nomina ad punctum Ε; & ſit ΑΕ majus nomen. manifeſtum eſt [per 1. defſ. ſecund. 10.] ΑΕ, ΕΔ rationales eſſe potentia ſolum commenſurabiles, & ΑΕ plus poſſe quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: & præterea ΑΕ expoſitæ rationali ΑΒ longitudine commenſurabilem eſſe. ſecetur ΕΔ bifariam in Ζ. quoniam igitur ΑΕ plus poteſt quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, ſi quartæ parti quadrati, quod fit à minori, hoc eſt quadrato ex ΕΖ, æquale parallelogrammum ad majorem ΑΕ applicetur deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes commenſurabiles ipſam dividet. applicetur igitur [per 28. 6.] ad ΑΕ quadrato ipſius ΕΖ æquale rectangulum ſub ΑΗ, ΗΕ: ergo ΑΗ ipſi ΗΕ longitudine eſt commenſurabilis. deinde per puncta Η, Ε, Ζ alterutri ipſarum ΑΒ, ΔΓ parallelæ ducantur ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, & [per 14. 2.] parallelogrammo quidem ΑΘ æquale quadratum conſtituatur ΣΝ, parallelogrammo autem ΗΚ æquale quadratum ΝΠ, & ponantur ita ut ΜΝ ſit in directum ipſi ΝΞ: ergo [per 14. 1.] ΡΝ ipſi ΝΟ in directum erit. & parallelogrammum ΣΠ compleatur: quadratum igitur [per lem. præc.] eſt ΣΠ. & quoniam rectangulum ſub ΑΗ, ΗΕ eſt æquale quadrato ex ΕΖ, erit [per 17. 6.] ut ΑΗ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΕΗ: quare [per 1. 6.] ut ΑΘ ad ΕΛ. ita eſt ΕΛ ad ΚΗ: ac propterea inter parallelogramma ΑΘ, ΗΚ medium proportionale eſt ΕΛ. ſed [per conſtr.] parallelogrammo ΑΘ æquale eſt quadratum ΣΝ, & ΗΚ æquale quadrato ΝΠ: ergo inter quadrata ΣΝ, ΝΠ medium proportionale eſt ΕΛ. ſed [per lem. præced.] inter eadem ΣΝ, ΝΠ medium proportionale eſt & ΜΡ: æquale igitur eſt ΜΡ ipſi ΕΛ. ſed [per 43. 1.] ΜΡ eſt æquale ΟΞ, & [per 36. 1.] ΕΛ ipſi ΖΓ: ergo totum ΕΓ ipſis ΜΡ, ΟΞ eſt æquale. ſunt autem & ΑΘ, ΗΚ æqualia ipſis ΣΝ, ΝΠ: totum igitur ΑΓ eſt æquale toti ΣΠ, hoc eſt quadrato ex ΜΞ; ideoque ipſa ΜΞ



τὸ ΓΔ ἄτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ· τ' ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΓΔ. ὅπερ προέκειτο δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

Ἐὰν χωρίον περιέχῃ ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστι, καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ. φανερὸν δὴ ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΒ μήκει. τετμήσθω δὲ ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τῶν ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τουτέστι τῶν ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παρὰ τὸ μεῖζονα τὸ ΑΕ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὸ διελεῖ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὸ ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Ε, Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΓ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ· καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλόγραμμον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. καί ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΖ ἄτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ ἄτως τὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΚΗ· τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ΣΝ, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΠ· τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἔστι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΜΡ τῷ ΕΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΖΓ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ, ΟΞ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ

ἄρα

ἄρα δυνάμει] ἡ ΜΞ· λέγω ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος μήκει· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσι. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καὶ ἔστι σύμμετρον τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρον. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρός ἐστιν. ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς ΝΡ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί, καὶ δυνατὸν τὸ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

potest parallelogrammum ΑΓ: dico ΜΞ ex binis nominibus esse. quoniam enim ΑΗ commensurabilis est ipsi ΗΕ, erit [per 16. 10.] ΑΕ utrique ipsarum ΑΗ, ΗΕ commensurabilis. ponitur autem & ΑΕ commensurabilis ipsi ΑΒ longitudine: ergo [per 12. 10.] & ΑΗ, ΗΕ ipsi ΑΒ commensurabiles sunt. atque est ΑΒ rationalis: rationalis igitur est & utraque ipsarum ΑΗ, ΗΕ; & ob id [per 20. 10.] rationale utrumque ipsorum ΑΘ, ΗΚ, & ΑΘ ipsi ΗΚ [per 10. 10.] est commensurabile. sed ΑΘ est æquale ipsi ΣΝ, & ΗΚ ipsi ΝΠ: ergo & quadrata ΣΝ, ΝΠ, videlicet quæ fiunt ex ΜΝ, ΝΞ, rationalia sunt & commensurabilia. & quoniam [per 37. 10.] incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΔ longitudine, & ΑΕ quidem est commensurabilis ipsi ΑΗ & ΔΕ commensurabilis ipsi ΕΖ; erit & ΑΗ ipsi ΕΖ longitudine incommensurabilis: ergo & ΑΘ est incommensurabile ipsi ΕΛ. sed ΑΘ est æquale ΣΝ, & ΕΛ ipsi ΜΡ: quare ΣΝ est incommensurabile ipsi ΜΡ. ut autem ΣΝ ad ΜΡ ita ΟΝ ad ΝΡ: incommensurabilis igitur est [per 10. 10.] ΟΝ ipsi ΝΡ. est autem ΟΝ æqualis ΜΝ, & ΝΡ ipsi ΝΞ: ergo ΜΝ ipsi ΝΞ est incommensurabilis. atque est quadratum ex ΜΝ commensurabile quadrato ex ΝΞ, & utrumque rationale: quare ΜΝ, ΝΞ rationales sunt potentia solum commensurabiles: ideoque [per 37. 10.] ΜΞ ex binis nominibus est, & potest parallelogrammum ΑΓ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

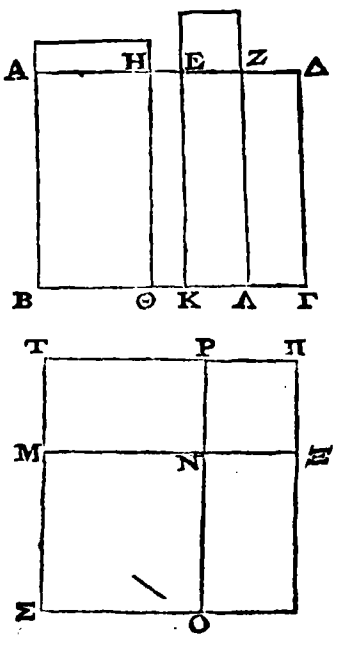
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τὸ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Prop. LVI. Probl.

Si spatium contineatur sub rationali, & ex binis nominibus secunda; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ ex binis mediis prima appellatur.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τὸ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

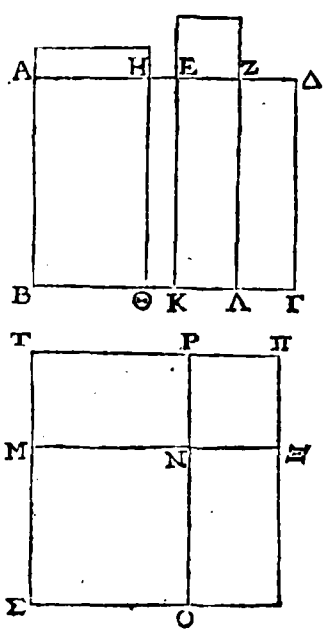
Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα ἡ ΕΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. πετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ παρεζλήλοι ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ, ΔΓ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ



Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus secunda ΑΔ: dico rectam lineam, quæ spatium ΑΓ potest, ex binis mediis primam esse.

Quoniam enim ΑΔ est ex binis nominibus secunda, dividatur in nomina ad punctum Ε, ita ut ΑΕ sit majus nomen: ergo [per 2. deff. secund. 10.] ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ΑΕ plus potest quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen ΕΔ commensurabile est ipsi ΑΒ longitudine. secetur ΕΔ bifariam in Ζ, & quadrato ipsius ΕΖ æquale parallelogrammum ad rectam lineam ΑΕ applicetur deficiens figura quadrata, rectangulum nempe sub ΑΗ, ΗΕ: commensurabilis igitur est [per 18. 10.] ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine. & per puncta Η, Ε, Ζ ipsis ΑΒ, ΔΓ parallelæ ducantur ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, parallelogrammo autem ΑΘ æquale quadratum ΣΝ constituatur, & parallelogrammo

logrammo HK æquale quadratum NΠ, & ponatur ita ut MN ſit in directum ipſi NΞ: ergo & PN ipſi NO in directum erit. & compleatur ΣΠ quadratum: manifeſtum igitur eſt ex iis quæ demonſtrata ſunt [in antec.] parallelogrammum MP medium eſſe proportionale inter quadrata ΣN, NΠ, & parallelogrammo EΔ æquale; & præterea rectam lineam MΞ poſſe ſpatium AΓ: oſtendendum igitur eſt ipſam MΞ ex binis mediis primam eſſe. quoniam enim [per 37. 10.] incommenſurabilis eſt AE ipſi EΔ longitudine, commenſurabilis autem EΔ ipſi AB; erit [per 14. 10.] AE ipſi AB longitudine incommenſurabilis. & quoniam AH commenſurabilis eſt longitudine ipſi HE, erit [per 16. 10.] AE utrique ipſarum AH, HE longitudine commenſurabilis. atque eſt AE rationalis: rationalis igitur & utraque AH, HE. quod cum AE ſit incommenſurabilis quidem ipſi AB longitudine, commenſurabilis autem AE utrique ipſarum AH, HE; erunt AH, HE ipſi AB longitudine incommenſurabiles: quare BA, AH, HE rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: medium igitur eſt [per 22. 10.] utrumque parallelogrammorum AΘ, HK: & ob id utrumque quadratorum ΣN, NΠ eſt medium: ergo rectæ lineæ MN, NΞ mediæ ſunt. rurſus, quoniam commenſurabilis eſt AH ipſi HE longitudine, erit [per 1.6. & 10.10] parallelogrammum AΘ parallelogrammo HK commenſurabile, hoc eſt quadratum ΣN ipſi NΠ, hoc eſt quadratum ex MN quadrato ex NΞ: ergo MN, NΞ potentia commenſurabiles ſunt. & quoniam incommenſurabilis eſt AB ipſi EΔ longitudine, & AB quidem eſt commenſurabilis ipſi AH, EΔ vero ipſi EZ: erit AH ipſi EZ longitudine incommenſurabilis: quare & parallelogrammum AΘ incommenſurabile parallelogrammo EA, hoc eſt ΣN ipſi MP, hoc eſt [per 1.6.] ON ipſi NP, hoc eſt MN ipſi NΞ incommenſurabilis eſt longitudine. oſtenſæ autem ſunt MN, NΞ & mediæ & potentia commenſurabiles: ergo MN, NΞ mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles. dico & rationale continere. quoniam enim ΔE ponitur commenſurabilis utrique ipſarum AB, EZ, erit EZ ipſi EK longitudine commenſurabilis. atque eſt rationalis utraque ipſarum: rationale igitur eſt [per 20. 10.] parallelogrammum EA, hoc eſt MP; eſtque MP quod ſub MN, NΞ continetur. ſi autem duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota [per 38. 10.] irrationalis eſt, quæ ex binis mediis prima appellatur: ergo MΞ ex binis mediis eſt prima. quod erat demonſtrandum.



HK ἴσον παραλληλογραμμον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλογραμμον· φανερὸν δὴ ἐκ τῶν προδεδειγμένων, ὅτι τὸ ΜΡ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΣΝ, ΝΠ, καὶ ἴσον τῷ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δυνάται ἡ ΜΞ· δεικτέον δὴ ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΕ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἡ ΑΕ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ· αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ ἄρα ῥητὴ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ· ὥστε ἑκάτερον τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἐστί· καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσί. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΜΡ, τουτέστιν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ καὶ μέσαι οὖσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΕ σύμμετρός ἐστιν ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ. καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τὰ δὲ ΜΡ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. LVII. THEOR.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus tertia; recta li-

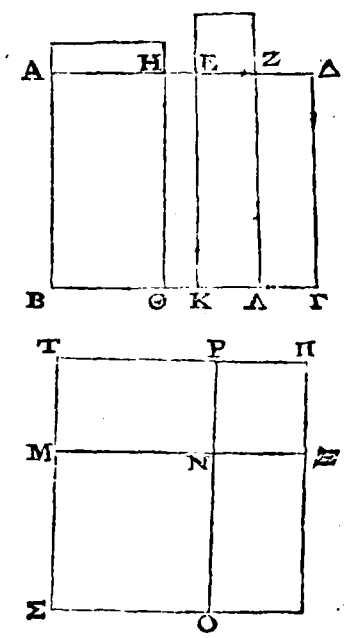
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη

δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη ἡ ΑΔ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις δείξομεν ὅτι ἡ ΜΞ ἐστιν ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη, καὶ ὅτι αἱ ΜΝ, ΝΞ ἐκ δύο μέσων εἰσί· δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



nea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ appellatur ex binis mediis ſecunda.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur ſub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus tertia ΑΔ diviſa in nomina ad punctum Ε, quorum majus ſit ΑΕ: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium ΑΓ, irrationalem eſſe; quæ ex binis mediis ſecunda appellatur.

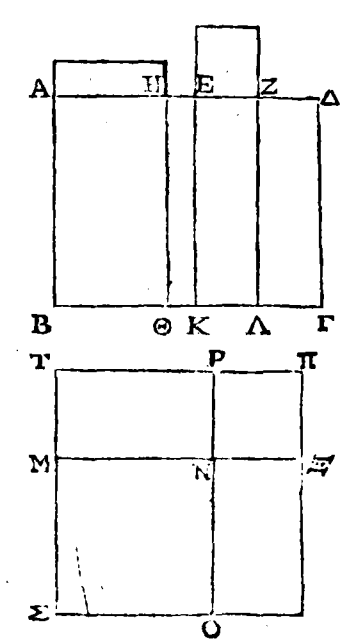
Conſtruantur enim eadem quæ ſupra. & quoniam ΑΔ ex binis nominibus tertia eſt; erunt [per 3. deff. ſecund. 10.] ΑΕ, ΕΔ rationales potentia ſolum commenſurabiles, & ΑΕ plus poterit quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, neutraque ipſarum ΑΕ, ΕΔ ipſi ΑΒ longitudine erit commenſurabilis. ſimiliter [atque in præc.] oſtendemus ΜΞ eam eſſe quæ ſpatium ΑΓ poteſt, & ΜΝ, ΝΞ eſſe ex binis mediis: itaque oſtendendum eſt & ſecundam eſſe. quoniam enim ΔΕ incommenſurabilis eſt longitudine ipſi ΑΒ, hoc eſt ipſi ΕΚ; atque eſt ΔΕ commenſurabilis ΕΖ: erit ΕΖ ipſi ΕΚ longitudine incommenſurabilis. & ſunt rationales: ergo ΖΕ, ΕΚ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id ΕΛ, hoc eſt ΜΡ, medium eſt, & continetur ſub ΜΝ, ΝΞ: medium igitur eſt quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur: quare [per 39. 10.] ΜΞ ex binis mediis eſt ſecunda. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νή.

Ἐὰν χωρίον περιέχῃ ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρός ἐστι μήκει. τετμήσθω δὴ ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· ἀσύμμετρον ἄρα



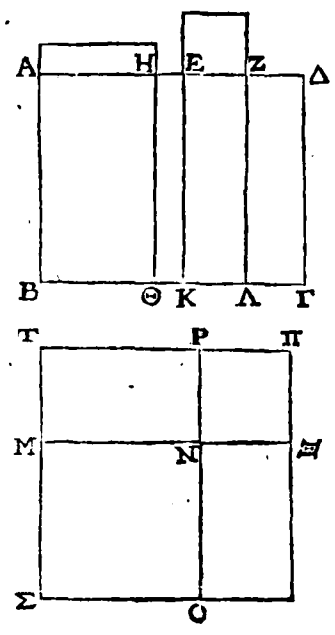
PROP. LVIII. THEOR.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus quarta; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ vocatur major.

Spatium enim ΑΓ contineatur ſub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus quarta ΑΔ, diviſa in nomina ad punctum Ε, quorum ΑΕ ſit majus: dico rectam lineam, quæ ſpatium ΑΓ poteſt, irrationalem eſſe; quæ major appellatur.

Quoniam enim ΑΔ ex binis nominibus eſt quarta, erunt [per 4. deff. ſecund. 10.] ΑΕ, ΕΔ rationales potentia ſolum commenſurabiles; & ΑΕ plus poterit quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & ΑΕ ipſi ΑΒ commenſurabilis erit longitudine. dividatur ΔΕ bifariam in Ζ, & quadrato ipſius ΕΖ æquale parallelogrammum ad ΑΕ applicetur deficiens figura quadrata, rectangulum nempe ſub ΑΗ, ΗΕ: erit igitur [per

19.10.] AH ipſi HE longitudine incommenſurabilis. ducantur ipſi AB parallelæ HΘ, EK, ZΛ, & eadem fiant quæ ſupra: conſtat igitur MΞ poſſe ſpatium AΓ. oſtendendum autem eſt MΞ irrationalem eſſe, quæ vocatur major. quoniam enim AH ipſi HE incommenſurabilis eſt longitudine, erit [per 1.6. & 10.10.] & AΘ ipſi HK incommenſurabile, hoc eſt [per conſtr.] ΣN ipſi NΠ: ergo MN, NΞ potentia incommenſurabiles ſunt. & quoniam AE ipſi AB longitudine eſt commenſurabilis, parallelogrammum AK rationale eſt, atque eſt æquale quadratis ipſarum MN, NΞ: ergo compoſitum ex quadratis ipſarum MN, NΞ eſt rationale. quod cum Δ E ſit incommenſurabilis longitudine ipſi AB, hoc eſt ipſi EK, ſit autem Δ E commenſurabilis ipſi EZ: erit EZ ipſi EK incommenſurabilis longitudine: quare KE, EZ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: & ob id [per 22. 10.] medium eſt ΛE, hoc eſt MP; & continetur ſub MN, NΞ; medium igitur eſt quod ſub MN, NΞ continetur; eſtque compoſitum ex quadratis ipſarum MN, NΞ rationale; & MN ipſi NΞ potentia incommenſurabilis. ſi autem duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium; tota [per 40. 10.] irrationalis erit. vocatur autem major: ergo MΞ irrationalis eſt, quæ major appellatur, & poteſt ſpatium AΓ. quod erat demonſtrandum.



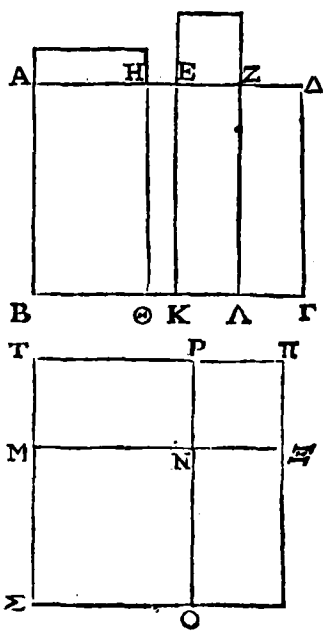
ἡ AH τῇ HE μήκει. ἤχθωσαν ὁποτέρᾳ τῶν AB, HE πρὸς ὀρθὰς αἱ HΘ, EK, ZΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπάνω γεγονέτω. φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ AΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ MΞ. δεικτέον δὲ ὅτι ἡ MΞ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AH τῇ HE μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ AΘ τῷ HK, τουτέστι τὸ ΣN τῷ NΠ· αἱ MN, NΞ ἄρα εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ AB μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ AK, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν MN, NΞ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN, NΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Δ E τῇ AB μήκει, τουτέστι τῇ EK, ἀλλὰ ἡ Δ E σύμμετρός ἐστι τῇ EZ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ EZ τῇ EK μήκει· αἱ KE, EZ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΛE, τουτέστι τὸ MP, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν MN, NΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν MN, NΞ, καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN, NΞ, καὶ ἔστιν ἀσύμμετρον ἡ MN τῇ NΞ δυνάμει. ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι. καλεῖται δὲ μείζων· ἡ MΞ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, ἡ δυνατὴ τὸ AΓ χωρίον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. LIX. THEOR.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus quinta; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ vocatur rationale & medium potens.

SPatium enim AΓ contineatur ſub rationali AB, & ex binis nominibus quinta AΔ, diviſa in nomina ad punctum E, ita ut majus nomen ſit AE: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AΓ, irrationalem eſſe; quæ vocatur rationale ac medium potens.

Conſtruantur enim eadem quæ ſupra: manifeſtum igitur eſt MΞ poſſe ſpatium AΓ. oſtendere autem oportet MΞ eſſe quæ rationale ac medium poteſt. quoniam enim AH ipſi EH incommenſurabilis eſt longitudine, & [per 1. 6. & 10. 10.] parallelogrammum AΘ eſt incommenſurabile parallelogrammo ΘE, hoc eſt quadratum ex MN quadrato ex NΞ: ergo MN, NΞ potentia incommenſurabiles ſunt. & quoniam



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ AΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AB, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς AΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ E, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ AE· λέγω ὅτι ἡ τὸ AΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατασκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ AΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ MΞ. δεικτέον δὲ ὅτι ἡ MΞ ἐστὶν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AH τῇ EH, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ AΘ τῷ ΘE, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς MN τῷ ἀπὸ τῆς NΞ· αἱ MN, NΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ

ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καὶ ἔστιν ἔλασσον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΕΔ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρός ἐστι· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΚ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι, ποιοῦσι δὲ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΔ est ex binis nominibus quinta, ſitque minor ipſius portio ΕΔ; erit [per 5. deff. ſecund. 10.] ΕΔ ipſi ΑΒ commenſurabilis longitudine. ſed ΑΒ ipſi ΕΔ eſt incommenſurabilis: ergo [per 13.10.] & ΑΒ incommenſurabilis eſt longitudine ipſi ΑΕ: ac propterea ΒΑ, ΑΕ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: medium igitur [per 22. 10.] eſt ΑΚ, hoc eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΜΝ, ΝΞ. & quoniam ΔΕ commenſurabilis eſt longitudine ipſi ΑΒ, hoc eſt ipſi ΕΚ, eſtque ΔΕ commenſurabilis ipſi ΕΖ: erit & ΕΖ ipſi ΕΚ commenſurabilis. rationalis autem eſt ΕΚ: rationale igitur eſt [per 20.10.] & ΕΛ, hoc eſt ΜΡ, hoc eſt parallelogrammum quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur; quare ΜΝ, ΝΞ potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale: ergo [per 41. 10.] ΜΞ eſt rationale ac medium potens, & poteſt ſpatium ΑΓ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

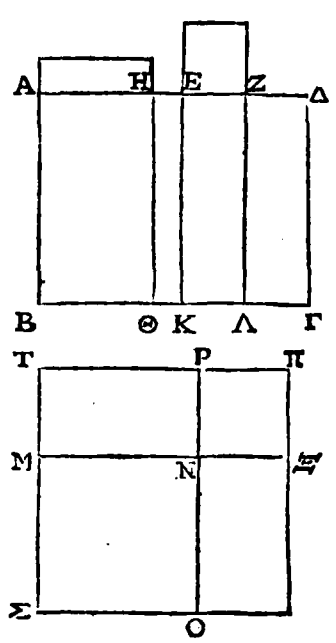
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Prop. LX. Theor.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus ſexta; quæ ſpatium poteſt recta linea irrationalis eſt, quæ vocatur bina media potens.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστί.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur ſub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus ſexta ΑΔ, quæ dividatur in nomina ad punctum Ε, ita ut ΑΕ ſit majus nomen: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium ΑΓ, eſſe bina media potentem.



Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΕΑ, ΑΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ· καὶ αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΕΖ, καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΚ ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, τὸ δὲ ΕΛ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καί ἐστι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμ-

Conſtruantur enim eadem quæ ſupra. manifeſtum igitur eſt ΜΞ poſſe ſpatium ΑΓ, & ΜΝ ipſi ΝΞ potentia. incommenſurabilem eſſe. & quoniam ΕΑ ipſi ΑΒ incommenſurabilis eſt longitudine, erunt ΕΑ, ΑΒ rationales potentia ſolum commenſurabiles: medium igitur [per 22. 10.] eſt ΑΚ, hoc eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΜΝ, ΝΞ. rurſus, quoniam incommenſurabilis eſt ΕΔ ipſi ΑΒ longitudine, erit & ΖΕ ipſi ΕΚ longitudine incommenſurabilis: ergo & ΖΕ, ΕΚ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea medium eſt ΕΛ, hoc eſt ΜΡ, hoc eſt quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur. & quoniam ΕΑ eſt incommenſurabilis ipſi ΕΖ, & parallelogrammum ΑΚ parallelogrammo ΕΛ incommenſurabile erit. ſed ΑΚ quidem eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΜΝ, ΝΞ; ΕΛ vero eſt quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur: incommenſurabile igitur eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΜΝ, ΝΞ ei quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur. atque eſt utrumque ipſorum medium; & ΜΝ, ΝΞ potentia ſunt incommenſurabiles:

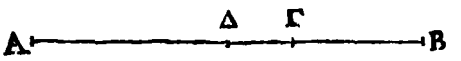
les: ergo [per 42. 10.] MΞ est bina media potens, & potest spatium AΓ. quod erat demonstrandum.

μετροι· ἡ ΜΞ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, ipsarum partium quadrata majora sunt rectangulo quod bis sub dictis partibus continetur.

Sit recta linea AB, & secetur in puncto Γ, & sit AΓ major: dico quadrata ex AΓ, ΓB majora esse rectangulo quod bis sub AΓ, ΓB continetur.



Secetur enim AB bifariam in Δ. & quoniam recta linea AB in partes quidem æquales secatur ad Δ, in partes vero inæquales ad Γ; rectangulum sub AΓ, ΓB una cum quadrato ipsius ΓΔ [per 5. 2.] est æquale ei quod fit ex AΔ quadrato: ergo rectangulum sub AΓ, ΓB quadrato ex AΔ est minus: quod igitur bis continetur sub AΓ, ΓB minus est quam duplum quadrati ex AΔ. sed [per 9. 2.] quadrata ex AΓ, ΓB dupla sunt quadratorum ex AΔ, ΔΓ: ergo quadrata ex AΓ, ΓB majora sunt eo quod bis sub AΓ, ΓB continetur. quod erat demonstrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων πεφάγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. LXI. THEOR.

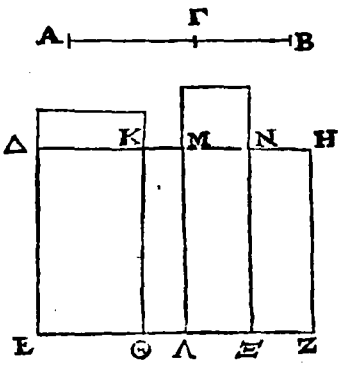
Quadratum ejus quæ est ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξα'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

SIT ex binis nominibus AB divisa in nomina ad punctum Γ, ita ut AΓ sit majus nomen, exponaturque rationalis ΔE, & quadrato rectæ lineæ AB æquale ad ipsam ΔE applicetur rectangulum parallelogrammum ΔEZH, latitudinem faciens ΔH: dico ΔH ex binis nominibus primam esse.

Applicetur enim [per 45. 1.] ad rationalem ΔE quadrato quidem ipsius AΓ æquale parallelogrammum ΔΘ, quadrato autem ipsius BΓ æquale KΛ: reliquum igitur quod bis sub AΓ, ΓB continetur [per 4. 2.] est æquale parallelogrammo MZ. secetur MH bifariam in N, & alterutri ipsarum MΛ, HZ parallela ducatur NΞ: utrumque igitur parallelogrammorum MΞ, NZ est æquale ei quod semel sub AΓ, ΓB continetur. & quoniam ex binis nominibus est AB divisa in nomina ad punctum Γ, erunt [per 37. 10.] AΓ, ΓB rationales potentia solum commensurabiles: ergo quadrata ex AΓ, ΓB rationalia sunt & commensurabilia inter se: & ob id [per 16. 10.] compositum ex quadratis ipsarum AΓ, ΓB commensurabile est ipsarum AΓ, ΓB quadratis: rationale igitur est compositum ex quadratis ipsarum AΓ, ΓB. atq; est æquale parallelogrammo ΔΛ: ergo & ΔΛ est rationale, & ad rationalem ΔE applicatum est: rationalis igitur est ΔM [per 23. 10.]



Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕΖΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΖ. τετμήσθω ἡ ΜΗ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ παρὰ ἑκατέραν τῶν ΜΛ, ΗΞ ἤχθω ἡ ΝΞ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΜΞ, ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν εἰστι καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος

σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΕΔ, μήκει. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητή, καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τῶν ΔΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάττονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τὸ ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἡ ΔΜ μεῖζον ὄνομα ἔστι σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξϚ'.

Τὸ ἀπὸ ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

ΕΣτω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰ μέσα κατὰ τὸ Γ, ὧν μεῖζων ἡ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσα ἐστί· μέσον ἄρα τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν παράκειται· ῥητὴ ἄρα

& ipſi ΔΕ commenſurabilis longitudine. rurſus, quoniam ΑΓ, ΓΒ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, medium eſt quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur, hoc eſt rectangulum ΜΖ. & ad rationalem ΜΛ applicatum eſt: rationalis igitur eſt ΜΗ [per 23. 10.] & ipſi ΜΛ, hoc eſt ipſi ΕΔ, longitudine incommenſurabilis. eſt autem & ΜΔ rationalis, & ipſi ΔΕ commenſurabilis longitudine: ergo [per 13. 10.] ΔΜ ipſi ΜΗ longitudine eſt incommenſurabilis. ſuntque rationales: ergo ΔΜ, ΜΗ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 37. 10.] ΔΗ eſt ex binis nominibus. oſtendendum eſt & primam eſſe. quoniam enim inter quadrata ex ΑΓ, ΓΒ [per lem. 55. 10.] medium proportionale eſt, quod ſub ΑΓ, ΓΒ continetur, erit etiam inter parallelogramma ΔΘ, ΚΛ medium proportionale ΜΞ: eſt igitur ut ΔΘ ad ΜΞ ita ΜΞ ad ΚΛ, hoc eſt [per 1. 6.] ut recta linea ΔΚ ad ΜΝ ita ΜΝ ad ΜΚ: ergo [per 17. 6.] rectangulum ſub ΔΚ, ΚΜ quadrato ex ΜΝ eſt æquale. & quoniam quadratum ex ΑΓ commenſurabile eſt quadrato ex ΓΒ, erit [per 14. 10.] & parallelogrammum ΔΘ parallelogrammo ΚΛ commenſurabile: ergo & ΔΚ ipſi ΚΜ longitudine eſt commenſurabilis. quod cum quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora ſint [per lem. præc.] eo quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur; erit & parallelogrammum ΔΛ majus parallelogrammo ΜΖ: ideoque recta linea ΔΜ ipſa ΜΗ eſt major. atque eſt rectangulum ſub ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ, hoc eſt quartæ parti quadrati ex ΜΗ, & ΔΚ ipſi ΚΜ longitudine eſt commenſurabilis. ſi autem ſint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes commenſurabiles ipſam dividat, major plus poterit [per 18. 10.] quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. ſuntque rationales ΔΜ, ΜΗ; atque ΔΜ, quæ eſt majus nomen, expoſitæ rationali ΔΕ longitudine eſt commenſurabilis: ergo [per 1. deff. ſecund. 10.] ΔΗ eſt ex binis nominibus prima. quod erat demonſtrand.

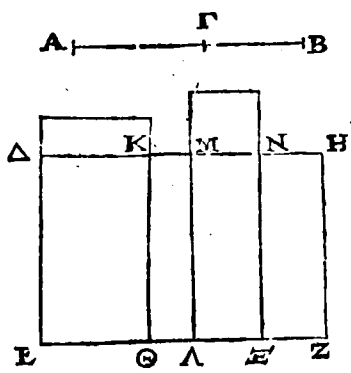
PROP. LXII. PROBL.

Quadratum ejus quæ eſt ex binis mediis prima ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

SIT ex binis mediis prima ΑΒ, diviſa in medias ad punctum Γ, quarum ΑΓ ſit major, exponaturque rationalis ΔΕ, & ad ipſam ΔΕ applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipſius ΑΒ, quod ſit ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ: dico ΔΗ ex binis nominibus ſecundam eſſe.

Conſtruantur enim eadem quæ ſupra. & quoniam ΑΒ ex binis mediis eſt prima, diviſa ad punctum Γ, erunt [per 38. 10.] ΑΓ, ΓΒ mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent: quare & quæ fiunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata media ſunt; ideoque ΔΛ eſt medium, & ad rationalem applicatum eſt: rationalis igi-

tur eſt [per 23. 10.] MΔ, & ipſi ΔE longitudine incommenſurabilis. rurſus, quoniam rationale eſt quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, erit & MZ rationale, & ad rationalem MΛ applicatum eſt: ergo [per 21. 10.] & MH eſt rationalis, & ipſi MΛ, hoc eſt ipſi ΔE, commenſurabilis longitudine: incommenſurabilis igitur eſt [per 13. 10.] ΔM ipſi MH. & ſunt rationales: quare ΔM, MH rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea ΔH eſt ex binis nominibus. oſtendendum eſt & ſecundam eſſe. quoniam enim [per lem. 61. 10.] quadrata ex AΓ, ΓB majora ſunt eo quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, erit & ΔΛ parallelogrammum parallelogrammo MZ majus: ergo & recta linea ΔM major eſt ipſa MH. quod cum quadratum ex AΓ quadrato ex ΓB ſit commenſurabile, & ΔΘ parallelogrammum parallelogrammo KΛ commenſurabile erit: quare & ΔK commenſurabilis ipſi KM. atque eſt [per conſtr.] quod ſub ΔK, KM continetur quadrato ipſius MN æquale: ergo [per 18. 10.] ΔM plus poteſt quam MH quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. eſtque MH commenſurabilis longitudine ipſi ΔE; quare [per 2. deff. ſecund. 10.] ΔH eſt ex binis nominibus ſecunda. quod erat demonſtrandum.



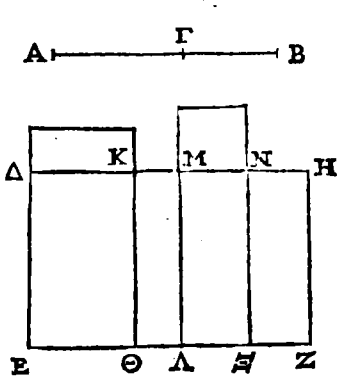
ἐστὶν ἡ MΔ, ᾧ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΔE μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ῥητὸν ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB, ῥητὸν καὶ τὸ MZ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν MΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ MH, καὶ μήκει σύμμετρός τῇ MΛ, τουτέστι τῇ ΔE· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔM τῇ MH μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔM, MH ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔH. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν AΓ, ΓB μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ MZ, ὥστε καὶ ἡ ΔM τῆς MH. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ KΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔK τῇ KM σύμμετρός ἐστι. καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔK, KM ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς MN· ἡ ΔM ἄρα τῆς MH μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἔστιν ἡ MH σύμμετρος τῇ ΔE μήκει· ἡ ΔH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. LXIII. THEOR.

Quadratum ejus quæ eſt ex binis mediis ſecunda ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis mediis ſecunda AB, diviſa in medias ad Γ, ita ut AΓ ſit major portio, rationalis autem ſit ΔE, & ad ipſam ΔE quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΔZ applicetur, latitudinem faciens ΔH: dico ΔH ex binis nominibus tertiam eſſe.

Conſtruantur enim eadem quæ ſupra. & quoniam AB eſt ex binis mediis ſecunda, diviſa ad punctum Γ, erunt [per 39. 10.] AΓ, ΓB mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent: ergo & compoſitum ex ipſarum AΓ, ΓB quadratis medium eſt. atque eſt æquale ipſi ΔΛ: medium igitur eſt ΔΛ; & ad rationalem ΔE applicatur: ergo [per 23. 10.] rationalis eſt MΔ, & ipſi ΔE longitudine incommenſurabilis. eadem ratione & MH eſt rationalis, & incommenſurabilis ipſi MΛ, hoc eſt ipſi ΔE: utraque igitur ipſarum ΔM, MH rationalis eſt, & ipſi ΔE longitudine incommenſurabilis. & quoniam incommenſurabilis eſt AΓ ipſi ΓB longitudine, ut autem AΓ ad ΓB ita [per 1. 6.] quadratum ex AΓ ad rectangulum ſub AΓ, ΓB; erit & quadratum ex



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξγ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

ΕΣτω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ AB, διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα εἶναι τὸ AΓ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔE, καὶ παρὰ τὴν ΔE τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔZ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH· λέγω ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.

Κατασκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἡ AB, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ AΓ, ΓB ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓB μέσον ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΛ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ· καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΔE· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ MΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ MH ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ MΛ, τουτέστι τῇ ΔE μήκει· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶν ἑκατέρα τῶν ΔM, MH, καὶ ἀσύμμετροι τῇ ΔE μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AΓ τῇ ΓB μήκει, ὡς δὲ ἡ AΓ πρὸς τὴν ΓB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τὰς AΓ, ΓB· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ

τῆς

τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτέστι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ὥστε ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐστι. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τρίτη. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐπιλογισόμεθα, ὅτι μείζων ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΓ rectangulo ſub ΑΓ, ΓΒ incommenſurabile: ergo compoſitum ex quadratis ipſarum ΑΓ, ΓΒ incommenſurabile eſt ei quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur; hoc eſt ΔΛ incommenſurabile ipſi ΜΖ: & ob id recta linea ΔΜ ipſi ΜΗ eſt incommenſurabilis. ſuntque rationales: ergo ΔΗ eſt ex binis nominibus. oſtendendum eſt & tertiam eſſe. ſimiliter enim [atque in præced.] concludemus ΔΜ ipſa ΜΗ majorem eſſe, & ΔΚ ipſi ΚΜ commenſurabilem. atque eſt rectangulum ſub ΔΚ, ΚΜ quadrato ipſius ΜΝ æquale: ergo [per 18. 10.] ΔΜ plus poteſt quam ΜΗ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. & neutra ipſarum ΔΜ, ΜΗ eſt longitudine commenſurabilis ipſi ΔΕ: quare [per 3. deff. ſecund. 10.] ΔΗ eſt ex binis nominibus tertia. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξδ'.

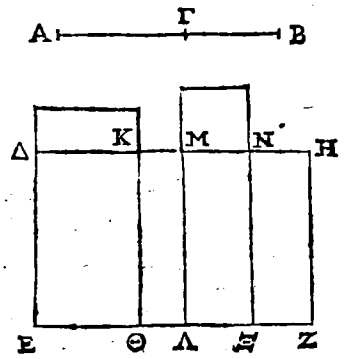
Τὸ ὑπὸ ἐκ μείζονος ῥητῆς καὶ ῥητῷ συμβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

PROP. LXIV. THEOR.

Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδιαγεγραμμένοις. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΔΛ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐπιλογισόμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ ἀσύμμετρός ἐστιν. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μεί-



SIT major ΑΒ, diviſa in puncto Γ, ita ut ΑΓ major ſit quam ΓΒ; rationalis autem quædam ſit ΔΕ, & quadrato ex ΑΒ æquale ad ipſam ΔΕ applicetur parallelogrammum ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ: dico ΔΗ eſſe ex binis nominibus quartam.

Conſtruantur enim eadem quæ ſupra. & quoniam ΑΒ eſt major diviſa in Γ, erunt [per 40. 10.] ΑΓ, ΓΒ potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium. itaque quoniam rationale eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΑΓ, ΓΒ, erit & parallelogrammum ΔΛ rationale: ergo [per 21. 10.] & rationalis eſt recta linea ΔΜ, ipſique ΔΒ longitudine commenſurabilis. rurſus, quoniam medium eſt quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur, hoc eſt ΜΖ, & ad rationalem ΜΛ eſt applicatum, erit [per 23. 10.] & ΜΗ rationalis, & ipſi ΔΕ incommenſurabilis longitudine: ergo & ΔΜ ipſi ΜΗ longitudine incommenſurabilis eſt; ac propterea ΔΜ, ΜΗ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: quare [per 37. 10.] ex duobus nominibus eſt ΔΗ. oſtendendum eſt & quartam eſſe. ſimiliter enim atque in ſuperioribus concludemus ΔΜ majorem eſſe quam ΜΗ, & rectangulum ſub ΔΚ, ΚΜ quadrato ex ΜΝ æquale. quoniam igitur quadratum ex ΑΓ incommenſurabile eſt quadrato ex ΓΒ, erit [per 10. 10.] & ΔΘ parallelogrammum incommenſurabile parallelogrammo ΚΛ: & ob id recta linea ΚΔ ipſi ΚΜ incommenſurabilis. ſi autem ſint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applice-

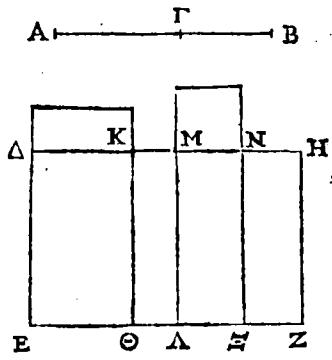
tur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine incommenſurabiles ipſam dividat, [per 19. 10.] major plus poterit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: ergo Δ M plus poteſt quam M H quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntque Δ M, M H rationales potentia ſolum commenſurabiles, atque eſt Δ M commenſurabilis expoſitæ rationali Δ E: quare [per 4. deff. ſecund. 10.] Δ H eſt ex binis nominibus quarta. quod erat demonſtrandum.

Prop. LXV. Theor.

Quadratum ejus quæ rationale ac medium poteſt ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT rationale ac medium potens A B, diviſa in rectas lineas ad punctum Γ, ita ut A Γ ſit major; exponaturque rationalis Δ E, & quadrato ipſius A B æquale parallelogrammum Δ Z ad ipſam Δ E applicetur, latitudinem faciens Δ H: dico Δ H eſſe ex binis nominibus quintam.

Conſtruantur enim quæ ſupra. & quoniam rationale ac medium potens eſt A B, diviſa ad Γ punctum, erunt [per 41. 10.] A Γ Γ B potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale. quoniam igitur medium eſt compoſitum ex ipſarum A Γ, Γ B quadratis, erit & parallelogrammum Δ Λ medium: ideoque [per 23.10.] recta linea Δ M rationalis eſt, & ipſi Δ E longitudine incommenſurabilis. rurſus, quoniam rationale eſt quod bis ſub A Γ, Γ B continetur, hoc eſt parallelogrammum M Z; erit [per 21. 10.] M H rationalis, & ipſi Δ E longitudine commenſurabilis: incommenſurabilis igitur eſt [per 13. 10.] Δ M ipſi M H: quare Δ M, M H rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 37. 10.] Δ H eſt ex binis nominibus. dico & quintam eſſe. ſimiliter enim demonſtrabitur rectangulum ſub Δ K, K M quadrato ex M N eſſe æquale; & Δ K ipſi K M longitudine eſſe incommenſurabilem: quare [per 19.10.] Δ M plus poteſt quam M H quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntque Δ M, M H rationales potentia ſolum commenſurabiles, & minor M H commenſurabilis eſt ipſi Δ E longitudine: ergo [per 5. deff. ſecund. 10.] Δ H eſt ex binis nominibus quinta. quod erat demonſtrandum.



Prop. LXVI. Theor.

Quadratum ejus quæ bina media poteſt ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

SIT bina media potens A B, diviſa ad punctum Γ, rationalis autem ſit Δ E, & ad ipſam

ζονα ἐλλεῖπον εἴδει πεταγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὸν διαιρῇ μήκει, ἡ μεῖζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ Δ M ἄρα τῆς M H μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ Δ M, M H ῥητὰ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ Δ M σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ E· ἡ Δ H ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πεμπτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξε'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

ΕΣτω ῥητὴ καὶ μέσον δυναμένη ἡ A B, διῃρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν A Γ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ E, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A B ἴσον παρὰ τὴν Δ E παραβεβλήσθω τὸ Δ Z, πλάτος ποιοῦν τὴν Δ H· λέγω ὅτι ἡ Δ H ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ A B, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ A Γ, Γ B ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A Γ, Γ B· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Δ Λ· ὥστε ῥητή ἐστιν ἡ Δ M, καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ Δ E. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A Γ, Γ B, τουτέστι τὸ M Z· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ M H, καὶ σύμμετρος τῇ Δ E μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Δ M τῇ M H· αἱ Δ M, M H ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ Δ H. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ὁμοίως γὰρ δειχθήσεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Δ K, K M ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς M N, καὶ ἀσύμμετρος ἡ Δ K μήκει τῇ K M· ἡ Δ M ἄρα τῆς M H μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ Δ M, M H ῥητὰ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάττων ἡ M H σύμμετρος τῇ Δ E μήκει· ἡ Δ H ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξς'.

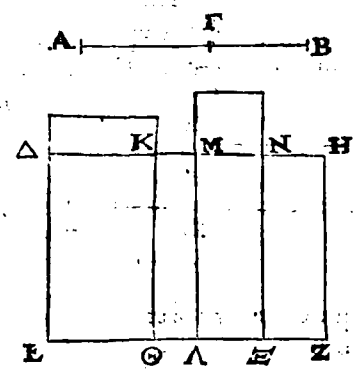
Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

ΕΣτω δύο μέσα δυναμένη ἡ A B, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ Δ E, καὶ παρὰ τὴν

Δ E

ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραβληθῆναι τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἐκτή.

Κατασκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δύο μέσα δυνάμει ἐστὶ, διῃρημένα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ, τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν· ὥστε καὶ τὰ πρόσδεσγμένα μέσα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΔΛ, ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. λέγω ὅτι καὶ ἕκτη. ὁμοίως γὰρ πάλιν τοῖς πρὸ τούτου δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ λοιπὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΔE quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΔZ applicetur, latitudinem faciens ΔH: dico ΔH esse ex binis nominibus sextam.

Construantur enim eadem quæ supra. & quoniam AB est bina media potens: divisa ad Γ, erunt [per 42. 10.] AΓ, ΓB potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod sub ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: ergo ex jam demonstratis medium est utrumque parallelogrammorum ΔΛ, MZ, & ad rationalem ΔE applicata sunt: rationalis igitur est [per 23. 10.] & utraque ΔM, MH, & ipsi ΔE longitudine incommensurabilis. & quoniam compositum ex ipsarum AΓ, ΓB quadratis incommensurabile est ei quod bis sub AΓ, ΓB continetur, erit & ΔΛ parallelogrammum parallelogrammo MZ incommensurabile; & idcirco [per 10. 10.] ΔM incommensurabilis MH: quare ΔM, MH rationales sunt potentia solum commensurabiles, igitur ΔH est ex binis nominibus. dico & sextam esse. similiter enim atque in præcedentibus rursus ostendemus rectangulum sub ΔK, KM quadrato ex MN æquale, & ΔK ipsi KM longitudine incommensurabilem esse: ergo [per 19. 10.] ΔM plus potest quam MH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. & neutra ipsarum ΔM, MH longitudine commensurabilis est expositæ rationali ΔE: quare [per 6. deff. secund. 10.] ΔH est ex binis nominibus sexta. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξζ'.

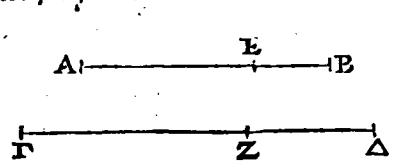
Η τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Prop. LXVII. Theor.

Ei quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis & ipsa ex binis nominibus est atque ordine eadem.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων

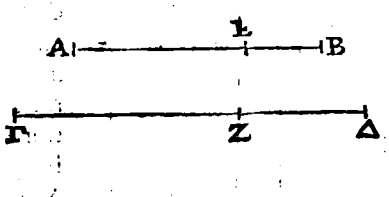


SIT ex binis nominibus AB, & ipsi AB longitudine commensurabilis sit ΓΔ: dico ΓΔ ex binis nominibus esse & ordine eandem ipsi AB.

Quoniam enim ex binis nominibus est AB, dividatur in nomina ad punctum E, & sit AE majus nomen: ergo [per 37. 10.] AE, EB rationales sunt potentia solum commensurabiles. fiat [per 12. 6.] ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ: & reliqua igitur EB ad reliquam ZΔ est [per 19. 5.] ut AB ad ΓΔ. commensurabilis autem est AB ipsi ΓΔ longitudine: ergo [per 10. 10.] & AE ipsi ΓZ & EB ipsi ZΔ longitudine est commensurabilis. suntque rationales AE, EB: rationales igitur sunt & ΓZ, ZΔ. & quoniam est ut AE ad ΓZ ita EB ad ZΔ, erit permutando ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ. sunt autem AE, EB potentia solum commensurabiles: ergo & ΓZ, ZΔ potentia solum commensurabiles erunt. & sunt rationales: ex binis igitur nominibus [per 37. 10.]

10.] est Γ Δ. dico & ipsi A B ordine eandem esse.

Vel enim A E plus potest quam E B quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. si quidem igitur A E plus possit quam E B quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & Γ Z plus poterit quam Z Δ [per 15. 10.] quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. quod si A E sit commensurabilis expositæ rationali, & Γ Z [per 12. 10.] eidem commensurabilis erit: & ob id utraque ipsarum A B, Γ Δ ex binis nominibus est prima, hoc est ordine eadem. si vero E B sit commensurabilis expositæ rationali, & Z Δ eidem erit commensurabilis: eamque ob causam Γ Δ ipsi A B ordine eadem est, utraque enim est ex binis nominibus secunda. quod si neutra ipsarum A E, E B sit expositæ rationali commensurabilis, & neutra ipsarum Γ Z, Z Δ eidem commensurabilis erit; & utraque est tertia. at si A E plus possit quam E B quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & Γ Z plus poterit quam Z Δ [per 15. 10.] quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & si A E sit commensurabilis expositæ rationali, & Γ Z eidem commensurabilis erit, & est utraque quarta. quod si E B sit, & ipsa Z Δ erit, & est utraque quinta. si vero neutra ipsarum A B, E B sit, & neutra Γ Z, Z Δ expositæ rationali erit commensurabilis, & est utraque sexta.



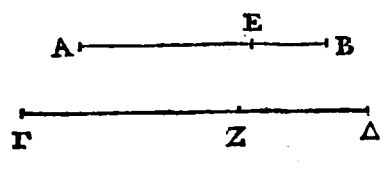
Ergo ei quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis & ipsa ex binis nominibus est & ordine eadem. quod erat demonstrandum.

Prop. LXVIII. Theor.

Ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis & ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

SIT ex binis mediis A B, & ipsi A B commensurabilis longitudine sit Γ Δ: dico Γ Δ ex binis mediis esse, & ipsi A B ordine eandem.

Quoniam enim A B ex binis mediis est, divisa in medias ad punctum E, erunt [per 38. & 39. 10.] & A E, E B mediæ potentia solum commensurabiles. itaque fiat ut A B ad Γ Δ ita A E ad Γ Z: ergo & reliqua E B ad reliquam Z Δ est ut A B ad Γ Δ. commensurabilis autem est [ex hyp.] A B ipsi Γ Δ longitudine: quare & A E ipsi Γ Z longitudine commensurabilis erit, & E B ipsi Z Δ. suntque mediæ A E, E B: mediæ igitur [per 24. 10.] & Γ Z, Z Δ. & quoniam est ut A E ad E B ita Γ Z ad Z Δ, & sunt A E, E B commensurabiles potentia solum; erunt & Γ Z, Z Δ potentia solum commensurabiles. ostensæ autem sunt & mediæ: ergo [per 38. & 39. 10.] Γ Δ est ex binis mediis. dico & ipsi A B ordine eandem esse.



Quoniam enim est ut A E ad E B ita Γ Z ad Z Δ, erit [per 11. 5. & 1. 6.] & ut quadratum ex A E ad rectangulum sub A E, E B ita quadratum ex Γ Z ad rectangulum sub Γ Z, Z Δ: quare

ἐστὶν ἡ ΓΔ. λέγω δὴ ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἡ γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἡ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἐστί· καὶ διὰ τὰ ἐκάτερα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τουτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τὰ αὐτὰ πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ, ἑκάτερα γὰρ αὐτῶν ἐστιν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, ἑκατέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καί ἐστιν ἑκατέρα τετάρτη. εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καί ἐστιν ἑκατέρα πεμπτη. εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἔσται ἑκατέρα πέμπτη. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὐδετέρα σύμμετρος ἔσται τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα ἕκτη.

Ὥστε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξη'.

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. καί εἰσι μέσαι αἱ ΑΕ, ΕΒ· μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή ἐστιν τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἐναλ-

λαξ

ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ Ζ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α Ε, Ε Β πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α Ε τῷ ἀπὸ τῆς Γ Ζ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α Ε, Ε Β τῷ ὑπὸ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ. ἔστι δὲ ῥητὸν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α Ε, Ε Β, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ ῥητὸν ἐστί· καὶ δύο ἄρα ῥητὰ ἐστὶν ἐκ δύο μέσων πρώτη. ἔστι μέσον τὸ ὑπὸ τῶν Α Ε, Ε Β, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ. καί ἐστιν ἑκατέρα δυτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἡ Γ Δ τῇ Α Β τῇ τάξει ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

permutando ut quadratum ex Α Ε ad quadratum ex Γ Ζ ita rectangulum ſub Α Ε, Ε Β ad rectangulum ſub Γ Ζ, Ζ Δ. commenſurabile autem eſt quadratum ex Α Ε quadrato ex Γ Ζ: ergo & rectangulum ſub Α Ε, Ε Β rectangulo ſub Γ Ζ, Ζ Δ eſt commenſurabile. ſive igitur rationale eſt rectangulum ſub Α Ε, Ε Β, & rectangulum ſub Γ Ζ, Ζ Δ rationale erit; atque ob id [per 38. 10.] eſt ex binis mediis prima. ſive vero medium eſt rectangulum ſub Α Ε, Ε Β, & ipſum ſub Γ Ζ, Ζ Δ erit medium. atque [per 39. 10.] eſt utraque ex binis mediis ſecunda: & propterea Γ Δ ipſi Α Β ordine eadem eſt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξθ'.

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν.

Ἔστω μείζων ἡ Α Β, καὶ τῇ Α Β σύμμετρος ἔστω ἡ Γ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἡ Γ Δ μείζων ἐστί.

Διῃρήσθω ἡ Α Β κατὰ τὸ Ε· αἱ Α Ε, Ε Β ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσι δὲ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α Β πρὸς τὴν Γ Δ οὕτως ἥτε Α Ε πρὸς τὴν Γ Ζ καὶ ἡ Ε Β πρὸς τὴν Ζ Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α Ε πρὸς τὴν Γ Ζ οὕτως ἡ Ε Β πρὸς τὴν Ζ Δ. σύμμετρος δὲ ἡ Α Β τῇ Γ Δ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν Α Ε, Ε Β ἑκατέρᾳ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α Ε πρὸς τὴν Γ Ζ οὕτως ἡ Ε Β πρὸς τὴν Ζ Δ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ Α Ε πρὸς τὴν Ε Β οὕτως ἡ Γ Ζ πρὸς τὴν Ζ Δ· καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ Α Β πρὸς τὴν Β Ε οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Δ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β Ε οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α Ε οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α Β πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Α Ε, Ε Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ· καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν Α Ε, Ε Β πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α Β τῷ ἀπὸ τῆς Γ Δ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν Α Ε, Ε Β τοῖς ἀπὸ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ. καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν Α Ε, Ε Β ἅμα ῥητόν· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ ἄρα ῥητόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Α Ε, Ε Β σύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ. καὶ ἔστι μέσον τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Α Ε, Ε Β· μέσον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ· αἱ Γ Ζ, Ζ Δ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ Γ Δ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXIX. Theor.

Majori commenſurabilis & ipſa major eſt.

SIT major Α Β: & ipſi Α Β commenſurabilis ſit Γ Δ: dico Γ Δ majorem eſſe.

Dividatur Α Β in Ε: ergo [per 40. 10.] Α Ε, Ε Β potentia ſunt incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium. & fiant eadem quæ ſupra. quoniam igitur eſt ut Α Β ad Γ Δ ita Α Ε ad Γ Ζ & Ε Β ad Ζ Δ; erit [per 11. 5.] ut Α Ε ad Γ Ζ ita Ε Β ad Ζ Δ. commenſurabilis autem eſt Α Β ipſi Γ Δ: ergo & utraque ipſarum Α Ε, Ε Β utrique Γ Ζ, Ζ Δ eſt commenſurabilis. & quoniam eſt ut Α Ε ad Γ Ζ ita Ε Β ad Ζ Δ; permutandoque ut Α Ε ad Ε Β ita Γ Ζ ad Ζ Δ, & componendo ut Α Β ad Β Ε ita Γ Δ ad Δ Ζ: ut igitur quadratum ex Α Β ad quadratum ex Β Ε ita [per 22. 6.] quadratum ex Γ Δ ad quadratum ex Δ Ζ. ſimiliter demonſtrabimus & ut quadratum ex Α Β ad quadratum ex Α Ε ita eſſe quadratum ex Γ Δ ad quadratum ex Γ Ζ: ergo & ut quadratum ex Α Β ad quadrata ex Α Ε, Ε Β ita quadratum ex Γ Δ ad quadrata ex Γ Ζ, Ζ Δ: permutando igitur ut quadratum ex Α Β ad quadratum ex Γ Δ ita quadrata ex Α Ε, Ε Β ad quadrata ex Γ Ζ, Ζ Δ. commenſurabile autem eſt quadratum ex Α Β quadrato ex Γ Δ: ergo & quadrata ex Α Ε, Ε Β quadratis ex Γ Ζ, Ζ Δ ſunt commenſurabilia. atque eſt [per 40. 10.] compoſitum ex quadratis ipſarum Α Ε, Ε Β rationale: ergo [per 9 def. 10.] & rationale erit compoſitum ex quadratis ipſarum Γ Ζ, Ζ Δ. ſimiliter autem & quod bis continetur ſub Α Ε, Ε Β commenſurabile eſt ei quod bis ſub Γ Ζ, Ζ Δ continetur. atque [per 40. 10.] eſt medium quod bis continetur ſub Α Ε, Ε Β: medium igitur [per 24. 10.] eſt & quod bis ſub Γ Ζ, Ζ Δ continetur: ergo Γ Ζ, Ζ Δ potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium: tota igitur [per 40. 10.] irrationalis eſt, quæ vocatur major.

Ergo majori commenſurabilis & ipſa major eſt. quod erat demonſtrandum.

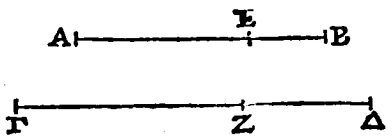
PROP.

PROP. LXX. THEOR.

Rationale ac medium potenti commensurabilis & ipsa rationale ac medium potens est.

SIT rationale ac medium potens AB: & ipsi AB commensurabilis sit ΓΔ: ostendendum est & ΓΔ rationale ac medium potentem esse.

Dividatur AB in rectas suas ad punctum E: ergo [per 41. 10.] AE, EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur rationale: & eadem quæ prius construantur. similiter [atque in præcedentibus] demonstrabimus ΓZ, ZΔ potentia esse incommensurabiles; & compositum ex quadratis ipsarum AE, EB commensurabile esse composito ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ, quod autem continetur sub AE, EB commensurabile esse ei quod sub ΓZ, ZΔ continetur: ergo [per 24. 10.] & compositum ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ est medium, quod autem continetur sub ΓZ, ZΔ rationale: & igitur [per 41. 10.] ΓΔ est rationale ac medium potens. quod erat dem.

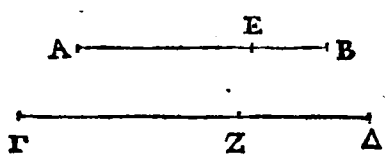


ΠΡΟΤΑΣΙΣ ο'.

Η τῇ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

ΕΣτω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· δεικτέον ὅτι ἡ ΓΔ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί.

Διῃρήσθω ἡ AB εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E· αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓZ, ZΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ ῥητόν· ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

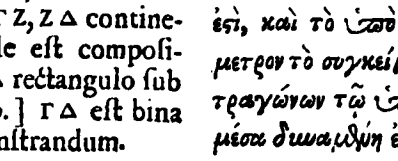


PROP. LXXI. THEOR.

Bina media potenti commensurabilis & ipsa bina media potens est.

SIT bina media potens AB, & ipsi AB commensurabilis sit ΓΔ: ostendendum est ΓΔ bina media potentem esse.

Quoniam enim bina media potens est AB, dividatur in rectas suas ad punctum E: quare [per 42. 10.] AE, EB potentia sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur medium, & adhuc compositum ex quadratis ipsarum AE, EB incommensurabile rectangulo sub ipsis AE, EB: & construantur eadem quæ supra. similiter [atque supra] demonstrabimus ΓZ, ZΔ potentia incommensurabiles esse; & compositum ex quadratis ipsarum AE, EB commensurabile composito ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ; quod autem sub AE, EB continetur commensurabile esse ei quod continetur sub ΓZ, ZΔ: quare [per 24. 10.] & compositum ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ medium est; itemque medium quod sub ΓZ, ZΔ continetur; & adhuc incommensurabile est compositum ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ rectangulo sub ipsis ΓZ, ZΔ: ergo [per 42. 10.] ΓΔ est bina media potens. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ οα'.

Η τῇ δύο μέσα δυναμένῃ σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

ΕΣτω δύο μέσα δυναμένη ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· δεικτέον δὴ ὅτι καὶ ἡ ΓΔ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Επεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ AB, διῃρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E· αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν AE, EB· καὶ κατασκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓZ, ZΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ τετραγώνων μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ· ἡ ΓΔ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. LXXII. THEOR.

Si rationale & medium componantur, quatuor irrationales fiunt, vel quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οβ'.

Ρητῷ καὶ μέσῳ συντιθεμένῳ, τέσσαρες ἄλογοι γίνονται, ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο

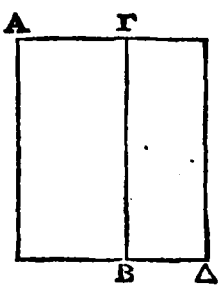
μέσων

μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μεῖζον· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ΑΒ ἴσον τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· τῷ δὲ ΓΔ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ, τουτέστι τὴν ΘΗ, παραβεβλήσθω τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΕΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον τὸ ΓΔ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΘΙ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΘΙ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, τουτέστι τὴν ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ὥστε καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ τοῦ ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα μεῖζων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι οὖν ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω μεῖζων ἡ ΘΕ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. ἐὰν δὲ χωρίον παρείσχηται ἴσον ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω μεῖζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. ἐὰν ᾖ χωρίον παρεικμένον ἴσον ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

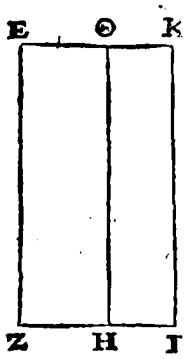
Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ



mediis prima, vel major, vel rationale ac medium potens.

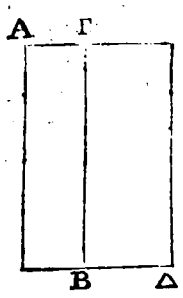
SIT rationale quidem ſpatium ΑΒ, medium autem ΓΔ: dico eam, quæ poteſt ſpatium ΑΔ, vel eſſe ex binis nominibus, vel ex binis mediis primam, vel majorem, vel rationale ac medium potentem.

Etenim ΑΒ vel majus eſt quam ΓΔ, vel minus. ſit primum majus, exponaturque rationalis ΕΖ, & ad ipſam applicetur parallelogrammum ΕΗ ipſi ΑΒ æquale, quod latitudinem faciat ΕΘ; ipſi vero ΓΔ æquale ad ΕΖ, hoc eſt ad ΘΗ, applicetur ΘΙ latitudinem faciens ΘΚ. & quoniam rationale eſt ΑΒ, & ipſi eſt æquale ΕΗ, erit & ΕΗ rationale, & ad rationalem ΕΖ applicatum eſt latitudinem faciens ΕΘ: ergo [per 21. 10.] ΕΘ eſt rationalis, & ipſi ΕΖ longitudine commenſurabilis. rurſus, quoniam medium eſt ΓΔ, & ipſi eſt æquale ΘΙ, erit & ΘΙ medium; & ad rationalem ΕΖ, hoc eſt ΘΗ, applicatum eſt latitudinem faciens ΘΚ: quare [per 23. 10.] ΘΚ eſt rationalis, & incommenſurabilis ipſi ΕΖ longitudine. quod cum medium ſit ΓΔ, rationale autem ΑΒ; erit ΑΒ ipſi ΓΔ incommenſurabile: ergo & ΕΗ incommenſurabile eſt ipſi ΘΙ. ut autem ΕΗ ad ΘΙ ita eſt [per 1. 6.] recta linea ΕΘ ad ΘΚ: ergo ΕΘ ipſi ΘΚ longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt ambæ rationales: quare ΕΘ, ΘΚ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id ex binis nominibus eſt ΕΚ, diviſa ad punctum Θ. & quoniam majus eſt ΑΒ quam ΓΔ, æquale autem ΑΒ ipſi ΕΗ & ΓΔ ipſi ΘΙ; erit & ΕΗ quam ΘΙ majus: ergo & ΕΘ major eſt quam ΘΚ. vel igitur ΕΘ plus poteſt quam ΘΚ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, & ſit major ΘΕ expoſitæ rationali ΕΖ commenſurabilis: ergo [per 1. deff. ſecund. 10.] ΕΚ ex binis nominibus eſt prima, atque eſt ΕΖ rationalis. ſi autem ſpatium contineatur ſub rationali & ex binis nominibus prima, recta linea ſpatium potens [per 55. 10.] ex binis nominibus eſt: ergo quæ poteſt ſpatium ΕΙ eſt ex binis nominibus: quare & ea quæ poteſt ſpatium ΑΔ eſt ex binis nominibus. ſed ΕΘ plus poſſit quam ΘΚ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & ſit major ΕΘ expoſitæ rationali ΕΖ commenſurabilis longitudine: ergo [per 4. deff. ſecund. 10.] ΕΚ ex binis nominibus eſt quarta, & eſt rationalis ΕΖ. ſi autem ſpatium contineatur ſub rationali & ex binis nominibus quarta, recta linea ſpatium potens [per 58. 10.] irrationalis eſt, quæ major appellatur: potens igitur ſpatium ΕΙ major eſt: ergo & potens ſpatium ΑΔ major.



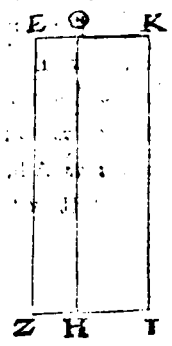
Sed ſit ſpatium ΑΒ minus quam ΓΔ: erit & ΕΗ quam ΘΙ minus; & ob id recta linea ΕΘ

minor quam recta Θ K: vel igitur K Θ plus poteſt quam E Θ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, & ſit minor E Θ commenſurabilis expoſitæ rationali E Z longitudine: ergo [per 2. deff. ſecund. 10.] E K ex binis nominibus eſt ſecunda, rationalis autem E Z. quod ſi ſpatium contineatur ſub rationali & ex binis nominibus ſecunda, recta linea ſpatium potens [per 56.10.] eſt ex binis mediis prima: potens igitur ſpatium E I eſt ex binis mediis prima: ergo & potens ſpatium A Δ. ſed K Θ plus poſſit quam E Θ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſitque minor E Θ expoſitæ rationali E Z commenſurabilis longitudine: quare [per 5. deff. ſecund. 10.] E K eſt ex binis nominibus quinta; atque eſt rationalis E Z. ſi autem ſpatium contineatur ſub rationali & ex binis nominibus quinta, quæ ſpatium poteſt recta linea [per 59. 10.] rationale ac medium potens eſt: quæ igitur poteſt ſpatium E I rationale & medium potens eſt; ideoque rationale & medium potens eſt quæ poteſt ſpatium A Δ.



Si igitur rationale & medium componantur, quatuor irrationales fiunt; vel ea quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis mediis prima, vel major, vel rationale ac medium potens. quod erat demonſtrandum.

ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ Θ Κ. ἤτοι δὲ ἡ Θ Κ τοῦ Ε Θ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ Ε Θ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Ε Ζ μήκει· ἡ ἄρα Ε Κ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα, ῥητὴ δὲ ἡ Ε Ζ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ἡ ἄρα τὸ Ε Ι χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ ἡ τὸ Α Δ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἀλλὰ δὴ ἡ Κ Θ τοῦ Ε Θ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ Ε Θ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Ε Ζ· ἡ ἄρα Ε Κ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, ῥητὴ δὲ ἡ Ε Ζ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ Ε Ι χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ Α Δ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.



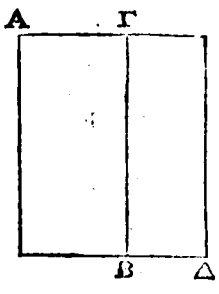
Ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον συντιθέμενα, τέσσαρες ἄλογοι γίνονται· ἤτοι ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ καὶ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXXIII. Theor.

Si duo media inter ſe incommenſurabilia componantur, duæ reliquæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis ſecunda, vel bina media potens.

COmponantur enim duo media incommenſurabilia inter ſe A B, Γ Δ: dico rectam lineam, quæ ſpatium A Δ poteſt, vel ex binis mediis ſecundam eſſe, vel bina media potentem.

Spatium enim A B vel majus eſt quam Γ Δ, vel minus. ſit primum majus; exponaturque rationalis E Z: & ad E Z ſpatio quidem A B æquale applicetur E H, latitudinem faciens E Θ; ipſi vero Γ Δ æquale applicetur Θ I latitudinem faciens Θ K. & quoniam medium eſt utrumque ipſorum A B, Γ Δ, erit & utrumque E H, Θ I medium; & ad rationalem E Z applicata ſunt, quæ latitudinem faciunt E Θ, Θ K: ergo [per 23. 10.] utraque E Θ, Θ K rationalis eſt, & ipſi E Z longitudine incommenſurabilis. quod cum A B

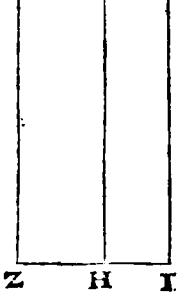


ΠΡΟΤΑΣΙΣ ογ'.

Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται· ἤτοι ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη.

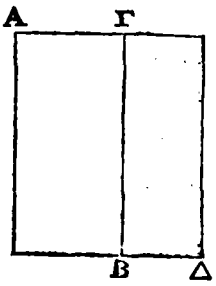
Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ Α Β, Γ Δ· λέγω ὅτι ἡ τὸ Α Δ χωρίον δυναμένη, ἤτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα, ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Τὸ γὰρ Α Β τῷ Γ Δ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μεῖζον τὸ Α Β τοῦ Γ Δ· καὶ συνεστάτω ῥητὴ ἡ Ε Ζ, καὶ τῷ μὲν Α Β ἴσον παρὰ τὴν Ε Ζ παραβεβλήσθω τὸ Ε Η πλάτος ποιοῦν τὴν Ε Θ, τῷ δὲ Γ Δ ἴσον τὸ Θ Ι πλάτος ποιοῦν τὴν Θ Κ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Α Β, Γ Δ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν Ε Η, Θ Ι, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Ε Ζ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς Ε Θ, Θ Κ· ἑκατέρα ἄρα τῶν Ε Θ, Θ Κ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Ε Ζ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμ-



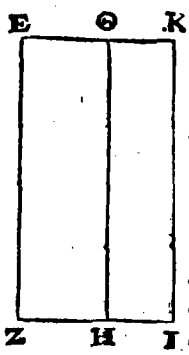
μετρόν

μετρόν ἐστι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ, καὶ ἔστω ἴσον τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ δυναμένη, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἀλλὰ δὴ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι, κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστίν, δύο ἢ μέσα δυναμένη.



Δύο ἄρα μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἢ δύο μέσα δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

incommenſurabile ſit ipſi ΓΔ; ſitque AB quidem æquale ipſi EH; ΓΔ vero ipſi ΘI: erit & EH ipſi ΘI incommenſurabile. ſed ut EH ad ΘI ita eſt EΘ ad ΘK: incommenſurabilis igitur eſt EΘ ipſi ΘK longitudine: ideoque EΘ, ΘK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: quare ex binis nominibus eſt EK. itaque vel EΘ plus poteſt quam ΘK quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; & neutra ipſarum EΘ, ΘK longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali EZ: ergo EK eſt ex binis nominibus tertia, & eſt EZ rationalis. ſi autem ſpatium contineatur ſub rationali & ex binis nominibus tertia, recta linea ſpatium potens [per 57.10.] eſt ex binis mediis ſecunda: ergo quæ poteſt ſpatium EI, hoc eſt AΔ, eſt ex binis mediis ſecunda. ſed EΘ plus poſſit quam ΘK quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; & utraque ipſarum EΘ, ΘK longitudine incommenſurabilis eſt expoſitæ rationali EZ: quare [per 6. deff. ſecund. 10.] EK eſt ex binis nominibus ſexta. at ſi ſpatium contineatur ſub rationali & ex binis nominibus ſexta, quæ ſpatium poteſt recta linea [per 60. 10.] eſt bina media potens: ergo quæ poteſt ſpatium AΔ bina media poteſt. Similiter demonſtrabimus, ſi & AB ſit minus quam ΓΔ, rectam lineam, quæ ſpatium poteſt AΔ, vel ex binis mediis ſecundam eſſe, vel bina media potentem.



Si igitur duo media inter ſe incommenſurabilia componantur, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis ſecunda, vel bina media potens. quod erat demonſtrandum.

* Πόρισμα.

Η ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι ἔτι τῇ μέσῃ ἔτι ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί, τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῶν δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην· ἐπεὶ οὖν τὰ ἀρημμένα πλάτη διαφέρει τῶν πρώτων καὶ ἀλλήλων,

* *Corollarium.*

Quæ ex binis nominibus & quæ poſt ipſam ſunt irrationales neque mediæ neque inter ſe eædem ſunt, quadratum enim quod fit à media ad rationalem applicatum [per 23.10.] latitudinem efficit rationalem & ei ad quam applicatur longitudine incommenſurabilem; quod autem fit ab ea quæ eſt ex binis nominibus ad rationalem applicatum [per 61.10.] latitudinem efficit ex binis nominibus primam; quod ab ea quæ eſt ex binis mediis prima ad rationalem applicatum [per 62.10.] latitudinem efficit ex binis nominibus ſecundam; quod ab ea quæ eſt ex binis mediis ſecunda ad rationalem applicatum [per 63. 10.] latitudinem efficit ex binis nominibus tertiam; quod à majori ad rationalem applicatum [per 64. 10.] latitudinem efficit ex binis nominibus quartam; quod ab ea quæ rationale ac medium poteſt ad rationalem applicatum [per 65.10.] latitudinem efficit ex binis nominibus quintam; quod ab ea quæ bina media poteſt ad rationalem applicatum [per 66. 10.] latitudinem efficit ex binis nominibus ſextam: quoniam igitur dictæ latitudines differunt & à prima & inter ſeſe,

* In quibuſdam Exemplaribus perperam *Lemma* dicitur.

à prima quidem quod rationalis ſit, inter ſeſe vero quod ordine non ſint eædem, conſtat & ipſas irrationales inter ſe differentes eſſe.

τῶ μὲν πρώτῳ ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δὲ ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

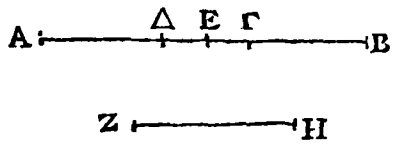
SCHOLIUM.

Septem ſunt ſenarii uſque ad ea de quibus hactenus dictum eſt; quorum primus quidem oſtendit [in 37. 38. 39. 40. 41. 42] ortum linearum irrationalium; ſecundus autem diviſionem, nempe [in 43. 44. 45. 46. 47. 48.] quod ad unum duntaxat punctum dividuntur; tertius earum quæ ex binis nominibus inventionem, videlicet primæ 49, ſecundæ 50, tertiæ 51, quartæ 52, quintæ 53, & ſextæ 54; deinceps ſequitur quartus ſenarius, oſtendens quomodo hæ lineæ inter ſe differant; namque uſus iis quæ ex binis nominibus, oſtendit [ad 55. 56. 57. 58. 59. 60.] differentiam ſex irrationalium. quintum & ſextum expoſuit, oſtendens in quinto [ad 61. 62. 63. 64. 65. 66.] quidem applicationes quadratorum quæ ex irrationalibus, videlicet quales irrationales faciant latitudines applicatorum ſpatiorum. in ſexto autem [ad 67. 68. 69. 70. 71.] quomodo irrationalibus commenſurabiles ejuſdem ſpeciei ſint. rurſus in ſeptimo [in 72. 73.] manifeſte oſtendit differentiam ipſarum.

*ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἑπτά εἰσιν ἑξάδες ἄχρι τῶν εἰρημένων· ὧν ἡ μὲν πρώτη ἐδείκνυ τὴν γένεσιν αὐτῶν· ἡ δὲ δευτέρα τὴν διαίρεσιν, ὅτι καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦνται· ἡ δὲ τρίτη τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων εὕρεσιν, πρώτης, δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, πέμπτης, ἕκτης, ἀφ' ἧς ἡ τετάρτη ἑξὰς τὴν διαφορὰν ἐπεδείκνυε τῶν ἀλόγων, πῇ διαφέρουσι· παρεσχεύασε γὰρ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων ἀποδεικνυσι τὴν διαφορὰν τῶν ἐξ ἀλόγων. πέμπτην καὶ ἕκτην ἐξέθετο, δεικνύων ἐν μὲν τῇ πέμπτῃ τὰς παραβολάς, τὰς ἀπὸ τῶν ἀλόγων, ποίας ἀλόγους ποιοῦσι τὰ πλάτη τῶν παραβαλλομένων χωρίων. ἐν δὲ τῇ ἕκτῃ, πῶς αἱ σύμμετροι ταῖς ἀλόγοις ὁμοειδεῖς αὐταῖς εἰσί. πάλιν, ἐν τῇ ἑβδόμῃ σαφῶς διαφορὰν αὐτῶν ἡμῖν δείκνυσιν.

Apparet etiam & in his irrationalibus arithmetica analogia: & quæ ſumitur media proportionalis inter portiones cujuſque lineæ irrationalis juxta arithmeticam analogiam, & ipſa eſt ejuſdem ſpeciei cum iis, inter quarum portiones media interjicitur. atque primum arithmeticam medietatem in his eſſe, ſic apparet. ponatur enim exempli gratia ex binis nominibus AB, & in nomina ad punctum Γ dividatur: manifeſtum eſt AΓ majorem eſſe quam ΓB. auferatur à recta linea AΓ ipſi ΓB æqualis AΔ, & ΓΔ bifariam in E ſecetur: conſtat igitur AE ipſi EB æqualem eſſe. ponatur alterutri ipſarum æqualis ZH: manifeſtum eſt quo differt AΓ ab ipſa ZH, eo differre EB ab ipſa ΓB; etenim AΓ ab ipſa ZH differt magnitudine EΓ, & eadem magnitudine differt ZH ab ipſa ΓB, quod eſt arithmeticæ analogiæ proprium. manifeſtum autem eſt ZH commenſurabilem eſſe ipſi AB, eſt enim ejus dimidiæ æqualis; ergo [per 67. 10.] ZH ex binis nominibus eſt. ſimiliter oſtendetur & in aliis.



Ἀναφαίνεται δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων τούτων ἡ ἀριθμητικὴ ἀνάλογον· καὶ ἡ μέση λαμβανομένη ἀνάλογον τῶν τμημάτων οἱασδήποτε ἀλόγου κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, καὶ αὐτὴ ὁμοειδής ἐστιν ὧν ἐστι μέση ἀνάλογον. καὶ πρῶτον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ μεσότης ἐν τούτοις ἐστί. κείσθω γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων εἰ τύχοι AB, καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ. φανερὸν ὅτι ἡ AΓ τῆς ΓB ἐστὶ μείζων. ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς AΓ τῇ ΓB ἴση ἡ AΔ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΓΔ κατὰ τὸ E. φανερὸν ὅτι ἡ AE τῇ EB ἐστὶν ἴση. κείσθω ὁποτέρα αὐτῶν ἴση ἡ ZH. φανερὸν δὴ ὅτι ᾧ διαφέρει ἡ AΓ τὴν ZH τούτῳ διαφέρει καὶ ἡ EB τῆς ΓB, ἡ μὲν γὰρ AΓ τῆς ZH τῇ EΓ, τῷ αὐτῷ δὲ καὶ ἡ ZH τῆς ΓB, ὅπερ ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. δῆλον δὲ ὅτι ἡ ZH σύμμετρός ἐστι τῇ AB, τῇ γὰρ ἡμισείᾳ αὐτῆς ἐστιν ἴση· ὥστε ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

Principium Senariorum per Detractionem.

Αρχὴ τῶν κατ' ἀφαίρεσιν ἑξάδων.

PROP. LXXIV. THEOR.

Si à rationali rationalis auferatur, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti; reliqua irrationalis eſt, vocetur autem apotome.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οδ'.

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἀποτομή.

A Rationali enim AB rationalis auferatur BΓ, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens

Ἀπὸ γὰρ ῥητῆς τῆς AB ῥητὴ ἀφῃρήσθω ἡ BΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ·

* Scholium hoc non agnoſcunt noſtri *Codd. MSS.* Atque in *Editis* Græcis male collocatur poſt Prop. LXX.

λέγω

λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἀποτομή.

toti: dico reliquam ΑΓ irrationalem esse, quæ vocatur apotome.

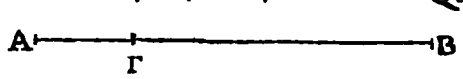
Quoniam enim incommensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, atque est [per 1.6.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΑΒ ad id quod continetur sub ΑΒ, ΒΓ, erit quadratum ex ΑΒ incommensurabile ei quod sub ΑΒ, ΒΓ continetur: sed quadrato ex ΑΒ commensurabilia sunt [per 16.10.] quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; ei vero quod continetur sub ΑΒ, ΒΓ commensurabile est quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur: quadrata igitur ex ΑΒ, ΒΓ ei quod bis continetur sub ΑΒ, ΒΓ sunt incommensurabilia: ergo reliquo, nempe quadrato ex ΑΓ, incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; quoniam quadrata ex ΑΒ, ΒΓ [per 7. 2.] æqualia sunt ei quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur una cum quadrato ex ΑΓ. rationalia autem sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ: ergo [per 11.def.10.] recta linea ΑΓ est irrationalis, vocetur autem apotome.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οε'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν τὸ περιέχῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν ποιοῦσα τὸ ὑπὸ τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσαι εἰσὶ, μέσα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἐπεὶ καὶ ἐὰν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.



PROP. LXXV. THEOR.

Si à media media auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, quæ cum tota rationale continet: reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome prima.

A Media enim ΑΒ auferatur media ΒΓ, potentia solum commensurabilis existens ipsi ΑΒ, & cum ea rationale faciens, videlicet quod sub ΑΒ, ΒΓ continetur: dico reliquam ΑΓ irrationalem esse, vocetur autem mediæ apotome prima.

Quoniam enim ΑΒ, ΒΓ mediæ sunt, erunt & quadrata quæ ex ΑΒ, ΒΓ media. rationale autem est [ex hyp.] quod bis continetur sub ΑΒ, ΒΓ, quadrata igitur ex ΑΒ, ΒΓ incommensurabilia sunt ei quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur: ergo & reliquo, sc. [per 7.2.] quadrato ex ΑΓ, incommensurabile est id quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur: quoniam si tota magnitudo uni componentium sit incommensurabilis, [per 17.10.] & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt. rationale autem est quod bis continetur sub ΑΒ, ΒΓ: irrationale igitur est quadratum ex ΑΓ: ideoque irrationalis est ΑΓ, vocetur; media apotome prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον τὸ περιέχῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

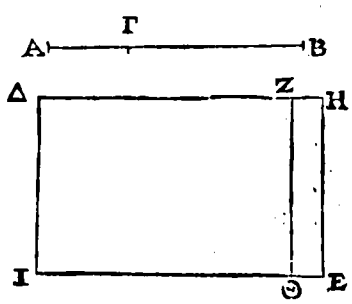
Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

PROP. LXXVI. THEOR.

Si à media media auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti, quæ cum tota medium continet; & reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome secunda.

A Media enim ΑΒ auferatur media ΒΓ potentia solum commensurabilis existens toti ΑΒ, & cum ea medium continens, videlicet quod continetur sub ΑΒ, ΒΓ: dico reliquam ΑΓ irrationalem esse, vocetur autem mediæ apotome secunda.

Exponatur enim rationalis Δ I, & quadratis quidem ex AB, BΓ æquale parallelogrammum Δ E ad ipſam Δ I applicetur, latitudinem faciens Δ H; ei vero quod bis ſub AB, BΓ continetur æquale parallelogrammum Δ Θ ad eandem Δ I applicetur, latitudinem faciens Δ Z: reliquum igitur Z E [per 7. 2.] eſt æquale quadrato ex AΓ. & quoniam media ſunt quadrata ex AB, BΓ; erit & parallelogrammum Δ E medium. & ad rationalem Δ I applicatum eſt, latitudinem faciens Δ H: ergo [per 23.10.] Δ H eſt rationalis, & ipſi Δ I longitudine incommenſurabilis. rurſus, quoniam medium eſt quod ſub AB, BΓ continetur, erit & quod bis continetur ſub AB, BΓ medium. atque eſt æquale parallelogrammo Δ Θ: ergo & Δ Θ eſt medium, & ad rationalem Δ I applicatum eſt, latitudinem faciens Δ Z: rationalis igitur eſt Δ Z, & ipſi Δ I longitudine incommenſurabilis. & quoniam AB, BΓ potentia ſolum commenſurabiles ſunt; erit AB ipſi BΓ incommenſurabilis longitudine: ergo [per 1. 6. & 10.10.] quadratum ex AB incommenſurabile eſt ei quod ſub AB, BΓ continetur. ſed quadrato quidem ex AB commenſurabilia ſunt [per 16. 10.] quæ ex AB, BΓ fiunt quadrata; ei vero quod ſub AB, BΓ continetur [per 6.10.] commenſurabile eſt id quod bis continetur ſub AB, BΓ: quadrata igitur ex AB, BΓ incommenſurabilia ſunt ei quod bis ſub AB, BΓ continetur. Δ E autem eſt [per conſtr.] æquale quadratis ex AB, BΓ; & parallelogrammum Δ Θ æquale eſt ei quod bis continetur ſub AB, BΓ: ergo Δ E ipſi Δ Θ eſt incommenſurabile. ſed [per 1.6.] ut Δ E ad Δ Θ ita recta linea H Δ ad Δ Z: incommenſurabilis igitur eſt H Δ ipſi Δ Z longitudine. & ſunt ambæ rationales: quare H Δ, Δ Z rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: ergo [per 74.10.] Z H apotome eſt, & Δ I eſt rationalis. quod autem ſub rationali & irrationali continetur rectangulum [per ſch. 39. 10.] irrationale eſt, ideo & ipſum potens eſt irrationalis. ſed recta linea AΓ poteſt Z E parallelogrammum: ergo AΓ eſt irrationalis, vocetur autem mediæ apotome ſecunda.



Εκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Δ I, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον τῷ δὲ τὶς παρὰ τὴν Δ I παραβεβλήσθω τὸ Δ E πλάτος ποιοῦν τὴν Δ H, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον παρὰ τὴν Δ I παραβεβλήσθω τὸ Δ Θ πλάτος ποιοῦν τὴν Δ Z. λοιπὸν ἄρα τὸ Z E ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ Δ E. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Δ I παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν Δ H· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Δ H, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Δ I μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BΓ μέσον ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ Δ Θ· καὶ τὸ Δ Θ ἄρα μέσον ἐστί, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Δ I παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν Δ Z· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Δ Z, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Δ I μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ AB, BΓ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ BΓ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ. ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BΓ τὸ Δ E, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ τὸ Δ Θ· ἀσύμμετρον ἄρα τὸ Δ E τῷ Δ Θ. ὡς δὲ τὸ Δ E πρὸς τὸ Δ Θ οὕτως ἡ H Δ πρὸς τὴν Δ Z· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ H Δ τῇ Δ Z μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα H Δ, Δ Z ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ Z H ἄρα ἀποτομή ἐστι, ῥητὴ δὲ ἡ Δ I. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι· καὶ ἡ δυναμένη ἄρα αὐτὸ ἄλογός ἐστι. καὶ δύναται τὸ Z E ἡ AΓ· ἡ AΓ ἄρα ἀλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέση ἀποτομὴ δευτέρα.

Prop. LXXVII. Theor.

Si à recta linea recta linea auferatur, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium; reliqua irrationalis eſt, vocetur autem minor.

A Recta linea AB auferatur recta BΓ, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, faciensque cum tota AB compoſitum quidem ex ipſarum AB, BΓ quadratis rationale, quod autem

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οζ'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

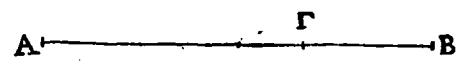
Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ BΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τῆς AB τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ

δὶς

δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἅμα μέσον· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ ἀναστρέψαντι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur medium: dico reliquam ΑΓ irrationalem eſſe, quæ vocatur minor.



Quoniam enim compoſitum quidem ex ipſarum ΑΒ, ΒΓ quadratis rationale eſt: quod autem bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur medium; erunt quadrata ipſarum ΑΒ, ΒΓ incommenſurabilia ei quod bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ: ergo [per 17. 10.] per converſionem, quadrata ex ΑΒ, ΒΓ quadrato ex ΑΓ ſunt incommenſurabilia. ſed [ex hyp.] quadrata ex ΑΒ, ΒΓ rationalia ſunt: irrationale igitur eſt quadratum ex ΑΓ; ideoque recta linea ΑΓ eſt irrationalis, vocetur autem minor.

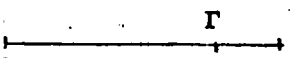
ΠΡΟΤΑΣΙΣ οη'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Prop. LXXVIII. Theor.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis bis continetur rationale; reliqua irrationalis eſt, vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.



A Recta enim linea ΑΒ recta linea ΒΓ auferatur incommenſurabilis exiſtens toti ΑΒ, facienſque compoſitum quidem ex ipſarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium; quod autem bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur, rationale: dico reliquam ΑΓ irrationalem eſſe, vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστί, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καί ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Quoniam enim compoſitum ex ipſarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium eſt, quod autem bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ rationale; erunt ex ΑΒ, ΒΓ quadrata incommenſurabilia ei quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur: & reliquum igitur quadratum ex ΑΓ incommenſurabile eſt [per 17. 10.] ei quod bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ. atque eſt quod bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ rationale: ergo quadratum ex ΑΓ irrationale eſt: & ob id recta linea ΑΓ irrationalis, vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οθ'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Prop. LXXIX. Theor.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis bis continetur medium, & adhuc ipſorum quadrata incommenſurabilia ei quod bis continetur ſub ipſis; reliqua irrationalis eſt, vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

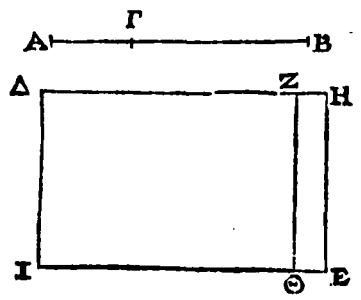
Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ

A Recta enim linea ΑΒ recta linea ΒΓ auferatur, potentia incommenſurabilis exiſtens toti ΑΒ, facienſque compoſitum quidem ex ipſarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium, quod autem bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur medium, & adhuc quadrata ipſarum ΑΒ, ΒΓ incommenſurabilia rectangulo quod bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ: dico reliquam ΑΓ

irratio-

irrationalem esse, vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

Exponatur enim rationalis Δ I, & quadratis quidem ex A B, B Γ æquale parallelogrammum Δ E ad ipsam Δ I applicetur, latitudinem faciens Δ H; ei vero quod bis continetur sub A B, B Γ æquale auferatur Δ Θ, latitudinem faciens Δ Z: ergo [per 7.2.] reliquum Z E est æquale quadrato ex A Γ; & ob id recta linea A Γ ipsum Z E potest. itaque quoniam compositum ex ipsarum A B, B Γ quadratis medium est, & parallelogrammo Δ E æquale; erit ipsum Δ E medium, & ad rationalem Δ I applicatum est, latitudinem faciens Δ H: quare [per 23. 10.] Δ H est rationalis, & ipsi Δ I longitudine incommensurabilis. rursus, quoniam id quod bis sub A B, B Γ continetur medium est, & æquale parallelogrammo Δ Θ, erit Δ Θ medium, & ad rationalem Δ I applicatum est, latitudinem faciens Δ Z: ergo Δ Z est rationalis, ipsique Δ I incommensurabilis longitudine. & quoniam quadrata ex A B, B Γ incommensurabilia sunt ei quod bis sub A B, B Γ continetur, & parallelogrammum Δ E ipsi Δ Θ est incommensurabile. ut autem Δ E ad Δ Θ ita est [per 1. 6.] recta linea Δ H ad ipsam Δ Z: incommensurabilis igitur est [per 10.10.] Δ H ipsi Δ Z. & sunt ambæ rationales: ergo Δ H, Δ Z rationales sunt potentia solum commensurabiles: apotome igitur est Z H [per 74.10.], & Z Θ est rationalis. quod autem sub rationali & apotoma continetur rectangulum [per sch.39.10.] irrationale est, ipsumque potens est irrationalis, atque A Γ potest parallelogrammum Z E: ergo A Γ irrationalis est, vocetur autem cum media medium totum efficiens.



ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσης μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Δ I, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν A B, B Γ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν Δ I παραβεβλήσθω τὸ Δ E πλάτος ποιοῦν τὴν Δ H, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ Δ Θ πλάτος ποιοῦν τὴν Δ Z· λοιπὸν ἄρα τὸ Z E ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς A Γ· ὥστε ἡ A Γ δύναται τὸ Z E. καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A B, B Γ τετραγώνων μέσον ἐστί, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ Δ E· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ Δ E, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Δ I παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν Δ H· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Δ H, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Δ I μήκει. πάλιν, ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ μέσον ἐστί, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ Δ Θ· τὸ ἄρα Δ Θ μέσον ἐστί, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Δ I παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν Δ Z· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Δ Z, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Δ I μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῶν A B, B Γ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Δ E τῷ Δ Θ. ὡς δὲ τὸ Δ E πρὸς τὸ Δ Θ οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ Δ H πρὸς τὴν Δ Z· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ H τῇ Δ Z. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ Δ H, Δ Z ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Z H, ῥητὴ δὲ ἡ Z Θ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καὶ δύναται τὸ Z E ἡ A Γ· ἡ A Γ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσης μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Prop. LXXX. Theor.

Apotomæ una tantum congruit recta linea potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT apotome A B, congruens autem ipsi sit B Γ: ergo [per 74. 10.] A Γ, Γ B rationales sunt potentia solum commensurabiles. dico ipsi A B alteram non congruere rationalem, quæ potentia solum sit commensurabilis toti.

Si enim fieri potest, congruat B Δ: ergo [per 74.10.] A Δ, Δ B rationales sunt potentia solum commensurabiles. & quoniam quo excessu quadrata ex A Δ, Δ B excedunt id quod bis continetur sub A Δ, Δ B, eo & quadrata ex A Γ, Γ B excedunt id quod bis sub A Γ, Γ B continetur; utraque enim excedunt eodem quadrato, nempe quod fit ex A B: & permutando, quo excessu quadrata ex A Δ, Δ B excedunt quadrata ex A Γ, Γ B, eodem & id quod bis continetur sub A Δ, Δ B excedet id quod bis sub A Γ, Γ B continetur. sed quadrata ex A Δ, Δ B excedunt quadrata ex A Γ, Γ B rationali:

ΠΡΟΤΑΣΙΣ π'.

Τῇ ἀποτομῇ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ A B, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ B Γ· αἱ A Γ, Γ B ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω ὅτι τῇ A B ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω ἡ B Δ· αἱ A Δ, Δ B ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν A Δ, Δ B τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A Δ, Δ B, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν A Γ, Γ B τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A Γ, Γ B· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς A B ἀμφότερα ὑπερέχει· ἀλλὰ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν A Δ, Δ B τῶν ἀπὸ τῶν A Γ, Γ B, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A Δ, Δ B τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν A Γ, Γ B. τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ A Δ, Δ B τοῦ ἀπὸ τοῦ A Γ, Γ B ὑπερέχει ῥητῷ·

ῥητὴ

ῥητὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσαι γὰρ ἀμφότεραι, μέσον δὲ μέσα οὐκ ὑπερέχει ῥητῷ· τῇ ἄρα ΑΒ ἑτέρα οὐ συμπίπτει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Μία ἄρα μόνον τῇ ἀποτομῇ συμπίπτει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[ex hyp.] utraque rectarum linearum rationalis eſt; quod igitur bis continetur ſub ΑΔ, ΔΒ excedit id quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur rationali, quod fieri non poteſt, ambo enim media ſunt, medium autem [per 27. 10.] medium non ſuperat rationali; ergo rectæ lineæ ΑΒ altera non congruit rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

Igitur apotomæ una tantum congruit rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πα'.

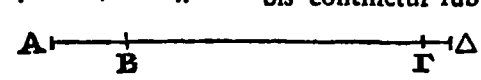
Τῇ μέσῃ ἀποτομῇ πρώτῃ μόνον μία συμπίπτει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Prop. LXXXI. Theor.

Mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota rationale continens.

Ἔστω γὰρ μέση ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, ᾗ τῇ ΑΒ συμπιπτέτω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ συμπίπτει μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω καὶ ἡ ΔΒ· αἱ ἄρα ΑΔ, ΔΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ (τῷ γὰρ αὐτῷ πάλιν ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ·) ἀλλὰ τῷ ἄρα ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.



Si enim fieri poteſt, congruat ΔΒ: ergo [per 75. 10.] ΑΔ, ΔΒ mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent, nempe quod fit ſub ΑΔ, ΔΒ. & quoniam quo exceſſu quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt id quod bis continetur ſub ΑΔ, ΔΒ, eodem & quadrata ex ΑΓ, ΓΒ excedunt quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur; (excedunt enim [per 7. 2.] eodem quadrato ex ΑΒ;) & permutando quo exceſſu quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, eodem & quod bis continetur ſub ΑΔ, ΔΒ excedit id quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur. ſed quod bis continetur ſub ΑΔ, ΔΒ excedit id quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur rationali; ambo enim rationalia ſunt: ergo & quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rationali, quod fieri non poteſt; ambo enim [ex hyp.] ſunt media, medium autem [per 27.10.] medium non ſuperat rationali.

Quare mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentia ſolum toti ſit commenſurabilis, & cum tota rationale contineat. quod erat demonſtrandum.

Τῇ ἄρα μέσῃ ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πβ'.

Τῇ μέσῃ ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον συμπίπτει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

Prop. LXXXII. Theor.

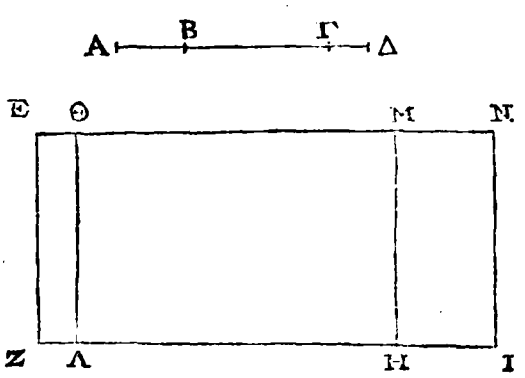
Mediæ apotomæ ſecundæ una tantum congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota medium continens.

Ἔστω μέση ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ συμπιπτέτω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ συμπίπτει μέση δυνάμει μόνον

SIT media apotome ſecunda ΑΒ, & ipſi ΑΒ congruat ΒΓ: ergo [per 76. 10.] ΑΓ, ΓΒ mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, mediumque continentes ſub ΑΓ, ΓΒ: dico ipſi ΑΒ alteram non congruere mediam quæ poten-

tia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat.

Si enim fieri poteſt, congruat B Δ; quare [per 76.10.] A Δ, Δ B mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium ſub A Δ, Δ B continent. & exponatur rationalis E Z, quadratiſque ex A Γ, Γ B æquale parallelogrammum E H ad ipſam E Z applicetur, latitudinem faciens E M; & ei quod bis continetur ſub A Γ, Γ B æquale auferatur parallelogrammum Θ H, latitudinem faciens Θ M: reliquum igitur E Λ [per 7. 2.] eſt æquale ei quod fit ex A B quadrato: ergo A B ipſum E Λ poteſt. rurſus, quadratis ex A Δ, Δ B æquale parallelogrammum E I ad ipſam E Z applicetur, latitudinem faciens E N, eſt autem & E Λ æquale quadrato ex A B: reliquum igitur Θ I [per 7. 2.] eſt æquale ei quod bis ſub A Δ, Δ B continetur. & quoniam mediæ ſunt A Γ, Γ B, erunt & quadrata ex A Γ, Γ B media. ſuntque æqualia parallelogrammo E H: quare E H eſt medium, & ad rationalem E Z applicatum eſt, latitudinem faciens E M: ergo [per 23.10.] E M eſt rationalis, & ipſi E Z longitudine incommenſurabilis. rurſus, quoniam medium eſt quod continetur ſub A Γ, Γ B; & quod bis ſub A Γ, Γ B continetur medium erit. atque eſt æquale parallelogrammo Θ H: ergo & Θ H eſt medium, & ad rationalem E Z applicatum eſt latitudinem faciens Θ M: rationalis igitur eſt Θ M, & ipſi E Z incommenſurabilis longitudine. & quoniam [ex hyp.] A Γ, Γ B potentia ſolum ſunt commenſurabiles, erit A Γ incommenſurabilis ipſi Γ B longitudine. ut autem A Γ ad Γ B ita [per 1.6.] quadratum ex A Γ ad id quod continetur ſub A Γ, Γ B: incommenſurabile igitur eſt & quadratum ex A Γ ei quod ſub A Γ, Γ B continetur. ſed quadrato quidem ex A Γ commenſurabilia ſunt [per 16. 10.] quadrata ex A Γ, Γ B; ei vero quod continetur ſub A Γ, Γ B commenſurabile eſt quod bis ſub A Γ, Γ B continetur: ergo quadrata ex A Γ, Γ B incommenſurabilia ſunt ei quod bis ſub A Γ, Γ B continetur. atque eſt [per conſtr.] quadratis ex A Γ, Γ B æquale parallelogrammum E H; ei vero quod bis ſub A Γ, Γ B continetur æquale ipſum Θ H: ergo E H ipſi Θ H eſt incommenſurabile. ſed ut E H ad Θ H ita eſt [per 1. 6.] recta linea E M ad ipſam Θ M: quare E M ipſi Θ M eſt incommenſurabilis longitudine. & ſunt ambæ rationales: ergo E M, Θ M rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, ac propterea [per 74.10.] apotome eſt E Θ, & ipſi congruens Θ M. ſimiliter demonſtrabimus & Θ N ipſi congruere: apotomæ igitur alia atque alia congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quod [per 80.10.] fieri non poteſt.



Ergo mediæ apotomæ ſecundæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentia ſolum

σύμμετρός ἐστι τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον τὸ περιέχεται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, τῇ συμμέτρῳ ἔστω ἡ Β Δ· αἱ Α Δ, Δ Β ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον τὸ περιέχουσι τὸ ὑπὸ τῶν Α Δ, Δ Β. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Ε Ζ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β ἴσον παρὰ τὴν Ε Ζ παραβεβλήσθω τὸ Ε Η, πλάτος ποιοῦν τὴν Ε Μ· τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ Θ Η, πλάτος ποιοῦν τὴν Θ Μ· λοιπὸν ἄρα τὸ Ε Λ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α Β· ὥστε ἡ Α Β δύναται τὸ Ε Λ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν Α Δ, Δ Β ἴσον παρὰ τὴν Ε Ζ παραβεβλήσθω τὸ Ε Ι, πλάτος ποιοῦν τὴν Ε Ν· ἔστι δὲ καὶ τὸ Ε Λ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς Α Β τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ Θ Ι ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν Α Δ, Δ Β. καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ Α Γ, Γ Β, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ Ε Η· μέσον ἄρα καὶ τὸ Ε Η, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Ε Ζ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν Ε Μ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Μ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Ε Ζ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β μέσον ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ Θ Η· καὶ τὸ Θ Η ἄρα μέσον ἐστί, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Ε Ζ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν Θ Μ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Θ Μ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Ε Ζ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ Α Γ, Γ Β δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α Γ τῇ Γ Β μήκει. ὡς δὲ ἡ Α Γ πρὸς τὴν Γ Β οὕτως καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α Γ τῷ ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α Γ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β τῷ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β. καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β ἴσον τὸ Ε Η, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β ἴσον τὸ Θ Η· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Ε Η τῷ Θ Η. ὡς δὲ τὸ Ε Η πρὸς τὸ Θ Η οὕτως ἐστὶν ἡ Ε Μ πρὸς τὴν Θ Μ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Μ τῇ Θ Μ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ Ε Μ, Θ Μ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Θ, τῇ συμμέτρῳ ἑαυτῆς ἡ Θ Μ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ Θ Ν αὐτῇ τῇ συμμέτρῳ· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη τῇ συμμέτρῳ εὐθεῖα, δυνάμει μόνον σύμμετρός ἐστι τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῇ ἄρα μέσῃ ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον τῇ συμμέτρῳ εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμ-

μετρος

μετρῷ οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

fit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πγ'.

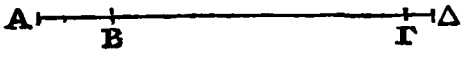
Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον συναρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Prop. LXXXIII. Theor.

Minori una tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem bis ſub ipſis continetur medium.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ συναρμόζουσα ἔστω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ συναρμόσει, τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συναρμοζέτω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥηταὶ γὰρ ἀμφότεραι· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΑΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα.



Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, συναρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα συναρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συναρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν

SIT minor AB, & ipſi AB congruat BΓ: ergo [per 77. 10.] AΓ, ΓB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem bis ſub ipſis continetur medium: dico ipſi AB alteram non congruere rectam lineam, quæ eadem faciat.

Si enim fieri poteſt, congruat BΔ: ergo [per 77.10.] AΔ, ΔB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem bis ſub ipſis continetur medium. & quoniam [per 7.2.] quo exceſſu quadrata ex AΔ, ΔB excedunt quadrata ex AΓ, ΓB, eodem & quod bis continetur ſub AΔ, ΔB excedit id quod bis ſub AΓ, ΓB continetur: quadrata autem ex AΔ, ΔB excedunt quadrata ex AΓ, ΓB rationali; ambo enim [ex hyp.] rationalia ſunt: igitur & quod bis continetur ſub AΔ, ΔB id quod bis ſub AΓ, ΓB continetur rationali excedet, quod [per 27. 10] fieri non poteſt, etenim [ex hyp.] ambo ſunt media.

Ergo minori una tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod vero bis ſub ipſis continetur medium. quod erat demonſtrandum.

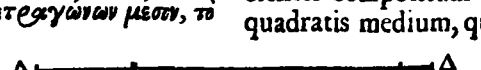
ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον συναρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Prop. LXXXIV. Theor.

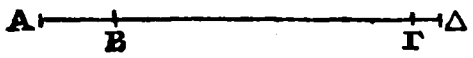
Ei quæ cum rationali medium totum facit una tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur rationale.

SIT cum rationali medium totum faciens AB, congruens autem ipſi BΓ; ergo [per 78.10.] AΓ, ΓB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum AΓ, ΓB quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur rationale: dico ipſi AB alteram non congruere eadem facientem.



Si enim fieri poteſt, congruat BΔ: ergo [per 78. 10.] AΔ, ΔB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum AΔ, ΔB quadratis medium, quod autem bis ſub

ipſis continetur rationale. quoniam igitur [per 7. 2.] quo exceſſu quadrata ex A Δ, Δ B excedunt quadrata ex A Γ, Γ B, eodem quod bis continetur ſub A Δ, Δ B excedit id quod bis ſub A Γ, Γ B continetur; quod autem bis continetur ſub A Δ, Δ B excedit id quod bis ſub A Γ, Γ B continetur rationali, etenim [ex hyp.] ambo rationalia ſunt: igitur & quadrata ex A Δ, Δ B rationali excedent quadrata ex A Γ, Γ B, quod [per 27. 10] fieri non poteſt, cum ambo ſint media: non igitur ipſi A B altera congruit, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur rationale: quare ei quæ cum rationali medium totum facit una tantum congruet recta linea. quod erat demonſtrandum.

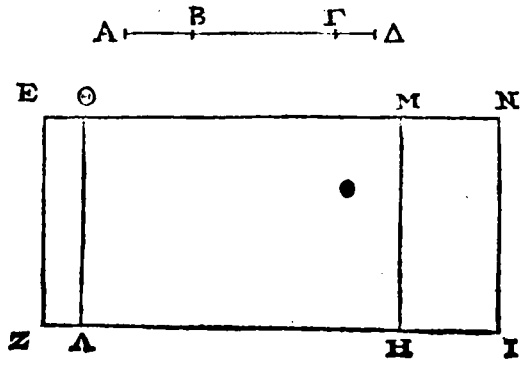


Prop. LXXXV. Theor.

Ei quæ cum medio medium totum facit una tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum.

SIT cum medio medium totum faciens A B, ipſi vero congruens B Γ: ergo [per 79. 10.] A Γ, Γ B potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem bis ſub ipſis A Γ, Γ B continetur medium, & adhuc compoſitum ex quadratis ipſarum A Γ, Γ B incommenſurabile ei quod bis continetur ſub ipſis A Γ, Γ B: dico ipſi A B alteram non congruere potentia incommenſurabilem toti, & cum tota facientem ea quæ propoſita ſunt.

Si enim fieri poteſt, congruat B Δ, ita ut A Δ, Δ B potentia incommenſurabiles ſint, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum A Δ, Δ B quadratis medium; quod autem bis ſub ipſis A Δ, Δ B continetur medium, & adhuc compoſitum ex quadratis ipſarum A Δ, Δ B incommenſurabile ei quod bis continetur ſub ipſis A Δ, Δ B. & exponatur rationalis E Z; & quadratis ipſarum A Γ, Γ B æquale parallelogrammum E H ad ipſam E Z applicetur, latitudinem faciens E M; ei vero quod bis continetur ſub A Γ, Γ B æquale parallelogrammum auferatur Θ H, latitudinem faciens Θ M: reliquum igitur quadratum ex A B [per 7. 2.] eſt æquale parallelogrammo E Λ: ergo A B ipſum E Λ poteſt. rurſus, quadratis ex A Δ, Δ B æquale parallelogrammum E I ad ipſam E Z applicetur, latitudinem faciens E N.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ πε'.

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΣτω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ A B, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ B Γ· αἱ ἄρα A Γ, Γ B δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A Γ, Γ B μέσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν A Γ, Γ B τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν A Γ, Γ B· λέγω ὅτι τῇ A B ἐτέρα εὐθεῖα ἐστὶ προσαρμόσει δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προκείμενα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν προσαρμοζέτω ἡ B Δ, ὥστε καὶ τὰς A Δ, Δ B δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσας τὰ μὲν ἀπὸ τῶν A Δ, Δ B τετράγωνα ἅμα μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A Δ, Δ B μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν A Δ, Δ B ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν A Δ, Δ B. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ E Z, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν A Γ, Γ B ἴσον παρὰ τὴν E Z παραβεβλήσθω τὸ E H, πλάτος ποιοῦν τὴν E M, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν A Γ, Γ B ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ Θ H, πλάτος ποιοῦν τὴν Θ M· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A B ἴσον ἐστὶ τῷ E Λ· ἡ ἄρα A B δυνατή τὸ E Λ. πάλιν, τοῖς ἀπὸ τῶν A Δ, Δ B ἴσον παρὰ τὴν E Z παραβεβλήσθω τὸ E I, πλάτος ποιοῦν τὴν E N. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A B ἴσον τῷ

eſt autem & quadratum ex A B æquale parallelo-

E Λ·

ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΙ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἴσον τὸ ΘΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΕΜ, ΜΘ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΕΘ πάλιν ἀποτομή ἐστι, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΝ· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον ἀσύμμετρος ὅλα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα· τῇ ἄρα ΑΒ μία μόνον προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος ὅλα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ μὲν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα μέσον, ἔτι δὲ τὰ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

grammo ΕΛ: ergo [per 7.2.] reliquum quod bis ſub ΑΔ, ΔΒ continetur ipſi ΘΙ eſt æquale. & quoniam [ex hyp.] compoſitum ex quadratis ipſarum ΑΓ, ΓΒ medium eſt, & [per conſtr.] æquale parallelogrammo ΕΗ, erit & ΕΗ medium: & ad rationalem ΕΖ applicatum eſt, latitudinem faciens ΕΜ; quare [per 23. 10.] ΕΜ eſt rationalis, & ipſi ΕΖ longitudine incommenſurabilis. rurſus, quoniam quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur eſt medium, & æquale ipſi ΘΗ; erit & ΘΗ medium, & ad rationalem ΕΖ applicatum eſt, latitudinem faciens ΘΜ: rationalis igitur eſt ΘΜ [per 23. 10.] & ipſi ΕΖ incommenſurabilis longitudine. & quoniam quadrata ex ΑΓ, ΓΒ incommenſurabilia ſint ei quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur, erit & ΕΗ incommenſurabile ipſi ΘΗ, ideoque [per 1. 6. & 10.10.] recta linea ΕΜ rectæ ΜΘ longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt ambæ rationales: cum igitur ΕΜ, ΜΘ rationales ſint potentia ſolum commenſurabiles, recta linea ΕΘ [per 74.10.] apotome eſt, & ipſi congruens ΘΜ. ſimiliter demonſtrabimus ΕΘ rurſus apotomen eſſe, ipſique congruentem ΘΝ: ergo apotomæ alia atque alia congruit rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quod fieri non poſſe [per 80. 10.] oſtenſum eſt: non igitur ipſi ΑΒ altera congruet recta linea: ipſi igitur ΑΒ una tantum congruet, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur medium, & adhuc compoſitum ex quadratis ipſarum incommenſurabile ei quod bis continetur ſub ipſis. quod erat demonſtrandum.

ΟΡΟΙ ΤΡΙΤΟΙ.

α'. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ὅλη ἡ προσαρμόζουσα μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ὑκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ πρώτη.

β'. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾖ τῇ ὑκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ δευτέρα.

γ'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ᾖ τῇ ὑκειμένῃ ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τὴν προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

δ'. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τὴν προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ὑκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη.

ε'. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. Poſita rationali & apotoma, ſi quidem tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, ſitque tota poſitæ rationali longitudine commenſurabilis; vocetur apotome prima.

2. Si vero congruens ſit longitudine commenſurabilis poſitæ rationali, & tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; vocetur apotome ſecunda.

3 Quod ſi neutra ſit longitudine commenſurabilis poſitæ rationali, & tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.

4. Rurſus ſi tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, ſi quidem tota ſit longitudine commenſurabilis poſitæ rationali; vocetur apotome quarta.

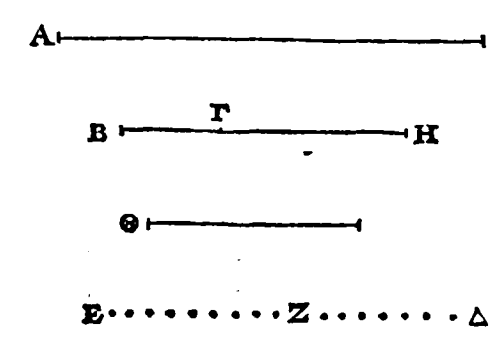
5. Si vero congruens, vocetur apotome quinta.

6. Quod ſi neutra, dicatur apotome ſexta.

PROP. LXXXVI. PROBL.
Invenire primam apotomen.

EXponatur rationalis A, & ipſi A longitudine commenſurabilis ſit BH: ergo & BH eſt rationalis. & [per coroll. lem. 1.30.10.] exponantur duo quadrati numeri EΔ, EZ, quorum exceſſus ΔZ non ſit quadratus: neque igitur EΔ ad ΔZ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & fiat ut EΔ ad ΔZ ita quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ.

Commenſurabile igitur [per 6. 10.] eſt quadratum ex BH quadrato ex HΓ. rationale autem eſt quadratum ex BH; ergo & quadratum ex HΓ eſt rationale: ideoque recta linea HΓ rationalis eſt. & quoniam EΔ ad ΔZ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque [per 9.10.] quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt BH ipſi HΓ longitudine. & ſunt ambæ rationales: ergo BH, HΓ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & ob id [per 74.10.] BΓ apotome eſt. dico & primam eſſe. ſit enim quadratum ex Θ id quo quadratum ex BH excedit quadratum ex HΓ. & quoniam eſt ut BΔ ad ΔZ ita quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ, erit per converſionem [per coroll. 19.5.] ut ΔE ad EZ ita quadratum ex BH ad quadratum ex Θ. ſed ΔE ad EZ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; uterq; enim [per conſtr.] quadratus eſt: ergo & quadratum ex BH ad quadratum ex Θ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: commenſurabilis igitur eſt [per 9.10.] BH ipſi Θ longitudine. & BH plus poteſt quam HΓ quadrato ex Θ: ergo BH plus poterit quam HΓ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. atque eſt tota BH expoſitæ rationali A commenſurabilis longitudine: ergo [per 1. deff. tert. 10.] BH eſt apotome prima.



Inventa igitur eſt prima apotome. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πς'.
Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΕΔ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος· εὐθὲ ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ.

Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι. λέγω ὅτι καὶ πρώτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦτο ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ· καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἑκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστι· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΗΒ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Εὑρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. LXXXVII. PROBL.
Invenire ſecundam apotomen.

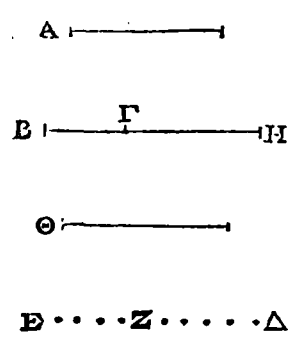
EXponatur rationalis A; & ipſi A longitudine commenſurabilis ſit ΓH: ergo ΓH eſt rationalis. & [per coroll. lem. 1.30.10.] exponantur duo numeri quadrati ΔE, EZ, quorum exceſſus ΔZ non ſit quadratus. fiatque ut ZΔ ad ΔE ita quadratum ex ΓH ad quadratum ex HB.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πζ'.
Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ.

Σύμμετρον

Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΗ, ΗΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. ἐφ᾽ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμόν· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ οὕτως ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΕΖ. καί ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΕΔ, ΕΖ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι δευτέρα.



Commensurabile igitur est [per 6.10.] quadratum ex ΓΗ quadrato ex ΗΒ. sed quadratum ex ΓΗ est rationale: ergo & rationale est quadratum ex ΗΒ; ac propterea ipsa ΗΒ est rationalis. & quoniam quadratum ex ΓΗ ad quadratum ex ΗΒ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit [per 9. 10.] ΓΗ ipsi ΗΒ incommensurabilis longitudine. & ambæ sunt rationales: ergo ΓΗ, ΗΒ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ob id [per 74.10.] ΒΓ est apotome. dico & secundam esse. sit enim quadratum ex Θ illud quo quadratum ex ΒΗ excedit quadratum ex ΗΓ. quoniam igitur est ut quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex ΗΓ ita ΕΔ numerus ad numerum ΔΖ, erit per conversionem rationis ut quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex Θ ita ΔΕ ad ΕΖ. atque est [per constr.] uterque ipsorum ΔΕ, ΕΖ quadratus: quadratum igitur ex ΒΗ ad quadratum ex Θ rationem habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoque [per 9. 10.] ΒΗ ipsi Θ longitudine est commensurabilis. & [per constr.] plus potest ΒΗ quam ΗΓ quadrato ex Θ: ergo ΒΗ plus potest quam ΗΓ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. atque est congruens ΓΗ expositæ rationali Α commensurabilis longitudine: ergo [per 2. deff. tert. 10.] ΒΓ est apotome secunda.

Εὕρηται ἄρα ἡ δευτέρα ἀποτομὴ ἡ ΒΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Inventa igitur est secunda apotome ΒΓ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πή'.

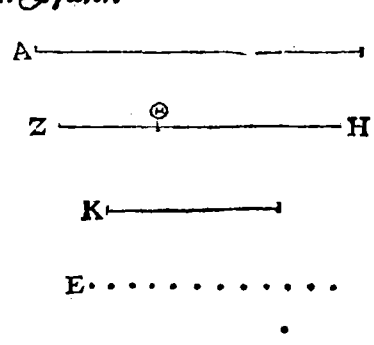
Εὑρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Prop. LXXXVIII. Probl.

Invenire tertiam apotomen.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ, λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ ΒΓ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ τετράγωνον.

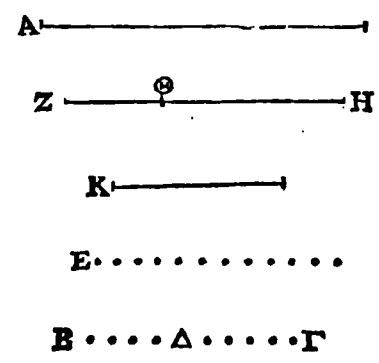
Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ·



Exponatur rationalis Α, & exponantur tres numeri Ε, ΒΓ, ΓΔ, non habentes inter se rationem quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum; ΒΓ vero ad ΒΔ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & fiat ut Ε ad ΒΓ ita quadratum ex Α ad quadratum ex ΖΗ, ut autem ΒΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ.

Commensurabile igitur [per 6. 10.] est quadratum ex Α quadrato ex ΖΗ. atque est quadratum ex Α rationale: ergo & rationale est quadratum ex ΖΗ; ac propterea recta linea ΖΗ est rationalis. & quoniam Ε ad ΒΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque quadratum ex Α ad quadratum ex ΖΗ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur [per 9.10.] est Α ipsi ΖΗ longitudine. rursus, quoniam est ut ΒΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ;

ΗΘ; erit quadratum ex ΖΗ quadrato ex ΗΘ commenſurabile. rationale autem eſt quadratum ex ΖΗ; ergo & quadratum ex ΗΘ eſt rationale, & ob id recta linea ΗΘ rationalis. quod cum ΒΓ ad ΓΔ rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur [per 9.10.] eſt ΖΗ ipſi ΗΘ longitudine. & ſunt ambæ rationales: ergo ΖΗ, ΗΘ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: ac propterea [per 74.10.] apotome eſt ΖΘ. dico & tertiam eſſe. quoniam enim eſt ut Ε quidem ad ΒΓ ita quadratum ex Α ad quadratum ex ΖΗ; ut autem ΒΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ:



erit ex æquo [per 22.5.] ut Ε ad ΓΔ ita quadratum ex Α ad quadratum ex ΗΘ. ſed [per conſtr.] Ε ad ΓΔ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque igitur quadratum ex Α ad quadratum ex ΗΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo [per 9. 10.] Α ipſi ΗΘ longitudine eſt incommenſurabilis: neutra igitur ipſarum ΖΗ, ΗΘ expoſitæ rationali Α commenſurabilis eſt longitudine. quo autem quadratum ex ΖΗ plus poteſt quam quadratum ex ΗΘ, ſit quod ex Κ fit quadratum. quoniam igitur [per conſtr.] ut ΒΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ; erit per converſionem rationis [per 19.5.] ut ΓΒ ad ΒΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ. at ΓΒ ad ΒΔ rationem habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo & quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: commenſurabilis igitur [per 9. 10.] eſt ΖΗ ipſi Κ longitudine. & plus poteſt ΖΗ quam ΗΘ quadrato ex Κ: ergo ΖΗ plus poteſt quam ΗΘ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. & neutra ipſarum ΖΗ, ΗΘ longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali Α: quare [per 3. deff. tert. 10.] ΖΘ eſt apotome tertia.

Inventa igitur eſt tertia apotome ΖΘ. quod erat faciendum.

PROP. LXXXIX. PROBL.

Invenire quartam apotomen.

EXponatur rationalis Α, & ipſi Α longitudine commenſurabilis ſit ΒΗ: ergo ΒΗ eſt rationalis. exponantur præterea duo numeri ΔΖ, ΖΕ, ita ut totus ΔΕ ad utrumque ipſorum ΔΖ ΕΖ rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum: & fiat ut ΔΕ ad ΕΖ, ita quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex ΗΓ.

Commenſurabile igitur [per 6.10.] eſt quadra-

σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τ ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τ ΗΘ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τ ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τ ΒΓ ἕτως τὸ ἀπὸ τ Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τ ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ ἕτως τὸ ἀπὸ τ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τ ΗΘ. δίτου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τ ΓΔ ἕτως τὸ ἀπὸ τ Α πρὸς τὸ ἀπὸ τ ΗΘ· ὁ δὲ Ε πρὸς τ ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τ Α πρὸς τὸ ἀπὸ τ ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· ἑτέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τ ΖΗ τοῦ ἀπὸ τ ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τ Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τ Κ. ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τ Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομὴ, ἡ ΖΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

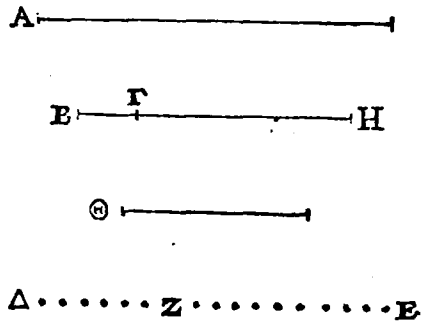
ΠΡΟΤΑΣΙΣ πθ'.

Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

ΕΚκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ· ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἑκάτερον τ ΔΖ, ΕΖ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ ἕτως τὸ ἀπὸ τ ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τ ΗΓ.

Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς

τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ. λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει· καὶ δυνάμει ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι τετάρτη.



Εὕρηται ἄρα ἡ ΒΓ τετάρτη ἀποτομή. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

tum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, eſt autem quadratum ex ΒΗ rationale: quare & rationale eſt quadratum ex ΗΓ; ideoque recta linea ΗΓ eſt rationalis. & quoniam ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex ΗΓ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt [per 9. 10.] ΒΗ ipſi ΗΓ longitudine. & ſunt ambæ rationales: ergo ΒΗ, ΗΓ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id [per 74. 10.] ΒΓ eſt apotome. dico & quartam eſſe. quo enim plus poteſt ΒΗ quam ΗΓ ſit illud quadratum ex Θ. & quoniam eſt ut ΔΕ ad ΕΖ ita quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex ΗΓ; erit per converſionem rationis ut ΕΔ ad ΔΖ ita quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex Θ. ſed ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex Θ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur [per 9. 10.] eſt ΒΗ ipſi Θ longitudine; & [ex hyp.] plus poteſt ΒΗ quam ΗΓ quadrato ex Θ: ergo ΒΗ plus poteſt quam ΗΓ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. atque eſt tota ΒΗ longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali Α: ergo [per 4. deff. tert. 10.] ΒΓ eſt apotome quarta.

Inventa igitur eſt quarta apotome ΒΓ. quod erat faciendum.

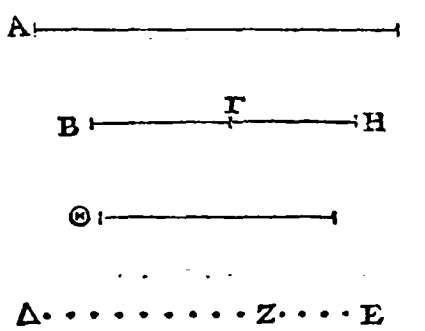
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

Εὑρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.

Prop. XC. Probl.

Invenire quintam apotomen.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς τὸν ΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ.

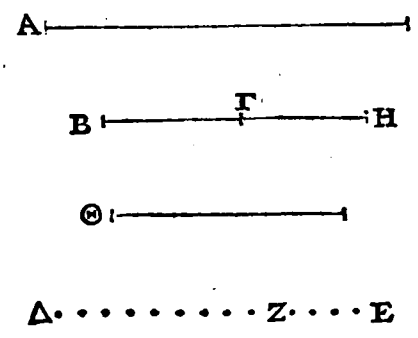


Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί·

Exponatur rationalis Α, & ipſi Α commenſurabilis ſit ΓΗ: ergo ΓΗ eſt rationalis. & exponantur duo numeri ΔΖ, ΖΕ, ita ut ΔΕ ad utrumque ipſorum ΔΖ, ΖΕ rationem rurſus non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum: fiatque ut ΖΕ ad ΕΔ ita quadratum ex ΓΗ ad quadratum ex ΗΒ.

Ergo [per 6. 10.] quadratum ex ΓΗ commenſurabile eſt quadrato ex ΗΒ. eſt autem quadratum ex ΓΗ rationale: ergo & rationale eſt quadratum ex ΗΒ; & idcirco recta linea ΗΒ eſt rationalis. & quoniam ut ΔΕ ad ΕΖ ita eſt quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex ΗΓ, & ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex ΗΓ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur [per 9. 10.] eſt ΒΗ ipſi ΗΓ longitudine. & ſunt ambæ rationales:

ergo BH, HΓ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & igitur [per 74.10.] BΓ eſt apotome. dico & quintam eſſe. quo enim majus eſt quadratum ex BH quam quadratum ex HΓ, ſit illud quadratum ex Θ. quoniam igitur quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ eſt ut ΔE ad EZ, erit per converſionem rationis ut EΔ ad ΔZ ita quadratum ex BH ad id quod fit ex Θ quadratum. ſed EΔ ad ΔZ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex BH ad quadratum ex Θ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoque [per 9. 10.] recta linea BH ipſi Θ longitudine eſt incommenſurabilis. & plus poteſt BH quam HΓ quadrato ex Θ: ergo BH plus poteſt quam HΓ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. atque [per conſtr.] eſt congruens ΓH expoſitæ rationali A longitudine commenſurabilis: quare [per 5. deff. tert. 10.] BΓ eſt apotome quinta.



Inventa igitur eſt quinta apotome BΓ. quod erat faciendum.

αἱ BH, HΓ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ BΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BH τοῦ ἀπὸ τῆς HΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΓ οὕτως ὁ ΔE πρὸς τὴν EZ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ EΔ πρὸς τὸν ΔZ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ EΔ πρὸς τὴν ΔZ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BH τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ BH τῆς HΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ BH ἄρα τῆς HΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ τετραπλασίονα δύνασθαι ἡ ΓH σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ A μήκει· ἡ ἄρα BΓ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

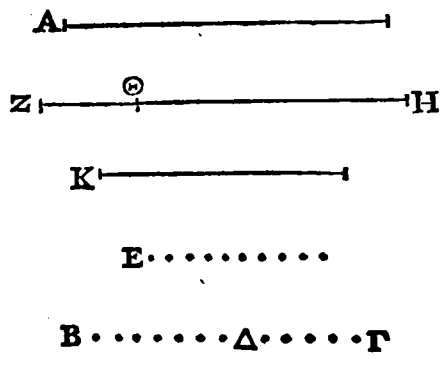
Εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ BΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XCI. Probl.

Invenire ſextam apotomen.

EXponatur rationalis A, & tres numeri E, BΓ, ΓΔ rationem non habentes inter ſe quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & & fiat ut E ad BΓ ita quadratum ex A ad quadratum ex ZH; ut autem BΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ.

Quoniam igitur eſt ut E ad BΓ ita quadratum ex A ad quadratum ex ZH; erit quadratum ex A quadrato ex ZH commenſurabile. rationale autem eſt quadratum ex A: ergo & quadratum ex ZH rationale erit; & ob id recta linea ZH rationalis. & quoniam [per conſtr.] E ad BΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex ZH rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur [per 9. 10.] eſt A ipſi ZH longitudine. rurſus, quoniam eſt ut BΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ, erit quadratum ex ZH commenſurabile quadrato ex HΘ. eſt autem quadratum ex ZH rationale: rationale igitur [per 6.10.] eſt & quadratum ex HΘ, & ipſa HΘ rationalis. quod cum BΓ ad ΓΔ rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζα'.

Εὑρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ A, καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ E, BΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH, ὡς δὲ ὁ BΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς ZH. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZH. καὶ ἐπεὶ ὁ E πρὸς τὸν BΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ ZH μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ BΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς HΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ HΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ BΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·

μόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥητὴ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει. καὶ ἑκατέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ Α ῥητῇ μήκει. ὧν δὲ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἢ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. ἡ δυνάμει ἄρα ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δυνάμενον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἑκατέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

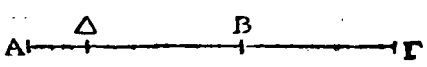
Εὕρηται ἄρα καὶ ἕκτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

numerum; neque quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine est incommensurabilis. & sunt ambæ rationales: quare ΖΗ, ΗΘ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & igitur [per 74. 10.] ΖΗ apotome est. dico & sextam esse. quoniam enim est ut Ε ad ΒΓ ita quadratum ex Α ad quadratum ex ΖΗ, ut autem ΒΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ: erit ex æquo ut Ε ad ΓΔ ita quadratum ex Α ad quadratum ex ΗΘ. sed Ε ad ΓΔ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex Α ad quadratum ex ΗΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] Α ipsi ΗΘ longitudine est incommensurabilis. & neutra ipsarum ΖΗ, ΗΘ expositæ rationali Α commensurabilis est longitudine. quo plus potest quadratum ex ΖΗ quam quadratum ex ΗΘ sit illud quadratum ex Κ. & quoniam est ut ΒΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ, erit per conversionem rationis [per 19. 5.] ut ΓΒ ad ΒΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ. at ΓΒ ad ΒΔ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] incommensurabilis est ΖΗ ipsi Κ longitudine. & ΖΗ plus potest quam ΗΘ quadrato ex Κ: plus igitur potest ΖΗ quam ΗΘ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & neutra ipsarum ΖΗ, ΗΘ est longitudine commensurabilis expositæ rationali Α: ergo [per 6. def. tert. 10.] ΖΘ est apotome sexta.

Inventa est igitur sexta apotome ΖΘ. quod erat faciendum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἔστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρησιν τῶν εἰρημένων ἐξ ἀποτομῶν. ἐὰν δὴ ἔτι εὑρεῖν τὴν πρώτην, ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ ΑΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΒΓ ἴση κείσθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα, τουτέστιν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ῥητὴν εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, τουτέστι τῆς ΒΔ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἡ ΑΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ πρώτη. ὁμοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὑρήσομεν, ἐκθέμενοι τὰς ἰσαριθμους ἐκ δύο ὀνομάτων.



SCHOLIUM.

Sed & expeditius sex dictarum linearum inventionem ostendere licet. si enim oporteat invenire primam apotomen, exponatur [per 49. 10.] ex binis nominibus prima ΑΓ cujus majus nomen sit ΑΒ; & ponatur ΒΔ ipsi ΒΓ æqualis. ergo [per 1. def. secund. 10.] ΑΒ, ΒΓ, hoc est ΑΒ, ΒΔ, rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ΑΒ plus potest quam ΒΓ, hoc est quam ΒΔ, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, & ΑΒ est commensurabilis longitudine expositæ rationali; & igitur [per 1. def. tert. 10.] ΑΒ est apotome prima. similiter & reliquas apotomas inveniemus, eas quæ sunt ex binis nominibus ejusdem ordinis exponentes [per 50, 51, 52, 53 & 54. lib. 10.]

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟβ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

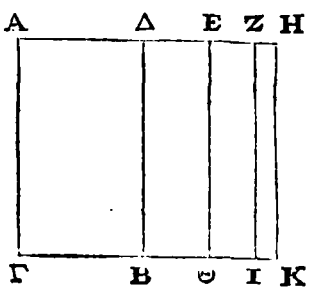
Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

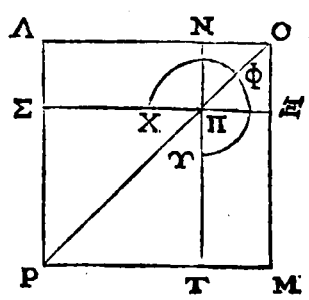
PROP. XCII. THEOR.

Si spatium contineatur sub rationali & apotoma prima, recta linea spatium potens apotome est.

COntineatur enim spatium ΑΒ sub rationali ΑΓ & apotoma prima ΑΔ: dico rectam lineam quæ potest spatium ΑΒ apotomen esse.

Quoniam enim AΔ prima apotome eſt, ſit ipſi congruens ΔH: ergo [per 1. deff. tert. 10.] AH; HΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & tota AH longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AΓ, & præterea AH plus poteſt quam HΔ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: ſi igitur quartæ parti quadrati, quod fit ex ΔH, æquale parallelogrammum ad AH applicetur, deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividet. ſecetur ΔH bifariam in E, & quadrato ex EH æquale parallelogrammum ad AH applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſc. continetur ſub AZ, ZH: commenſurabilis igitur eſt AZ ipſi ZH longitudine. & per E, Z, H puncta ipſi AΓ parallelæ ducantur EΘ, ZI, HK. & quoniam AZ ipſi ZH longitudine eſt commenſurabilis, erit [per 16. 10.] & AH utrique ipſarum AZ, ZH commenſurabilis longitudine. ſed AH commenſurabilis eſt ipſi AΓ: utraque igitur AZ, ZH [per 12. 10.] ipſi AΓ longitudine eſt commenſurabilis. atque eſt AΓ rationalis: ergo & rationalis utraque AZ, ZH; ac propterea [per 20. 10.] utrumque parallelogrammorum AI, ZK eſt rationale. & quoniam ΔE ipſi EH longitudine eſt commenſurabilis, erit & ΔH utrique ΔE, EH commenſurabilis longitudine. eſtque rationalis ΔH, & ipſi AΓ longitudine incommenſurabilis: ergo & utraque ΔE, EH rationalis eſt, & incommenſurabilis ipſi AΓ longitudine; & ob id [per 22. 10.] utrumque parallelogrammorum ΔΘ, EK medium eſt. ponatur [per 14. 2.] ipſi quidem AI parallelogrammo æquale quadratum ΛM: parallelogrammo autem ZK æquale quadratum auferatur NΞ, communem cum ipſo angulum ΛOM habens, ſcilicet NΞ: ergo [per 26. 6.] quadrata ΛM NΞ circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter OP, & figura deſcribatur. itaque quoniam rectangulum ſub AZ, ZH eſt æquale, quadrato ex EH erit [per 17. 6.] ut AZ ad EH ita EH ad ZH. ſed [per 1. 6.] ut AZ ad EH ita eſt parallelogrammum AI ad ipſum EK, & ut EH ad ZH ita parallelogrammum EK ad ipſum ZK: inter parallelogramma igitur AI, ZK medium proportionale eſt EK. eſt autem & inter quadrata ΛM, NΞ medium proportionale MN, ut ſuperius [ad lem. 55. 10.] oſtenſum eſt; parallelogrammumque AI [per conſtr.] eſt æquale quadrato ΛM, & parallelogrammum ZK quadrato NΞ æquale: ergo & parallelogrammum MN eſt æquale ipſi EK. ſed parallelogrammum quidem EK [per 37. 1.] eſt æquale parallelogrammo ΔΘ, parallelogrammum vero MN [per 43. 1.] ipſi ΛΞ: parallelogrammum igitur ΔK eſt æquale gnomoni ΥΦX & quadrato NΞ. eſt autem [per conſtr.] & parallelogrammum AK quadratis ΛM, NΞ æquale: ergo & reliquum AB eſt æquale quadrato ΣT. at quadratum ΣT eſt id quod fit ex ΛN: quadratum igitur ex ΛN eſt æquale parallelogrammo AB; ideoque recta linea ΛN ipſum AB poteſt.





Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστι πρώτη ἡ ΑΔ, ἔστω αὐτῇ συμμέτρως ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ὅλη ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, καὶ ἡ ΑΗ τοῦ ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραλληλόγραμμον παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖ τῇ ΖΗ. καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει· καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΓ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΖΗ· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ ῥητόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρον τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστί. κείσθω δὴ τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ, τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΖΚ, οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, καὶ ἔστι τὸ ΑΙ τῷ ΛΜ τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστί. ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ τῷ ΔΘ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΜΝ τῷ ΛΞ· τὸ ἄρα ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τὸ δὲ ΣΤ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ ἐστὶ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΝ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ.

λέγω δὴ ὅτι ἡ ΛΝ ἀποτομή ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΛΜ, ΝΞ· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΛΜ, ΝΞ ῥητόν ἐστι, τουτέστι τὸ ἀπὸ ἑκατέρου τῶν ΛΟ, ΟΝ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητή ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΔΘ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΛΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΛΞ μέσον ἐστί, τὸ δὲ ΝΞ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΝ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΟ τῇ ΟΝ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΛΟ ΟΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΝ. καὶ δυνατὸν τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

dico ΛΝ apotomen eſſe. quoniam enim rationale eſt utrumque parallelogrammorum ΑΙ, ΖΚ, & ſunt æqualia quadratis ΛΜ, ΝΞ; erit & utrumque ΛΜ, ΝΞ rationale, hoc eſt utrumque ipſorum quæ fiunt ex ΛΟ, ΟΝ: & utraque igitur ΛΟ, ΟΝ rationalis eſt. rurſus, quoniam parallelogrammum ΔΘ eſt medium, atque eſt æquale ipſi ΛΞ; erit & ΛΞ medium. cum igitur ΛΞ quidem medium ſit, ΝΞ vero rationale, incommenſurabile eſt ΛΞ ipſi ΝΞ; utque ΛΞ ad ΝΞ ita eſt [per 1. 6.] recta linea ΛΟ ad ΟΝ: ergo [per 10.10.] ΛΟ ipſi ΟΝ longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt ambæ rationales; quare ΛΟ, ΟΝ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: idcirco [per 74. 10.] ΛΝ eſt apotome. & poteſt ſpatium ΑΒ: quæ igitur poteſt ſpatium ΑΒ eſt apotome.

Ergo ſi ſpatium contineatur ſub rationali & apotoma prima, recta linea ſpatium potens apotome eſt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛγ'.

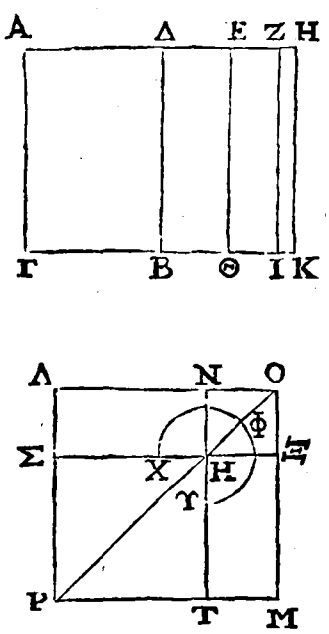
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

PROP. XCIII. THEOR.

Si ſpatium contineatur ſub rationali & apotoma ſecunda, recta linea ſpatium potens mediæ eſt apotome prima.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τὴν ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

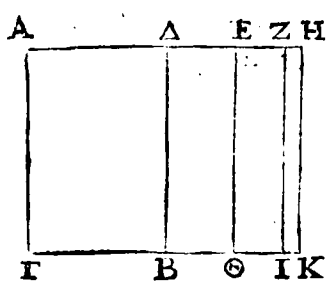
Ἐστω γὰρ τῇ ΑΔ συναρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ συναρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΑΗ ὅλη τῆς συναρμοζούσης τὴν ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τὴν ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῶν τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΘΚ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστι ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει· καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ,

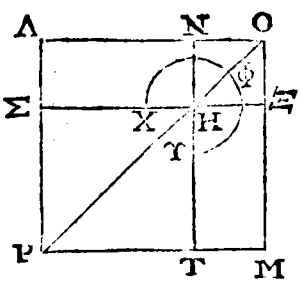


Spatium enim ΑΒ contineatur ſub rationali ΑΓ & apotoma ſecunda ΑΔ: dico rectam lineam quæ ſpatium ΑΒ poteſt eſſe mediæ apotomen primam.

Sit enim ipſi ΑΔ congruens ΔΗ; ergo [per 2. deff. tert. 10.] ΑΗ, ΗΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & congruens ΔΗ commenſurabilis eſt expoſitæ rationali ΑΓ, totaque ΑΗ plus poteſt quam ΗΔ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: quoniam igitur ΑΗ plus poteſt quam ΗΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, ſi quartæ parti quadrati ipſius ΗΔ æquale parallelogrammum ad ΑΗ applicetur, deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes commenſurabiles ipſam dividet. Itaque ſecetur ΔΗ bifariam in Ε; & quadrato ipſius ΕΗ æquale parallelogrammum ad ΑΗ applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſc. continetur ſub ΑΖ, ΖΗ: ergo commenſurabilis eſt ΑΖ ipſi ΖΗ longitudine. & per puncta Ε, Ζ, Η ipſi ΑΓ parallelæ ducantur ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. quoniam igitur ΑΖ ipſi ΖΗ longitudine eſt commenſurabilis, erit [per 16. 10.] ΑΗ utrique ipſarum ΑΖ, ΖΗ commenſurabilis longitudine. rationalis autem eſt ΑΗ, & ipſi ΑΓ longitudine incommenſurabilis: ergo & utraque ΑΖ, ΖΗ eſt rationalis, ipſique ΑΓ incommenſurabilis longitudine; & ob id [per 22.10.] utrumque parallelogrammorum ΑΙ,

Z K medium eſt. rurſus, quoniam Δ E commenſurabilis eſt ipſi E H, erit & Δ H utrique Δ E, E H commenſurabilis. ſed Δ H commenſurabilis eſt ipſi A Γ longitudine: ergo & utraque Δ E, E H rationalis eſt, & ipſi A Γ longitudine commenſurabilis; ac propterea utrumque parallelogrammorum Δ Θ, E K eſt rationale. conſtituatur igitur [per 14. 2.] parallelogrammo quidem A I æquale quadratum Λ M; parallelogrammo autem Z K æquale quadratum auferatur N Ξ, communem cum ipſo Λ M angulum Λ O M habens: ergo [per 26. 6.] circa eandem diametrum ſunt quadrata Λ M, N Ξ. ſit ipſorum diameter O P, & figura deſcribatur. cum igitur parallelogramma A I, Z K media ſint, & ſibi ipſis commenſurabilia, & æqualia quadratis ex Λ O, O N, erunt & quadrata ex Λ O, O N media: ergo rectæ lineæ Λ O, O N mediæ ſunt, potentia commenſurabiles. & quoniam rectangulum ſub A Z, Z H eſt æquale quadrato ex E H, erit [per 17. 6.] ut A Z ad E H ita E H ad H Z; ſed [per 1. 6.] ut A Z ad E H ita eſt parallelogrammum A I ad ipſum E K. ut autem E H ad H Z ita parallelogrammum E K ad Z K: inter parallelogramma igitur A I, Z K medium proportionale eſt E K. eſt autem [per lem. 55. 10.] & inter quadrata Λ M, N Ξ medium proportionale M N, & parallelogrammum A I quidem eſt [per conſtr.] æquale quadrato Λ M; parallelogrammum vero Z K æquale quadrato N Ξ: ergo M N ipſi E K eſt æquale. ſed [per 37. 1.] Δ Θ eſt æquale ipſi E K, & [per 43. 1.] Λ Ξ ipſi M N: totum igitur Δ K gnomoni Υ Φ X & quadrato N Ξ æquale erit. itaque quoniam totum A K æquale eſt quadratis Λ M, N Ξ, quorum Δ K eſt æquale gnomoni Υ Φ X & quadrato N Ξ; erit reliquum A B æquale Σ T, hoc eſt ei quod fit ex Λ N: quadratum igitur ex Λ N eſt æquale ſpatio A B; ideoque recta linea Λ N ſpatium A B poteſt. dico Λ N mediæ apotomen eſſe primam. quoniam enim rationale eſt E K, & æquale ipſi M N, hoc eſt ipſi Λ Ξ; erit & Λ Ξ rationale, illud ſc. quod ſub Λ O, O N continetur. medium autem oſtenſum eſt N Ξ: quare Λ Ξ eſt incommenſurabile ipſi N Ξ: & [per 1. 6.] ut Λ Ξ ad N Ξ ita Λ O ad O N: ergo Λ O, O N longitudine ſunt incommenſurabiles: ac propterea Λ O, O N mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles quæ rationale continent: quare [per 75. 10.] Λ N eſt mediæ apotome prima, & poteſt ſpatium A B: recta igitur linea ſpatium A B potens eſt mediæ apotome prima. quod erat demonſtrandum.





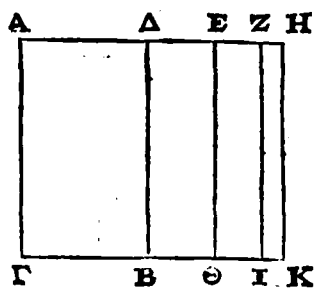
Ζ Κ μέσον ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ Δ Ε τῇ Ε Η, καὶ ἡ Δ Η ἄρα ἑκατέρα τῶν Δ Ε, Ε Η σύμμετρός ἐστιν. ἀλλ' ἡ Δ Η σύμμετρός ἐστι τῇ Α Γ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν Δ Ε, Ε Η, καὶ σύμμετρος τῇ Α Γ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν Δ Θ, Ε Κ ῥητόν ἐστι. συνεστάτω ἴσον τῷ μὲν Α Ι ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ Λ Μ, τῷ δὲ Ζ Κ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ Ν Ξ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τὴν Λ Μ, τὴν ὑπὸ Λ Ο Μ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ Λ Μ, Ν Ξ παραλληλόγραμμα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ Ο Ρ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὰ Α Ι, Ζ Κ μέσα ἐστὶ, καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν Λ Ο, Ο Ν· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν Λ Ο, Ο Ν ἄρα μέσα ἐστί· καὶ αἱ Λ Ο, Ο Ν ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α Ζ, Ζ Η ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Ε Η, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α Ζ πρὸς τὴν Ε Η οὕτως ἡ Ε Η πρὸς τὴν Ζ Η· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Α Ζ πρὸς τὴν Ε Η οὕτως τὸ Α Ι πρὸς τὸ Ε Κ. ὡς δὲ ἡ Ε Η πρὸς τὴν Η Ζ, οὕτως ἐστὶ τὸ Ε Κ πρὸς τὸ Ζ Κ· καὶ ἄρα Α Ι, Ζ Κ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ Ε Κ. ἔστι δὲ καὶ τῶν Λ Μ, Ν Ξ παραλληλογράμμων μέσον ἀνάλογον τὸ Μ Ν, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν Α Ι τῷ Λ Μ, τὸ δὲ Ζ Κ τῷ Ν Ξ· καὶ τὸ Μ Ν ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ Ε Κ. ἀλλὰ τῷ μὲν Ε Κ ἴσον ἐστὶ τὸ Δ Θ, τῷ δὲ Μ Ν ἴσον τὸ Λ Ξ· ὅλον ἄρα τὸ Δ Κ ἴσον ἐστὶ τῷ Υ Φ Χ γνώμονι, καὶ τῷ Ν Ξ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ Α Κ ἴσον ἐστὶ τοῖς Λ Μ, Ν Ξ, ὧν τὸ Δ Κ ἴσον ἐστὶ τῷ Υ Φ Χ γνώμονι, καὶ τῷ Ν Ξ· λοιπὸν ἄρα τὸ Α Β ἴσον ἐστὶ τῷ Σ Τ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς Λ Ν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Λ Ν ἴσον ἐστὶ τῷ Α Β χωρίῳ· ἡ Λ Ν ἄρα δύναται τὸ Α Β χωρίον. λέγω δὴ ὅτι ἡ Λ Ν μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ Ε Κ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ Μ Ν, τουτέστι τῷ Λ Ξ· ῥητὸν ἄρα τὸ Λ Ξ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν Λ Ο, Ο Ν. μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ Ν Ξ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Λ Ξ τῷ Ν Ξ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Λ Ξ πρὸς τὸ Ν Ξ οὕτως ἐστὶν ἡ Λ Ο πρὸς τὴν Ο Ν· αἱ Λ Ο, Ο Ν ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει· αἱ ἄρα Λ Ο, Ο Ν μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ Λ Ν ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη, ἡ δύναται τὸ Α Β χωρίον· ἡ ἄρα τὸ Α Β χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

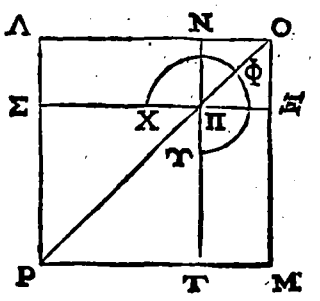
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛϡ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ ΑΔ συμμέτρος ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς συναμφοτέρου τῆς ΔΗ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ· σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΑΖ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΕΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, πρὸς τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ· πρὸς τὴν αὐτὴν ἄρα συμμετρόν ἐστι τὸ ΛΜ, ΝΞ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς





PROP. XCIV. THEOR.

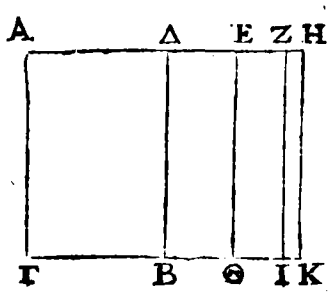
Si ſpatium continetur ſub rationali & apotome tertia, recta linea ſpatium potens mediæ eſt apotome ſecunda.

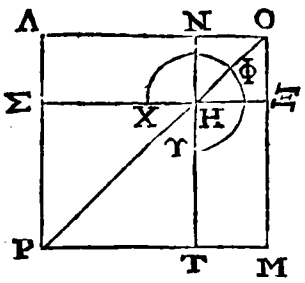
SPatium enim ΑΒ contineatur ſub rationali ΑΓ & apotoma tertia ΑΔ: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium ΑΒ, mediæ eſſe apotomen ſecundam.

Sit enim ipſi ΑΔ congruens ΔΗ: ergo [per 3. deff. tert. 10.] ΑΗ, ΗΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & neutra ipſarum ΑΗ, ΗΔ longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali ΑΓ, tota autem ΑΗ plus poteſt quam congruens ΔΗ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. quoniam ideo recta ΑΗ plus poteſt quam ΔΗ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: ſi quartæ parti quadrati ipſius ΔΗ æquale parallelogrammum ad ΑΗ applicetur deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes commenſurabiles ipſam dividet. Itaque ſecetur ΔΗ bifariam in Ε, & quadrato ipſius ΕΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figura quadrata, ſitque quod continetur ſub ΑΖ, ΖΗ; & per puncta Ε, Ζ, Η ipſi ΑΓ parallelæ ducantur ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ: ergo ΑΖ, ΖΗ commenſurabiles ſunt; atque ob id parallelogrammum ΑΙ parallelogrammo ΖΚ eſt commenſurabile. & quoniam ΑΖ, ΖΗ commenſurabiles ſunt longitudine, erit [per 16. 10.] & ΑΗ utrique ipſarum ΑΖ, ΖΗ longitudine commenſurabilis. eſt autem rationalis ΑΗ, & ipſi ΑΓ incommenſurabilis longitudine: & utraque igitur ΑΖ, ΖΗ rationalis eſt & ipſi ΑΓ longitudine incommenſurabilis; ac propterea [per 22. 10.] utrumque parallelogrammorum ΑΙ, ΖΚ eſt medium. rurſus quoniam ΔΕ commenſurabilis eſt ipſi ΕΗ longitudine, erit & ΔΗ utrique ΔΕ, ΕΗ commenſurabilis. ſed ΔΗ rationalis eſt, & ipſi ΑΓ incommenſurabilis longitudine: rationalis igitur eſt & utraque ΔΕ, ΕΗ, & ipſi ΑΓ longitudine incommenſurabilis: ergo [per 22. 10.] utrumque parallelogrammorum ΔΘ, ΕΚ medium eſt. quod cum ΑΗ, ΗΔ potentia ſolum commenſurabiles ſint, ΑΗ ipſi ΗΔ longitudine erit incommenſurabilis. ſed ΑΗ commenſurabilis eſt ipſi ΑΖ longitudine, & ΔΗ ipſi ΗΕ: eſt igitur [per 13. 10.] ΑΖ ipſi ΕΗ longitudine incommenſurabilis. ut autem ΑΖ ad ΕΗ ita [per 1. 6.] parallelogrammum ΑΙ ad ΕΚ parallelogrammum: ergo incommenſurabilis eſt ΑΙ ipſi ΕΚ. conſtituatur [per 14. 2.] ipſi quidem ΑΙ æquale quadratum ΛΜ; ipſi vero ΖΚ æquale auferatur ΝΞ, angulum habens eundem quem ΛΜ: ergo [per 26. 6.] quadrata ΛΜ, ΝΞ circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter ΟΡ, & figura deſcribatur. quoniam igitur rectangulum ſub ΑΖ, ΖΗ eſt æquale quadrato ex ΕΗ, erit [per 17. 6.] ut ΑΖ

ad

ad EH ita EH ad ZH. ut autem AZ ad EH ita [per 1. 6.] parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum; & ut EH ad HZ ita EK ad ZK: ergo & ut AI ad EK ita EK ad ZK. inter parallelogramma igitur AI, ZK medium proportionale eſt EK. eſt autem & inter quadrata ΛM, NΞ medium proportionale MN; & [per conſtr.] parallelogrammum AI quidem æquale eſt quadrato ΛM, ZK vero ipſi NΞ: ergo & EK eſt æquale MN. ſed [per 43. 1.] MN æquale eſt ΛΞ, & [per 37. 1.] EK ipſi ΔΘ: totum igitur ΔK gnomoni TΦX & quadrato NΞ eſt æquale. eſt autem & parallelogrammum AK æquale quadratis ΛM, NΞ: ergo reliquum AB eſt æquale ipſi ΣT, hoc eſt quadrato ex ΛN: & ob id recta linea ΛN ipſum AB ſpatium poteſt. dico ΛN mediæ apotomen eſſe ſecundam. quoniam enim parallelogramma AI, ZK oſtenſa ſunt media, & ſunt æqualia quadratis ex ΛO, ON, erit & utrumque quadratorum ex ΛO, ON medium; igitur utraque recta linea ΛO, ON media eſt. & quoniam commenſurabile eſt AI ipſi ZK, erit & quadratum ex ΛO quadrato ex ON commenſurabile. rurſus, quoniam oſtenſum eſt AI incommenſurabile ipſi EK, & ΛM ipſi MN incommenſurabile erit, hoc eſt quadratum ex ΛO rectangulo ſub ΛO, ON: quare & recta linea ΛO longitudine incommenſurabilis eſt ipſi ON; ſunt igitur ΛO, ON mediæ potentia ſolum commenſurabiles. dico eas etiam medium continere. quoniam enim EK demonſtratum eſt medium, atque eſt æquale rectangulo ſub ΛO, ON; erit & rectangulum ſub ΛO, ON medium. ergo ΛO, ON mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent; ac propterea [per 76. 10.] ΛN eſt mediæ apotome ſecunda; & poteſt ſpatium AB: recta igitur linea ſpatium AB potens eſt mediæ apotome ſecunda. quod erat demonſtrandum.





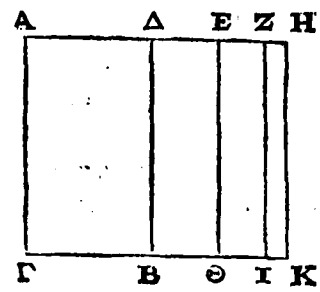
Prop. XCV. Theor.

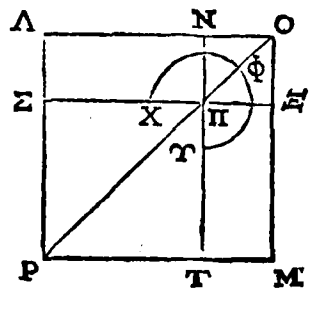
Si ſpatium contineatur ſub rationali & apotoma quarta, recta linea ſpatium potens minor eſt.

SPatium enim AB contineatur ſub rationali AΓ & apotoma quarta AΔ: dico rectam lineam, quæ ſpatium AB poteſt, minorem eſſe.

Sit enim ipſi AΔ congruens ΔH: ergo [per 4. deff. tert. 10.] AH, HΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & AH longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AΓ, totaque AH plus poteſt quam HΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. quoniam igitur AH plus poteſt quam HΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſi quartæ parti quadrati ex ΔH æquale parallelogrammum ad AH applicetur, deficiat autem figura quadrata, in partes ſibi commenſurabiles longitudine dividet rectam lineam, quæ ſpatium AB poteſt. & quadratum quidem ex AH plus poteſt quam quadratum ex HΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: & AH, HΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. ergo AH, HΔ ſecundum unum punctum H in rationales longitudine commenſurabiles dividunt. & ſi quartæ parti quadrati ex ΔH æquale parallelogrammum ad AH applicetur, deficiat autem figura quadrata, in partes ſibi commenſurabiles longitudine dividet rectam lineam, quæ ſpatium AB poteſt. ſed quadratum

ϐληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτλῳ διελεῖ. πλήσθω ὃν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, ℂ τῷ ἀπὸ τ ΕΗ ἴσον ϖαρὰ τλῳ ΑΗ ϖαραϐεϐλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. ἤχθωσαν ὃν ἀφ' ἑκατέρων τῶν Ε, Ζ, Η ϖαράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. ἐπεὶ ὃν ῥητή ἐστιν ἡ ΑΗ, καὶ σύμμετρον τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΗ τῇ ΑΓ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα ℂ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. συνεστάτω ὃν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήθω τὸ ΝΞ, ϖερὶ τλῳ αὐτλῳ γωνίαν ὢν τῷ ΛΜ, τλῳ ὑπὸ ΛΟΜ· ϖερὶ τλῳ αὐτλῳ ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ ὃν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ ϖρὸς τλῳ ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ ϖρὸς τλῳ ΗΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ ϖρὸς τλῳ ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ ϖρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ ϖρὸς τλῳ ΖΗ οὕτως τὸ ΕΚ ϖρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ, τὸ δὲ ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΤΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἐπεὶ ὃν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ ταῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΤΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΝ τετραγώνῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δυνατὴ τὸ ΑΒ χωρίον. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ, ᾧ ἔστιν ἴσον ταῖς ἀπὸ τ ΛΟ, ΟΝ τετραγώνοις· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τ ἀπὸ τ ΛΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΚ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΔΚ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τ ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ΛΝ ἄρα ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων, καὶ δυνατὴ τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ





cetur deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes incommenſurabiles ipſam dividet. itaque ſecetur ΔΗ bifariam in Ε, & quadrato ex ΕΗ æquale ad ipſam ΑΗ applicetur deficiens figura quadrata, quod ſc. continetur ſub ΑΖ, ΖΗ: ergo ΑΖ ipſi ΖΗ longitudine eſt incommenſurabilis. ducantur per puncta Ε, Ζ, Η ipſis ΑΓ, ΒΔ parallelæ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. quoniam igitur ΑΗ rationalis eſt, & ipſi ΑΓ longitudine commenſurabilis; erit [per 20. 10.] totum parallelogrammum ΑΚ rationale. rurſus, quoniam incommenſurabilis eſt ΔΗ ipſi ΑΓ longitudine, & ſunt ambæ rationales; erit [per 22. 10.] parallelogrammum ΔΚ medium. quod cum ΑΖ ipſi ΖΗ longitudine ſit incommenſurabilis, erit [per 1. 6.] & parallelogrammum ΑΙ incommenſurabile ΖΚ. conſtituatur parallelogrammo quidem ΑΙ æquale quadratum ΛΜ; parallelogrammo autem ΖΚ æquale quadratum ΝΞ auferatur, angulum habens eundem ΛΟΜ quem ΛΜ: quadrata igitur ΛΜ, ΝΞ [per 26. 6.] circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter ΟΡ, & figura deſcribatur. itaque quoniam rectangulum ſub ΑΖ, ΖΗ eſt æquale quadrato ex ΕΗ, ut ΑΖ ad ΕΗ [per 17. 6.] ita erit ΕΗ ad ΗΖ. ſed [per 1. 6.] ut ΑΖ quidem ad ΕΗ ita eſt parallelogrammum ΑΙ ad ipſum ΕΚ: ut autem ΕΗ ad ΖΗ ita ΕΚ ad ΖΚ: inter parallelogramma igitur ΑΙ, ΖΚ medium proportionale eſt ΕΚ. eſt autem & inter quadrata ΛΜ, ΝΞ medium proportionale ΜΝ, atque [per conſtr.] eſt parallelogrammum ΑΙ æquale quadrato ΛΜ, & parallelogrammum ΖΚ æquale eſt ipſi ΝΞ: eſt igitur ΕΚ æquale ipſi ΜΝ. ſed [per 37. 1.] ΕΚ quidem eſt æquale parallelogrammo ΔΘ; ΜΝ vero [per 43. 1.] ipſi ΛΞ: totum igitur parallelogrammum gnomoni ΤΦΧ & quadrato ΝΞ eſt æquale. & quoniam totum ΑΚ æquale eſt quadratis ΛΜ, ΝΞ, quorum ΔΚ eſt æquale gnomoni ΤΦΧ & ΝΞ quadrato; erit reliquum ΑΒ æquale quadrato ΣΤ, hoc eſt quadrato ex ΛΝ: ergo ΛΝ ſpatium ΑΒ poteſt. dico ΛΝ irrationalem eſſe quæ minor appellatur. quoniam enim parallelogrammum ΑΚ rationale eſt, & æquale quadratis ipſarum ΛΟ, ΟΝ; erit & compoſitum ex quadratis ipſarum ΛΟ, ΟΝ rationale. rurſus, quoniam parallelogrammum ΔΚ medium eſt, atque eſt æquale ei quod bis continetur ſub ΛΟ, ΟΝ, erit & quod bis ſub ΛΟ, ΟΝ continetur medium. & quoniam oſtenſum eſt ΑΙ incommenſurabile ipſi ΖΚ: erit & quadratum ex ΛΟ incommenſurabile quadrato ex ΟΝ; ac propterea ΛΟ, ΟΝ potentia ſunt incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum ex ipſarum quadratis rationale, quod autem bis ſub ipſis continetur medium: quare [per 77. 10.] ΛΝ irrationalis eſt, quæ minor appellatur. & poteſt ſpatium ΑΒ; recta igitur linea

ſpatium AB potens minor eſt. quod erat demonſtrandum.

AB χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XCVI. THEOR.

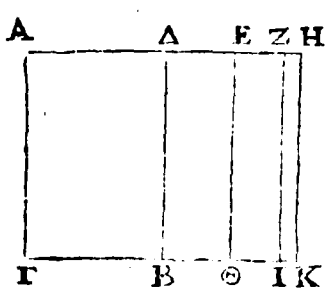
Si ſpatium contineatur ſub rationali & apotoma quinta, recta linea ſpatium potens eſt quæ cum rationali medium totum efficit.

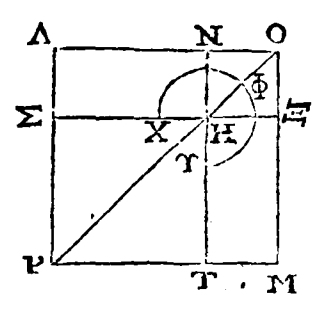
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.

SPatium enim AB contineatur ſub rationali AΓ & apotoma quinta AΔ: dico rectam lineam quæ ſpatium AB poteſt eſſe eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit enim ipſi AΔ congruens ΔH: ergo [per 5. deff. tert. 10.] AH, HΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & congruens ΔH longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AF; totaque AH plus poteſt quam ΔH quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: ſi igitur quartæ parti quadrati ex ΔH æquale parallelogrammum ad AH applicetur deficiens figura quadrata, [per 19. 10.] in partes incommenſurabiles ipſam dividet. Itaque ſecetur ΔH bifariam in puncto E, & quadrato ex EH æquale ad ipſam AH applicetur deficiens figura quadrata, quod ſc. continetur ſub AZ, ZH: ergo AZ incommenſurabilis eſt ipſi ZH longitudine. ducantur per puncta E, Z, H ipſi AΓ parallelæ EΘ, ZI, HK. & quoniam AH incommenſurabilis eſt ipſi AΓ longitudine, & ſunt ambæ rationales; erit [per 22.10.] parallelogrammum AK medium. rurſus, quoniam rationalis eſt ΔH, & ipſi AΓ longitudine commenſurabilis; [per 20.10.] parallelogrammum ΔK rationale erit. conſtituatur igitur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum ΛM; ipſi vero ZK æquale quadratum auferatur NΞ, angulum habens eundem quem ΛM, videlicet ΛOM: ergo [per 26. 6.] quadrata ΛM, NΞ circa eandem ſunt diametrum. ſit diameter ipſorum OP, & figura deſcribatur. ſimiliter oſtendemus rectam lineam ΛN ſpatium AB poſſe. dico ΛN eſſe eam, quæ cum rationali medium totum efficit. quoniam enim oſtendimus parallelogrammum AK medium eſſe; atque eſt æquale quadratis ipſarum ΛO, ON; erit & compoſitum ex quadratis ipſarum ΛO, ON medium. rurſus, quoniam ΔK rationale eſt, & æquale ei quod bis continetur ſub ΛO, ON; erit & quod bis ſub ΛO, ON continetur rationale. & quoniam AI eſt incommenſurabile ipſi ZK, incommenſurabile igitur eſt quadratum ex ΛO quadrato ex ON; ideoque ΛO, ON potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem ſub ipſis bis





Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AΓ καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς AΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐστω γὰρ τῇ AΔ συμμετρίζουσα ἡ ΔH· αἱ ἄρα AH, HΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἐπεὶ ἡ συμμετρίζουσα ἡ ΔH σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ AΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς συμμετρίζούσης τῆς ΔH μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω δὴ ἡ ΔH δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, ᾧ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν E, Z, H τῇ AΓ παράλληλοι αἱ EΘ, ZI, HK. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AH τῇ AΓ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ AK. πάλιν, ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ ΔH, καὶ σύμμετρος τῇ AΓ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΔK. συνεστάτω ἐν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ ΛM, τῷ δὲ ZK ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω πρὸς τὴν αὐτὴν τὸν τῷ ΛM γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΛOM, τὸ NΞ· πρὸς τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛM, NΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΛN δύναται τὸ AB. λέγω ὅτι ἡ ΛN ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ AK, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛO, ON· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛO, ON μέσον ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔK, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛO, ON· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΛO, ON ῥητόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ AI τῷ ZK, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τῷ ἀπὸ τῆς ON· αἱ ΛO, ON ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον· τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν

αὐτῶν ῥητόν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δυνατὴ τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ τὸ ΑΒ ἄρα χωρίον δυναμένη, ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

continetur rationale: ergo [per 78.10.] reliqua ΛΝ irrationalis eſt, quæ vocatur cum rationali medium totum efficiens, & poteſt ſpatium ΑΒ: recta igitur linea ſpatium ΑΒ potens eſt quæ cum rationali medium totum efficit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

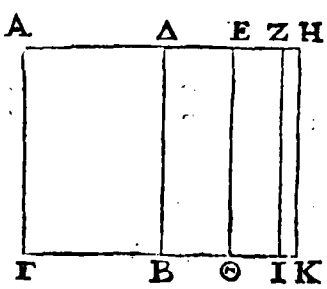
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.

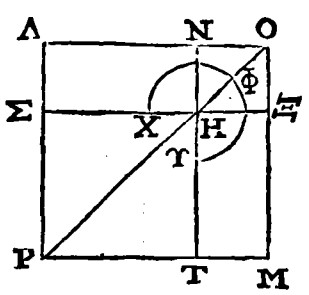
PROP. XCVII. THEOR.

Si ſpatium contineatur ſub rationali & apotoma ſexta, recta linea ſpatium potens eſt quæ cum medio medium totum efficit.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς ἕκτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐστω γὰρ τῇ ΑΔ συμμέτρους ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς συμμετρουμένης τῆς ΔΗ μεῖζον δυνατὴ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δυνατὴ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβάλλωμεν ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΖΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΑΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΚΔ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΚΔ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω πρὸς τὴν αὐτὴν τὴν τῷ ΛΜ γωνίαν τὸ ΝΞ· πρὸς τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι ἡ ΛΝ δυνατὴ τὸ ΑΒ χωρίον. λέγω ὅτι ἡ ΛΝ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ, ᾧ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ

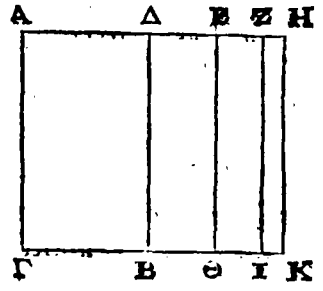


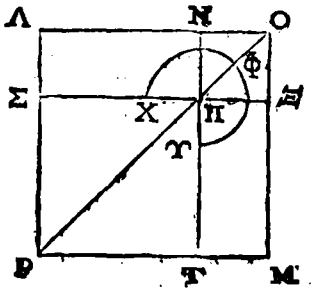


SPatium enim ΑΒ contineatur ſub rationali ΑΓ & apotoma ſexta ΑΔ: dico rectam lineam, quæ ſpatium ΑΒ poteſt, eſſe eam quæ cum medio medium totum efficit.

Sit enim ipſi ΑΔ congruens ΔΗ: ergo [per 6.deff.tert.10.] ΑΗ, ΗΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & neutra ipſarum ΑΗ, ΗΔ commenſurabilis eſt longitudine expoſitæ rationali ΑΓ, totaque ΑΗ plus poteſt quam congruens ΔΗ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. itaque quoniam ΑΗ plus poteſt quam ΗΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommmenſurabilis: ſi quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale ad rectam lineam ΑΗ applicetur deficiens figura quadrata, [per 19.10.] in partes incommenſurabiles ipſam dividet. itaque ſecetur ΔΗ bifariam in Ε, & quadrato ex ΕΗ æquale parallelogrammum ad ΑΗ applicetur deficiens figura quadrata, nempe quod continetur ſub ΑΖ, ΖΗ: incommenſurabilis igitur eſt ΑΖ ipſi ΖΗ longitudine. ut autem ΑΖ ad ΖΗ ita eſt [per 1.6.] ΑΙ ad ipſum ΖΚ: ergo [per 10.10.] ΑΙ ipſi ΖΚ eſt incommenſurabile. & quoniam ΑΗ, ΑΓ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, erit [per 22.10.] ΑΚ medium. rurſus, quoniam ΑΓ, ΔΗ rationales ſunt & incommenſurabiles longitudine, medium erit & ΔΚ. quod cum ΑΗ, ΗΔ potentia ſolum commenſurabiles ſint, erit ΑΗ ipſi ΗΔ longitudine incommenſurabilis. ſed ut ΑΗ ad ΗΔ ita eſt [per 1.6.] ΑΚ ad ΚΔ: incommenſurabile igitur [per 10.10.] eſt ΑΚ ipſi ΚΔ. itaque conſtituatur [per 14.2.] parallelogrammo ΑΙ æquale quadratum ΛΜ; parallelogrammo autem ΖΚ æquale auferatur quadratum ΝΞ, angulum habens eundem quem ΛΜ: ergo [per 26.6.] quadrata ΛΜ, ΝΞ circa eandem ſunt diametrum. ſit eorum diameter ΟΡ, & figura deſcribatur. ſimiliter ut ſupra oſtendemus rectam lineam ΛΝ poſſe ſpatium ΑΒ. dico ΛΝ eſſe eam quæ cum medio medium totum efficit. quoniam enim ΑΚ oſtenſum eſt medium, atque eſt æquale quadratis ipſarum ΛΟ, ΟΝ, erit & compoſitum ex quadra-

tis ipſarum ΛO, ON medium. rurſus, quoniam ΔK oſtenſum eſt medium, & eſt æquale ei, quod bis continetur ſub ΛO, ON, & quod bis ſub ΛO, ON continetur medium erit. & quoniam oſtenſum eſt AK incommenſurabile ipſi KΔ: ergo & quadrata ex ΛO, ON incommenſurabilia ſunt ei quod bis ſub ΛO, ON continetur. & quoniam incommenſurabile eſt AI ipſi ZK, erit & quadratum ex ΛO quadrato ex ON incommenſurabile: ergo ΛO, ON potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur medium, & adhuc quadrata ipſarum incommenſurabilia ei quod bis ſub ipſis continetur: ergo [per 79. 10.] AN irrationalis eſt, quæ vocatur cum medio medium totum efficiens. & poteſt AB ſpatium: recta igitur linea ſpatium AB potens eſt quæ cum medio medium totum efficit. quod erat demonſtrandum.





τ ἀπὸ τ ΛO, ON μέσον ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔK, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛO, ON· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΛO, ON μέσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ AK τῷ ΔK, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛO, ON τετράγωνα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛO, ON. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ AI τῷ ZK, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τῷ ἀπὸ τῆς ON· αἱ ΛO, ON ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν· ἡ ἄρα ΛN ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μὴ μέσα μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δυνατὴ τὸ AB χωρίον· ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμένη μὴ μέσα μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XCVIII. Theor.

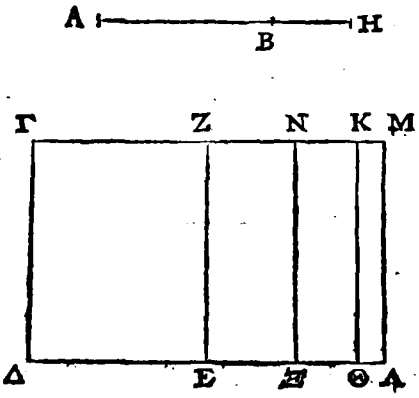
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛη'.

Quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

SIT apotome AB, rationalis autem ΓΔ, & quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΓE ad ipſam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓZ: dico ΓZ eſſe apotomen primam.

Sit enim ipſi AB congruens BH: ergo [per 74.10.] AH, HB rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & [per 45.1.] ad ipſam ΓΔ applicetur quadrato quidem ex AH æquale ΓΘ; quadrato autem ex BH æquale KΛ: totum igitur ΓΛ eſt æquale quadratis ex AH, HB. ex quibus parallelogrammum ΓE æquale eſt quadrato ex AB: ergo [per 7.2.] reliquum ZΛ ei quod bis ſub AH, HB continetur eſt æquale. ſecetur ZM bifariam in N; & per N ipſi ΓΔ parallela ducatur NΞ: utrumque igitur ipſorum ZΞ, ΛN eſt æquale ei quod ſub AH, HB continetur. & quoniam quadrata ex AH, HB rationalia ſunt, atque eſt quadratis ex AH, HB æquale parallelogrammum ΔM; erit ipſum ΔM rationale. & ad rationalem ΓΔ applicatum eſt, latitudinem faciens ΓM: ergo [per 21.10.] ΓM eſt rationalis, & ipſi ΓΔ commenſurabilis longitudine. rurſus, quoniam medium eſt quod bis continetur ſub AH, HB, eſtque ei quod bis ſub AH, HB continetur æquale



Ἔστω ἀποτομὴ ἡ AB, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τ AB ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓE, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ· λέγω ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ AB συνεχὴς ἡ BH· αἱ ἄρα AH, HB ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τ BH τὸ KΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB. ὧν τὸ ΓE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB· λοιπὸν ἄρα τὸ ZΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB. τετμήσθω ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ NΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ZΞ, ΛN ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB ῥητά ἐστι, καὶ ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB ἴσον τὸ ΔM· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔM. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓM· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τ AH, HB, καὶ ἔστι τῷ δὶς ὑπὸ τ AH, HB ἴσον

τὸ

τὸ ΑΖ· μέση ἄρα τὸ ΑΖ. καὶ ᾧ δὲ ῥητῷ τινὶ τῷ ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιεῖ τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω ὅτι καὶ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ἔστι δὲ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ. ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· [*ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ·] τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ ἔστι σύμμετρος ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

parallelogrammum ΛΖ; erit ipsum ΔΖ medium & applicatum est ad rationalem ΓΔ latitudinem faciens ΖΜ: quare [per 23.10.] ΖΜ est rationalis, ipsique ΓΔ longitudine incommensurabilis. & quoniam quadrata quidem ex ΑΗ, ΗΒ rationalia sunt; quod autem bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ medium: quadrata ex ΑΗ, ΗΒ incommensurabilia sunt ei quod bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur. sed quadratis ex ΑΗ, ΗΒ æquale est parallelogrammum ΓΛ, ei vero quod bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ΖΛ: ergo ΓΛ ipsi ΖΛ est incommensurabile. ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est [per 1.6.] recta linea ΓΜ ad ΜΖ: incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. & sunt ambæ rationales: ergo ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea [per 74.10.] ΓΖ est apotome. dico & primam esse. quoniam enim inter quadrata ex ΑΗ, ΗΒ [per lem. 55.10.] medium proportionale est quod sub ΑΗ, ΗΒ continetur, atque [per constr.] est quadrato quidem ex ΑΗ æquale parallelogrammum ΓΘ; ei vero quod sub ΑΗ, ΗΒ continetur æquale ΝΛ, & quadrato ex ΒΗ æquale ΚΛ: erit inter ipsa ΓΘ, ΚΛ medium proportionale ΝΛ: ut igitur ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. sed ut ΓΘ ad ΝΛ ita est recta linea ΓΚ ad ipsam ΝΜ. ut autem ΝΛ ad ΚΛ ita recta linea ΝΜ ad ΜΚ: [*ergo ut ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ:] & ob id [per 17.6.] rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ est æquale quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. & quoniam [ex hyp.] quadratum ex ΑΗ commensurabile est quadrato ex ΗΒ, erit & parallelogrammum ΓΘ parallelogrammo ΚΛ commensurabile. sed ut ΓΘ ad ΚΛ ita est recta linea ΓΚ ad ipsam ΚΜ; commensurabilis igitur [per 10.10.] est ΓΚ ipsi ΚΜ. itaque cum duæ rectæ lineæ inæquales sint ΓΜ, ΜΖ, & quartæ parti quadrati ex ΖΜ æquale parallelogrammum ad ipsam ΓΜ applicatum sit deficiens figura quadrata, quod scilicet sub ΓΚ, ΚΜ continetur; sitque ΓΚ commensurabilis ipsi ΚΜ: [per 18.10.] recta linea ΓΜ plus poterit quam ΜΖ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. atque est ΓΜ commensurabilis longitudine expositæ rationali ΓΔ: ergo [per 1.def.tert.10.] ΓΖ est prima apotome.

Quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟθ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.

Prop. XCIX. Theor.

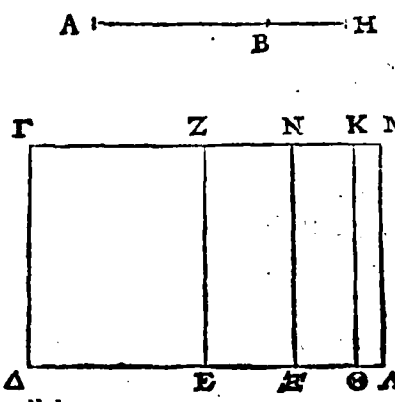
Quadratum mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα,

SIT mediæ apotome prima ΑΒ, rationalis autem ΓΔ, & quadrato ex ΑΒ æquale parallelogrammum ΓΕ ad ipsam ΓΔ applicetur, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ esse apotomen secundam.

* Uncis inclusa desunt in Cod. MS. illa tamen retinenda censemus.

Sit enim ipſi AB congruens BH: ergo [per 75. 10.] AH, HB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent. & [per 45.1.] quadrato quidem ex AH æquale parallelogrammum ΓΘ ad ΓΔ applicetur, latitudinem faciens ΓK; quadrato autem ex HB æquale KΛ ad eandem applicetur, latitudinem faciens KM: totum igitur ΓΛ eſt æquale quadratis ex AH, HB quæ media ſunt: quare & ΓΛ eſt medium. & ad rationalem ΓΔ applicatum eſt, latitudinem faciens ΓM: rationalis igitur eſt ΓM [per 23.10.] & ipſi ΓΔ longitudine incommenſurabilis. itaque quoniam ΓΛ eſt æquale quadratis ex AH, HB, ex quibus quadratum ex AB æquale eſt parallelogrammo ΓE; erit [per 7.2.] reliquum, ſc. quod bis continetur ſub AH, HB, æquale ipſi ZΛ. eſt autem quod bis ſub AH, HB continetur rationale: rationale igitur eſt & ZΛ, & ad rationalem ZE applicatum eſt latitudinem faciens ZM: quare [per 21.10.] ZM eſt rationalis & ipſi ΓΔ commenſurabilis longitudine. & quoniam quadrata quidem ex AH, HB, hoc eſt parallelogrammum ΓΛ, medium eſt; quod autem bis continetur ſub AH, HB, videlicet ZΛ, eſt rationale: erit ΓΛ incommenſurabile ipſi ZΛ. ut autem ΓΛ ad ZΛ, ita [per 1.6.] recta linea ΓM ad MZ: ergo ΓM ipſi MZ longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt ambæ rationales: ſunt igitur ΓM, MZ rationales potentia ſolum commenſurabiles: ideoque [per 74. 10.] ΓZ eſt apotome. dico & ſecundam eſſe. ſecetur enim ZM bifariam in puncto N, & per N ipſi ΓΔ parallela ducatur NΞ: alterutrum igitur parallelogrammorum ZΞ, NΛ eſt æquale ei quod continetur ſub AH, HB. & quoniam inter quadrata ex AH, HB medium proportionale eſt quod ſub AH, HB continetur, eſtque quadratum ex AH æquale parallelogrammo ΓΘ, quod autem continetur ſub AH, HB æquale parallelogrammo NΛ, & quadratum ex HB æquale ipſi KΛ; erit inter parallelogramma ΓΘ, KΛ medium proportionale NΛ: eſt igitur ut ΓΘ ad NΛ ita NΛ ad KΛ. ſed ut ΓΘ ad NΛ ita eſt [per 1. 6.] recta linea ΓK ad ipſam NM, & ut NΛ ad KΛ ita NM ad KM: ergo ut ΓK ad NM ita eſt NM ad KM: ac propterea [per 17. 6.] rectangulum ſub ΓK, KM eſt æquale quadrato ex NM; hoc eſt, quartæ parti quadrati ex ZM. & quoniam quadratum ex AH commenſurabile eſt quadrato ex HB, erit & ΓΘ parallelogrammum parallelogrammo KΛ commenſurabile, hoc eſt, recta linea ΓK commenſurabilis ipſi KM. quoniam itaque duæ rectæ lineæ inæquales ſunt ΓM, MZ, quartæ autem parti quadrati ex MZ æquale ad majorem ΓM applicatum ſit deficiens figura quadrata, quod ſc. continetur ſub ΓK, KM, & in partes commenſurabiles ipſam dividat; [per 18.10.] recta linea ΓM plus poterit quam MZ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. atq; [ex hyp.] eſt congruens ZM



Εσω γὰρ τῇ AB συναρμόζουσα ἡ BH· αἱ ἄρα AH, HB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβέβληται τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓK, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ KΛ, πλάτος ποιοῦν τὴν KM· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB μέσοις ὄσι· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓM· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον ἐστὶ τῷ ΓE· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον ἐστὶ τῷ ZΛ. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ZΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ZM· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZM, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ἀπὸ τῶν AH, HB, τουτέστι τὸ ΓΛ, μέσον ἐστί, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB, τουτέστι τὸ ZΛ, ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ZΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ZΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓM πρὸς τὴν MZ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM τῇ MZ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓM, MZ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓZ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. τετμήσθω γὰρ ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ NΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ZΞ, NΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH, HB, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς AH τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AH, HB τῷ NΛ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῷ KΛ· καὶ τῶν ΓΘ, KΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ NΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ NΛ οὕτως τὸ NΛ πρὸς τὸ KΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ NΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓK πρὸς τὴν NM, ὡς δὲ τὸ NΛ πρὸς τὸ KΛ οὕτως ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν KM· ὡς ἄρα ἡ ΓK πρὸς τὴν NM οὕτως ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν KM· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓK, KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς NM, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τὸ ἀπὸ τῆς ZM. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τὰ AH τῷ ἀπὸ τῆς HB, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ KΛ, τουτέστιν ἡ ΓK τῇ KM. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθείαις ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓM, MZ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τὸ ἀπὸ τῆς MZ ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΓM παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓK, KM, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓM τῆς MZ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ συναρμόζουσα ἡ ZM σύμμετρος

τῷ ὑπὸ συμμέτρου ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

expositæ rationali ΓΔ commensurabilis: quare [per 2. deff. tert. 10.] ΓΖ est apotome secunda.

Quadratum igitur mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

PROP. C. THEOR.

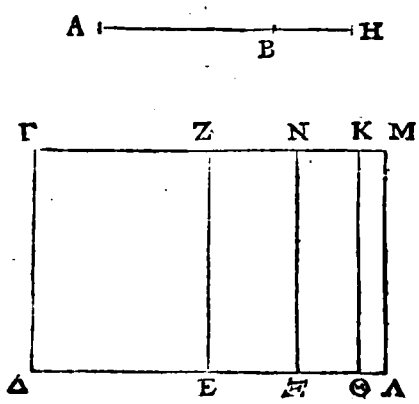
Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Ἔστω μέση ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

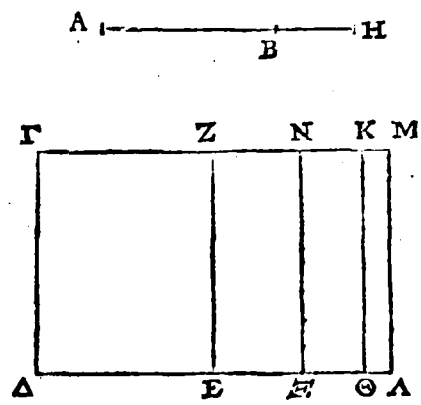
Ἐκκείσθω γὰρ τῇ ΑΒ συμμέτρως ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσην εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καί ἐστι μέσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω δὴ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥη-

SIT mediæ apotome secunda AB, rationalis autem ΓΔ, & quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΓΕ ad ipsam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓΖ: dico ΓΖ esse apotomen tertiam.

Sit enim ipsi AB congruens BH; ergo [per 76. 10.] AH, HB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ medium continent. & [per 45. 1.] quadrato quidem ex AH æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ latitudinem faciens ΓΚ; quadrato autem ex HB æquale ad ΚΘ applicetur ΚΛ, latitudinem faciens ΚΜ: totum igitur ΓΛ est æquale quadratis ex AH, HB. & sunt quadrata ex AH, HB media: ergo & ΓΛ est medium, & ad rationalem ΓΔ applicatum est, latitudinem faciens ΓΜ: ergo [per 23. 10.] ΓΜ est rationalis, & ipsi ΓΔ incommensurabilis longitudine. & quoniam totum ΓΛ est æquale quadratis ex AH, HB, ex quibus ΓΕ æquale est quadrato ex AB; erit [per 7. 2.] reliquum ΖΛ æquale ei quod bis continetur sub AH, HB. secetur ΖΜ bifariam in Ν; & ipsi ΓΔ parallela ducatur ΝΞ: alterutrum igitur parallelogrammorum ΖΞ, ΝΛ est æquale ei quod sub AH, HB continetur. est autem quod continetur sub AH, HB medium: ergo & medium est ΖΛ, & ad rationalem ΕΖ applicatum est, latitudinem faciens ΖΜ: quare [per 23. 10.] & ΖΜ est rationalis, & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. & quoniam AH, HB potentia solum commensurabiles sunt, erit AH ipsi HB incommensurabilis longitudine: ideoque [per 1. 6. & 10. 10.] quadratum ex AH rectangulo sub AH, HB est incommensurabile. sed quadrato quidem ex AH commensurabilia sunt ex AH, HB quadrata; rectangulo autem sub AH, HB commensurabile est quod bis sub AH, HB continetur: ergo quadrata ex AH, HB sunt incommensurabilia ei quod bis sub AH, HB continetur. at [per constr.] quadratis ex AH, HB æquale est parallelogrammum ΓΛ; ei vero quod bis continetur sub AH, HB æquale est ΖΛ: incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ΖΛ. ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est recta linea ΓΜ ad ΖΜ: ergo [per 10. 10.] ΓΜ ipsi ΖΜ incommensurabilis est longitudine. & sunt ambæ rationales:



les: quare Γ M, Z M rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: & ob id [per 74. 10.] Γ Z eſt apotome. dico & tertiam eſſe. quoniam enim quadratum ex A H commenſurabile eſt quadrato ex H B, erit parallelogrammum Γ Θ parallelogrammo K Λ commenſurabile: ergo & recta linea Γ K eſt commenſurabilis ipſi K M. & quoniam inter quadrata ex AH, HB [per lem. 55. 10.] medium proportionale eſt rectangulum ſub A H, H B; atque eſt quadrato quidem ex A H æquale parallelogrammum Γ Θ; quadrato autem ex H B æquale K Λ, & rectangulo ſub A H, H B æquale N Λ; erit inter parallelogramma Γ Θ, K Λ medium proportionale N Λ: eſt igitur ut Γ Θ ad N Λ ita N Λ ad K Λ. ſed [per 1. 6.] ut Γ Θ ad N Λ ita eſt recta linea Γ K ad N M; ut autem N Λ ad K Λ ita N M ad K M: ergo & ut Γ K ad N M ita N M ad K M; ac propterea [per 17. 10.] rectangulum ſub Γ K, K M eſt æquale quadrato ex N M, hoc eſt quartæ parti quadrati ex Z M. quoniam igitur duæ rectæ lineæ inæquales ſunt Γ M, M Z; & quartæ parti quadrati ex Z M æquale ad Γ M applicatum eſt deficiens figura quadrata, quod in partes commenſurabiles ipſam dividit; [per 18. 10.] recta linea Γ M plus poterit quam M Z quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. & neutra ipſarum Γ M, M Z longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali Γ Δ: ergo [per 3. deff. tert. 10.] Γ Z eſt apotome tertia.



Quadratum igitur mediæ apotomæ ſecundæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. quod erat demonſtrandum.

Prop. CI. Theor.

Quadratum minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

SIT minor A B, rationalis autem Γ Δ, & quadrato ex A B æquale parallelogrammum Γ E ad ipſam Γ Δ applicetur latitudinem faciens Γ Z: dico Γ Z eſſe apotomen quartam.

Sit enim ipſi A B congruens B H: ergo [per 77. 10.] A H, H B potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum A H, H B quadratis rationale, quod autem bis ſub ipſis continetur medium. & [per 45. 1.] quadrato ex A H æquale ad Γ Δ applicetur Γ Θ latitudinem faciens Γ K: quadrato autem ex B H æquale [*ad K Θ applicetur] K Λ latitudinem faciens K M: totum igitur Γ Λ quadratis ex A H, H B eſt æquale. atque eſt compoſitum ex quadratis A H, H B rationale: ergo & rationale eſt Γ Λ; & ad rationalem Γ Δ applicatum

πή· αἱ ἄρα Γ M, Z M ῥητή εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Z. λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς A H τῷ ἀπὸ τῆς H B, σύμμετρον ἄρα τὸ Γ Θ τῷ K Λ· ὥστε καὶ ἡ Γ K τῇ K M. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν A H, H B μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν A H, H B, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A H ἴσον τὸ Γ Θ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς H B ἴσον τὸ K Λ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν A H, H B ἴσον τὸ N Λ· καὶ τῶν Γ Θ, K Λ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ N Λ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ Θ πρὸς τὸ N Λ οὕτως τὸ N Λ πρὸς τὸ K Λ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Γ Θ πρὸς τὸ N Λ οὕτως ἐστὶν ἡ Γ K πρὸς τὴν N M, ὡς δὲ τὸ N Λ πρὸς τὸ K Λ οὕτως ἐστὶν ἡ N M πρὸς τὴν K M· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ K πρὸς τὴν N M οὕτως ἐστὶν ἡ N M πρὸς τὴν K M· τὸ ἄρα ὑπὸ τ̃ Γ K, K M ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τ̃ N M, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τ̃ ἀπὸ τ̃ Z M. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ Γ M, M Z, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τ̃ ἀπὸ τ̃ Z M ἴσον παρὰ τὴν Γ M παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ Γ M ἄρα τ̃ M Z μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἑκατέρα τ̃ Γ M, M Z μήκει σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Γ Δ· ἡ ἄρα Γ Z ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρα'.

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος δυνάμει ῥητὸν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

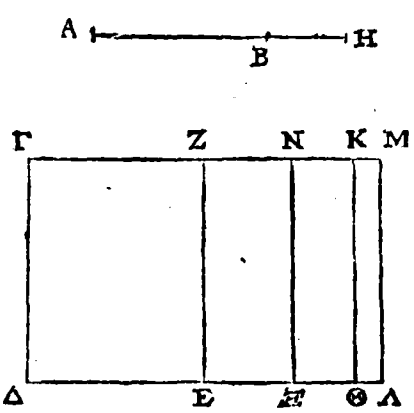
ΕΣτω ἐλάσσων ἡ A B, ῥητὴ δὲ ἡ Γ Δ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A B ἴσον παρὰ τὴν Γ Δ παραβεβλήσθω τὸ Γ E, πλάτος ποιὸν τὴν Γ Z· λέγω ὅτι ἡ Γ Z ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ A B συμμέτρος ἡ B H· αἱ ἄρα A H, H B δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A H, H B τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν A H, H B μέσον. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τ̃ A H ἴσον παρὰ τὴν Γ Δ παραβεβλήσθω τὸ Γ Θ, πλάτος ποιὸν τὴν Γ K, τῷ δὲ ἀπὸ τ̃ B H ἴσον [*παρὰ τὴν K Θ παραβεβλήσθω] τὸ K Λ πλάτος ποιὸν τὴν K M· ὅλον ἄρα τὸ Γ Λ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τ̃ A H, H B. ἔστι δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τ̃ ἀπὸ τ̃ A H, H B ῥητόν· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Γ Λ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Γ Δ παρά-

* Illa uncis incluſa rectius deſiderantur in *Codd. MSS.*

κειται

κειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω δὴ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΛΖ· καὶ τὸ ΛΖ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὴ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ ΓΛ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ· τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ. ὡς δὲ ἡ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τοῦ ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.



est latitudinem faciens ΓM: quare [per 21.10.] ΓM est rationalis & ipsi ΓΔ longitudine commensurabilis. & quoniam totum ΓΛ est æquale quadratis ex AH, HB, ex quibus ΓE æquale est quadrato ex AB; erit [per 7. 2.] reliquum ZΛ æquale ei quod bis sub AH, HB continetur. itaque secetur ZM bifariam in puncto N, & per N alterutri ipsarum ΓΔ, MΛ parallela ducatur NΞ: utrumque igitur parallelogrammorum ZΞ, NΛ est æquale ei quod continetur sub AH, HB. & quoniam quod bis continetur sub AH, HB medium est & æquale parallelogrammo ΛZ; erit & ΛZ medium, & ad rationalem ZE applicatum est latitudinem faciens ZM: ergo [per 23. 10.] ZM est rationalis, & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AH, HB est rationale, quod autem bis sub AH, HB continetur medium; erunt quadrata ex AH, HB ei quod bis continetur sub AH, HB incommensurabilia. quadratis autem ex AH, HB æquale est parallelogrammum ΓΛ, & ei quod bis sub AH, HB continetur est æquale ZΛ: incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ΛZ. sed [per 1. 6.] ut ΓΛ ad ZΛ ita est ΓM ad ZM: quare [per 10. 10.] ΓM ipsi ZM longitudine est incommensurabilis. & sunt ambæ rationales: ergo ΓM, MZ rationales sunt potentia solum commensurabiles: & igitur [per 74. 10.] ΓZ est apotome. dico & quartam esse. quoniam enim AH, HB potentia sunt incommensurabiles; erit quadratum ex AH incommensurabile quadrato ex HB. & quadrato quidem ex AH [per constr.] æquale est parallelogrammum ΓΘ; quadrato autem ex HB est æquale KΛ: incommensurabile igitur est ΓΘ ipsi KΛ. sed ut ΓΘ ad KΛ ita est ΓK ad KM: ergo ΓK ipsi KM est incommensurabilis longitudine. & quoniam inter quadrata ex AH, HB [per lem. 55. 10.] medium proportionale est rectangulum sub AH, HB, atque est quadrato quidem ex AH æquale parallelogrammum ΓΘ, quadrato autem ex HB æquale KΛ, & rectangulo sub AH, HB æquale NΛ; erit NΛ medium proportionale inter parallelogramma ΓΘ, KΛ: est igitur ut ΓΘ ad NΛ ita NΛ ad KΛ. sed ut ΓΘ ad NΛ ita ΓK ad MN. & ut NΛ ad KΛ ita MN ad KM: ergo ut ΓK ad MN ita MN ad KM; ac propterea [per 17. 6.] rectangulum sub ΓK, KM est æquale quadrato ex MN, hoc est quartæ parti quadrati ex MZ. itaque quoniam duæ rectæ lineæ inæquales sunt ΓM, MZ, & quartæ parti quadrati ex MZ æquale ad ΓM applicatum est deficiens figura quadrata, sc. contentum sub ΓK, KM, & in partes incommensurabiles ipsam dividit: recta linea ΓM [per 19. 10.] plus poterit quam MZ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. & est tota ΓM longitudine commensurabilis expositæ rationali ΓΔ: ergo [per 4. deff. tert. 10.] ΓZ est apotome quarta.

Quadratum igitur minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam. quod erat demonſtrandum.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ἐλάσσονος χωρὶ ῥητὴν χωροῦσα παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. CII. Theor.

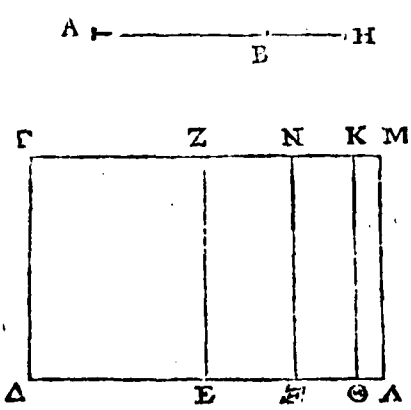
Quadratum ejus quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρϐ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητῆς μέσον τὸ ὅλον ποιούσης χωρὶ ῥητὴν χωροῦσα παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

SIT quæ cum rationali medium totum efficit AB, rationalis autem ΓΔ, & quadrato ex AB æquale ad ΓΔ applicetur parallelogrammum ΓΕ latitudinem faciens ΓΖ: dico ΓΖ apotomen eſſe quintam.

Sit enim ipſi AB congruens BH: ergo [per 78. 10.] AH, HB rectæ lineæ potentia ſunt incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur rationale. & [per 45. 1.] quadrato ex AH æquale parallelogrammum ΓΘ ad ipſam ΓΔ applicetur, latitudinem faciens ΓΚ; quadrato autem ex HB æquale applicetur ΚΛ latitudinem faciens ΚΜ: totum igitur ΓΛ eſt æquale quadratis ex AH, HB. ſed compoſitum ex quadratis ipſarum AH, HB eſt medium: ergo & medium eſt parallelogrammum ΓΛ. & ad rationalem ΓΔ applicatum eſt, latitudinem faciens ΓΜ: quare [per 23. 10.] ΓΜ eſt rationalis, & ipſi ΓΔ longitudine incommenſurabilis. & quoniam totum ΓΛ eſt æquale quadratis ex AH, HB, ex quibus ΓΕ æquale eſt quadrato ex AB; erit [per 7. 2.] reliquum ΖΛ æquale ei quod bis ſub AH, HB continetur. Itaque ſecetur ΖΜ bifariam in puncto Ν, & ab ipſo Ν alterutri ipſarum ΓΔ, ΜΛ parallela ducatur ΝΞ· utrumque igitur ΖΞ, ΝΛ eſt æquale ei quod ſub AH, HB continetur. & quoniam quod bis continetur ſub AH, HB rationale eſt, & æquale parallelogrammo ΖΛ; erit & ΖΛ rationale. & ad rationalem ΕΖ applicatum eſt, latitudinem faciens ΖΜ: ergo [per 21. 10.] ΖΜ eſt rationalis, & ipſi ΓΔ commenſurabilis longitudine. & quoniam parallelogrammum ΓΛ eſt medium, & ΖΛ rationale: incommenſurabile eſt ΓΛ ipſi ΖΛ. & [per 1. 6.] ut ΓΛ ad ΖΛ ita ΓΜ ad ΜΖ: ergo [per 10. 10.] ΓΜ ipſi ΜΖ longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt ambæ rationales; quare ΓΜ, ΜΖ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ideoque [per 74. 10.] ΓΖ eſt apotome. dico & quintam eſſe. ſimiliter enim [ut in præc.] demonſtrabimus rectangulum ſub ΓΚ, ΚΜ eſſe æquale quadrato ex ΝΜ, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex ΖΜ. quod cum quadratum ex AH incommenſurabile ſit quadrato ex HB; ſitque quadratum ex AH parallelogrammo ΓΘ æquale, quadratum autem ex HB parallelogrammo ΚΛ: erit ΓΘ ipſi ΚΛ incommenſura-



Ἔστω ἡ μετὰ ῥητῆς μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον χωρὶ τὴν ΓΔ χωρὶ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιὸν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ ΑΒ συμμέτρως ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον χωρὶ τὴν ΓΔ χωρὶ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἅμα μέσον ἐστὶ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ. καὶ χωρὶ ῥητὴν τὴν ΓΔ χωρὶ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τὰ ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω δὴ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω ἀπό τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ χωρὶ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τὸ ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστι, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΖΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΛ. καὶ χωρὶ ῥητὴν τὴν ΕΖ χωρὶ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΛ μέσον ἐστί, τὸ δὲ ΖΛ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ὁμοίως γὰρ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ

ΚΛ,

ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ ὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα διαιρεῖ αὐτήν· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἔστιν ἡ συνημμένη ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσου τὸ ὅλον ποιοῦσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

bile. sed ut ΓΘ ad ΚΛ ita ΓΚ ad ΚΜ: ergo ΓΚ ipsi ΚΜ longitudine est incommensurabilis. quoniam igitur duæ rectæ lineæ ΓΜ, ΜΖ inæquales sunt; & quartæ parti quadrati ex ΖΜ æquale ad ipsam ΓΜ applicatum est deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles ipsam dividit; [per 19. 10.] recta linea ΓΜ plus poterit quam ΜΖ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. atque est congruens ΖΜ commensurabilis longitudine expositæ rationali ΓΔ: ergo [per 5. deff. tert. 10.] ΓΖ est apotome quinta.

Quadratum igitur ejus quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ργ'.

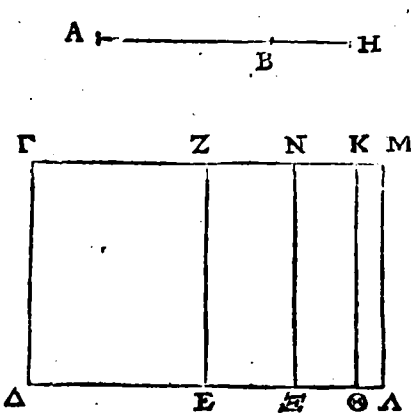
Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.

Prop. CIII. Theor.

Quadratum ejus quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

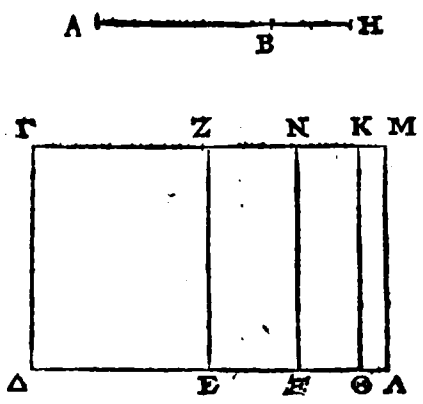
SIT quæ cum medio medium totum efficit ΑΒ, rationalis autem ΓΔ; & quadrato ex ΑΒ æquale parallelogrammum ΓΕ ad ipsam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓΖ: dico ΓΖ esse apotomen sextam.



Ἐστω γὰρ τῇ ΑΒ συμμέτρος ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΓΔ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον· καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστί. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ ὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμ-

Sit enim ipsi ΑΒ congruens ΒΗ: ergo [per 79. 10.] ΑΗ, ΗΒ potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis sub ipsis ΑΗ, ΗΒ continetur medium, & adhuc quadrata ipsarum ΑΗ, ΗΒ incommensurabilia rectangulo quod bis continetur sub ipsis ΑΗ, ΗΒ. itaque ad ΓΔ applicetur quadrato ex ΑΗ æquale parallelogrammum ΓΘ latitudinem faciens ΓΚ; quadrato autem ex ΒΗ æquale applicetur ΚΛ: totum igitur ΓΛ est æquale quadratis ex ΑΗ, ΗΒ: ac propterea ΓΛ est medium. & ad rationalem ΓΔ applicatum est latitudinem faciens ΓΜ: ergo [per 23. 10.] ΓΜ rationalis est & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. quoniam igitur ΓΛ est æquale quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, ex quibus ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; erit [per 7. 2.] reliquum ΖΛ æquale ei quod bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur. atque est quod bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ medium: ergo & ΖΛ est medium. & ad rationalem ΖΕ applicatum est latitudinem faciens ΖΜ; est igitur ΖΜ rationalis, & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. & quoniam quadrata ex ΑΗ, ΗΒ incommensurabilia sunt ei quod bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur; atque est quadratis quidem ex ΑΗ, ΗΒ æquale parallelogrammum ΓΛ, ei vero quod bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΖΛ; erit ΓΛ ipsi ΖΛ incommensurabile. sed [per 1. 6.] ut ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΜΖ: quare [per 10. 10.]

Γ M ipſi M Z incommenſurabilis eſt longitudine. & ſunt ambæ rationales: ergo Γ M, M Z rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id [per 74.10.] Γ Z eſt apotome. dico & ſextam eſſe. quoniam enim Z Λ eſt æquale ei quod bis continetur ſub A H, H B, ſecetur Z M bifariam in puncto N; & per N ipſi Γ Δ parallela ducatur N Ξ: utrumque igitur parallelogrammorum Z Ξ, N Λ eſt æquale rectangulo ſub A H, H B. & quoniam A H, H B potentia ſunt incommenſurabiles; erit quadratum ex A H incommenſurabile quadrato ex H B. ſed [per conſtr.] quadrato quidem ex A H eſt æquale parallelogrammum Γ Θ, quadrato autem ex H B æquale K Λ: ergo Γ Θ ipſi K Λ eſt incommenſurabile. ut autem Γ Θ ad K Λ ita [per 1.6.] eſt Γ K ad K M: incommenſurabilis igitur eſt Γ K ipſi K M. & quoniam [per lem. 55.10.] inter quadrata ex A H, H B medium proportionale eſt rectangulum ſub A H, H B, eſtque quadrato ex A H æquale Γ Θ, & quadrato ex H B æquale K Λ, rectangulo que ſub A H, H B æquale N Λ; erit & inter parallelogramma Γ Θ, K Λ medium proportionale N Λ. & eadem ratione [atque in præced.] Γ M plus poterit quam M Z quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. & neutra ipſarum eſt commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali Γ Δ: ergo [per 6. deff. tert. 10.] Γ Z eſt ſexta apotome.



Quadratum igitur ejus quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſextam. quod erat demonſtrandum.

μετρῷ· ἄρα ἐστὶν ἡ Γ M τῇ M Z μήκει. καί ἐστιν αἱ Γ M, M Z ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Z. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη. ἐπεὶ γὰρ τὸ Z Λ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν A H, H B, τετμήσθω δίχα ἡ Z M κατὰ τὸ N, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N τῇ Γ Δ παράλληλος ἡ N Ξ· ἑκάτερον ἄρα τῶν Z Ξ, N Λ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν A H, H B. καὶ ἐπεὶ αἱ A H, H B δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς A H τῷ ἀπὸ τῆς H B. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A H ἴσον ἐστὶ τὸ Γ Θ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς H B ἴσον ἐστὶ τὸ K Λ· ἀσύμμετρον ἄρα τὸ Γ Θ τῷ K Λ. ὡς δὲ τὸ Γ Θ πρὸς τὸ K Λ οὕτως ἡ Γ K πρὸς τὴν K M· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ K τῇ K M. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν A H, H B μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν A H, H B, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A H ἴσον τὸ Γ Θ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς H B ἴσον τὸ K Λ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν A H, H B ἴσον τὸ N Λ· καὶ τῶν ἄρα Γ Θ, K Λ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ N Λ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ Γ M τῆς M Z μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἑκάτερα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Γ Δ· ἡ Γ Z ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ὡδὶ ῥητὸν ὡδὶ προσαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. CIV. Theor.

Recta linea apotomæ longitudine commenſurabilis & ipſa apotome eſt atque ordine eadem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρδ'.

Η τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

SIT apotome A B, & ipſi A B longitudine commenſurabilis ſit Γ Δ: dico Γ Δ apotomen eſſe atque ordine eandem quæ A B.

Quoniam enim A B eſt apotome, ſit ipſi congruens B E; ergo [per 74. 10] A B, E B rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & fiat ratio B E ad Δ Z eadem quæ eſt A B ad Γ Δ: quare [per 12. 5.] ut una ad unam ita erunt omnes ad omnes: eſt igitur ut tota A B ad totam Γ Z ita A B ad Γ Δ. commenſurabilis autem eſt A B ipſi Γ Δ longitudine: ergo [per 10. 10.] & A E ipſi Γ Z longitudine commenſurabilis erit, & B E ipſi Δ Z. ſunt autem A E, E B rationales potentia ſolum commenſurabiles: ergo [per 10. 10.] & Γ Z, Z Δ rationales erunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 74.10.] Γ Δ eſt apo-

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ A B, καὶ τῇ A B σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ Γ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἡ Γ Δ ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ A B.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστιν ἡ A B, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ B E. αἱ A E, E B ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ τῆς A B πρὸς τὴν Γ Δ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς B E πρὸς τὴν Δ Z· καὶ ὡς ἓν ἄρα ἐστὶ πρὸς ἕν, πάντα ἐστὶ πρὸς πάντα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ A E πρὸς ὅλην τὴν Γ Z οὕτως ἡ A B πρὸς τὴν Γ Δ. σύμμετρος δὲ ἡ A B τῇ Γ Δ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ μὲν A E τῇ Γ Z, ἡ δὲ B E τῇ Δ Z. αἱ δὲ A E, E B ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ Γ Z, Z Δ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Δ.

ἡ ΓΔ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ ταύτῃ ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. ἤτοι δὲ ἡ ΑΕ τὸ ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τὸ ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τὸ ΖΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΔΖ. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἰ δὲ ἡ ΑΕ τὸ ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τὸ ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΖΔ. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, ἑκατέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ ταύτῃ ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tome. dico & ordine eandem esse quæ AB. quoniam enim est ut AE ad ΓZ ita BE ad ZΔ, erit permutando [per 16. 5.] ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ. vel igitur AE plus potest quam EB quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. si quidem AE plus potest quam EB quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, & ΓZ plus poterit quam ZΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & si quidem AE commensurabilis est longitudine expositæ rationali, & ΓZ etiam erit. si vero EB est commensurabilis, & ΔZ commensurabilis erit. & si neutra ipsarum AE, EB commensurabilis est longitudine expositæ rationali, & neutra ipsarum ΓZ, ZΔ eidem longitudine erit commensurabilis. quod si AE plus possit quam EB quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & ΓZ plus poterit quam ZΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & si quidem AE sit commensurabilis expositæ rationali longitudine, & ΓZ eidem longitudine commensurabilis erit. si vero BE, & ZΔ. & si neutra ipsarum AB, EB, & neutra ipsarum ΓZ, ZΔ erit expositæ rationali longitudine commensurabilis: ergo [per deff. tert.] ΓΔ apotome est & ordine eadem quæ AB. quod erat demonstr.

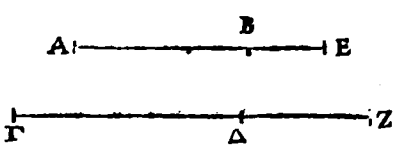
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρε'.

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Prop. CV. Theor.

Recta linea mediæ apotomæ commensurabilis & ipsa mediæ apotome est atque ordine eadem.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.



Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τῇ ταύτῃ ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. ἔστι δὲ ῥητὸν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητὸν ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἔστι μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SIT mediæ apotome AB, & ipsi AB longitudine commensurabilis sit ΓΔ: dico ΓΔ mediæ apotomen esse & ordine eandem quæ AB.

Quoniam enim mediæ apotome est AB, sit BE ipsi AB congruens: ergo [per 75 & 76. 10.] AE, EB mediæ sunt potentia solum commensurabiles. & fiat ut AB ad ΓΔ ita BE ad ΔZ, sunt autem AE, EB mediæ potentia solum commensurabiles: [*ergo & ΓZ, ZΔ mediæ potentia solum commensurabiles erunt;] ac propterea mediæ apotome est ΓΔ. ostendendum est & ordine eandem esse quæ AB. quoniam enim ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ; ut autem AE ad EB ita [per 1. 6.] quadratum ex AE ad rectangulum sub AE, EB; & ut ΓZ ad ZΔ ita quadratum ex ΓZ ad rectangulum sub ΓZ, ZΔ: erit & ut quadratum ex AE ad rectangulum sub AE, EB ita quadratum ex ΓZ ad rectangulum sub ΓZ, ZΔ. permutando igitur est ut quadratum ex AE ad quadratum ex ΓZ ita rectangulum sub AE, EB ad rectangulum sub ΓZ, ZΔ. sed quadratum ex AE commensurabile est quadrato ex ΓZ: rectangulum igitur sub AE, EB rectangulo sub ΓZ, ZΔ est commensurabile. & si quidem rationale est rectangulum sub AE, EB, & rectangulum sub ΓZ, ZΔ rationale erit: si vero rectangulum sub AE, EB medium est, & medium erit rectangulum sub ΓZ, ZΔ: mediæ igitur apotome est ΓΔ atque ordine eadem quæ AB. quod erat demonstr.

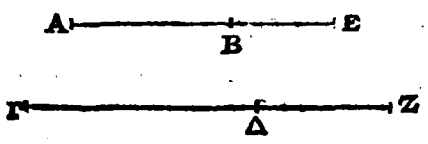
* Illa uncis inclusa non extant in exemplaribus Græcis.

PROP. CVI. THEOR.

Recta linea minori commenſurabilis & ipſa minor eſt.

SIT minor AB, & ipſi AB commenſurabilis ſit ΓΔ: dico & ΓΔ minorem eſſe.

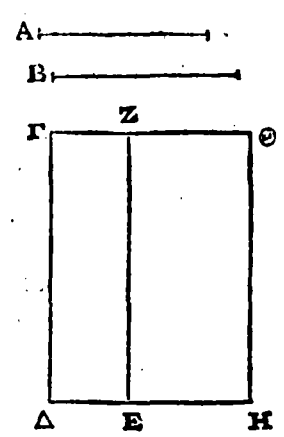
Fiant enim eadem quæ prius. & quoniam AE, EB potentia ſunt incommenſurabiles, & ΓZ, ZΔ potentia incommenſurabiles erunt. quoniam autem eſt ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ: erit [per 22.6.] & ut quadratum ex AE ad quadratum ex EB ita quadratum ex ΓZ ad quadratum ex ZΔ; & componendo [per 18. 5.] ut quadrata ex AE, EB ad quadratum ex EB ita quadrata ex ΓZ, ZΔ ad quadratum ex ZΔ, & permutando. commenſurabile autem eſt quadratum ex BE quadrato ex ΔZ: ergo [per 10.10.] & compoſitum ex quadratis ipſarum AE, EB compoſito ex quadratis ipſarum ΓZ, ZΔ commenſurabile erit. ſed compoſitum ex quadratis ipſarum AE, EB eſt rationale; ergo & rationale erit compoſitum ex quadratis ipſarum ΓZ, ZΔ. rurſus, quoniam eſt ut quadratum ex AE ad rectangulum ſub AE, EB ita quadratum ex ΓZ ad rectangulum ſub ΓZ, ZΔ, & permutando: commenſurabile autem eſt quadratum ex AE quadrato ex ΓZ; erit igitur & rectangulum ſub AE, EB rectangulo ſub ΓZ, ZΔ commenſurabile. ſed rectangulum ſub AE, EB medium eſt: medium igitur eſt [per 24.10.] & rectangulum ſub ΓZ, ZΔ: quare ΓZ, ZΔ potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium: ergo [per 77.10.] ΓΔ eſt minor. quod erat demonſtrandum.



ALITER.

Sit minor A, & ipſi A commenſurabilis ſit B: dico B minorem eſſe.

Exponatur enim ΓΔ rationalis, & quadrato ex A æquale prallelogrammum ΓE ad ipſam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓZ: apotome igitur quarta eſt ΓZ [per 101. 10.]. quadrato autem ex B æquale ad ZE applicetur ZH latitudinem faciens ZΘ. quoniam igitur A commenſurabilis eſt ipſi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commenſurabile. ſed quadrato quidem ex A æquale eſt parallelogrammum ΓE, quadrato autem ex B æquale ZH: ergo ΓE commenſurabile eſt ipſi ZH. ut autem ΓE ad ZH ita [per 1. 6.] ΓZ ad ZΘ: commenſurabilis igitur [per 10.10.] eſt ΓZ ipſi ZΘ longitudine. ſed ΓZ eſt apotome quarta: ergo [per 104.10.] & ZΘ apotome quarta eſt: ergo & ſpatium ZH ſub rationali & apotoma quarta continetur: recta igitur linea ſpatium potens [per 95.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρϛ'.

Η τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος καὶ ἐλάσσων ἐστίν.

ΕΣτω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστί.

Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ· συνθέντι ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ· σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β ἐλάσσων ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ ΓΔ ῥητή, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβεβλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ. ὡς δὲ τὸ ΓΕ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΘ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. ἀποτομὴ δέ ἐστι πρώτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΘ πρώτη· τὸ ΖΗ ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης· ἡ τὸ χωρίον ἄρα δυναμένη ἐλάσσων

ἐλάσσων ἐστί. δυνατὴ ἄρα ἡ ΖΗ τῆς Β· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.] minor est. potest autem spatium ΖΗ ipsa Β: ergo Β est minor. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρζ'.

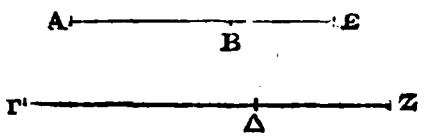
Ἡ τῇ μὴ ῥητῷ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ μὴ ῥητὴ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

PROP. CVII. THEOR.

Recta linea commensurabilis ei quae cum rationali medium totum efficit & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Ἔστω μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, τῇ δὲ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

SIT cum rationali medium totum efficiens ΑΒ: & ipsi ΑΒ commensurabilis sit ΓΔ: dico ΓΔ esse eam, quae cum rationali medium totum efficit.



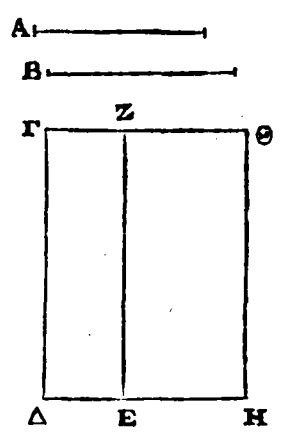
Ἐκκείσθω γὰρ τῇ ΑΒ συναρμόζουσα ἡ ΒΕ. αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ ΓΖ, ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ, ΕΒ, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sit enim ipsi ΑΒ congruens ΒΕ. ergo [per 78. 10.] ΑΕ, ΕΒ potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur rationale. & eadem construantur. similiter demonstrabitur atque prius, ΓΖ, ΖΔ in eadem esse ratione in qua ΑΕ, ΕΒ; & compositum ex quadratis ipsarum ΑΕ, ΕΒ commensurabile esse composito ex quadratis ipsarum ΓΖ, ΖΔ; rectangulum autem sub ΑΕ, ΕΒ rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ commensurabile: quare & ΓΖ, ΖΔ potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum ΓΖ, ΖΔ medium, quod autem sub ipsis continetur rationale: ergo [per 78. 10.] ΓΔ est quae cum rationali medium totum efficit. quod erat demonstrandum.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Α, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ ΓΖ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβεβλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. ἀποτομὴ δὲ πέμπτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ ΖΘ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΕ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἡ Β ἄρα μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ALITER.

Sit cum rationali medium totum efficiens Α, & ipsi Α sit commensurabilis Β: dico Β esse eam quae cum rationali medium totum efficit.

Exponatur enim rationalis ΓΔ, & quadrato quidem ex Α aequale parallelogrammum ΓΕ ad ipsam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓΖ: ergo [per 102. 10.] ΓΖ est apotome quinta. quadrato autem ex Β aequale ΖΗ ad ipsam ΖΕ applicetur latitudinem faciens ΖΘ. quoniam igitur Α commensurabilis est ipsi Β, erit & quadratum ex Α quadrato ex Β commensurabile. sed quadrato ex Α aequale est parallelogrammum ΓΕ; quadrato autem ex Β aequale ΖΗ: ergo ΓΕ est commensurabile ipsi ΖΗ: & ob id recta linea ΓΖ ipsi ΖΘ longitudine est commensurabilis. apotome autem quinta est ΓΖ: ergo [per 104. 10.] & ΖΘ est apotome quinta; estque ΖΕ rationalis. si autem spatium contineatur sub rationali & apotoma quinta, recta linea spatium potens [per 96. 10.] est quae cum rationali medium totum efficit. sed [per constr.] ipsa Β potest spatium ΖΗ: ergo ipsa Β cum rationali medium totum efficiens est. quod erat demonstrandum.

PROP.

Prop. CVIII. Theor.

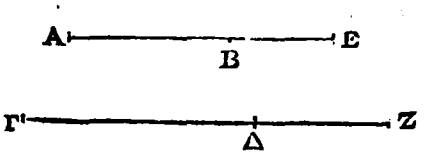
Recta linea commenſurabilis ei quæ cum medio medium totum efficit & ipſa cum medio medium totum efficiens eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρη'.

Η τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

SIT cum medio medium totum efficiens AB, & ipſi AB commenſurabilis ſit ΓΔ: dico ΓΔ eſſe eam quæ cum medio medium totum efficit.

Sit ipſi AB congruens BE, & eadem conſtruantur. ergo [per 79. 10.] AE, EB potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum ex quadratis ipſarum medium, quod autem ſub ipſis continetur medium, & adhuc compoſitum ex ipſarum quadratis incommenſurabile ei quod ſub ipſis continetur. & ſunt AE, EB commenſurabiles ipſis ΓZ, ZΔ ut [ſupra] oſtenſum eſt; & compoſitum ex quadratis ipſarum AE, EB commenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum ΓZ, ZΔ; rectangulumque ſub AB, EB rectangulo ſub ΓZ, ZΔ: ergo ΓZ, ZΔ potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium, quod autem ſub ipſis continetur medium, & adhuc compoſitum ex ipſarum quadratis incommenſurabile ei quod ſub ipſis continetur: ergo [per 79.10.] ΓΔ eſt quæ cum medio medium totum efficit. quod erat demonſtrandum.



Εστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Εκκείσθω γὰρ τῇ AB ἀσύμμετρος ἡ BE, καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. καὶ εἰσὶν, ὡς ἐδείχθη, αἱ AE, EB σύμμετροι ταῖς ΓZ, ZΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ· καὶ αἱ ΓZ, ZΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν· ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. CIX. Theor.

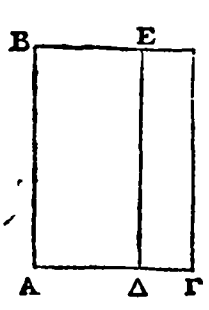
Medio de rationali detracto, recta linea quæ reliquum ſpatium poteſt una ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρθ'.

Απὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου, ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομὴ, ἢ ἐλάττων.

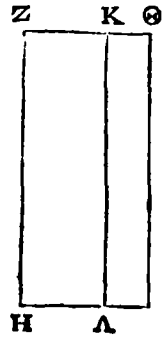
DE rationali enim BΓ medium BΔ detrahatur: dico eam quæ reliquum ſpatium EΓ poteſt unam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomen, vel minorem.

Exponatur enim rationalis ZH; & parallelogrammo quidem BΓ æquale HΘ ad ZH applicetur; parallelogrammo autem BΔ æquale auferatur HK: reliquum igitur ΓE eſt æquale ΛΘ. itaque quoniam rationale eſt BΓ, medium autem BΔ; atque eſt BΓ æquale HΘ, & BΔ ipſi HK; erit HΘ rationale, medium autem HK: & ad rationalem ZH applicatum eſt; rationalis igitur [per 21.10.] eſt ZΘ & ipſi ZH longitudine commenſurabilis, ZK vero [per 23. 10.] rationalis & incommenſurabilis ipſi ZH longitudine; ergo [per 13.10.] ZΘ ipſi ZK longitudine incommenſurabilis eſt: quare ZΘ, ZK rationales ſunt



Απὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ BΓ μέσον ἀφῃρήσθω τὸ BΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη τὸ BΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομὴ, ἢ ἐλάττων.

Εκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ZH, καὶ τῷ μὲν BΓ ἴσον παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ HΘ, τῷ δὲ BΔ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ HK· λοιπὸν ἄρα τὸ ΓE ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΘ. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μέν ἐστι τὸ BΓ, μέσον δὲ τὸ BΔ, ἴσον δὲ τὸ BΓ τῷ HΘ, τὸ δὲ BΔ τῷ HK· ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ HΘ, μέσον δὲ τὸ HK· καὶ παράκειται ῥητῇ τινὶ τῇ ZH· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZΘ καὶ σύμμετρος τῇ ZH μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ZK καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ ἡ ZΘ τῇ ZK μήκει· αἱ ZΘ, ZK ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει



δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, ᾧ συναρμόζουσα δ' αὐτῇ ἡ ΚΖ. ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. καὶ ἔστω ὅλη ἡ ΘΖ συμμέτρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης ἡ δυναμένη ἀποτομή ἐστιν· ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΓΕ, δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΘΖ συμμέτρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

potentia ſolum commenſurabiles: ac propterea [per 74. 10.] ΚΘ eſt apotome, ipſi vero congruens ΚΖ. vel igitur ΘΖ plus poteſt quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. poſſit primum quadrato rectæ lineæ commenſurabilis. atque eſt tota ΘΖ commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali ΖΗ: ergo [per 1. deff. tert. 10.] ΚΘ eſt apotome prima. recta autem linea quæ poteſt ſpatium ſub rationali & apotoma prima contentum [per 92. 10.] eſt apotome: ergo quæ poteſt ΛΘ, hoc eſt ipſum ΓΕ, apotome eſt. quod ſi ΘΖ plus poſſit quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, eſtque tota ΘΖ expoſitæ rationali ΖΗ longitudine commenſurabilis; erit [per 4. deff. tert. 10.] ΚΘ apotome quarta. & quæ poteſt ſpatium ſub rationali & apotoma quarta contentum [per 95. 10.] minor eſt: quæ igitur poteſt ſpatium ΛΘ, hoc eſt ipſum ΕΓ, eſt minor. quod erat demonſtrandum.

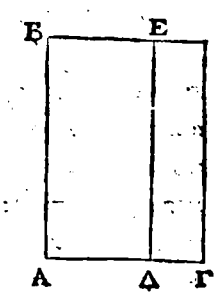
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρί.

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρεθέντος, ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

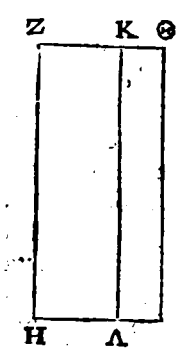
Prop. CX. Theor.

Rationali de medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.



Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ ΕΒ εὐθείᾳ ὁμοίως τὸ χωρίον· ἔστι δὴ ἀκολούθως ῥητὴ μὲν ἡ ΖΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, ᾧ συναρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΖΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ συναρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ δευτέρα ἡ ΘΚ. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΓΕ, δυναμένη, μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. εἰ δὲ ἡ ΘΖ μεῖζον τοῦ ΖΚ δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ συναρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πέμπτη ἐστὶν ἡ ΘΚ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



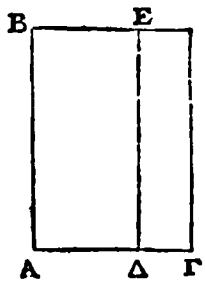
DE medio enim ΒΓ rationale ΒΔ detrahatur: dico rectam lineam, quæ reliquum ſpatium ΕΓ poteſt, unam duarum irrationalium fieri, vel mediæ apotomen primam, vel eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Expoſitur enim rationalis ΖΗ, & ad ipſam ſimiliter [ut in præc.] ſpatia applicentur; erit [per 21. 10.] rationalis quidem ΖΘ, & ipſi ΖΗ longitudine incommenſurabilis. rationalis autem ΖΚ [per 23. 10.] & incommenſurabilis ipſi ΖΗ longitudine: ergo ΖΘ, ΖΚ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 74. 10.] ΘΚ eſt apotome, & ipſi congruens ΖΚ. vel igitur ΖΘ plus poteſt quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. & ſi quidem ΘΖ plus poteſt quam ΖΚ quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; atque eſt congruens ΖΚ commenſurabilis expoſitæ rationali ΖΗ longitudine: erit [per 2. deff. tert. 10.] ΘΚ apotome ſecunda. eſt autem ΖΗ rationalis: ergo [per 93. 10.] quæ poteſt ſpatium ΛΘ, hoc eſt ipſum ΓΕ, eſt mediæ apotome prima. quod ſi ΘΖ plus poteſt quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; atque eſt congruens ΖΚ commenſurabilis expoſitæ rationali ΖΗ longitudine: erit [per 5. deff. tert. 10.] ΘΚ apotome quinta: recta igitur linea potens ſpatium ΕΓ [per 96. 10.] eſt quæ cum rationali medium totum efficit. quod erat demonſtr.

Prop. CXI. Theor.

Medio de medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti, reliquæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome ſecunda, vel cum medio medium totum efficiens.

DEtrahatur ut in propoſitis figuris de medio BΓ medium BΔ, quod ſit incommenſurabile toti: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium ΓE, unam eſſe ex duabus irrationalibus, vel mediæ apotomen ſecundam, vel eam quæ cum medio medium totum efficit.



Quoniam enim medium eſt utrumque ipſorum BΓ, BΔ, & BΓ incommenſurabile eſt ipſi BΔ, hoc eſt HΘ ipſi HK; erit [per 1.6. & 10. 10.] ΘZ ipſi ZK incommenſurabilis longitudine: ergo [per 23.10.] ΘZ, ZK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id [per 74.10.] ΘK eſt apotome, & ipſi congruens KZ. itaque vel ΘZ plus poteſt quam ZK quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis vel incommenſurabilis. & ſi quidem ΘZ plus poteſt quam ZK quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & neutra ipſarum ΘZ, ZK commenſurabilis eſt expoſitæ rationali ZH longitudine; erit [per 3. deff. tert. 10.] ΘK apotome tertia. rationalis autem eſt KΛ; & [per 94. 10.] rectangulum ſub rationali & apotoma tertia contentum irrationale eſt; & recta linea, quæ ipſum poteſt, eſt irrationalis; & vocatur mediæ apotome ſecunda. ſi vero ΘZ plus poteſt quam ZK quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, & neutra ipſarum ΘZ, ZK longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali ZH; erit [per 6. deff. tert. 10.] ΘK apotome ſexta. at [per 97. 10.] recta linea potens quod ſub rationali & apotoma ſexta continetur eſt quæ cum medio medium totum efficit: ergo quæ poteſt ſpatium ΛΘ, hoc eſt ipſum EΓ, eſt cum medio medium totum efficiens. quod erat demonſtrandum.

Prop. CXII. Theor.

Apotome non eſt eadem quæ ex binis nominibus.

SIT apotome AB: dico AB non eſſe eandem quæ ex binis nominibus.

Sit enim ſi fieri poteſt; exponaturque rationalis ΔΓ, & [per 45.1.] quadrato ex AB æquale rectangulum ΓE ad ipſam ΔΓ applicetur, latitudinem faciens ΔE. quoniam igitur AB eſt apotome, erit [per 98.10.] ΔE apotome prima. ſit ipſi congruens EZ: ergo [per 1. deff. tert. 10.] ΔZ, ZE rationales ſunt potentia ſolum commen-

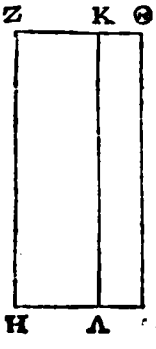
* Ita in *Codd. MSS.* ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρον τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἴση ἀναλόγου ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐστὶ ἀσύμμετρον ὑποκειται τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ.

Προτασις ρια'.

Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρεμένη ἀσυμμέτρου τῷ ὅλῳ, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀφῃρήσθω γὰρ ὡς ὅπὶ τῶ προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ, ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ. λέγω ὅτι ἡ τὸ ΓΕ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

* Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΘΖ τῇ ΖΚ· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΚΖ. ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΖΗ μήκει· ἀποτομὴ ἐστιν ἄρα τρίτη ἡ ΘΚ. ῥητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἀποτομὴ μέσης δευτέρα. εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἑκατέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἐστιν ἄρα ἕκτη ἡ ΘΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶν ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



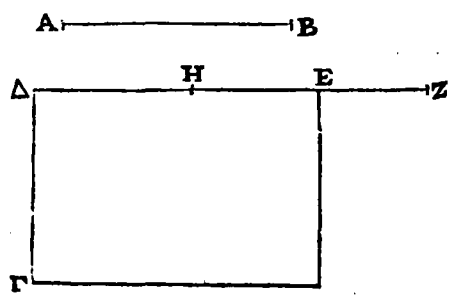
Προτασις ριβ'.

Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΓ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΖ· αἱ ΔΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον

σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ἡ ΔΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει. πάλιν, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ ΔΕ. διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΗΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ μεῖζων ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΓ μήκει· ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπὴ ἄρα τῇ ΖΗ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΗΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ. ἀλλὰ καὶ ῥητή, ὅπερ ἀδύνατον.



Η ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Η ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι ὅτι τῇ μέσῃ ὅτι ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην. τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσην τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. Ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τότε πρώτα καὶ ἀλλήλων· ἕν μὲν πρώτα, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δέ, ὅτι τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενα αἱ μὲν μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολούθως ἑκάστη τῇ τάξει καθ' αὐτήν· αἱ δὲ

surabiles, & ΔΖ plus poteſt quam ΖΕ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque eſt ΔΖ commenſurabilis expoſitæ rationali ΓΔ longitudine. rurſus, quoniam [ex hyp.] ΑΒ eſt ex binis nominibus, erit [per 61.10.] ΔΕ ex binis nominibus prima. dividatur in nomina ad punctum Η, ſitque ΔΗ majus nomen: ergo [per 1. defſ. ſecund. 10.] ΔΗ, ΗΕ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & ΔΗ plus poteſt quam ΗΕ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, & major ΔΗ longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali ΔΓ: quare [per 12. 10.] ΔΖ ipſi ΔΗ longitudine eſt commenſurabilis: & reliquæ igitur ΖΗ commenſurabilis erit. itaque quoniam ΔΖ commenſurabilis eſt ipſi ΖΗ, atque eſt rationalis ΔΖ; erit & ΖΗ rationalis. rurſus, quoniam ΔΖ commenſurabilis eſt ipſi ΖΗ longitudine, atque eſt ΔΖ ipſi ΖΕ incommenſurabilis longitudine; erit & ΖΗ ipſi ΖΕ longitudine incommenſurabilis. & ſunt rationales: ergo ΗΖ, ΖΕ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 74.10.] ΕΗ eſt apotome. ſed & rationalis, quod fieri non poteſt.

Ergo apotome non eſt eadem quæ ex binis nominibus. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Apotome & quæ ipſam conſequuntur irrationales neque mediæ neque inter ſe eædem ſunt: quadratum enim quod à media fit ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem, [per 23. 10.] & ei ad quam applicatur longitudine incommenſurabilem. quod autem ab apotoma fit ad rationalem applicatum [per 98.10.] latitudinem facit apotomen primam. quod fit à mediæ apotoma prima ad rationalem applicatum [per 99.10.] latitudinem facit apotomen ſecundam. quod fit à mediæ apotoma ſecunda ad rationalem applicatum [per 100. 10.] latitudinem facit apotomen tertiam. quod fit à minori ad rationalem applicatum [per 101. 10.] latitudinem facit apotomen quartam. quod ab ea quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum [per 102.10.] latitudinem facit apotomen quintam. quod ab ea quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum [per 103. 10.] latitudinem facit apotomen ſextam. quoniam igitur dictæ latitudines differunt tum à prima tum inter ſeſe; à prima quidem, quod illa rationalis ſit, inter ſe vero, quod ordine non ſint eædem: manifeſtum eſt & ipſas haſce irrationales inter ſe differentes eſſe. & quoniam oſtenſum eſt [per 112.10.] apotomen non eſſe eandem quæ ex binis nominibus: & quadrata quidem apotomæ & earum quæ ſequuntur apotomen ad rationalem applicata [per propoſitiones modo citatas] latitudines facere apotomas ejuſdem ordinis cujus illæ ſunt quæ apotomen ſequuntur; quadrata

vero ejus quæ eſt ex binis nominibus & earum quæ ipſam ſequuntur ad rationalem applicata [per 61,62,63,64,65, & 66.10] latitudines facere eas, quæ ex binis nominibus ejuſdem ordinis, cujus illæ ſunt quæ ſequuntur eam quæ ex binis nominibus: ergo rectæ lineæ quæ ſequuntur apotomen, & quæ ſequuntur eam quæ ex binis nominibus, inter ſe diverſæ erunt, ita ut omnes irrationales ſint numero tredecim,

μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐτὴ τῇ τάξει ἀκολούθως· ἕτερα ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομήν, καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ιγ',

1. Media. — α'. Μέσην.
2. Quæ ex binis nominibus. — β'. Ἐκ δύο ὀνομάτων.
3. Quæ ex binis mediis prima. — γ'. Ἐκ δύο μέσων πρώτη.
4. Quæ ex binis mediis ſecunda. — δ'. Ἐκ δύο μέσων δευτέραν.
5. Major. — ε'. Μείζονα.
6. Rationale ac medium potens. — ς'. Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην.
7. Bina media potens. — ζ'. Δύο μέσα δυναμένην.
8. Apotome. — η'. Ἀποτομήν.
9. Mediæ apotome prima. — θ'. Μέσης ἀποτομὴν πρώτην.
10. Mediæ apotome ſecunda. — ι'. Μέσης ἀποτομὴν δευτέραν.
11. Minor. — ια'. Ἐλάσσονα.
12. Cum rationali medium totum efficiens. — ιβ'. Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.
13. Cum medio medium totum efficiens. — ιγ'. Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

Prop. CXIII. Theor.

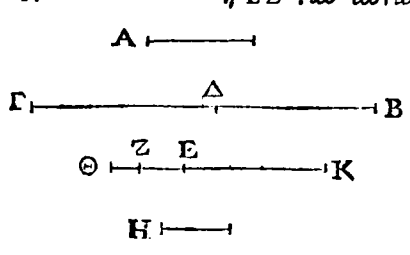
Quadratum rationalis ad eam quæ ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus ejus quæ eſt ex binis nominibus & in eadem ratione; & adhuc apotome quæ fit eundem habet ordinem quem ea quæ eſt ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριγ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἔχει τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

SIT rationalis A; ea quæ eſt ex binis nominibus BΓ, cujus majus nomen ΓΔ; & quadrato ex A æquale rectangulum ſit quod ſub BΓ, EZ continetur: dico EZ apotomen eſſe, cujus nomina commenſurabilia ſunt ipſis ΓΔ, ΔB, & in eadem ratione; & adhuc EZ eundem ordinem habere, quem habet BΓ.

Sit enim rurſus quadrato ex A æquale rectangulum quod ſub BΔ & H continetur. itaque quoniam rectangulum contentum ſub BΓ, EZ eſt æquale ei quod ſub BΔ, H continetur, erit [per 16.6] ut ΓB ad BΔ ita H ad EZ. major autem eſt ΓB quam BΔ: ergo & H quam EZ major erit. ſit ipſi H æqualis EΘ: eſt igitur ut ΓB ad BΔ ita ΘE ad EZ: & dividendo [per 17.5.] ut ΓΔ ad ΔB ita ΘZ ad ZE. fiat ut ΘZ ad ZE ita ZK ad KE: ergo & tota ΘK ad totam KZ eſt ut ZK ad KE; ut enim unum antecedentium ad unum conſequentium ita [per 12.5.]



Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ A, ἐκ δύο δὲ ὀνομάτων ἡ BΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν BΓ, EZ· λέγω ὅτι ἡ EZ ἀποτομή ἐστιν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ, ΔB, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ EZ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ BΓ.

Ἔστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, H. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν BΓ, EZ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν BΔ, H· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν BΔ οὕτως ἡ H πρὸς τὴν EZ. μείζων δὲ ἡ ΓB τῆς BΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ H τῆς EZ. ἔστω ὑπὲρ τῆς H ἡ EΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν BΔ οὕτως ἡ ΘE πρὸς τὴν EZ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν BΔ οὕτως ἡ ΘZ πρὸς τὴν ZE. γεγονέτω ὡς ἡ ΘZ πρὸς τὴν ZE οὕτως ἡ ZK πρὸς τὴν EK· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘK πρὸς ὅλην τὴν KZ ἐστὶν ὡς ἡ ZK πρὸς τὴν KE, ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως

ἅπαντα

ἅπαντα τὰ ἡγούμενα τοῖς ἅπασι τοῖς ἑπομένοις. ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ ἕτως ἐστὶν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΖ ἕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ ἕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσι· σύμμετρος ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΒΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΒΔ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ ἕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει· αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. ἤτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΔ. εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ. εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἐστιν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΖΚ, ΚΕ σύμμετρά ἐστι ταῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, ταῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

antecedentia omnia ad omnia conſequentia. ſed ut ΖΚ ad ΚΕ ita ΓΔ ad ΔΒ: & igitur ut ΘΚ ad ΚΖ ita ΓΔ ad ΔΒ. commenſurabile autem [per 37. 10.] eſt quadratum ex ΓΔ quadrato ex ΔΒ: ergo [per 10. 10.] & quadratum ex ΘΚ quadrato ex ΚΖ eſt commenſurabile. atque [per 2. coroll. 20. 6.] eſt ut quadratum ex ΘΚ ad quadratum ex ΚΖ ita recta linea ΘΚ ad ΚΕ, quoniam tres rectæ lineæ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ deinceps proportionales ſunt: commenſurabilis igitur eſt ΘΚ ipſi ΚΕ longitudine: ergo [per 16. 10.] & ΘΕ ipſi ΕΚ longitudine eſt commenſurabilis. & quoniam quadratum ex Α eſt æquale ei quod ſub ΘΕ, ΒΔ continetur, rationale autem eſt quadratum ex Α: erit & quod ſub ΘΕ, ΒΔ continetur rationale. & ad rationalem ΒΔ applicatum eſt: rationalis igitur [per 21. 10.] eſt ΘΕ & ipſi ΒΔ longitudine commenſurabilis; ideoque & ΕΚ quæ eſt commenſurabilis ipſi ΘΕ rationalis erit, & ipſi ΒΔ commenſurabilis longitudine. quoniam igitur eſt ut ΓΔ ad ΔΒ ita ΖΚ ad ΚΕ; ſunt autem ΓΔ, ΔΒ potentia ſolum commenſurabiles: & ΖΚ, ΚΕ potentia ſolum commenſurabiles erunt. rationalis autem eſt ΚΕ, & ipſi ΒΔ commenſurabilis longitudine: quare & ΖΚ eſt rationalis, ipſique ΓΔ longitudine commenſurabilis; ſunt igitur ΖΚ, ΚΕ rationales, & potentia ſolum commenſurabiles; & ideirco [per 74. 10.] ΕΖ apotome eſt. itaque vel ΓΔ plus poteſt quam ΔΒ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. & ſi quidem ΓΔ plus poteſt quam ΔΒ quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine, etiam ΖΚ plus poterit quam ΚΕ quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. & ſi ΓΔ eſt commenſurabilis expoſitæ rationali longitudine, & ΖΚ eidem commenſurabilis erit. ſi autem ΒΔ, & ΚΕ. & ſi neutra ipſarum ΓΔ, ΔΒ, & neutra ipſarum ΖΚ, ΚΕ. quod ſi ΓΔ plus poteſt quam ΔΒ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, & ΖΚ plus poterit quam ΚΕ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. & ſi quidem ΓΔ eſt longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali, erit & ΖΚ eidem commenſurabilis. & ſi ΒΔ, & ΚΕ. at ſi neutra ipſarum ΓΔ, ΔΒ, & neutra ipſarum ΖΚ, ΚΕ: ergo ΖΕ apotome eſt, cujus nomina ΖΚ, ΚΕ commenſurabilia ſunt nominibus ΓΔ, ΔΒ ejus quæ eſt ex binis nominibus & in eadem ratione, & eundem habet ordinem quem ΓΒ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριδ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρα τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

Prop. CXIV. Theor.

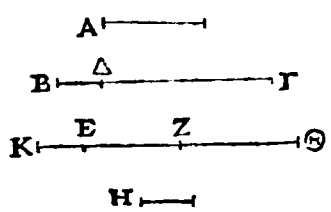
Quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eam quæ ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt apotomæ nominibus, & in eadem ratione; & adhuc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem quem ipſa apotome.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς Α ῥητὸν παρὰ τὴν ΒΔ ἀποτομὴν

SIT rationalis quidem Α, apotome autem ΒΔ; & quadrato ex Α æquale ſit quod ſub ΒΔ, ΚΘ continetur, ita ut quadratum rationalis Α ad ΒΔ

applicatum latitudinem faciat ΚΘ: dico ΚΘ eſſe ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus ipſius ΒΔ, & in eadem ratione; & ΚΘ eundem habere ordinem quem habet ΒΔ.

Sit enim ipſi ΒΔ congruens ΔΓ: ergo [per 74.10.] ΒΓ, ΓΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & quadrato ex Α æquale ſit quod ſub ΒΓ, Η continetur. rationale autem eſt quadratum ex Α: ergo quod ſub ΒΓ, Η continetur eſt rationale. & ad rationalem ΒΓ applicatum eſt: rationalis igitur [per 21.10.] eſt recta linea Η, ipſique ΒΓ longitudine commenſurabilis. itaque quoniam rectangulum contentum ſub ΒΓ, Η eſt æquale ei quod ſub ΒΔ, ΚΘ continetur, erit [per 16.6.] ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΚΘ ad Η. major autem eſt ΓΒ quam ΒΔ: ergo & ΚΘ quam Η eſt major. ponatur ipſi Η æqualis ΚΕ: commenſurabilis igitur eſt ΚΒ ipſi ΒΓ longitudine. & quoniam eſt ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΘΚ ad ΚΕ, erit per converſionem rationis ut ΒΓ ad ΓΔ ita ΚΘ ad ΘΕ. fiat ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΘΖ ad ΖΕ: & reliqua igitur ΚΖ ad ΖΘ eſt [per 19.5.] ut ΚΘ ad ΘΕ, hoc eſt, ut ΒΓ ad ΓΔ. ſed ΒΓ, ΓΔ potentia ſolum ſunt commenſurabiles: ergo & ΚΖ, ΖΘ potentia ſolum commenſurabiles erunt. & cum ſit ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΚΖ ad ΖΘ; ut autem ΚΘ ad ΘΕ ita ΘΖ ad ΖΕ; erit & ut ΚΖ ad ΖΘ ita ΘΖ ad ΖΕ: quare [per 2. corol. 20.6] ut prima ad tertiam ita quadratum ex prima ad quadratum ex ſecunda: ut igitur ΚΖ ad ΖΕ ita quadratum ex ΚΖ ad id quod fit ex ΖΘ quadratum. commenſurabile autem eſt quadratum ex ΚΖ quadrato ex ΖΘ; ſunt enim ΚΖ, ΖΘ potentia commenſurabiles: ergo & ΚΖ ipſi ΖΕ commenſurabilis eſt longitudine: ac propterea [per 16.10.] ΖΚ ipſi ΚΕ longitudine commenſurabilis. ſed ΚΕ rationalis eſt & ipſi ΒΓ longitudine commenſurabilis: ergo & ΚΖ rationalis erit & ipſi ΒΓ commenſurabilis longitudine. & quoniam eſt ut ΒΓ ad ΓΔ ita ΚΖ ad ΖΘ, erit permutando ut ΒΓ ad ΚΖ ita ΔΓ ad ΖΘ. commenſurabilis autem eſt ΒΓ ipſi ΚΖ: quare [per 10.10.] & ΓΔ ipſi ΖΘ eſt commenſurabilis. ſuntque ΒΓ, ΓΔ rationales potentia ſolum commenſurabiles; ergo & ΚΖ, ΖΘ rationales erunt potentia ſolum commenſurabiles: ex binis igitur nominibus [per 37.10.] eſt ΚΘ. & ſi quidem ΒΓ plus poteſt quam ΓΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, & ΚΖ plus poterit quam ΖΘ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. & ſi ΒΓ longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali, & ΚΖ eidem commenſurabilis erit. ſi vero ΓΔ eſt commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali, erit & ipſa ΖΘ eidem commenſurabilis. & ſi neutra ipſarum ΒΓ, ΓΔ, & neutra ipſarum ΚΖ, ΖΘ. at ſi ΒΓ plus poterit quam ΓΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & ΚΖ plus poterit quam ΖΘ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. & ſiquidem ΒΓ



ὀποτμῆι ὠς ἐλάχιστον μεῖζον τὰ ἀπὸ τῆι ΚΘ· λέγω ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τοῦ ΒΔ ὀνόμασι, καὶ ἐν τῶι αὐτῶι λόγωι, καὶ ὅτι ἡ ΚΘ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῆι ΒΔ.

Ἐστω γὰρ τῆι ΒΔ συμπίπτουσα ἡ ΔΓ· αἱ ΒΓ, ΓΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῶι ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ σύμμετρος τῆι ΒΓ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η ἐστὶν ἴσον τῶι ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν Η. μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. κείσθω τῆι Η ἴση ἡ ΚΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῆι ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ. αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ τῶι ἀπὸ τῆς ΖΘ, αἱ γὰρ ΚΖ, ΖΘ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΚΖ τῆι ΖΕ μήκει· ὥστε καὶ ἡ ΖΚ καὶ τῆι ΚΕ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῆι ΒΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΚΖ, καὶ σύμμετρος τῆι ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΖ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΖΘ. σύμμετρος δὲ ἡ ΒΓ τῆι ΚΖ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῆι ΖΘ μήκει. αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ. εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τοῦ ΓΔ μεῖζον δύναται τῶι ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆι, καὶ ἡ ΚΖ τοῦ ΖΘ μεῖζον δύναται τῶι ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆι. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῆι ἐκκειμένηι ῥητῆι μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῆι ἐκκειμένηι ῥητῆι μήκει, καὶ ἡ ΖΘ. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ. εἰ δὲ ἡ ΒΓ τοῦ ΓΔ μεῖζον δύναται τῶι ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆι, καὶ ἡ ΚΖ τοῦ ΖΘ μεῖζον δύναται τῶι ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆι. καὶ εἰ μὲν

σύμμετρός

σύμμετρός ἐστι ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· οὐδὲ ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὸν αὐτὸν ἔχει τάξιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali, & ΚΖ eidem commenſurabilis erit. ſi vero ΓΔ, & ipſa ΖΘ. quod ſi neutra ipſarum ΒΓ, ΓΔ, & neutra ipſarum ΚΖ, ΖΘ: ex binis igitur nominibus eſt ΚΘ, cujus nomina ΚΖ, ΖΘ commenſurabilia ſunt nominibus apotomæ ΒΓ, ΓΔ, & in eadem ratione: & [per deff. ſecund. & tert. 10.] ΚΘ eundem tenet ordinem quem ipſa ΒΓ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριε'.

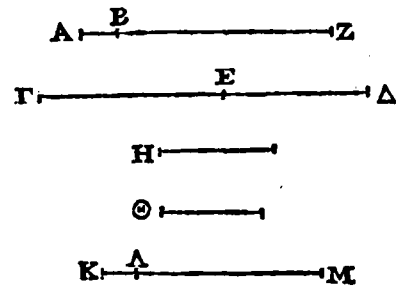
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστι.

Prop. CXV. Theor.

Si ſpatium contineatur ſub apotoma & ea quæ ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus apotomæ, & in eadem ratione; recta linea ſpatium potens eſt rationalis.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ὑπὸ ἀποτομῆς τὴν ΑΒ, καὶ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν ΓΔ, ἧς μεῖζον ὄνομά ἐστι τὸ ΓΕ· καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς ἀπὸ τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΑΖ, ΖΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τὰ ΑΒ, ΓΔ δυναμένη ἡ Η· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ Η.

Exponatur enim rationalis Θ, & [per 45. 1.] quadrato ex Θ æquale ad ipſam ΓΔ applicetur, latitudinem faciens ΚΛ; apotome igitur [per 113.10.] eſt ΚΛ, cujus nomina ΚΜ, ΜΛ commenſurabilia ſint nominibus ejus quæ eſt ex binis nominibus ſc. ΓΕ, ΕΔ, & in eadem ratione. ſed [ex hyp.] ΓΕ, ΕΔ commenſurabiles ſunt ipſis ΑΖ, ΖΒ, atque in eadem ratione: eſt igitur [per 11. 5.] ut ΑΖ ad ΖΒ ita ΚΜ ad ΜΛ: & permutando ut ΑΖ ad ΚΜ ita ΖΒ ad ΜΛ: quare [per 19. 5.] & reliqua ΑΒ ad reliquam ΚΛ eſt ut ΑΖ ad ΚΜ. commenſurabilis autem eſt ΑΖ ipſi ΚΜ: ergo [per 10.10.] & ΑΒ ipſi ΚΛ eſt commenſurabilis. eſtq[per 1.6.] ut ΑΒ ad ΚΛ ita rectangulum contentum ſub ΓΔ, ΑΒ ad id quod continetur ſub ΓΔ, ΚΛ: commenſurabile igitur eſt rectangulum contentum ſub ΓΔ, ΑΒ rectangulo quod ſub ΓΔ, ΚΛ continetur. ſed [per conſtr.] rectangulum contentum ſub ΓΔ, ΚΛ eſt æquale quadrato ex Θ: ergo rectangulum quod continetur ſub ΓΔ, ΑΒ quadrato ex Θ eſt commenſurabile. rectangulum autem quod continetur ſub ΓΔ, ΑΒ [ex hyp.] eſt æquale quadrato ex Η: ergo quadratum ex Η commenſurabile eſt quadrato ex Θ. atqui eſt quadratum ex Θ rationale: rationale igitur eſt quadratum ex Η; & idcirco ipſa Η eſt rationalis, & poteſt quod ſub ΓΔ, ΑΒ continetur.



Si igitur ſpatium contineatur ſub apotoma & ea quæ ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus apotomæ, & in eadem ratione; recta linea ſpatium potens eſt rationalis. quod erat demonſtrandum.

Corol-

Corollarium.

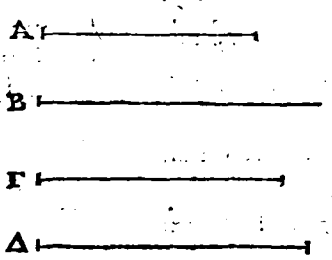
Ex iis manifeſto conſtat fieri poſſe, ut ſpatium rationale ſub irrationalibus rectis lineis contineatur.

PROP. CXVI. THEOR.

A media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium eſt eadem.

SIT media A: dico ex ipſa A infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem eſſe.

Exponatur rationalis B, & rectangulo contento ſub A, B æquale ſit quadratum ex Γ: irrationalis igitur [per 11.def.10.] eſt ipſa Γ: nam [per ſch.39.10.] quod ſub irrationali & rationali continetur irrationale eſt. & eſt eadem nulli earum quæ prius [in hoc lib.]; non enim [per 61,62,63,64,65,66, & 98,99,100,101,102,103. lib. 10.] quadratum alicujus antecedentium ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rurſus, rectangulo quod ſub B, Γ continetur æquale ſit quadratum ex Δ: irrationale igitur [per ſchol. 39.10.] eſt quod fit ex Δ: & idcirco ipſa Δ eſt irrationalis, & nulli antecedentium eadem: neque enim quadratum alicujus earum quæ prius ſunt ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipſam Γ. ſimiliter & eodem ordine infinite protracto, manifeſtum eſt à media infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem eſſe. quod erat demonſtrandum.

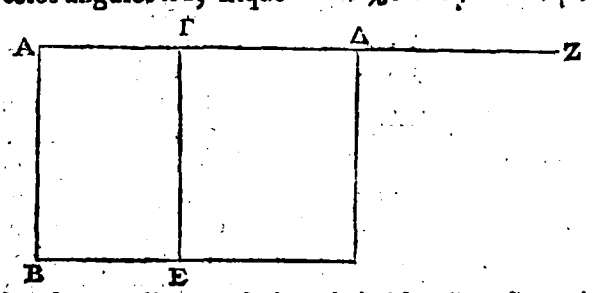


*ALITER.

Sit media AΓ: dico ex ipſa AΓ infinitas irrationales fieri, & nullam alicui priorum eandem eſſe.

Ducatur ipſi AΓ ad rectos angulos AB, ſitque AB rationalis, & BΓ compleatur: irrationale igitur eſt BΓ, & ipſum potens eſt irrationalis. poſſit autem ipſum recta linea ΓΔ; ergo ΓΔ irrationalis eſt, & nulli priorum eadem; non enim quadratum alicujus priorum ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rurſus, compleatur EΔ, erit EΔ irrationale; & recta linea ipſum potens irrationalis. poſſit ipſum recta linea ΔZ: ergo ΔZ irrationalis eſt, & nulli priorum eadem; nullius enim priorum quadratum ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipſam ΓΔ.

Ergo à media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui priorum eſt eadem.



Πόρισμα.

Καὶ γέγονεν ἡμῖν ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριϛ'.

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τ῀ πρότερον ἡ αὐτή.

Ἔστω μέση ἡ Α· λέγω ὅτι ἀπὸ τ῀ Α ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶς τῶν πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ· τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἄλογόν ἐστι. καὶ οὐδεμιᾷ πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπὸ οὐδεμιᾶς τ῀ πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν δὴ, τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τ῀ Δ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ, καὶ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν Γ. ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαινούσης, φανερὸν ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

*ΑΛΛΩΣ.

Ἐστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἀπὸ τ῀ ΑΓ ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶς πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή.

Ἤχθω τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἡ ΓΔ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τ῀ πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν, συμπεπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΔΖ· ἄλογος ἄρα ἡ ΔΖ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τ῀ πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ τ῀ μέσης ἄρα ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τ῀ πρότερον ἡ αὐτή.

* Demonſtratio hæc, quæ pro alia habetur tam in *Codd. MSS.* quam in *Editis*, parum differt à præcedente. Illam tamen cum *Commandino* retinuimus: duas licet propoſitiones, quæ ſequuntur in *Græcis Exemplaribus*, plane ejiciendas cenſuimus; utpote eaſdem cum propp. 106 & 107.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριϑ'.

Προχείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ὁπὶ τ̃ τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν. Φανερὸν μὲν οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, καὶ ἔχει λόγον πρὸς τὸν Η ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ μονὰς τοῦ Η ἀριθμοῦ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μονάς ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· διπλάσιον ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἂν ἦν, ἐπειδήπερ ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὅλος περισσός ἐστιν· ὁ ΕΖ ἄρα ἄρτιός ἐστι. τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ἔστιν ὁ ΕΖ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Η. εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς ΕΖ, Η δυὰς ἂν ἐμέτρει, πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ Η· περισσὸς ἄρα. καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστιν ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα λέγεται τὸ εἰρημένον ὁ Η. ἀλλὰ καὶ περισσός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ.

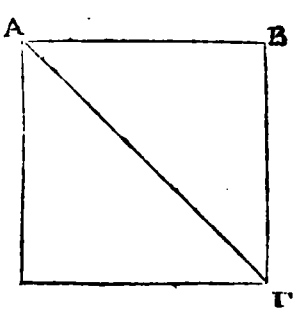
Ἔστω γὰρ ἀντὶ μὲν τ̃ διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τ̃ πλευρᾶς ἡ Β· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος, καὶ γινέσθω πάλιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ ΕΖ, Η ἄρα πρῶ-

PROP. XCVII. THEOR.

Propositum sit nobis ostendere in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum ΑΒΓΔ, cujus diameter ΑΓ: dico ΑΓ ipsi ΑΒ longitudine incommensurabilem esse.

Si enim fieri potest, sit commensurabilis: dico ex hoc sequi eundem numerum parem esse & imparem: itaque manifestum est [per 47.1.] quadratum ex ΑΓ duplum esse quadrati ex ΑΒ. & quoniam ΑΓ commensurabilis est ipsi ΑΒ, habebit ΑΓ ad ΑΒ rationem eam, quam habet numerus ad numerum. habeat quam ΕΖ ad Η: sintque ΕΖ, Η numeri minimi eandem cum ipsis rationem habentium: non igitur unitas est ΕΖ. si enim est unitas, & habet ad Η rationem eam quam ΑΓ ad ΑΒ, estque ΑΓ major quam ΑΒ; & ΕΖ unitas quam Η numerus major erit, quod est absurdum: ergo ΕΖ non est unitas; quare numerus sit necesse est. & quoniam ut ΑΓ ad ΑΒ ita est ΕΖ ad Η, erit & ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΑΒ ita quadratus ex ΕΖ ad eum qui fit ex Η quadratum. duplum autem est quadratum ex ΑΓ quadrati ex ΑΒ: ergo & quadratus ex ΕΖ quadrati ex Η est duplus: ac propterea quadratus ex ΕΖ par est, & ipse ΕΖ par. si enim esset impar, & qui fit ab ipso quadratus impar esset, quoniam [per 23.9.] si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar; & totus impar erit: ergo ΕΖ est par. secetur bifariam in Θ. & quoniam numeri ΕΖ, Η minimi sunt eandem cum ipsis rationem habentium, inter se primi sunt. & est ΕΖ par: impar igitur est Η. si enim esset par, binarius metiretur numeros ΕΖ, Η, (omnis enim par dimidiam partem habet) primos inter se existentes, quod fieri non potest: non igitur Η est par, ergo impar. & quoniam ΕΖ duplus est ipsius ΕΘ, erit [per 11.8.] quadratus ex ΕΖ quadrati ex ΕΘ quadruplus. est autem quadratus ex ΕΖ duplus quadrati ex Η: duplus igitur est quadratus ex Η quadrati ex ΕΘ; ergo qui fit ex Η quadratus est par: ideoque ex jam dictis [ad 29.9.] ipse Η est par. sed & impar, quod fieri non potest: non igitur ΑΓ commensurabilis est ipsi ΑΒ longitudine: ergo est incommensurabilis. quod erat demonstrandum.

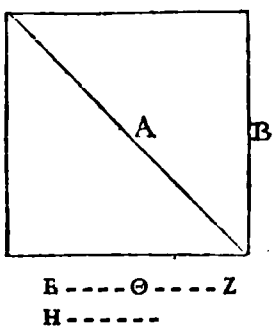


ALITER.

Sed & aliter ostendendum est incommensurabilem esse quadrati diametrum ipsius lateri.

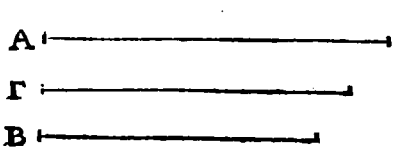
Sit enim pro diametro quidem Α, pro latere autem Β: dico Α ipsi Β longitudine incommensurabilem esse. si enim fieri potest, sit commensurabilis; & rursus, fiat ut Α ad Β ita ΕΖ numerus ad ipsum Η; sintque minimi eorum qui eandem habent rationem: ergo [per 24.7.] ΕΖ,

H primi inter ſe ſunt. dico primum H non eſſe unitatem. ſi enim fieri poteſt, ſit H unitas. & quoniam eſt ut A ad B ita EZ ad H, erit & ut quadratum ex A ad quadratum ex B ita quadratus ex EZ ad eum qui fit ex H quadratum. duplum autem eſt quadratum ex A quadrati ex B: ergo & quadratus ex EZ quadrati ex H eſt duplus. atque eſt H unitas: binarius igitur eſt quadratus ex EZ, quod fieri non poteſt: ergo H non eſt unitas; igitur eſt numerus. & quoniam eſt ut quadratum ex A ad quadratum ex B ita quadratus ex EZ ad quadratum ex H, & invertendo ut quadratum ex B ad quadratum ex A ita quadratus ex H ad quadratum ex EZ. ſed quadratum ex B metitur quadratum ex A: ergo & qui fit ex H quadratus metitur eum qui fit ex EZ; & propterea [per 14.8.] latus H ipſum EZ latus metitur. metitur autem & ſeipſum: ergo H numeros EZ, H metitur, primos inter ſe exiſtentes, quod fieri non poteſt: non igitur A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis: ergo eſt incommenſurabilis. quod erat demonſtrandum.



SCHOLIUM.

* Itaque inventis longitudine incommenſurabilibus rectis lineis, ut A, B, invenientur & aliæ quamplurimæ magnitudines ex duabus dimenſionibus, nimirum ſuperficies incommenſurabiles inter ſeſe. ſi enim [per 13.6.] inter ipſas A, B mediam proportionalem ſumamus rectam lineam Γ, erit [per 20.6.] ut A ad B ita figura quæ fit ex A ad eam quæ ex Γ ſimilem & ſimiliter deſcriptam, ſive quadrata, ſive alia rectilinea ſimilia, ſive circuli qui circa diametros A Γ deſcribantur; quandoquidem circuli [per 2.12.] inter ſe ſunt ut diametrorum quadrata: inventa ſunt igitur ſpatia plana inter ſe incommenſurabilia. quod erat demonſtrandum.



Oſtenſis autem figuris diverſis incommenſurabilibus duarum dimenſionum, oſtendemus ex ſolidorum contemplatione dari etiam ſolida commenſurabilia & incommenſurabilia inter ſeſe. nam ſi ſuper quadrata ex A, B, vel rectilinea quæ ipſis æqualia ſint, ſolida æque alta conſtituamus, ſive pyramides ſive priſmata, erunt [per 32.11. & 5. vel 6.12.] ea inter ſe uti baſes. & ſi quidem baſes commenſurabiles ſint, [per 10.10.] erunt ſolida commenſurabilia: ſi vero incommenſurabiles, & ipſa incommenſurabilia erunt. quod erat demonſtrandum.

Sed & duobus circulis exiſtentibus A, B, ſi ſuper ipſos conos æque altos ſive cylindros conſtituamus, erunt hi [per 11.12.] inter ſe uti ipſorum baſes, hoc eſt ut A, B circuli. & ſi quidem circuli commenſurabiles ſint, [per 10.10.] commenſurabiles erunt & coni inter ſeſe & cylindri: ſi vero incommenſurabiles, & coni & cylindri incommenſurabiles erunt. ex quibus perſpicuum eſt non ſolum in lineis & ſuperficiebus eſſe commenſurabilitatem & incommenſurabilitatem, ſed & in ſolidis figuris.

τοι πρὸς ἀλλήλας εἰσί. λέγω πρῶτον ὅτι ὁ Η οὐκ ἔστι μονάς. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω μονάς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὸν Β ἕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Β ἕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τοῦ ἀπὸ τοῦ Β· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. καὶ ἔστι μονὰς ὁ Η· δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τετράγωνος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Η· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β ἕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Η, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α ἕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ. μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ἀπὸ τῆς Α· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η τετράγωνος τὸ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ Η τὸ ΕΖ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τοὺς ΕΖ, Η μετρεῖ, πρώτους ὄντας ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

* Εὑρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, οἷς τῶν Α, Β, εὑρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μεγέθη οὐκ δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ τῶν Α, Β μέσιον ἀνάλογον λάβωμεν τὸ Γ, ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὸ Β ἕτως τὸ ἀπὸ τοῦ Α εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Γ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγεγραμμένα, εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια, εἴτε κύκλοι ὡσὶ διάμετροι τοῖς Α, Γ, ἐπείπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· εὕρηται ἄρα ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δεδειγμένων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφόρων χωρίων ἀσυμμέτρων, δείξομεν ἀπὸ τῶν τερεῶν θεωρίας, ὡς ἔστι καὶ τερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων, ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων, ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τερεά, τοὺς ἀλληλεπιπέδους, ἢ πυραμίδας, ἢ πρίσματα, ἔστω τὰ ἀναστάντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔστω τὰ τερεά· εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ μὴν ἐκ δύο κύκλων ὄντων τῶν Α, Β, ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς κῶνοι, ἢ κυλίνδροι ἀναγράψωμεν, ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ Α, Β κύκλοι. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι ἀλλήλοις καὶ οἱ κύλινδροι· εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγονεν ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν ἐστι συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν τερεῶν σχημάτων.

* Sequentia videntur non eſſe *Euclidis*. Saltem loco non ſuo poſita ſunt; quippe ex ſequentibus pendentia.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ,

Καὶ Στερεῶν πρῶτον.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS,

Et Solidorum primus.

ΟΡΟΙ.

α'. Στερεόν ἐστι, τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

β'. Στερεοῦ δὲ πέρας, ἐπιφάνεια.

γ'. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

δ'. Επίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς εἰσιν.

ε'. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφαπτόσης.

ς'. Επιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

ζ'. Επίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κε-

DEFINITIONES.

1. Solidum est, quod longitudinem & latitudinem & crassitudinem habet.

2. Solidi autem terminus est superficies.

3. Recta linea ad planum recta est, quando ad rectas omnes lineas, quæ ipsam contingunt & in subjecto plano jacent, rectos angulos efficiat.

4. Planum ad planum rectum est, quando rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos & in uno plano ducuntur, alteri plano ad angulos rectos fuerint.

5. Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, quando à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum acta perpendiculari, à puncto facto ad terminum lineæ, qui est in plano, recta linea juncta fuerit, angulus nempe acutus qui juncta linea & insistente continetur.

6. Plani ad planum inclinatio est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ ad rectos angulos communi planorum sectioni ad unum ipsius punctum in utroque planorum ducuntur.

7. Planum ad planum similiter incli-

nari dicitur, atque alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

8. Plana parallela ſunt, quæ inter ſe non conveniunt.

9. Similes figuræ ſolidæ ſunt, quæ ſimilibus planis ac multitudine æqualibus continentur.

10. Æquales vero & ſimiles figuræ ſolidæ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine ſimul & magnitudine æqualibus continentur.

11. Solidus angulus eſt plurium, quam duarum linearum, quæ ſeſe contingant & non in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio. ALITER. Solidus angulus eſt, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem non jacentibus plano atque ad unum punctum conſtitutis comprehenditur.

12. Pyramis eſt figura ſolida planis comprehenſa, quæ ab uno plano ad unum punctum conſtituitur.

13. Priſma eſt figura ſolida planis comprehenſa, quorum adverſa duo æqualia & ſimilia parallela ſunt; reliqua vero parallelogramma.

14. Sphæra eſt figura quidem comprehenſa, cum circa manentem diametrum ſemicirculus convertitur, donec in eundem locum, à quo moveri cœperat, rurſus reſtituatur.

15. Axis vero ſphæræ eſt manens illa recta linea, circa quam ſemicirculus convertitur.

16. Centrum autem ſphæræ eſt idem illud quod & ſemicirculi.

17. Diameter vero ſphæræ eſt recta linea quædam per centrum ducta, & ex utraque parte à ſphæræ ſuperficie terminata.

18. Conus eſt figura quidem comprehenſa, cum rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum ſunt, triangulum ipſum convertitur, donec in eundem locum, à quo moveri cœperat, rurſus reſtituatur. Verum ſi manens recta linea æqualis fuerit reliquo lateri, quod circa rectum angulum convertitur, conus orthogonius erit: ſi vero minor, amblygonius: & ſi major, oxygonius.

19. Axis autem coni eſt manens illa recta linea circa quam triangulum convertitur.

κλίσθαι λέγεται, ἡ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι.

ιη'. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

ιθ'. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

κ'. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ περὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

κα'. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσας τὰς γραμμὰς κλίσις. ΑΛΛΩΣ. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

κβ'. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

κγ'. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

κδ'. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

κε'. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

κς'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτὸ ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

κζ'. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

κη'. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. καὶ μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται κῶνος· ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος· ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

κθ'. Ἄξων δὲ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

λ'. Βάσις

κ'. Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.

κα'. Κύλινδρος δὲ, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

κβ. Ἄξων δὲ ὁ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

κγ'. Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περαιουμένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

κδ'. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

κε'. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

κϛ'. Τετράεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν πυραμὶς ὑπὸ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κζ'. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κη'. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

κθ'. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

20. Basis vero, circulus à conversa recta linea descriptus.

21. Cylindrus est figura comprehensa, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum sunt, parallelogrammum ipsum convertitur, donec in eundem locum, à quo moveri cœperat, rursus restituatur.

22. Axis vero cylindri est manens illa recta linea, circa quam parallelogrammum convertitur.

23. Bases autem sunt circuli, qui à duobus ex adverso circumactis lateribus describuntur.

24. Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes & basium diametri proportionales sunt.

25. Cubus est figura solida sex quadratis æqualibus contenta.

26. Tetraëdrum est figura solida quatuor triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

27. Octaëdrum est figura solida octo triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

28. Dodecaëdrum est figura solida quæ duodecim pentagonis æqualibus & æquilateris & æquiangulis continetur.

29. Icosaëdrum est figura solida quæ viginti triangulis æqualibus & æquilateris comprehenditur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι ἂν ᾖ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ.

Prop. I. Theor.

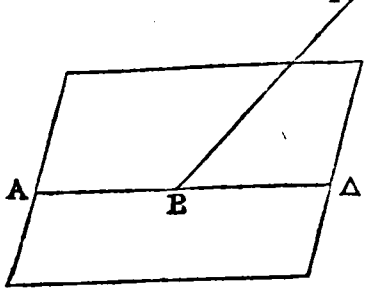
Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam vero in sublimi.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒΓ μέρος μόν τι τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεώρῳ.

Ἔσται δή τις τῇ ΑΒ συνεχὴς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἔστω ἡ ΒΔ.* δύο δὴ δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ κοινὸν τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον· εὐθεῖα γὰρ εὐθείᾳ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν· εἰ δὲ μὴ, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μόν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SI enim fieri potest, rectæ lineæ ΑΒΓ pars quidem ΑΒ sit in subjecto plano, pars vero ΒΓ in sublimi.



Erit igitur recta linea quædam ipsi ΑΒ in directum continuata in subjecto plano. sit ΒΔ. duabus igitur datis rectis lineis ΑΒΓ, ΑΒΔ commune segmentum est ΑΒ, quod fieri non potest: recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis, quam uno; alias rectæ lineæ sibi ipsis congruent.

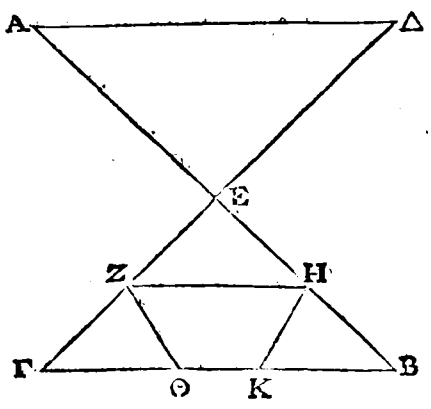
Non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subjecto plano, quædam vero in sublimi. quod erat demonstrandum.

* Hic in ora *Codd. MSS.* adscribitur πᾶσα γὰ δυνατὸν εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας ἑπόμενον.

PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secent, in uno sunt plano, item omne triangulum in uno plano consistit.

DUÆ enim rectæ lineæ AB, ΓΔ se invicem in puncto E secent: dico ipsas AB, ΓΔ in uno esse plano, nec non omne triangulum in uno plano consistere.



Sumantur enim in ipsis EB, EΓ quævis puncta Z, H; junganturque ΓB, ZH, atque ducantur ZΘ, HK: dico primum EBΓ triangulum consistere in uno plano. si enim trianguli EBΓ pars quidem ZΘΓ, vel HBK in subjecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & unius linearum EΓ, EB pars in subjecto plano, & pars in alio. quod si trianguli EΓB pars ZΓBH sit in subjecto plano, reliqua vero in alio, utrarumque rectarum linearum BΓEB quædam pars erit in subjecto plano, quædam vero in alio. quod absurdum esse ostendimus: triangulum igitur EBΓ in uno est plano. in quo autem plano est BΓE triangulum in hoc est utraque ipsarum EΓ, EB: in quo autem utraque ipsarum EΓ, EB, in hoc [per I. 11.] sunt & AB, ΓΔ: ergo rectæ lineæ AB, ΓΔ in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

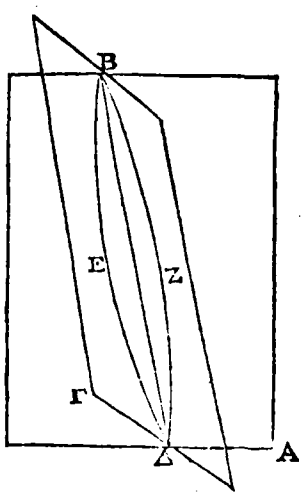
Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον· λέγω ὅτι αἱ AB, ΓΔ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν EB, EΓ τυχόντα σημεῖα, τὰ Z, H, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓB, ZH, καὶ διήχθωσαν αἱ ZΘ, HK· λέγω πρῶτον ὅτι τὸ EBΓ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ ἔστι τὸ EBΓ τριγώνου μέρος ἢ τὸ ZΘΓ, ἢ τὸ HBK ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται τι μιᾶς τῶν EΓ, EB εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. εἰ δὲ ὃ EΓB τριγώνου τὸ ZΓBH μέρος εἴη ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται τι ἀμφοτέρων τῶν EΓ, EB εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· τὸ ἄρα EBΓ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δέ ἐστι τὸ BΓE τρίγωνον ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν EΓ, EB, ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν EΓ, EB ἐν τούτῳ καὶ αἱ AB, ΓΔ· αἱ AB, ΓΔ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. III. THEOR.

Si duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio est linea recta.

DUO enim plana AB, BΓ se invicem secent, communis autem ipsorum sectio sit ΔB linea: dico lineam ΔB rectam esse.



Si enim non ita sit, ducatur à puncto Δ ad B in plano quidem AB recta linea ΔEB; in plano autem BΓ recta linea ΔZB: erunt ergo duarum rectarum linearum ΔEB, ΔZB iidem termini, & ipsæ spatium continebunt, quod [per 12. ax.] est absurdum; non igitur ΔEB, ΔZB rectæ lineæ sunt. similiter ostendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto Δ ad B ducitur rectam esse, præter ipsam ΔB, communem scilicet planorum AB, BΓ sectionem.

Si igitur duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστι.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ AB, BΓ τεμνέτωσαν ἀλλήλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔB γραμμή· λέγω ὅτι ἡ ΔB γραμμὴ εὐθεῖά ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ B, ἐν μὲν τῷ AB ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔEB, ἐν δὲ τῷ BΓ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔZB· ἴσαι δὴ δύο εὐθειῶν τῶν ΔEB, ΔZB τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσι δηλαδὴ χωρίον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα αἱ ΔEB, ΔZB εὐθεῖαί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, πλὴν τῆς ΔB ἐπὶ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη, εὐθεῖα ἔσται· ἡ ἄρα ΔB κοινὴ τομὴ τῶν AB, BΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσας ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπιζευχθῇ, καὶ τῷ διὰ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΕΖ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ τεμνούσας ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

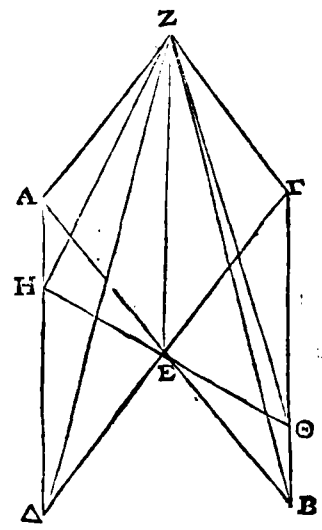
Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΗΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΒ, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΓΒ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΕΔ τρίγωνον τῷ ΓΕΒ ἴσον ἔσται, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΕΘ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΗΕ, ΒΕΘ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΑΕ τῇ ΕΒ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσι· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΕΘ, ἡ δὲ ΑΗ τῇ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΕ, βάσις ἄρα ἡ ΖΑ βάσει τῇ ΖΒ ἴση ἐστί· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΔ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΔ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστίν. καὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΘ ἴσαι εἰσί. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΑΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΖΒΘ· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἴση ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ ΖΘ βάσει τῇ ΖΗ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΕΖ, ΘΕΖ γωνιῶν· ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς τὴν ΗΘ τυχόντως διὰ τοῦ Ε ἀχθεῖσαν ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΖΕ καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ ὅσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδόν ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομέ-

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis ſe invicem ſecantibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit.

REcta enim linea quædam ΕΖ duabus rectis lineis ΑΒ, ΓΔ ſe invicem ſecantibus in Ε puncto ab ipſo Ε ad rectos angulos inſiſtat: dico ΕΖ etiam plano per ΑΒ, ΓΔ ducto ad rectos angulos eſſe.

Sumantur enim rectæ lineæ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ inter ſe æquales: perque Ε ducatur recta linea ΗΕΘ utcunque, & jungantur ΑΔ, ΓΒ; deinde à quovis puncto Ζ ducantur ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. & quoniam duæ rectæ lineæ ΑΕ, ΕΔ duabus rectis lineis ΓΕ, ΕΒ æquales ſunt, & [per 15. 1.] angulos æquales continent, erit [per 4. 1.] ΑΔ baſis baſi ΓΒ æqualis, & triangulum ΑΕΔ triangulo ΓΕΒ æquale, & etiam angulus ΔΑΕ æqualis eſt angulo ΕΒΓ. eſt autem [per 15. 1.] & angulus ΑΕΗ æqualis angulo ΒΕΘ: duo igitur triangula ſunt ΑΗΕ, ΒΕΘ duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus ΑΕ uni lateri ΕΒ æquale, quod æqualibus adjacet angulis: quare [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: ergo ΗΕ quidem eſt æqualis ΕΘ; ΑΗ vero ipſi ΒΘ. & quoniam ΑΕ eſt æqualis ΕΒ, communis autem & ad rectos angulos ΖΕ; erit [per 4. 1.] baſis ΖΑ baſi ΖΒ æqualis: eadem quoque ratione & ΖΓ æqualis erit ipſi ΖΔ. præterea quoniam ΑΔ eſt æqualis ΓΒ, & ΖΑ ipſi ΖΒ; erunt duæ ΖΑ, ΑΔ duabus ΖΒ, ΒΓ æquales, altera alteri. & oſtenſa eſt baſis ΖΔ æqualis baſi ΖΓ: angulus igitur ΖΑΔ angulo ΖΒΓ [per 8. 1.] eſt æqualis. rurſus oſtenſa eſt ΑΗ æqualis ΒΘ; ſed & ΖΑ ipſi ΖΒ eſt æqualis: duæ igitur ΖΑ, ΑΗ duabus ΖΒ, ΒΘ æquales ſunt. & angulus ΖΑΗ oſtenſus eſt æqualis angulo ΖΒΘ: baſis igitur ΖΗ baſi ΖΘ [per 4. 1.] eſt æqualis. & quoniam rurſus ΗΕ oſtenſa eſt æqualis ΕΘ, communis autem ΕΖ; erunt duæ ΗΕ, ΕΖ æquales duabus ΘΕ, ΕΖ. & baſis ΖΘ eſt æqualis baſi ΖΗ; angulus igitur ΗΕΖ angulo ΘΕΖ [per 8. 1.] eſt æqualis; & idcirco rectus eſt uterque angulorum ΗΕΖ, ΘΕΖ: ergo ΖΕ ad ΗΘ utcunque per Ε ductam rectos efficit angulos. ſimiliter oſtendemus ΖΕ etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad planum recta eſt [per 3. def. 11.] quando ad omnes rectas lineas ipſam contin-



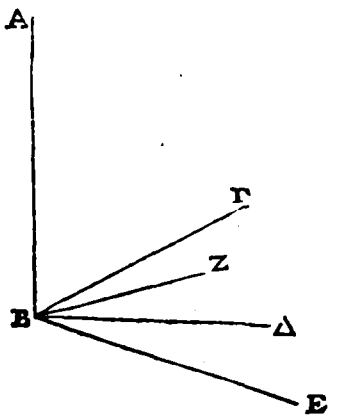
contingentes & in eodem exiſtentes plano rectos efficit angulos: quare EZ ſubjecto plano ad rectos angulos inſiſtit. at ſubjectum planum eſt quod per rectas lineas AB, ΓΔ ducitur: ergo EZ ad rectos angulos erit ducto per AB, ΓΔ plano.

Si igitur recta linea duabus rectis lineis ſe invicem ſecantibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit. quod erat demonſtrandum.

Prop. V. Theor.

Si recta linea tribus rectis lineis ſeſe tangentibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

REcta enim linea quædam AB tribus rectis lineis BΓ, BΔ, BE in contactu B ad rectos angulos inſiſtat: dico BΓ, BΔ, BE in uno plano eſſe.



Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſint BΔ, BE quidem in ſubjecto plano, BΓ vero in ſublimi, & planum per AB, BΓ producatur: communem igitur ſectionem in ſubjecto plano faciet [per 3. 11.] rectam lineam. faciat BZ. in uno igitur ſunt plano per AB, BΓ ducto tres rectæ lineæ AB, BΓ, BZ. & quoniam AB utrique ipſarum BΔ, BE ad rectos angulos inſiſtit, & ducto per ipſas ΔB, BE plano [per 4. 11.] ad rectos angulos erit. planum autem per ΔB, BE eſt ſubjectum planum: ergo AB ad ſubjectum planum recta eſt: quare [per 3. deff. 11.] & ad omnes rectas lineas ipſam contingentes, quæ in eodem plano ſunt, rectos faciet angulos. ſed ipſam tangit BZ in ſubjecto exiſtens plano: ergo angulus ABZ rectus eſt. ponitur autem & angulus ABΓ rectus: æqualis igitur eſt angulus ABZ angulo ABΓ. & in eodem ſunt plano: quod [per 9. ax.] fieri non poteſt: recta igitur linea BΓ non eſt in plano ſublimi: quare tres rectæ lineæ BΓ, BΔ, BE ſunt in uno plano.

Si igitur recta linea tribus rectis lineis ſeſe tangentibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ in uno plano erunt. quod erat demonſtrandum.

Prop. VI. Theor.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ erunt ipſæ rectæ lineæ.

DUÆ enim rectæ lineæ AB, ΓΔ ſubjecto plano ſint ad rectos angulos: dico AB ipſi ΓΔ parallelam eſſe.

νας αὐτῆς εὐθείας καὶ ἴσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας· ἡ EZ ἄρα τῷ κοινῷ τομεῖ τῷ ΔE πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ κοινὸν τομεῖον ἐπιπέδου ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΓΔ εὐθειῶν· ἡ EZ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν AB, ΓΔ ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείας τεμνούσας ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ᾖ τὴν κοινὴν τομὴν ἐπιζευχθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ᾖ κατὰ τὴν κοινὴν τομὴν ἁπτομένη, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

ΕΥθεῖα γάρ τις ἡ AB τρισὶν εὐθείαις ταῖς BΓ, BΔ, BE πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ κατὰ τὸ B ἁφῆς ἐφεστάτω· λέγω ὅτι αἱ BΓ, BΔ, BE ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν BΔ, BE ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ BΓ ἐν μετεώρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν AB, BΓ ἐπίπεδον· κοινὴν τομὴν δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν BZ. ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ δηγμένῳ διὰ τῶν AB, BΓ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ AB, BΓ, BZ. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν BΔ, ΘE· καὶ τῷ διὰ τῶν ΔB, BE ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ AB. τὸ δὲ διὰ τῶν ΔB, BE ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ AB ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ AB. ἅπτεται δὲ ἡ BZ αὐτῆς οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ABZ γωνία ὀρθή ἐστιν. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ABΓ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ABZ γωνία τῇ ὑπὸ ABΓ. καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ BΓ εὐθεῖα ἐν μετεώρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ BΓ, BΔ, BE ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ κοινοῦ τομῆς ἐπιζευχθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

ΔΥο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓΔ.

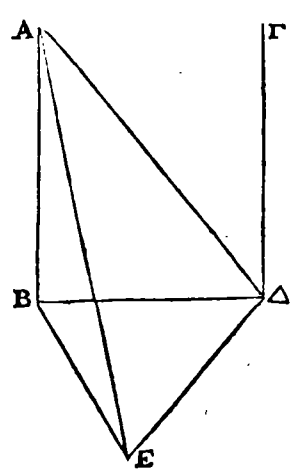
Συμβαλλέ-

Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ εὐθεῖα, ἐπὶ ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Occurrant enim ſubjecto plano in punctis Β, Δ, jungaturque ΒΔ recta linea, cui ad rectos angulos in ſubjecto plano ducatur ΔΕ; & poſita ΔΕ ipſi ΑΒ æquali jungantur ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς, ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ, ΒΕ, οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΒ, ΓΔΕ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΑ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῇ ἁφῇ ἐφέστηκεν· αἱ δὲ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔΒ, ΔΑ, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ, πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΒΔΓ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Quoniam igitur ΑΒ recta eſt ad ſubjectum planum; & ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt & in ſubjecto ſunt plano [per 3. def. 11.] rectos angulos efficiet. contingit autem ipſam ΑΒ utraque ipſarum ΒΔ, ΒΕ exiſtens in ſubjecto plano: ergo uterque angulorum ΑΒΔ, ΑΒΕ rectus eſt. eadem ratione rectus etiam eſt uterque ipſorum ΓΔΒ, ΓΔΕ. quoniam autem ΑΒ æqualis eſt ipſi ΔΕ, communis autem ΒΔ, duæ quidem ΑΒ, ΒΔ duabus ΕΔ, ΔΒ ſunt æquales, & rectos angulos continent: baſis igitur ΑΔ [per 4. 1.] baſi ΒΕ eſt æqualis. & quoniam ΑΒ eſt æqualis ΔΕ & ΑΔ ipſi ΒΕ, duæ quidem ΑΒ, ΒΕ duabus ΕΔ, ΔΒ æquales ſunt, & baſis ipſarum ΑΕ communis: ergo [per 8. 1.] angulus ΑΒΕ angulo ΕΔΑ eſt æqualis. ſed ΑΒΕ rectus eſt: rectus igitur & ΕΔΑ; & idcirco ΕΔ ad ΔΑ eſt perpendicularis. ſed & perpendicularis eſt ad utramque ipſarum ΒΔ, ΔΓ: quare ΕΔ tribus rectis lineis ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ in contactu ad rectos inſiſtit angulos: tres igitur rectæ lineæ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ [per 5. 11.] in uno ſunt plano. in quo autem ſunt ΒΔ, ΔΑ, in hoc eſt & ΑΒ, omne enim triangulum [per 2. 11.] in uno eſt plano: ergo ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ in uno plano ſunt. atque eſt uterque angulorum ΑΒΔ, ΒΔΓ rectus: parallela igitur [per 28. 1.] eſt ΑΒ ipſi ΓΔ.



Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quare ſi duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ erunt ipſæ rectæ lineæ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

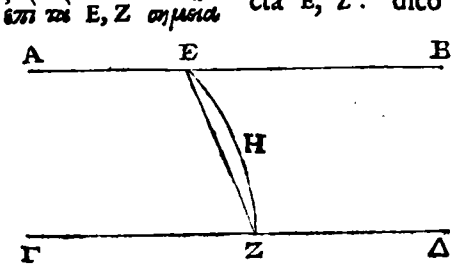
Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Prop. VII. Theor.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, ſumantur autem in utraque ipſarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem cum parallelis plana erit.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ· λέγω ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

SInt duæ rectæ lineæ parallelæ ΑΒ, ΓΔ, & in utraque ipſarum ſumantur quælibet puncta Ε, Ζ: dico rectam lineam quæ puncta Ε, Ζ conjungit in eodem plano eſſe cum parallelis.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω ἐν μετεώρῳ, ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τεμεῖ δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω ὡς τὴν ΕΖ· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα

Non enim ſit, ſed ſi fieri poteſt, ſit in ſublimi ut ΕΗΖ, & per ΕΗΖ planum ducatur, quod in ſubjecto plano [per 3. 11.] ſectionem faciat rectam lineam. faciat ut ΕΖ: ergo duæ rectæ lineæ ΕΗΖ, ΕΖ ſpatium continebunt, quod [per 12. ax.] fieri non poteſt: non igi-

tur quæ à puncto E ad Z ducitur recta linea in ſublimi eſt plano: quare erit in eo quod per parallelas A B, Γ Δ tranſit.

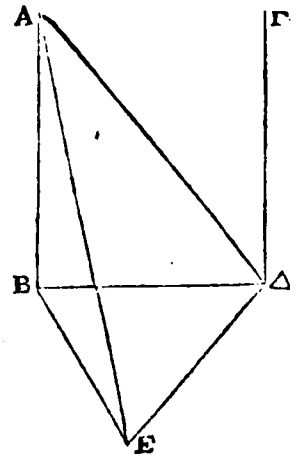
Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, ſumantur autem in utraque ipſarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem cum parallelis plano erit. quod erat demonſtrandum.

Prop. VIII. Theor.

Si fuerint duæ rectæ lineæ parallelæ, atque altera earum plano alicui ſit ad rectos angulos; & reliqua quoque eidem plano ad rectos angulos erit.

SInt duæ rectæ lineæ parallelæ A B, Γ Δ, & altera ipſarum A B ſubjecto plano ſit ad rectos angulos: dico & reliquam Γ Δ eidem plano ad rectos angulos eſſe.

Occurrant enim A B, Γ Δ ſubjecto plano in punctis B, Δ, & B Δ jungatur: ergo [per 7. 11.] A B, Δ Γ, B Δ in uno ſunt plano. ducatur ipſi B Δ ad rectos angulos in ſubjecto plano Δ E, dein ponatur Δ E ipſi A B æqualis, junganturque B E, A E, A Δ. quoniam autem A B perpendicularis eſt ad ſubjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt, atque in ſubjecto plano ſunt [per 3. deff. 11.] perpendicularis erit: rectus igitur eſt uterque angulorum A B Δ, A B E. quoniam vero in parallelas rectas lineas A B, Γ Δ recta incidit B Δ, erunt anguli A B Δ, Γ Δ B [per 29. 1.] duobus rectis æquales. rectus autem eſt A B Δ: ergo & Γ Δ B eſt rectus; quare Γ Δ perpendicularis eſt ad B Δ. & quoniam A B eſt æqualis Δ E, communis autem B Δ, duæ quidem A B, B Δ duabus E Δ, Δ B æquales ſunt, & angulus A Δ B eſt æqualis angulo E Δ B, rectus enim uterque eſt; baſis igitur A Δ [per 4. 1.] baſi B E eſt æqualis. & quoniam A B æqualis eſt Δ E, & B E ipſi A Δ, duæ quidem A B, B E duabus E Δ, Δ A erunt æquales, altera alteri, & baſis earum communis A E: ergo [per 8. 1.] angulus A B E eſt æqualis angulo E Δ A. rectus autem eſt A B E; ergo & E Δ A eſt rectus, adeoque E Δ ad Δ A perpendicularis. ſed & perpendicularis eſt ad B Δ: ergo [per 4. 11.] E Δ etiam ad planum per B Δ, Δ A perpendicularis erit: & ad omnes rectas lineas quæ in eodem plano ipſam contingunt rectos faciet angulos. at in plano per B A, A Δ eſt Δ Γ, quia in plano per B Δ, Δ A [per 2. 11.] ſunt A B, B Δ. in quo autem ſunt A B, B Δ [per 7. 11.] in eodem eſt & ipſa Δ Γ: quare E Δ ipſi Δ Γ eſt ad rectos angulos: ideoque Γ Δ ad rectos angulos eſt ipſi Δ E. ſed & Γ Δ ipſi B Δ: ergo Γ Δ duabus rectis lineis Δ E, Δ B ſe mutuo ſecantibus in communi ſectione Δ ad rectos angulos inſiſtit; ac propterea ipſa Γ Δ [per 4. 11.] plano



ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν μετεώρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν Δ Β, Γ Δ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ ταῖς ὀρθὰς ᾖ· καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς ὀρθὰς ἔσται.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ Α Β, Γ Δ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ Α Β τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ Γ Δ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ Α Β, Γ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Β Δ· αἱ ἄρα Α Β, Γ Δ, Β Δ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω τῇ Β Δ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ Δ Ε, καὶ κείσθω τῇ Α Β ἴση ἡ Δ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Β Ε, Α Ε, Α Δ. καὶ ἐπεὶ ἡ Α Β ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ Α Β· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ Α Β Δ, Α Β Ε γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς Α Β, Γ Δ εὐθείας ἐμπέπτωκεν ἡ Β Δ, αἱ ἄρα ὑπὸ Α Β Δ, Γ Δ Β γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ Α Β Δ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Γ Δ Β· ἡ Γ Δ ἄρα πρὸς τὴν Β Δ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Α Β τῇ Δ Ε, κοινὴ δὲ ἡ Β Δ· δύο δὴ αἱ Α Β, Β Δ δυσὶ ταῖς Ε Δ, Δ Β ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ Α Β Δ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ Ε Δ Β ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ Α Δ βάσει τῇ Β Ε ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α Β τῇ Δ Ε, ἡ δὲ Β Ε τῇ Α Δ· δύο δὴ αἱ Α Β, Β Ε δυσὶ ταῖς Ε Δ, Δ Α ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ Α Ε· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ Α Β Ε γωνίᾳ τῇ ὑπὸ Ε Δ Α ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ Α Β Ε· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Ε Δ Α· ἡ Ε Δ ἄρα πρὸς τὴν Α Δ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν Β Δ ὀρθή· ἡ Ε Δ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν Β Δ, Δ Α ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν Α Δ, Δ Β ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ Ε Δ. ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν Β Α, Α Δ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ Δ Γ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν Β Δ, Δ Α ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ Α Β, Β Δ. ἐν ᾧ δὲ αἱ Α Β, Β Δ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ Δ Γ· ἡ Ε Δ ἄρα τῇ Δ Γ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ Γ Δ τῇ Δ Ε πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ Γ Δ τῇ Β Δ· ἡ Γ Δ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς Δ Ε, Δ Β ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ὥστε καὶ ἡ Γ Δ καὶ τῷ

διὰ

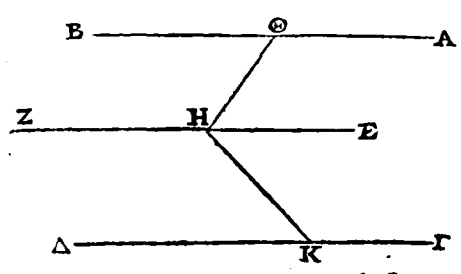
διὰ τῶν ΔΕ, ΔΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· τὸ δὲ διὰ τῶν ΔΕ, ΔΒ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστι· ἡ ΓΔ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

per ΔΕ, ΔΒ est ad rectos angulos. planum autem per ΔΕ, ΔΒ est subjectum planum: ergo ΓΔ subjecto plano ad rectos angulos erit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος τῇ ΕΖ, μὴ οὖσα αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΘ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΖΕ, ΓΔ τῇ ΕΖ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΖ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΗΚ ὀρθή ἐστιν, ἡ ΕΖ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καί ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ παράλληλος· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῷ διὰ τῶν Θ, Η, Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῷ διὰ τῶν Θ, Η, Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῷ διὰ τῶν Θ, Η, Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

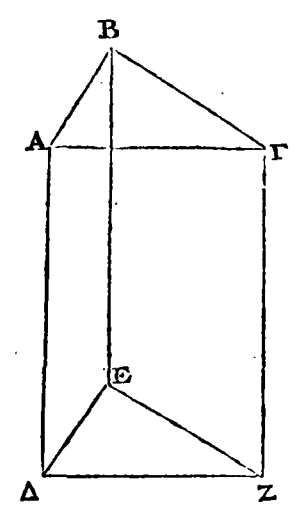
SIT enim utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ parallela rectæ ΕΖ, non jacentes vero in eodem cum ipsa plano: dico ΑΒ ipsi ΓΔ parallelam esse.

Sumatur in ΕΖ quodvis punctum Η, à quo ipsi ΕΖ in plano quidem per ΕΖ, ΑΒ transeunte ad rectos angulos ducatur ΗΘ; in plano autem transeunte per ΖΕ, ΓΔ rursus ducatur ipsi ΕΖ ad rectos angulos ΗΚ. quoniam ergo ΕΖ ad utramque ipsarum ΗΘ, ΗΚ est perpendicularis, erit ΕΖ [per 4. 11.] etiam ad rectos angulos plano per ΗΘ, ΗΚ transeunte. atque ΕΖ ipsi ΑΒ parallela est: ergo [per 8. 11.] & ΑΒ plano per Θ, Η, Κ ad rectos angulos est. eadem ratione & ΓΔ plano per Θ, Η, Κ est ad rectos angulos: utraque igitur ipsarum ΑΒ, ΓΔ plano per Θ, Η, Κ ad rectos angulos erit. si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint [per 6. 11.] parallelæ erunt inter sese: ergo ΑΒ ipsi ΓΔ parallela est. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας γωνίας περιέξουσι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΒΓ παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΕ, ΕΖ ἁπτομένας ἀλλήλων ἐστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ.



Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΕΔ, ΕΖ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῇ ΕΔ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, *καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΖ καὶ ἴση. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΑΓ, ΔΖ· καὶ ἡ ΑΓ

Prop. IX. Theor.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano, etiam inter se parallelæ sunt.

Prop. X. Theor.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; illæ æquales angulos continebunt.

DUÆ enim rectæ lineæ sese tangentes ΑΒ, ΒΓ duabus rectis lineis ΔΕ, ΕΖ sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano: dico angulum ΑΒΓ angulo ΔΕΖ æqualem esse.

Assumantur enim ΒΑ, ΒΓ, ΕΔ, ΕΖ inter se æquales; & jungantur ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. quoniam igitur ΒΑ ipsi ΕΔ æqualis est & parallela, erit [per 35. 1.] & ΑΔ æqualis & parallela ipsi ΒΕ. eadem ratione & ΓΖ ipsi ΒΕ æqualis & parallela erit: utraque igitur ipsarum ΑΔ, ΓΖ ipsi ΒΕ æqualis est & parallela. quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, [per 9. 11.] & inter se parallelæ erunt: ergo ΑΔ parallela est ipsi ΓΖ & æqualis. & ipsas conjungunt rectæ ΑΓ, ΔΖ; quare

* Illa καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος supplevimus ex *Codd. MSS.*

Α Γ ipſi Δ Z æqualis eſt & parallela. & quoniam duæ rectæ lineæ Α Β, Β Γ duabus Δ Ε, Ε Ζ æquales ſunt, & baſis Α Γ æqualis eſt baſi Δ Ζ; erit [per 8. 1.] angulus Α Β Γ angulo Δ Ε Ζ æqualis.

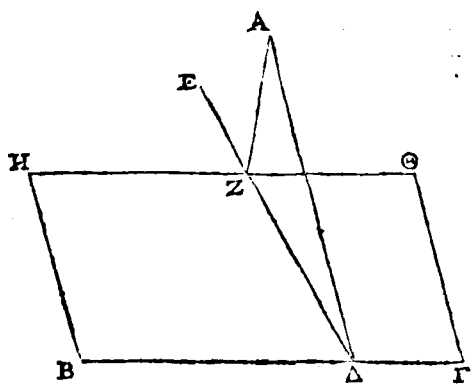
Si igitur duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; illæ æquales angulos continebunt. quod erat demonſtrandum.

Prop. XI. Probl.

A dato puncto in ſublimi ad ſubjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT datum quidem punctum in ſublimi Α, datum autem planum illud quod ſubjectum eſt: oportet à puncto Α ad ſubjectum planum perpendicularem rectam ducere.

In ſubjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque Β Γ, & [per 12. 1.] à puncto Α ad Β Γ perpendicularis agatur Α Δ. ſi igitur Α Δ ſit etiam perpendicularis ad ſubjectum planum; factum jam erit, quod proponebatur: ſin minus, ducatur [per 11. 1.] à puncto Δ ipſi Β Γ in ſubjecto plano ad rectos angulos Δ Ε; & [per 12. 1.] à puncto Α ad Δ Ε perpendicularis ducatur Α Ζ; denique per Ζ ducatur Η Θ ipſi Β Γ parallela.



Et quoniam Β Γ utrique ipſarum Δ Α, Δ Ε eſt ad rectos angulos, erit [per 4. 11.] & Β Γ ad rectos angulos plano per Ε Δ, Δ Α tranſeunti, atque eſt ipſi parallela Η Θ. ſi vero ſint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui ſit ad rectos angulos; & reliqua [per 8. 11.] eidem plano ad rectos angulos erit: quare & Η Θ plano per Ε Δ, Δ Α tranſeunti ad rectos angulos eſt: ac propterea [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano exiſtentes ipſam contingunt, eſt perpendicularis. ipſam autem Η Θ contingit recta Α Ζ exiſtens in plano per Ε Δ, Δ Α: ergo Η Θ perpendicularis eſt ad Ζ Α: & ob id Ζ Α eſt perpendicularis ad Η Θ. eſt autem [per conſtr.] & Α Ζ ad Δ Ε perpendicularis: ergo Α Ζ perpendicularis eſt ad utramque ipſarum Η Θ, Δ Ε. ſi autem recta linea duabus rectis lineis ſeſe contingentibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, [per 4. 11.] etiam plano per ipſas ducto ad rectos angulos erit: quare Ζ Α plano per Ε Δ, Η Θ ducto eſt ad rectos angulos. planum autem per Ε Δ, Η Θ eſt ſubjectum planum; ergo Α Ζ ad ſubjectum planum eſt perpendicularis.

A dato igitur puncto ſublimi Α ad ſubjectum planum perpendicularis recta linea ducta eſt Α Ζ. quod erat faciendum.

ἄρα τῇ Δ Ζ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ Α Β, Β Γ δυσὶ ταῖς Δ Ε, Ε Ζ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ Α Γ βάσει τῇ Δ Ζ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ Α Β Γ τῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ Δ Ε Ζ ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἀπὸ δοθέντος σημείου μετεώρου ὅτι τὸ ὑποκείμενον ὅπιπεδον κάθετον εὐθεῖαι γραμμὴ ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ συγκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ὡς ἔτυχεν ἡ Β Γ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν Β Γ κάθετος ἡ Α Δ. εἰ μὲν οὖν ἡ Α Δ κάθετός ἐστι, ἓ ἐπὶ τὸ συγκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ Β Γ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ Δ Ε, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν Δ Ε κάθετος ἡ Α Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου τῇ Β Γ παράλληλος ἤχθω ἡ Η Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ Β Γ ἑκατέρᾳ τῶν Δ Α, Δ Ε πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ Β Γ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν Ε Δ, Δ Α ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, ἓ ἔστω αὐτῇ παράλληλος ἡ Η Θ. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ Η Θ ἄρα, τῷ διὰ τῶν Ε Δ, Δ Α ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, ἓ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν Ε Δ, Δ Α ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ Η Θ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ Α Ζ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν Ε Δ, Δ Α ἐπιπέδῳ· ἡ Η Θ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν Ζ Α· ὥστε καὶ ἡ Ζ Α ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν Η Θ. ἔστι δὲ ἡ Α Ζ καὶ πρὸς τὴν Δ Ε ὀρθή· ἡ Α Ζ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν Η Θ, Δ Ε ὀρθή ἐστιν. ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ διὰ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ Ζ Α ἄρα τῷ διὰ τῶν Ε Δ, Η Θ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν Ε Δ, Η Θ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἡ Α Ζ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

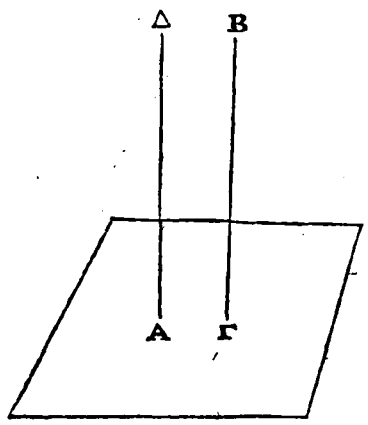
Ἀπὸ δὴ δοθέντος ἄρα σημείου μετεώρου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ Α Ζ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τὸ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Α· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.



Νενοήσθω τὸ σημεῖον μετέωρον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΑΔ, ΓΒ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀνέσταται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XII. PROBL.

Dato plano, à puncto quod in ipſo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam conſtituere.

SIT datum quidem planum ſubjectum, punctum autem quod in ipſo ſit A: oportet à puncto A ſubjecto plano ad rectos angulos rectam lineam conſtituere.

Intelligatur aliquod punctum ſublime B, à quo [per 11. 11.] ad ſubjectum planum agatur perpendicularis BΓ; & [per 31. 1.] per A ipſi BΓ parallela ducatur AΔ.

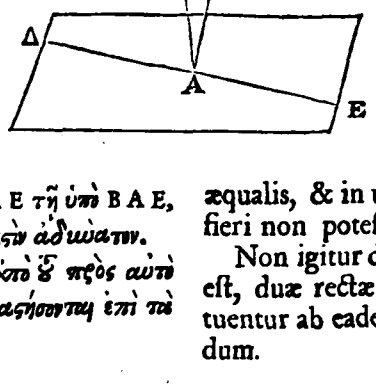
Quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ ſunt AΔ, ΓB, una autem ipſarum BΓ ſubjecto plano eſt ad rectos angulos; & reliqua AΔ [per 8.11.] ſubjecto plano ad rectos angulos erit.

Dato igitur plano, à puncto quod in ipſo datum eſt, ad rectos angulos recta linea conſtituta eſt. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

* Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον, τεμνέτω δὲ τοῦτο τὸ διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. τεμνέτω τὴν ΔΑΕ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, καί εἰσιν ἐν τῷ ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.



Οὐκ ἄρα τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XIII. PROBL.

Dato plano, à puncto quod in ipſo eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non conſtituentur ab eadem parte.

SI enim fieri poſſit, dato plano, à puncto A quod in ipſo eſt, duæ rectæ lineæ AB, AΓ ad rectos angulos conſtituantur ab eadem parte; & ducatur planum per BA, AΓ, quod [per 3.11.] faciet ſectionem per A in ſubjecto plano rectam lineam. faciat ΔAE: ergo rectæ lineæ AB, AΓ, ΔAE in uno ſunt plano. quoniam vero ΓA ſubjecto plano ad rectos angulos eſt, [per 3. deff. 11.] & ad omnes rectas lineas, quæ in ſubjecto plano exiſtentes ipſam contingunt, rectos faciet angulos. ipſam autem ΓA contingit recta ΔAE, in ſubjecto plano exiſtens: angulus igitur ΓAE eſt rectus. eadem ratione & BAE eſt rectus: ergo angulus ΓAE ipſi BAE eſt æqualis, & in uno ſunt plano, quod [per 9.ax.] fieri non poteſt.

Non igitur dato plano, à puncto quod in ipſo eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos conſtituentur ab eadem parte. quod erat demonſtrandum.

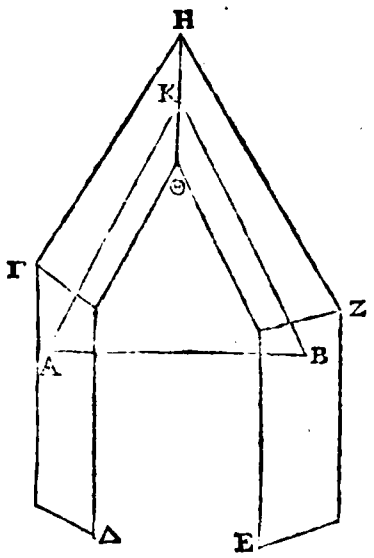
* Ἀπὸ ἑαυτῶ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι &c. melius in *Codd. MSS.*

Prop. XIV. Theor.

Ad quæ plana eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt.

Recta enim linea quædam AB ad utrumque ipſorum planorum ΓΔ, EZ ſit perpendicularis: dico ea plana parallela eſſe.

Si enim non ita ſit, producta convenient inter ſe conveniant, facient autem [per 3. 11.] communem ſectionem rectam lineam. faciant HΘ; & in ipſa HΘ, ſumpto quovis puncto K, jungantur AK, BK. quoniam igitur AB recta eſt ad planum EZ, erit [per 3. def. 11.] & perpendicularis ad ipſam BK, rectam in plano EZ producto exiſtentem: quare angulus ABK rectus eſt. eadem ratione & BAK eſt rectus; ideoque trianguli ABK duo anguli ABK, BAK duobus rectis ſunt æquales; quod [per 17. 1.] fieri non poteſt: non igitur plana ΓΔ, EZ producta inter ſe convenient: parallela igitur ſunt plana ΓΔ, EZ.



Ad quæ igitur plana eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt. quod erat demonſtrandum.

Πρoτασις ιδ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, EZ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσεῖται. συμπιπτέτωσαν· ποιήσει δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν. ποιείτωσαν τὴν HΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς HΘ τυχὸν σημεῖον τὸ K, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AK, BK. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ EZ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν BK ἄρα εὐθεῖαν ὀρθή ἐστιν ἡ AB· ἡ ἄρα ὑπὸ ABK γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ BAK ὀρθή ἐστι, τριγώνου δὲ τοῦ ABK αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ABK, BAK δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΓΔ, EZ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ, EZ ἐπίπεδα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XV. Theor.

Si duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt.

Duæ enim rectæ lineæ ſeſe tangentes AB, BΓ duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ΔE, EZ parallelæ ſint, & non in eodem plano: dico plana quæ per AB, BΓ, ΔE, EZ tranſeunt, ſi producantur, inter ſe non convenire.

Ducatur enim [per 11. 11.] à puncto B ad planum quod per ΔE, EZ tranſit perpendicularis BH, quæ plano in puncto H occurrat; & per H [per 31. 1.] ducatur ipſi quidem EΔ parallela HΘ, ipſi vero EZ parallela HK. itaque quoniam BH perpendicularis eſt ad planum per ΔE, EZ, & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano, rectos faciet angulos. contingit autem illam utraque ipſarum HΘ, HK, quæ ſunt in plano per ΔE, EZ: rectus igitur eſt uterque angulorum BHΘ,

Πρoτασις ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσας, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ AB, BΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔE, EZ ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι· λέγω ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν AB, BΓ, ΔE, EZ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΔE, EZ ἐπίπεδον κάθετος ἡ BH, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ H σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ H τῇ μὲν EΔ παράλληλος ἤχθω ἡ HΘ, τῇ δὲ EZ ἡ HK. καὶ ἐπεὶ ἡ BH ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΔE, EZ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΔE, EZ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν HΘ, HK οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΔE, EZ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ BHΘ,

ΒΗΚ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΑ τῇ ΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΗΒΑ, ΒΗΘ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΑ· ἡ ΗΒ ἄρα τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΗ καὶ τῇ ΒΓ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΗ δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΒΑ, ΒΓ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ ΒΗ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. [* διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς.] ἐὰν δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθή· ἡ ΒΗ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδων ὀρθή ἐστι. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΒΗΚ. & quoniam ΒΑ parallela eſt ipſi ΗΘ, [per 29. 1.] anguli ΗΒΑ, ΒΗΘ duobus rectis ſunt æquales. rectus autem eſt ΒΗΘ: ergo & ΗΒΑ rectus erit; ideoque ΗΒ ad ΒΑ eſt perpendicularis. eadem ratione & ΒΗ eſt perpendicularis ad ΒΓ. quoniam igitur recta linea ΒΗ duabus rectis lineis ΒΑ, ΒΓ ſe invicem ſecantibus ad rectos angulos inſiſtit, erit [per 4. 11.] ΒΗ etiam ad planum per ΑΒ, ΒΓ ductum perpendicularis. *[& ob eandem cauſam ΒΗ eſt perpendicularis ad planum per ΗΘ, ΗΚ. ſed planum per ΗΘ, ΗΚ eſt illud, quod per ΔΕ, ΕΖ tranſit: quare ΒΗ ad planum quod tranſit per ΔΕ, ΕΖ eſt perpendicularis. oſtenſa autem eſt ΒΗ etiam perpendicularis ad planum per ΑΒ, ΒΓ.] atque eſt ad planum per ΔΕ, ΕΖ perpendicularis: ergo ΒΗ perpendicularis eſt ad utrumque planorum quæ per ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ tranſeunt. ad quæ vero plana eadem recta linea eſt perpendicularis [per 14. 11.] ea parallela ſunt: parallelum igitur eſt planum per ΑΒ, ΒΓ plano per ΔΕ, ΕΖ.

Quare ſi duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

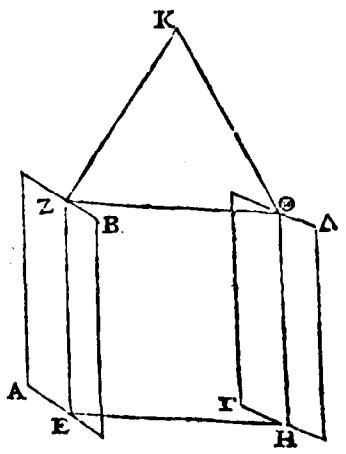
Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπό τινος ἐπιπέδου τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι.

Prop. XVI. Theor.

Si duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones ſunt etiam parallelæ.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου οὗ ΕΖΗΘ τεμνέσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται αἱ ΕΖ, ΗΘ, ἤτοι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Η. ἐκβεβλήσθω πρότερον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ. ἐπεὶ ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἐστίν. ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημεῖόν ἐστι τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ ἐν τῷ ΓΔ ἐστιν ἐπιπέδῳ· τὰ ΑΒ, ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δέ, διὰ τὸ παράλληλα ὑπόκεισθαι· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε, Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.



DUO enim plana parallela ΑΒ, ΓΔ à plano aliquo ΕΖΗΘ ſecentur, communes autem ipſorum ſectiones ſint ΕΖ, ΗΘ: dico ΕΖ ipſi ΗΘ parallelam eſſe.

Si enim non eſt parallela, productæ ΕΖ, ΗΘ inter ſe convenient, vel ad partes Ζ, Θ, vel ad partes Ε, Η. producantur prius, ut ad partes Ζ, Θ, & conveniant in Κ. quoniam igitur ΕΖΚ eſt in plano ΑΒ, & omnia quæ in ΕΖΚ ſumuntur puncta in eodem plano erunt. unum autem punctorum quæ ſunt in ΕΖΚ eſt ipſum Κ punctum: ergo Κ eſt in plano ΑΒ. eadem ratione & Κ eſt in ΓΔ plano: ergo plana ΑΒ, ΓΔ producta inter ſe convenient. non conveniunt autem, cum parallela ponantur: non igitur ΕΖ, ΗΘ rectæ lineæ productæ convenient ad partes Ζ, Θ. ſimiliter demonſtrabimus neque rectas ΕΖ, ΗΘ ad partes Ε, Η convenire, ſi producantur. quæ autem neutra ex parte conveniunt [per 35. def. 1.] parallelæ ſunt, ergo ΕΖ ipſi ΗΘ eſt parallela.

* Illa uncis incluſa omitti debent: integra quidem non exſtant in *Codd. MSS.*

Si

Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelæ erunt. quod erat demonſtrandum.

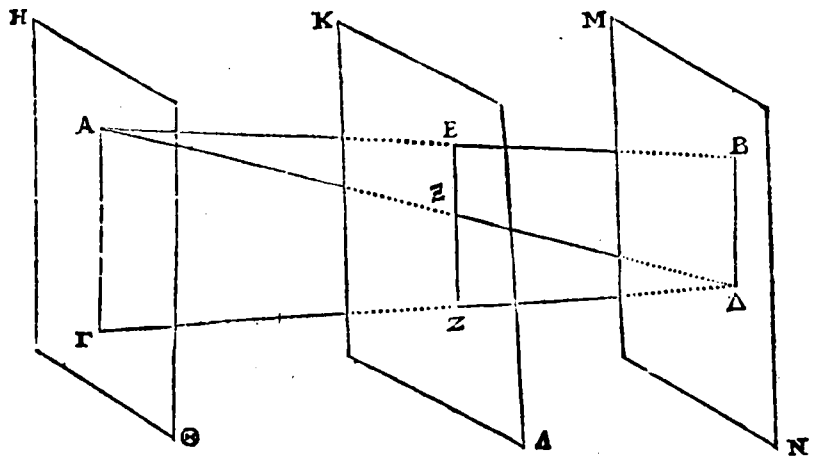
Εὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπό τινος ἐπιπέδου πίπτῃ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XVII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis planis ſecentur, in eadem ratione ſecabuntur.

DUÆ enim rectæ lineæ AB, ΓΔ à parallelis planis HΘ, KΛ, MN ſecentur in punctis A, E, B, Γ, Z, Δ: dico ut AE recta linea ad ipſam EB ita eſſe ΓZ ad ZΔ.

Jungantur enim AΓ, BΔ, AΔ, & occurrat AΔ plano KΛ in puncto Ξ, & EΞ, ΞZ jungantur. quoniam igitur duo plana parallela KΛ, MN à plano EBΔΞ ſecantur, [per 16.11.] communes ipſorum ſectiones EΞ, BΔ parallelæ ſunt. eadem ratione quoniam duo plana parallela HΘ, KΛ à plano AΞZΓ ſecantur, communes ipſorum ſectiones AΓ, ZΞ ſunt parallelæ. quoniam autem uni laterum trianguli ABΔ, videlicet ipſi BΔ, parallela ducta eſt EΞ, [per 2. 6.] ut AB ad EB ita erit AΞ ad ΞΔ. rurſus quoniam uni laterum trianguli AΔΓ, nempe ipſi AΓ, parallela ducta eſt ΞZ, erit ut AΞ ad ΞΔ ita ΓZ ad ZΔ. oſtenſum autem eſt & ut AΞ ad ΞΔ ita eſſe AE ad EB: erit igitur [per 11. 5.] ut AB ad EB ita ΓZ ad ZΔ.



Quare ſi duæ rectæ lineæ à parallelis planis ſecentur, in eadem ratione ſecabuntur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Εὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.

ΔΥΟ γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν HΘ, KΛ, MN τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ A, E, B, Γ, Z, Δ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AE εὐθεῖα πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ AΓ, BΔ, AΔ, καὶ συμβαλλέτω ἡ AΔ τῷ KΛ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EΞ, ΞZ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ KΛ, MN ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ EBΔΞ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ EΞ, BΔ παράλληλοί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ HΘ, KΛ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ AΞZΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ AΓ, ZΞ παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ABΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν BA εὐθεῖα ἦκται ἡ EΞ, ἀνάλογον ἄρα ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ AΞ πρὸς τὴν ΞΔ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ AΔΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν AΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΞZ, ἀνάλογον ἄρα ὡς ἡ AΞ πρὸς τὴν ΞΔ οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ AΞ πρὸς τὴν ΞΔ οὕτως ἡ AE πρὸς τὴν EB· καὶ ὡς ἄρα ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ.

Εὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τὰς αὐτὰς λόγους τμηθήσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XVIII. THEOR.

Si recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipſam tranſeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

RECta enim linea quædam AB ſubjecto plano ſit ad rectos angulos: dico & omnia plana, quæ per ipſam AB tranſeunt, ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe.

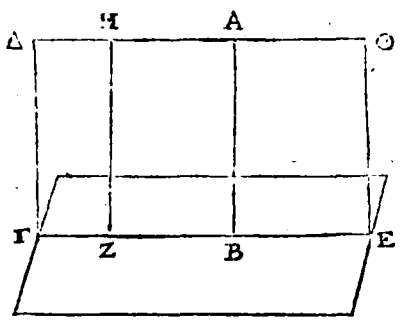
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Εὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ διὰ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

ΕΥθεῖα γάρ τις ἡ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς AB ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Exce-

Εκβεβλήθω γὰρ διὰ τοῦ ΑΒ ἐπιπέδου τὸ ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔΕ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ ΓΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΓΕ ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ. ἡ δὲ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ὦσι, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΖΗ ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα ΔΕ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τοῦ ΑΒ ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.



Producatur enim per rectam AB planum ΔE, ſitque plani ΔE & ſubjecti plani communis ſectio recta ΓE; & ſumatur in ΓE quodvis punctum Z, à quo ipſi ΓE ad rectos angulos in ΔE plano ducatur ZH. quoniam igitur recta AB ad ſubjectum planum eſt perpendicularis; & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt & in ſubjecto plano jacent perpendicularis erit: quare etiam ad ΓE eſt perpendicularis: angulus igitur ABZ rectus eſt. ſed & HZB eſt rectus: ergo [per 28. 1.] AB parallela eſt ipſi ZH. eſt autem AB ſubjecto plano ad rectos angulos: quare [per 8. 11.] etiam ZH eidem plano ad rectos angulos erit. at [per 4. def. 11.] planum ad planum rectum eſt, quando communi planorum ſectioni ad rectos angulos ductæ in uno plano rectæ lineæ reliquo plano ad rectos angulos ſunt; communi ergo planorum ſectioni ΓE in uno plano ΔE ad rectos angulos ducta ZH oſtenſa eſt ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe: ergo planum ΔE rectum eſt ad ſubjectum planum. ſimiliter demonſtrabuntur & omnia quæ per AB tranſeunt plana ſubjecto plano recta eſſe.

Εὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ διὰ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipſam tranſeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

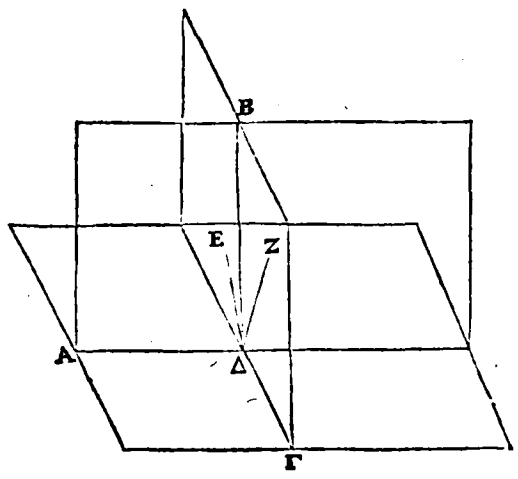
Εὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

PROP. XIX. THEOR.

Si duo plana ſe invicem ſecantia plano alicui ſint ad rectos angulos, communis ipſorum ſectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ ΒΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

DUO enim plana ſe invicem ſecantia AB, BΓ ſubjecto plano ſint ad rectos angulos, communis autem ipſorum ſectio ſit BΔ: dico rectam BΔ ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe.



Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΔΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ

Non enim ſit, atque [per 11. 1.] à puncto Δ ducatur in plano quidem AB rectæ lineæ AΔ ad rectos angulos ipſa ΔE; in plano autem BΓ ducatur ipſi ΓΔ ad rectos angulos ΔZ. quoniam ergo planum AB ad ſubjectum planum rectum eſt, & communi ipſorum ſectioni AΔ ad rectos angulos in plano AB ducta eſt ΔE; erit ΔE ad ſubjectum planum perpendicularis. ſimiliter oſtendemus & ΔZ perpendicularem eſſe ad ſubjectum planum: quare ab eo-

dem puncto Δ ſubjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos conſtitutæ ſunt ex eadem parte, quod [per 13.11.] fieri non poteſt: non igitur ſubjecto plano à puncto Δ ad rectos angulos conſtituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipſam Δ B communem planorum AB, BΓ ſectionem.

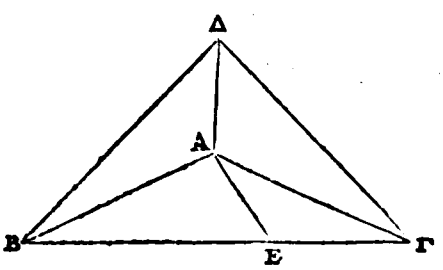
Ergo ſi duo plana ſe invicem ſecantia plano alicui ſint ad rectos angulos, & communis ipſorum ſectio eidem plano ad rectos angulos erit. quod erat demonſtrandum.

Prop. XX. Theor.

Si ſolidus angulus ſub tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores ſunt quomodocunque ſumpti.

SOlidus enim angulus ad A ſub tribus angulis planis BAΓ, ΓAΔ, ΔAB contineatur: dico angulorum BAΓ, ΓAΔ, ΔAB duos quoſlibet reliquo majores eſſe quomodocunque ſumptos.

Si enim BAΓ, ΓAΔ, ΔAB anguli inter ſe æquales ſint, perſpicuum eſt duos quoſlibet reliquo majores eſſe quomodocunque ſumptos. ſin aliter, ſit major BAΓ, & ad rectam lineam AB & ad punctum in ipſa A [per 23. 1.] conſtituatur angulo ΔAB in plano per BAΓ tranſeunte æqualis angulus BAE; ponaturque [per 3. 1.] ipſi AΔ æqualis AE; dein per E ducta BEΓ ſecet rectas lineas AB, AΓ in punctis B, Γ; & ΔB, ΔΓ jungantur. itaque quoniam ΔA eſt æqualis AE, communis autem AB, duæ ΔA, AB duabus AE, AB æquales ſunt. & angulus ΔAB æqualis eſt angulo BAE; baſis igitur ΔB [per 4.1.] baſi BE eſt æqualis. & quoniam duæ ΔB, ΔΓ ipſa BΓ majores ſunt, ex quibus ΔB æqualis oſtenſa eſt ipſi BE; erit reliqua ΔΓ quam reliqua EΓ major. quoniam autem ΔA eſt æqualis AE, communis autem AΓ, & baſis ΔΓ major baſi EΓ; erit [per 25. 1.] angulus ΔAΓ angulo EAΓ major. oſtenſus autem eſt & ΔAB angulus æqualis ipſi BAE: quare ΔAB, ΔAΓ anguli angulo BAΓ majores ſunt. ſimiliter quoque demonſtrabimus, ſi duo quilibet alii ſumantur, eos reliquo eſſe majores.



Si igitur ſolidus angulus ſub tribus angulis planis contineatur; duo quilibet reliquo majores ſunt quomodocunque ſumpti. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXI. Theor.

Omnis ſolidus angulus ſub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT ſolidus angulus ad A ſub planis angulis BAΓ, ΓAΔ, ΔAB contentus: dico angulos

ἄρα σημεῖα τὰ Δ τῷ ὑπκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνῃγμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῷ ὑπκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου πρὸς ὀρθὰς ἀναστβήσεται παλιν τὸ ΔB κοινῆς τομῆς τῶν AB, BΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο οποιαιῶν τὸν λοιπὸν μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ A ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ BAΓ, ΓAΔ, ΔAB περιεχέσθω· λέγω ὅτι τῶν ὑπὸ BAΓ, ΓAΔ, ΔAB γωνιῶν δύο οποιαιῶν τὸν λοιπὸν μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Εἰ μὴν ἴσαι αἱ ὑπὸ BAΓ, ΓAΔ, ΔAB γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν ὅτι δύο οποιαιῶν τὸν λοιπὸν μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. εἰ δὲ οὔ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ BAΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ ΔAB γωνίᾳ ἴση τῇ ὑπὸ BAE, καὶ κείσθω τῇ AΔ ἴση ἡ AE, καὶ διὰ τοῦ E σημείου διαχθεῖσα ἡ BEΓ τεμνέτω τὰς AB, AΓ εὐθείας, κατὰ τὰ B, Γ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔB, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ AE, κοινὴ δὲ ἡ AB, δύο δὴ αἱ ΔA, AB δυσὶ τὰις AE, AB ἴσαι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔAB γωνίᾳ τῇ ὑπὸ BAE ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔB βάσει τῇ BE ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔB, ΔΓ τῆς BΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ΔB τῇ BE ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ λοιπῆς τῆς EΓ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ AE, κοινὴ δὲ ἡ AΓ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσεως τῆς EΓ μείζων ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔAΓ γωνίας τῆς ὑπὸ EAΓ μείζων ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔAB τῇ ὑπὸ BAE ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔAB, ΔAΓ τῆς ὑπὸ BAΓ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο οποιαιῶν τὸν λοιπὸν μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἁπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ A περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ BAΓ, ΓAΔ, ΔAB· λέγω ὅτι

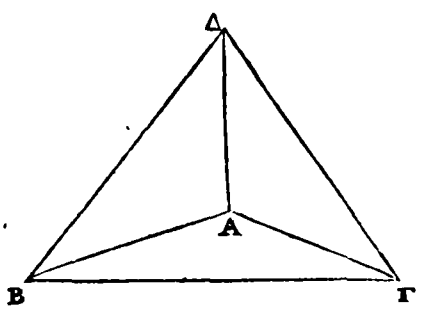
ὑπὸ αἱ ἴσαι τὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἑκάστης τ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο ὁποιαιοῦν τ λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ τ ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ, ΑΓΔ τ ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσι. καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΔΑ, ΑΔΒ τ ὑπὸ ΓΔΒ μείζονές εἰσιν· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΑΔΓ, ΑΔΒ τριῶν τ, ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἓξ ἄρα αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΑΔΓ, ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἑκάστῳ τ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα τ τριῶν τριγώνων ἑπτὰ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΔΑΓ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τρεῖς γωνίαι περιέχουσι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Πᾶσα ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ quatuor rectis esse minores.

Sumantur enim in unaquaque ipsarum ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ quævis puncta Β, Γ, Δ, & ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ jungantur. quoniam igitur solidus angulus ad Β continetur sub tribus angulis planis ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, [per 20. 11.] duo quilibet reliquo majores sunt: anguli igitur ΓΒΑ, ΑΒΔ angulo ΓΒΔ sunt majores. eadem ratione & anguli quidem ΒΓΑ, ΑΓΔ majores sunt angulo ΒΓΔ; & adhuc anguli ΓΔΑ, ΑΔΒ majores angulo ΓΔΒ; quare sex anguli ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΑΔΓ, ΑΔΒ tribus angulis ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ sunt majores. sed tres anguli ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ [per 32. 1.] sunt æquales duobus rectis: sex igitur anguli ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΑΔΓ, ΑΔΒ duobus rectis majores sunt. quoniam vero singulorum triangulorum ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ tres anguli sunt æquales duobus rectis, trium triangulorum novem anguli ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΔΑΓ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ sunt æquales sex rectis, ex quibus sex anguli ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ duobus rectis sunt majores: reliqui igitur tres anguli ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores erunt.



Quare omnis solidus angulus sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

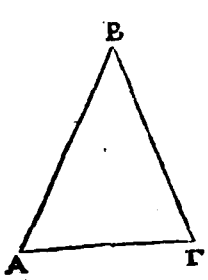
Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τ λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι· δυνατόν ἐστιν ἐκ τ ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

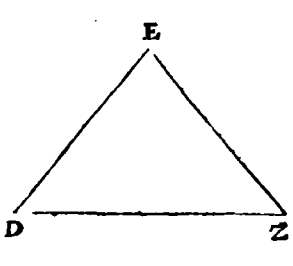
Prop. XXII. Theor.

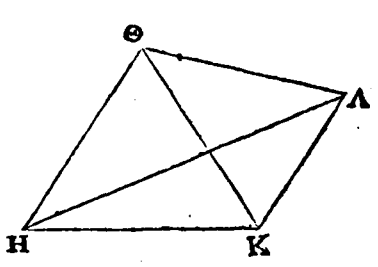
Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sunt majores quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest ut ex iis, quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τ λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ

SInt tres anguli plani ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, videlicet anguli quidem





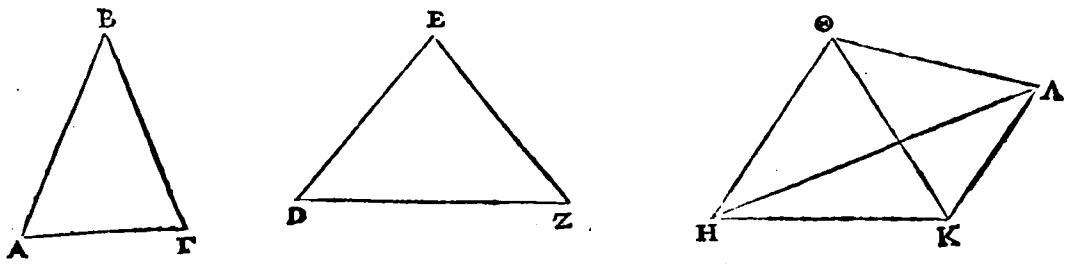


ΑΒΓ, ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΗΘΚ, αἱ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ, ΗΘΚ τ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΑΒΓ τ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ,

ΑΒΓ, ΔΕΖ majores angulo ΗΘΚ, anguli verò ΔΕΖ, ΗΘΚ majores angulo ΑΒΓ, & præterea anguli ΗΘΚ, ΑΒΓ angulo ΔΕΖ majores, sintque æquales rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ,

ΗΘ, ΘΚ; atque demum ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ jungantur: dico fieri poſſe, ut ex æqualibus ipſis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ triangulum conſtituatur; hoc eſt, ipſarum ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ duas quaſlibet reliqua eſſe majores quomodocunque ſumptas.

Si quidem igitur anguli ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ inter ſe æquales ſint; manifeſtum eſt æqualibus adeo factis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ex æqualibus ipſis triangulum conſtitui poſſe. ſin minus, ſint inæquales, & ad rectam lineam ΘΚ, atque ad punctum in ipſa Θ, angulo ΑΒΓ æqualis [per 23. 1.] angulus conſtituatur ΚΘΛ; & ponatur uni ipſarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ



æqualis ΘΛ; atque ΗΛ, ΚΛ jungantur. itaque quoniam duæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΚΘ, ΘΛ æquales ſunt, & angulus ad Β angulo ΚΘΛ æqualis; erit [per 4. 1.] baſis ΑΓ æqualis baſi ΚΛ. & quoniam anguli ΑΒΓ, ΗΘΚ angulo ΔΕΖ ſunt majores, æqualis autem eſt angulus ΑΒΓ angulo ΚΘΛ: erit ΗΘΛ angulo ΔΕΖ major. item quoniam duæ ΗΘ, ΘΛ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales ſunt, & angulus ΗΘΛ angulo Ε major; baſis ΗΛ [per 24. 1.] baſi ΔΖ major erit. ſed [per 20. 1.] ΗΚ, ΚΛ ipſa ΗΛ ſunt majores: multo igitur majores ſunt ΗΚ, ΚΛ ipſa ΔΖ. eſt autem ΚΛ æqualis ΑΓ: ergo ΑΓ, ΗΚ reliqua ΔΖ ſunt majores. ſimiliter demonſtrabimus & ipſas quidem ΑΓ, ΔΖ majores eſſe ΗΚ, ipſas vero ΗΚ, ΔΖ majores ΑΓ: fieri igitur poteſt [per 22. 1.] ut ex æqualibus ipſis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ triangulum conſtituatur.

τῶν ΗΘ, ΘΚ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συνίστασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ δύο ὁποιανοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμενα.

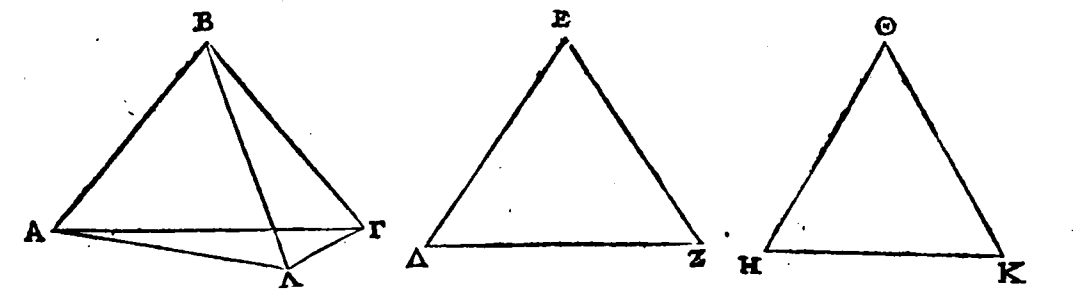
Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, φανερὸν ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσων γενομένων δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συνίστασθαι. εἰ δὲ ἄνισοι ἔσονται, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΚ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΘΛ· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΛ, ΚΛ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΛ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῶν ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΗΘΛ τῶν ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΘΛ γωνίας τῶν πρὸς τῷ Ε μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΗΛ βάσεως τῆς ΔΖ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ αἱ ΗΚ, ΚΛ τῶν ΚΛ μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΗΚ, ΚΛ τῶν ΔΖ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΑΓ· αἱ ΑΓ, ΗΚ ἄρα τῶν λοιπῶν τῶν ΔΖ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΖ τῶν ΗΚ μείζονές εἰσι, αἱ δὲ ΗΚ, ΔΖ τῶν ΑΓ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συνίστασθαι.

Aliter.

Sint dati tres anguli plani ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, quorum duo reliquo ſint majores quomodocunque ſumpti; contineant autem ipſos æqua-

Αλλως.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντη μεταλαμβανόμεναι, τουτέστιν



les rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, atque ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ jungantur: dico fieri poſſe ut ex æqualibus ipſis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ triangulum conſtituatur; hoc eſt rurſus duas reliqua majores eſſe quomodocunque ſumptas. ſi igitur rurſus anguli ad puncta Β, Ε, Θ ſint æquales, &

τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συνίστασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ δύο ὁποιανοῦν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶ πάντη μεταλαμβανόμεναι. εἰ μὲν οὖν καὶ πάλιν αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἔσονται)

ἴσαι ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσαι, καὶ ἑκάστη ἑκατέρᾳ τῶν δύο τῶν λοιπῶν μείζονες. ἐὰν δὲ ἄνισοι ὦσι αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ Β ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς Ε, Θ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ. καὶ φανερὸν ὅτι ἡ ΑΓ μετ' ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ τῆς λοιπῆς μείζων ἐστί. λέγω ὅτι καὶ αἱ ΔΖ, ΗΚ τῶν ΑΓ μείζονές εἰσι. συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΗΘΚ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΛ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΛ δυσὶ ταῖς ΗΘ, ΘΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΛ βάσει τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Θ σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΑΒΛ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία τῆς ὑπὸ ΛΒΓ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΛΒΓ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΑΓ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ ΗΚ τῇ ΑΛ· αἱ ἄρα ΔΖ, ΗΚ τῶν ΑΛ, ΛΓ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ΑΛ, ΛΓ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΔΖ, ΗΚ μείζονές εἰσι τῆς ΑΓ· τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ [per 4. 1.] æquales erunt, & duæ reliqua majores. ſin minus, ſint inæquales anguli ad puncta Β, Ε, Θ, & major qui eſt ad Β utrovis ipſorum qui ſunt ad Ε, Θ: major igitur eſt [per 24. 1.] & recta linea ΑΓ utravis ipſarum ΔΖ, ΗΚ. & manifeſtum eſt ipſam ΑΓ una cum alterutra ipſarum ΔΖ, ΗΚ reliqua eſſe majorem. dico & ΔΖ, ΗΚ ipſa ΑΓ majores eſſe. conſtituatur [per 23. 1.] ad rectam lineam ΑΒ & ad punctum in ea Β angulo ΗΘΚ æqualis angulus ΑΒΛ, & uni ipſarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ponatur æqualis ΒΛ, atque ΑΛ, ΛΓ jungantur. quoniam igitur duæ ΑΒ, ΒΛ duabus ΗΘ, ΘΚ æquales ſunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] baſis ΑΛ baſi ΗΚ æqualis. & quoniam anguli ad puncta Β, Θ angulo ΑΒΓ majores ſunt, ex quibus angulus ΗΘΚ eſt æqualis ipſi ΑΒΛ; erit reliquus qui ad Ε angulo ΛΒΓ major. item quoniam duæ ΛΒ, ΒΓ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales ſunt, altera alteri, & angulus ΔΕΖ angulo ΑΒΓ major; baſis ΔΖ [per 24. 1.] baſi ΑΓ major erit. oſtenſa eſt autem ΗΚ æqualis ΑΛ: ergo ΔΖ, ΗΚ ipſis ΑΛ, ΛΓ ſunt majores. ſed [per 20. 1.] ΑΛ, ΛΓ majores ſunt ipſa ΑΓ: multo igitur ΔΖ, ΗΚ ipſa ΑΓ majores erunt: quare rectarum linearum ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ duæ reliqua majores ſunt quomodocunque ſumptæ: ac propterea [per 22. 1.] fieri poteſt, ut ex æqualibus ipſis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ triangulum conſtituatur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

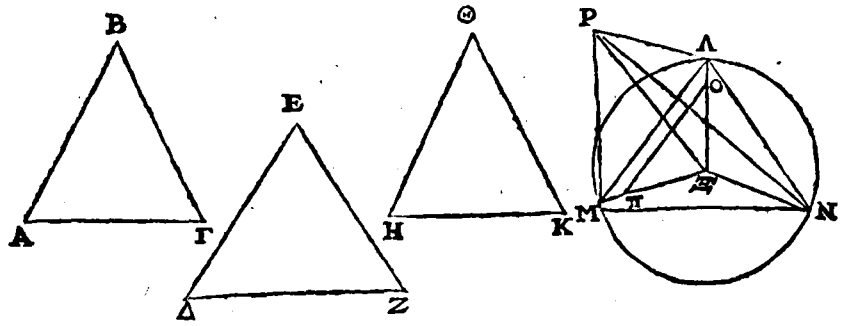
Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς τρεῖς τεττάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

PROP. XXIII. PROBL.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo ſunt majores quomodocunque ſumpti, ſolidum angulum conſtituere: oportet autem tres angulos quatuor rectis eſſe minores.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεττάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

SInt dati tres anguli plani ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, quorum duo reliquo ſint majores quomodocunque ſumpti, ſintque tres anguli quatuor rectis minores: oportet ex æqualibus ipſis ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ ſolidum angulum conſtituere.



ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΓ τῇ ΛΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΜΝ, καὶ ἔτι

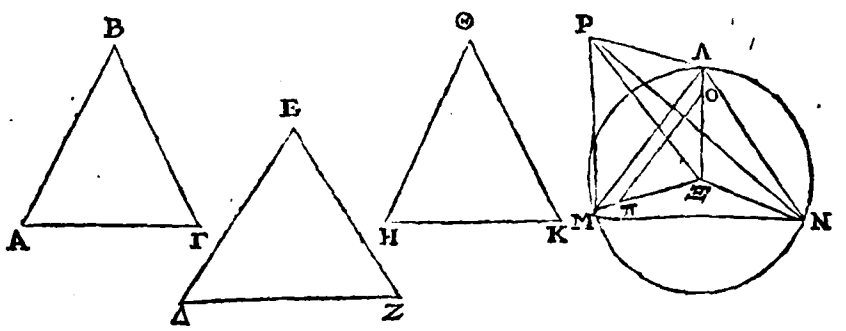
Abſcindantur æquales ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ; atque ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ jungantur. igitur [per 22. 11.] fieri poteſt ut ex æqualibus ipſis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ conſtituatur triangulum. itaque [per 22. 1.] conſtituatur ΛΜΝ, ita ut ΑΓ quidem ſit æqualis ΛΜ, ΔΖ vero ipſi ΜΝ; & præterea

HK ipſi ΛN: dein [per 5.4.] circa ΛMN triangulum circulus ΛMN deſcribatur; ſumatur vero circuli centrum, quod vel erit intra triangulum ΛMN, vel in uno ejus latere, vel extra.

Sit primum intra; ſitque Ξ; atque ΛΞ, MΞ, NΞ jungantur: dico AB majorem eſſe ipſa ΛΞ. ſi enim non ita ſit, vel AB erit æqualis ΛΞ, vel ea minor. ſit primum æqualis. quoniam igitur AB eſt æqualis ΛΞ, atque eſt AB ipſi BΓ æqualis; erit ΛΞ æqualis BΓ. eſt autem ΛΞ æqualis ΞM: duæ igitur AB, BΓ duabus ΛΞ, ΞM æquales ſunt altera alteri; & AΓ baſis baſi ΛM æqualis ponitur; quare [per 8. 1.] angulus ABΓ angulo ΛΞM eſt æqualis. eadem ratione & angulus quidem ΔEZ eſt æqualis angulo MΞN, angulus vero HΘK angulo NΞΛ: tres igitur anguli ABΓ, ΔEZ, HΘK tribus ΛΞM, MΞN, NΞΛ æquales ſunt. ſed tres ΛΞM, MΞN, NΞΛ quatuor rectis ſunt æquales: ergo & tres ABΓ, ΔEZ, HΘK æquales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur quatuor rectis minores, quod eſt abſurdum: non igitur AB ipſi ΛΞ eſt æqualis. dico præterea neque AB minorem eſſe ipſa ΛΞ. ſi enim fieri poteſt, ſit minor, ponaturque rectæ AB æqualis ΞO, ipſi vero BΓ æqualis ΞΠ, & OΠ jungatur. quoniam igitur AB eſt æqualis BΓ, & ΞO ipſi ΞΠ æqualis erit: ergo & reliqua OΛ reliquæ ΠM eſt æqualis: quare [per 2. 6.] ΛM parallela eſt ipſi OΠ, & ΛMΞ triangulum eſt triangulo OΠΞ æquiangulum: eſt igitur [per 4. 6.] ut ΞΛ ad ΛM ita ΞO ad OΠ; & permutando [per 16. 5.] ut ΛΞ ad ΞO ita ΛM ad OΠ. major autem eſt ΛΞ quam ΞO; ergo & ΛM quam OΠ eſt major. ſed ΛM poſita eſt [per conſtr.] æqualis AΓ; quare & AΓ quam OΠ major erit. itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB, BΓ duabus OΞ, ΞΠ æquales ſunt, & baſis AΓ major baſi OΠ; erit [per 24. 1.] angulus ABΓ angulo OΞΠ major. ſimiliter demonſtrabimus & ΔEZ angulum majorem eſſe angulo MΞN, & angulum HΘK angulo NΞΛ: tres igitur anguli ABΓ, ΔEZ, HΘK tribus ΛΞM, MΞN, NΞΛ ſunt majores. at anguli ABΓ, ΔEZ, HΘK quatuor rectis minores ponuntur: multo igitur anguli ΛΞM, MΞN, NΞΛ minores erunt quatuor rectis. ſed & æquales, quod eſt abſurdum: non igitur AB minor eſt quam ΛΞ. oſtenſum autem eſt neque eſſe æqualem: major ergo eſt AB quam ΛΞ. con-

τὸ HK τῇ ΛN, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛMN τρίγωνον κύκλος ὁ ΛMN, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον· ἔστω δὴ ἤτοι ἐντὸς ὂν ΛMN τριγώνου, ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός.

Ἐστω πρότερον ἐντὸς, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, MΞ, NΞ· λέγω ὅτι ἡ AB μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΛΞ, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΛΞ, ἀλλ' ἡ μὲν AB τῇ BΓ ἐστιν ἴση· ἡ ΛΞ ἄρα τῇ BΓ ἐστιν ἴση. ἡ δὲ ΛΞ τῇ ΞM, δύο δὴ αἱ AB, BΓ δυσὶ ταῖς ΛΞ, ΞM ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ AΓ βάσει τῇ ΛM ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ τῇ ὑπὸ ΛΞM ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔEZ τῇ ὑπὸ MΞN ἐστὶν ἴση, ἔτι δὲ ἡ ὑπὸ HΘK τῇ ὑπὸ NΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ ABΓ, ΔEZ, HΘK γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΛΞM, MΞN, NΞΛ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΛΞM, MΞN, NΞΛ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ABΓ, ΔEZ, HΘK τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὑπόκεινται δὲ καὶ τοσῶνδε ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ AB τῇ ΛΞ ἐστιν ἴση. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ AB τῇ ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν AB ἴση ἡ ΞO, τῇ δὲ BΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ OΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ BΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞO τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ OΛ λοιπῇ τῇ ΠM ἐστιν ἴση· παράλληλος ἄρα ἡ ΛM τῇ OΠ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛMΞ τῷ OΠΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛM οὕτως ἡ ΞO πρὸς τὴν OΠ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞO οὕτως ἡ ΛM πρὸς τὴν OΠ. μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞO· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛM τῆς OΠ. ἀλλ' ἡ ΛM καὶ τῇ AΓ ἴση· καὶ ἡ AΓ ἄρα τῆς OΠ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι αἱ AB, BΓ δυσὶ ταῖς OΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ AΓ βάσεως τῆς OΠ μείζων ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ γωνίας τῆς ὑπὸ OΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔEZ τῆς ὑπὸ MΞN μείζων ἐστὶν, ἔτι δὲ ἡ ὑπὸ HΘK τῆς ὑπὸ NΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ABΓ, ΔEZ, HΘK τριῶν τῶν ὑπὸ ΛΞM, MΞN, NΞΛ μείζονές εἰσιν· ἀλλ' αἱ ὑπὸ ABΓ, ΔEZ, HΘK τοσῶνδε ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ ΛΞM, MΞN, NΞΛ τοσῶνδε ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ AB ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΛΞ. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἡ AB τῆς ΛΞ. ἀνεσάτω δὴ

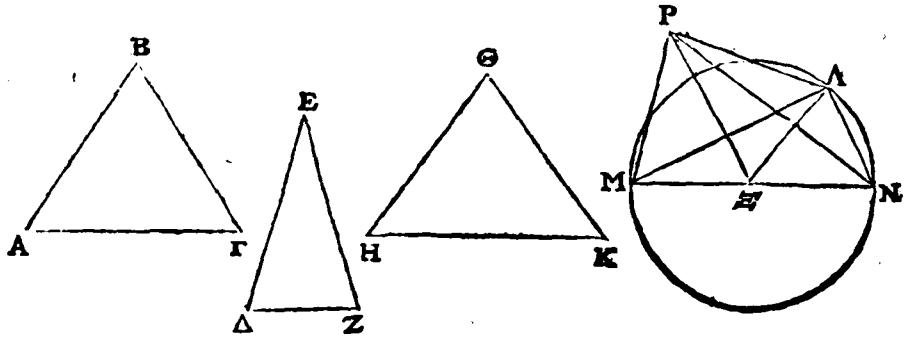


δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ διὰ τῶν ΛΜΝ κύκλου ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ· καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ δὲ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΡ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΛΜΝ κύκλου ἐπίπεδον· καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ ὀρθή ἐστιν ἡ ΡΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ· βάσις ἄρα ἡ ΛΡ βάσει τῇ ΡΜ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΡΛ, ΡΜ ἑκατέρᾳ τῶν ΡΝ ἴση ἐστίν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΡΛ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΛΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΡΛ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΡΛ. ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, τῇ δὲ ΡΛ ἴσαι ἑκατέρα τῶν ΡΜ, ΡΝ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἑκάστῃ τῶν ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΡ, ΡΜ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΛΜ βάσει τῇ ΑΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΡΜ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΜΡΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΡΝ τῇ ὑπὸ ΗΘΚ· οὐκ ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, στερεὰ γωνία συνίσταται ἡ πρὸς τῷ Ρ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ γωνιῶν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου μήτε τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς ΜΝ, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΛ· λέγω πάλιν ὅτι μεῖζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΔΕ, ΕΖ, δυσὶ ταῖς ΜΞ, ΞΛ, τουτέστι τῇ ΜΝ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ κεῖται ἴση· καὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΛΞ. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐλάττων, πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μεῖζον· ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. καὶ ἐὰν ὁμοίως λάβωμεν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΡΞ, συσταθήσεται τὸ προβλημα.

ſtituatur [per 12. 11.] à puncto Ξ circuli ΛΜΝ plano ad rectos angulos recta ΞΡ; & exceſſui, quo quadratum ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΛΞ, ponatur [per lem. ſubnex.] æquale quadratum quod ſit ex ΞΡ, atque ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ jungantur. quoniam igitur ΞΡ perpendicularis eſt ad planum ΛΜΝ circuli, & ad unumquamque ipſarum ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ [per 3. def. 11.] erit perpendicularis. atque quoniam ΛΞ eſt æqualis ΞΜ, communis autem & ad rectos angulos ΞΡ, erit [per 4. 1.] baſis ΛΡ æqualis baſi ΡΜ. eadem ratione & ΡΝ utrique ipſarum ΡΛ, ΡΜ eſt æqualis: tres igitur rectæ lineæ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ inter ſe æquales ſunt. & quoniam quadratum ex ΞΡ ponitur æquale exceſſui, quo quadratum ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΛΞ; erit quadratum ex ΑΒ quadratis ex ΛΞ, ΞΡ æquale. quadratis autem ex ΛΞ, ΞΡ æquale eſt [per 47. 1.] quadratum ex ΡΛ, rectus enim angulus eſt ΛΞΡ: ergo quadratum ex ΑΒ quadrato ex ΡΛ æquale erit; ideoque ΑΒ ipſi ΡΛ eſt æqualis. ſed ipſi quidem ΑΒ æqualis eſt unaquæque ipſarum ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ; ipſi vero ΡΛ æqualis utravis ipſarum ΡΜ, ΡΝ: unaquæque igitur ipſarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ unicuique ipſarum ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ eſt æqualis. quoniam vero duæ ΛΡ, ΡΜ duabus ΑΒ, ΒΓ æquales ſunt, & baſis ΛΜ ponitur æqualis baſi ΑΓ: erit [per 8. 1.] angulus ΛΡΜ æqualis angulo ΑΒΓ. eadem ratione & angulus quidem ΜΡΝ angulo ΔΕΖ, angulus autem ΛΡΝ angulo ΗΘΚ eſt æqualis: ex tribus igitur angulis planis ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ, qui æquales ſunt tribus datis ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ſolidus angulus conſtitutus eſt ad Ρ, qui ſub angulis ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΖΝ continetur.

Sed ſit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in ΜΝ, & ſit Ξ, atque ΞΛ jungatur: dico rurſus ΑΒ majorem eſſe ipſa ΛΞ. ſi enim non ita ſit, vel ΑΒ eſt æqualis ΛΞ vel ipſa minor. ſit primum æqualis: duæ igitur ΑΒ, ΒΓ, hoc eſt ΔΕ, ΕΖ, duabus ΜΞ, ΞΛ, hoc eſt ipſi ΜΝ, æquales ſunt. ſed ΜΝ ponitur æqualis ΔΖ; ergo

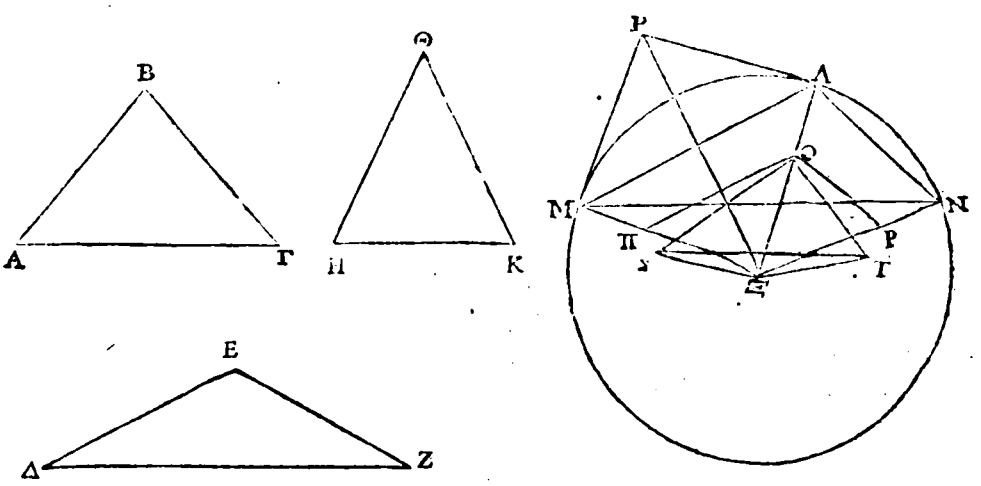


ΔΕ, ΕΖ ipſi ΔΖ ſunt æquales, quod [per 20. 1.] fieri non poteſt: non igitur ΑΒ eſt æqualis ΛΞ. ſimiliter neque minor; exinde enim majus abſurdum ſequeretur: ergo ΑΒ ipſa ΛΞ major eſt. & ſi, ſimiliter atque prius, exceſſui quo quadratum ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΛΞ, æquale ponatur [per lemma ſubnexum] quadratum ex ΡΞ, & ipſa ΡΞ circuli plano ad rectos angulos conſtituatur, fiet problema.

Deinde

Deinde vero ſit centrum circuli extra triangulum ΑΜΝ, ſitque Ξ, atque ΑΞ, ΜΞ, ΝΞ jungantur: dico & ſic ΑΒ ipſa ΑΞ majorem eſſe. ſi enim non ita ſit, vel æqualis eſt, vel minor. ſit primum æqualis: duæ ideo ΑΒ, ΒΓ duabus ΜΞ, ΞΑ æquales ſunt altera alteri, & baſis ΑΓ etiam æqualis baſi ΜΑ: angulus igitur ΑΒΓ [per 8. 1.] æqualis eſt angulo ΜΞΑ. eadem ratione & ΗΘΚ angulus ipſi ΑΞΝ eſt æqualis: quare totus ΜΞΝ eſt æqualis duobus ΑΒΓ, ΗΘΚ. ſed & anguli ΑΒΓ, ΗΘΚ angulo ΔΕΖ majores ſunt: & angulus igitur ΜΞΝ ipſo ΔΕΖ eſt major. & quoniam duæ ΔΕ, ΕΖ duabus ΜΞ, ΞΝ æquales ſunt, & baſis ΔΖ æqualis baſi ΜΝ; erit [per 8. 1.] ΜΞΝ angulus angulo ΔΕΖ æqualis. oſtenſus autem eſt major, quod eſt abſurdum: non igitur ΑΒ eſt æqualis ΑΞ. deinceps vero oſtendemus neque minorem eſſe: quare major neceſſario erit. & ſi rurſus circuli plano ad rectos angulos conſtituamus ΞΡ, & ipſam æqualem ponamus [per lem. ſubnexum] lateri quadrati ejus, quo quadratum ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΑΞ, problema conſtituetur. dico autem neque minorem eſſe ΑΒ ipſa ΑΞ. ſi enim fieri poteſt, ſit minor; & ipſi quidem ΑΒ æqualis ponatur ΞΟ, ipſi vero ΒΓ æqualis ΞΠ, & ΟΠ jungatur. quoniam igitur ΑΒ ipſi ΒΓ eſt æqualis, erit ΞΟ æqualis ΞΠ: ergo & reliqua ΟΛ reliquæ ΠΜ æqualis: parallela igitur eſt [per 2. 6.] ΛΜ ipſi ΠΟ, adeoque triangulum ΛΜΞ triangulo ΠΞΟ æquiangulum: quare [per 4. 6.] ut ΛΞ ad ΛΜ ita ΞΟ ad ΟΠ; & permutando ut ΛΞ ad ΞΟ ita ΛΜ ad ΟΠ. major autem eſt ΛΞ quam ΞΟ; ergo ΛΜ quam ΟΠ eſt major. ſed [per conſtr.] ΛΜ eſt æqualis ΑΓ; quare & ΑΓ ipſa ΟΠ major erit. itaque quoniam duæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΟΞ, ΞΠ ſunt æquales altera alteri, & baſis ΑΓ major eſt baſi ΟΠ; erit [per 25. 1.] angulus ΑΒΓ angulo ΟΞΠ major. ſimiliter & ſi ΞΡ ſumatur æqualis utrivis ipſarum ΞΟ, ΞΠ, & jungatur ΟΡ, oſtendemus angulum ΗΘΚ angulo ΟΞΡ eſſe majorem. conſtituatur ad rectam lineam ΑΞ & ad punctum in ipſa Ξ angulo quidem ΑΒΓ æqualis angulus ΑΞΣ, angulo autem ΗΘΚ æqualis

Αλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ ΑΜΝ τριγώνου, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΞ, ΜΞ, ΝΞ· λέγω δὴ ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΑΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση· δύο ἄρα αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΜΞ, ΞΑ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΜΑ ἐστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΞΑ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΑΞΝ ἐστιν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ καὶ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ὑπὸ ΜΞΝ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΜΞ, ΞΝ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΜΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΑΞ. ἐλάσσων δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων· μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν τὸ ΞΡ, καὶ ἴσῃ αὐτῇ ὑποθώμεθα, ᾧ μεῖζον δυνατὸν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ, συναχθήσεται τὸ προβλημα. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΑΞ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. καὶ



ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΟΛ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστιν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΠΟ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τριγώνον τῷ ΠΞΟ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΛΜ οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΟΠ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΟ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΟΠ. μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. ἀλλὰ ἡ ΛΜ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ ἐστι μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ καὶν τὸ Ξ Ρ ἴσον ἑκατέρᾳ τῶν ΞΟ, ΞΠ ἀπολάβωμεν, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὸ ΟΡ, δείξομεν ὅτι ἡ ὑπὸ ΗΘΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΟΞΡ μείζων ἐστίν. συνεστάτω δὴ πρὸς τῇ ΛΞ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ξ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΣ, τῇ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ

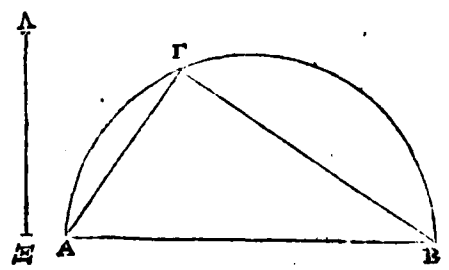
ἴση

ἴση ἡ ὑπὸ ΑΞΤ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ΞΣ, ΞΤ τῇ ΟΞ ἴση, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΣ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΟΞΣ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΛΜ, βάσει τῇ ΟΣ ἐστιν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΝ τῇ ΟΤ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΛ, ΛΝ δυσὶ ταῖς ΟΣ, ΟΤ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΛΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΟΤ μείζων ἐστὶ· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΣΞ, ΞΤ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΞΤ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΣΞΤ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον.

ΛΓΤ, & ponatur utraque ΞΣ, ΞΤ ipſi ΟΞ æqualis, junganturque ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. quoniam autem duæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΟΞ, ΞΣ æquales ſunt, & angulus ΑΒΓ æqualis angulo ΟΞΣ, erit [per 4. 1.] baſis ΑΓ, hoc eſt ΛΜ, baſi ΟΣ æqualis. eadem ratione & ΛΝ eſt æqualis ipſi ΟΤ. & quoniam duæ ΜΛ, ΛΝ duabus ΟΣ, ΟΤ ſunt æquales, & angulus ΜΛΝ major angulo ΣΟΤ; erit [per 24. 1.] & baſis ΜΝ baſi ΣΤ major. ſed ΜΝ eſt æqualis ΔΖ: ergo & ΔΖ quam ΣΤ major erit. quoniam igitur duæ ΔΕ, ΕΖ duabus ΣΞ, ΞΤ æquales ſunt, & baſis ΔΖ major baſi ΣΤ; erit [per 25. 1.] angulus ΔΕΖ angulo ΣΞΤ major. æqualis autem eſt angulus ΣΞΤ angulis ΑΒΓ, ΗΘΚ: ergo ΔΕΖ angulus angulis ΑΒΓ, ΗΘΚ major eſt. ſed & minor, quod fieri non poteſt.

ΛΗΜΜΑ.

Οὗ δὲ τρόπον ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, δείξομεν ὕστερον.



Ἐκκείσθωσαν αἱ ΑΒ, ΛΞ εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ ΛΞ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΒΓ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΛΞ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἐὰν οὖν τῇ ΓΒ ἴσῃ τῇ ΞΡ παραλάβωμεν, ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΡ. ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

LEMMA.

Quo autem modo ſumatur quadratum ex ΡΞ æquale ei, quo quadratum ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΛΞ, ita oſtendemus.

Exponantur rectæ lineæ ΑΒ, ΛΞ, ſitque major ΑΒ, & ab ipſa deſcribatur ſemicirculus ΑΒΓ: & in ΑΒΓ aptetur recta linea ΑΓ ipſi ΛΞ æqualis, & ΒΓ jungatur.

Itaque quoniam angulus ΑΓΒ eſt in ſemicirculo ΑΒΓ, erit [per 31. 3.] ΑΓΒ rectus. quadratum igitur quod fit ex ΑΒ æquale eſt [per 47. 1.] & quadrato quod ex ΑΓ & ei quod ex ΓΒ: ergo quadratum ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΑΓ quadrato ex ΓΒ. æqualis autem eſt ΑΓ ipſi ΛΞ: quadratum igitur ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΛΞ quadrato ex ΓΒ. quare ſi ipſi ΓΒ æqualem ſumamus ΞΡ, quadratum ex ΑΒ ſuperabit quadratum ex ΛΞ eo quod fit ex ΞΡ quadrato. quod facere ſuſcepimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι.

Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΔΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΖΒ, ΑΕ· λέγω ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΑΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ παράλληλος· παρ-

PROP. XXIV. THEOR.

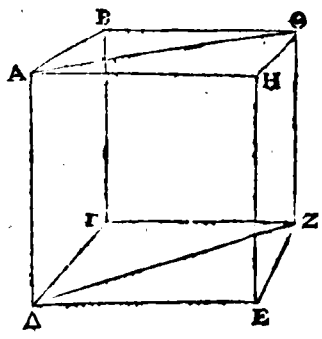
Si ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana & æqualia & parallelogramma ſunt.

Solidum enim ΓΔΘΗ ſub parallelis planis ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΖΒ, ΑΕ contineatur: dico oppoſita ejus plana & æqualia & parallelogramma eſſe.

Quoniam enim duo plana parallela ΒΗ, ΓΕ à plano ΑΓ ſecantur, communes ipſorum ſectiones [per 16. 11.] parallelæ ſunt: ergo ΑΒ ipſi ΔΓ eſt parallela. rurſus, quoniam duo plana parallela ΒΖ, ΑΕ ſecantur à plano ΑΓ, communes ipſorum ſectiones parallelæ ſunt: parallela igitur eſt ΑΔ ipſi ΒΓ. oſtenſa autem eſt & ΑΒ parallela ipſi ΔΓ: ergo ΑΓ

parallelogrammum eſt. ſimiliter demonſtrabimus & unumquodque ipſorum Δ Z, Z H, H B, B Z, A E parallelogrammum eſſe.

Jungantur A Θ, Δ Z. & quoniam parallela eſt A B quidem ipſi Δ Γ, B Θ vero & ipſi Γ Z; duæ quidem A B, B Θ ſeſe tangentes duabus rectis Δ Γ, Γ Z ſeſe tangentibus parallelæ erunt, & non in eodem plano: quare [per 10. 11.] æquales angulos continebunt: angulus igitur A B Θ angulo Δ Γ Z eſt æqualis. & quoniam [per 34. 1.] duæ A B, B Θ duabus Δ Γ, Γ Z æquales ſunt, & angulus A B Θ æqualis angulo Δ Γ Z; erit [per 4. 1.] baſis A Θ baſi Δ Z æqualis, & A B Θ triangulum æquale triangulo Δ Γ Z. & eſt [per 34. 1.] ipſius quidem A B Θ trianguli duplum B H parallelogrammum; ipſius vero Δ Γ Z trianguli duplum parallelogrammum Γ E; erit ergo B H parallelogrammum æquale parallelogrammo Γ E. ſimiliter demonſtrabimus & A Γ parallelogrammum parallelogrammo H Z, & parallelogrammum A E parallelogrammo B Z æquale eſſe.



Si igitur ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana & æqualia & parallelogramma ſunt. quod erat demonſtrandum.

ἐαλληλόγραμμον ἄρα τὸ A Γ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκαστον τῶν Δ Z, Z H, H B, B Z, A E παραλληλόγραμμόν ἐστιν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ A Θ, Δ Z. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν A B τῇ Δ Γ, ἡ δὲ B Θ τῇ Γ Z· δύο δὴ αἱ A B, B Θ ἁπτόμεναι ἀλλήλων τοῖς δύο εὐθείαις ταῖς Δ Γ, Γ Z ἁπτομέναις ἀλλήλων οὐκ εἰσὶ παράλληλοι ἐσται, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέχουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ A B Θ γωνία τῇ ὑπὸ Δ Γ Z. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ A B, B Θ δυσὶ ταῖς Δ Γ, Γ Z ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ A B Θ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ Δ Γ Z ἴση· βάσις ἄρα ἡ A Θ βάσει τῇ Δ Z ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ A B Θ τρίγωνον τῷ Δ Γ Z τριγώνῳ ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι τοῦ μὲν A B Θ διπλάσιον τὸ B H παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ Δ Γ Z διπλάσιον τὸ Γ E παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ B H παραλληλόγραμμον τῷ Γ E παραλληλογράμμῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ μὲν A Γ τῷ H Z ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ A E τῷ B Z.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXV. THEOR.

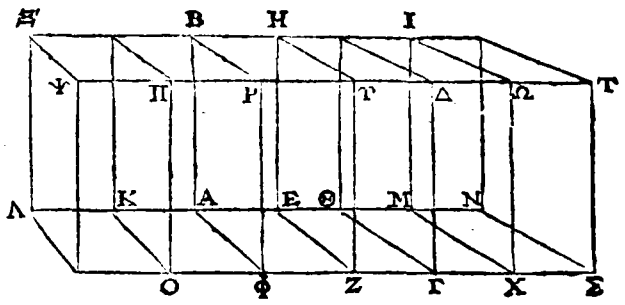
Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit ut baſis ad baſim ita ſolidum ad ſolidum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

SOlidum enim parallelepipedum A B Γ Δ plano T E ſecetur oppoſitis planis P A, Δ Θ parallelo: dico ut baſis A E Z Φ ad baſim E Θ Γ Z ita eſſe A B Z T ſolidum ad ſolidum E H Γ Δ.

Producatur enim A Θ ex utraque parte, & ponantur ipſi quidem E Θ æquales quotcunque Θ M, M N, ipſi vero A E æquales quotcunque A K, K Λ, & compleantur parallelogramma Λ O, K Φ, Θ X, M Σ, & ſolida A Π, K Ψ, Δ M, M T. quoniam igitur æquales inter ſe ſunt Λ K, K A, A E rectæ lineæ, erunt [per 38. 1.] & parallelogramma Λ O, K Φ, A Z inter ſe æqualia, itemque æqualia inter ſe parallelogramma K Ξ, K B, A H, & adhuc [per 24. 11.] parallelogramma Λ Ψ, K Π, A P inter ſe æqualia; oppoſita enim ſunt. eadem ratione & parallelogramma E Γ, Θ X, M Σ æqualia ſunt inter ſe: itemque parallelogramma Θ H, Θ I, I N inter ſe



Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ A B Γ Δ ἐπιπέδῳ τῷ T E τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς P A, Δ Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ A E Z Φ βάσις πρὸς τὴν E Θ Γ Z βάσιν οὕτως τὸ A B Z T στερεὸν πρὸς τὸ E H Γ Δ στερεόν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ A Θ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν E Θ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ Θ M, M N, τῇ δὲ A E ἴσαι αἱ A K, K Λ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ Λ O, K Φ, Θ X, M Σ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ Λ Π, K Ψ, Δ M, M T στερεά. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ Λ K, K A, A E εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν Λ O, K Φ, A Z παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ K Ξ, K B, A H ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ Λ Ψ, K Π, A P ἀλλήλοις· ἀπεναντίον γάρ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ E Γ, Θ X, M Σ παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ Θ H, Θ I, I N ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις,

καὶ

καὶ ἔστι τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα στερεὰ τὰ ΑΠ, ΚΡ, ΑΤ ἴσων τριῶν ἐπιπέδοις ἐστὶν ἴσα. ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα· τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ ΑΠ, ΚΡ, ΑΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΛΖ βάσεως ποσαπλασίων ἐστὶ καὶ τὸ ΛΤ στερεὸν τοῦ ΛΤ στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΖ βάσις τῆς ΖΘ βάσεως ποσαπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΝΤ στερεὸν τοῦ ΘΤ στερεοῦ. εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΖ βάσις τῇ ΝΖ βάσει ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΛΤ στερεὸν τῷ ΝΤ στερεῷ, εἰ δὲ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΤ στερεὸν τοῦ ΝΤ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν ΑΤ, ΤΘ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΑΖ βάσεως καὶ τοῦ ΑΤ στερεοῦ, ἥτις ΛΖ βάσις καὶ τὸ ΛΤ στερεόν, τῆς δὲ ΘΖ βάσεως καὶ τοῦ ΘΤ στερεοῦ, ἥτις ΝΖ βάσις καὶ τὸ ΝΤ στερεόν· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΤ στερεὸν τοῦ ΝΤ· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν οὕτω τὸ ΑΤ στερεὸν πρὸς τὸ ΤΘ στερεόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

æqualia, & insuper parallelogramma ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ: tria igitur plana solidorum ΑΠ, ΚΡ, ΑΤ tribus planis æqualia sunt. sed tria tribus oppositis sunt æqualia: ergo [per 10. def. 11.] tria solida ΑΠ, ΚΡ, ΑΤ inter se æqualia erunt. eadem ratione & tria solida ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ sunt æqualia inter se: quotuplex igitur est basis ΑΖ ipsius ΑΖ basis totuplex est & ΑΤ solidum solidi ΑΤ. eadem ratione quotuplex est ΝΖ basis ipsius basis ΘΖ totuplex est & solidum ΝΤ ipsius ΘΤ solidi. porro si basis ΑΖ est æqualis basi ΝΖ & solidum ΑΤ solido ΝΤ erit æquale, & si ΑΖ basis superat ΝΖ basim & solidum ΑΤ solidum ΝΤ superabit, & si minor minus: quatuor igitur magnitudinibus expositis, duabus scilicet basibus ΑΖ, ΖΘ, & duobus solidis ΑΤ, ΤΘ, sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem ΑΖ & ΑΤ solidi, videlicet basis ΛΖ & solidum ΛΤ; basis vero ΘΖ & ΘΤ solidi, nempe basis ΝΖ & solidum ΝΤ: demonstratum autem est si basis ΑΖ superat basim ΝΖ, & ΑΤ solidum solidum ΝΤ superare; & si æqualis, æquale; & si minor, minus: est igitur [per 5. def. 5.] ut ΑΖ basis ad basim ΖΘ ita ΑΤ solidum ad solidum ΤΘ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

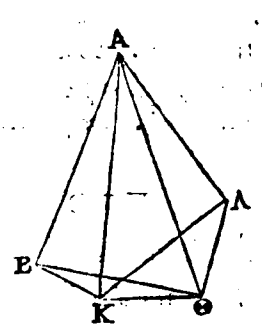
Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Prop. XXVI. Probl.

Ad datam rectam lineam & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem angulum constituere.

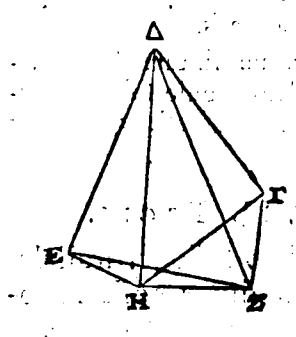
Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΓ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΖΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ μὲν ὑπὸ ΕΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΛ, τῇ δὲ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΚ, καὶ κείσθω τῇ ΔΗ ἴση ἡ ΑΚ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Κ σημείου τῷ διὰ τῶν ΒΑΛ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΘ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΗΖ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ· λέγω ὅτι ἡ πρὸς τῷ Α στερεὰ γωνία ὑπὸ τῶν ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν.

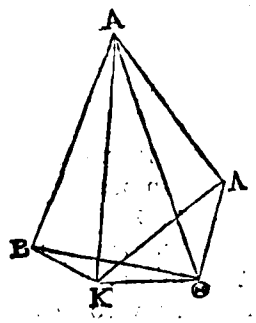


SIT data quidem recta linea ΑΒ, datum autem in ipsa punctum Α, & datus solidus angulus ad Δ qui sub ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ angulis planis contineatur: oportet vero ad datam rectam lineam ΑΒ & ad datum in ipsa punctum Α dato angulo solido ad Δ æqualem solidum angulum constituere.

Sumatur enim in linea ΔΖ quodvis punctum Ζ, à quo ad planum per ΕΔ, ΔΓ transiens [per 11. 11.] ducatur perpendicularis ΖΗ, quæ plano in puncto Η occurrat; jungaturque ΔΗ; dein [per 23. 1.] ad rectam lineam ΑΒ & ad datum in ipsa punctum Α angulo quidem ΒΔΓ æqualis angulus constituatur ΒΑΛ, angulo autem ΕΔΗ constituatur æqualis ΒΑΚ, deinde [per 3. 1.] ipsi ΔΗ ponatur æqualis ΑΚ, & à puncto Κ plano per ΒΑΛ [per 12. 11.] ad rectos angulos erigatur ΚΘ; ponaturque demum ipsi ΗΖ æqualis ΚΘ, & ΘΑ jungatur: dico angulum solidum ad Α, qui sub angulis ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ comprehenditur, æqualem esse solido angulo ad Δ sub angulis ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ comprehenso.



Sumantur enim æquales rectæ lineæ AB, ΔE, & jungantur ΘB, KB, ZB, HE. quoniam igitur ZH perpendicularis eſt ad ſubjectum planum; & ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt ſuntque in ſubjecto plano [per 3. def. 11.] rectos faciet angulos: uterque igitur angulorum ZHΔ, ZHE rectus eſt. eadem ratione & uterque ipſorum ΘKA, ΘKB eſt rectus. & quoniam duæ KA, AB duabus HΔ, ΔE æquales ſunt altera alteri & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] baſis BK baſi EH æqualis. eſt autem & KΘ æqualis HZ, atque angulos rectos continent: æqualis igitur eſt & ΘB ipſi ZE. rurſus quoniam duæ AK, KΘ duabus ΔH, HZ æquales ſunt, & rectos continent angulos; erit baſis AΘ ipſi ΔZ æqualis. eſtque AB æqualis ΔE: duæ igitur ΘA, AB duabus ZΔ, ΔE ſunt æquales, & baſis ΘB eſt æqualis baſi ZB: ergo angulus BAΘ angulo EΔZ æqualis erit. eadem ratione & angulus ΘAΛ angulo ZΔΓ eſt æqualis: nempe ſi aſſumamus æquales AΛ, ΔΓ, & jungamus KΛ, ΘΛ, HΓ, ZΓ, quia totus angulus BAΛ eſt æqualis toti EΔΓ, quorum BAK ipſi EΔH ponitur æqualis; erit reliquus KAΛ æqualis reliquo HΔΓ. & quoniam duæ KA, AΛ duabus HΔ, ΔΓ æquales ſunt, & angulos æquales continent; baſis KΛ [per 4. 1.] baſi HΓ æqualis erit. eſt autem & KΘ æqualis HZ; duæ igitur ΛK, KΘ duabus ΓH, HZ ſunt æquales, angulosque rectos continent: ergo baſis ΘΛ æqualis eſt baſi ZΓ. rurſus quoniam duæ ΘA, AΛ duabus ZΔ, ΔΓ æquales ſunt, & baſis ΘΛ æqualis baſi ZΓ; erit [per 8. 1.] angulus ΘAΛ æqualis angulo ZΔΓ. atque eſt angulus BAΛ angulo EΔΓ æqualis.



Ad datam igitur rectam lineam & ad datum in ipſa punctum dato angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtitutus eſt. quod erat faciendum.

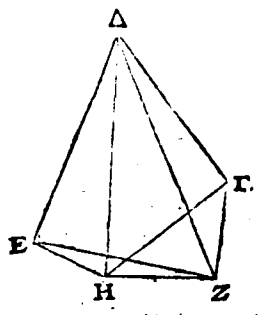
PROP. XXVII. PROBL.

A data recta linea dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

SIT recta quidem linea AB; datum vero ſolidum parallelepipedum ΔΓ: oportet autem a data recta linea AB dato ſolido parallelepipedo ΔΓ ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

Conſtituatur enim ad rectam lineam AB & ad datum in ipſa punctum A angulo ſolido ad Γ æqualis angulus qui ſub angulis EAΘ, ΘAK,

Απειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ AB, ΔE, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘB, KB, ZE, HE. καὶ ἐπεὶ ἡ ZH ὀρθὴ ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ZHΔ, ZHE γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘKA, ΘKB γωνιῶν ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ KA, AB, δυσὶ ταῖς HΔ, ΔE ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ BK βάσει τῇ EH ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ KΘ τῇ ZH ἴση, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘB τῇ ZE. πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ AK, KΘ δυσὶ ταῖς ΔH, HZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ AΘ βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ AB τῇ ΔE ἴση· δύο δὴ αἱ ΘA, AB δυσὶ ταῖς ZΔ, ΔE ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΘB βάσει τῇ ZE ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ BAΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EΔZ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΘAΛ τῇ ὑπὸ ZΔΓ ἴση ἐστίν· ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς AΛ, ΔΓ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς KΛ, ΘΛ, HΓ, ZΓ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ BAΛ ὅλῃ τῇ ὑπὸ EΔΓ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ BAK τῇ ὑπὸ EΔH ὑπόκειται ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ KAΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ HΔΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ KA, AΛ δυσὶ ταῖς HΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ KΛ βάσει τῇ HΓ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ KΘ τῇ HZ ἴση· δύο δὴ αἱ ΛK, KΘ δυσὶ ταῖς ΓH, HZ εἰσιν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΘΛ βάσει τῇ ZΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘA, AΛ δυσὶ ταῖς ZΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΘΛ βάσει τῇ ZΓ ἐστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘAΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ZΔΓ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ BAΛ τῇ ὑπὸ EΔΓ ἴση.



Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συνέστηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

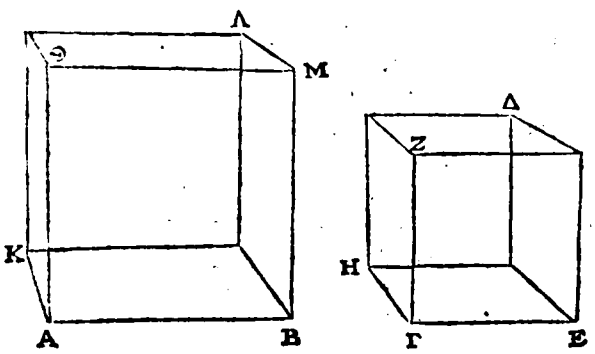
Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὁμοίου τε καὶ ὁμοίως κειμένου στερεοῦ παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΔΓ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς AB τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΔΓ ὁμοίου τε καὶ ὁμοίως κειμένου στερεοῦ παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν BAΘ, ΘAK,

KAB,

ΚΑΒ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΘ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΓΗ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΚΑΘ τῇ ὑπὸ ΗΓΖ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΑΛ στερεόν.



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, καὶ ἐστὶν ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΓΗ, ΒΑΚ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΗΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΒ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι, καὶ ἔτι τὸ ΖΕ τῷ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΓΔ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΑΛ στερεοῦ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΛ στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν.

Ἀπὸ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΚΑΒ contineatur, ita ut angulus quidem ΒΑΘ æqualis ſit angulo ΕΓΖ, angulus vero ΒΑΚ angulo ΕΓΗ, & adhuc angulus ΚΑΘ angulo ΗΓΖ æqualis; dein [per 12. 6.] fiat ut ΕΓ ad ΓΗ ita ΒΑ ad ΑΚ, atque ut ΗΓ ad ΓΖ ita ΚΑ ad ΑΘ: ergo ex æquo [per 22. 5.] ut ΕΓ ad ΓΖ ita erit ΒΑ ad ΑΘ. compleantur deniq; parallelogrammum ΒΘ & ΑΛ ſolidum.

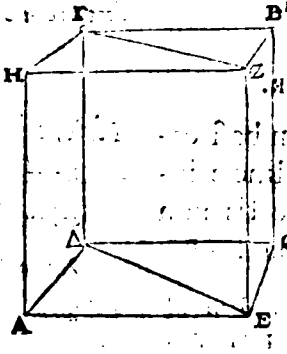
Quoniam igitur eſt ut ΕΓ ad ΓΗ ita ΒΑ ad ΑΚ; erunt circa æquales angulos ΕΓΗ, ΒΑΚ latera proportionalia; ideoque [per 4. 6.] parallelogrammo ΚΒ parallelogrammum ΗΕ ſimile. eadem quoq; ratione parallelogrammum ΚΘ ſimile eſt parallelogrammo ΗΖ, & parallelogrammo ΘΒ parallelogrammum ΖΕ: tria igitur parallelogramma ſolidi ΓΔ tribus parallelogrammis ſolidi ΑΛ ſimilia ſunt. ſed [per 24. 11.] tria tribus oppoſitis ſunt æqualia & ſimilia: ergo totum ΓΔ ſolidum toti ſolido ΑΛ ſimile erit.

A data igitur recta linea ΑΒ dato ſolido parallelepipedo ΓΔ ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum ΑΛ deſcriptum eſt. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς ΖΓ, ΔΕ· λέγω ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.



Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΕ ἴσον, ἀπεναντίον γάρ, τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ, ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει· ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ στερεὸν δίχα τετμῆται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι

PROP. XXVIII. THEOR.

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonales oppoſitorum planorum, ſolidum ab ipſo plano bifariam ſecabitur.

SOlidum enim parallelepipedum ΑΒ ſecetur plano ΓΔΕΖ per diagonales oppoſitorum planorum, videlicet ΓΖ, ΔΕ: dico ſolidum ΑΒ à plano ΓΔΕΖ bifariam ſecari.

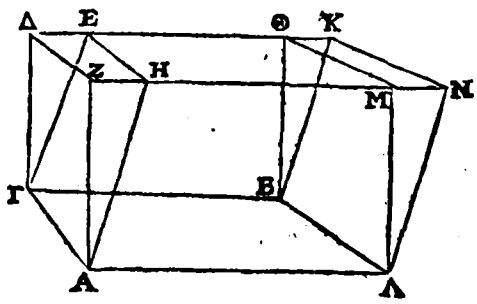
Quoniam enim æquale eſt [per 34. 1.] ΓΗΖ triangulum triangulo ΓΒΖ, triangulum vero ΑΔΕ triangulo ΔΕΘ; eſt autem [per 24. 11.] & ΓΑ parallelogrammum parallelogrammo ΒΕ æquale, oppoſitum enim eſt; & parallelogrammum ΗΕ æquale parallelogrammo ΓΘ: erit [per 10. def. 11.] priſma contentum ſub duobus triangulis ΓΗΖ, ΑΔΕ & tribus parallelogrammis ΗΕ, ΑΓ ΓΕ æquale priſmati quod continetur ſub duobus triangulis ΓΖΒ, ΔΕΘ & tribus parallelogrammis ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ; namque ſub planis & numero & magnitudine æqualibus continentur: ergo totum ΑΒ ſolidum à plano ΓΔΕΖ bifariam ſecatur. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXIX. THEOR.

Solida parallelepipeda in eadem basi eademque altitudine, quorum insistentes lineæ in eisdem lineis rectis collocantur, inter se sunt æqualia.

SInt enim in eadem basi AB eademque altitudine solida parallelepipeda ΓM, ΓN, quorum lineæ insistentes AZ, AH, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK sint in eisdem rectis lineis ZN, ΔK: dico solidum ΓM solido ΓN æquale esse.

Quoniam enim utrumque ipsorum ΓΘ, ΓK est parallelogrammum, erit [per 34.1.] ΓB utrique ipsarum ΔΘ, EK æqualis: ergo & ΔΘ est æqualis ipsi EK. communis auferatur EΘ: reliqua igitur ΔE æqualis est reliquæ ΘK: quare [per 8.1.] & ΔEΓ triangulum est æquale triangulo ΘKB; parallelogrammum autem ΔH [per 36.1.] est æquale parallelogrammo ΘN. eadem ratione & AZH triangulum æquale est triangulo ΛMN. est autem [per 24.11.] parallelogrammum ΓZ parallelogrammo BM, & parallelogrammum ΓH parallelogrammo BN æquale; opposita enim sunt; ergo [per 10.def.11.] & prisma contentum sub duobus triangulis AZH, ΔEΓ & tribus parallelogrammis AΔ, ΔH, HΓ est æquale prismati quod sub duobus triangulis ΛMN, ΘBK & tribus parallelogrammis BM, NΘ, BN continetur. commune apponatur solidum, cujus basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi HEΘM: ergo totum ΓM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo ΓN est æquale.



Solida igitur parallelepipeda in eadem basi eademque altitudine, quorum insistentes lineæ in eisdem lineis rectis collocantur, inter se sunt æqualia. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Τὰ ὑπὶ τὴν αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ὑπὶ τὰ αὐτῶν εἰσιν εὐθεῖαι, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ὑπὶ τὴν αὐτῆς βάσεως τὴν AB στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓM, ΓN ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ AZ, AH, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK ἐπὶ τὰ αὐτῶν εὐθείων ἔστωσαν τὰ ZN, ΔK· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓM στερεὸν τῷ ΓN στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΓΘ, ΓK, ἴση ἐστὶν ἡ ΓB ἑκατέρᾳ τῶν ΔΘ, EK· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ EK ἐστιν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ EΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔE λοιπῇ τῇ ΘK ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ τὸ ΔEΓ τρίγωνον τῷ ΘKB τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΔH παραλληλόγραμμον τῷ ΘN παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ AZH τρίγωνον τῷ ΛMN τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὴν ΓZ παραλληλόγραμμον τῷ BM παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓH τῷ BN, ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν AZH, ΔEΓ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν AΔ, ΔH, HΓ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΛMN, ΘBK τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν BM, NΘ, BN. κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ AB παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ HEΘM· ὅλον ἄρα τὸ ΓM στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΓN στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα ὑπὶ τὴν αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ὑπὶ τὰ αὐτῶν εἰσιν εὐθεῖαι, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda in eadem basi eademque altitudine, quorum lineæ insistentes in eisdem lineis rectis non collocantur, inter se æqualia sunt.

SInt enim in eadem basi AB & eadem altitudine solida parallelepipeda ΓM, ΓN, quorum insistentes lineæ AZ, AH, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK non sint in eisdem rectis lineis: dico solidum ΓM solido ΓN æquale esse.

Producantur enim NK, ΔΘ & etiam HE, ZM, atque conveniant inter se in punctis O, P, Π, Σ: & AΣ, ΛO, ΓΠ, BP jungantur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

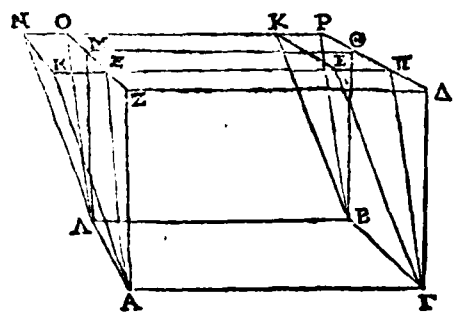
Τὰ ὑπὶ τὴν αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτῶν εὐθείας, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Ἐστω γὰρ ἐπὶ τὴν αὐτῆς βάσεως τὴν AB στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓM, ΓN, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι αἱ AZ, AH, ΛM, ΔN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τὰ αὐτῶν εὐθείας· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓM στερεὸν τῷ ΓN στερεῷ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ NK, ΔΘ καὶ ἐπὶ αἱ HE, ZM, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὰ O, P, Π, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν AΣ, ΛO, ΓΠ, BP.

ἴσον

ἴσον δὴ ἐστὶ ΓΜ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΖΔΘΜ τῷ ΓΟ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ὅτι τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τὸ ΑΓΒΛ, καὶ αὐτῶν αἱ ὑφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ ὅτι τε αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΖΟ, ΔΡ. ἀλλὰ τὸ ΓΟ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΚΝ, ὅτι τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τὸ ΑΓΒΛ, καὶ αὐτῶν αἱ ὑφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ ὅτι τε αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΗΠ, ΝΡ· ὥστε καὶ τὸ ΓΜ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ.



Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

solidum ΓΜ, cujus basis quidem ΑΓΒΛ parallelogrammum ipsi autem oppositum ΖΔΘΜ, est [per 29. 11.] æquale solido ΓΟ cujus basis parallelogrammum ΑΓΒΛ & ei oppositum ΞΠΡΟ, in eadem enim sunt basi ΑΓΒΛ, & ipsorum insistentes lineæ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ sunt in eisdem rectis lineis ΖΟ, ΔΡ. sed solidum ΓΟ, cujus basis quidem parallelogrammum ΑΓΒΛ ipsi autem oppositum ΞΠΡΟ, est [per 29. 11.] æquale solido ΓΝ, cujus basis ΑΓΒΛ parallelogrammum & ipsi oppositum ΗΕΚΝ; etenim in eadem sunt basi ΑΓΒΛ, & eorum insistentes lineæ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ sunt in eisdem rectis lineis ΗΠ, ΝΡ: quare & solidum ΓΜ solido ΓΝ æquale erit.

Solida igitur parallelepipeda in eadem basi eademque altitudine, quorum lineæ insistentes in eisdem rectis lineis non collocantur, inter se æqualia sunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

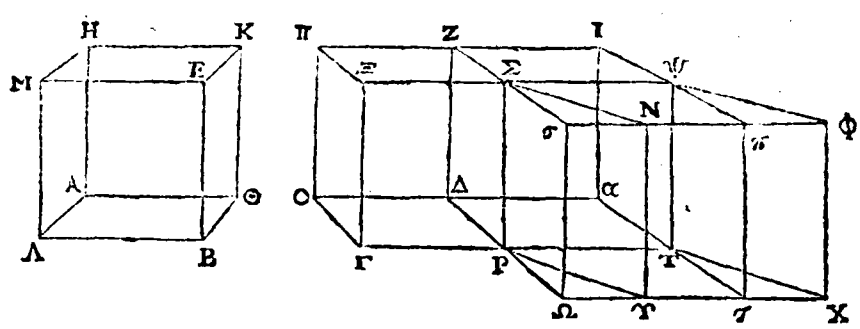
Τὰ ὑπὸ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Prop. XXXI. Theor.

Solida parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus & eadem altitudine, inter se sunt æqualia.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ.

SInt in æqualibus basibus ΑΒ, ΓΔ solida parallelepipeda ΑΕ, ΓΖ, & in eadem altitudine: dico solidum ΑΕ solido ΓΖ æquale esse.

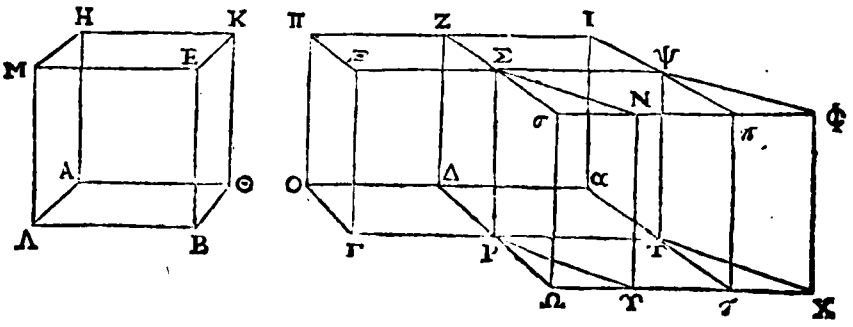


Ἐχέτωσαν δὴ πρότερον αἱ ὑφεστηκυῖαι αἱ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς τὰς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΛΒ τῇ ὑπὸ ΓΡΔ ἄνισος, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΡ εὐθεῖα ἡ ΡΤ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΡΤ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ρ τῇ ὑπὸ ΑΛΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΤΡΥ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, τῇ δὲ ΛΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ πρὸς τῷ Τ σημείῳ τῇ ΡΤ πάλιν ἀνεστάτω ἡ ΤΧ, καὶ συμπεπληρώσθω ἥ τε ΡΧ βάσις καὶ τὸ ΨΤ στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΤΡ, ΡΤ δυσὶ ταῖς ΑΛ, ΛΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι·

Sint autem primo insistentes lineæ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ ad rectos angulos basibus ΑΒ, ΓΔ, angulus autem ΑΛΒ angulo ΓΡΔ sit inæqualis, & producatur ipsi ΓΡ in directum ΡΤ, constituaturque [per 23. 1.] ad rectam lineam ΡΤ, & ad punctum in ipsa Ρ angulo ΑΛΒ æqualis angulus ΤΡΥ, & ponatur ipsi quidem ΑΛ æqualis ΡΤ, ipsi vero ΛΒ æqualis ΡΥ, & per punctum Τ ipsi ΡΤ parallela ducatur ΧΤ, compleanturque basis ΡΧ & ΨΤ solidum. quoniam igitur duæ ΤΡ, ΡΤ duabus ΑΛ, ΛΒ æquales sunt, & angulos continent æquales;

æquales; erit parallelogrammum PX æquale & ſimile parallelogrammo ΘΛ. & rurſus quoniam ΛΛ eſt æqualis PT, & ΛM ipſi PΣ, anguloſque æquales continet; parallelogrammum PΨ parallelogrammo AM æquale & ſimile erit. eadem ratione ΛE parallelogrammum ipſi ΣT æquale eſt & ſimile: tria igitur parallelogramma ſolidi AE tribus parallelogrammis ſo-

ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ PX παραλληλόγραμμον τῷ ΘΛ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΛ τῇ PT, ἡ δὲ ΛM τῇ PΣ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ ὅμοιον τὸ PΨ παραλληλόγραμμον τῷ AM παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΛE τῷ ΣT ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ AE στερεᾶ τρισὶ

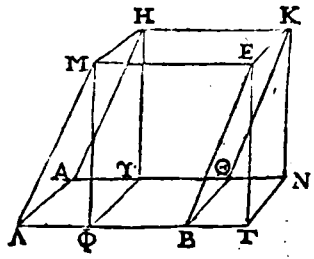


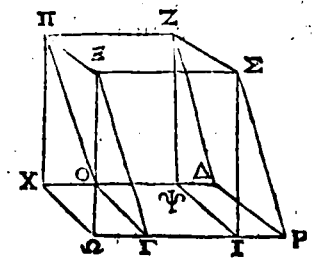
lidi ΨT æqualia & ſimilia ſunt. ſed [per 24. 11.] tria tribus oppoſita æqualia ſunt & ſimilia: totum igitur AE ſolidum parallelepipedum [per 10. def. 11.] toti ſolido parallelepipedo ΨT eſt æquale. producantur ΔP, XT conveniantque inter ſe in puncto Ω, & per T ipſi ΔΩ parallela ducatur Tτ, & producantur Tτ, OΔ donec conveniant in α, compleanturque ſolida ΩΨ, PI: ſolidum igitur ΨΩ, cujus baſis eſt PΨ parallelogrammum ipſi autem oppoſitum Ωπ, eſt [per 29. 11.] æquale ſolido ΨT cujus baſis eſt PΨ parallelogrammum & ipſi oppoſitum TΦ, in eadem enim ſunt baſi PΨ & eadem altitudine, & eorum inſiſtentes lineæ PΩ, PT, Tτ, TX, Σσ, ΣN, Ψπ, ΨΦ in eiſdem ſunt rectis lineis ΩX, σΦ. ſed ſolidum ΨT æquale eſt ſolido AE: ergo & ΨΩ ſolido AE eſt æquale. præterea quoniam parallelogrammum PTXT [per 35. 1.] eſt æquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem ſunt baſi PT & in eiſdem parallelis PT, ΩX; ſed & parallelogrammum PTXT parallelogrammo ΓΔ eſt æquale, quoniam & ipſi AB: parallelogrammum igitur ΩT æquale eſt parallelogrammo ΓΔ. aliud autem eſt parallelogrammum ΔT: eſt igitur [per 7. 5.] ut ΓΔ baſis ad baſim ΔT ita ΩT ad ipſam ΔT. & quoniam ſolidum parallelepipedum ΓI ſecatur plano PZ planis oppoſitis parallelo; erit [per 25. 11.] ut ΓΔ baſis ad baſim ΔT ita ſolidum ΓZ ad PI ſolidum. eadem ratione quoniam ſolidum parallelepipedum ΩI ſecatur plano PΨ oppoſitis planis parallelo, ut ΩT baſis ad baſim ΔT ita erit ſolidum ΩΨ ad PI ſolidum. ſed ut ΓΔ baſis ad baſim ΔT ita baſis ΩT ad ipſam TΔ: ut igitur ſolidum ΓZ ad PI ſolidum ita [per 11. 5.] ſolidum ΩΨ ad ſolidum PI. quod cum utrumque ſolidorum ΓZ, ΩΨ ad ſolidum PI eandem habet rationem, ſolidum ΓZ [per 9. 5.] ſolido ΩΨ eſt æquale. ſolidum autem ΩΨ oſtenſum eſt æquale ſolido AE: ergo & AE ipſi ΓZ æquale erit. Sed non ſint inſiſtentes lineæ AH, ΘK, BE, ΔM, ΓΞ, OΠ, ΔZ, PΣ ad

παραλληλογράμμοις δὲ τὰ ΨT στερεᾶ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ AE στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΨT στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί. διήχθωσαν αἱ ΔP, XT συμπίπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ μὲν T τῇ ΔΩ παράλληλος ἤχθω ἡ Tτ, καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ Tτ καὶ ἡ OΔ καὶ συνεζεύχθωσαν κατὰ τὸ α, καὶ συμπεπληρώθωσαν τὰ ΩΨ, PI στερεά· ἴσον δή ἐστι τὸ ΨΩ στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ PΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ Ωπ τῷ ΨT στερεῷ, οὗ βάσις ἐστὶ τὸ PΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ TΦ, διότι τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῇ PΨ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ αὐτῶν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ PΩ, PT, Tτ, TX, Σσ, ΣN, ΨΠ, ΨΦ ἐπὶ τὰ αὐτῶν εἰσιν εὐθείων τῶν ΩX, σΦ. ἀλλὰ τὸ ΨT στερεὸν τῷ AE ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΨΩ ἄρα στερεὸν τῷ AE στερεῷ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ PTXT παραλληλόγραμμον τῷ ΩT παραλληλογράμμῳ, διότι τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῇ PT, καὶ ὑπὸ τὰς αὐτὰς παραλλήλους τὰς PT, ΩX, ἀλλὰ τὸ PTXT τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον ἐπεὶ καὶ τῷ AB· καὶ τὸ ΩT ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον. ἄλλο δέ τὸ ΔT· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔT οὕτως ἡ ΩT πρὸς τὴν ΔT. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδόν τὸ ΓI διπλασιάσθω τῷ PZ τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔT βάσιν οὕτως τὸ ΓZ στερεὸν πρὸς τὸ PI στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδόν τὸ ΩI ἐπιπέδῳ τῷ PΨ τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΩT βάσις πρὸς τὴν ΔT βάσιν οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ PI στερεόν. ἀλλ' ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔT οὕτως ἡ ΩT πρὸς τὴν TΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓZ στερεὸν πρὸς τὸ PI στερεὸν οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ PI στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΓZ, ΩΨ στερεῶν πρὸς τὸ PI τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα τὸ ΓZ στερεὸν τῷ ΩΨ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ ΩΨ τῷ AE ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ AE ἄρα τῷ ΓZ ἐστιν ἴσον. Μὴ ἐστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ AH, ΘK, BE, ΔM, ΓΞ, OΠ, ΔZ, PΣ

πρὸς

πρὸς ὀρθὰς τοῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσι· λέγω πάλιν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ, Σ σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι αἱ ΚΝ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ν, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΤ, ΥΦ, ΝΥ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΨΙ· ἴσον δή ἐστι τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῷ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθὰς εἰσι τοῖς βάσεσιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΠΙ τῷ ΓΖ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ ἐστιν ἴσον.





Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

rectos angulos ipſis ΑΒ, ΓΔ baſibus: dico rurſus ſolidum ΑΕ æquale eſſe ſolido ΓΖ. ducantur [per 11. 11.] à punctis Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ, Σ ad ſubjectum planum perpendiculares ΚΝ, ΕΤ, ΗΤ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ quæ plano in punctis Ν, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι occurrant, & jungantur ΝΤ, ΤΦ, ΝΤ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΨΙ: æquale igitur eſt [per 31. 11.] ſolidum ſolido ΠΙ; in æqualibus enim ſunt ΚΦ baſibus ΚΜ, ΠΣ & in eadem altitudine, & illorum inſiſtentes ad rectos angulos ſunt baſibus. ſed [per 30. 11.] ΚΦ ſolidum ſolido ΑΕ eſt æquale; ſolidum vero ΠΙ æquale ſolido ΓΖ, ſi quidem in eadem ſunt baſi & in eadem altitudine, & illorum inſiſtentes lineæ non ſunt in eiſdem rectis lineis: ergo & ſolidum ΑΕ ſolido ΓΖ æquale erit.

Solida igitur parallelepipeda, quæ in æqualibus ſunt baſibus & eadem altitudine, inter ſe ſunt æqualia. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϚ'.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΖΗ τῷ ΑΕ ἴσον τὸ ΖΘ, καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ μὲν τῆς ΖΘ ὕψος καὶ αὐτὸ τῷ ΓΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τῷ ΗΚ· ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΗΚ στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΑΕ, ΖΘ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ ἐπίπεδῳ τῷ ΔΗ τέμνεται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἐστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΘΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΓ στερεόν. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΘ βάσις τῇ ΑΕ βάσει, τὸ δὲ ΗΚ στερεὸν τῷ ΑΒ στερεῷ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

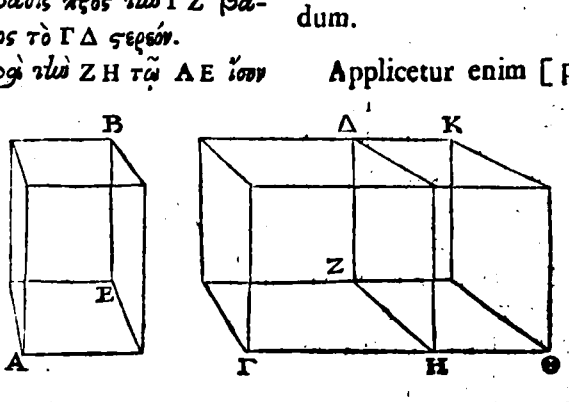
Τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

SInt ſolida parallelepipeda ΑΒ, ΓΔ, quæ eandem altitudinem habeant: dico inter ſe eſſe ut baſes; hoc eſt, ut ΑΕ baſis ad baſim ΓΖ ita ſolidum ΑΒ ad ΓΔ ſolidum.

Applicetur enim [per 45. 1.] ad ΖΗ parallelogrammo ΑΕ æquale ΖΘ, à baſi vero ΖΘ & eadem altitudine, cum ipſo ΓΔ ſolidum parallelepipedum ΗΚ compleatur: ſolidum igitur ΑΒ [per 31. 11.] ſolido ΗΚ eſt æquale; in æqualibus enim ſunt baſibus ΑΕ, ΖΘ, & in eadem altitudine. itaque quoniam ſolidum parallelepipedum ΓΚ plano ΔΗ ſecatur, oppoſitis planis parallelo; erit [per 25. 11.] ut ΘΖ baſis ad baſim ΓΖ ita ſolidum ΘΔ ad ΔΓ ſolidum. ſed baſis quidem ΖΘ baſi ΑΕ æqualis eſt, ſolidum vero ΗΚ æquale ſolido ΑΒ: & igitur eſt ut ΑΕ baſis ad baſim ΓΖ ita ſolidum ΑΒ ad ſolidum ΓΔ.



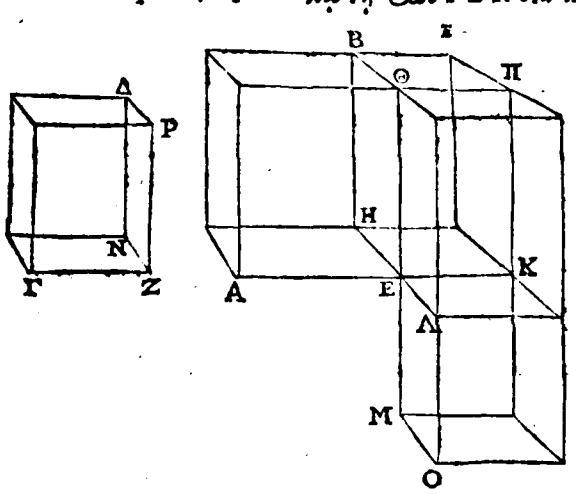
Quare ſolida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXXIII. THEOR.

Similia ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SInt ſimilia ſolida parallelepipeda AB, Γ Δ, latus autem AE homologum ſit lateri ΓZ: dico ſolidum AB ad Γ Δ ſolidum triplicatam rationem habere ejus quam habet AE ad ΓZ.

Producantur enim EK, EΛ, EM in directum ipſis AB, HE, ΘE: & ipſi quidem ΓZ æqualis ponatur EK, ipſi vero ZN æqualis EΛ; & adhuc ipſi ZP æqualis EM, & KΛ parallelogrammum & KO ſolidum compleantur. quoniam igitur duæ EK, EΛ duabus ΓZ, ZN æquales ſunt; ſed & angulus KEΛ angulo ΓZN æqualis, quia & angulus AEH ipſi ΓZN æqualis eſt ob ſimilitudinem ſolidorum AB, Γ Δ; erit & KΛ parallelogrammum æquale ac ſimile parallelogrammo ΓN. eadem ratione & parallelogrammum KM æquale eſt & ſimile parallelogrammo ΓP, & adhuc parallelogrammum OE ipſi ΔZ parallelogrammo: tria igitur parallelogramma ſolidi KO tribus parallelogrammis ſolidi Γ Δ æqualia & ſimilia ſunt. ſed [per 24. 11.] tria tribus oppoſitis æqualia ſunt & ſimilia; totum igitur KO ſolidum [per 10. def. 11.] æquale eſt & ſimile toti ſolido Γ Δ. compleatur HK parallelogrammum, & à baſibus quidem HK, KΛ parallelogrammis, altitudine vero eadem cum ipſo AB ſolida, compleantur EΞ, ΛΠ. & quoniam ob ſimilitudinem ſolidorum AB, Γ Δ eſt ut AE ad ΓZ ita EH ad ZN, & EΘ ad ZP, æqualis autem ZΓ ipſi EK, & ZN ipſi EΛ, & ZP ipſi EM; erit ut AE ad EK ita HE ad EΛ, & ΘE ad EM. ſed [per 1. 6.] ut AE quidem ad EK ita AH parallelogrammum ad parallelogrammum HK; ut autem HE ad EΛ ita HK ad KΛ, & ut ΘE ad EM ita ΠE ad KM: & igitur ut AH parallelogrammum ad parallelogrammum HK ita HK ad KΛ, & ΠE ad KM. ſed [per 32. 11.] ut AH quidem ad HK ita AB ſolidum ad ſolidum EΞ; ut autem HK ad KΛ ita ſolidum ΞE ad ΠΛ ſolidum; & ut ΠE ad KM ita ΠΛ ſolidum ad ſolidum KO: & igitur ut ſolidum AB ad ſolidum EΞ ita EΞ ad ΠΛ, & ΠΛ ad KO. ſi autem quatuor ſint magnitudines dein-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

ΕΣτω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AB, Γ Δ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ AE τῇ ΓZ· λέγω ὅτι τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ Γ Δ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ.

Ἐκβεβλήθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς AE, HE, ΘE αἱ EK, EΛ, EM, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓZ ἴση ἡ EK, τῇ δὲ ZN ἴση ἡ EΛ, καὶ ἔτι τῇ ZP ἴση ἡ EM, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ KΛ παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ KO στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ EK, EΛ δυσὶ ταῖς ΓZ, ZN ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ KEΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓZN ἐστιν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ AEH τῇ ὑπὸ ΓZN ἐστιν ἴση διὰ τὸ ὁμοιότητα τῶν AB, Γ Δ στερεῶν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ ὅμοιον τὸ KΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓN παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν KM παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ ΓP παραλληλογράμμῳ, καὶ ἔτι τὸ OE τῷ ΔZ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ KO στερεὰ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῖς Γ Δ στερεοῖς ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ KO στερεὸν ὅλῳ τῷ Γ Δ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω τὸ HK παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ μὲν βάσεων τῶν HK, KΛ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ αὐτὸ τὸ AB, στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ EΞ, ΛΠ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὸ ὁμοιότητα τῶν AB, Γ Δ στερεῶν ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZN, καὶ ἡ EΘ πρὸς τὴν ZP, ἴση δὲ ἡ μὲν ZΓ τῇ EK, ἡ δὲ ZN τῇ EΛ, ἡ δὲ ZP τῇ EM· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EK οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EΛ, καὶ ἡ ΘE πρὸς τὴν EM. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AE πρὸς τὴν EK οὕτως τὸ AH παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ HK παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ HE πρὸς τὴν EΛ οὕτως τὸ HK πρὸς τὸ KΛ, ὡς δὲ ἡ ΘE πρὸς τὴν EM οὕτως τὸ ΠE πρὸς τὸ KM· καὶ ὡς ἄρα τὸ AH παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ HK οὕτως τὸ HK πρὸς τὸ KΛ καὶ τὸ ΠE πρὸς τὸ KM. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AH πρὸς τὸ HK οὕτως τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ EΞ στερεόν, ὡς δὲ τὸ HK πρὸς τὸ KΛ οὕτως τὸ ΞE στερεὸν πρὸς τὸ ΠΛ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΠE πρὸς τὸ KM οὕτως τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς τὸ KO στερεόν· καὶ ὡς ἄρα τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ EΞ οὕτως τὸ EΞ πρὸς τὸ ΠΛ, καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ KO. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ

συνεχὲς

πυχὸς ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ ἕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ, καὶ ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΚ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΚΟ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἡ δὲ ΕΚ εὐθεῖα τῇ ΓΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτῷ πλευρὰ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὸν τέταρτον, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπειδήπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸν δεύτερον.

ceps proportionales, prima [per 11. def. 5.] ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam habet ad ſecundam: ergo & AB ſolidum ad ſolidum KO triplicatam habet rationem ejus quam habet AB ad EΞ. ſed [per 32. 11.] ut AB ad EΞ ita AH parallelogrammum ad parallelogrammum HK, & [per 1.6.] AE recta ad ipſam EK: quare & AB ſolidum ad ſolidum KO triplicatam rationem habebit ejus quam AE habet ad EK. æquale autem eſt ſolidum KO ſolido ΓΔ, & recta EK rectæ ΓZ eſt æqualis: ergo & AB ſolidum ad ſolidum ΓΔ triplicatam habet rationem ejus quam ipſius latus homologum AE habet ad homologum latus ΓZ. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Ex hoc vero manifeſtum eſt, ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam ita eſſe ſolidum parallelepipedum quod fit à prima ad ſolidum à ſecunda ſimile & ſimiliter deſcriptum; quoniam ſcil. prima ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam habet ad ſecundam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

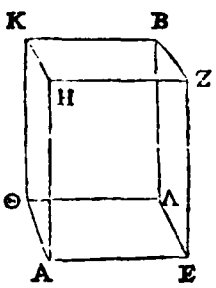
Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

PROP. XXXIV. THEOR.

Æqualium ſolidorum parallelepipedorum baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus; & quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus, ea inter ſe ſunt æqualia.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν ἕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

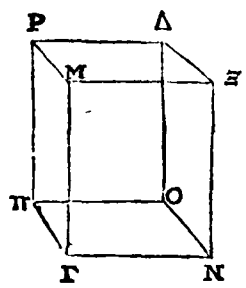
Ἐστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΕΖ, ΛΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ πρὸς ὀρθὰς τοῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν ἕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον, ἔσται καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΑΗ ἴση. εἰ γὰρ, τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἴσων οὐσῶν, μὴ εἴη καὶ ΑΗ, ΓΜ ὕψη ἴσα· οὐκ ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ. ἀλλὰ ἔστιν ἴσον· οὐκ ἄρα ἄνισον τὸ ΓΜ ὕψος τῷ ΑΗ ὕψει· ἴσον ἄρα, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ φανερὸν ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.



Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι

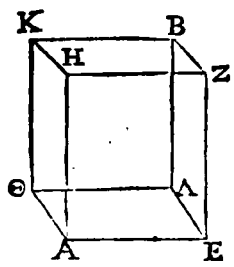
Sint æqualia ſolida parallelepipeda AB, ΓΔ: dico ipſorum baſes eſſe reciproce proportionales altitudinibus; hoc eſt ut EΘ baſis ad baſim NΠ ita eſſe altitudinem ſolidi ΓΔ ad ſolidi AB altitudinem.

Sint enim primum inſiſtentes AH, EZ, ΛB, ΘK, ΓM, NΞ, OΔ, ΠP ad rectos angulos baſibus ipſorum: dico ut EΘ baſis ad baſim NΠ ita eſſe ΓM ad AH. ſi quidem baſis EΘ baſi NΠ ſit æqualis, eſt autem & AB ſolidum æquale ſolido ΓΔ; erit & ΓM æqualis ipſi AH. ſi enim, baſibus EΘ, NΠ æqualibus exiſtentibus, non ſint altitudines AH, ΓM æquales; neque AB ſolidum [per 31. 11.] ſolido ΓΔ æquale erit. ponitur autem æquale: non igitur inæqualis eſt altitudo ΓM altitudini AH; ergo eſt æqualis: ac propterea ut EΘ baſis ad baſim NΠ ita erit ΓM ad AH. unde conſtat ſolidorum parallelepipedorum AB, ΓΔ baſes eſſe reciproce proportionales altitudinibus.



At vero non ſit baſis EΘ æqualis baſi NΠ, ſed EΘ ſit major. eſt autem & AB ſolidum ſolido ΓΔ æquale: ergo major eſt ΓM ipſa AH. ſi enim non,

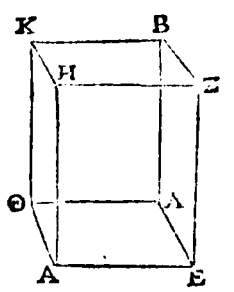
neque rurſus [per 31. 11.] forent ſolida AB, ΓΔ æqualia. ponuntur autem æqualia: itaque ponatur ΓΤ æqualis ipſi AH; & à baſi quidem NΠ, altitudine autem ΓΤ, ſolidum parallelepipedum ΦΓ compleatur. quoniam igitur ſolidum AB ſolido ΓΔ eſt æquale, aliud autem eſt ſolidum ΦΓ, & [per 7. 5.] æqualia ad idem eandem habent rationem; erit ut AB ſolidum ad ſolidum ΓΦ ita ΓΔ ſolidum ad ſolidum ΓΦ. ſed [per 32. 11.] ut AB ſolidum ad ſolidum ΓΦ ita baſis EΘ ad NΠ baſim, æqualia enim ſunt AB, ΓΦ ſolida; ut autem ſolidum ΓΔ ad ipſum ΓΦ [per 25. 11.] ita MΠ baſis ad baſim ΠΤ, & [per 1.6.] MΓ ad ΓΤ: & igitur ut baſis EΘ ad NΠ baſim ita MΓ ad ΓΤ. eſt autem ΓΤ æqualis AH; ergo & ut EΘ baſis ad baſim NΠ ita MΓ ad AH: quare ſolidorum parallelepipedorum AB, ΓΔ baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus.



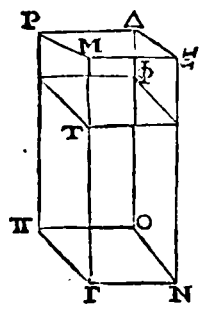
RURSUS, ſolidorum parallelepipedorum AB, ΓΔ baſes ſint reciproce proportionales altitudinibus; ſitque ut EΘ baſis ad baſim MΠ ita ſolidi ΓΔ altitudo ad altitudinem ſolidi AB: dico ſolidum AB ſolido ΓΔ æqualem eſſe.

Sint enim rurſus inſiſtentes ad rectos angulos baſibus. & ſi quidem baſis EΘ ſit æqualis baſi NΠ, eſtque ut EΘ baſis ad baſim NΠ ita altitudo ſolidi ΓΔ ad ſolidi AB altitudinem: erit ſolidi ΓΔ altitudo altitudini ſolidi AB æqualis. ſolida autem parallelepipeda, quæ ſunt in æqualibus baſibus & eadem altitudine [per 31. 11.] inter ſe æqualia ſunt: ergo ſolidum AB ſolido ΓΔ eſt æquale.

Sed non ſit EΘ baſis æqualis baſi NΠ, & ſit EΘ major. major igitur eſt & ſolidi ΓΔ altitudo altitudine ſolidi AB, hoc eſt, ΓΜ ipſa AH. ponatur rurſus ipſi AH æqualis ΓΤ, & ſimiliter ſolidum ΓΦ compleatur. itaque quoniam eſt ut EΘ baſis ad baſim NΠ ita ΓΜ ad ipſam AH: æqualis autem eſt AH ipſi ΓΤ; erit ut baſis EΘ ad NΠ baſim ita MΓ ad ΓΤ. ſed [per 32. 11.] ut baſis EΘ ad NΠ baſim ita AB ſolidum ad ſolidum ΓΦ, æquealta enim ſunt ſolida AB, ΓΦ; ut autem MΓ ad ΓΤ ita [per 1.6.] & MΠ baſis ad baſim ΠΤ, & [per 25. 11.] ſolidum ΓΔ ad ΓΦ ſolidum: & igitur ut ſolidum AB ad ſolidum ΓΦ ita ſolidum ΓΔ ad ſolidum ΓΦ: igitur utrumque ſolidorum AB, ΓΔ ad ipſum ΓΦ eandem rationem habet; erit igitur [per 9. 5.] AB ſolidum ſolido ΓΔ æquale. quod erat demonſtrandum.



ἄρα πάλιν τὰ AB, ΓΔ στερεὰ ἴσα ἔσται· ὑπόκειται δὲ ἴσα. κείσθω ἴση τῇ AH ἴση ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω



ὀπὸ βάσεως μὲν τῆς NΠ, ὕψους δὲ τῆς ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἄλλο δέ τι τὸ ΦΓ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν οὕτως ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν, ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ AB, ΓΦ στερεά· ὡς δὲ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν οὕτως ἡ MΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ ἡ MΓ πρὸς τὴν ΓΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν οὕτως ἡ MΓ πρὸς τὴν ΓΤ. ἴση δὲ ἡ ΓΤ τῇ AH· καὶ ὡς ἄρα ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν οὕτως ἡ MΓ πρὸς τὴν AH· τῶν AH, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

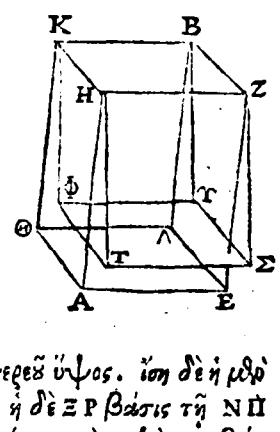
ΠΑΛΙΝ δὴ τῶν AB, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ AB στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Εστωσαν γὰρ πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν. καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ EΘ βάσις τῇ NΠ βάσει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ AB στερεοῦ ὕψος· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ AB στερεοῦ ὕψει. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσον βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδά ἐστι καὶ ἴσα τὰ αὐτὰ ὕψος ἴσα· ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ EΘ βάσις τῇ NΠ ἴση, καὶ ἔστω μείζων ἡ EΘ· μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΔ στερεὸν ὕψος τοῦ AB στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἡ ΓΜ τῆς AH. κείσθω τῇ AH ἴση πάλιν ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ ΓΦ στερεόν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν AH, ἴση δὲ ἡ AH τῇ ΓΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν οὕτως ἡ MΓ πρὸς τὴν ΓΤ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν οὕτως τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ AB, ΓΦ στερεά, ὡς δὲ ἡ MΓ πρὸς τὴν ΓΤ οὕτως ἡ MΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ· καὶ ὡς ἄρα τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν AB, ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα τὸ AE στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Μὴ

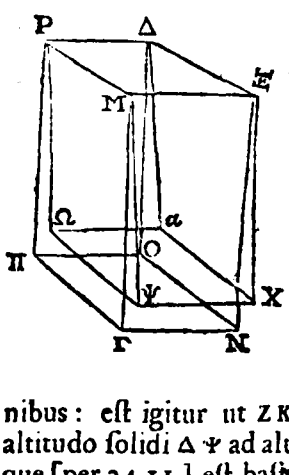
Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΚΘ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὀρθὰς τὰς βάσεις αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰ τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἐπίπεδοι κάθετοι, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, α, Ω σημεῖα, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΖΦ, ΞΩ στερεά· λέγω ὅτι καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ, ΓΔ στερεῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΒ τὸ ΒΤ ἐστιν ἴσον, ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῇ ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, τὸ δὲ ΔΓ στερεὸν τῷ ΔΨ ἴσον, ἐπί τε γὰ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῇ ΞΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον ἐστί. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθὰς εἰσὶ τοῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῇ ΝΠ βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ, ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΑ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.



ΠΑΛΙΝ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ ΖΚ βάσει, ἡ δὲ ΝΠ τῇ ΞΡ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ, ΔΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΒΤ, ΔΨ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς εἰσι τοῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασι δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα τὸ ΒΤ στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΒΤ

Non ſint autem inſiſtentes ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΚΘ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ ad rectos angulos baſibus ipſorum, & [per 11. 11.] à punctis Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ ad plana baſium ΕΘ, ΝΠ ducantur perpendiculares, quæ planis in punctis Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, α, Ω occurrant, & compleantur ſolida ΖΦ, ΞΩ: dico & ſic æqualibus exiſtentibus ſolidis ΑΒ, ΓΔ baſes eſſe reciproce proportionales altitudinibus; & ut ΕΘ baſis ad baſim ΝΠ ita eſſe altitudinem ſolidi ΓΔ ad ſolidi ΑΒ altitudinem. quoniam enim ſolidum ΑΒ ſolido ΓΔ eſt æquale, ſolido autem ΑΒ [per 30. 11.] æquale eſt ſolidum ΒΤ; in eadem namque ſunt baſi ΖΚ & eadem altitudine & illorum inſiſtentes non ſunt in eiſdem rectis lineis; & ſolidum ΔΓ eſt æ- ſolido ΔΨ, in eadem enim rurſus ſunt baſi ΞΡ & eadem altitudine & illorum inſiſtentes non ſunt in eiſdem rectis lineis: erit & ſolidum ΒΤ ſolido ΔΨ æquale. æqualium autem ſolidorum parallelepipedorum, quorum altitudines baſibus ipſorum ſunt ad rectos angulos, baſes [per part. prior. hujus] ſunt reciproce proportionales altitudinibus: eſt igitur ut ΖΚ baſis ad baſim ΞΡ ita altitudo ſolidi ΔΨ ad altitudinem ſolidi ΒΤ. atque [per 24. 11.] eſt baſis quidem ΖΚ baſi ΕΘ æqualis, baſis vero ΞΡ æqualis baſi ΝΠ: quare ut ΕΘ baſis ad baſim ΝΠ ita eſt altitudo ſolidi ΔΨ ad ſolidi ΒΤ altitudinem. eædem autem ſunt altitudines ſolidorum ΔΨ, ΒΤ quæ ſolidorum ΔΓ, ΒΑ: eſt igitur ut ΕΘ baſis ad baſim ΝΠ ita ſolidi ΔΓ altitudo ad altitudinem ſolidi ΒΑ: ergo ſolidorum parallelepipedorum ΑΒ, ΓΔ baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus.



Rursus ſolidorum parallelepipedorum ΑΒ, ΓΔ baſes ſint reciproce proportionales altitudinibus, ſitque ut ΕΘ baſis ad baſim ΝΠ ita altitudo ſolidi ΓΔ ad ſolidi ΑΒ altitudinem: dico ſolidum ΑΒ ſolido ΓΔ æquale eſſe.

Iiſdem namque conſtructis, quoniam ut ΕΘ baſis ad baſim ΝΠ ita ſolidi ΓΔ altitudo ad altitudinem ſolidi ΑΒ; & baſis quidem ΕΘ eſt æqualis baſi ΖΚ, ΝΠ vero ipſi ΞΡ: erit ut ΖΚ baſis ad baſim ΞΡ ita altitudo ſolidi ΓΔ ad ſolidi ΑΒ altitudinem. eædem autem ſunt altitudines ſolidorum ΑΒ, ΓΔ quæ ipſorum ΒΤ, ΔΨ: eſt igitur ut ΖΚ baſis ad baſim ΞΡ ita ſolidi ΔΨ altitudo ad altitudinem ſolidi ΒΤ: quare ſolidorum parallelepipedorum ΒΤ, ΔΨ baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum altitudines ſunt ad rectos angulos baſibus ipſorum, & baſes reciproce proportionales altitudinibus, ea [per part. prior. hujus] inter ſe ſunt æqualia: ergo ΒΤ ſolidum ſolido ΔΨ eſt æquale. ſed [per 30. 11.] ſolido quidem ΒΤ

æquale eſt ſolidum BA, etenim in eadem ſunt baſi ZK & eadem altitudine & illorum inſiſtentes non ſunt in eiſdem rectis lineis; ſolidum vero ΔΨ eſt æquale ſolido ΔΓ, ſiquidem in eadem ſunt baſi ΞP & eadem altitudine & illorum inſiſtentes non in eiſdem rectis lineis: ergo & ſolidum AB ſolido ΓΔ eſt æquale. quod erat demonſtrandum.

τὸ Β Α ἴσον ἐστὶν, ἐπί τε γὰρ τῆ αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆ ΖΚ καὶ ὑπὸ τὰ αὐτὰ ὕψεσι, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, τὸ δὲ ΔΨ στερεὸν τῷ ΔΓ στερεῷ ἴσον ἐστὶν ἴσῃ, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆ ΞΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστὶ, καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἐστιν ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXV. Theor.

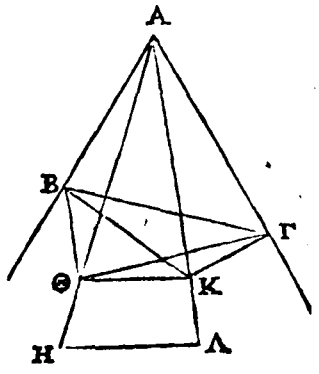
Si ſint duo anguli plani æquales, & in ipſorum verticibus rectæ ſublimes conſtituantur, quæ cum rectis lineis à principio poſitis angulos contineant æquales, alterum alteri; in ſublimibus autem ſumantur quævis puncta, atque ab ipſis ad plana, in quibus ſunt anguli primi, perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum ſublimibus æquales angulos continebunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπιζαθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐπὶ οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ἐπὶ τῶν καθέτων ἐπὶ τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.

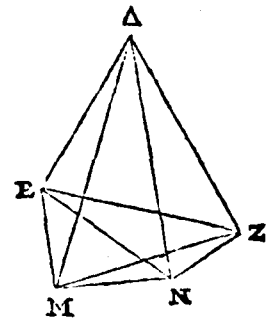
SInt duo anguli rectilinei æquales BAΓ, EΔZ, & à punctis A, Δ ſublimes rectæ lineæ AH, ΔM conſtituantur, quæ cum rectis lineis à principio poſitis æquales angulos contineant, alterum alteri, angulum quidem MAB æqualem angulo HAB, angulum vero MΔZ angulo HAΓ æqualem; & ſumantur in ipſis AH, ΔM quævis puncta H, M, à quibus ad plana per BAΓ, EΔZ ducantur perpendiculares HΛ, MN, occurrentes planis in punctis Λ, N, & ΛA, NΔ jungantur: dico angulum HAΛ angulo MΔN æqualem eſſe.

Ponatur ipſi ΔM æqualis AΘ, & per Θ ipſi HΛ parallela ducatur ΘK. eſt autem HA perpendicularis ad planum per BAΓ; ergo [per 8. 11.] & ΘK ad planum per BAΓ perpendicularis erit. ducantur à punctis K, N ad rectas lineas AB, AΓ, ΔZ, ΔE perpendiculares KB, KΓ, NZ, NE; & ΘΓ, ΓB, MZ, ZE jungantur. quoniam igitur [per 47. 1.] quadratum ex ΘA æquale eſt quadratis ex ΘK, KA; quadrato autem ex KA æqualia ſunt quadrata ex KΓ, ΓA; erit quadratum ex ΘA quadratis ex ΘK, KΓ, ΓA æquale. quadratis autem ex ΘK, KΓ æquale eſt quadratum ex ΘΓ: quadratum igitur ex ΘA quadratis ex ΘΓ, ΓA æquale erit: & idcirco angulus ΘΓA eſt rectus. eadem ratione & angulus ΔZM re-



Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι, αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἀπὸ δὲ τῶν Α, Δ σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ ΑΗ, ΔΜ ἴσους περιέχουσαι γωνίας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΜΔΕ τῇ ὑπὸ ΗΑΒ, τὴν δὲ ὑπὸ ΜΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῶν ΑΗ, ΔΜ τυχόντα σημεῖα, τὰ Η, Μ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Η, Μ σημείων ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ διὰ τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ΗΛ, ΜΝ, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ Λ, Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΑ, ΝΔ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΑΛ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΔΝ γωνίᾳ.

Κείσθω τῇ ΔΜ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ ΗΛ παράλληλος ἡ ΘΚ. ἡ δὲ ΗΑ καθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα καθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Κ, Ν σημείων ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ, ΔΖ, ΔΕ εὐθείας κάθετοι αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΝΖ, ΝΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΓ, ΓΒ, ΜΖ, ΖΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΓ, ΓΑ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ, ΓΑ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΓ, ΓΑ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΓΑ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΜ γωνία



ὀρθή

ὀρθὴ ἐστὶ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΜ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΜΔΖ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΜΔΖ, ΘΑΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΑΘ τῇ ΔΜ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση ἐστίν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΜΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΚ, ΚΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΘ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΘΚΒ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν ΘΚ καθέτον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΜ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΕΔΜ, ἐπιπέδου γάρ, καὶ ἔστιν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ· δύο δὴ αἱ ΓΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί. καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΝ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΝ ἴση ἐστίν. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΓΒΚ, ΖΕΝ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΖΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΚ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσὶ καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὀρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΝ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ· ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΚ δυσὶ ταῖς ΜΔ, ΔΝ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΘΚ βάσει τῇ ΝΜ ἐδείχθη ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΔΝ ἐστὶν ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ctus est: ergo angulus ΑΓΘ ipsi ΔΖΜ est æqualis. est autem & ΘΑΓ angulus æqualis angulo ΜΔΖ; duo igitur triangula sunt ΜΔΖ, ΘΑΓ duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur; videlicet [per constr.] ΑΘ ipsi ΔΜ; ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri: quare ΑΓ est æqualis ΔΖ. similiter demonstrabimus & ΑΒ ipsi ΔΕ æquale esse. jungantur ΘΒ, ΜΕ: & quoniam quadratum ex ΑΘ est æquale quadratis ex ΑΚ, ΚΘ; quadrato autem ex ΑΚ æqualia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΚ: erunt quadrata ex ΑΒ, ΒΚ, ΚΘ quadrato ex ΑΘ æqualia. sed quadratis ex ΒΚ, ΚΘ æquale est ex ΒΘ quadratum; rectus enim angulus est ΘΚΒ, propterea quod ΘΚ perpendicularis est ad subjectum planum: quadratum igitur ex ΑΘ æquale est quadratis ex ΑΒ, ΒΘ: quare angulus ΑΒΘ rectus est. eadem ratione & angulus ΔΕΜ est rectus. est autem & ΒΑΘ angulus æqualis angulo ΕΔΜ, ita enim ponitur; ac vero ΑΘ æqualis ΔΜ: ergo & ΑΒ ipsi ΔΕ est æqualis. quoniam igitur ΑΓ quidem est æqualis ΔΖ, ΑΒ vero ipsi ΔΕ; adeoque duæ ΓΑ, ΑΒ duabus ΖΔ, ΔΕ sunt æquales. sed & angulus ΓΑΒ angulo ΖΔΕ æqualis: basis igitur ΒΓ [per 4. 1.] basi ΕΖ æqualis est. & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis æquales sunt: ergo angulus ΑΓΒ æqualis est angulo ΔΖΕ. est autem [per constr.] & rectus ΑΓΚ æqualis recto ΔΖΝ: quare & reliquus ΒΓΚ reliquo ΕΖΝ est æqualis. eadem ratione & ΓΒΚ angulus est æqualis angulo ΖΕΝ. itaque ΓΒΚ, ΖΕΝ sunt duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod æqualibus adjacet angulis, sc. ΒΓ ipsi ΕΖ: ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: æqualis igitur est ΓΚ ipsi ΖΝ. est autem & ΑΓ ipsi ΔΖ æqualis; quare duæ ΑΓ, ΓΚ duabus ΔΖ, ΖΝ æquales sunt, & rectos continent angulos: basis igitur ΑΚ [per 4. 1.] est æqualis basi ΔΝ. & cum ΑΘ sit æqualis ΔΜ; erit & quadratum ex ΑΘ quadrato ex ΔΜ æquale. sed [per 47. 1.] quadrato ex ΑΘ æqualia sunt ex ΑΚ, ΚΘ quadrata, etenim rectus est angulus ΑΚΘ; quadrato autem ex ΔΜ æqualia sunt quadrata ex ΔΝ, ΝΜ, quia angulus ΔΝΜ est rectus: quadrata igitur ex ΑΚ, ΚΘ quadratis ex ΔΝ, ΝΜ sunt æqualia; ex quibus quadratum ex ΑΚ æquale est quadrato ex ΔΝ; ergo reliquum ex ΚΘ quadratum reliquo quadrato ex ΝΜ est æquale: & ideo recta linea ΘΚ ipsi ΜΝ æqualis. & cum duæ ΘΑ, ΑΚ duabus ΜΔ, ΔΝ æquales sint, altera alteri, & basis ΘΚ basi ΝΜ ostensa sit æqualis; [per 8. 1.] angulus ΘΑΚ angulo ΜΔΝ æqualis erit. quod erat dem.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι, ἀνασταθῶσι δὲ ἀπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ.

Corollarium.

Ex hoc vero manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares,

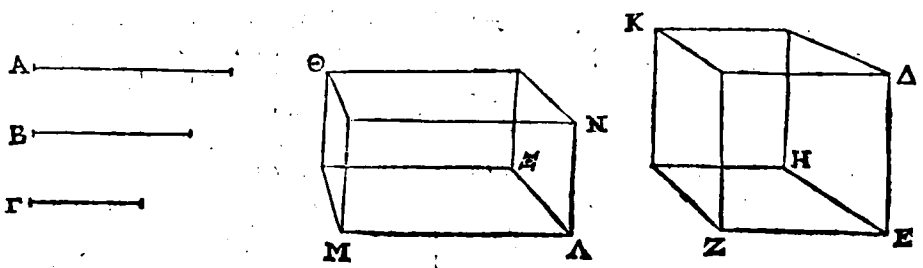
culares, quæ ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducuntur, inter se æquales esse.

Prop. XXXVI. Theor.

Si tres rectæ lineæ proportionales sint; solidum parallelepipedum quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, Γ, sitque ut A ad B ita B ad Γ: dico solidum quod fit ex ipsis A, B, Γ æquale esse solido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Exponatur solidus angulus ad E contentus sub tribus angulis planis ΔEH, HEZ, ZEΔ; & ipsi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipsarum ΔE, HE, EZ, & solidum parallelepipedum EK compleatur; ipsi vero A ponatur æqualis ΛM, & ad rectam lineam ΛM & ad punctum in ipsa Λ [per 26. 11.] constituatur angulo solido ad E æqualis angulus



contentus sub NΛΞ, ΞΛM, MΛN, & ponatur ipsi quidem B æqualis ΛΞ, ipsi vero Γ æqualis ΛN. quoniam igitur est ut A ad B ita B ad Γ, æqualis autem est A ipsi ΛM, & B unicuique ipsarum ΛΞ, EZ, EH, EΔ, & Γ ipsi ΛN; erit ut ΛM ad EZ ita ΔE ad ΛN: & circum æquales angulos MΛN, ΔEZ latera sunt reciproce proportionalia: ergo [per 14.6.] MN parallelogrammum parallelogrammo ΔZ est æquale. & quoniam duo anguli plani rectilinei ΔEZ, NΛM, æquales sunt & in ipsis sublimes rectæ constituuntur ΛΞ, EH æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt [per cor. 35. 11.] perpendiculares, quæ à punctis H, Ξ ad plana per NΛM, ΔEZ ducuntur, inter se æquales: ergo solida AΘ, EK in eadem sunt altitudine. quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & in eadem altitudine [per 31. 11.] inter se sunt æqualia: ergo solidum ΘΛ æquale est solido EK. atque ΘΛ quidem est solidum, quod fit à tribus A, B, Γ; solidum vero EK quod fit ex B: ergo solidum quod fit ex ipsis A, B, Γ æquale est solido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἀπ' αὐτῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ, ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ἀπ' αὐτῶν τῶν A, B, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ E περιεχομένη ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΔEH, HEZ, ZEΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἑκάστη τῶν ΔE, HE, EZ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ EK στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ A κείσθω ἴση ἡ ΛM, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΛM εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ πρὸς τῷ E στερεᾷ γωνίᾳ ἴση περιεχο-

μένη ὑπὸ τῶν τρισὶ γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΔEH, HEZ, ZEΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἑκάστη τῶν ΔE, HE, EZ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ EK στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ A κείσθω ἴση ἡ ΛM, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΛM εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ πρὸς τῷ E στερεᾷ γωνίᾳ ἴση περιεχο-

μένη ὑπὸ τῶν NΛΞ, ΞΛM, MΛN, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἡ ΛΞ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΛN. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν A τῇ ΛM, ἡ δὲ B ἑκάστη τῶν ΛΞ, EZ, EH, EΔ, ἡ δὲ Γ τῇ ΛN· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛM πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ ΔE πρὸς τὴν ΛN. αἱ περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ MΛN, ΔEZ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα τὸ MN παραλληλόγραμμον τῷ ΔZ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι στερεαὶ εὐθυγράμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔEZ, NΛM, καὶ ἐπ' αὐτῶν μεταξὺ εὐθεῖαι ἐφεστήκασιν αἱ ΛΞ, EH ἴσαι πρὸς ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ H, Ξ σημείων κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὸ διὰ τῶν NΛM, ΔEZ ἐπίπεδα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε τὸ ΛΘ, EK στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ ΘΛ στερεὸν τῷ EK στερεῷ. καί ἐστι τὸ μὲν ΘΛ τὸ ἀπὸ τῶν A, B, Γ στερεόν, τὸ δὲ EK τὸ ἀπὸ τοῦ B στερεόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν A, B, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἀπὸ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

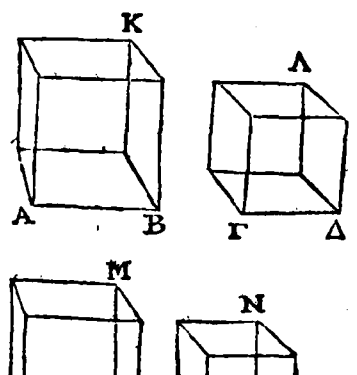
Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν τρία παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Prop. XXXVII. Theor.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint; & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. & si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶ τὸ ΚΑ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΛΓ ὅμοιον, τὸ ΚΑ ἄρα πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ· ὡς ἄρα τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.



Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΛΓ στερεὸν οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΝΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καί ἐστιν ὡς τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΛΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales AB, ΓΔ, EZ, HΘ, sitque ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ, & describantur ab ipsis AB, ΓΔ, EZ, HΘ similia & similiter posita solida parallelepipeda KA, ΛΓ, ME, NH: dico ut KA ad ΛΓ ita esse ME ad NH.

Quoniam enim solidum parallelepipedum KA simile est ipsi ΛΓ, habebit [per 33. 11.] KA ad ΛΓ triplicatam rationem ejus quam AB habet ad ΓΔ. eadem ratione & solidum ME ad ipsum NH triplicatam rationem habebit ejus quam habet EZ ad HΘ. atque [ex hyp.] ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ: ut igitur AK ad ΔΓ ita ME ad NH.

Sed sit ut solidum AK ad solidum ΛΓ ita ME solidum ad solidum NH: dico ut recta linea AB ad rectam ΓΔ ita esse rectam EZ ad ipsam HΘ.

Quoniam enim rursus AK ad ΛΓ triplicatam rationem habet ejus quam AB habet ad ΓΔ; habet autem & ME ad NH triplicatam rationem ejus quam EZ ad HΘ; atque ut AK ad ΛΓ ita ME ad NH: erit ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ.

Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint; & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. & si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Ἐὰν στερεὸν τοῦ ἑτέρου ἐπιπέδου ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ ἐν ἑνὶ τῶν στερεῶν ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ· ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος.

Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΔ στερεῷ τῷ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΓΔ στερεοῦ τυχεῖον σημεῖον τὸ Ε·

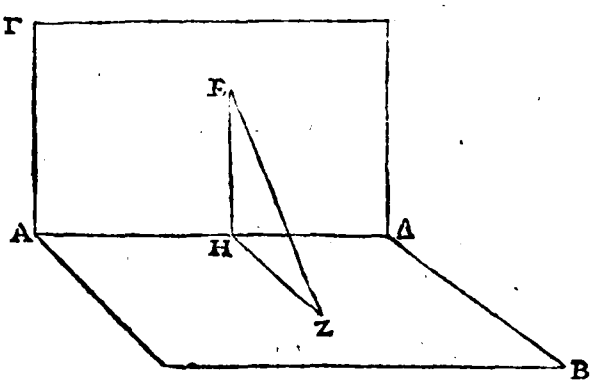
Prop. XXXVIII. Theor.

Si planum ad planum rectum sit; & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet.

PLanum enim ΓΔ ad planum AB rectum sit, communis autem eorum sectio sit AΔ, & in ipso ΓΔ plano quodvis punctum E sumatur:

dico perpendicularem, quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipſam AΔ.

Non enim, ſed ſi fieri poteſt, cadat extra, ut EZ, & plano AB in puncto Z occurrat: à puncto autem Z [per 10. 1.] ad ΔA in plano AB perpendicularis ducatur ZH, quæ quidem [per 4. def. 11.] & plano ΓΔ ad rectos angulos erit; & EH jungatur. quoniam igitur ZH plano ΓΔ eſt ad rectos angulos, contingit autem ipſam recta linea EH, quæ eſt in eodem ΓΔ plano: erit [per 3. def. 11.] angulus ZHE rectus. ſed & EZ plano AB ad rectos angulos eſt; rectus igitur eſt angulus EZH. quare trianguli EZH duo anguli duobus rectis ſunt æquales; quod [per 17. 1.] eſt abſurdum: non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam ΔA cadet: cadet igitur in ipſam AΔ.



Si igitur planum ad planum rectum ſit, & ab aliquo puncto eorum quæ ſunt in uno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum ſectionem cadet. quod erat demonſtrandum.

λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ AB ἐπίπεδον κάθετος ἀχθεῖσα ἐπὶ τὴν ΔA πεσεῖται.

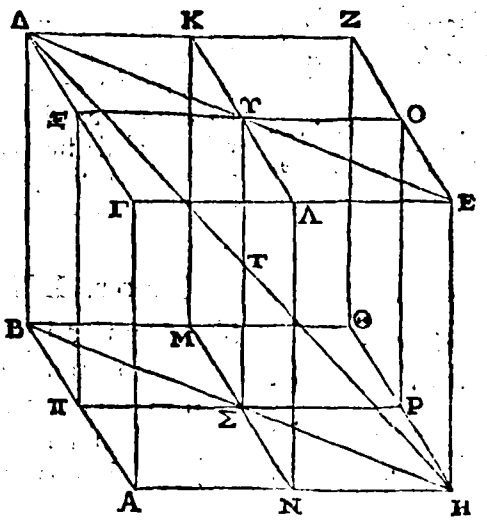
Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπέτω ἐκτὸς ὡς ἡ EZ, καὶ συμβαλλέτω τῷ AB ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Z σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τινὰ τῶν ΔA ἐν τῷ AB ἐπιπέδῳ κάθετος ἤχθω ἡ ZH, ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EH. ἐπεὶ οὖν ἡ ZH τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ EH, ἔσται ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ZHE γωνία. ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ EZ τῷ AB ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ EZH ὀρθή ἐστι. τριγώνου δὴ τοῦ EZH αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ AB ἐπίπεδον κάθετος ἀχθεῖσα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΔA· ἐπὶ τινὰ ἄρα πεσεῖται.

Ἐὰν ἄρα ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ· ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων πεσεῖται ἡ ἀχθεῖσα κάθετος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIX. Theor.

Si in ſolido parallelepipedo oppoſitorum planorum latera ſecentur bifariam, per ſectiones vero plana ducantur; communis planorum ſectio & ſolidi parallelepipedi diameter ſe mutuo bifariam ſecabunt.

IN ſolido enim parallelepipedo AZ oppoſitorum planorum ΓZ, AΘ latera bifariam ſecentur in punctis K, Λ, M, N, Ξ, Π, O, P, & per ſectiones plana ducantur KN, ΞP, communis autem planorum ſectio ſit TΣ, & ſolidi parallelepipedi diameter ΔH: dico TΣ, ΔH ſeſe bifariam ſecare; hoc eſt, TT quidem ipſi TΣ; ΔT vero ipſi TH æqualem eſſe.



Jungantur enim ΔΥ, ΤΕ, ΒΣ, ΣΗ. quoniam igitur ΔΞ parallela eſt ipſi ΟΕ, alterni anguli ΔΞΥ, ΥΟΕ [per 29. 1.] inter ſe æquales ſunt. & quoniam ΔΞ quidem eſt æqualis ΟΕ; ΞΥ vero ipſi ΥΟ, & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] baſis ΔΥ æqualis baſi ΥΕ, & triangulum ΔΞΥ trian-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ· ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ διάμετρος τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ AZ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓZ, AΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ K, Λ, M, N, Ξ, Π, O, P σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθωσαν τὰ KN, ΞP, κοινὴ δὲ τῶν ἐπιπέδων τομὴ ἔστω ἡ ΤΣ, τοῦ δὲ ΑΒ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διαγώνιος ἡ ΔH· λέγω ὅτι αἱ ΤΣ, ΔH δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν ὅτι ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΗ ἴση ἐστὶ, ἡ δὲ ΔΤ τῇ ΤΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΥ, ΤΕ, ΒΣ, ΣΗ. καὶ ἐπεὶ παραλληλός ἐστιν ἡ ΔΞ τῇ ΟΕ, αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΞΥ, ΥΟΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΞ τῇ ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ τῇ ΥΟ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΥ βάσει τῇ ΥΕ ἴση ἐστί, καὶ τὸ ΔΞΥ τρίγωνον

γωνον τῷ ΤΟΕ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΤΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΤΕ. Διὰ δὴ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΤΕ εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΔΤΕ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖά ἐστι καὶ ἴση ἡ ΒΣ τῇ ΣΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τε ἐστὶ καὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τε ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ διὰ ζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΗΒ· παράλληλος ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ. καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τοχεῖα σημεῖα τὰ Δ, Τ, Η, Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΗ, ΤΣ· ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ ΔΗ, ΤΣ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΤ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΤ, ἐναλλὰξ γάρ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΤΤ τῇ ὑπὸ ΗΤΣ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΔΤΤ, ΗΤΣ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΔΤ τῇ ΗΣ, ἡμίσεια γάρ ἐστι τῶν ΔΕ, ΒΗ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΗ, ἡ δὲ ΤΤ τῇ ΤΣ.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τριῶν ἀπειναντίον ἐπιπέδων, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

gulo ΤΟΒ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales: angulus igitur ΞΤΔ eſt æqualis angulo ΟΤΕ, & ob id [per 14. 1.] ΔΤΕ eſt recta linea: eademque ratione & ΒΣΗ recta eſt, atque ΒΣ æqualis ipſi ΣΗ. & quoniam [per 34. 1.] ΓΑ ipſi ΔΒ æqualis eſt & parallela, ſed & ΓΑ æqualis & parallela ipſi ΕΗ; erit & ΔΒ ipſi ΕΗ æqualis & [per 30. 1.] parallela. & ipſas conjungunt rectæ lineæ ΔΕ, ΒΗ: parallela igitur eſt [per 33. 1.] ΔΕ ipſi ΒΗ. & ſumpta ſunt in utraque ipſarum quædam puncta Δ, Τ, Η, Σ, & junctæ ſunt ΔΗ, ΤΣ: ergo [per 7. 11.] ΔΗ, ΤΣ in uno ſunt plano. quoniam igitur ΔΕ parallela eſt ipſi ΒΗ, erit [per 29. 1.] & ΕΔΤ angulus angulo ΒΗΤ æqualis, alterni enim ſunt. eſt autem & ΔΤΤ angulus [per 15. 1.] æqualis ipſi ΗΤΣ: duo igitur ſunt triangula ΔΤΤ, ΗΤΣ duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur, videlicet ΔΤ ipſi ΗΣ; dimidia etenim ſunt ipſorum ΔΕ, ΒΗ: ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: quare ΔΤ quidem eſt æqualis ΤΗ; ΤΤ vero ipſi ΤΣ.

Si igitur in ſolido parallelepipedo, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ΄.

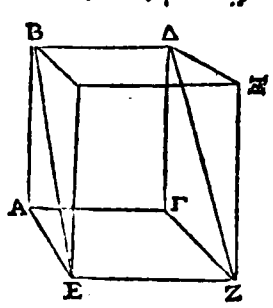
Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

PROP. XL. THEOR.

Si ſint duo priſmata æqualta, quorum unum quidem baſim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, & parallelogrammum duplum ſit trianguli; æqualia erunt ipſa priſmata.

Ἔστω πρίσματα ἰσοῦψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ ΗΘΚ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

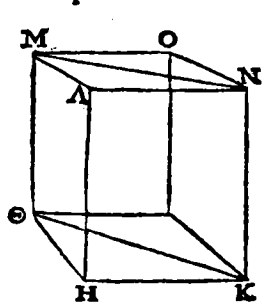
Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΞ, ΗΟ στερεά. καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ στερεὸν τῷ ΗΟ στερεῷ. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΞ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΟ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΗΘΚΛΜΝ πρίσμα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.



Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sint priſmata æqualta ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, & unum quidem baſim habeat parallelogrammum ΑΖ, alterum vero ΗΘΚ triangulum, & duplum ſit ΑΖ parallelogrammum trianguli ΗΘΚ: dico priſma ΑΒΓΔΕΖ priſmati ΗΘΚΛΜΝ æquale eſſe.

Compleantur enim ΑΞ, ΗΟ ſolida. & quoniam parallelogrammum ΑΖ trianguli ΗΘΚ eſt duplum, eſt autem [per 34. 1.] & ΘΚ parallelogrammum duplum trianguli ΗΘΚ; erit ΑΖ parallelogrammum parallelogrammo ΘΚ æquale. quæ vero in æqualibus ſunt baſibus ſolida parallelepipeda & eadem altitudine [per 31. 11.] inter ſe æqualia ſunt: æquale igitur ΑΞ ſolidum ſolido ΗΟ. atque eſt ſolidi quidem ΑΞ dimidium ΑΒΓΔΕΖ priſma, ſolidi vero ΗΟ dimidium priſma ΗΘΚΛΜΝ: ergo ΑΒΓΔΕΖ priſma priſmati ΗΘΚΛΜΝ eſt æquale.



Si igitur ſint duo priſmata æqualta, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΥΟΔΕΚΑΤΟΝ,

Καὶ Στερεῶν δεύτερον.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS,

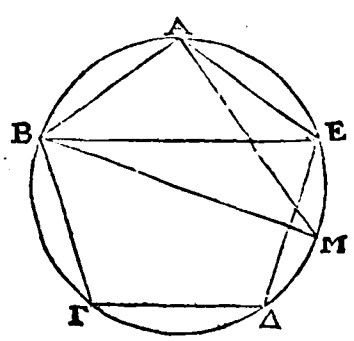
Et Solidorum ſecundus.

PROP. I. THEOR.

Similia polygona circulis inſcripta inter ſe ſunt ut quadrata à diametris.

SINT circuli ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, & in ipſis ſimilia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ; diametri autem circulorum ſint ΒΜ, ΗΝ: dico ut quadratum ex ΒΜ ad quadratum ex ΗΝ ita eſſe ΑΒΓΔΕ polygonum ad polygonum ΖΗΘΚΛ.

Jungantur enim ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. & quoniam polygonum ΑΒΓΔΕ ſimile eſt polygono ΖΗΘΚΛ, & [per 1. def. 6.] ΒΑΕ angulus angulo ΗΖΛ eſt æqualis, atque eſt ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΗΖ ad ΖΛ: igitur ΒΑΕ, ΗΖΛ ſunt duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum ΒΑΕ angulo ΗΖΛ, circa æquales autem angulos latera proportionalia: quare [per 6. 6.] triangulum ΑΒΕ triangulo ΖΗΛ æquiangulum eſt; ac propterea angulus ΑΕΒ æqualis eſt angulo ΖΛΗ. ſed [per 21. 3.]

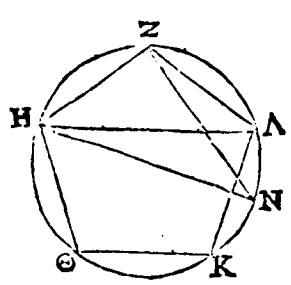


ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ΕΣΤΩΣΑΝ κύκλοι οἱ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ, ΗΝ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΛ· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΑΕ, ΗΖΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ



ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΜΒ ἴση ἐστίν, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν. ἡ δὲ ὑπὸ ΖΛΗ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΜ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΗΖΝ ἴση· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ. ἀλλὰ μὴν τὸ ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ τὸ ΒΜ πτερα-γώνῳ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΝ πτεράγωνον, ὁ δὲ τὸ ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τὸ ΒΜ πτεράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τὸ ΗΝ οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

angulus quidem AEB angulo AMB est æqualis, in eadem enim circumferentia consistunt. angulus autem ZΛH æqualis est angulo ZNH: ergo & AMB angulus est æqualis angulo ZNH. est autem & [per 31.3.] rectus angulus BAM æqualis recto HZN: quare & reliquus reliquo æqualis: æquiangulum igitur est triangulum ABM triangulo ZHN: ergo [per 4.6.] ut BM ad HN ita BA ad HZ. sed [per 20.6.] rationis quidem BM ad HN duplicata est ratio quadrati ex BM ad quadratum ex HN; rationis vero BA ad HZ duplicata est ratio ABΓΔE polygoni ad polygonum ZHΘKΛ: & igitur [per 11.5.] ut quadratum ex BM ad quadratum ex HN ita polygonum ABΓΔE ad ZHΘKΛ polygonum.

Quare similia polygona circulis inscripta inter se sunt ut quadrata à diametris. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

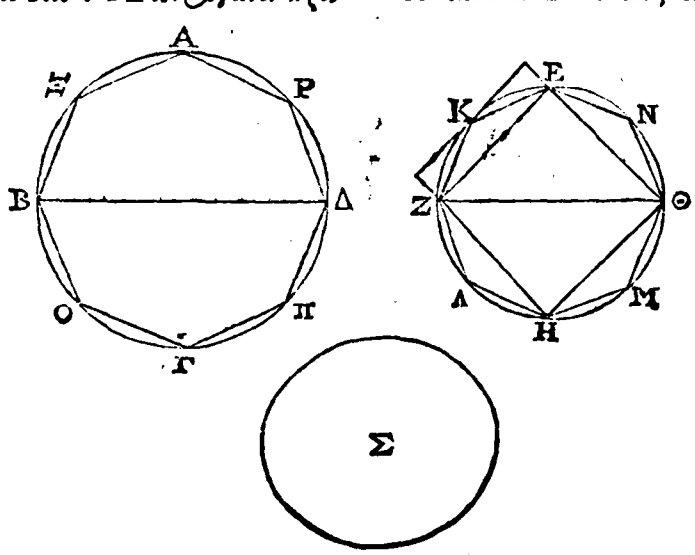
Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Prop. II. Theor.

Circuli inter se sunt ut quadrata à diametris.

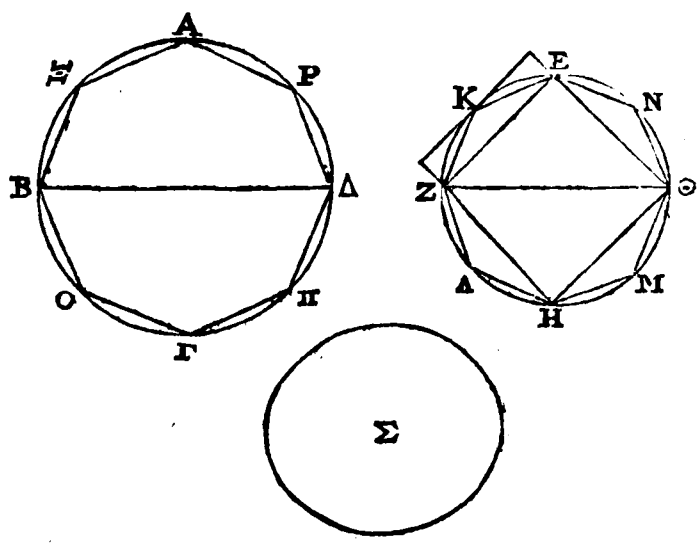
Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τὴν ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τὴν ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τὴν ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τὴν ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τὴν ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον. ἐστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου διαγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου ὑπὸ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον. τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάσσων ἐστὶν ὁ κύκλος· ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν



Si enim non ita est; erit ut quadratum ex BΔ ad quadratum ex ZΘ ita circulus ABΓΔ vel ad spatium aliquod minus circulo EZHΘ vel ad majus. Sit primum ad minus, quod sit Σ. & in circulo EZHΘ describatur quadratum EZHΘ. itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli EZHΘ; quoniam si per puncta E, Z, H, Θ contingentes circulum ducamus, erit [per 47.1.&31.3.] descripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EZHΘ. descripto autem circa circulum quadrato minor est circulus: ergo quadratum EZHΘ majus est dimidio circuli EZHΘ. secentur bifariam circumferentiæ EZ, ZH, HΘ, ΘE in punctis K, Λ, M, N; & EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE jungantur: unumquodque igitur triangulorum EKZ, ZΛH, ΘMH, ΘNE majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit; quoniam si per puncta K, Λ, M, N

contingentes circulum ducamus, & parallelogramma quæ ſuper rectis lineis ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ compleamus, erit [per 37. 1.] unumquodque triangulorum ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ dimidium parallelogrammi quod ad ipſum eſt. ſed ſegmentum minus eſt parallelogrammo: quare unumquodque triangulorum ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ majus eſt dimidio ſegmenti circuli in quo conſiſtit: reliquas igitur circumferentias bifariam ſecantes, & jungentes rectas lineas, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quædam circuli ſegmenta, quæ minora erunt exceſſu, quo circulus ΕΖΗΘ ipſum Σ ſpatium ſuperat. etenim oſtenſum eſt, in primo theoremate decimi libri, duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod relinquitur rurſus majus quam dimidium, & hoc ſemper fiat, relinqui tandem magnitudinem aliquam, quæ minore magnitudine expoſita ſit minor. itaque relicta ſint ſegmenta circuli ΕΖΗΘ in rectis lineis ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ, quæ majora ſint exceſſu quo circulus ΕΖΗΘ ipſum Σ ſpatium ſuperat: ergo reliquum ΕΚΖΛΗΜΘΝ polygonum majus erit ſpatio Σ. deſcribatur etiam in ΑΒΓΔ circulo polygono ΕΚΖΛΗΜΘΝ ſimile polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ: eſt igitur [per 1. 12.] ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ ad ΕΚΖΛΗΜΘΝ polygonum. ſed [ex hypoth.] ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita ΑΒΓΔ circulus ad ſpatium Σ: ergo & ut circulus ΑΒΓΔ ad ſpatium Σ ita polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ ad ΕΚΖΛΗΜΘΝ polygonum, & permutando ut circulus ΑΒΓΔ ad polygonum quod in ipſo eſt ita ſpatium Σ ad polygonum ΕΚΖΛΗΜΘΝ. major autem eſt circulus ΑΒΓΔ eo qui in ipſo eſt polygono: quare & ſpatium Σ majus eſt polygono ΕΚΖΛΗΜΘΝ. ſed & [ex hyp.] minus; quod fieri non poteſt: non igitur eſt ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita ΑΒΓΔ circulus ad ſpatium aliquod minus circulo ΕΖΗΘ. ſimiliter oſtendemus, neque eſſe ut quadratum ex ΖΘ ad quadratum ex ΒΔ ita circulum ΕΖΗΘ ad aliquod ſpatium minus circulo ΑΒΓΔ. Dico etiam neque eſſe ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita circulum ΑΒΓΔ ad aliquod ſpatium majus circulo ΕΖΗΘ. ſi enim fieri poteſt,



σημείων ἐφαπτομένους ὁ κύκλος ἀγάγωμεν, καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ὁποῖ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα· ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων ἥμισον ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα τμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ ι, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. λελείφθω ἔν, καὶ ἔστω τὰ ὑπὸ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήματα τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Σ χωρίου. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ἐν αὐτῷ πολύγωνον οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. μεῖζων δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον. λέγω δὴ ὅτι οὐδ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. εἰ γὰρ δυνατόν,

ἔστω

ἔσω πρὸς μείζον τὸ Σ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ζ Θ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β Δ οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ κύκλον· ἀλλ' ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ζ Θ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β Δ οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον, ὅπερ ἐδείχθη ἀδυνάτον· οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β Δ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ζ Θ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β Δ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ζ Θ τετράγωνον οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

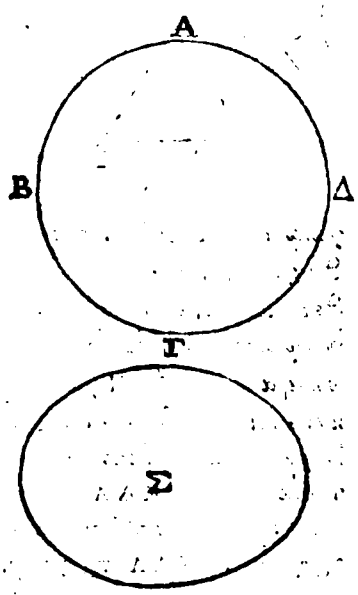
sit ad majus, nempe Σ; erit igitur invertendo ut quadratum ex Z Θ ad quadratum ex Β Δ ita ſpatium Σ ad ΑΒΓΔ circulum: ſed [ut infra oſtendetur] ut ſpatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulus ΕΖΗΘ ad aliquod ſpatium minus circulo ΑΒΓΔ; ergo & ut quadratum ex Z Θ ad quadratum ex Β Δ ita ΕΖΗΘ circulus ad aliquod ſpatium minus circulo ΑΒΓΔ, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt: non igitur eſt ut quadratum ex Β Δ ad quadratum ex Z Θ ita circulus ΑΒΓΔ ad ſpatium aliquod majus ΕΖΗΘ circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus: quare ut quadratum ex Β Δ ad quadratum ex Z Θ ita erit ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ.

Circuli igitur inter ſe ſunt, ut quadrata à diametris. quod erat demonſtrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Λέγω δὴ, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

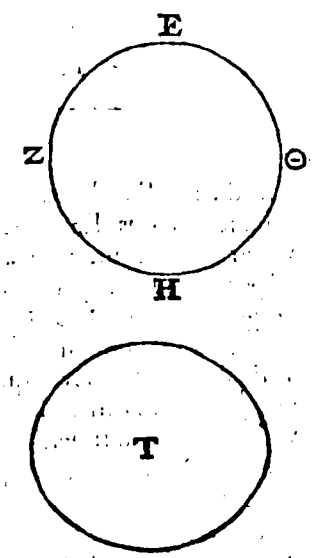
Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Τ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. μεῖζον δὲ τὸ Σ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μεῖζον ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου· ὥστε ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.



LEMMA.

Itaque dico, ſi ſpatium Σ ſit majus circulo ΕΖΗΘ, eſſe ut ſpatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulum ΕΖΗΘ ad ſpatium aliquod circulo ΑΒΓΔ minus.

Fiat enim ut ſpatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita ΕΖΗΘ circulus ad ſpatium Τ: dico ſpatium Τ circulo ΑΒΓΔ minus eſſe. quoniam enim eſt ut ſpatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita ΕΖΗΘ circulus ad ſpatium Τ; erit permutando [per 16. 5.] ut ſpatium Σ ad circulum ΕΖΗΘ ita ΑΒΓΔ circulus ad ſpatium Τ. majus autem eſt [ex hyp.] ſpatium Σ circulo ΕΖΗΘ; ergo ΑΒΓΔ circulus ſpatio Τ eſt major; ac propterea ut ſpatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita eſt ΕΖΗΘ circulus ad ſpatium aliquod circulo ΑΒΓΔ minus.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ· καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα,

PROP. III. THEOR.

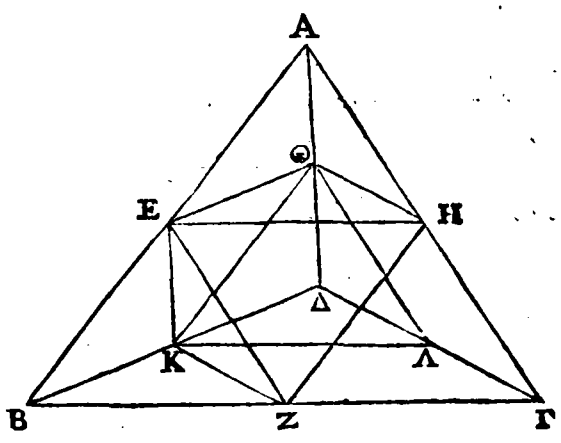
Omnis pyramis triangularem habens baſim dividitur in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe quæ triangulares baſes habent, eaſque ſimiles toti; necnon in duo priſmata æqualia,

æqualia, quæ dimidio quidem totius pyramidis ſunt majora.

ἢ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

SIT pyramis, cujus baſis quidem ΑΒΓ triangulum, vertex autem punctum Δ: dico pyramidem ΑΒΓΔ dividi in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe triangulares baſes habentes, ſimileſque toti; necnon in duo priſmata æqualia, duo vero priſmata dimidio totius pyramidis eſſe majora.

Secentur enim ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, & ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ jungantur. quoniam igitur ΑΕ quidem eſt æqualis ΕΒ; ΑΘ vero ipſi ΘΔ; erit [per 2. 6.] ΕΘ ipſi ΔΒ parallela. eadem ratione & ΘΚ eſt parallela ipſi ΑΒ: parallelogrammum igitur eſt ΘΕΒΚ: quare [per 34. 1.] ΘΚ eſt æqualis ΕΒ. ſed ΕΒ ipſi ΑΕ eſt æqualis: ergo & ΑΕ ipſi ΘΚ æqualis erit. eſt autem & ΑΘ æqualis ΘΔ: duæ igitur ΑΕ, ΑΘ duabus ΚΘ, ΘΔ æquales ſunt, altera alteri, & [per 29. 1.] angulus ΕΑΘ æqualis angulo ΚΘΔ: baſis igitur ΕΘ [per 4. 1.] baſi ΚΔ eſt æqualis: quare triangulum ΑΕΘ æquale eſt & ſimile triangulo ΘΚΔ. eadem ratione & triangulum ΑΘΗ triangulo ΘΛΔ æquale eſt & ſimile. & quoniam duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes ΕΘ, ΘΗ duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ΚΔ, ΔΛ parallelæ ſunt, non autem in eodem plano, [per 10. 11.] æquales angulos continebunt: ergo angulus ΕΘΗ eſt æqualis angulo ΚΔΛ. rurſus quoniam duæ rectæ lineæ ΕΘ, ΘΗ duabus ΚΔ, ΔΛ æquales ſunt altera alteri, & angulus ΕΘΗ æqualis angulo ΚΔΛ; erit baſis ΕΗ baſi ΚΛ æqualis; æquale igitur eſt & ſimile triangulum ΕΘΗ triangulo ΚΔΛ. eadem ratione & ΑΕΗ triangulum eſt æquale & ſimile triangulo ΘΚΛ; quare pyramis, cujus baſis quidem eſt ΑΕΗ triangulum, vertex autem punctum Θ, æqualis & ſimilis eſt pyramidi, cujus baſis eſt triangulum ΘΚΛ, & vertex Δ punctum. & quoniam uni laterum trianguli ΑΔΒ, videlicet ipſi ΑΒ, parallela ducta eſt ΘΚ; erit [per 29. 1.] triangulum ΑΔΒ triangulo ΔΘΚ æquiangulum, & [per 4. 6.] latera habent proportionalia: ſimile igitur eſt ΑΔΒ triangulum triangulo ΔΘΚ. & eadem ratione triangulum quidem ΔΒΓ ſimile eſt triangulo ΔΚΛ; triangulum vero ΑΔΓ triangulo ΔΘΛ. quod cum duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes ΒΑ, ΑΓ duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ΚΘ, ΘΛ parallelæ ſint, non exiſtentes in eodem plano, [per 10. 11.] æquales angulos continebunt: angulus igitur ΒΑΓ angulo ΚΘΛ eſt æqualis. atque



Ἔστω πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΘΔ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΑΒ παράλληλός ἐστιν· παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ ΘΕΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΕΒ. ἀλλὰ ἡ ΕΒ τῇ ΑΕ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΕ ἄρα τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ἔστι δὴ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΑΘ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΘ βάσει τῇ ΚΔ ἐστιν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΕΘ τριγώνον τῷ ΘΚΔ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΘΗ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἅπτονται ἀλλήλων αἱ ΕΘ, ΘΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΔ, ΔΛ εἰσιν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσας, ἴσας γωνίας περιέχουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ γωνίᾳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ, ΘΗ δυσὶ ταῖς ΚΔ, ΔΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΔΛ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΚΛ ἐστιν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΘΗ τριγώνον τῷ ΚΔΛ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ ἴσον καὶ ὅμοιόν ἐστι· καὶ ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ παράλληλός ἐστιν ἑνὶ τῶν πλευρῶν τῇ ΑΒ ἡ ΘΚ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι· ὅμοιον ἄρα τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΚΛ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΑΔΓ τῷ ΔΘΛ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἅπτονται ἀλλήλων αἱ ΒΑ, ΑΓ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΘ, ΘΛ εἰσιν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσας, ἴσας γωνίας περιέχουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΘΚ. καὶ

ἐστιν

ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ· ὅμοιον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἀλλὰ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἐδείχθη ὁμοία πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, διπλάσιον ἐστὶ τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΖΓ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ ἐὰν δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ ὦσι, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις τὰ πρίσματα· ἴσον ἄρα τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΚΘΗΖ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΛ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ. καὶ φανερὸν ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ μὲν βάσις τὸ ΕΒΗΖ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ ΗΖΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα· ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΕΖ, ΕΚ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἐπὶ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται· ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ ΗΖΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον· ἡ ὅλη ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΚΛ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα· ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, διήρηται εἰς δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΚΘ ad ΘΛ: ergo [per 6.6.] ΑΒΓ triangulum ſimile eſt triangulo ΘΚΛ: ideoque pyramis, cujus baſis quidem triangulum ΑΒΓ vertex autem punctum Δ, ſimilis eſt pyramidi, cujus triangulum ΘΚΛ & vertex punctum Δ. ſed pyramis, cujus baſis quidem ΘΚΛ triangulum vertex autem punctum Δ, oſtenſa eſt ſimilis pyramidi, cujus baſis triangulum ΑΕΗ & vertex Θ punctum: quare & pyramis, cujus baſis triangulum ΑΒΓ & vertex punctum Δ, ſimilis eſt pyramidi, cujus baſis ΑΕΗ triangulum & vertex punctum Θ: utraque igitur ipſarum ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ pyramidum ſimilis eſt toti pyramidi ΑΒΓΔ. & quoniam ΒΖ eſt æqualis ΖΓ, erit [per 41. 1.] ΕΒΖΗ parallelogrammum duplum trianguli ΗΖΓ. & quoniam ſi ſint duo priſmata æquealta, quorum unum quidem baſim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, ſitque parallelogrammum duplum trianguli; ſunt [per 40. 11.] ea priſmata inter ſe æqualia: ergo priſma contentum ſub duobus triangulis ΒΚΖ, ΕΘΗ & tribus parallelogrammis ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΚΘΗΖ eſt æquale priſmati quod ſub duobus triangulis ΗΖΓ, ΘΚΛ & tribus parallelogrammis ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ continetur. & manifeſtum eſt utrumque ipſorum priſmatum, & cujus baſis eſt ΕΒΖΗ parallelogrammum oppoſita autem ipſi ΘΚ recta linea, & cujus baſis eſt ΗΖΓ triangulum & oppoſitum ipſi triangulum ΚΛΘ, majus eſſe utraque pyramidum, quarum baſes quidem ΑΕΗ, ΘΚΛ triangula vertices autem puncta Θ, Δ: quoniam ſi jungamus ΕΖ, ΕΚ rectas lineas, priſma quidem, cujus baſis eſt ΕΒΖΗ parallelogrammum & oppoſita ipſi recta linea ΘΚ, majus eſt pyramide, cujus baſis ΕΒΖ triangulum vertex autem punctum Κ. ſed pyramis, cujus baſis triangulum ΕΒΖ, & vertex Κ punctum, [per 10. def. 11.] eſt æqualis pyramidi, cujus baſis ΑΕΗ triangulum & vertex punctum Θ; æqualibus enim & ſimilibus planis continentur: quare & priſma, cujus baſis parallelogrammum ΕΒΖΗ oppoſita autem ipſi recta linea ΘΚ, majus eſt pyramide, cujus baſis ΑΕΗ triangulum & vertex punctum Θ. priſma vero, cujus baſis parallelogrammum ΕΒΖΗ & oppoſita ipſi recta linea ΘΚ, eſt æquale priſmati, cujus baſis ΗΖΓ triangulum & ipſi oppoſitum triangulum ΘΚΛ; & pyramis, cujus baſis triangulum ΑΕΗ vertex autem Θ punctum, eſt æqualis pyramidi, cujus baſis ΘΚΛ triangulum & vertex punctum Δ: ergo duo priſmata, de quibus dictum eſt, ſunt majora duabus dictis pyramidibus, quorum baſes triangula ΑΕΗ, ΘΚΛ vertices autem Θ, Δ puncta: tota igitur pyramis, cujus baſis ΑΒΓ triangulum vertex autem punctum Δ, diviſa eſt in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia, quæ dimidio quidem totius pyramidis ſunt majora. quod erat demonſtrandum.

PROP. IV. THEOR.

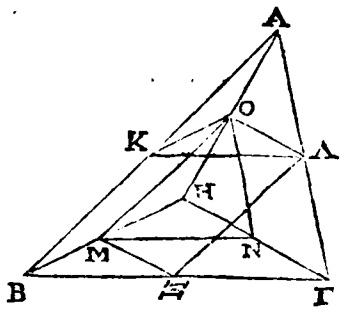
Si ſint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares baſes habent, dividatur autem utraque ipſarum, & in duas pyramides æquales inter ſe ſimileſque toti, & in duo priſmata æqualia, atque ortarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, idque ſemper fiat; erit ut unius pyramidis baſis ad baſim alterius ita priſmata omnia in una pyramde ad priſmata omnia in altera pyramide numero æqualia.

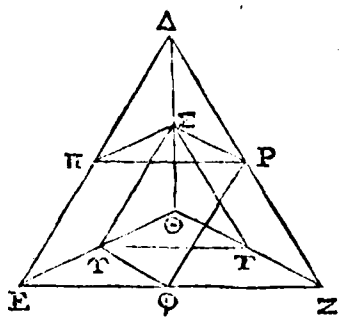
ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἐχούσας βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται· ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

SInt duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares baſes habent ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices autem ſint puncta Η, Θ, & dividatur utraque ipſarum in duas pyramides æquales inter ſe ſimileſque toti, & in duo priſmata æqualia, atque ortarum pyramidum utraque eodem modo diviſa intelligatur, atque hoc ſemper fiat: dico ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita eſſe priſmata omnia quæ ſunt in pyramide ΑΒΓΗ ad priſmata omnia in pyramide ΔΕΖΘ numero æqualia.

Quoniam enim ΒΞ quidem eſt æqualis ΞΓ, ΑΛ vero æqualis ΛΓ; erit [per 2. 6.] ΞΛ ipſi ΑΒ parallela, & [per 4. 6.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΛΞΓ ſimile. eadem ratione & triangulum ΔΕΖ ſimile eſt triangulo ΡΦΖ. & quoniam ΒΓ quidem eſt dupla ΓΞ, & ΕΖ dupla ipſius ΖΦ, ut ΒΓ ad ΓΞ ita erit ΕΖ ad ΖΦ. & deſcripta ſunt ab ipſis ΒΓ, ΓΞ ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea ΑΒΓ, ΛΞΓ, ab ipſis vero ΕΖ, ΖΦ ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea ΔΕΖ, ΡΦΖ: eſt igitur [per 22. 6.] ut ΒΑΓ triangulum ad triangulum ΛΞΓ ita triangulum ΔΕΖ ad ΡΦΖ triangulum; & permutando ut triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ ita ΛΞΓ triangulum ad triangulum ΡΦΖ. ſed [ut oſtendetur infra] ut ΛΞΓ triangulum ad triangulum ΡΦΖ ita priſma, cujus baſis eſt triangulum ΛΞΓ oppoſitum autem ipſi ΟΜΝ, ad priſma, cujus baſis ΡΦΖ triangulum & oppoſitum ipſi ΣΤΤ: igitur [per 11. 5.] ut ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ ita priſma, cujus baſis eſt triangulum ΛΞΓ oppoſitum autem ipſi ΟΜΝ, ad priſma, cujus baſis ΡΦΖ triangulum & oppoſitum ipſi ΣΤΤ. & quoniam duo priſmata, quæ ſunt in pyramide ΑΒΓΗ, inter ſe æqualia ſunt, ſed &





Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἐχούσας βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον νενοήσθω διῃρημένη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ· παραλληλος ἄρα ἡ ΞΛ τῇ ΑΒ, καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τριγωνον τῷ ΛΞΓ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ. ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΞ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΦ. καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ, ΛΞΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον· καὶ ἀλλὰ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΛΞΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον ἢ τὸ ΣΤΥ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν

καὶ τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΛΞΒ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΜΟ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ΕΠΡΦ ἀπεναντίον ἡ ΣΤ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον τὸ ΣΤΤ· συνθέντι ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ πρίσματα πρὸς τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα οὕτως τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΤ πρίσματα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΤ πρίσμα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΟΜ, ΛΞΓΟΜΝ πρὸς τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΤ πρίσματα οὕτως τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΤ πρίσμα. ὡς δὲ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΤ πρίσμα οὕτως ἐδείχθη ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, καὶ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ὁμοίως δὲ κἂν τὰς γενομένας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον οἷον ὡς τὰ ΟΜΝΗ, ΣΤΤΘ, ἔσται ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΤ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΤΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΤ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως καὶ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΤΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ πάντα πρὸς πάντα· τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ΑΚΛΟ καὶ ΔΠΡΣ πυραμίδων καὶ πάντων ἁπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quæ in pyramide ΔΕΖΘ priſmata inter ſe ſunt æqualia; erit ut priſma, cujus baſis parallelogrammum ΚΛΞΒ oppoſita vero ipſi recta linea ΜΟ, ad priſma, cujus baſis ΛΞΓ triangulum & oppoſitum ipſi ΟΜΝ, ita priſma, cujus baſis parallelogrammum ΒΠΡΦ & oppoſita recta linea ΣΤ, ad priſma, cujus baſis ΡΦΖ triangulum oppoſitum vero ipſi ΣΤΤ: quare componendo [per 18. 5.] ut priſmata ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ ad priſma ΛΞΓΜΝΟ ita priſmata ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΤ ad priſma ΡΦΖΣΤΤ: & permutando ut priſmata ΚΒΞΛΟΜ, ΛΞΓΟΜΝ ad priſmata ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΤ ita priſma ΛΞΓΜΝΟ ad priſma ΡΦΖΣΤΤ. ut autem priſma ΛΞΓΜΝΟ ad priſma ΡΦΖΣΤΤ ita oſtenſa eſt baſis ΛΞΓ ad ΡΦΖ baſim, & ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ: ergo & ut triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ ita quæ in pyramide ΑΒΓΗ duo priſmata ad duo priſmata quæ in pyramide ΔΕΖΘ. ſimiliter autem & ſi factas pyramides dividamus eodem modo velut ΟΜΝΗ, ΣΤΤΘ, erit ut ΟΜΝ baſis ad baſim ΣΤΤ ita quæ in pyramide ΟΜΝΗ duo priſmata ad duo priſmata quæ in pyramide ΣΤΤΘ. ſed ut ΟΜΝ baſis ad baſim ΣΤΤ ita baſis ΑΒΓ ad ΔΕΖ baſim: & igitur ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita quæ in pyramide ΑΒΓΗ duo priſmata ad duo priſmata quæ in pyramide ΔΕΖΘ, & quæ in pyramide ΟΜΝΗ duo priſmata ad duo priſmata quæ in pyramide ΣΤΤΘ, & quatuor ad quatuor. eadem autem oſtendentur & in cæteris priſmatum quæ oriuntur diviſione pyramidum ΑΚΛΟ, & ΔΠΡΣ & omnium ſimpliciter multitudine æqualium. quod erat demonſtrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΛΞΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ, οὕτως δεικτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Θ σημείων ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα ἐπίπεδα, ἴσας δηλαδὴ τοιγαροῦν διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι, αἵτε ΗΓ ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Η σημείου ἐπὶ τὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΟΜΝ πεμπομένη, εἰς τὰς αὐτὰς λόγους τμηθήσονται· καὶ τέτμηται ἡ ΗΓ δίχα ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου κατὰ τὸ Ν· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ΔΕΖ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΣΤΤ ἐπιπέδου. καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ΟΜΝ, ΣΤΤ τριγώνων ἐπὶ

LEMMA.

At vero ut ΛΞΓ triangulum ad triangulum ΡΦΖ, ita eſſe priſma, cujus baſis triangulum ΛΞΓ oppoſitum autem ipſi ΟΜΝ, ad priſma, cujus baſis ΡΦΖ triangulum & oppoſitum ipſi ΣΤΤ, hoc modo oſtendemus.

In eadem enim figura intelligantur ab ipſis Η, Θ punctis perpendiculares ductæ ad ΑΒΓ, ΔΕΖ triangulorum plana, quæ inter ſe æquales erunt; propterea quod pyramides ipſæ æqualtæ ponuntur. & quoniam duæ rectæ lineæ ΗΓ & perpendicularis à puncto Η ducta ſecantur à parallelis planis ΑΒΓ, ΟΜΝ, [per 17. 11.] in eadem ratione ſecabuntur. ſecatur vero ΗΓ bifariam a plano ΟΜΝ in puncto Ν: ergo & à puncto Η ducta perpendicularis ad ΑΒΓ planum bifariam ſecabitur à plano ΟΜΝ. eadem ratione & quæ à puncto Θ ducitur perpendicularis ad ΔΕΖ planum à plano ΣΤΤ bifariam ſecabitur. ſunt autem æquales perpendiculares, quæ ab ipſis Η, Θ ducuntur ad plana ΑΒΓ, ΔΕΖ: ergo & æquales quæ à triangulis ΟΜΝ, ΣΤΤ ad ipſa

ΑΒΓ, ΔΕΖ perpendiculares ducuntur: æquealta igitur ſunt priſmata, quorum baſes triangula ΛΞΓ, ΡΦΖ, oppoſita autem ipſis ΟΜΝ, ΣΤΥ: quare [per 32. 11.] & ſolida parallelepipeda quæ à dictis priſmatibus deſcribuntur æquealta inter ſe ſunt ut baſes; pariterque de illorum dimidiis, ut ΛΞΓ baſis ad baſim ΡΦΖ ita erunt inter ſe & dicta priſmata. quod erat demonſtrandum.

τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ κάθετοι· ἰσοϋψῆ ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΛΞΓ, ΡΦΖ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ ΟΜΝ, ΣΤΥ· ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα, ἰσοϋψῆ τυγχάνοντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἔσται, ὡς ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν ὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. V. Theor.

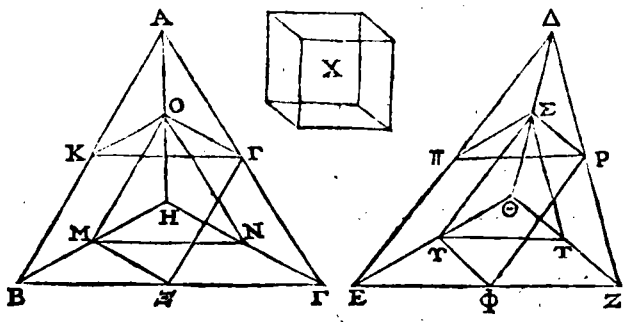
Pyramides quæ in eadem ſunt altitudine & triangulares baſes habent inter ſe ſunt ut baſes.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἐχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

SInt enim in eadem altitudine pyramides, quarum baſes quidem triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices autem puncta Η, Θ: dico ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ſic eſſe pyramidem ΑΒΓΗ ad ΔΕΖΘ pyramidem.

Si enim non ita ſit, erit ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ſic ΑΒΓΗ pyramis vel ad ſolidum minus pyramide ΔΕΖΘ vel ad majus. eſto primum ad ſolidum minus, ſitque Χ; & dividatur pyramis ΔΕΖΘ in duas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, & in duo priſmata æqualia; ſunt igitur [per 3. 12.] duo priſmata dimidio totius pyramidis majora. & rurſus pyramides ex diviſione factæ ſimiliter dividantur, atque hoc ſemper fiat quoad ſumantur quædam pyramides à pyramide ΔΕΖΘ, quæ ſint minores exceſſu, quo pyramis ΔΕΖΘ ſolidum Χ ſuperat. itaque ſumantur, & ſint exempli cauſa pyramides ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ: erunt igitur reliqua in pyramide ΔΕΖΘ priſmata ſolido Χ majora. dividatur etiam ΑΒΓΗ pyramis ſimiliter & in totidem partes atque pyramis ΔΕΖΘ: ergo [per 4. 12.] ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita quæ in pyramide ΑΒΓΗ priſmata ad priſmata quæ in pyramide ΔΕΖΘ. ſed [ex hyp.] ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita pyramis ΑΒΓΗ ad ſolidum Χ: & igitur ut ΑΒΓΗ pyramis ad ſolidum Χ ita quæ in pyramide ΑΒΓΗ priſmata ad priſmata quæ in pyramide ΔΕΖΘ: & permutando ut ΑΒΓΗ pyramis ad priſmata quæ in ipſa ſunt ita ſolidum Χ ad priſmata quæ ſunt in pyramide ΔΕΖΘ. major autem eſt pyramis ΑΒΓΗ priſmatibus quæ in ipſa ſunt: ergo & ſolidum Χ priſmatibus quæ ſunt in pyramide ΔΕΖΘ eſt majus. ſed & minus, quod



Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ ὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν ὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν ὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Χ· καὶ διῃρήσθω ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσους ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γενόμεναι διῃρήσθωσαν πυραμίδες ὁμοίως, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος, αἵ εἰσιν ἐλάσσονες τοῦ ὑπερέχοντος, ἧς ὑπερέχει ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς τοῦ Χ στερεοῦ. λελήφθωσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκα αἱ ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Χ στερεοῦ. διῃρήσθω καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθὴς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν ὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν ὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεὸν ὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα ὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. μεῖζων δὲ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Χ στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ

ἐστὶν

ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος στερεόν. λέγω δὴ ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Αἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

fieri non poteſt: non igitur ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita eſt pyramis ΑΒΓΗ ad ſolidum aliquod minus pyramide ΔΕΖΘ. ſimiliter oſtendemus neque ut ΔΕΖ baſis ad baſim ΑΒΓ ita eſſe pyramidem ΔΕΖΘ ad ſolidum aliquod pyramide ΑΒΓΗ minus. Dico porro neque eſſe ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita ΑΒΓΗ pyramidem ad aliquod ſolidum majus pyramide ΔΕΖΘ. ſi enim fieri poteſt, ſit ad majus, videlicet ad ſolidum Χ: erit igitur invertendo ut ΔΕΖ baſis ad baſim ΑΒΓ ita ſolidum Χ ad ΑΒΓΗ pyramidem. ut autem ſolidum Χ ad ΑΒΓΗ pyramidem ita ΔΕΖΘ pyramis ad ſolidum aliquod minus pyramide ΑΒΓΗ, ut proxime oſtenſum fuit: & igitur ut ΔΕΖ baſis ad baſim ΑΒΓ ita pyramis ΔΕΖΘ ad ſolidum aliquod pyramide ΑΒΓΗ minus, quod eſt abſurdum: non igitur ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita eſt ΑΒΓΗ pyramis ad ſolidum aliquod majus pyramide ΔΕΖΘ. oſtenſum autem eſt neque eſſe ad minus: quare ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita eſt pyramis ΑΒΓΗ ad ΔΕΖΘ pyramidem.

Pyramides igitur quæ in eadem ſunt altitudine & triangulares baſes habent inter ſe ſunt ut baſes. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

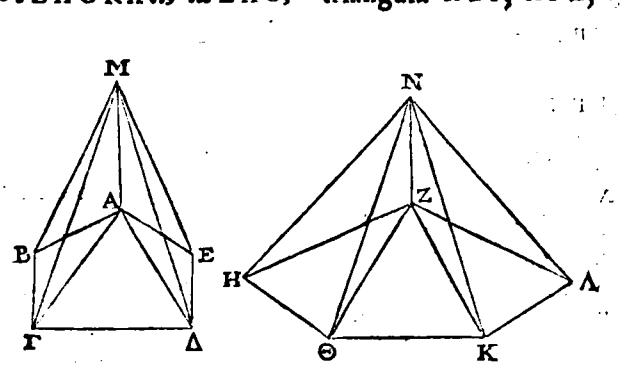
Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Prop. VI. Theor.

Pyramides quæ in eadem ſunt altitudine & polygonas baſes habent inter ſe ſunt ut baſes.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, κορυφὰς δὲ τὰ Μ, Ν σημεῖα· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

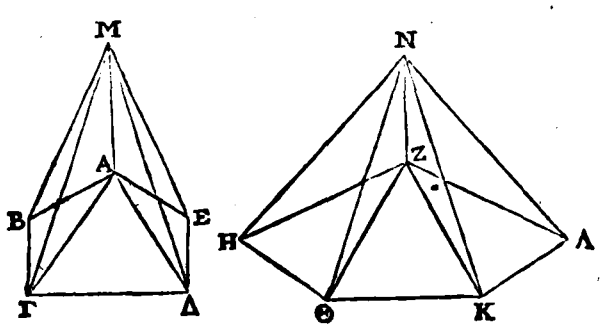
Διῃρήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒΓΔΕ βάσις εἰς τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ τρίγωνα· ἡ δὲ ΖΗΘΚΛ εἰς τὰ ΖΗΘ, ΖΘΚ, ΖΚΛ τρίγωνα, καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοϋψεῖς τῇ ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα, καὶ συνθέντι ὡς τὸ ΑΒΓΔ τραπέζιον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ οὕτως ἡ ΑΒΓ



Sint in eadem altitudine pyramides, quæ polygonas baſes habeant ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, vertices autem Μ, Ν puncta: dico ut ΑΒΓΔΕ baſis ad baſim ΖΗΘΚΛ ita eſſe ΑΒΓΔΕΜ pyramidem ad pyramidem ΖΗΘΚΛΝ.

Dividatur enim baſis quidem ΑΒΓΔΕ in triangula ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ: baſis vero ΖΗΘΚΛ dividatur in triangula ΖΗΘ, ΖΘΚ, ΖΚΛ; & ſuper unoquoque triangulo intelligantur pyramides æqualtæ ac pyramides quæ à principio. quoniam igitur [per 5. 12.] eſt ut triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΑΓΔ ita ΑΒΓΜ pyramis ad pyramidem ΑΓΔΜ: & componendo [per 18. 5.] ut ΑΒΓΔ trapezium ad triangulum ΑΓΔ ita ΑΒΓΔΜ pyramis ad pyramidem ΑΒΓΜ. ſed & ut ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΑΔΕ ita pyramis ΑΓΔΜ ad ΑΔΕΜ pyramidem: ergo ex æquo [per 22. 5.] ut ΑΒΓΔ baſis ad baſim ΑΔΕ ita ΑΒΓΔΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ. & rurſus componendo ut ΑΒΓΔΕ baſis ad baſim ΑΔΕ ita ΑΒΓ

ΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ. eadem ratione & ut ΖΗΘΚΛ baſis ad baſim ΖΚΛ ita & ΖΗΘΚΛΝ pyramis ad ΖΚΛΝ pyramidem. & quoniam ΑΔΕΜ, ΖΚΛΝ ſunt duæ pyramides, quæ triangulares baſes habent & in eadem ſunt altitudine; erit ut ΑΔΕ baſis ad baſim ΖΚΛ ita ΑΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΖΚΛΝ. quoniam igitur eſt ut ΑΒΓΔΕ baſis ad baſim ΑΔΕ, ita ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ; ut autem ΑΔΕ baſis ad baſim ΖΚΛ ita ΑΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΖΚΛΝ: erit, ex æquo, ut baſis ΑΒΓΔΕ ad ΖΚΛ baſim ita ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΖΚΛΝ. ſed & ut ΖΚΛ baſis ad baſim ΖΗΘΚΛ ita erat & ΖΚΛΝ pyramis ad pyramidem ΖΗΘΚΛΝ: quare rurſus ex æquo, ut ΑΒΓΔΕ baſis ad baſim ΖΗΘΚΛ ita eſt ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΖΗΘΚΛΝ.



Pyramides igitur quæ in eadem ſunt altitudine & polygonas baſes habent inter ſe ſunt ut baſes. quod erat demonſtrandum.

ΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΗΘΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν ἔτως καὶ ἡ ΖΗΘΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα, καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΔΕΜ, ΖΚΛΝ τριγωνα ἔχουσι βάσεις, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν ἔτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. ἐπὶ ἴσν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν ἔτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα, ὡς δὲ ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν ἔτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα· δἰσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν ἔτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΖΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν ἔτως ἦν καὶ ἡ ΖΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα· καὶ δἰσου πάλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν ἔτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

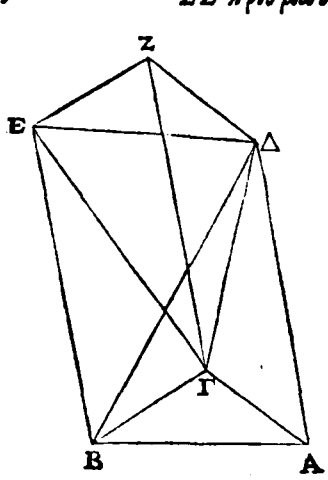
Πυραμίδες ἄρα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔσας καὶ πολυγώνους ἐχούσας βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VII. Theor.

Omne priſma triangularem habens baſim dividitur in tres pyramides æquales inter ſe, quæ triangulares baſes habent.

SIT priſma cujus baſis quidem triangulum ΑΒΓ, oppoſitum autem ipſi ΔΕΖ: dico priſma ΑΒΓΔΕΖ dividi in tres pyramides æquales inter ſe, quæ triangulares habent baſes.

Jungantur enim ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. & quoniam ΑΒΕΔ eſt parallelogrammum, cujus diameter ΒΔ, erit [per 34. 1.] ΑΒΔ triangulum triangulo ΕΔΒ æquale: ergo [per 5. 12.] pyramis, cujus baſis eſt triangulum ΑΒΔ vertex autem punctum Γ, æqualis eſt pyramidi, cujus baſis ΕΔΒ triangulum & vertex punctum Γ. ſed pyramis, cujus baſis ΕΔΒ triangulum & vertex punctum Γ, eadem eſt cum pyramide cujus baſis triangulum ΕΒΓ & vertex Δ punctum, iiſdem enim planis continetur: ergo & pyramis, cujus baſis triangulum ΑΒΔ vertex autem punctum Γ, æqualis eſt pyramidi, cujus baſis ΕΒΓ triangu-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Πᾶν τρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

ΕΣτω πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΕΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΔΒ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΔΒ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΔΒ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον

γωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΖΓΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΒΕΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΕΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· διήρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν τὸ ΓΑΒ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἐπὶ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων ἀμφότεραί εἰσιν, ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος οὗ ἔχοντος βάσιν τὸν αὐτὸν, τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

lum & vertex punctum Δ. rursus, quoniam ΖΓΒΕ parallelogrammum est, cujus diameter ΓΕ, triangulum ΕΓΖ [per 34. 1.] triangulo ΓΒΕ est æquale: ergo [per 5. 11.] & pyramis, cujus basis ΒΕΓ triangulum vertex autem punctum Δ, æqualis est pyramidi, cujus basis triangulum ΕΓΖ & vertex punctum Δ. sed pyramis, cujus basis quidem ΒΓΕ triangulum vertex autem punctum Δ, ostensa est æqualis pyramidi, cujus basis triangulum ΑΒΔ & vertex Γ punctum; quare & pyramis, cujus basis triangulum ΓΕΖ & vertex punctum Δ, æqualis est pyramidi, cujus basis triangulum ΑΒΔ & vertex Γ punctum. prisma igitur ΑΒΓΔΕΖ dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. & quoniam pyramis, cujus basis ΑΒΔ triangulum vertex autem punctum Γ, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum ΓΑΒ & vertex Δ punctum, iisdem namque planis continentur; pyramis autem, cujus basis triangulum ΑΒΔ & vertex punctum Γ, ostensa est tertia pars prismatis, cujus basis ΑΒΓ triangulum & oppositum ipsi ΔΕΖ: & pyramis igitur, cujus basis triangulum ΑΒΓ vertex autem Δ punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ΑΒΓ triangulum & oppositum ipsi triangulum ΔΕΖ. quod erat demonstrandum.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τὸ τὴν αὐτὴν βάσιν τῇ αὐτῇ ἔχοντος καὶ τὸ ὕψος ἴσον· ἐπειδήπερ καὶν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος καὶ τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem & altitudinem æqualem: quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat & ipsi opposita eandem, dividitur in prismata quæ triangulares habent bases, basibusque opposita etiam triangula.

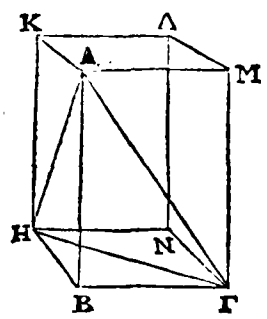
ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, αἱ τριγώνους ἔχουσι βάσεις, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Prop. VIII. Theor.

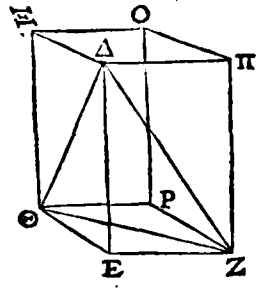
Similes pyramides, quæ triangulares bases habent, sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως

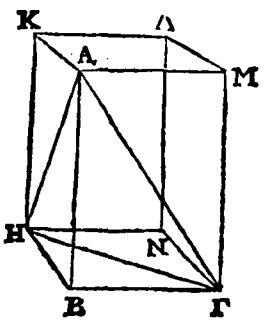
SInt similes & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices autem Η, Θ puncta: dico ΑΒΓΗ pyramidem ad pyramidem ΔΕΖΘ triplicatam rationem habere ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ.



Compleantur enim ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ΑΒΓΗ similis est pyramidi ΔΕΖΘ, erit [per 9. def. 11.] angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ æqualis, angulusque ΗΒΓ æqualis angulo ΘΕΖ, & angulus ΑΒΗ angulo ΔΕΘ, atque est ut ΑΒ ad ΔΕ ita

ΒΓ

ΒΓ ad ΕΖ & ΒΗ ad ΕΘ. quoniam igitur eſt ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad ΕΖ, & circum æquales angulos latera ſunt proportionalia; parallelogrammum ΒΜ parallelogrammo ΕΠ ſimile erit. eadem ratione & parallelogrammum ΒΝ ſimile eſt parallelogrammo ΕΡ, & parallelogrammum ΒΚ ipſi ΕΞ parallelogrammo: tria igitur parallelogramma ΒΜ, ΚΒ, ΒΝ tribus ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ſunt ſimilia.



ſed [per 24. 11.] tria quidem ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ tribus oppoſitis æqualia & ſimilia ſunt, tria vero ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ tribus oppoſitis æqualia & ſimilia: quare ſolida ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ſimilibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea [per 9. def. 11.] ſimile eſt ΒΗΜΛ ſolidum ſolido ΕΘΠΟ. ſimilia autem ſolida parallelepipeda [per 33.11.] ſunt in triplicata ratione homologorum laterum: ergo ſolidum ΒΗΜΘ ad ſolidum ΕΘΠΟ triplicatam habet rationem ejus quam habet latus homologum ΒΓ ad ΕΖ homologum latus. ſed [per 15. 5.] ut ΒΗΜΛ ſolidum ad ſolidum ΕΘΠΟ ita ΑΒΓΗ pyramis ad pyramidem ΔΕΖΘ; pyramis enim ſexta pars eſt ipſius ſolidi, cum priſma, quod eſt dimidium ſolidi parallelepipedi, ſit pyramidis triplum: quare & pyramis ΑΒΓΗ ad pyramidem ΔΕΖΘ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. quod erat demonſtrandum.

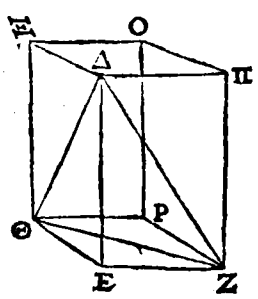
Corollarium.

Ex hoc perſpicuum eſt ſimiles pyramides, quæ polygonas baſes habent, inter ſe eſſe in triplicata ratione homologorum laterum. ipſis enim diviſis in pyramides triangulares baſes habentes, quoniam [per 20.6.] ſimilia polygona baſium in ſimilia triangula dividuntur & numero æqualia & homologa totis; erit ut una pyramis in altera pyramide triangularem habens baſim ad unam pyramidem in altera triangularem baſim habentem ita & omnes pyramides in pyramide altera triangulares habentes baſes ad omnes in altera triangulares baſes habentes; hoc eſt ita pyramis ipſa polygonam habens baſim ad pyramidem quæ polygonam baſim habet. ſed pyramis triangularem habens baſim ad pyramidem quæ triangularem baſim habet eſt in triplicata ratione homologorum laterum; & igitur pyramis polygonam habens baſim ad pyramidem ſimilem baſim habentem triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Prop. IX. Theor.

Æqualium pyramidum, triangulares baſes habentium, baſes ſunt altitudinibus reciproce proportionales. & qua-

ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΒΝ τῷ ΕΡ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΒΚ τῷ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ΒΜ, ΚΒ, ΒΓ τρισὶ τοῖς ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περέχονται· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τὸ ΒΗΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΕΖ. ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ, διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπίπεδόν τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος· καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τῷ δὲ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἔσται ὡς ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίᾳ πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν, οὕτω καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τρίγωνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς πάσας τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τρίγωνους βάσεις ἐχούσας· τυγχάνει δὲ αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν. ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ

ὧν

ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις.

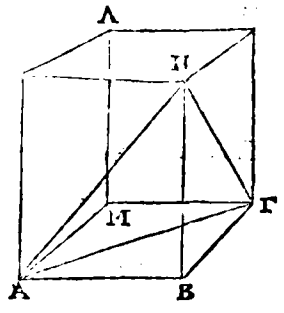
rum pyramidum triangulares baſes habentium baſes ſunt altitudinibus reciproce proportionales, illæ inter ſe æquales ſunt.

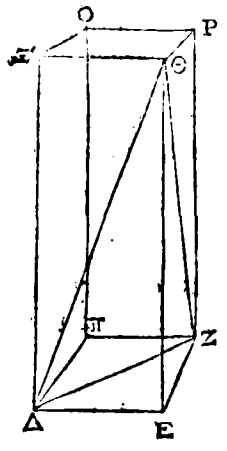
Ἔστωσαν γὰρ πυραμίδες ἴσαι, τριγώνους ἐχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος.

SInt enim pyramides æquales quæ triangulares baſes habeant ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices vero Η, Θ puncta: dico pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ baſes eſſe reciproce proportionales altitudinibus, hoc eſt, ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita eſſe pyramidis ΔΕΖΘ altitudinem ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, ἔστι δὲ μὲν τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΗΜΛ στερεόν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεόν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· τῶν ἄρα ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Compleantur enim ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ſolida parallelepipeda. & quoniam pyramis ΑΕΓΗ eſt æqualis pyramidi ΔΕΖΘ, atque eſt pyramidis quidem ΑΒΓΗ ſextuplum ΒΗΜΛ ſolidum, pyramidis vero ΔΕΖΘ ſextuplum ſolidum ΕΘΠΟ; erit [per 15. 5.] ſolidum ΒΗΜΛ ſolido ΕΘΠΟ æquale. æqualium autem ſolidorum parallelepipedorum [per 34. 11.] baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus: eſt igitur ut ΒΜ baſis ad baſim ΕΠ ita ΕΘΠΟ ſolidi altitudo ad altitudinem ſolidi ΒΗΜΛ. ſed ut ΒΜ baſis ad baſim ΕΠ ita ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ: ergo & ut ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ ita ſolidi ΕΘΠΟ altitudo ad altitudinem ſolidi ΒΗΜΛ. ſed ſolidi quidem ΕΘΠΟ altitudo eadem eſt cum altitudine pyramidis ΔΕΖΘ; ſolidi vero ΒΗΜΛ altitudo eadem eſt cum altitudine pyramidis ΑΒΓΗ: eſt igitur ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita pyramidis ΔΕΖΘ altitudo ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ: quare pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus.





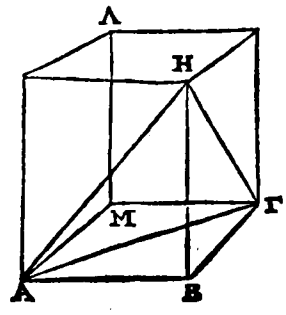
ΑΛΛΑ δὴ τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

DEINDE vero pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ baſes ſint reciproce proportionales altitudinibus, ſitque ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita pyramidis ΔΕΖΘ altitudo ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ: dico ΑΒΓΗ pyramidem pyramidi ΔΕΖΘ æqualem eſſe.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος, ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ

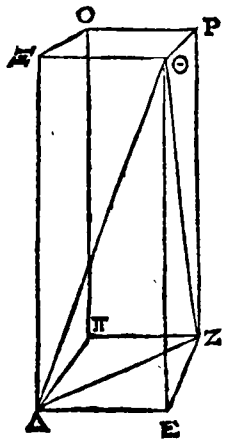
Iiſdem enim conſtructis, quoniam ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita eſt ΔΕΖΘ pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ; atque ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita ΒΜ parallelogrammum ad parallelogrammum ΕΠ: erit & ut parallelogrammum ΒΜ ad ΕΠ parallelogrammum ita altitudo pyramidis ΔΕΖΘ ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ. ſed pyramidis quidem ΔΕΖΘ altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi ΕΘΠΟ; pyramidis vero ΑΒΓΗ altitudo eadem eſt cum

altitudine ſolidi parallelepipedi ΒΗΜΛ: eſt igitur ut ΒΜ baſis ad baſim ΕΠ ita ΕΘΠΟ ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi ΒΗΜΛ. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus [per 34. 11.] ea ſunt æqualia: ſolidum igitur parallelepipedum ΒΗΜΛ æquale eſt ſolido parallelepipedo ΕΘΠΟ. atque eſt ſolidi quidem ΒΗΜΛ ſexta pars pyramis ΑΒΓΗ, ſolidi vero ΕΘΠΟ itidem ſexta pars pyramis ΔΕΖΘ; ergo pyramis ΑΒΓΗ pyramidi ΔΕΖΘ eſt æqualis.



Æqualium igitur pyramidum, triangulares baſes habentium, baſes ſunt altitudinibus reciproce proportionales. & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes ſunt altitudinibus reciproce proportionales, illæ ſunt inter ſe æquales. quod erat demonſtrandum.

τῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδυ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν οὕτως τὸ τῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τῦ ΒΗΜΛ. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. καί ἐστι τῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓΗ πυραμίς, τῦ δὲ ΕΘΠΟ στερεῦ παραλληλεπιπέδυ ἕκτον μέρος ἡ ΔΕΖΘ πυραμίς· ἡ ἄρα ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι ἴση ἐστί.



Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. X. Theor.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet & altitudinem æqualem.

HAbeat enim conus eandem baſim quam cylindrus, videlicet circulum ΑΒΓΔ, & altitudinem æqualem: dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt cylindrum coni triplum eſſe.

Si enim cylindrus non ſit triplus coni; vel major erit quam triplus, vel minor. ſit primum major quam triplus; & deſcribatur in ΑΒΓΔ circulo quadratum ΑΒΓΔ: & quadratum ΑΒΓΔ majus eſt quam dimidium ΑΒΓΔ circuli. & à quadrato ΑΒΓΔ erigatur priſma æquealtum cylindro, quod quidem priſma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam ſi circa circulum ΑΒΓΔ quadratum deſcribatur, erit inſcriptum quadratum dimidium circumſcripti; & ſunt ab iis baſibus erecta ſolida parallelepipeda æquealta, nimirum priſmata ipſa: quare priſmata inter ſe ſunt ut baſes: & igitur priſma erectum à quadrato ΑΒΓΔ dimidium eſt priſmatis erecti à quadrato quod circa circulum ΑΒΓΔ deſcribitur; atque eſt cylindrus minor priſmate erecto à quadrato quod deſcribitur circa circulum ΑΒΓΔ: priſma igitur erectum à quadrato ΑΒΓΔ æquealtum cylindro majus eſt dimidio cylindri. ſecentur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, & ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ.

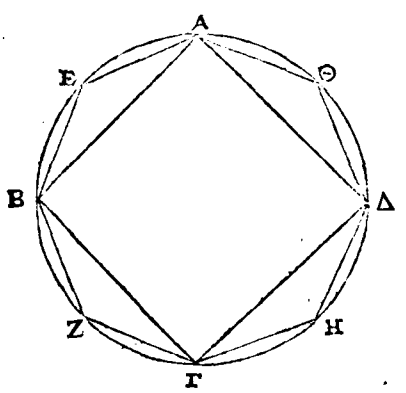
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρυ τρίτον μέρος ἐστὶ τῦ αὐτὸ βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

ΕΧέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τὸ τὸν αὐτὸν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω ὅτι ὁ κῶνος τῦ κυλίνδρυ τρίτον ἐστὶ μέρος, τυτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τῦ κώνυ τριπλασίων ἐστί.

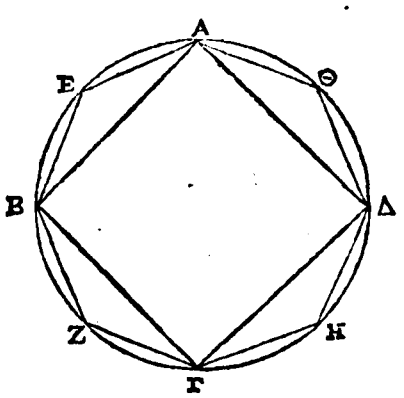
Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τῦ κώνυ τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τῦ κώνυ ἤτοι μείζων ἢ τριπλασίων, ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὴ ΑΒΓΔ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῦ ΑΒΓΔ κύκλυ. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῦ ΑΒΓΔ τετραγώνυ πρίσμα ἰσοῦψὲς τῷ κυλίνδρῳ, τὸ δὴ ἀνεσταμμένον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῦ κυλίνδρυ, ἐπειδήπερ καὶ ὡσὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ὡσιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τῦ ὡσιγραμμένυ, καί ἐστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα ἰσοῦψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα· τὰ ἄρα πρίσματα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ὑπὸ τῦ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλυ ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ὑπὸ τῦ ὡσὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνυ, καί ἐστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τῦ πρίσματος τῦ ἀνασταθέντος ὑπὸ τῦ ὡσὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνυ· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ὑπὸ τῦ ΑΒΓΔ τετραγώνυ τετμήθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ.

ΘΑ· ἡ ἑκάστου ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ, τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἡ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἴσον ὕψος ἔχοντα τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἑκάστου ἄρα τῶν ἀναστάντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἡ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου, ἐπιπλέον ἐὰν ληφθῶσι τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων παράλληλοι τῇ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἐπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἴσον ὕψος τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀναστάντων ἡμίσεα ἐστὶ τὰ πρίσματα τὰ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων. καὶ ἔστι τὰ τοῦ κυλίνδρου ὑπερτμήματα ἐλάττονα τῶν ἀναστάντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ὑπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοῦψῆ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ὑπερτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑποκειμένης, ἣ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ τριπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀναστᾶσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπιδήπερ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύλινδρον περιγράψωμεν τετράγωνον, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἡμίσυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοῦψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀναστὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ



ΘΑ jungantur. unumquodque igitur triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ majus est dimidio segmenti circuli ΑΒΓΔ, in quo consistit, ut superius [ad 2. 12.] ostendimus. erigantur ab unoquoque triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ prismata æquealta cylindro: ergo & unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio respectivi segmenti cylindri, quoniam si per puncta Ε, Ζ, Η, Θ parallelæ ipsis ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ducantur, & compleantur ad ipsas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ parallelogramma, à quibus solida parallelepipeda cylindro æquealta erigantur: erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ea quæ sunt in triangulis ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. & sunt cylindri segmenta erectis solidis parallelepipedis minora; ergo & prismata quæ in triangulis ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ majora sunt dimidio respectivorum segmentorum cylindri. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes prismata æquealta cylindro, & hoc semper facientes donec tandem [per 1. 10.] relinquantur quædam segmenta cylindri quæ sint minora excessu, quo cylindrus superat triplum ipsius coni. reliquantur jam, & sint ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ: reliquum igitur prisma, cujus basis quidem est polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ altitudo autem eadem quæ cylindri, majus est quam triplum coni. sed [per cor. 7. 12.] prisma, cujus basis ΑΕΒΖΓΗΔΘ polygonum & altitudo eadem quæ cylindri, triplum est pyramidis, cujus basis polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ vertex autem idem qui coni: & igitur pyramis, cujus basis polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ vertex autem idem qui coni, major est cono qui basim habet ΑΒΓΔ circulum. sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest: non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. Dico insuper neque cylindrum minorem esse quam triplum coni. si enim fieri potest, sit cylindrus minor quam triplus coni: erit igitur invertendo conus major quam tertia pars cylindri. describatur in ΑΒΓΔ circulo quadratum ΑΒΓΔ; ergo quadratum ΑΒΓΔ majus est quam dimidium circuli ΑΒΓΔ. & à quadrato ΑΒΓΔ erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus: pyramis igitur erecta major est quam coni dimidium; quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ΑΒΓΔ dimidium ejus, quod circa circulum descriptum est. & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æquealta cono, quæ & prismata appellantur; erit quod à quadrato ΑΒΓΔ

erigitur dimidium ejus quod erectum eſt à quadrato circa circulum deſcripto, etenim [per 32. 11.] inter ſe ſunt ut baſes: quare etiam tertiæ partes ipſarum; pyramis igitur, cujus baſis quadratum ΑΒΓΔ, dimidia eſt ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum deſcripto erigitur. ſed pyramis erecta à quadrato deſcripto circa circulum major eſt cono, ipſum namque comprehendit: ergo pyramis, cujus baſis ΑΒΓΔ quadratum vertex autem idem qui coni, major eſt quam coni dimidium. ſecentur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, & jungantur ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; & unumquodque igitur triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ majus eſt quam dimidium reſpectivi ſegmenti circuli ΑΒΓΔ: erigantur ab unoquoque triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ pyramides verticem habentes eundem quem conus; ergo & unaquæque pyramidum ſic erectarum major eſt quam dimidium reſpectivi ſegmenti coni. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, jungenteſque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramidem verticem habentem eundem quem conus, & hoc ſemper facientes, relinquemus tandem [per 1.10.] quaſdam coni portiones quæ minores erunt exceſſu, quo conus tertiam cylindri partem ſuperat. relinquantur, & ſint quæ in ipſis ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ: reliqua igitur pyramis, cujus baſis polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ & vertex idem qui coni, major eſt quam tertia cylindri pars. ſed [per cor. 7.12.] pyramis, cujus baſis polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ vertex autem idem qui coni, tertia pars eſt priſmatis, cujus baſis polygonnm ΑΕΒΖΓΗΔΘ altitudo autem eadem quæ cylindri: priſma igitur, cujus baſis ΑΕΒΖΓΗΔΘ polygonum & altitudo eadem quæ cylindri, majus eſt cylindro cujus baſis eſt circulus ΑΒΓΔ. ſed & minus; ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt: non igitur cylindrus minor eſt quam triplus coni. oſtenſum autem eſt neque majorem eſſe quam triplum: ergo cylindrus coni triplus eſt; ac propterea conus tertia pars cylindri.



Omnis igitur conus eſt tertia pars cylindri eandem quam ipſe baſim habentis & altitudinem æqualem. quod erat demonſtrandum.

πτεραγώνε ἥμισυ τῦ ἀναγραφέντος ἀπὸ τῆ περὶ τὸ κύκλον περιγραφέντος πτεραγώνε, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ὥςε καὶ τὸ τέλπον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἥμισύ ἐςι τῆ πυραμίδος τῆ ἀναγραφείσης ἀπὸ τῆ περὶ τὸ κύκλον τετραγώνε. καὶ ἔςι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀναγραφεῖσα ἀπὸ τῆ περὶ τὸ κύκλον τετραγώνε τῦ κώνε, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐςὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῦ κώνε. τετμήθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· ἑκάςη ἄρα τ̃ ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μείζόν ἐςιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τῦ ΑΒΓΔ κύκλε. ἀνεςάτωσαν ἀφ' ἑκάςε τ̃ ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμίδες, τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἔχέσας τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάςη ἄρα τ̃ ἀναγραφεισῶν πυραμίδων κατὰ τ̃ αὐτὸν τρόπον μείζων ἐςὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς περιλειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ διὰ τῶν διαγνώσεως εὐθείας, καὶ ἀνιςάντες ἐφ' ἑκάςε τ̃ τριγώνων πυραμίδα τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἔχέσας τῷ κώνῳ, καὶ τῦτο ἀεὶ ποιῦντες καταλείψομεν τινὰ τμήματα τῦ κώνε, ἃ ἔςαι ἐλάττονα τ̃ ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τῦ τρίτε μέρες τῦ κυλίνδρε. λελείφθω, καὶ ἔςω τὰ ἐπὶ τ̃ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐςὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐςὶν ἢ τρίτον μέρος τῦ κυλίνδρε. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐςὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον μέρος ἐςὶ τῦ πρίσματος, ὃ βάσις μὲν ἐςὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, ὃ βάσις μὲν ἐςὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζόν ἐςι τῦ κυλίνδρε, ὃ βάσις ἐςὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος· ἀλλὰ ἔλαττον, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτῦ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τῦ κώνε ἐλάττων ἐςὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τῦ κώνε· ὥςε ὁ κῶνος τρίτον μέρος ἐςὶ τῦ κυλίνδρε.

Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρε τρίτον μέρος ἐςὶ τῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XI. Theor.

Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

SInt in eadem altitudine coni & cylindri, quorum baſes circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, axes

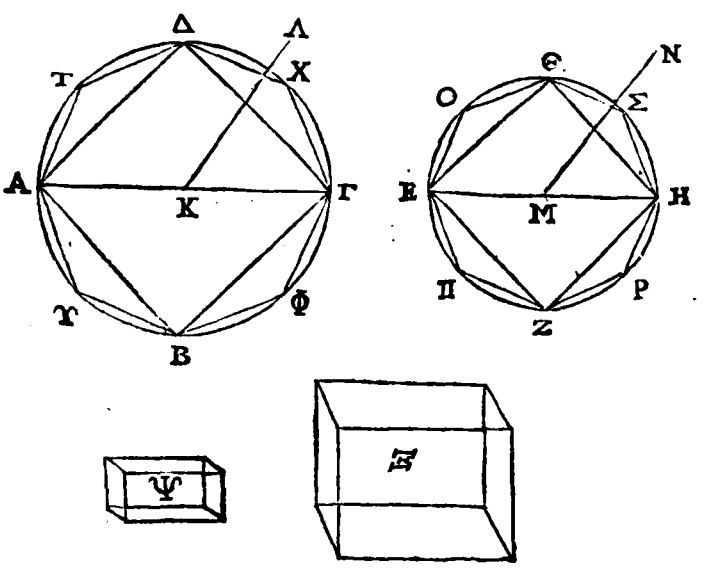
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλυς εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες

ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ, ΕΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ.

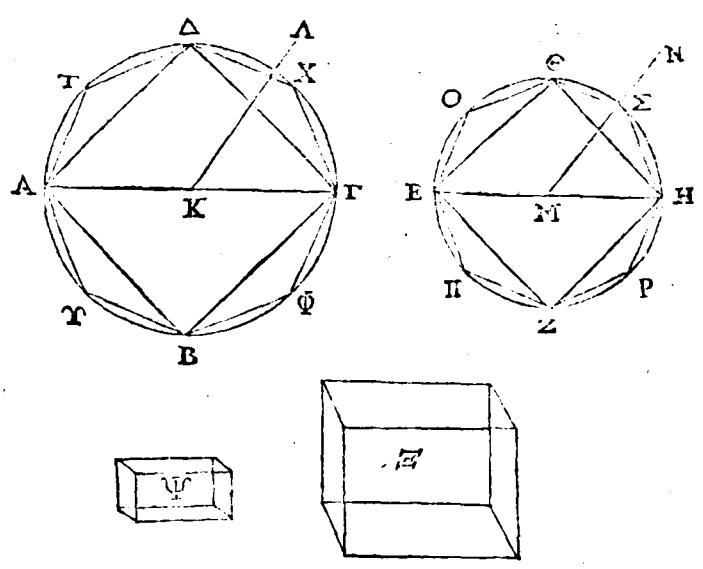
Εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ, καὶ ᾧ ἔλαττόν ἐστι τὸ Ξ στερεὸν τοῦ ΕΝ κώνου ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ Ψ στερεόν· ὁ ΕΝ κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Ξ, Ψ στερεοῖς. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοῦψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀναστᾶσα πυραμὶς μεῖζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου· ἐπεὶ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοῦψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης, πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ἐλάττων δὲ ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ· ἑκάστον ἄρα τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων πυραμὶς ἰσοῦψὴς τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀναστάντων πυραμίδων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κώνου· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ διὰ τῶν σημείων εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοῦψεῖς τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Ψ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτῷ πυραμὶς ἰσοῦψὴς τῷ ΑΛ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τοῦ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ΕΗ οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὡς



autem ΚΛ, ΜΝ, & diametri baſium ΑΓ, ΕΗ: dico ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita eſſe conum ΑΛ ad ΕΝ conum.

Si enim non ita ſit; erit ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita conus ΑΛ vel ad aliquod ſolidum minus cono ΕΝ vel ad majus. ſit primo ad minus quod ſit Ξ, & quo minus eſt ſolidum Ξ cono ΕΝ ei æquale ſit Ψ ſolidum: conus igitur ΕΝ ipſis ſolidis Ξ, Ψ eſt æqualis. deſcribatur in ΕΖΗΘ circulo quadratum ΕΖΗΘ: ergo iſtud quadratum majus eſt quam dimidium circuli. erigatur à quadrato ΕΖΗΘ pyramis æqualta cono: pyramis igitur erecta major eſt quam coni dimidium: nam ſi circa circulum quadratum deſcribamus, & ab ipſo erigamus pyramidem æqualtam cono; erit inſcripta pyramis circumſcriptæ pyramidis dimidia; etenim [per 6. 12.] inter ſe ſunt ut baſes. conus autem circumſcripta pyramide eſt minor: ergo pyramis, cujus baſis quadratum ΕΖΗΘ vertex autem idem qui coni, major eſt quam coni dimidium. ſecentur circumferentiæ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ bifariam in punctis Ο, Π, Ρ, Σ; & ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ jungantur: unumquodque igitur triangulorum ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ majus eſt quam dimidium reſpectivi ſegmenti circuli. erigatur ab unoquoque triangulorum ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ pyramis æqualta cono: ergo & unaquæque erectarum pyramidum major eſt quam dimidium reſpectivi ſegmenti coni: itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, & jungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æqualtas cono, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem [per 1. 10.] aliqua ſegmenta coni quæ ſolido Ψ minora erunt. relinquantur, & ſint quæ in ipſis ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ: reliqua igitur pyramis, cujus baſis polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ altitudo autem eadem quæ coni, major eſt ſolido Ξ. deſcribatur in circulo ΑΒΓΔ polygono ΘΟΕΠΖΡΗΣ ſimile & ſimiliter poſitum polygonum ΔΤΑΤΒΦΓΧ, & ab ipſo erigatur pyramis æqualta cono ΑΛ. quoniam igitur eſt [per 20. 6. & 1. 12.] ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΕΗ ita ΔΤΑΤΒΦΓΧ polygonum ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ; ut

autem quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΕΗ ita [per 2. 12.] ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ: erit [per 11. 5.] ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita polygonum ΔΤΑΤΒΦΓΧ ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ. sed [per constr.] ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita conus ΑΛ ad Ξ solidum; & [per 6. 12.] ut polygonum ΔΤΑΤΒΦΓΧ ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ ita pyramis, cujus basis ΔΤΑΤΒΦΓΧ polygonum vertex autem punctum Λ, ad pyramidem, cujus basis polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ & vertex punctum Ν; ut igitur conus ΑΛ ad Ξ solidum ita pyramis, cujus basis polygonum ΔΤΑΤΒΦΓΧ & vertex punctum Λ, ad pyramidem, cujus basis polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ & vertex Ν punctum: quare permutando, ut conus ΑΛ ad pyramidem quæ in ipso est ita solidum Ξ ad pyramidem quæ est in cono ΕΝ. conus autem ΑΛ major est pyramide quæ est in ipso: majus igitur est solidum Ξ pyramide quæ in cono ΕΝ. sed & minus, quod est absurdum: non igitur ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita est ΑΛ conus ad solidum aliquod minus cono ΕΝ. similiter demonstrabitur, neque ut ΕΖΗΘ circulus ad circulum ΑΒΓΔ ita esse conum ΕΝ ad aliquod solidum minus cono ΑΛ. Dico præterea neque esse ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita ΑΛ conum ad aliquod solidum majus cono ΕΝ. si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit Ξ: ergo invertendo, ut ΕΖΗΘ circulus ad circulum ΑΒΓΔ ita erit solidum Ξ ad ΑΛ conum. sed ut solidum Ξ ad ΑΛ conum ita conus ΕΝ ad aliquod solidum minus cono ΑΛ; & igitur ut ΕΖΗΘ circulus ad circulum ΑΒΓΔ ita conus ΕΝ ad aliquod solidum minus cono ΑΛ, quod fieri non posse ostensum est: non igitur ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita conus ΑΛ ad aliquod solidum majus cono ΕΝ. ostensum autem est neque esse ad minus: ergo ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita est conus ΑΛ ad ΕΝ conum. Sed ut conus ad conum ita est cylindrus ad cylindrum, est enim [per 10. 12.] alter alterius triplus: & igitur ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita in ipsis cylindri æquealti conis.



Ergo coni & cylindri, qui eandem habent

ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἔστως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔστως τὸ ΔΤΑΤΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον. ὡς δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔστως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΔΤΑΤΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον ἔστως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΤΒΦΓΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεὸν ἔστως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΤΒΦΓΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα ἔστως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸ ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ ΑΛ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τοῦ ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔστως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἔστως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν. λέγω δὴ ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔστως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἔστως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον. ἀλλ' ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον ἔστως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἔστως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔστως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔστως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον. Αλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον ἔστως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔστως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς τοῖς κώνοις κύλινδροι.

Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλιν-

δρο

δροι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

altitudinem, inter se sunt ut bases. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

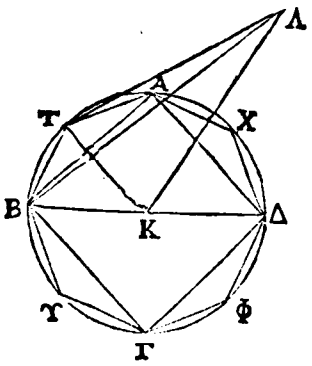
Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

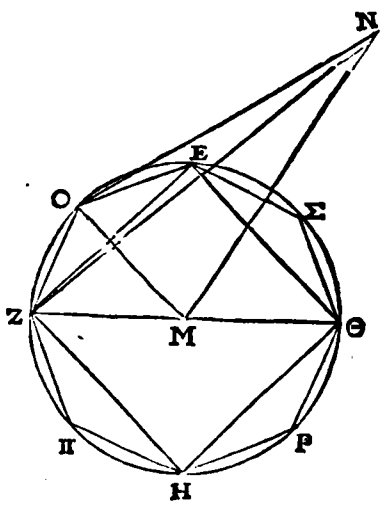
Prop. XII. Theor.

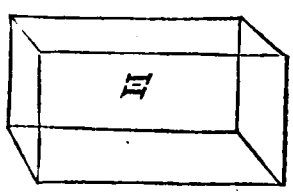
Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ, ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων οἱ ΚΛ, ΜΝ· λέγω ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μὲν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

SInt similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, diametri vero basium ΒΔ, ΖΘ, & axes conorum vel cylindrorum ΚΛ, ΜΝ: dico conum, cujus basis ΑΒΓΔ circulus vertex autem punctum Λ, ad conum, cujus basis circulus ΕΖΗΘ vertex autem Ν punctum, triplicatam habere rationem ejus quam habet ΒΔ ad ΖΘ.





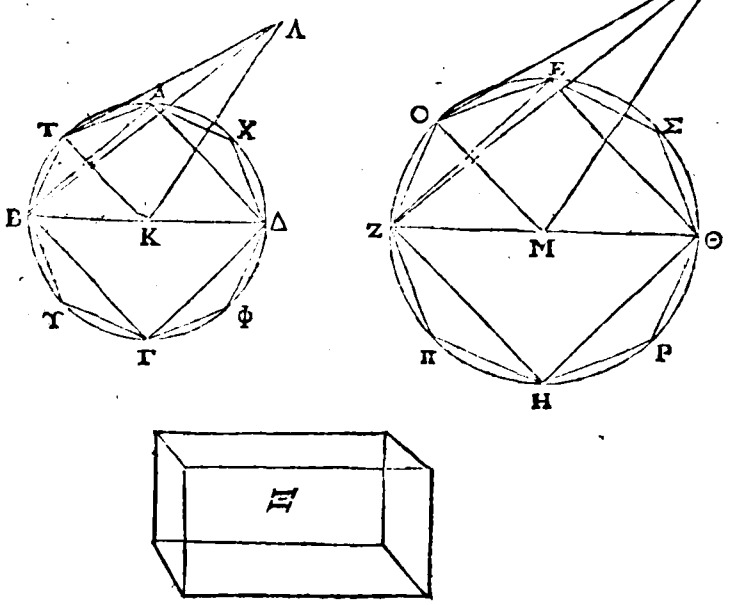


Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἕξει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον, ἢ πρὸς μεῖζον. ἐχέτω πρὸς ἔλασσον πρότερον τὸ Ξ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα ΕΖΗΘ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀναστᾶσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν δὴ αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀναστᾶσῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος τοῦ Ξ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ

Si enim non habet conus ΑΒΓΔΛ ad conum ΕΖΗΘΝ triplicatam rationem ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ, habebit ΑΒΓΔΛ conus triplicatam rationem, vel ad aliquod solidum minus cono ΕΖΗΘΝ, vel ad majus. habeat primum ad minus, quod sit Ξ; & describatur in ΕΖΗΘ circulo quadratum ΕΖΗΘ: quadratum igitur ΕΖΗΘ majus est quam dimidium ΕΖΗΘ circuli. dein erigatur à quadrato ΕΖΗΘ pyramis æquealta cono: ergo erecta pyramis major est quam coni dimidium. itaque secentur ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ circumferentiæ bifariam in punctis Ο, Π, Ρ, Σ, & jungantur ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ: unumquodque igitur triangulorum ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ majus est quam dimidium respectivi segmenti circuli ΕΖΗΘ. porro erigatur ab unoquoque triangulorum ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ pyramis, eundem verticem habens quem conus: ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium respectivi segmenti coni. secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem quem conus, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus [per 1.10.] quædam coni segmenta, quæ minora erunt excessu quo conus ΕΖΗΘΝ ipsum Ξ solidum superat. relinquantur, sintque quæ super

ipsa

ipſa ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ: reliqua igitur pyramis, cujus baſis quidem polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ vertex autem Ν punctum, major eſt ſolido Ξ. deſcribatur etiam in circulo ΑΒΓΔ polygono ΕΟΖΠΗΡΘΣ ſimile & ſimiliter poſitum polygonum ΑΤΒΥΓΦΔΧ; ex illo autem erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus, & triangulorum continentium pyramidem, cujus baſis quidem eſt polygonum ΑΤΒΥΓΦΔΧ vertex autem punctum Λ, unum ſit ΛΒΤ: triangulorum vero continentium pyramidem, cujus baſis ΕΟΖΠΗΡΘΣ polygonum & vertex punctum Ν, unum ſit ΝΖΟ; denique jungantur ΚΤ, ΜΟ. quoniam igitur conus ΑΒΓΔΛ ſimilis eſt cono ΕΖΗΘΝ; erit [per 24. def. 11.] ut ΒΔ ad ΖΘ ita ΚΛ axis ad axem ΜΝ. ut autem ΒΔ ad ΖΘ ita ΒΚ ad ΖΜ: ergo & ut ΒΚ ad ΖΜ ita ΚΛ ad ΜΝ: permutando igitur ut ΒΚ ad ΚΛ ita ΖΜ ad ΜΝ: & anguli ΒΚΛ, ΖΜΝ æquales ſunt, quia recti, & circa æquales angulos ΒΚΛ ΖΜΝ, latera ſunt proportionalia: ſimile igitur eſt [per 6. 6.] ΒΚΛ triangulum triangulo ΖΜΝ. rurſus, quoniam eſt ut ΒΚ ad ΚΤ ita ΖΜ ad ΜΟ, ſuntque circa æquales angulos ΒΚΤ, ΖΜΟ; etenim quæ pars eſt angulus ΒΚΤ quatuor rectorum qui ſunt ad Κ centrum, eadem eſt pars & angulus ΖΜΟ quatuor rectorum qui ſunt ad centrum Μ: quoniam igitur circa æquales angulos latera ſunt proportionalia, erit [per 6. 6.] triangulum ΒΚΤ triangulo ΖΜΟ ſimile. rurſus, quoniam oſtenſum eſt ut ΒΚ ad ΚΛ ita eſſe ΖΜ ad ΜΝ; æqualis autem eſt ΒΚ ipſi ΚΤ & ΖΜ ipſi ΜΟ: erit ut ΚΤ ad ΚΛ ita ΟΜ ad ΜΝ: & circa æquales angulos ΤΚΛ, ΟΜΝ (nempe rectos) latera ſunt proportionalia; triangulum igitur ΛΚΤ ſimile eſt triangulo ΝΜΟ. quoniam vero ob ſimilitudinem triangulorum ΒΚΛ, ΖΜΝ eſt ut ΑΒ ad ΒΚ ita ΝΖ ad ΖΜ; ob ſimilitudinem vero triangulorum ΒΚΤ, ΖΜΟ ut ΚΒ ad ΒΤ ita ΜΖ ad ΖΟ: erit ex æquo [per 22. 5.] ut ΑΒ ad ΒΤ ita ΝΖ ad ΖΟ rurſus, quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ΛΤΚ, ΝΟΜ eſt ut ΛΤ ad ΤΚ ita ΝΟ ad ΟΜ; & ob ſimilitudinem triangulorum ΚΒΤ, ΟΜΖ ut ΚΤ ad ΤΒ ita ΜΟ

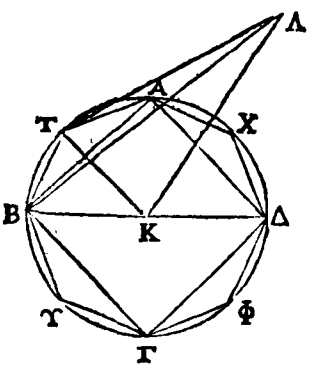


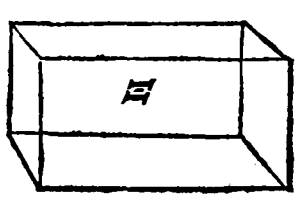
τ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, καὶ ἀνεστάτω ἀπ' αὐτοῦ πυραμὶς, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τὰ μὲν περιέχοντα τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ἐν τρίγωνον ἔστω τὸ ΛΒΤ, τὰ δὲ περιέχοντα τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἐν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΖΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΤ, ΜΟ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κῶνος τῷ ΕΖΗΘ κώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ὁ ΚΛ ἄξων πρὸς τὸν ΜΝ ἄξονα. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ, ΖΜΟ, ἐπεδήπερ τὸ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τῶν πρὸς τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τῶν πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν. ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΚΤ τρίγωνον τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΜΟ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΛ, ΟΜΝ, ὀρθὰς γάρ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΛΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. ἐπεὶ δὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΛ, ΖΜΝ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΤ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ· δίσου ἄρα ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΤ οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ. πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΤΚ, ΝΟΜ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΚ οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΚΒΤ, ΟΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΤΒ οὕτως ἡ ΜΟ

ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ· διὰ ἄρα ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΒ ἕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΛ ἕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ· διὰ ἄρα ὡς ἡ ΤΛ πρὸς τὴν ΛΒ ἕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ· τῶν ΛΤΒ, ΝΟΖ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΤΒ, ΝΟΖ τρίγωνα· ὥστε καὶ ὅμοια· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΒΚΤ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΖΜΟ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἐπὶ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὁμοίας πυραμίδες τὰς τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ ἀπὸ τῶν Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Υ εὐθείας ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ τῶν τριγώνων πυραμίδας τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐχούσας τοῖς κώνοις, δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΚ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΜ ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἀλλ' ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων ἕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα ἕτως ἡ ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὑπόκειται δὲ ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, τριπλασίονα λόγον ἔχων ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, ἕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ. πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ, ἕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν. μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ ΕΖΗ

ad ΟΖ: ex æquo erit ut ΛΤ ad ΤΒ ita ΝΟ ad ΟΖ. oſtenſum autem eſt & ut ΤΒ ad ΒΛ ita ΟΖ ad ΖΝ: quare rurſus ex æquo ut ΤΛ ad ΛΒ ita ΟΝ ad ΝΖ: triangulorum igitur ΛΤΒ, ΝΟΖ proportionalia ſunt latera: ideoque [per 5. 6.] æquiangula ſunt ΛΤΒ, ΝΟΖ triangula & inter ſe ſimilia: quare [per 9. def. 11.] & pyramis, cujus baſis triangulum ΒΚΤ vertex autem Λ punctum, ſimilis eſt pyramidi, cujus baſis ΖΜΟ triangulum & vertex punctum Ν; ſimilibus enim planis continentur & multitudine æqualibus. pyramides autem ſimiles, quæ triangulares baſes habent, ſunt [per 8. 12.] in triplicata ratione homologorum laterum: ergo pyramis ΒΚΤΛ ad pyramidem ΖΜΟΝ triplicatam habet rationem ejus quam ΒΚ habet ad ΖΜ. ſimiliter à punctis quidem Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Υ ad Κ, à punctis vero Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ad Μ ducentes rectas lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eoſdem habentes quos coni, oſtendemus & unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam rationem habere ejus quam habet ΒΚ latus homologum ad homologum latus ΖΜ, hoc eſt quam ΒΔ habet ad ΖΘ. ſed [per 12. 5.] ut unum antecedentium ad unum conſequentium ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia: eſt igitur & ut ΒΚΤΛ pyramis ad pyramidem ΖΜΟΝ ita tota pyramis, cujus baſis ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum vertex autem punctum Λ, ad totam pyramidem, cujus baſis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ & vertex punctum Ν: quare & pyramis, cujus baſis ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum vertex autem punctum Λ ad pyramidem, cujus baſis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ & vertex punctum Ν, triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. ponitur autem conus, cujus baſis circulus ΑΒΓΔ, vertex autem punctum Λ, ad ſolidum Ξ triplicatam rationem habere ejus quam habet ΒΔ ad ΖΘ: ut igitur conus, cujus baſis circulus ΑΒΓΔ vertex autem punctum Λ, ad ſolidum Ξ ita eſt pyramis, cujus baſis ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum vertex autem punctum Λ, ad pyramidem, cujus baſis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ & vertex punctum Ν. & permutando [per 16. 5.] ut conus, cujus baſis circulus ΑΒΓΔ vertex autem punctum Λ, ad pyramidem quæ in ipſo eſt, cujus baſis ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum vertex autem punctum Λ, ita ſolidum Ξ ad pyramidem, cujus baſis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ & vertex punctum Ν. dictus autem conus major eſt pyramide quæ in ipſo eſt; etenim eam comprehendit: majus igitur eſt & ſolidum Ξ pyramide, cujus baſis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ vertex autem punctum Ν. ſed & minus, quod fieri non poteſt: non igitur conus, cujus baſis ΑΒΓΔ circulus & vertex punctum Λ, ad aliquod ſolidum minus cono, cujus baſis circulus ΕΖΗΘ & vertex Ν punctum, triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. ſimiliter demonſtrabimus neque conum ΕΖΗ

ΘN ad aliquod ſolidum minus cono ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habere ejus quam habet ZΘ ad ΒΔ. Dico neque ΑΒΓΔΘ conum ad ſolidum majus cono ΕΖΗΘΝ triplicatam habere rationem ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. ſi enim fieri poteſt, habeat ad aliquod ſolidum majus, quod ſit Ξ: invertendo igitur, ſolidum Ξ ad conum ΑΒΓΔΛ triplicatam ratio nem habet ejus quam ZΘ habet ad ΒΔ. ut autem ſolidum Ξ ad conum ΑΒΓΔΛ ita ΕΖΗΘΝ conus ad aliquod ſolidum minus cono ΑΒΓΔΛ: ergo & conus ΕΖΗΘΝ ad ſolidum aliquod minus cono ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habebit ejus quam ZΘ habet ad ΒΔ, quod fieri non poſſe demonſtratum eſt: non igitur ΑΒΓΔΛ conus ad ſolidum aliquod majus cono ΕΖΗΘΝ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. oſtenſum autem eſt neque ad minus: quare conus ΑΒΓΔΛ ad ΕΖΗΘΝ conum triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. Ut autem conus ad conum ita & cylindrus ad cylindrum, cylindrus enim in eadem exiſtens baſi in qua conus, & ipſi æqualtus coni triplus eſt, cum [per 10. 12.] oſtenſum ſit omnem conum tertiam partem eſſe cylindri eandem quam ipſe baſim habentis & æqualem altitudinem: ergo & cylindrus ad cylindrum triplicatam rationem habebit ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ.





Similes igitur coni & cylindri inter ſe ſunt in triplicata ratione diametrorum baſium. quod erat demonſtrandum.

Prop. XIII. Theor.

Si cylindrus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum ita axis ad axem.

CYlindrus enim ΑΔ plano ΗΘ ſecetur oppoſitis planis ΑΒ, ΓΔ parallelo, & occurrat axi ΕΖ in Κ puncto: dico ut ΒΗ cylindrus ad cylindrum ΗΔ ita eſſe ΕΚ axem ad axem ΚΖ.

Producatur enim ΕΖ axis ex utraque parte ad puncta Λ, Μ, & ipſi quidem ΕΚ axi

ΘN κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ ΑΒΓΔΘ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν· καὶ ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος ἄρα πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ, ὅπερ ἀδυνάτον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΘ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον· ὁ ΑΒΓΔΛ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ· ἐδείχθη γὰρ πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον· καὶ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Οἱ ἄρα ὁμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

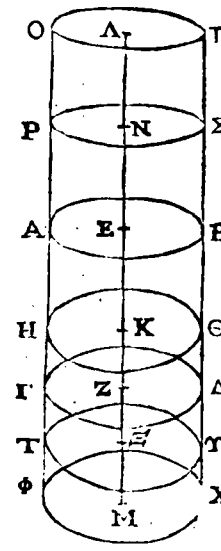
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὀππουοῦν τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

ΚΥλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὀποτερουοῦν τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΕΖ ἄξονι κατὰ τὸ Κ σημεῖον· λέγω ὅτι ὡς ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῷ μὲν ΕΚ ἄξονι ἴσοι

ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΕΝ, ΝΛ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν Λ, Ν, Ξ, Μ σημείων ἐπίπεδα ὠδὶ λλήλοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νενοήθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν Λ, Ν, Ξ, Μ ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ Λ, Ν, Ξ, Μ κύκλοι οἱ ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ, ΦΧ ἴσοι τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νενοήθωσαν κύλινδροι οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΔΤ, ΤΧ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις· οἱ ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα εἰσὶν οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι. ἐπεὶ οὖν οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι καὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ τῷ πλήθει τῶν ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ· ὁσαπλασίων ἄρα ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ· εἰ δὲ μείζων ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων ἐλάσσων· τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου, ὅ, τε ΚΛ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου, ὅ, τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ. καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος ἴσος, καὶ εἰ ἐλάττων ἐλάττων· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ponantur æquales quotcunque ΕΝ, ΝΛ; ipſi vero ΖΚ æquales quotcunque Ż ż, żΜ; dein per puncta Λ, Ν, ż, Μ ducantur plana ipſis ΑΒ, ΓΔ parallela; atque in planis per Λ, Ν, ż, Μ circa centra Λ, Ν, ż, Μ intelligantur circuli ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ, ΦΧ æquales ipſis ΑΒ, ΓΔ; cylindri denique ΠΡ, ΡΒ, ΔΤ, ΤΧ conſtitui intelligantur. quoniam igitur axes ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ inter ſe ſunt æquales, erunt [per 11. 12.] cylindri ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ inter ſe ut baſes. baſes autem æquales ſunt: ergo & cylindri ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ ſunt æquales. quoniam autem axes ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ inter ſe æquales ſunt, itemque cylindri ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ inter ſe æquales, atque eſt ipſorum ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ multitudo æqualis multitudini ipſorum ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ: quotuplex igitur eſt axis ΚΛ ipſius ΕΚ axis totuplex erit & ΠΗ cylindrus cylindri ΗΒ. eadem ratione & quotuplex eſt ΜΚ axis ipſius axis ΚΖ totuplex eſt & ΧΗ cylindrus cylindri ΗΔ. & ſi quidem axis ΚΛ ſit æqualis axi ΚΜ, erit & ΠΗ cylindrus cylindro ΗΧ æqualis: ſi autem axis ΚΛ major ſit axe ΚΜ, & cylindrus ΠΗ major erit cylindro ΗΧ; & ſi minor, minor: quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, videlicet axibus ΕΚ, ΚΖ & cylindris ΒΗ, ΗΔ, ſumpta ſunt æquemultiplicia, axis quidem ΕΚ & ΒΗ cylindri, nempe axis ΚΛ & cylindrus ΠΗ; axis vero ΚΖ & cylindri ΗΔ æquemultiplicia, axis ſcilicet ΚΜ & ΗΧ cylindrus. demonſtratum etiam eſt, quod ſi ΚΛ axis ſuperat axem ΚΜ, & ΠΗ cylindrus ſuperabit cylindrum ΗΧ; & ſi æqualis erit, æqualis; & ſi minor, minor: eſt igitur [per 4. def. 5.] ut axis ΕΚ ad axem ΚΖ ita cylindrus ΒΗ ad cylindrum ΗΔ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

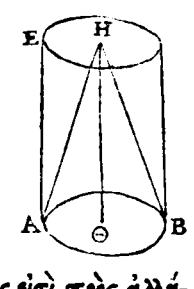
Οἱ ὑπὸ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

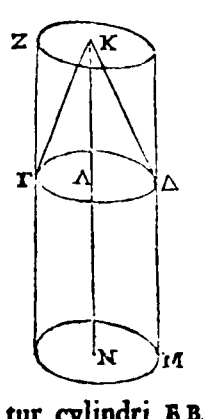
PROP. XIV. THEOR.

Æqualibus baſibus inſiſtentes coni aut cylindri inter ſe ſunt ut altitudines.

Ἐστωσαν γὰρ ὑπὸ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύλινδροι οἱ ΖΔ, ΕΒ· λέγω ὅτι ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα.

Ἐκβεβλήθω γὰρ ὁ ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΛΝ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

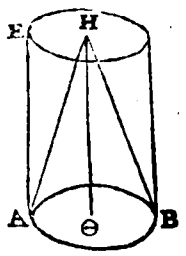


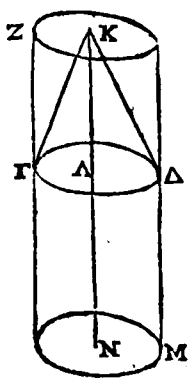


SInt enim in æqualibus baſibus ΑΒ, ΓΔ cylindri ΖΔ, ΕΒ: dico ut ΕΒ cylindrus ad cylindrum ΖΔ ita eſſe ΗΘ axem ad axem ΚΛ.

Producatur enim ΚΛ axis ad punctum Ν; ponaturque ipſi ΗΘ axi æqualis ΛΝ; dein circa axem ΛΝ intelligatur conſtitutus cylindrus ΓΜ. quoniam igitur cylindri ΕΒ, ΓΜ eandem habent altitudinem,

nem, [per 11.12.] inter se sunt ut bases. bases autem sunt æquales: ergo & cylindri EB, ΓM inter se æquales erunt. quoniam vero cylindrus ZM secatur plano ΓΔ oppositis planis parallelo; erit [per 13.12.] ut ΓM cylindrus ad cylindrum ZΔ ita axis ΛN ad KΛ axem. æqualis autem est cylindrus quidem ΓM cylindro EB, axis vero ΛN axi HΘ: est igitur ut EB cylindrus ad cylindrum ZΔ ita axis HΘ ad KΛ axem. Ut autem EB cylindrus ad cylindrum ZΔ ita ABH conus ad conum ΓΔK; cylindri enim sunt [per 10.12.] conorum tripli: ergo & ut HΘ axis ad axem KΛ ita est ABH conus ad conum ΓΔK, & cylindrus EB ad ZΔ cylindrum. quod erat demonstrandum.





ἴσας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἔστω δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ EB, ΓM κύλινδροι ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ZM ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΓΔ ᾠδαλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓM κύλινδρος πρὸς τὸ Z Δ κύλινδρον οὕτως ὁ ΛN ἄξων πρὸς τὸ KΛ ἄξονα. ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ μὲν ΓM κύλινδρος τῷ EB κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛN ἄξων τῷ HΘ ἄξονι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸ Z Δ κύλινδρον οὕτως ὁ HΘ ἄξων πρὸς τὸ KΛ ἄξονα. Ὡς δὲ ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸ Z Δ κύλινδρον οὕτως ὁ ABH κῶνος πρὸς τὸ ΓΔK κῶνον, τριπλάσιον γὰρ οἱ κύλινδροι τῶν κώνων· καὶ ὡς ἄρα ὁ HΘ ἄξων πρὸς τὸ KΛ ἄξονα οὕτως ὁ ABH κῶνος πρὸς ΓΔK κῶνον καὶ ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸ Z Δ κύλινδρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XV. Theor.

Æqualium conorum aut cylindrorum bases sunt altitudinibus reciproce proportionales: item quorum conorum aut cylindrorum bases altitudinibus reciproce proportionales sunt, illi inter se sunt æquales.

SInt æquales coni & cylindri, quorum bases quidem ABΓΔ, EZHΘ circuli, & diametri ipsorum AΓ, EH; axes vero KΛ, MN, qui quidem & conorum vel cylindrorum sunt altitudines, atque compleantur cylindri AΞ, EO: dico cylindrorum AΞ, EO bases esse reciproce proportionales altitudinibus, hoc est, ut ABΓΔ basis ad basim EZHΘ ita esse altitudinem MN ad altitudiuem KΛ.

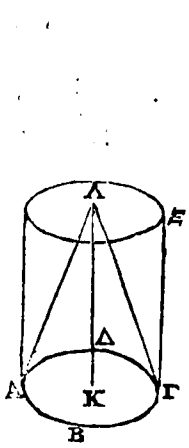
Altitudo enim KΛ vel æqualis est altitudini MN, vel non æqualis. sit primum æqualis. est autem AΞ cylindrus æqualis cylindro EO. qui vero eandem habent altitudinem coni aut cylindri [per 11. 12.] inter se sunt ut bases: æqualis igitur est basis ABΓΔ basi EZHΘ; ac propterea sunt reciproce proportionales, hoc est, ut basis ABΓΔ ad EZHΘ basim ita MN altitudo ad altitudinem KΛ. Non sit autem altitudo KΛ altitudini MN æqualis, sed sit MN major, atque auferatur ab ipsa MN altitudini KΛ æqualis ΠM, & per Π secetur EO cylindrus plano TTΣ oppositis planis circulorum EZHΘ, PO parallelo, intelligaturque constitutus cylindrus EΣ, cujus basis quidem EZHΘ circulus, altitudo autem ΠM. quoniam igitur [ex hyp.] AΞ

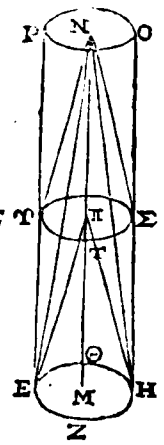
Προτασις ιε'.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ABΓΔ, EZHΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ AΓ, EH, ἄξονες δὲ οἱ KΛ, MN, οἵ τινες καὶ ὕψη εἰσὶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ AΞ, EO κύλινδροι· λέγω ὅτι τῶν AΞ, EO κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ ABΓΔ βάσις πρὸς τὴν EZHΘ βάσιν οὕτως τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ KΛ ὕψος.

Τὸ γὰρ KΛ ὕψος τῷ MN ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστι δὲ καὶ ὁ AΞ κύλινδρος τῷ EO κυλίνδρῳ ἴσος. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ ABΓΔ βάσις τῇ EZHΘ βάσει· ὥστε καὶ ἀντιπεπόνθασιν, ὡς ἡ ABΓΔ βάσις πρὸς τὴν EZHΘ βάσιν οὕτως τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ KΛ ὕψος. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ KΛ ὕψος τῷ MN ἴσον, ἀλλ' ἔστω τὸ MN μεῖζον, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ MN ὕψους τῷ KΛ ἴσον τὸ ΠM, καὶ διὰ τοῦ Π σημείου τετμήσθω ὁ EO κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ TTΣ ᾠδαλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῦ EZHΘ, PO κύκλων, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ EZHΘ κύκλου ὕψους δὲ τοῦ ΠM κύλινδρος γεγράφθω ὁ EΣ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ἡ AΞ κύλιν-





λινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ, ἄλλος δέ τις ὁ ΕΣ κύλινδρος· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ οὕτως ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, ἴσοι γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ ΑΞ, ΕΣ κύλινδροι. ὡς δὲ ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος, ὁ γὰρ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΤΥΣ ὡς ἀλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΜΠ ὕψος τῷ ΚΛ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· τῶν ἄρα ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

ΑΛΛΑ δὴ τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΠ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, ἴσοι γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. ὡς δὲ τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἴσος ἄρα ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ. ὁμοίως δὲ κἀν τοῖς κώνοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

cylindrus æqualis est cylindro ΕΟ, alius autem aliquis est cylindrus ΕΣ; erit [per 7. 5.] ut ΑΞ cylindrus ad cylindrum ΕΣ ita cylindrus ΕΟ ad ΕΣ cylindrum. sed [per 11. 12.] ut ΑΞ cylindrus ad cylindrum ΕΣ ita basis ΑΒΓΔ ad ΕΖΗΘ basim; cylindri enim ΑΞ, ΕΣ eandem habent altitudinem. ut autem cylindrus ΕΟ ad ΕΣ cylindrum ita [per 13. 12.] ΜΝ altitudo ad altitudinem ΜΠ; nam cylindrus ΕΟ secatur plano ΤΥΣ oppositis planis parallelo; est igitur ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita altitudo ΜΝ ad ΜΠ altitudinem. æqualis autem est ΜΠ altitudo altitudini ΚΛ: quare ut basis ΑΒΓΔ ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudo ad altitudinem ΚΛ: æqualium igitur cylindrorum ΑΞ, ΕΟ bases sunt reciproce proportionales altitudinibus.

SED cylindrorum ΑΞ, ΕΟ bases sint reciproce proportionales altitudinibus, sitque ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita altitudo ΜΝ ad ΚΛ altitudinem: dico ΑΞ cylindrum cylindro ΕΟ æqualem esse.

Iisdem enim constructis, quoniam ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita est altitudo ΜΝ ad ΚΛ altitudinem, altitudo autem ΚΛ est æqualis altitudini ΜΠ: erit ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita ΜΝ altitudo ad altitudinem ΜΠ. sed [per 11. 12.] ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita est & ΑΞ cylindrus ad cylindrum ΕΣ: eandem enim habent altitudinem. ut autem ΜΝ altitudo ad altitudinem ΜΠ ita [per 13. 12.] cylindrus ΕΟ ad ΕΣ cylindrum: est igitur ut ΑΞ cylindrus ad cylindrum ΕΣ ita cylindrus ΕΟ ad ΕΣ cylindrum: cylindrus igitur ΑΞ [per 9. 5.] cylindro ΕΟ est æqualis. similiter autem & in conis. quod erat demonstrandum.

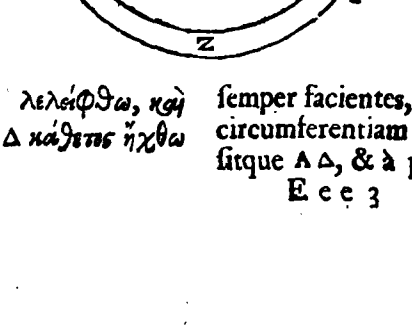
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

PROP. XVI. PROBL.

Duobus circulis circa idem centrum consistentibus, in majori polygonum æqualium ac parium numero laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

ΕΣτωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.



SInt dati duo circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ circa idem centrum Κ: oportet in majori circulo ΑΒΓΔ polygonum æqualium ac parium numero laterum describere, non tangens minorem circulum ΕΖΗΘ.

Ducatur enim per Κ centrum recta linea ΒΔ, atque à puncto Η ipsi ΒΔ ad rectos angulos ducatur ΑΗ, & ad Γ producatur: ergo [per 16. 3.] ΑΓ circulum ΕΖΗΘ tangit: itaque circumferentiam ΒΑΔ bifariam secantes, & ejus dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes, tandem relinquemus [per 1. 10.] circumferentiam minorem ipsa ΑΔ. relinquatur, sitque ΑΔ, & à puncto Λ ad ΒΔ perpendicularis

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὴν ΒΔ περὶ ὀρθὰς ἡ ΑΗ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἅπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· τετμήσθω δὴ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν δίχα, καὶ τῆς ἡμισείας αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάσσονα τῆς ΑΔ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΛΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἤχθω

agatur Λ M, & ad N producatur, junganturque Λ Δ, Δ N: ergo Λ Δ ipſi Δ N eſt æqualis. & quoniam Λ N parallela eſt ipſi Α Γ, ipſa vero Α Γ tangit circulum Ε Ζ Η Θ; ipſa Λ N circulum Ε Ζ Η Θ non tanget, & multo minus tangent circulum Ε Ζ Η Θ rectæ lineæ Λ Δ, Δ N. quod ſi [per 1. 4.] ipſi Λ Δ æquales deinceps circulo Α Β Γ Α aptabimus, deſcribetur in eo polygonum æqualium ac parium numero laterum, non tangens minorem circulum Ε Ζ Η Θ. quod erat faciendum.

ἡ Λ Μ, καὶ διήχθω ὥστε τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Λ Δ, Δ Ν, Λ Μ· ἴση ἄρα ἡ Λ Δ τῇ Δ Ν. καὶ ἐπεὶ ὡμοίλληλός ἐστιν ἡ Λ Ν τῇ Α Γ, ἡ δὲ Α Γ ἐφάπτεται τοῦ Ε Ζ Η Θ κύκλου· ἡ Λ Ν ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ Ε Ζ Η Θ κύκλου· πολλῷ ἄρα αἱ Λ Δ, Δ Ν οὐκ ἐφάπτονται τοῦ Ε Ζ Η Θ κύκλου. ἐὰν ᾖ τῇ Λ Δ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἁρμόσωμεν εἰς τὸ Α Β Γ Δ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸ Α Β Γ Δ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ Ε Ζ Η Θ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XVII. Probl.

Duabus ſphæris circa idem centrum conſiſtentibus, in majori ſolidum polyedrum deſcribere, quod minoris ſphæræ ſuperficiem non tangat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

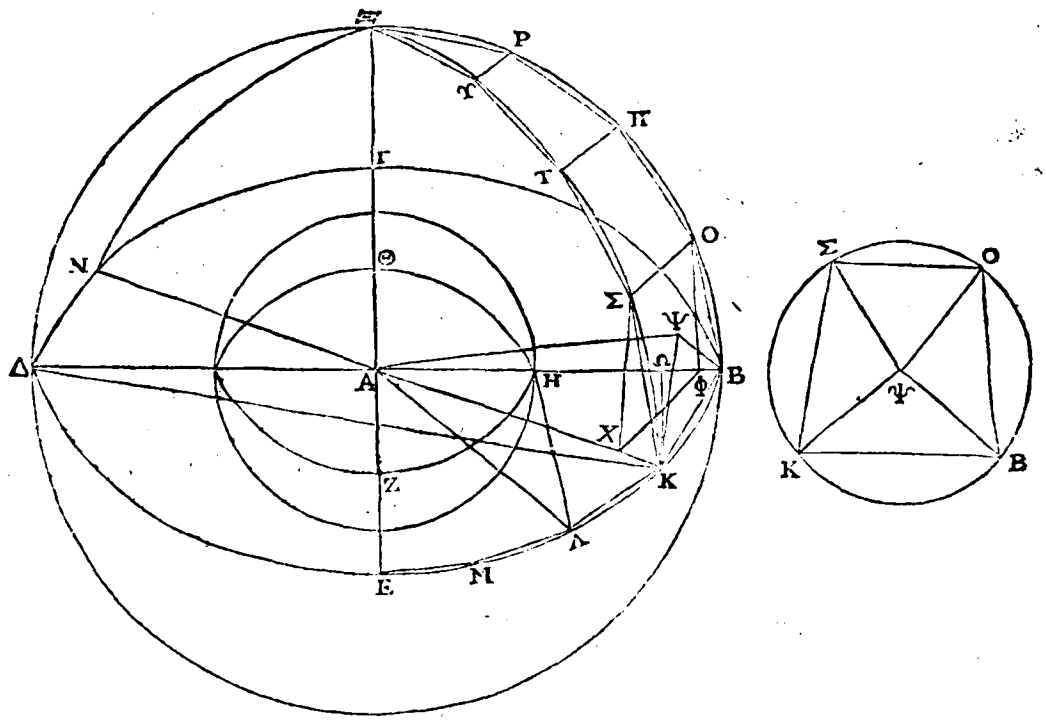
Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ὑπιφάνειαν.

INtelligantur duæ ſphæræ circa idem centrum Α: oportet in majori ſphæra deſcribere ſolidum polyedrum, quod ſphæræ minoris ſuperficiem non tangat.

Νενοήθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α· δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ὑπιφάνειαν.

Secentur ſphæræ plano aliquo per centrum

Τετμήθωσαν αἱ σφαῖραι ὑπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ



ducto: erunt igitur ſectiones circuli, quoniam [per 14. def. 11.] diametro manente & ſemicirculo circumducto ſphæra facta eſt: ergo in quacunque poſitione ſemicirculum intelligamus, quod per ipſum producitur planum in ſuperficie ſphæræ circulum efficiet. conſtat vero circulum maximum eſſe, quia diameter ſphæræ, (quæ & ſemicirculi diameter eſt) major eſt [per 15. 3.] omnibus rectis lineis quæ in circulo vel ſphæra ducuntur. ſit igitur in majori quidem ſphæra circulus Β Γ Δ Ε; in minori autem circulus Ζ Η Θ; & ducantur ipſo-

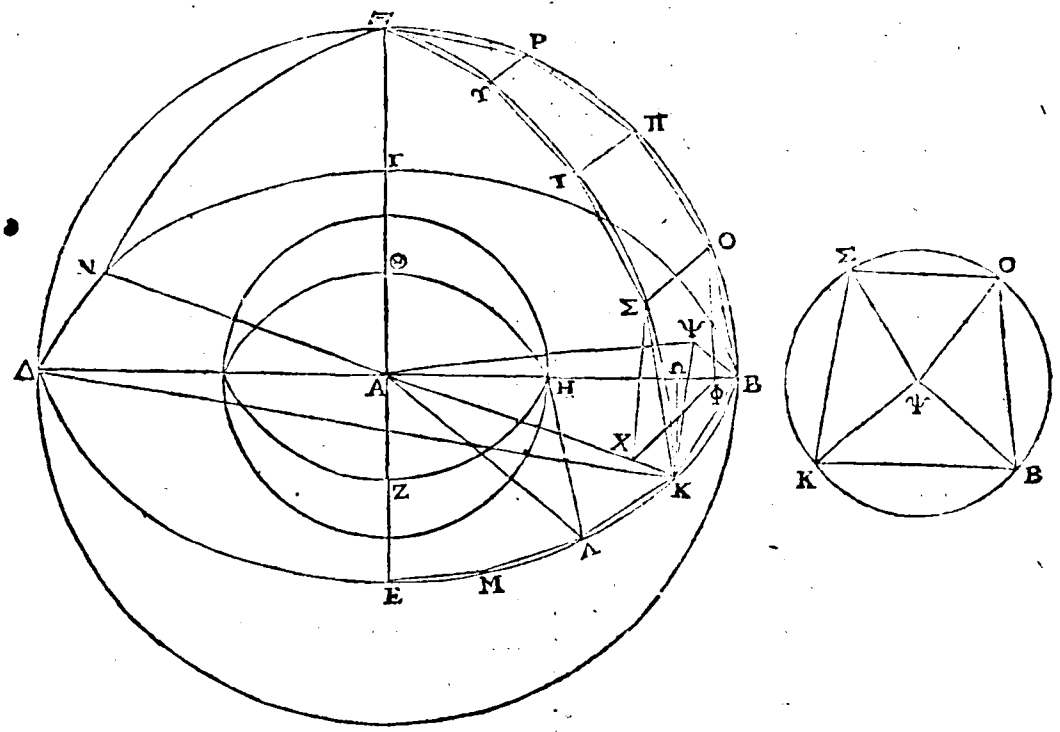
κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς Δ ἡμικυκλίου περιφερομένου ἡμικυκλίου ἐγένετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καθ' οἱανδήποτε θέσεως νοηθῶμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ὑπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. ἡ φανερὸν ὅτι ἡ μέγιστον, ἐπειδήπερ ἡ Δ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου Δ διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων εὐθειῶν. ἔστω δὴ ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ Β Γ Δ Ε, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ Ζ Η Θ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν

αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ, ΖΗΘ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, καὶ πολυγραμμὴ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου διπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΞ, καὶ συμβαλλέτω τῇ διαφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω, ποιήσουσι δὴ περὶ μὲν τὴν διαφανείαν τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστωσαν τὰ ἐπὶ τῶν ΒΔ, ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞΑ διπλᾶ ὀρθὰ ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶ τὰ ΒΞΕ, ΚΞΝ ἡμικύκλια, ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ περιφέρειαι ἀλλήλαις· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΕ περιφερείᾳ πολύγωνα ἴσαι τοῖς ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ εὐθείαις. ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν διπλῶν τὰς ΒΔ, ΚΝ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ, ΣΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦΧ. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς ΒΞΔ, ΚΞΝ ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΒΟ, ΚΣ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΟΦ, ΣΧ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΟΦ τῇ ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ τῇ ΚΧ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ὅλῃ τῇ ΚΑ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΦΑ λοιπῇ τῇ ΧΑ ἐστιν ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΑ οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΚΒ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΟΦ, ΣΧ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΣΧ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· αἱ ΧΦ, ΣΟ ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλαι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ ἐστὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΣΟ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστι παράλληλος. καὶ διπλοῦνται αἱ ΒΟ, ΚΣ· τὸ ΚΒΟΣ ἄρα πεπέδιλευρον ἐν ἑνί ἐστι διπλῷ, ἐπειδήπερ ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἐπὶ τὰ σημεῖα διπλοῦται εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ διπλῷ ἐστι ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ πεπεδιλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν διπλῷ. ἔστι δὲ τὸ ΤΡΞ τρίγωνον ἐν ἑνὶ διπλῷ· ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ σημείων ἐπὶ τὸ Α διπλοῦμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι χῆμα στερεὸν περιέχον πολύεδρον μεταξὺ τῶν ΒΖ, ΚΞ περιφερειῶν ἐν πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ

rum duæ diametri ad rectos inter ſe angulos ΒΔ, ΓΕ: & duobus circulis circa idem centrum conſiſtentibus ΒΓΔΕ, ΖΗΘ in majori ΒΓΔΕ polygonum æqualium ac parium numero laterum deſcribatur [per 16. 12.] non tangens minorem circulum ΖΗΘ; cujus latera ſint in ΒΕ circuli quadrante ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ; & juncta ΚΑ producatur ad Ν; & à puncto Α plano circuli ΒΓΔΕ ad rectos angulos excitetur ΑΞ, quæ ſuperficiei ſphæræ in puncto Ξ occurrat; & per ΑΞ & utramque ipſarum ΒΔ, ΚΝ plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in ſuperficie ſphæræ maximos circulos. efficiant itaque, & ſint à diametris ΒΔ, ΚΝ eorum ſemicirculi ΒΞΔ, ΚΞΝ. quoniam igitur ΞΑ recta eſt ad planum circuli ΒΓΔΕ, erunt [per 18.11.] omnia plana quæ per ipſam ΞΑ tranſeunt ad planum circuli ΒΓΔΕ recta: quare & ſemicirculi ΒΞΔ, ΚΞΝ recti ſunt ad idem planum. & quoniam ſemicirculi ΒΞΔ, ΚΞΝ æquales ſunt, ſunt enim ſuper æquales diametros ΒΔ, ΚΝ; erunt & eorum quadrantes ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ inter ſe æquales: quot igitur latera polygoni ſunt in quadrante ΒΕ, tot erunt & in quadrantibus ΒΞ, ΚΞ æqualia ipſis ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ. deſcribantur & ſint ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ; junganturque ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ; & ab ipſis Ο, Σ punctis ad planum circuli ΒΓΔΕ perpendiculares ducantur: cadent quidem ipſæ [per 38. 11.] in communes planorum ſectiones ΒΔ, ΚΝ, quoniam plana ſemicirculorum ΒΞΔ, ΚΞΝ [per conſtr.] ad planum circuli ΒΓΔΕ recta ſunt. itaque cadant, ſintque ΟΦ, ΣΧ; & ΦΧ jungatur. quoniam igitur in æqualibus ſemicirculis ΒΞΔ, ΚΞΝ æquales circumferentiæ ſumptæ ſunt ΒΟ, Κ Σ, & ductæ perpendiculares ΟΦ, ΣΧ; erit ΟΦ quidem ipſi ΣΧ æqualis, ΒΦ vero æqualis ΚΧ. eſt autem & tota ΒΑ æqualis toti ΚΑ; ergo & reliqua ΦΑ reliquæ ΧΑ eſt æqualis: ut igitur ΒΦ ad ΦΑ ita ΚΧ ad ΧΑ: ideoque [per 2. 6.] ΦΧ ipſi ΚΒ parallela eſt. & quoniam utraque ipſarum ΟΦ, ΣΧ recta eſt ad circuli ΒΓΔΕ planum, erit [per 6. 11.] ΟΦ ipſi ΣΧ parallela. oſtenſa autem eſt & ipſi æqualis: ergo [per 33. 1.] ΧΦ, ΣΟ æquales ſunt & parallelæ. & quoniam ΧΦ parallela eſt ipſi ΣΟ, ſed & parallela ipſi ΚΒ; erit [per 9. 11.] & ΣΟ ipſi ΚΒ parallela. & ipſas conjungunt ΒΟ, ΚΣ: ergo & ΚΒΟΣ quadrilaterum eſt in uno plano; nam [per 7. 11.] ſi duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, & in utraque ipſarum quævis puncta ſumantur, quæ dicta puncta conjungit recta lineain eodem eſt plano in quo parallelæ. & eadem ratione utraque ipſorum quadrilaterorum ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ in uno ſunt plano. eſt autem [per 2.11.] in uno plano & triangulum ΤΡΞ: ſi igitur à punctis Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ ad Α ductas rectas lineas intelligamus, conſtituetur quædam figura ſolida polyedra inter circumferentias ΒΞ, ΚΞ, ex pyramidibus compoſita, quarum baſes quidem ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ

ΤΠΡΤ quadrilatera & triangulum ΤΡΞ, vertex autem punctum A. quod ſi in unoquoque laterum ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, quemadmodum in ΚΒ eadem conſtruamus & etiam in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemiſphærio; conſtituetur figura quædam polyedra in ſphæra deſcripta & compoſita ex pyramidibus, quarum baſes ſunt quadrilatera jam dicta & ΤΡΞ triangulum & quæ ejuſdem ordinis cum illis ſunt, vertex autem Α punctum: dico dictam figuram polyedram non tangere ſuperficiem minoris ſphæræ, in qua eſt circulus ΖΗΘ. ducatur [per 11. 11.] à puncto Α ad planum quadrilateri ΚΒΟΣ perpendicularis ΑΨ, cui in puncto Ψ occurrat, & ΒΨ, ΨΚ jungantur. itaque quoniam ΑΨ recta eſt ad quadrilateri ΚΒΟΣ planum, & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt & in eodem ſunt plano rectos angulos faciet: ergo ΑΨ ad utramque ipſarum ΒΨ, ΨΚ eſt perpendicularis. quoniam autem ΑΒ eſt æqua-

πτερόπλευρα καὶ τὸ ΤΡΞ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάσης τῶν ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ πλευρῶν, καθάπερ ἐπὶ τῆς ΚΒ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαιρίου συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις τὰ εἰρημένα πτερόπλευρα καὶ τὸ ΤΡΞ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμόπτερα αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάπτεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἐστιν ὁ ΖΗΘ κύκλος. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΨ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΨ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΨ· ἡ ΑΨ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση



lis ΑΚ; erit & quadratum ex ΑΒ quadrato ex ΑΚ æquale. & ſunt quadrato quidem ex ΑΒ [per 47. 1.] æqualia quadrata ex ΑΨ, ΨΒ, etenim [per conſtr.] angulus ad Ψ rectus eſt; quadrato autem ex ΑΚ æqualia ſunt ex ΑΨ, ΨΚ quadrata: ergo quadrata ex ΑΨ, ΨΒ quadratis ex ΑΨ, ΨΚ æqualia ſunt. commune auferatur quadratum ex ΑΨ: reliquum igitur quod ex ΒΨ reliquo quod ex ΨΚ eſt æquale; ideoque recta linea ΒΨ rectæ ΨΚ æqualis. ſimiliter oſtendemus & quæ à puncto Ψ ad Ο, Σ ducuntur utrivis ipſarum ΒΨ, ΨΚ æquales eſſe: circulus igitur centro Ψ & intervallo æquali uni ipſarum ΨΒ, ΨΚ deſcriptus etiam per puncta Ο, Σ tranſibit, adeoque ΚΒΟΣ quadrilaterum erit in circulo. & quoniam ΚΒ major eſt quam ΧΦ, æqualis autem ΧΦ ipſi ΣΟ; erit & ΚΒ quam ΣΟ major. ſed

ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΚ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨΚ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΒΨ τῇ ΨΚ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Ο, Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΒΨ, ΨΚ· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΨΒ, ΨΚ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ο, Σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΚΒ τῆς ΧΦ, ἴση δὲ ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ· μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΣΟ. ἴση

δὲ

δὲ ἡ ΚΒ ἑκατέρα τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἡ ΚΩ. ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς ΔΩ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΩ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ· ἀναγεγράφωμεν δὴ ἀπὸ τῆς ΒΩ τετράγωνον καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ἐπὶ τῆς ΩΔ παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ ἐλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἐπιζευγνυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΒ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΩ ἐλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΚΑ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΑ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ ἐλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΑ· μεῖζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΩ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΨ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΗ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

ΑΛΛΩΣ.

Δεικτέον δὴ καὶ ἐπέρως εὐχειρότερον, ὅτι μείζων ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ. ἤχθω ἀπὸ Η τῇ ΑΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΛ. πάλιν δὴ τῇ ΕΒ εὐθείᾳ ἴσα θέσει δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα περιφέρειαν, ἥ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ ὑποτεινομένης ὑπὸ ΒΓΔ κύκλου περιφερείας, ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ΗΛ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΚΒ περιφέρεια· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ εὐθεῖα τῆς ΚΛ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΒΚΣΟ τετράπλευρον, καί εἰσιν ἴσαι αἱ ΟΒ, ΒΚ, ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΨΚ γωνία· μείζων ἄρα ἡ ΒΚ τῆς ΒΨ. ἀλλὰ τῆς ΒΚ μείζων ἡ ΗΛ· πολλῷ ἄρα ἡ ΗΛ μείζων τῆς ΒΨ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΑΒ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΛ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΛ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΛ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ ἐλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΨΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ.

ΚΒ est æqualis utrivis ipsarum ΚΣ, ΒΟ: ergo utravis ΚΣ, ΒΟ quam ΣΟ est major. cum igitur in circulo quadrilaterum sit ΚΒΟΣ, & æquales sint ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ, & minor ΟΣ, sitque ex centro circuli ipsa ΒΨ; erit quadratum ex ΚΒ majus quam duplum quadrati ex ΒΨ. ducatur autem à puncto Κ ad ΒΔ perpendicularis ΚΩ. & quoniam ΒΔ minor est quam dupla ipsius ΔΩ, atque est [per 1. 6.] ut ΔΒ ad ΔΩ ita rectangulum contentum sub ΔΒ, ΒΩ ad rectangulum, quod sub ΔΩ, ΩΒ continetur; descripto igitur ex ΒΩ quadrato & completo parallelogrammo super ipso ΩΔ, erit & rectangulum contentum sub ΔΒ, ΒΩ minus quam duplum ejus quod sub ΔΩ, ΩΒ continetur. & adhuc juncta ΚΔ, quod sub ΔΒ, ΒΩ continetur est [per 8. 6.] æquale quadrato ex ΚΒ, & quod continetur sub ΔΩ, ΩΒ æquale quadrato ex ΚΩ: quadratum igitur ex ΚΒ minus est quam duplum quadrati ex ΚΩ. sed quadratum ex ΚΒ majus est quam duplum quadrati ex ΒΨ: ergo quadratum ex ΚΩ quadrato ex ΒΨ est majus. & quoniam ΒΑ est æqualis ΚΑ, erit quadratum ex ΒΑ quadrato ex ΚΑ æquale. & sunt [per 47. 1.] quadrato quidem ex ΒΑ æqualia quadrata ex ΒΨ, ΨΑ, quadrato autem ex ΚΑ æqualia quadrata ex ΚΩ, ΩΑ: quadrata igitur ex ΒΨ, ΨΑ quadratis ex ΚΩ, ΩΑ sunt æqualia; ex quibus quadratum ex ΚΩ majus est quadrato ex ΒΨ: ergo reliquum ex ΩΑ quadratum quadrato ex ΨΑ est minus; ac propterea recta linea ΑΨ major quam recta ΑΩ: multo igitur major est ΑΨ quam ΑΗ. at vero est ΑΨ quidem ad unam polyedri basim, ΑΗ vero ad superficiem minoris sphæræ: quare polyedrum minoris sphæræ superficiem non tangit.

ALITER.

Ostendendum autem aliter & expeditius, majorem esse ΑΨ quam ΑΗ. ducatur à puncto Η ipsi ΑΗ ad rectos angulos ΗΛ, & ΑΛ jungatur. itaque circumferentiam ΕΒ bifariam secantes, & dimidiam ipsius bifariam, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus [per 1. 10.] quandam circumferentiam minorem arcu circumferentiæ circuli ΒΓΔ quæ subtenditur arcui æquali ipsi ΗΛ. relinquatur, sitque circumferentia ΚΒ: minor igitur est recta linea ΚΒ quam ΗΛ. quoniam vero in circulo est ΒΚΣΟ quadrilaterum, & sunt æquales ΟΒ, ΒΚ, ΚΣ, & minor ΟΣ; erit angulus ΒΨΚ obtusus: ideoque ΒΚ major est quam ΒΨ. sed ΗΛ [per constr.] quam ΒΚ est major: multo igitur major est ΗΛ quam ΒΨ, & quadratum ex ΗΛ quadrato ex ΒΨ majus. quoniam vero æqualis sit ΑΛ ipsi ΑΒ, erit & quadratum ex ΑΛ quadrato ex ΑΒ æquale. sed quadrato quidem ex ΑΛ æqualia sunt quadrata ex ΑΗ, ΗΛ; quadrato autem ex ΑΒ æqualia quadrata ex ΒΨ, ΨΑ: quadrata igitur ex ΑΗ, ΗΛ quadratis ex ΒΨ, ΨΑ æqualia sunt; ex quibus quadratum ex ΒΨ minus est quadrato ex ΗΛ: ergo reliquum ex ΨΑ quadratum majus est quadrato ex ΑΗ: & ob id recta linea ΑΨ quam recta ΑΗ est major.

Duabus igitur ſphæris circa idem centrum conſiſtentibus, in majori ſolidum polyedrum deſcriptum eſt, quod minoris ſphæræ ſuperficiem non tangit. quod erat faciendum.

Corollarium.

Quod ſi etiam ſolido polyedro deſcripto in ſphæra ΒΓΔΕ ſimile ſolidum polyedrum in altera ſphæra deſcribatur, habebit ſolidum polyedrum in ſphæra ΒΓΔΕ ad ſolidum polyedrum in altera ſphæra triplicatam rationem ejus quam diameter ſphæræ ΒΓΔΕ habet ad alterius ſphæræ diametrum. diviſis enim ſolidis in pyramides numero æquales & ejuſdem ordinis, erunt pyramides ſimiles. ſimiles autem pyramides [per cor. 8. 12.] ſunt inter ſe in triplicata ratione homologorum laterum: ergo pyramis, cujus baſis eſt ΚΒΟΣ quadrilaterum vertex autem punctum Α, ad pyramidem in altera ſphæra ejuſdem ordinis triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt, quam habet ΑΒ ex centro ſphæræ circa centrum Α exiſtentis ad eam quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. ſimiliter & unaquæque pyramis earum, quæ ſunt in ſphæra circa centrum Α, ad unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis, quæ ſunt in altera ſphæra, triplicatam rationem habebit ejus quam habet ΑΒ ad eam quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. ſed [per 12. 5.] ut unum antecedentium ad unum conſequentium ita ſunt omnia antecedentia ad omnia conſequentia: quare totum ſolidum polyedrum, quod eſt in ſphæra circa centrum Α, ad totum ſolidum polyedrum, quod in altera ſphæra, triplicatam rationem habebit ejus quam habet ΑΒ ad eam quæ eſt ex centro alterius ſphæræ, hoc eſt, quam habet ΒΔ diameter ad alterius ſphæræ diametrum. quod erat demonſtrandum.

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὐσῶν εἰς τ μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγέγραπται, μὴ ψαῦον τ ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τλὼ ἐπιφάνειαν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχῃ ἥπερ ἡ τ ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τλὼ τ ἑτέρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τ στερεῶν εἰς τὰς ὁμοπληθεῖς καὶ ὁμοτάξεις πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τ ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τλὼ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τ ὁμόλογον πλευράν, τυτέστιν, ἥπερ ἡ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τ σφαίρας τ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α πρὸς τλὼ ἐκ τοῦ κέντρου τ ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως δὲ καὶ ἑκάστη πυραμὶς τ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τλὼ ἐκ τοῦ κέντρου τ ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὡς ἓν τ ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων ὅτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τλὼ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τυτέστιν ἥπερ ἡ ΒΔ διάμετρος πρὸς τλὼ τ ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XVIII. Theor.

Sphæræ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τ ἰδίων διαμέτρων.

INtelligantur ſphæræ ΑΒΓ, ΔΕΖ, quarum diametri ΒΓ, ΕΖ: dico ΑΒΓ ſphæram ad ſphæram ΔΕΖ triplicatam rationem habere ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ.

Si enim non, ſphæra ΑΒΓ vel ad ſphæram minorem, vel ad majorem ipſa ΔΕΖ triplicatam rationem habebit ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ. habeat primo ad minorem, videlicet ad ΗΘΚ; intelligatur autem ſphæra ΔΕΖ circa idem centrum, circa quod eſt ſphæra ΗΘΚ: deſcribaturque [per 17. 12.] in majori ſphæra ΔΕΖ ſolidum polyedrum quod non tangat ſuperficiem minoris ſphæræ ΗΘΚ; atque in ſphæra ΑΒΓ deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile ei quod in ΔΕΖ deſcriptum eſt: ſolidum igitur polyedrum, quod eſt in ſphæra ΑΒΓ, ad ſolidum polyedrum, quod in ſphæra ΔΕΖ, [per cor. 17. 12.] triplicatam rationem ha-

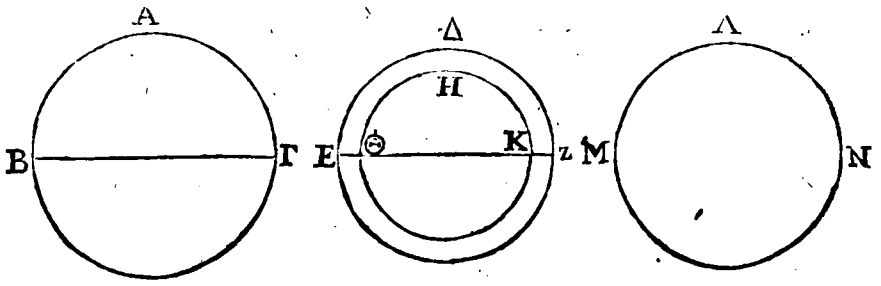
Νενοήθωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τλὼ ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τλὼ ΕΖ.

Εἰ γὰρ μή, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τ ΔΕΖ σφαίρας ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τλὼ ΕΖ. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τλὼ ΗΘΚ, καὶ νενοήθω ἡ ΔΕΖ σφαῖρα τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τλὼ μείζονα σφαῖραν τλὼ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τλὼ ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τλὼ ΑΒΓ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον· τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει

ἥπερ

ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔχει δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ὃν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα

bet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. habet autem [ex hyp.] ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram ΗΘΚ triplicatam rationem ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ: ergo [per 11.5.] ut ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram ΗΘΚ ita ſolidum polyedrum in ſphæra ΑΒΓ ad ſolidum polyedrum in ſphæra ΔΕΖ; permutando igitur ut ΑΒΓ ſphæra ad ſolidum polyedrum quod in ipſa eſt ita ΗΘΚ ſphæra ad ſolidum polyedrum quod eſt in ſphæra ΔΕΖ. major autem eſt ſphæra ΑΒΓ ſolido polyedro quod eſt in ipſa: ergo & ΗΘΚ ſphæra major eſt polyedro quod in ſphæra ΔΕΖ. ſed & minor, ab ipſo enim comprehenditur; quod fieri non poteſt: non igitur ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram minorem ipſa ΔΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. ſimiliter oſtendemus neque ΔΕΖ ſphæram ad ſphæram minorem ipſa ΑΒΓ triplicatam habere rationem ejus quam habet ΕΖ ad ΒΓ. Dico inſuper ſphæram ΑΒΗ neque ad majorem ſphæram ipſa ΔΕΖ triplicatam rationem habere ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. ſi enim fieri poteſt, habeat ad majorem ΛΜΝ: invertendo igitur ſphæra ΛΜΝ ad ΑΒΓ ſphæram triplicatam rationem habet ejus quam diameter ΕΖ habet ad ΒΓ diametrum. ut autem ſphæra ΛΜΝ ad ΑΒΓ ſphæram ita ſphæra ΔΕΖ ad ſphæram quandam minorem ipſa ΑΒΓ, ut ante demonſtravimus, quoniam ſphæra ΛΜΝ major eſt ipſa ΔΕΖ: ergo & ΔΕΖ ſphæra ad ſphæram minorem ipſa ΑΒΓ triplicatam rationem habet ejus quam ΕΖ habet ad ΒΓ, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt; non igitur ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram majorem ipſa ΔΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. oſtenſum autem eſt neque ad minorem: ergo ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram ΔΕΖ triplicatam rationem habebit ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. quod erat demonſtrandum.



πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΛΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΓ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάττονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜΝ τῆς ΔΕΖ· καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα· ἡ ἄρα ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΣΚΑΙΔΕΚΑΤΟΝ,
Καὶ Στερεῶν τρίτον.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER DECIMUS TERTIUS,
Et Solidorum tertius.

PROP. I. THEOR.

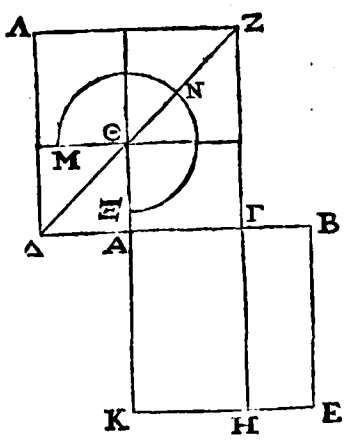
Si recta linea extrema ac media ratione secta fuerit, major portio assumens dimidiam totius quintuplum potest ejus quod à dimidia totius fit quadrati.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα τετραπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης.

RECTA enim linea AB extrema ac media ratione secetur in puncto Γ; & sit AΓ major portio; atque producatur in directum ipsi AΓ recta linea AΔ, & ponatur AΔ ipsius AB dimidia: dico quadratum ex ΓΔ quadrati ΔA quintuplum esse.

Describantur enim ex AB, ΔΓ quadrata AE, ΔZ, deinde in ΔZ describatur figura, & ZΓ ad H producatur. itaque quoniam AB extrema ac media ratione secatur in Γ; [per 3. def. & 17. 6.] quod sub AB, BΓ continetur æquale erit quadrato ex AΓ. verum rectangulum quidem ΓE est quod continetur sub AE, BΓ; quadratum vero ex AΓ est ZΘ: ergo rectangulum ΓE quadrato ZΘ est æquale. quoniam vero BA dupla est ipsius AΔ, æqualis autem BA ipsi KA, & AΔ ipsi AΘ; erit & KA ipsius AΘ dupla. ut autem KA ad AΘ ita est [per 1. 6.] rectangulum KΓ ad ipsum ΓΘ: duplum igitur est KΓ rectangulum rectanguli ΓΘ. sunt autem [per 43. 1.] rectangula ΛΘ, ΘΓ ipsius ΓΘ dupla: ergo rectangulum KΓ rectangulis ΛΘ, ΘΓ est æquale. ostensum autem est & rectangulum ΓE æquale quadrato ZΘ: totum igitur AE quadrato-



ΕΥΘΕΙΑ γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΓ εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΔΓ τετράγωνα τὰ ΑΕ, ΔΖ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΔΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΖΓ ἐπὶ τὸ Η. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΖΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΑ τῇ ΚΑ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΑΘ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῆς ΑΘ. ὡς δὲ ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ οὕτως τὸ ΚΓ πρὸς τὸ ΓΘ· διπλάσιον ἄρα τὸ ΚΓ τοῦ ΓΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘΓ διπλάσια τοῦ ΓΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΚΓ τοῖς ΛΘ, ΘΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΘ ἴσον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ

τετρά-

πετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, πετραπλάσιον ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τὸ ΑΕ τοῦ ΔΘ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕ τῷ ΜΝΞ γνώμονι, καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων πετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΔΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ πεντεπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΘ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ΔΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πεντεπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα τετραπλασίων τῷ ἡμισείαν τῆς ὅλης πεντεπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

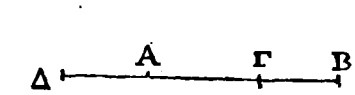
*ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἀνάλυσίς ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Συνθεσίς ἐστι λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπὶ τῷ τοῦ ζητουμένου κατάληξιν ἢ κατάληψιν.

†Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις ἄνευ ἀναγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΒ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι πεντεπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.



Ἐπεὶ γὰρ πεντεπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστι καὶ ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ πεντεπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ πετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τῷ μὲν δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, διπλῆ γὰρ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ πετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἔστι δὲ, διπλῆ γὰρ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ.

Συνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν πετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐστι μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν

dratum est æquale gnomoni ΜΝΞ. rursus, quoniam ΒΑ dupla est ipsius ΑΔ; erit [per cor. 20. 6.] quadratum ex ΒΑ quadrati ex ΑΔ quadruplum, hoc est quadratum ΑΕ quadrati ΔΘ. æquale autem quadratum ΑΕ gnomoni ΜΝΞ; ergo & ΜΝΞ gnomon quadruplus est quadrati ΔΘ; quare totum ΔΖ ipsius ΔΘ est quintuplum. atque est ΔΖ quidem quadratum ex ΓΔ; ΔΘ vero quadratum ex ΔΑ: quadratum igitur ex ΓΔ quadrati ex ΔΑ est quintuplum.

Ergo si recta linea extrema ac media ratione secta fuerit, major portio assumens dimidiam totius quintuplum potest ejus quod à dimidia totius fit quadrati. quod erat demonstrandum.

*SCHOLIUM.

Resolutio est sumptio quæsiti tanquam concessi per ea quæ consequuntur in aliquod verum concessum.

Compositio est sumptio concessi per ea quæ consequuntur in quæsiti conclusionem seu deprehensionem.

† *Antecedentis theorematis resolutio absque figurarum descriptione.*

Recta enim linea quædam ΑΒ extrema ac media ratione secetur in Γ, sitque major portio ΑΓ, & ponatur ΑΔ ipsius ΑΒ dimidiæ æqualis: dico quadratum ex ΓΔ quadrati ex ΔΑ quintuplum esse.

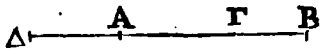
Quoniam enim quintuplum est [ex hyp.] quadratum ex ΓΔ quadrati ex ΔΑ, quadrato autem ex ΓΔ æqualia sunt [per 4. 2.] quadrata ex ΓΑ, ΑΔ una cum eo quod bis sub ΓΑ, ΑΔ continetur; erunt quadrata ex ΓΑ, ΑΔ una cum eo quod bis sub ΓΑ, ΑΔ continetur quadrati ex ΑΔ quintupla: ergo dividendo quadratum ex ΓΑ cum eo quod bis continetur sub ΓΑ, ΑΔ quadruplum est quadrati ex ΑΔ. sed ei quidem quod bis sub ΓΑ, ΑΔ continetur æquale est rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ, est enim ΒΑ ipsius ΑΔ dupla; quadrato autem ex ΑΓ [per 17. 6.] est æquale rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, namque [ex hyp.] ΑΒ extrema ac media ratione secta est: rectangulum igitur sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ quadruplum est quadrati ex ΑΔ. sed [per 2. 2.] rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ est quadratum ex ΑΒ: ergo quadratum ex ΑΒ quadruplum est quadrati ex ΑΔ: quod quidem [per cor. 20. 6.] ita se habet; est enim ΒΑ ipsius ΑΔ dupla.

Compositio ejusdem.

Quoniam igitur quadruplum est quadratum ΒΑ quadrati ex ΑΔ; quadratum autem ex ΑΒ est [per 2. 2.] rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ: erit rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ quadrati ex ΑΔ quadruplum. sed rectangulum quidem sub ΒΑ, ΑΓ est æquale ei quod bis sub

* Deest in *Codd. MS.* † Pariter & resolutio & compositio hujus theorematis, ut & cujusvis ex quatuor sequentibus, desideratur in *Codd. MSS.*

Δ A, A Γ continetur; rectangulum autem ſub A B, B Γ eſt æquale quadrato ex A Γ: ergo quadratum ex A Γ una cum eo quod bis continetur ſub Δ A, A Γ quadruplum eſt quadrati ex Δ A; quare quadrata ipſarum Δ A, A Γ una cum eo quod bis ſub Δ A, A Γ continetur quintuplum eſt quadrati ex Δ A. ſed [per 4. 2.] quadrata ex Δ A, A Γ una cum eo quod bis continetur ſub Δ A, A Γ eſt quadratum ex Δ Γ: quadratum igitur ex Δ Γ quadrati ex Δ A quintuplum eſt. quod erat demonſtrandum.

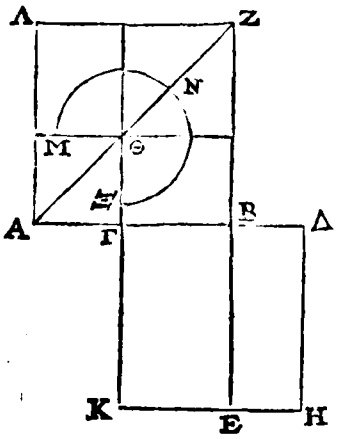


Prop. II. Theor.

Si recta linea partis ſui ipſius quintuplum poſſit, atque duplum dictæ partis extrema ac media ratione ſecetur; major portio eſt pars reliqua ejus quæ à principio rectæ lineæ.

Recta enim linea A B partis ipſius A Γ quintuplum poſſit, & ipſius A Γ dupla ſit Γ Δ: dico ſi Γ Δ extrema ac media ratione ſecetur, Γ B eſſe majorem ejus portionem.

Deſcribantur enim ex utraque ipſarum A B, Γ Δ quadrata A Z, Γ H; & in A Z figura deſcribatur, & producatur Z B in B. quoniam igitur quadratum ipſius A B quintuplum eſt quadrati ipſius A Γ, hoc eſt quadratum A Z quintuplum ipſius A Θ, erit M N Ξ gnomon ipſius A Θ quadruplus. & quoniam Δ Γ dupla eſt Γ A, quadratum ex Δ Γ [per 20. 6.] quadrati ex Γ A quadruplum eſt, videlicet quadratum Γ H quadruplum quadrati A Θ. oſtenſus eſt autem M N Ξ gnomon quadruplus ipſius A Θ quadrati; ergo gnomon M N Ξ quadrato Γ H eſt æqualis. & quoniam Δ Γ dupla eſt Γ A, æqualis autem eſt Δ Γ ipſi Γ K, & A Γ ipſi Γ Θ; erit & K Γ ipſius Γ Θ dupla: parallelogrammum igitur K B duplum eſt parallelogrammi B Θ. & [per 43. 1.] ſunt parallelogramma Λ Θ, Θ B ſimul ipſius Θ B dupla: ergo K B æquale eſt ipſis Λ Θ, Θ B. ſed & totus M N Ξ gnomon toti Γ H oſtenſus eſt æqualis: & reliquum igitur Θ Z æquale eſt reliquo B H. atque eſt B H quidem quod ſub Γ Δ, Δ B continetur, etenim Γ Δ eſt æqualis Δ H; ipſum vero Θ Z eſt quadratum ipſius B Γ: ergo quod continetur ſub Γ Δ, Δ B quadrato ex Γ B eſt æquale: & igitur [per 17. 6.] ut Δ Γ ad Γ B ita eſt Γ B ad B Δ. major autem eſt Δ Γ quam Γ B: ergo & Γ B quam B Δ eſt major. itaque recta linea Γ Δ extrema ac media ratione ſecta eſt, & major ejus portio eſt Γ B.



Si igitur recta linea partis ſui ipſius quintuplum poſſit, atque duplum dictæ partis extrema ac media ratione ſecetur; major portio eſt pars reliqua ejus quæ à principio rectæ lineæ. quod erat demonſtrandum.

Δ A, A Γ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν A B, B Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς A Γ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς A Γ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν Δ A, A Γ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς Δ A· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν Δ A, A Γ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν Δ A, A Γ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς Δ A. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν Δ A, A Γ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν Δ A, A Γ τὸ ἀπὸ τῆς Δ Γ ἐστί· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Δ Γ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς Δ A. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Προτασις β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τὸ δὶς πλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσης· τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπόν μέρος ἐστὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ A B τμήματος ἑαυτῆς τοῦ A Γ πενταπλάσιον δυνάσθω, τὸ δὲ A Γ διπλῆ ἔστω ἡ Γ Δ· λέγω ὅτι τὸ Γ Δ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ Γ B.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν A B, Γ Δ τετράγωνα τὰ A Z, Γ H, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ A Z τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ Z B ἐπὶ τὸ E. Ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς A B τοῦ ἀπὸ τῆς A Γ, τουτέστι τὸ A Z τοῦ A Θ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ M N Ξ γνώμων τοῦ A Θ. Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ Δ Γ τῆς Γ A, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ Γ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ A, τουτέστι τὸ Γ H τοῦ A Θ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ M N Ξ γνώμων τετραπλάσιος τοῦ A Θ, ἴσος ἄρα ὁ M N Ξ γνώμων τῷ Γ H. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ Δ Γ τῆς Γ A, ἴση δὲ ἡ μὲν Δ Γ τῇ Γ K, ἡ δὲ A Γ τῇ Γ Θ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ K Γ τῆς Γ Θ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ K B τοῦ B Θ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ Λ Θ, Θ B διπλάσια τοῦ Θ B· ἴσον ἄρα τὸ K B τοῖς Λ Θ, Θ B. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ M N Ξ γνώμων ὅλῳ τῷ Γ H ἴσος· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ Θ Z τῷ B H ἐστιν ἴσον. καὶ ἔστι τὸ μὲν B H τὸ ὑπὸ τῶν Γ Δ, Δ B, ἴση γὰρ ἡ Γ Δ τῇ Δ H, τὸ δὲ Θ Z τὸ ἀπὸ τῆς B Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ Δ, Δ B ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Γ B· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Δ Γ πρὸς τὴν Γ B οὕτως ἡ Γ B πρὸς τὴν B Δ. μεῖζων δὲ ἡ Δ Γ τῆς Γ B· μείζων ἄρα καὶ ἡ Γ B τῆς B Δ. τῆς Γ Δ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ Γ B.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τὸ διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται· τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ.

Οτι δὲ ἡ διπλῆ τ̃ ΑΓ μείζων ἐστὶ τ̃ ΒΓ, ὕτως δειχτέον.

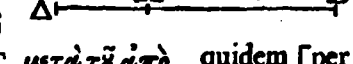
Εἰ γὰρ μὴ, ἔσται, εἰ δυνατὸν, ἡ ΒΓ τ̃ ΓΑ διπλῆ· πετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τ̃ ΒΓ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΓΑ· πεντεπλάσιον ἄρα ἑκάτερον τ̃ ἀπὸ τ̃ ΒΓ, ΓΑ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΓΑ. ὑπάκει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τ̃ ΒΑ πενταπλάσιον τ̃ ἀπὸ τ̃ ΓΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τ̃ ΒΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ διπλασία τ̃ ΓΑ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐλάττων τ̃ ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τ̃ ΓΑ, πολλῷ γὰρ μεῖζον τὸ ἄτοπον· ἡ ἄρα τ̃ ΑΓ διπλῆ μείζων ἐστὶ τ̃ ΒΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΓΔ τμήματος ἑαυτῆς τ̃ ΔΑ πενταπλάσιον δυνάσθω, τ̃ δὲ ΔΑ διπλῆ κείσθω ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τ̃ ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τ̃ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τ̃ ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον, διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΒΑ τ̃ ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τ̃ ΑΒ, ΒΓ μετὰ δὶς ὑπὸ τ̃ ΒΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τ̃ ΔΑ, ΑΓ, μετὰ τῦ ἀπὸ τ̃ ΑΓ. πετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τ̃ ΑΒ τῦ ἀπὸ τ̃ ΔΑ· πετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τῦ ἀπὸ τ̃ ΑΓ τῦ ἀπὸ τ̃ ΑΔ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τ̃ ΔΑ, ΑΓ μετὰ τῦ δὶς ὑπὸ τ̃ ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τ̃ ΓΔ, πενταπλάσιά ἐστι τῦ ἀπὸ τ̃ ΔΑ. ἔστι δὲ καὶ τῷ ὑποθέσιν.



Συνθεσις τῦ αὐτῦ.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τ̃ ΓΔ τῦ ἀπὸ τ̃ ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τ̃ ΓΔ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἐστὶ μετὰ τῦ δὶς ὑπὸ τ̃ ΔΑ, ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τῦ δὶς ὑπὸ τ̃ ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· διπλόσια ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ πετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τ̃ ΑΒ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τ̃ ΑΒ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΔΓ μετὰ τῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τῦ ἀπὸ τ̃ ΑΓ· καὶ κοινῦ ἀφαιρεθέντος τῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, μείζων δὲ ἡ ΒΑ τ̃ ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΓ τ̃ ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τετμημένη ἐστὶ κατὰ τὸ Γ ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

LEMMA.

At vero duplam ipſius ΑΓ majorem eſſe quam ΓΒ, [ut in præc. aſſumptum eſt,] ſic demonſtrabitur.

Si enim non, ſit, ſi fieri poteſt, ΒΓ ipſius ΓΑ dupla: quadratum igitur ex ΒΓ quadruplum eſt quadrati ex ΓΑ; quare ſimul utraque quadrata ipſarum ΒΓ, ΓΑ quadrati ex ΓΑ quintuplum eſt. ſed quadratum ex ΒΑ quadrati ex ΓΑ quintuplum ponitur: ergo quadratum ex ΒΑ æquale eſt quadratis ex ΒΓ, ΓΑ, quod [per 4.2.] fieri non poteſt: non igitur ΒΓ dupla eſt ipſius ΓΑ. ſimiliter demonſtrabimus quod neque minor quam ΒΓ dupla eſt ipſius ΓΑ; multo enim majus abſurdum ſequeretur: ergo dupla ipſius ΑΓ major eſt quam ΒΓ. quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea quædam ΓΔ partis ipſius ΔΑ quintuplum poſſit, & ipſius ΔΑ dupla ponatur ΑΒ: dico ΑΒ extrema ac media ratione ſectam eſſe in puncto Γ, & majorem ejus portionem eſſe ΑΓ, quæ quidem eſt reliqua pars ejus quæ à principio rectæ lineæ.

Quoniam enim ΑΒ extrema ac media ratione ſecta eſt in Γ, & ΑΓ eſt major portio; erit [per 17. 6.] rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ quadrato ex ΑΓ æquale. eſt autem & rectangulum ſub ΒΑ, ΑΓ æquale ei quod bis ſub ΔΑ, ΑΓ continetur; etenim ΒΑ ipſius ΑΔ eſt dupla: ergo rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ una cum rectangulo ſub ΒΑ, ΑΓ, quod quidem [per 2. 2.] eſt ipſius ΒΑ quadratum, æquale eſt ei quod bis ſub ΔΑ, ΑΓ continetur una cum quadrato ex ΑΓ. quadratum autem ex ΑΒ [per 20. 6.] quadruplum eſt quadrati ex ΔΑ: ergo quod bis ſub ΔΑ, ΑΓ continetur una cum quadrato ex ΑΓ quadruplum eſt quadrati ex ΑΔ: ergo & quadrata ex ΔΑ, ΑΓ una cum eo quod bis continetur ſub ΔΑ, ΑΓ, hoc eſt [per 4. 2.] quadratum ex ΓΔ, quintupla ſunt quadrati ex ΑΔ. & hoc eſt ſecundum hypotheſin.

Compoſitio ejuſdem.

Quoniam igitur quadratum ex ΓΔ quintuplum eſt quadrati ex ΔΑ; quadrato autem ex ΓΔ æqualia ſunt [per 4.2.] quadrata ex ΔΑ, ΑΓ una cum eo quod bis ſub ΔΑ, ΑΓ continetur; erunt quadrata ex ΔΑ, ΑΓ una cum eo quod bis continetur ſub ΔΑ, ΑΓ quintupla quadrati ex ΔΑ: dividendo ergo, quod bis ſub ΔΑ, ΑΓ continetur una cum quadrato ex ΑΓ quadrupla ſunt quadrati ex ΑΔ. eſt autem [per 20. 6.] & quadratum ex ΑΒ quadrati ex ΑΔ quadruplum: ergo quod bis continetur ſub ΔΑ, ΑΓ hoc eſt quod ſemel continetur ſub ΒΑ, ΑΓ una cum quadrato ex ΑΓ, eſt æquale quadrato ex ΑΒ. ſed [per 2. 2.] quadratum ex ΑΒ eſt rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ una cum rectangulo ſub ΒΑ, ΑΓ: rectangulum igitur ſub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo ſub ΑΒ, ΒΓ eſt æquale rectangulo ſub ΒΑ, ΑΓ una cum quadrato ex ΑΓ: & ablato communi rectangulo ſub ΒΑ, ΑΓ, erit reliquum rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ quadrato ex ΑΓ æquale: eſt igitur [per 17.6.] ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ. major autem

autem est BA quam AΓ: ergo & AΓ quam ΓB est major: quare [per 3. def. 6.] AB extrema ac media ratione secta est in Γ, & AΓ est major ejus portio. quod erat demonstrandum.

ζων δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. III. Theor.

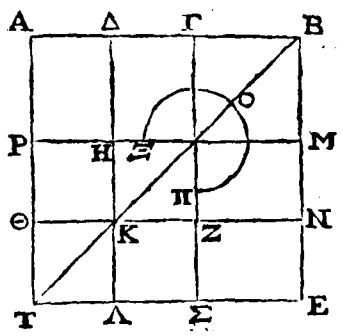
Si recta linea extrema ac media ratione secta fuerit; portio minor, assumens dimidiam majoris portionis, quintuplum potest ejus quod à dimidia majoris portionis fit quadrati.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ ἔλασσον τμῆμα, τετραπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Recta enim linea quævis AB extrema ac media ratione secetur in Γ, sitque AΓ major portio, & secetur AΓ bifariam in Δ: dico quadratum ex BΔ quadrati ex ΔΓ quintuplum esse.

Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. quoniam igitur AΓ dupla est ΓΔ, erit quadratum ex AΓ quadrati ex ΓΔ quadruplum, hoc est quadratum PΣ ipsius ZH. & quoniam [per 17. 6.] rectangulum quod sub AB, BΓ continetur est æquale quadrato ex AΓ, atque est rectangulum quidem sub AB, BΓ ipsum ΓE; quadratum vero ex AΓ est PΣ; erit rectangulum ΓE quadrato PΣ æquale. quadruplum autem est quadratum PΣ quadrati ZH: ergo & ΓE rectangulum quadrati ZH quadruplum erit. rursus quoniam AΔ æqualis est ΔΓ, erit [per 34. 1.] & ΘK ipsi KZ æqualis: ideoque quadratum HZ est æquale quadrato ΘΛ: æqualis igitur est HK ipsi KΛ, hoc est MN ipsi NE: ergo [per 36. 1.] & parallelogrammum MZ parallelogrammo ZE est æquale. sed [per 43. 1.] MZ est æquale ΓH: quare & ΓH ipsi EZ æquale erit. commune apponatur ΓN: gnomon igitur ΞΟΠ est æqualis parallelogrammo ΓE. ostensum autem est ΓE esse quadruplum HZ quadrati: & gnomon igitur ΞΟΠ ipsius HZ quadruplus est: quare quadratum ΔN quintuplum est ipsius HZ. est autem ΔN quadratum ipsius ΔB; HZ vero quadratum ipsius ΔΓ: quadratum igitur ex ΔB quadrati ex ΔΓ est quintuplum. quod erat demonstrandum.



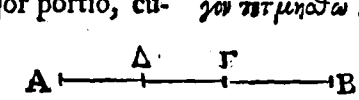
Ἐυθεῖα γὰρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ἔστω δὲ μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι πενταπλάσιον ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ κατεγεγράφθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ, τετραπλάσιον ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τουτέστι τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΡΣ· τὸ ἄρα ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΣ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓΕ τοῦ ΖΗ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΖ· ὥστε καὶ τὸ ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΛ τετραγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ΗΚ τῇ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΕ· ὥστε καὶ τὸ ΜΖ τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΜΖ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΝ· ὁ ἄρα ΞΟΠ γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ΓΕ. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ΗΖ· καὶ ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΗΖ· τὸ ἄρα ΔΝ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΗΖ τετραγώνου. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea AB extrema ac media ratione secetur in Γ; & sit AΓ major portio, cujus dimidia ΓΔ: dico quadratum ex BΔ quadrati ex ΓΔ quintuplum esse.



Quoniam enim [ex hyp.] quadratum ex BΔ quintuplum est quadrati ex ΔΓ; quadratum autem ex BΔ est [per 6. 2.] quod continetur sub AB, BΓ

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ

μετὰ

μετὰ τῆς ἀπὸ τῆς ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῆς ἀπὸ τῆς ΔΓ πενταπλάσιόν ἐστι τῆς ἀπὸ τῆς ΔΓ· διελόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τῆς ἀπὸ τῆς ΔΓ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἔστι δὲ, διπλῆ γὰρ ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ.

Συνθεσις ἅ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· συνθέντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

una cum quadrato ex ΔΓ: ergo quod ſub ΑΒ, ΒΓ continetur una cum quadrato ex ΔΓ quintuplum eſt quadrati ex ΔΓ: dividendo igitur quod ſub ΑΒ, ΒΓ continetur quadrati ex ΔΓ quadruplum eſt. ei vero quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ æquale eſt [per 17.6.] quadratum ex ΑΓ, etenim [ex hyp.] ΑΒ extrema ac media ratione ſecta eſt in Γ: ergo quadratum ex ΑΓ quadrati ex ΓΔ quadruplum eſt. quod quidem ita ſe habet; eſt enim ΑΓ ipſius ΓΔ dupla.

Compoſitio ejuſdem.

Quoniam dupla eſt ΑΓ ipſius ΔΓ, erit quadratum ex ΑΓ quadrati ex ΓΔ quadruplum. ſed [per 17.6.] quadratum ex ΑΓ eſt æquale ei quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur: quod igitur ſub ΑΒ, ΒΓ continetur quadruplum eſt quadrati ex ΔΓ: ideoque componendo, quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΔΓ, quod quidem [per 6.2.] eſt quadratum ex ΔΒ, quintuplum eſt quadrati ipſius ΔΓ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

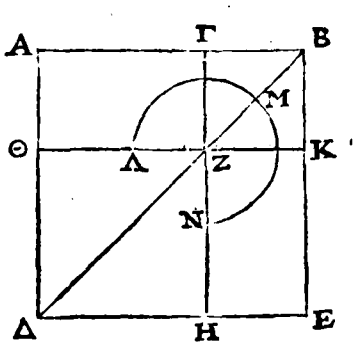
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΘΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἐστιν ἴσον· τὰ ἄρα ΓΕ, ΑΚ τοῦ ΑΚ ἐστι διπλάσια. ἀλλὰ τὰ ΑΚ, ΓΕ ὁ ΛΜΝ γνώμων ἐστὶ καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ ἐδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων, καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ· ὥστε καὶ ὁ ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ τετραγώνου. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα ὅλον τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΓΚ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τὸ δὲ ΗΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IV. Theor.

Si recta linea extrema ac media ratione ſecta fuerit; totius & minoris portionis utraque ſimul quadrata tripla ſunt quadrati ejus quod à majori fit portione.

SIT recta linea ΑΒ, quæ extrema ac media ratione ſecetur in Γ, & ſit ΑΓ major portio: dico quadrata ex ΑΒ, ΒΓ quadrati ex ΑΓ tripla eſſe.

Deſcribatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔΕΒ, & figura compleatur. itaque quoniam ΑΒ extrema ac media ratione ſecta eſt in Γ, & major portio eſt ΑΓ: erit [per 17.6.] rectangulum contentum ſub ΑΒ, ΒΓ quadrato ex ΑΓ æquale. atque eſt rectangulum quidem ΑΚ quod ſub ΑΒ, ΒΓ continetur, quadratum vero ΘΗ eſt quadratum ipſius ΑΓ: æquale igitur eſt ΑΚ ipſi ΘΗ. & quoniam [per 43. 1.] rectangulum ΑΖ eſt æquale ΖΕ, commune apponatur ΓΚ, erit totum ΑΚ toti ΓΕ æquale: ergo rectangula ΓΕ, ΑΚ ipſius ΑΚ ſunt dupla. ſed rectangula ΑΚ, ΓΕ ſunt gnomon ΛΜΝ & quadratum ΓΚ; gnomon igitur ΛΜΝ & quadratum ΓΚ dupla ſunt ipſius ΑΚ. rectangulum autem ΑΚ oſtenſum eſt æquale quadrato ΘΗ: ergo gnomon ΛΜΝ & quadratum ΓΚ ipſius ΘΗ ſunt dupla: ac propterea gnomon ΛΜΝ & quadrata ΓΚ, ΘΗ tripla ſunt quadrati ΘΗ. & gnomon quidem ΛΜΝ & quadrata ΓΚ, ΘΗ ſunt totum ΑΕ quadratum & quadratum ΓΚ, quæ quidem ſunt quadrata ipſarum ΑΒ, ΒΓ; quadratum autem ΗΘ eſt quod fit ex ΑΓ: quadrata igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadrati ex ΑΓ ſunt tripla. quod erat demonſtrandum.



SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea AB extrema ac media ratione ſecetur in Γ, & ſit AΓ major portio: dico quadrata ex AB, BΓ tripla eſſe quadrati ex AΓ.

Quoniam enim quadrata ex AB, BΓ tripla ſunt quadrati ex AΓ; ſuntque [per 7. 2.] quadrata ex AB, BΓ æqualia rectangulo quod bis ſub AB, BΓ continetur una cum quadrato ex AΓ: erit rectangulum quod bis continetur ſub AB, BΓ una cum quadrato ex AΓ triplum quadrati ex AΓ: dividendo igitur, quod bis continetur ſub AB, BΓ duplum eſt quadrati ex AΓ; ergo quod ſemel ſub AB, BΓ continetur quadrato ex AΓ eſt æquale. quod quidem ita ſe habet: recta enim linea AB [ex hyp.] extrema ac media ratione ſecta eſt in puncto Γ.

Compoſitio ejuſdem.

Itaque quoniam AB extrema ac media ratione ſecta eſt in Γ, atque eſt AΓ major portio; erit [per 17. 6.] rectangulum quod ſub AB, BΓ continetur quadrato ex AΓ æquale: ergo quod bis continetur ſub AB, BΓ duplum eſt quadrati ex AΓ: & componendo, quod bis continetur ſub AB, BΓ una cum quadrato ex AΓ triplum eſt quadrati ex AΓ: ſed [per 7. 2.] quod bis ſub AB, BΓ continetur una cum quadrato ex AΓ eſt æquale quadratis ipſarum AB, BΓ: quadrata igitur ex AB, BΓ quadrati ex AΓ ſunt tripla.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ AΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἐστι μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ· διελόντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ· ὥστε τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ. ἔστι δὲ, ἡ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

Συνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

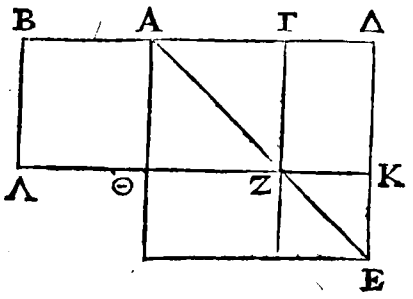
Ἐπεὶ οὖν ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστι μεῖζον τμῆμα ἡ AΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ· συνθέντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ· ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἐστι τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea extrema ac media ratione ſecetur, adjiciaturque ipſi æqualis majori portioni; erit tota linea extrema ac media ratione ſecta, & major portio erit ea quæ à principio poſita eſt recta linea.

REcta enim linea AB extrema ac media ratione ſecetur in Γ, & ſit AΓ major portio, ponaturque ipſi AΓ æqualis AΔ: dico rectam lineam ΔB extrema ac media ratione ſecari in puncto A, & majorem portionem eſſe AB, quæ à principio poſita eſt.

Deſcribatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. quoniam igitur AB extrema ac media ratione ſecta eſt in Γ, erit [per 17. 6.] rectangulum quod continetur ſub AB, BΓ quadrato ex AΓ æquale. ſed rectangulum quidem quod continetur ſub AB, BΓ eſt ΓE: quadratum vero ex AB eſt ΓΘ: ergo ΓE ipſi ΓΘ eſt æquale. ſed ΓE eſt [per 43. 1.] æquale ΘE, & ΓΘ ipſi ΔΘ: quare & ΔΘ ipſi ΘE æquale erit. commune apponatur ΘB. totum igitur ΔK toti



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι· ὅλη ἡ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ AΓ, καὶ τῇ AΓ ἴση κείσθω ἡ AΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔB εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ AB.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AE, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB, BΓ τὸ ΓE, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AΓ τὸ ΓΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓE τῷ ΓΘ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΓE ἴσον ἐστὶ τῷ ΘE, τὸ δὲ ΓΘ ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘE. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘB. ὅλον ἄρα τὸ ΔK ἴσον

ἐστὶν

ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΑΕ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ, ἴση γὰρ ἡ ΑΔ τῇ ΔΛ, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. μείζων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· ἡ ἄρα ΒΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

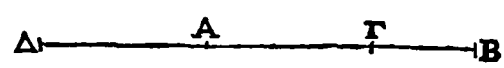
AB eſt æquale. atque eſt ΔK quidem quod ſub BΔ, ΔA continetur, eſt enim AΔ æqualis ΔΛ; quadratum autem AE eſt æquale quadrato ex AB: ergo quod ſub BΔ, ΔA continetur eſt æquale quadrato ex AB: quare [per 17. 6.] ut BΔ ad BA ita eſt BA ad AΔ. ſed BΔ eſt major quam BA: major igitur eſt BA quam AΔ: ergo ΔB extrema ac media ratione ſecta eſt in A, & AB eſt major ejus portio. quod erat demonſtrandum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τῆς εἰρημένης θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἔστι δὲ, καὶ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.



SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea AB extrema ac media ratione ſecetur in Γ, & ſit major portio AΓ, ponaturque AΔ ipſi AΓ æqualis: dico ΔB extrema ac media ratione ſecari in puncto A, & BA majorem eſſe portionem.

Quoniam enim ΔB extrema ac media ratione ſecta eſt in A, & major portio eſt BA; erit [per 30. 6.] ut ΔB ad BA ita BA ad AΔ. æqualis autem eſt AΔ ipſi AΓ: ut igitur ΔB ad BA ita BA ad AΓ; ergo per converſionem rationis [per cor. 19. 5.] ut BΔ ad ΔA ita AB ad BΓ: quare dividendo [per 17. 5.] ut BA ad AΔ ita AΓ ad ΓB. æqualis autem [per conſtr.] eſt AΔ ipſi AΓ: eſt igitur ut BA ad AΓ ita AΓ ad ΓB. quod quidem ita ſe habet; etenim [ex hyp.] AB extrema ac media ratione ſecatur in Γ puncto.

Συνθεσις τῶν αὐτῶν.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΓ· ἀναστρέψαντί τε ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ· ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Compoſitio ejuſdem.

Itaque quoniam AB extrema ac media ratione ſecatur in Γ, erit ut BA ad AΓ ita AΓ ad ΓB. æqualis autem eſt AΓ ipſi AΔ: ergo ut BA ad AΔ ita AΓ ad ΓB: ergo componendo [per 18. 5.] ut BΔ ad ΔA ita BA ad BΓ; & convertendo [per coroll. 19. 5.] ut ΔB ad BA ita BA ad AΓ. ſed eſt AΓ æqualis AΔ: eſt igitur ut ΔB ad BA ita BA ad AΔ: quare [per 3. def. 6.] ΔB extrema ac media ratione ſecatur in puncto A, & AB eſt portio major. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

PROP. VI. THEOR.

Si recta linea rationalis extrema ac media ratione ſecta fuerit; utraque portio irrationalis eſt quæ apotome appellatur.

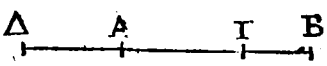
Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ κείσθω τῆς ΒΑ ἡμίσεια ἡ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ ΑΓ προσκεῖται ἡ ΑΔ, ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ πενταπλάσιόν ἐστι.

SIT recta linea rationalis AB, & ſecetur extrema ac media ratione in Γ, ſitque AΓ major portio: dico utramque portionem AΓ, ΓB irrationalem eſſe quæ apotome appellatur.

Producatur enim BA in Δ, & ſit ipſius BA dimidia AΔ. itaque quoniam recta linea AB extrema ac media ratione ſecatur in in Γ, & majori portioni AΓ adjicitur AΔ, quæ eſt ipſius AB dimidia: erit [per 1. 13.] quadratum ex ΓΔ quadrati ex ΔA quintuplum.

quadratum igitur ex ΓΔ ad quadratum ex ΔΑ rationem habet quam numerus ad numerum; ideoque [per 6.10.] quadratum ex ΓΔ commensurabile est quadrato ex ΔΑ. rationale autem est quadratum ex ΔΑ; etenim ΔΑ est rationalis, cum sit ipsius ΑΒ rationalis dimidia: ergo [per 6. def.10.] & quadratum ex ΓΔ est rationale; ac propterea [per 8. def.10.] ipsa ΓΔ rationalis. quoniam vero quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΔΑ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, recta linea ΓΔ [per 9. 10.] ipsi ΔΑ incommensurabilis est longitudine: quare ΓΔ, ΔΑ rationales sunt potentia solum commensurabiles; & idcirco [per 74. 10.] ΑΓ apotome est. rursus, quoniam ΑΒ extrema ac media ratione secta est, & major portio est ΑΓ; erit rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ æquale quadrato ex ΑΓ: quadratum igitur apotomæ ΑΓ ad rationalem ΑΒ applicatum latitudinem facit ΒΓ. sed [per 98. 10.] quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam; ergo ΒΓ est apotome prima. ostensa est autem & ΑΓ apotome.



Si igitur recta linea rationalis extrema ac media ratione secta fuerit; utraque portio irrationalis est quæ apotome appellatur. quod erat demonstrandum.

ὡς ἄρα ἀπὸ τ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τ ΔΑ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τ ΔΑ, ῥητὸν γάρ ἐστιν ἡ ΔΑ ἡμίσεια οὖσα τ ΑΒ ῥητῆς οὔσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τ ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ παρὰ ῥητὴν τὴν ΑΒ παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν ΒΓ. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἡ ΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΓ ἀποτομή.

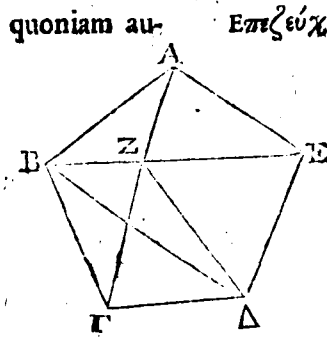
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τ τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VII. Theor.

Si pentagoni æquilateri tres anguli, sive deinceps sive non deinceps, inter se fuerint æquales; æquiangulum erit pentagonum.

PEntagoni enim æquilateri ΑΒΓΔΕ tres anguli primum deinceps, qui ad puncta Α, Β, Γ, æquales inter se sint: dico pentagonum ΑΒΓΔΕ æquiangulum esse.

Jungantur enim ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. quoniam autem duæ ΓΒ, ΒΑ duabus ΒΑ, ΑΕ, æquales sunt, altera alteri, & angulus ΓΒΑ æqualis angulo ΒΑΕ, erit [per 4. 1.] basis ΑΓ æqualis basi ΒΕ, & triangulum ΑΒΓ triangulo ΑΒΕ æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales quibus æqualia latera subtenduntur, angulus quidem ΒΓΑ angulo ΒΕΑ, angulus vero ΑΒΕ angulo ΓΑΒ: quare [per 6. 1.] & latus ΑΖ est æquale lateri ΒΖ. ostensa autem est & tota ΑΓ toti ΒΕ æqualis: ergo & reliqua ΖΓ est æqualis reliquæ ΖΕ. atque est ΓΔ æqualis ΔΕ; duæ igitur ΖΓ, ΓΔ duabus ΖΕ, ΕΔ æquales sunt, & basis ipsorum ΖΔ est communis: quare [per 8. 1.] angulus ΖΓΔ angulo ΖΕΔ est æqualis. ostensus autem est & angulus ΒΓΑ æqualis angulo ΑΕΒ: totus igitur ΒΓΔ æqualis est toti ΑΕΔ. sed [ex hyp.] angulus ΒΓΔ positus est æqualis angulis, qui sunt ad puncta Α, Β: ergo & ΑΕΔ angulus angulis qui sunt ad Α, Β æqualis erit. simili-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι, ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς, ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν· ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πεντάγωνον γὰρ ἰσοπλεύρου τὸ ΑΒΓΔΕ αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΓΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΕ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΒΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΖ πλευρᾷ τῇ ΒΖ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ὅλῃ τῇ ΒΕ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΓ λοιπῇ τῇ ΖΕ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ὑπόκειται καὶ πρὸς τοῖς Α, Β· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις ἴση ἐστίν. ὁμοίως

δὴ

δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

ΑΛΛΑ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ σημείοις· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ, ΑΕ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση, ἐπεὶ πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ γωνίαις ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ter demonſtrabimus & angulum ΓΔΕ angulis qui ſunt ad Α, Β eſſe æqualem: æquiangulum igitur eſt ΑΒΓΔΕ pentagonum.

SED non ſint anguli deinceps ſibi ipſis æquales, ſed qui ſunt ad Α, Γ, Δ: dico & ſic æquiangulum eſſe ΑΒΓΔΕ pentagonum.

Jungatur enim ΒΔ. & quoniam duæ ΒΑ, ΑΕ duabus ΒΓ, ΓΔ æquales ſunt, & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] baſis ΒΕ æqualis baſi ΒΔ, & ΑΒΕ triangulum triangulo ΒΓΔ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt quibus æqualia latera ſubtenduntur: æqualis igitur eſt angulus ΑΕΒ angulo ΓΔΒ. eſt autem [per 6. 1.] & ΒΕΔ angulus ipſi ΒΔΕ æqualis, quoniam latus ΒΕ eſt æquale lateri ΒΔ: totus igitur angulus ΑΒΔ toti ΓΔΕ eſt æqualis. ſed [ex hyp.] angulus ΓΔΕ angulis qui ſunt ad puncta Α, Γ æqualis ponitur: ergo & ΑΕΔ angulus angulis qui ſunt ad Α, Γ eſt æqualis. eadem ratione & angulus ΑΒΓ æqualis eſt angulis qui ſunt ad Α, Γ, Δ puncta: æquiangulum igitur eſt ΑΒΓΔΕ pentagonum. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

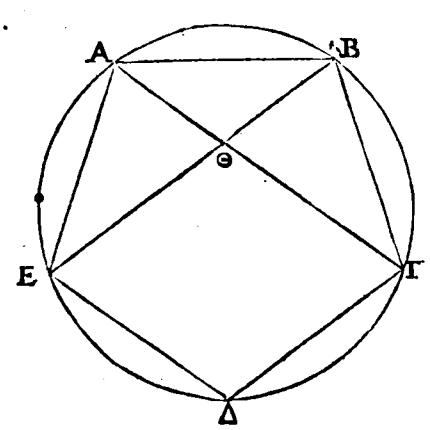
Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

PROP. VIII. THEOR.

Si pentagoni æquilateri & æquianguli duos qui deinceps ſunt angulos ſubtendant rectæ lineæ, extrema ac media ratione ſe mutuo ſecant; & majores ipſarum portiones pentagoni lateri ſunt æquales.

ΠΕντάγωνον γὰρ ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ δύο γωνίας, τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς τὰς πρὸς τοῖς Α, Β, ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΕ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον· λέγω ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα εἰσὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

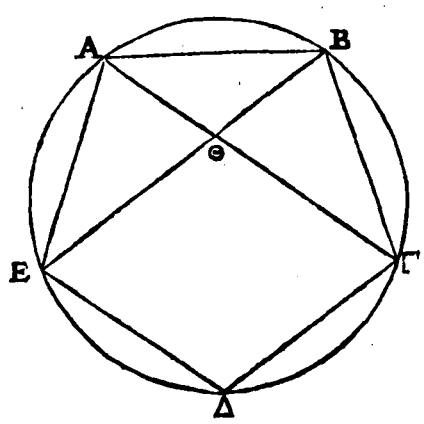
PEntagoni enim æquilateri & æquianguli ΑΒΓΔΕ duos qui ſunt deinceps angulos ad puncta Α, Β ſubtendant rectæ lineæ ΑΓ, ΒΕ, quæ ſeſe in puncto Θ ſecent: dico utramque ipſarum extrema ac media ratione ſecari in puncto Θ; & majores earum portiones pentagoni lateri æquales eſſe.



Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος, ὁ ΑΒΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΑΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΕ· διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΘΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ γωνίας, ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ ΑΒΘ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ διπλῆ, ἐπειδὴ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΔΓ περιφερείας τῆς ΓΒ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΘΕ· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ, τουτέστι

Deſcribatur enim [per 14. 4.] circa ΑΒΓΔΕ pentagonum circulus ΑΒΓΔΕ. & quoniam duæ rectæ lineæ ΕΑ, ΑΒ duabus ΑΒ, ΒΓ æquales ſunt & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] baſis ΒΕ baſi ΑΓ æqualis, & ΑΒΕ triangulum æquale triangulo ΑΒΓ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: æqualis igitur eſt ΒΑΓ angulus angulo ΑΒΕ: ergo [per 6 & 32. 1.] ΑΘΕ angulus anguli ΒΑΘ eſt duplus; eſt etenim extra triangulum ΑΒΘ. eſt autem [per 33. 6.] & angulus ΕΑΓ duplus anguli ΒΑΓ, quoniam circumferentia ΕΔΓ circumferentiæ ΓΒ eſt dupla: ergo ΘΑΕ angulus æqualis eſt angulo ΑΘΕ; quare [per 6. 1.] recta ΘΕ eſt æqualis ipſi ΕΑ, hoc

eſt, ipſi AB. & quoniam BA eſt æqualis AE; erit & angulus ABE [per 5. 1.] angulo AEB æqualis. ſed angulus ABE oſtenſus eſt æqualis angulo BAΘ: ergo & BEA angulus æqualis eſt angulo BAΘ. verum angulus ABE eſt communis duobus triangulis, videlicet triangulo ABE & triangulo ABΘ; reliquus igitur BAE [per 32. 1.] reliquo AΘB eſt æqualis: ergo triangulum ABE æquiangulum eſt triangulo ABΘ; ideoque [per 4. 6.] ut EB ad BA ita eſt AB ad BΘ. æqualis autem eſt BA ipſi EΘ: & igitur ut BE ad BΘ ita EΘ ad ΘB. ſed BE major eſt quam EΘ: ergo & EΘ quam ΘB eſt major: recta igitur linea BE [per 30. 6.] extrema ac media ratione ſecta eſt in Θ, & major ejus portio ΘE pentagoni lateri eſt æqualis. ſimiliter demonſtrabimus & AΓ extrema ac media ratione ſecari in Θ, & majorem ejus portionem ΓΘ pentagoni lateri æqualem eſſe. quod erat demonſtrandum.



τῇ AB ἐστιν ἴση. Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BA εὐθεῖα τῇ AE, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ AEB. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ BAΘ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ BEA ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ BAΘ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ABE καὶ τοῦ ABΘ ἐστιν ἡ ὑπὸ ABE· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BAE γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ AΘB ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ABE τρίγωνον τῷ ABΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ EB πρὸς τὴν BA, οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν BΘ. ἴση δὲ ἡ BA τῇ EΘ· ὡς ἄρα ἡ BE πρὸς τὴν EΘ οὕτως ἡ EΘ πρὸς τὴν ΘB. μείζων δὲ ἡ BE τῆς EΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ EΘ τῆς ΘB· ἡ BE ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΘE ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ AΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΓΘ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. IX. THEOR.

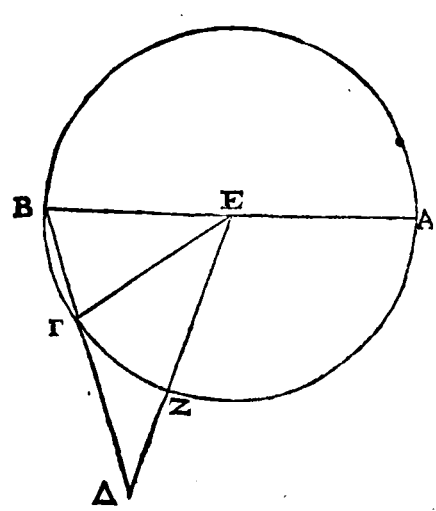
Si latera hexagoni & decagoni in eodem circulo deſcriptorum componantur; erit tota recta extrema ac media ratione ſecta, & major ipſius portio erit hexagoni latus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένων συντεθῶσιν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

SIT circulus ABΓ, &, deſcriptarum in ABΓ circulo figurarum, ſit decagoni quidem latus BΓ, hexagoni vero ΓΔ, & in directum ſibi ipſis conſtituantur: dico totam rectam lineam BΔ extrema ac media ratione ſecari in Γ, & majorem ejus portionem eſſe ΓΔ.

Sumatur enim centrum circuli, quod ſit E; jungunturque EB, EΓ, EΔ, & BE ad A producatur. quoniam igitur BΓ eſt decagoni æquilateri latus, erit AΓB circumferentia circumferentiæ BΓ quintupla; quare circumferentia AΓ quadrupla eſt circumferentiæ ΓB. ut autem circumferentia AΓ ad ipſam ΓB ita [per 33. 6.] AEΓ angulus ad angulum ΓEB: angulus igitur AEΓ anguli ΓEB quadruplus eſt. & quoniam [per 5. 1.] EBΓ angulus eſt æqualis angulo EΓB, erit [per 32. 1.] angulus AEΓ anguli EΓB duplus. & quoniam recta linea EΓ æqualis ipſi ΓΔ; utraque enim [per hyp. & 15. 4.] eſt æqualis



Ἐστω κύκλος ὁ ABΓ, καὶ τοῦ εἰς τὸν ABΓ κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ BΓ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπ' εὐθείας κείσθωσαν· λέγω ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ BΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ E σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EB, EΓ, EΔ, καὶ διήχθω ἡ BE ἐπὶ τὸ A. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστιν ἡ BΓ, πενταπλασίων ἄρα ἡ AΓB περιφέρεια τῆς BΓ περιφερείας· πενταπλασίων ἄρα ἡ AΓ περιφέρεια τῆς ΓB. ὡς δὲ ἡ AΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓB οὕτως ἡ ὑπὸ AEΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓEB· πενταπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ AEΓ τῆς ὑπὸ ΓEB. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ EBΓ γωνία τῇ ὑπὸ EΓB, ἡ ἄρα ὑπὸ AEΓ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ EΓB. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ EΓ εὐθεῖα τῇ ΓΔ, ἑκατέρα ἄρα αὐτῶν ἴση

ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένου, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ· διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΒ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΓ τετραπλασία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ τῇ ὑπὸ ΒΕΓ. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΒΕΓ καὶ τοῦ ΒΕΔ, ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΓΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΕΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. ἴση δὲ ἡ ΕΒ τῇ ΓΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΔΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΒΔ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἐστὶν ἡ ΔΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

lateri hexagoni quod in circulo ΑΒΓ describitur: quare [per 5. 1.] & angulus ΓΕΔ æqualis est angulo ΓΔΕ: est igitur [per 32. 1.] angulus ΕΓΒ anguli ΕΔΓ duplus. sed angulus ΑΕΓ duplus ostensus est anguli ΕΓΒ: angulus igitur ΑΕΓ anguli ΕΔΓ est quadruplus. ostensus autem est & angulus ΑΕΓ quadruplus anguli ΒΕΓ: ergo ΕΔΓ angulus angulo ΒΕΓ æqualis erit. at vero angulus ΕΒΔ communis est duobus triangulis ΒΕΓ, ΒΕΔ: & reliquus igitur ΒΕΔ [per 32. 1.] reliquo ΕΓΒ est æqualis: ideoque triangulum ΕΒΔ triangulo ΕΒΓ æquiangulum est: ergo [per 4. 6.] ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΕΒ ad ΒΓ. æqualis autem est [per 15. 4.] ΕΒ ipsi ΓΔ: ut igitur ΒΔ ad ΔΓ ita ΔΓ ad ΓΒ atque est ΒΔ major quam ΔΓ: ergo & ΔΓ quam ΓΒ est major: quare [per 3. def. 6.] recta linea ΒΔ extrema ac media ratione secta est in Γ, & ΔΓ est major ipsius portio. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

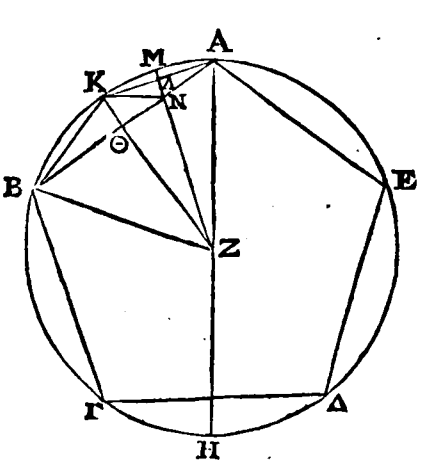
Ἐὰν εἰς κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου ἐγγραφῇ· ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δυνατὴ) τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τὰ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Prop. X. Theor.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur; latus pentagoni potest & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν πενταγώνου ἐγγεγράφθω ἰσοπλεύρου τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ ΑΒΓΔΕ πενταγώνου πλευρὰ δυνατή ἐστι τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευράν, τὰ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον ἐγγραφομένων.

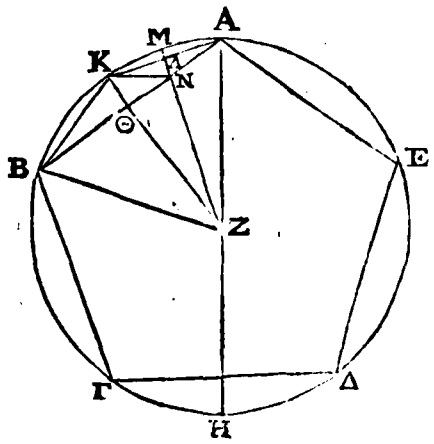
Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΝ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΕΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. πενταγώνου γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κάθετος ἡ ΖΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΒ· ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας· δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΚ εὐθεῖα. λέγω τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΚΜ ἐστὶ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας, ἴση δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας. ἔστι δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια καὶ τῆς ΓΗ διπλῆ



Sumatur enim centrum circuli Z, junctaque ΑΖ ad Η producatur, & jungatur ΖΒ; deinde à puncto Ζ ad ΑΒ perpendicularis agatur ΖΘ, & ad Κ producatur; junganturque ΑΚ, ΚΒ: & rursus à puncto Ζ ad ΑΚ perpendicularis agatur ΖΛ, & producatur ad Μ, & ΚΝ jungatur. quoniam igitur circumferentia ΑΒΓΗ est æqualis circumferentiæ ΑΕΔΗ, ex quibus ΑΒΓ æqualis est ipsi ΑΕΔ; erit reliqua ΓΗ reliquæ ΗΔ æqualis. sed ΓΔ est latus pentagoni: ergo ΓΗ decagoni latus erit. & quoniam ΑΖ est æqualis ΖΒ, & ΖΘ perpendicularis; erit & angulus ΑΖΚ æqualis angulo ΚΖΒ; quare & circumferentia ΑΚ circumferentiæ ΚΒ est æqualis: dupla igitur est circumferentia ΑΒ circumferentiæ ΒΚ; & ob id recta linea ΑΚ est decagoni latus. eadem ratione & ΑΚ est dupla ΚΜ. & quoniam circumferentia ΑΒ dupla est circumferentiæ ΒΚ, æqualis autem est ΓΔ circumferentia circumferentiæ ΑΒ; erit circumferentia ΓΔ circumferentiæ ΒΚ dupla. est autem ΓΔ dupla

ipsius

ipſius ΓH: ergo ΓH eſt æqualis BK. ſed BK ipſius KM eſt dupla, quoniam & AK: & ΓH igitur ipſius KM dupla erit. eſt autem & ΓB circumferentia circumferentiæ BK dupla; etenim ΓB eſt æqualis BA: ergo & tota HB dupla eſt ipſius BM, & [per 33. 6.] angulus HZB anguli BZM duplus. ſed [per 32. 1.] & angulus HZB eſt duplus anguli ZAB; etenim [per 5. 1.] ZAB angulus æqualis eſt angulo ABZ: ergo & angulus BZN angulo ZAB eſt æqualis. communis autem duobus triangulis ABZ, BZN eſt ABZ angulus: reliquus igitur AZB [per 32. 1.] eſt æqualis reliquo BNZ, & triangulum ABZ triangulo BZN æquiangulum: ergo [per 4. 6.] ut AB ad BZ ita ZB ad BN: rectangulum igitur ſub AB, BN [per 17. 6.] eſt æquale quadrato ex ZB. rurſus quoniam AΛ eſt æqualis AK, communis autem & ad rectos angulos AN; erit [per 4. 1.] baſis KN æqualis baſi AN: ergo & angulus AKN angulo AAN eſt æqualis. ſed [per 5. 1.] angulus AAN eſt æqualis angulo KBN: & igitur angulus AKN eſt æqualis angulo KBN. angulus autem NAK eſt communis duobus triangulis AKB & AKN: ergo [per 32. 1.] reliquus AKB reliquo KNA eſt æqualis, & triangulum KBA triangulo KNA æquiangulum; igitur ut BA ad AK ita [per 4. 6.] KA ad AN; quare [per 17. 6.] rectangulum ſub BA, AN eſt æquale quadrato ex AK. oſtenſum eſt autem & rectangulum ſub AB, BN quadrato ex BZ æquale: rectangulum igitur ſub AB, BN una cum rectangulo ſub BA, AN, quod [per 2. 2.] eſt quadratum ex AB, eſt æquale quadrato ex BZ una cum quadrato ex AK. ſed eſt AB quidem pentagoni latus, BZ vero latus hexagoni, & AK latus decagoni.



Ergo pentagoni latus poteſt & latus hexagoni & latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum. quod erat demonſtrandum.

πλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΓH περιφέρεια τῇ BK περιφερείᾳ· ἀλλὰ ἡ BK τῇ KM ἐστι διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ KA· καὶ ἡ ΓH ἄρα τῇ KM ἐστι διπλῆ. ἀλλὰ ἡ ΓB περιφέρεια τῇ ΓK περιφερείας ἐστὶ διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ΓB περιφέρεια τῇ BA περιφερείᾳ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ HB περιφέρεια τῇ BM ἐστι διπλῆ· ὥστε ἡ γωνία ἡ ὑπὸ HZB γωνίας τῆς ὑπὸ BZM ἐστι διπλῆ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ HZB καὶ τῆς ὑπὸ ZAB διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ZAB τῇ ὑπὸ ABZ· καὶ ἡ ὑπὸ BZN ἄρα τῇ ὑπὸ ZAB ἐστιν ἴση. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ABZ καὶ τοῦ BZN, ἡ ὑπὸ ABZ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AZB λοιπῇ τῇ ὑπὸ BNZ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ABZ τρίγωνον τῷ BZN τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB εὐθεῖα πρὸς τὴν BZ οὕτως ἡ ZB πρὸς τὴν BN· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZB. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AΛ τῇ AK, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς ὀρθὰς ἡ AN· βάσις ἄρα ἡ KN βάσει τῇ AN ἐστιν ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AKN γωνίᾳ τῇ ὑπὸ AAN ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ AAN τῇ ὑπὸ KBN ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ AKN ἄρα τῇ ὑπὸ KBN ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε AKB καὶ τοῦ AKN, ἡ ὑπὸ NAK· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AKB λοιπῇ τῇ ὑπὸ KNA ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ KBA τρίγωνον τῷ KNA τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BA εὐθεῖα πρὸς τὴν AK οὕτως ἡ KA εὐθεῖα πρὸς τὴν AN· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA, AN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AK. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BN ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς BZ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BN μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν BA, AN, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BZ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AK. ἐὰν ἄρα ἡ μὴ AB πενταγώνου πλευρὰ, ἡ δὲ BZ ἑξαγώνου, ἡ δὲ AK δεκαγώνου.

Η ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δυνατή τίς ἐστι τοῦ τε ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XI. Theor.

Si in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum deſcribatur; pentagoni latus eſt linea irrationalis quæ minor appellatur.

IN circulo enim ABΓΔE rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum deſcribatur ABΓΔE: dico pentagoni ABΓΔE latus irrationalem eſſe lineam, quæ minor appellatur.

Sumatur enim circuli centrum Z; & junctæ AZ, BZ ad puncta H, Θ producantur, & jungatur AΓ; ponaturque ZK ipſius AZ pars

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

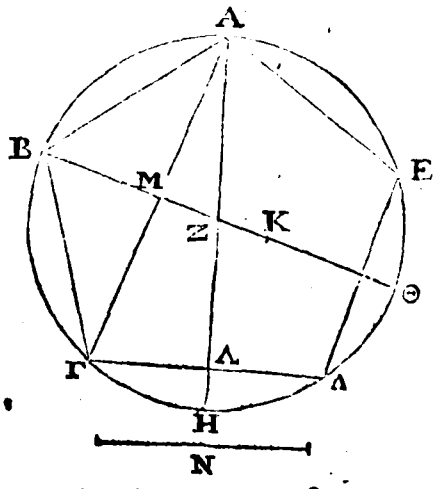
Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πενταγώνου ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

ΕΙΣ γὰρ κύκλον τὸν ABΓΔE ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πενταγώνου ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ABΓΔE· λέγω ὅτι ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἡ ABΓΔE ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Z σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, ZB, καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ H, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AΓ, καὶ κείσθω τῇ AZ

πεπερ-

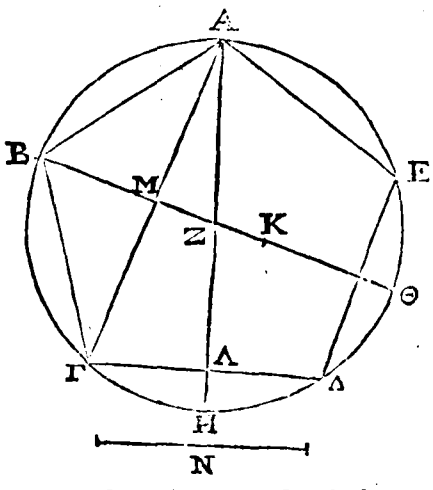
τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΖ ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ ῥητή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΑΔ, συναγονται ἐφ' αἷς πρὸς τῷ Λ γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ ΓΔ τῆς ΓΛ. Διὰ τὰ αὐτὰ καὶ αἱ πρὸς τῷ Μ ὀρθαί εἰσι, καὶ διπλῆ ἡ ΑΓ τῆς ΓΜ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΛΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦτ' ἔστι ΑΛΓ καὶ τοῦ ΑΜΖ, ἡ ὑπὸ ΛΑΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΜΖΑ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΓΛ τριγωνον τῷ ΑΜΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΑ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ὡς ἄρα ἡ τοῦ ΑΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ τοῦ ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ. ἀλλ' ὡς ἡ τοῦ ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ ΑΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίσεια· ὡς ἄρα ἡ τοῦ ΑΓ διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ΖΑ. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΓ διπλῆ ἡ ΔΓ, τῆς δὲ ΓΑ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τῆς δὲ ΖΑ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΚ. συνθέντι καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ΔΓΜ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΓΜ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς καὶ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τοῦ ΑΓ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ καθ' ἕκαστον πλευρᾷ, τουτέστι τῷ ΔΓ, τὸ δὲ μεῖζον τμῆμα περιλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ ὅλης πενταπλάσιον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ ὅλης, καὶ ἔστιν ὅλης τοῦ ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τοῦ ΔΓΜ ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΜ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τοῦ ΔΓΜ ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΚ, λόγον γὰρ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΖΚ, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῆς ΚΖ· εἰκοσι πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΒΚ τῇ ΚΜ μήκει. καὶ ἔστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· αἱ ΒΚ, ΚΜ



quarta. rationalis autem eſt ΑΖ: ergo & ΖΚ eſt rationalis. ſed & rationalis eſt ΒΖ: tota igitur ΒΚ rationalis erit. quoniam vero circumferentia ΑΓΗ æqualis eſt circumferentiæ ΑΔΗ, ex quibus ΑΒΓ eſt æqualis ipſi ΑΕΔ; erit reliqua ΓΗ reliquæ ΗΔ æqualis. quod ſi jungamus ΑΔ, fient anguli ad Λ recti, & [per 3.3.] ΓΔ dupla ipſius ΓΛ. eadem ratione & anguli ad Μ recti ſunt, & ΑΓ dupla ΓΜ. quoniam igitur angulus ΑΛΓ eſt æqualis angulo ΑΜΖ, communis autem duobus triangulis ΑΛΓ & ΑΜΖ eſt angulus ΛΑΓ; reliquus ΑΓΛ [per 32.1.] reliquo ΜΖΑ æqualis erit: ideoque triangulum ΑΓΛ triangulo ΑΜΖ æquiangulum: ergo [per 4. 6.] ut ΑΓ ad ΓΑ ita ΜΖ ad ΖΑ, & antecedentium dupla: quare ut dupla ipſius ΑΓ ad ΓΑ ita dupla ipſius ΜΖ ad ΖΑ. ſed ut ipſius ΜΖ dupla ad ΖΑ ita eſt ΜΖ ad dimidiam ipſius ΖΑ: & igitur ut dupla ipſius ΑΓ ad ΓΑ ita ΜΖ ad ipſius ΖΑ dimidiam; & conſequentium dimidia: quare ut dupla ΑΓ ad dimidiam ipſius ΓΑ ita ΜΖ ad quartam partem ipſius ΖΑ. atque ipſius quidem ΑΓ dupla eſt ΔΓ; ipſius vero ΓΑ dimidia ΓΜ, & ipſius ΖΑ quarta pars ΖΚ: eſt igitur ut ΔΓ ad ΓΜ ita ΜΖ ad ΖΚ. & componendo [per 18. 5.] ut utraque *ΔΓΜ ad ΓΜ ita ΜΚ ad ΖΚ: ergo [per 22.6.] ut quadratum quod fit ex utraque ΔΓΜ ad quadratum ex ΓΜ ita quadratum ex ΜΚ ad quadratum ex ΚΖ. quoniam autem [per 8. 13.] recta linea, quæ duo pentagoni latera ſubtendit, ut ΑΓ, extrema ac media ratione ſecta, major ejus portio eſt æqualis lateri pentagoni, hoc eſt ipſi ΔΓ; & [per 1. 13.] major portio aſſumens dimidium totius quintuplum poteſt dimidiæ totius; atque eſt totius ΑΓ dimidia ΓΜ: erit quadratum ex ΔΓΜ tanquam ex una linea quintuplum quadrati ex ΓΜ. ut autem quadratum ex ΔΓΜ tanquam ex una linea ad quadratum ex ΓΜ ita oſtendimus eſſe quadratum ex ΜΚ ad quadratum ex ΚΖ: quintuplum igitur eſt quadratum ex ΜΚ quadrati ex ΚΖ. eſt autem [per 6. def. 10.] quadratum ex ΚΖ rationale: namq; diameter rationalis eſt: ergo & rationale eſt [per 6. 10.] quadratum ex ΜΚ, & ipſa ΜΚ rationalis, quadratum enim ex ΜΚ ad quadratum ex ΚΖ rationem habet quam numerus ad numerum. quoniam autem ΒΖ quadrupla eſt ipſius ΖΚ, erit ΒΚ ipſius ΚΖ quintupla: & [per cor. 20.6.] quadratum ex ΒΚ vigintiquintuplum quadrati ex ΚΖ. quadratum autem ex ΜΚ quintuplum eſt quadrati ex ΚΖ: ergo quadratum ex ΒΚ quadrati ex ΚΜ eſt quintuplum; ac propterea ad illud rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt [per 9. 10.] ΒΚ ipſi ΚΜ longitudine. ſed eſt & utraque ipſarum rationalis: ergo ΒΚ, ΚΜ rationa-

* In ſequentibus frequenter enunciatur aggregatum duarum rectarum contiguarum, ut ΕΓ & ΓΜ per ΔΓΜ.

les ſunt potentia ſolum commenſurabiles. ſi autem à rationali rationalis auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, [per 74. 10.] reliqua irrationalis eſt: quare MB eſt apotome, & ipſi congruens MK. dico & ipſam MB quartam eſſe. quo enim quadratum ex BK ſuperat quadratum ex KM, illi ſit æquale quadratum ex N: ergo BK plus poteſt quam KM quadrato ex N. quoniam vero commenſurabilis eſt KZ ipſi ZB; & componendo KB commenſurabilis eſt ipſi BZ. ſed & BZ eſt commenſurabilis ipſi BΘ longitudine; erit igitur [per 12.10.] & KB ipſi BΘ commenſurabilis. quoniam autem quadratum ex BK quintuplum eſt quadrati ex KM, habebit quadratum ex BK ad quadratum ex KM rationem eam quam habet quinque ad unum: ergo convertendo [per cor. 19. 5.] quadratum ex BK ad N rationem habet quam quinque ad quatuor, & non eam quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt [per 9. 10.] BK ipſi N: quare BK plus poteſt quam KM quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis. itaque quoniam tota BK plus poteſt quam congruens MK quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & tota BK commenſurabilis eſt expoſitæ rationali BΘ; erit [per 4. deff. tert. 10.] MB apotome quarta. quod autem ſub rationali & apotome quarta continetur rectangulum [per 95. 10.] irrationale eſt, & ipſum potens eſt irrationalis quæ minor appellatur. ſed [per 17. 6.] AB poteſt id quod continetur ſub ΘB, BM, propterea quod, juncta AΘ, triangulum ABΘ eſt [per 8. 6.] æquiangulum triangulo ABM, atque eſt [per 4. 6.] ut ΘB ad BA ita AB ad BM: ergo pentagoni latus AB eſt linea irrationalis quæ minor appellatur. quod erat dem.



ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος ὅσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· ἀποτομὴ ἄρα ἡ MB, ᾧ συναρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ MK. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς KM, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς N· ἡ BK ἄρα τῆς KM μεῖζον δυνάται τῇ N. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ KZ τῇ ZB, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ KB τῇ BZ. ἀλλὰ ἡ BZ τῇ BΘ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ BK ἄρα τῇ BΘ σύμμετρός ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς KM, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς KM λόγον ἔχει ὃν E πρὸς A· ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς N λόγον ἔχει ὃν E πρὸς Δ, ἔχ ὧν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἐστὶν ἡ BK τῇ N· ἡ BK ἄρα τῆς KM μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ BK τῆς συναρμοζούσης τῆς MK μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ὅλη ἡ BK σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ BΘ· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ MB. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐλάττων. δυνάσθω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΘB, BM ἡ AB, δηλονότι τὸ ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ AΘ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ABΘ τρίγωνον τῷ ABM, καὶ ἔσται ὡς τὴν ΘB πρὸς τὴν BA οὕτως τὴν AB πρὸς τὴν BM· ἡ ἄρα AB τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XII. Theor.

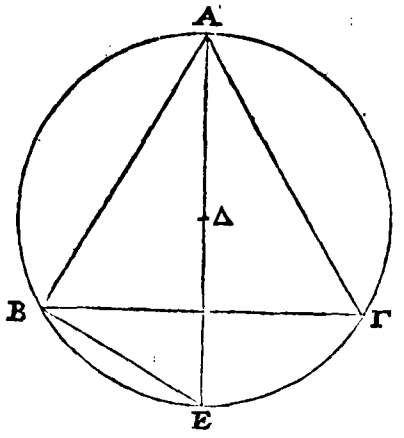
Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; trianguli latus potentia tripla eſt ejus quæ ex circuli centro.

SIT circulus ABΓ, & in ipſo triangulum æquilaterum deſcribatur ABΓ: dico trianguli ABΓ latus potentia triplum eſſe ejus quæ eſt ex circuli ABΓ centro.

Sumatur enim circuli centrum Δ, & juncta AΔ producatur ad E, & BE jungatur. itaque quoniam æquilaterum eſt ABΓ triangulum, erit BEΓ circumferentia tertia pars circumferentiæ circuli ABΓ: ergo circumferentia BE eſt

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.



Ἔστω κύκλος ὁ ABΓ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ABΓ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ ABΓ τριγώνου μιᾶς πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ABΓ κύκλου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἡ AΔ διήχθω ἐπὶ τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ABΓ τρίγωνον, BEΓ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ ABΓ κύκλου περιφερείας· ἡ ἄρα BE περιφέρεια

ἐκτου

ἕκτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἐξαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΒΕ εὐθεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τῇ ΔΕ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ· διλόγῳ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ.

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

sexta pars circumferentiæ circuli: ideoque recta linea BE eſt latus hexagoni, & [per 15. 4.] æqualis ipſi ΔB quæ eſt ex circuli centro. quoniam vero AE eſt dupla ipſius ΔE, erit [per cor. 20.6.] quadratum ex AE quadrati ex ΔE, hoc eſt quadrati ex BE, quadruplum. quadratum autem ex AE [per 47.1. & 31.3.] eſt æquale quadratis ex AB, BE: ergo quadrata ex AB, BE quadrupla ſunt quadrati ex BE; unde dividendo, erit quadratum ex AB quadrati ex BE triplum. at vero eſt BE æqualis ΔE: quadratum igitur ex AB triplum eſt quadrati ex ΔE.

Ergo trianguli latus eſt potentia triplum ejus quæ ex circuli centro. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

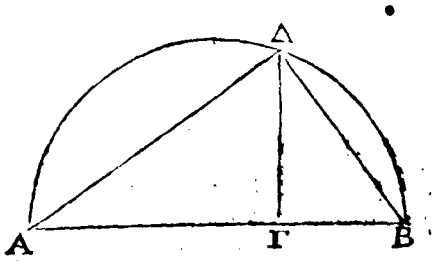
Πυραμίδα συστήσασθαι, καὶ σφαῖραν περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

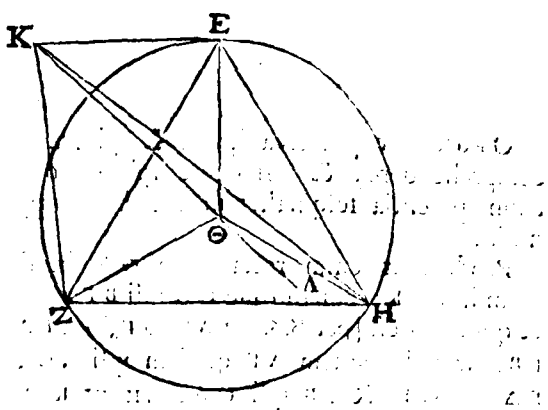
Prop. XIII. Probl.

Pyramidem conſtituere, & ſphæra comprehendere data; atque etiam demonſtrare quod ſphæræ diameter eſt potentia ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΒΓ· καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΑ· καὶ ἐκκείσθω κύκλος ἡ ΕΖΗ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΗΖ κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΕΖΗ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΘΖ, ΘΗ· καὶ ἀνεγράφω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ ΕΖΗ κύκλου ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ἡ ΘΚ· καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΘΚ τῇ ΑΓ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΚ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΗ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ· ἡ ΘΚ ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΚΕ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΚΗ τῇ ΔΑ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ

Exponatur enim datæ ſphæræ diameter AB, & [per 9.6.] ſecetur in Γ, ita ut AΓ ipſius BΓ ſit dupla; deſcribaturque ſuper AB ſemicirculus

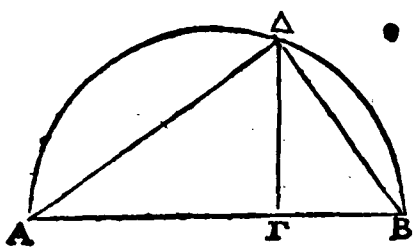


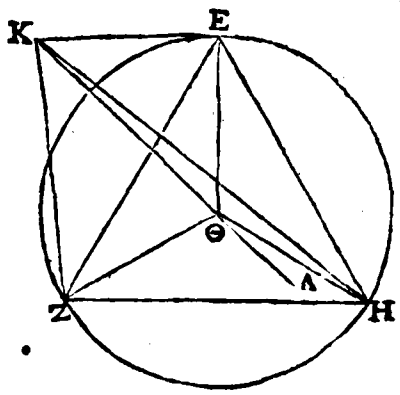


ΑΔΒ, & à puncto Γ ipſi AB ad rectos angulos ducatur ΓΔ, & ΔA jungantur: exponatur præterea circulus EZH habens eam quæ ex centro æqualem ipſi ΔΓ, in quo deſcribatur [per 2.4.] triangulum æquilaterum EZH; ſumaturque centrum circuli Θ, & jungantur EΘ, ΘZ, ΘH; atque à puncto Θ ipſi plano circuli EZH ad rectos angulos erigatur ΘK; & auferatur ΘK ipſi AΓ æqualis, & KE, KZ, KH jungantur. quoniam igitur ΘK recta eſt ad planum circuli EZH; & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas, quæ in eodem circuli plano exiſtentes ipſam contingunt, rectos angulos faciet. contingit autem ipſam unaquæque linearum ΘE, ΘZ, ΘH: ergo ΘK ad unamquamque ipſarum ΘE, ΘZ, ΘH eſt perpendicularis. quoniam autem AΓ eſt æqualis ΘK, & ΓΔ ipſi ΘE, & rectos angulos continent; erit [per 4. 1.] baſis ΔA æqualis baſi KE. eadem ratione & utravis KZ, KH ipſi ΔA eſt æqualis: tres igitur KE, KZ, KH inter ſe æquales ſunt. & quoniam du-

pla eſt ΑΓ ipſius ΓΒ, erit ΑΒ ipſius ΒΓ tripla. ut autem ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΑΔ ad quadratum ex ΔΓ, ut deinceps [in lem. ſeq.] demonſtrabitur: triplum igitur eſt quadratum ex ΑΔ quadrati ex ΔΓ. eſt autem [per 12.13] & quadratum ex ΖΕ quadrati ex ΕΘ triplum, atque eſt ΔΓ æqualis ΕΘ: ergo & ΔΑ ipſi ΕΖ eſt æqualis. ſed ΔΑ oſtenſa eſt æqualis unicuique ipſarum ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ: & igitur unaquæque ipſarum ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ unicuique ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ eſt æqualis: quare æquilatera ſunt quatuor triangula ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΗΕ: pyramis igitur conſtituta eſt ex quatuor triangulis æqualibus & æquilateris, cujus baſis quidem eſt triangulum ΕΖΗ vertex autem Κ punctum.

ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὡς ἐξῆς δειχθήσεται· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ τριπλάσιον, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΕΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΑ τῇ ΕΖ. ἀλλὰ ἡ ΔΑ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΗΕ· πυραμὶς ἄρα συνέστακε ὑπὸ τεσσάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΖΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον.





OPORTET præterea ipſam & ſphæra data comprehendere, & oſtendere ſphæræ diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris pyramidis.

Producatur enim recta linea ΘΛ in directum ipſi ΘΚ; ponaturque ΘΛ ipſi ΒΓ æqualis. & quoniam eſt [per 8.6.] ut ΑΓ ad ΓΔ ita ΓΔ ad ΓΒ; æqualis autem ΑΓ quidem ipſi ΚΘ, & ΓΔ ipſi ΘΕ, & ΓΒ ipſi ΘΛ; erit ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΕΘ ad ΘΛ: rectangulum igitur ſub ΚΘ, ΘΛ eſt æquale quadrato ex ΕΘ. atque eſt rectus uterque angulorum ΚΘΕ, ΕΘΛ: ergo ſuper ΚΛ deſcriptus ſemicirculus per punctum Ε tranſibit. nam ſi jungamus ΕΛ, angulus ΛΕΚ fiet rectus, cum triangulum ΕΛΚ æquiangulum ſit unicuique triangulorum ΕΛΘ, ΕΚΘ. ſi igitur manente ΚΛ ſemicirculus converſus in eundem rurſus locum reſtituatur à quo cœpit moveri, etiam per puncta Ζ, Η tranſibit, junctis ΖΛ, ΛΗ, & rectis ſimiliter factis ad puncta Ζ, Η angulis; atque pyramis comprehendetur data ſphæra, etenim ſphæræ diameter ΛΚ eſt æqualis diametro datæ ſphæræ ΑΒ, quoniam ipſi quidem ΑΓ ponitur æqualis ΚΘ, ipſi vero ΓΒ æqualis ΘΛ.

DICO denique ſphæræ diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris pyramidis.

Quoniam enim ΑΓ [per conſtr.] dupla eſt ipſius ΓΒ, erit ΑΒ ipſius ΒΓ tripla: ergo convertendo, ΑΒ ſeſquialtera eſt ipſius ΑΓ. ut autem ΒΑ ad ΑΓ ita eſt quadratum ex ΒΑ

ΔΕΙ δὴ αὐτῷ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ ΘΚ εὐθεῖα ἡ ΘΚ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΘΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΚΘ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΘΛ· ἐστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΚΘΕ, ΕΘΛ γωνιῶν· τὸ ἄρα διὰ τοῦ Κ Λ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. ἐπεὶ ἤτοι ἐὰν διὰ τριῶν εὐθειῶν τῶν ΕΛ, ὀρθὴ γώνιον ἡ ὑπὸ ΛΕΚ γωνία, διὰ τὸ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν ΕΛΘ, ΕΘΚ τριγώνων. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΛ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η σημείων, διὰ δὲ τῶν ΖΛ, ΛΗ, καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνιῶν· καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ, ἡ γὰρ ΚΛ τῆς σφαίρας διαμέτρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ΑΒ. ἐπεὶ οὖν τῇ μὲν ΑΓ ἴση κεῖται ἡ ΚΘ, τῇ δὲ ΓΒ ἡ ΘΛ.

ΑΕΓΩ δὴ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πυραμίδος.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἡμιολία ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΑΓ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ

πρὸς

πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἐπειδήπερ ὀρθογωνίου τοῦ ΒΔ ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ ἴσως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΑΒ, ΔΑΓ τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην ἴσως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΒΑ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΑΔ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

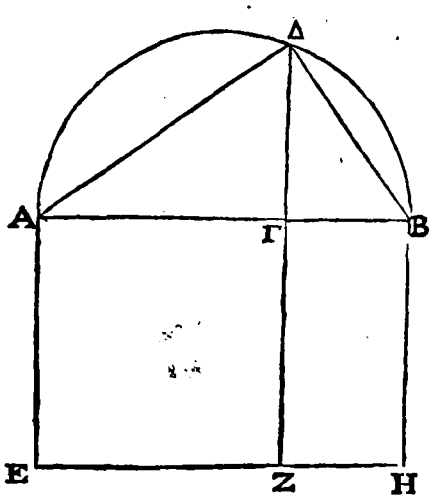
ad quadratum ex ΑΔ, quia, juncta ΒΔ, eſt [per 8. 6.] ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΔΑ ad ΑΓ, ob ſimilitudinem triangulorum ΔΑΒ, ΔΑΓ, & quod [per cor. 20. 6.] ut prima ad tertiam ita quadratum ex prima ad quadratum ex ſecunda: ergo quadratum ex ΒΑ ſeſquialterum eſt quadrati ex ΑΔ. ſed eſt ΒΑ quidem datæ ſphæræ diameter, ΑΔ vero æqualis lateri pyramidis.

Sphæræ igitur diameter potentia ſeſquialtera eſt lateris pyramidis. quod erat demonſtrandum.

ΑΗΜΜΑ.

Δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφὴ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον τὸ ΕΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΔΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΑΓ τριγώνῳ, ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΒΖ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΕΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΓ, τὸ δὲ ΒΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ἡ γὰρ ΔΓ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΓ, ΓΒ μέση ἀνάλογόν ἐστι, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΔΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



LEMMA.

Demonſtrandum autem eſt, ut ΑΒ ad ΒΓ ita eſſe quadratum ex ΑΔ ad quadratum ex ΔΓ.

Exponatur enim ſemicirculi figura, jungaturque ΔΒ, & ex ΑΓ deſcribatur quadratum ΒΓ, & parallelogrammum ΖΒ compleatur. quoniam igitur eſt [per 4. 6.] ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΔΑ ad ΑΓ, propterea quod triangulum ΔΑΒ æquiangulum eſt triangulo ΔΑΓ; erit [per 17. 6.] rectangulum ſub ΒΑ, ΑΓ quadrato ex ΑΔ æquale. quoniam vero eſt [per 1. 6.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita parallelogrammum ΕΒ ad parallelogrammum ΒΖ; atque eſt parallelogrammum quidem ΕΒ quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ, eſt enim ΕΑ æqualis ΑΓ; parallelogrammum vero ΒΖ æquale eſt ei quod ſub ΑΓ, ΓΒ continetur: erit ut ΑΒ ad ΒΓ ita rectangulum contentum ſub ΒΑ, ΑΓ ad contentum ſub ΑΓ, ΓΒ. eſt autem rectangulum ſub ΒΑ, ΑΓ æquale quadrato ex ΑΔ, & rectangulum ſub ΑΓ, ΓΒ quadrato ex ΔΓ æquale; perpendicularis enim ΔΓ [per 1. 6.] media eſt proportionalis inter baſis portiones ΑΓ, ΓΒ, cum angulus ΑΔΒ ſit rectus: quare ut ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΑΔ ad quadratum ex ΔΓ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν ἣ καὶ τὴν πυραμίδα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

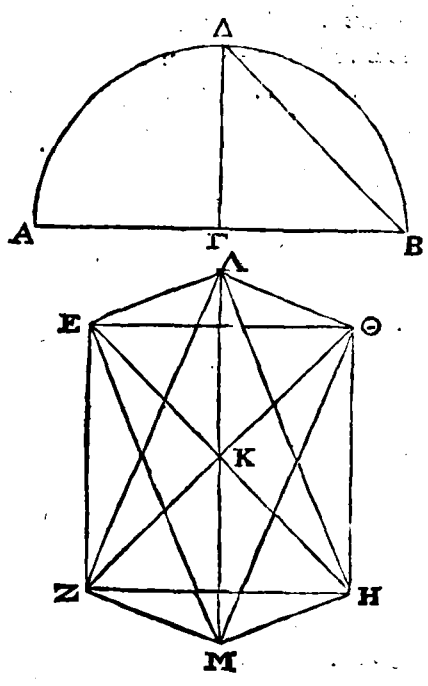
PROP. XIV. PROBL.

Octaedrum conſtituere, & eadem ſphæra comprehendere qua & pyramidem: atque demonſtrare ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris ipſius octaedri.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ, ΕΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΚΛ,

EXponatur datæ ſphæræ diameter ΑΒ, & in Γ bifariam ſecetur, deſcribaturque ſuper ΑΒ ſemicirculus ΑΔΒ, & à puncto Γ ipſi ΑΒ ad rectos angulos ducatur ΓΔ, & ΔΒ jungatur; & exponatur quadratum ΕΖΗΘ habens unumquodque latus æquale ipſi ΒΔ, & junctis ΘΖ, ΕΗ erigatur à puncto Κ ipſi plano quadrati ΕΖΗΘ ad rectos angulos ΚΛ, produ-

caturque ad alteras partes plani ut ΚΜ, & auferatur ab utraque rectarum linearum ΚΛ, ΚΜ uni ipſarum ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ æqualis utraque ΚΑ, ΚΜ, & jungantur ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. quoniam igitur ΚΒ eſt æqualis ΚΘ, atque eſt angulus ΕΚΘ rectus; erit [per 47. 1.] quadratum ex ΘΕ quadrati ex ΕΚ duplum. rurſus, quoniam ΑΚ eſt æqualis ΚΕ, & angulus ΑΚΕ rectus; erit quadratum ex ΕΑ duplum quadrati ex ΕΚ. oſtenſum eſt autem & quadratum ex ΘΕ quadrati ex ΕΚ duplum: ergo quadratum ex ΑΕ æquale eſt quadrato ex ΕΘ, & ΑΕ ipſi ΕΘ æqualis. eadem ratione & ΑΘ eſt æqualis ΘΕ: æquilaterum igitur eſt ΑΕΘ triangulum. ſimiliter oſtendemus & unumquodque reliquorum triangulorum, quorum baſes ſunt latera quadrati ΕΖΗΘ vertices autem Λ, Μ puncta, æquilaterum eſſe: octaedrum igitur conſtitutum eſt, quod octo triangulis æquilateris continetur.



Oportet vero ipſum & data ſphæra comprehendere; & demonſtrare ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris octaedri.

Quoniam enim tres rectæ lineæ ΑΚ, ΚΜ, ΚΒ inter ſe æquales ſunt, ſemicirculus ſuper ΑΜ deſcriptus etiam per punctum Ε tranſibit. præterea ſi manente ΑΜ, converſus ſemicirculus in eundem locum reſtituatur à quo cœpit moveri, tranſibit etiam per puncta Ζ, Η, Θ; atque erit octaedrum ſphæra comprehenſum. dico etiam ipſum comprehenſum eſſe data ſphæra. quoniam enim ΑΚ eſt æqualis ΚΜ, communis autem ΚΕ, & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] baſis ΑΕ baſi ΕΜ æqualis. & quoniam [per 31. 3.] rectus eſt ΑΕΜ angulus, eſt enim in ſemicirculo; erit [per 47. 1.] quadratum ex ΑΜ quadrati ex ΑΕ duplum. rurſus, quoniam [per conſtr.] ΑΓ eſt æqualis ΓΒ; erit ΑΒ dupla ipſius ΒΓ. ut autem ΑΒ ad ΒΓ ita [per 8, & 20. 6.] quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΔ: duplum igitur eſt quadratum ex ΑΒ quadrati ex ΒΔ. oſtenſum autem eſt & quadratum ex ΑΜ quadrati ex ΑΕ duplum. & eſt quadratum ex ΒΔ æquale quadrato ex ΑΕ; poſita eſt enim ΕΘ ipſi ΔΒ æqualis: ergo quadratum ex ΑΒ eſt æquale quadrato ex ex ΑΜ; ac propterea ipſa ΑΒ eſt æqualis ΑΜ. eſt autem ΑΒ diameter datæ ſphæræ: quare ΑΜ eſt æqualis datæ ſphæræ diametro.

Octaedrum igitur comprehenſum eſt data ſphæra: & ſimul demonſtratum eſt ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris ipſius octaedri. quod erat faciendum.

καὶ διήχθω ἀπὸ τὰ ἕτερα μέρη ἡ ὁποτέρᾳ ὡς ἡ ΚΜ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΚΛ, ΚΜ μιᾷ τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ ἴση ἑκατέρα τῶν ΚΑ, ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΚΘ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΚΘ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΕ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΛΚΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἴση ἄρα ἡ ΛΕ τῇ ΕΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΘΕ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΕΘ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ Λ, Μ σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνίσταται, ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

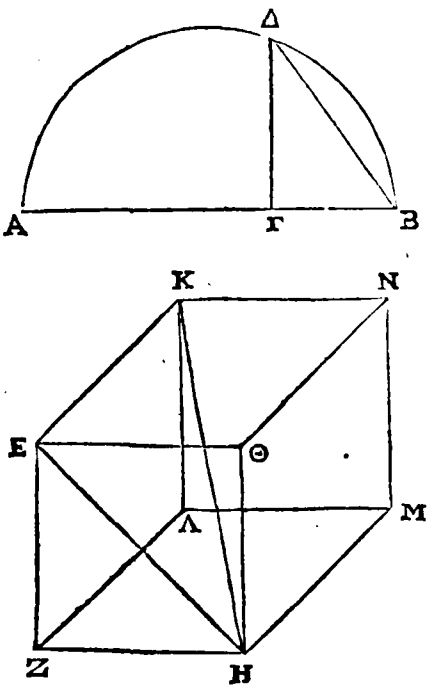
Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΜ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. καὶ διὰ τὰ αὐτά, ἐὰν μενούσης τῆς ΛΜ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ὁποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η, Θ σημείων, καὶ ἔσται σφαῖρα περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΚΜ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΛΕ βάσει τῇ ΕΜ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΕΜ γωνία, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιόν τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, διπλασία ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΕ· ἴση γὰρ κεῖται ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΜ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΛΜ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ· καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν ἣ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλῆ ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

Ἐκκείσθω ἡ τοῦ δοθέντος σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ ἑκάστης τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ μιᾷ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ ἴση ἑκάστη τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ· κύβος ἄρα συνίσταται ὁ ΖΝ ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον. δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΚΗ, ΕΗ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΚΕΗ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν ΚΕ ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ ΕΗ ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν ΕΗ εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΗ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΖΗ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΖΛ, ΖΕ, καὶ πρὸς τὸ ΖΚ ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ΖΗ· ὥστε καὶ ἐπιζευγνυμένην τὴν ΖΚ, ἡ ΖΗ ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ΗΚ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΗ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαῖρα περιειλημμένος ὁ κύβος. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ Ζ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΕΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΕ τριπλάσιον. καὶ κεῖται ἴση τῇ ΒΔ ἡ ΚΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ

PROP. XV. PROBL.

Cubum conſtituere & eadem ſphæra comprehendere qua & priores; atque demonſtrare ſphæræ diametrum lateris potentia triplam eſſe.

EXponatur enim datæ ſphæræ diameter AB, & ſecetur in Γ, ita ut AΓ ipſius ΓB ſit dupla; deſcribaturque ſuper AB ſemicirculus AΔB, & à puncto Γ ipſi AB ad rectos angulos ducatur ΓΔ, & ΔB jungatur; deinde exponatur quadratum EZHΘ, habens unumquodque latus æquale ipſi ΔB; & à punctis E, Z, H, Θ quadrati EZHΘ plano ad rectos angulos ducantur EK, ZΛ, HM, ΘN, & auferatur inſuper ab unaquaque rectarum linearum EK, ZΛ, HM, ΘN uni ipſarum EZ, ZH, HΘ, ΘE æqualis unaquæque EK, ZΛ, HM, ΘN; & KΛ, ΛM, MN, NK jungantur: cubus igitur conſtitutus eſt ZN, qui ſex quadratis æqualibus continetur. oportet vero ipſum & ſphæra data comprehendere, & demonſtrare ſphæræ diametrum potentia triplam eſſe lateris ipſius cubi.

Jungantur enim KH, EH. & quoniam rectus eſt KEH angulus, propterea quod & KE perpendicularis ſit ad EH, planum videlicet & [per 3. def. 11.] ad rectam lineam EH; ſemicirculus ſuper KH deſcriptus [per 31. 3.] per punctum E tranſibit. rurſus, quoniam ZH perpendicularis eſt ad utramque ipſarum ZΛ, ZE; & [per 4. 11.] ad ZK planum eſt perpendicularis: quare ſi jungamus ZK, ipſa ZH ad ZK erit perpendicularis; ac propterea rurſus ſuper HK deſcriptus ſemicirculus tranſibit per punctum Z. ſimiliter autem & per reliqua cubi puncta tranſibit. ſi igitur, manente KH, converſus ſemicirculus in eundem rurſus locum reſtituatur, à quo cœpit moveri, erit cubus ſphæra comprehenſus. Dico ipſum & data ſphæra comprehendi. quoniam enim HZ eſt æqualis ZE, atque eſt rectus quiad Z angulus; erit [per 47. 1.] quadratum ex EH quadrati ex EZ duplum. æqualis autem eſt EZ ipſi EK; quadratum igitur ex EH duplum eſt quadrati ex EK: ergo quadrata ex HE, EK, hoc eſt [per 47. 1.] quadratum ex HK, triplum eſt quadrati ex EK. & quoniam [per conſtr.] AB eſt ipſius BΓ tripla, & [per 8. & 20. 6.] ut AB ad BΓ ita quadratum ex AB ad quadratum ex BΔ; erit quadratum ex AB quadrati ex BΔ triplum. oſtenſum eſt autem & quadratum ex HK triplum quadrati ex KE, & poſita eſt KE ipſi BΔ æqualis: ergo & KH eſt

æqualis

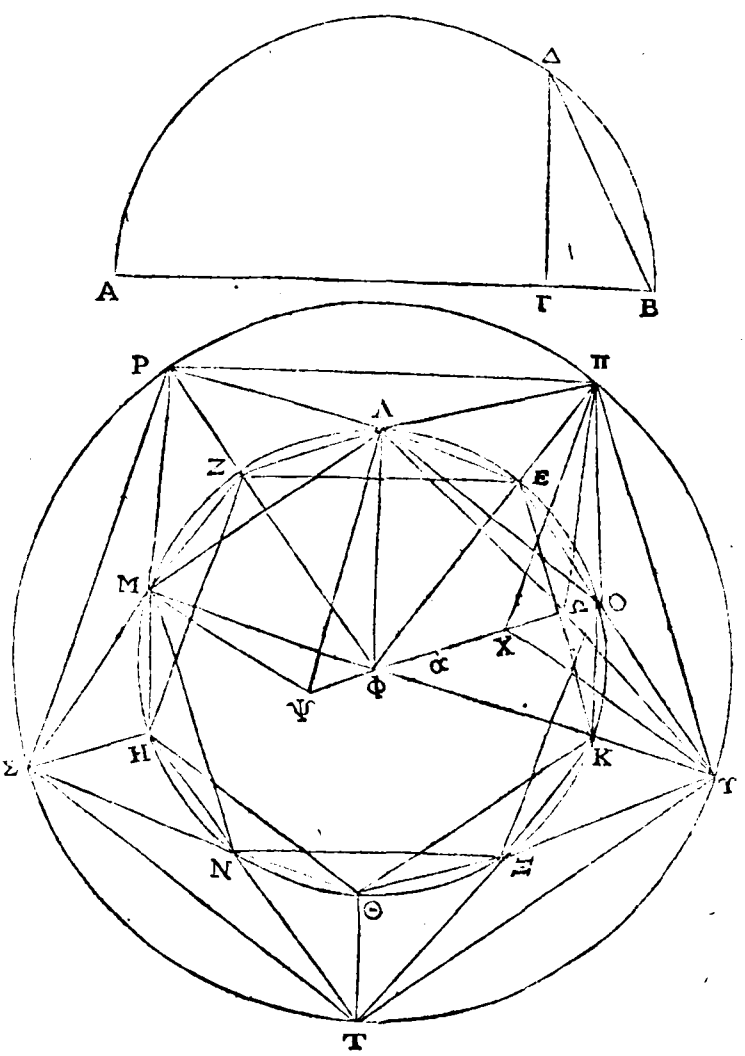
æqualis AB. at vero AB eſt datæ ſphæræ diameter: quare & KH æqualis erit diametro datæ ſphæræ.

Cubus igitur data ſphæra eſt comprehenſus; & ſimul demonſtratum eſt ſphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam eſſe. quod erat faciendum.

PROP. XVI. PROBL.

Icoſaedrum conſtituere & eadem ſphæra comprehendere qua & prædictas figuras; atque etiam demonſtrare icoſaedri latus irrationalem eſſe lineam quæ minor appellatur.

EXponatur datæ ſphæræ diameter AB, ſecetur que in Γ, ita ut AΓ ipſius ΓB ſit quadrupla; & ſuper AB deſcripto ſemicirculo AΔB ducatur à puncto Γ ipſi AB ad rectos angulos recta linea ΓΔ, & ΔB jungatur; deinde exponatur circulus EZHΘK, cujus ea quæ ex centro ſit æqualis ipſi ΔB; deſcribaturque [per 11.4.] in circulo EZHΘK pentagonum æquilaterum & æquiangulum EZHΘK; præterea [per 30.3.] circumferentiæ EZ, ZH, HΘ, ΘK, KE bifariam ſecentur in Λ, M, N, Ξ, O punctis; jungunturque EΛ, ΛZ, ZM, MH, HN, NΘ, ΘΞ, ΞK, KO, OE; & ſimiliter ΛM, MN, NΞ, ΞO, OΛ: æquilaterum igitur eſt ΛMNΞO pentagonum; & recta linea EO eſt decagoni latus. porro à punctis E, Z, H, Θ, K ipſi plano circuli [per 12.11.] ad rectos angulos erigantur EΠ, ZP, HΣ, ΘT, KΥ æquales quidem ei quæ ex centro circuli EZHΘK, & jungantur ΠP, PΣ, ΣT, TΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛP, PM, MΣ, ΣN, NT, TΞ, ΞΥ, ΥO, OΠ. quoniam igitur utraque ipſarum EΠ, KΥ eidem plano eſt ad rectos angulos: erit [per 6.11.] EΠ ipſi KΥ parallela. ſed eſt ipſi quoque æqualis; quæ autem æquales & parallelas ad eaſdem



τῇ AB. καὶ ἔστιν ἡ AB τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ KH ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος· ὃ συναποδεῖξαι δεῖ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τὴν καὶ τὰ προειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

ΕΚκείσθω ἡ τοῦ δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν AΓ τῆς ΓB, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AΔB, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔB, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ EZHΘK, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΔB, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν EZHΘK κύκλον πενταγώνου ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ EZHΘK, καὶ τετμήσθωσαν αἱ EZ, ZH, HΘ, ΘK, KE περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ, M, N, Ξ, O σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EΛ, ΛZ, ZM, MH, HN, NΘ, ΘΞ, ΞK, KO, OE, καὶ ὁμοίως ΛM, MN, NΞ, ΞO, OΛ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛMNΞO πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ EO εὐθεῖα. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν E, Z, H, Θ, K σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ EΠ, ZP, HΣ, ΘT, KΥ ἴσαι ἑκατέρᾳ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ EZHΘK κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠP, PΣ, ΣT, TΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛP, PM, MΣ, ΣN, NT, TΞ, ΞΥ, ΥO, OΠ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν EΠ, KΥ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστί, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ EΠ τῇ KΥ. ἐστὶ δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ

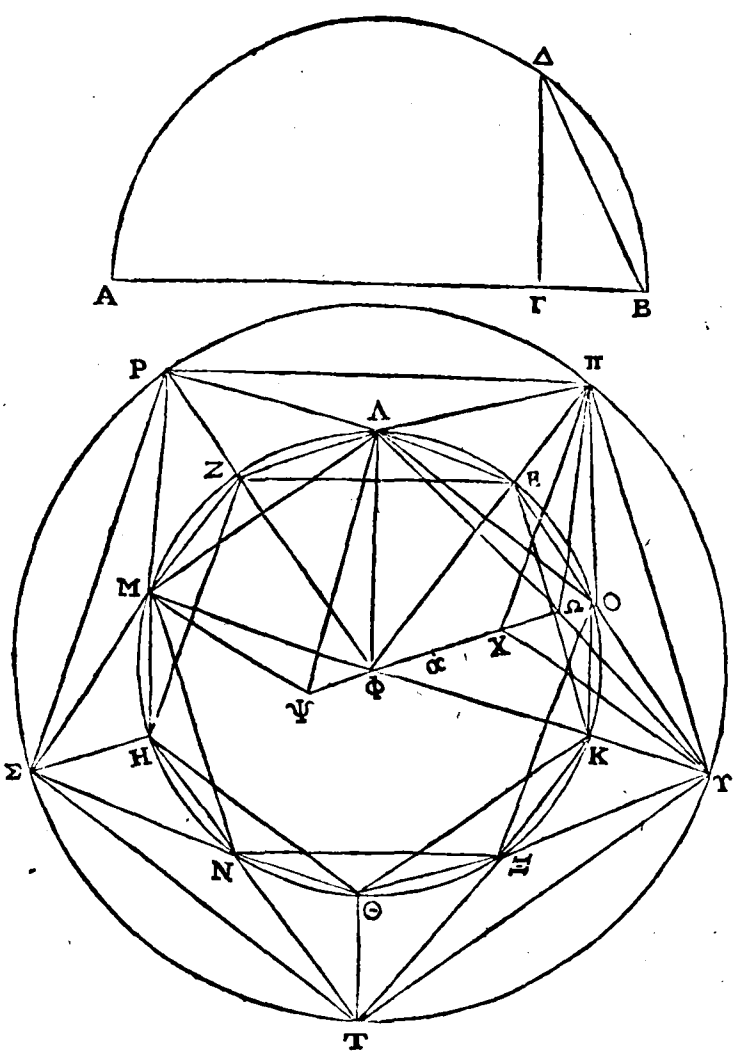
αὐτὰ μέρη ὑπὸ δύο γωνιῶν εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ἡ ΠΥ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση τε ἐστὶ καὶ ὁμοίως κεῖται. πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ ΠΥ, τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον περιγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ πενταγώνου ἐστὶ ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα καὶ τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΕΟ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρά, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πεντάγωνος· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστον τῶν ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν ΠΛ, ΠΟ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΟ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΛΟ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστον τῶν ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΗΘΚ τὸ Φ σημεῖον. καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεσάτω ἡ ΦΩ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἀφηρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΦΧ, ΠΕ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΠΕ. ἐσταὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἑξαγώνου δὲ ἡ ΕΦ· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστίν, ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καὶ ἔστιν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσου ἑξαγώνου· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΥΧΩ· πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εὐθεῖαι κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΨ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΜΨ ἴσου ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΛΜΨ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ κορυφὴ δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν· συνίσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΔΕΙ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

partes conjunguntur rectæ lineæ & ipſæ [per 33. 1.] æquales & parallelæ ſunt: ergo ΠΥ ipſi ΕΚ æqualis eſt & parallela. ſed ΕΚ eſt latus pentagoni æquilateri; ergo & ΠΥ eſt pentagoni æquilateri latus in circulo ΕΖΗΘΚ deſcripti. eadem ratione & unaquæque ipſarum ΡΠ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ eſt latus pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti: æquilaterum igitur eſt ΠΡΣΤΥ pentagonum. & quoniam [per conſtr.] ΠΕ eſt hexagoni quidem latus, ΕΟ vero latus decagoni, atque eſt rectus ΠΕΟ angulus; erit ΠΟ latus pentagoni. etenim [per 10. 13.] latus pentagoni poteſt & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum. eadem ratione & ΟΥ eſt pentagoni latus; eſt autem & ΠΥ latus pentagoni: ergo ΠΟΥ eſt triangulum æquilaterum. ob eandem quoque cauſam unumquodque triangulorum ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ eſt æquilaterum. quoniam igitur utraque ipſarum ΠΛ, ΠΟ oſtenſa eſt latus pentagoni, atque eſt ΛΟ latus pentagoni; erit ΠΛΟ æquilaterum triangulum. eadem ratione & unumquodque triangulorum ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ æquilaterum eſt. ſumatur [per 1. 3.] centrum circuli ΕΖΗΘΚ, quod ſit punctum Φ; & à puncto Φ ipſi circuli plano ad rectos angulos erigatur ΦΩ, & ad alteras partes producatur, ut ΦΨ; dein auferatur hexagoni quidem latus ΦΧ, decagoni vero utraque ipſarum ΦΨ, ΧΩ; & jungantur ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. quoniam igitur utraque ipſarum ΦΧ, ΠΕ circuli plano eſt ad rectos angulos; erit [per 6. 11.] ΦΧ ipſi ΠΕ parallela. ſunt autem [per conſtr.] & æquales: ergo [per 33. 1] ΕΦ, ΠΧ & æquales ſunt & parallelæ. verum ΕΦ eſt hexagoni latus: hexagoni igitur latus eſt & ΠΧ. quoniam igitur hexagoni quidem latus eſt ΠΧ, decagoni vero ΧΩ, & rectus ΠΧΩ angulus; erit [per 10. 13.] ΠΩ latus pentagoni. eadem ratione & ΥΩ eſt pentagoni latus: quoniam ſi jungamus ΦΚ, ΧΥ, & æquales & oppoſitæ ſunt, atque eſt ΦΚ ex centro circuli, videlicet hexagoni latus: ergo & ΧΥ eſt latus hexagoni. decagoni autem latus eſt ΧΩ, & rectus angulus eſt ΥΧΩ: pentagoni igitur latus eſt ΥΩ. ſed eſt etiam ΠΥ latus pentagoni: quare æquilaterum eſt ΠΥΩ triangulum. eadem ratione & æquilaterum eſt unumquodque reliquorum triangulorum, quorum baſes ſunt ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ rectæ lineæ, vertex autem Ω punctum. rurſus, quoniam hexagoni latus eſt ΦΛ, decagoni vero ΦΨ, & angulus ΛΦΨ rectus; erit [per 10. 13.] ΛΨ latus pentagoni. eadem ratione ſi jungamus ΜΦ, quæ eſt latus hexagoni, concludetur & ΜΨ pentagoni latus eſſe. eſt autem & ΛΜ pentagoni latus: æquilaterum igitur eſt ΛΜΨ triangulum. ſimiliter oſtendetur & æquilaterum eſſe unumquodque reliquorum triangulorum, quorum baſes ſunt ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, vertex autem Ψ punctum: conſtitutum igitur eſt icoſaedrum viginti triangulis æquilateris contentum.

OPORTET vero ipſum ſphæra data comprehendere, & demonſtrare icoſaedri latus eſſe lineam irrationalem quæ minor appellatur.

Quoniam enim hexagoni latus eſt Φ X, decagoni vero X Ω, recta linea Φ Ω [per 9. 13.] extrema ac media ratione ſecta eſt in X, & Φ X eſt major portio : eſt igitur [per 3. def. 6.] ut Ω Φ ad Φ X ita Φ X ad X Ω. atque [per conſtr.] eſt Φ X ipſi Φ Λ æqualis, & X Ω ipſi Φ Ψ : quare ut Ω Φ ad Φ Λ ita Φ Λ ad Φ Ψ. ſunt autem anguli Ω Φ Λ, Λ Φ Ψ recti. ſi igitur jungamus rectam lineam Λ Ω, erit [per 6. 6.] Ψ Λ Ω rectus angulus ob ſimilitudinem triangulorum Ψ Λ Φ, Φ Λ Ω : ergo [per 31. 3.] ſemicirculus ſuper Ψ Ω deſcriptus etiam per Λ tranſibit. eadem ratione quoniam eſt ut Ω Φ ad Φ X ita Φ X ad X Ω, & æqualis eſt [per conſtr.] Ω Φ quidem ipſi Ψ X; Φ X vero ipſi X Π; erit ut Ψ X ad Π X ita Π X ad X Ω. ideoque ſi rurſus jungamus Π Ψ, erit angulus qui ad Π rectus : ſemicirculus igitur deſcriptus ſuper Ψ Ω tranſibit & per Π. quod ſi manente Ψ Ω converſus ſemicirculus in eundem rurſus locum reſtituatur à quo cœpit moveri, etiam per Π & per reliqua icoſaedri puncta tranſibit ; atque erit icoſaedrum ſphæra comprehenſum. Dico & ipſum data comprehendi. ſecetur enim Φ X bifariam in α. & quoniam recta linea Ω Φ extrema ac media ratione ſecta eſt in X, & Ω X eſt minor ipſius portio, ipſa Ω X aſſumens dimidiam majoris portionis, videlicet X α, quintuplum poterit [per 3. 13.] quadrati ejus quod à dimidia majoris portionis deſcribitur : quadratum igitur ex Ω α quadrati ex α X quintuplum eſt. ſed [per 3. 13.] ipſius quidem α Ω dupla eſt Ω Ψ ; ipſius vero α X dupla X Φ : ergo quadratum ex Ω Ψ quintuplum eſt quadrati ex Φ X. & quoniam A Γ quadrupla eſt ipſius Γ B, erit A B ipſius B Γ quintupla. ut autem A B ad B Γ ita [per 8. & 20. 6.] quadratum ex A B ad quadratum ex B Δ : quadratum igitur ex A B quadrati ex B Δ eſt quintuplum. oſtenſum autem eſt & quadratum ex Ω Ψ quintu-



Επειδὴ γὰρ ἑξαγώνου μὲν ἡ Φ X, δεκαγώνου δὲ ἡ X Ω· ἡ Φ Ω ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένη κατὰ τὸ X, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ Φ X· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ω Φ πρὸς τὴν Φ X οὕτως ἡ Φ X πρὸς τὴν X Ω. ἴση δὲ ἡ μὲν Φ X τῇ Φ Λ, ἡ δὲ X Ω τῇ Φ Ψ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ω Φ πρὸς τὴν Φ Λ οὕτως ἡ Φ Λ πρὸς τὴν Φ Ψ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ Ω Φ Λ, Λ Φ Ψ γωνίαι· ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν Λ Ω εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ Ψ Λ Ω γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν Ψ Λ Φ, Φ Λ Ω τριγώνων· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς Ψ Ω γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Ω Φ πρὸς τὴν Φ X οὕτως ἡ Φ X πρὸς τὴν X Ω, ἴση δὲ ἡ μὲν Ω Φ τῇ Ψ X, ἡ δὲ Φ X τῇ X Π· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ψ X πρὸς τὴν Π X οὕτως ἡ Π X πρὸς τὴν X Ω. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν Π Ψ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς Ψ Ω γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς Ψ Ω ωφελενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὰ αὐτὰ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ δὲ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων δὲ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαῖρα περιειλημμένον τὸ εἰκοσαέδρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὴν δοθεῖσαν τετμήσθω γὰρ ἡ Φ X δίχα κατὰ τὸ α. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ Ω Φ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένη κατὰ τὸ X, καὶ τὸ ἔλαττον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ Ω X· ἡ ἄρα Ω X τετραπλασίων τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τοῦ X α πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ω α τοῦ ἀπὸ τῆς α X. καὶ ἔστι τῆς μὲν α Ω διπλῆ ἡ Ω Ψ, τῆς δὲ α X διπλῆ ἡ X Φ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ω Ψ τοῦ ἀπὸ τῆς Φ X. καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἡ A Γ τῆς Γ B, πενταπλασίων ἄρα ἡ A B τῆς B Γ ἐστίν. ὡς δὲ ἡ A B πρὸς τὴν B Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B Δ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς A B τοῦ ἀπὸ τῆς B Δ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ω Ψ πενταπλάσιον

πενταπλάσιον ἔσ ἀπὸ τ̃ ΦΧ, καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΦΧ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τ̃ κέντρου τ̃ κύκλου τ̃ ΕΖΗΘΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΨΩ. καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τ̃ δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τ̃ δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ· τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι ἡ τ̃ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τ̃ σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει πενταπλάσιον τῆς ἐκ τ̃ κέντρου τ̃ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τ̃ κέντρου τ̃ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτ̃ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὸν ἔχοντα τὸν διάμετρον πενταγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τ̃ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἡ δὲ τ̃ ΕΖΗΘΚ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τ̃ εἰκοσαέδρου ἐστίν· ἡ ἄρα τ̃ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τ̃ σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλάσιόν ἐστι τ̃ ἐκ τ̃ κέντρου τ̃ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τ̃ σφαίρας διάμετρος συγκεῖται ἔκ τε τ̃ ἑξαγώνου καὶ τ̃ δύο τῶν δεκαγώνου τ̃ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

plum quadrati ex ΦΧ, atque est ΑΒ æqualis ΦΧ; utraque enim ipsarum est [per constr.] æqualis ei quæ ex centro circuli ΕΖΗΘΚ: quare & ΑΒ est æqualis ΨΩ. est autem ΑΒ datæ sphæræ diameter; quare & ΨΩ erit æqualis diametro datæ sphæræ; ergo icosaedrum comprehensum est data sphæra.

DICO insuper icosaedri latus esse irrationalem lineam quæ minor appellatur. quoniam enim sphæræ diameter est rationalis, atque est potentia quintupla ejus quæ ex centro ΕΖΗΘΚ circuli; erit [per 6. def. 10.] & quæ ex centro circuli ΕΖΗΘΚ rationalis: quare & diameter ipsius rationalis erit. si autem in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum describatur, erit [per 11.13.] latus pentagoni linea irrationalis quæ minor appellatur. sed pentagoni ΕΖΗΘΚ latus est latus icosaedri: ergo icosaedri latus est linea irrationalis quæ minor appellatur. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

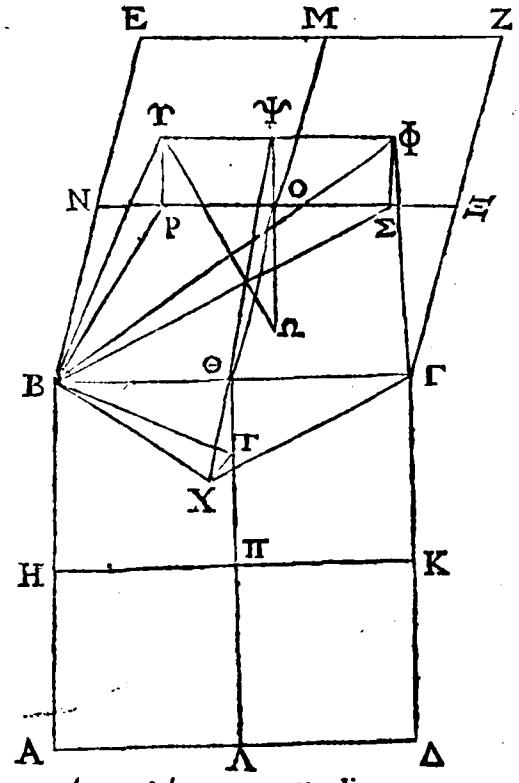
Ex hoc manifestum est quod sphæræ diameter potentia quintupla est ejus quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur; & quod sphæræ diameter composita est ex latere hexagoni & duobus decagoni lateribus, quæ in eodem circulo describuntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν ἣ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τ̃ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

PROP. XVII. PROBL.

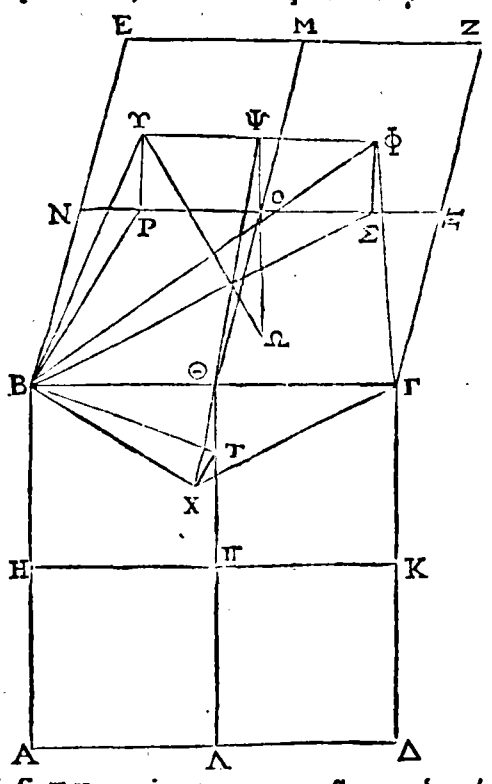
Dodecaedrum constituere, & eadem sphæra comprehendere qua & prædictas figuras; atque etiam demonstrare dodecaedri latus esse irrationalem quæ apotome appellatur.



ΚΕίσθωσαν τ̃ προειρημένης κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, καὶ τετμήσθω ἑκάτερα τ̃ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ Ρ, Σ, Τ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τ̃ Ρ, Σ, Τ σημείων τοῖς τ̃ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τ̃ κύβου αἱ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι τ̃ ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ· λέγω ὅτι τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστιν. ἐπεὶ

EXponantur prædicti [ad 15.13.] cubi duo plana ad rectos angulos inter se ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, & secetur unumquodque ipsorum laterum ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ bifariam in punctis Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, atque ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ jungantur; deinde secentur rectæ lineæ ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ extrema ac media ratione in Ρ, Σ, Τ punctis, sintque ipsorum majores portiones ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, & à punctis Ρ, Σ, Τ ad rectos angulos cubi planis [per 12.11.] erigantur ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ ad exteriores partes cubi, quæ ipsis ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ æquales ponantur; jungunturque ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ: dico pentagonum ΥΒΧΓΦ æquilaterum esse, & in uno plano, & præterea æquiangulum. jun-

ſantur enim PB, ΣB, ΦB. & quoniam recta linea NO extrema ac media ratione ſecta eſt in P, & OP eſt major ipſius portio; erunt [per 4.13.] quadrata ex ON, NP tripla quadrati ex OP. æqualis autem eſt ON ipſi NB, & OP ipſi PT: quadrata igitur ex BN, NP quadrati ex PT ſunt tripla. ſed quadratis ex BN, NP æquale eſt [per 47. 1.] quadratum ex BP: ergo quadratum ex BP triplum eſt quadrati ex PT: quare quadrata ex BP, PT quadrati ex PT ſunt quadrupla. quadratis autem ex BP, PT æquale eſt quadratum ex BT: ergo quadratum ex BT quadruplum eſt quadrati ex TP: quare [per 20.6.] BT eſt dupla ipſius TP. verum ΦT ipſius TP dupla eſt, quoniam & PΣ eſt dupla ipſius PO, hoc eſt ipſius PT: ergo BT eſt æqualis TΦ. ſimiliter demonſtrabitur & unaquæque ipſarum BX, XΓ, ΓΦ utrivis BT, TΦ æqualis: æquilaterum igitur eſt BTΦΓX pentagonum. dico & in uno eſſe plano. ducatur enim à puncto O ipſa OΨ utrique ipſarum PT, ΣΦ parallela ad exteriores cubi partes, & jungantur ΨΘ, ΘX: dico ΨΘX rectam lineam eſſe. nam cum ΘΠ extrema ac media ratione ſecta ſit in T, & ΠT ſit major ipſius portio; erit [per 3. def. 6.] ut ΘΠ ad ΠT ita ΠT ad TΘ. æqualis autem eſt ΘΠ quidem ipſi ΘO; ΠT vero utrivis ipſarum TX, OΨ: eſt igitur ut ΘO ad OΨ ita XT ad TΘ. ſed [per 6. 11.] ΘO parallela eſt ipſi TX, quia utraque ipſarum plano BΔ eſt ad rectos angulos; TΘ vero eſt parallela OΨ, quia utraque ipſarum eſt ad rectos angulos plano BZ. ſi autem duo triangula componantur ad unum angulum, ut ΨOΘ, ΘTX, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera etiam ſint parallela, reliqua ipſorum latera [per 32. 6.] in directum ſibi ipſis conſtituta erunt: ergo ΨΘ eſt in directum ipſi ΘX. omnis autem recta linea eſt in uno plano: in uno igitur plano eſt TBXΓΦ pentagonum. dico etiam & æquiangulum eſſe. quoniam enim recta linea NO extrema ac media ratione ſecta eſt in P, & OP eſt major portio: erit [per 5. 13.] ut utraque NO, OP ad ON ita NO ad OΣ. æqualis autem eſt PO ipſi OΣ: quare ut ΣN ad NO ita NO ad OΣ: ergo [per 3. def. 6.] NΣ extrema ac media ratione ſecta eſt in O, & major portio eſt NO: quadrata igitur ex NΣ, ΣO [per 4. 13.] quadrati ex ON ſunt tripla. æqualis autem eſt ON ipſi NB, & OΣ ipſi ΣΦ: ergo quadrata ex NΣ, ΣΦ tripla



ζεύχθωσαν γὰρ αἱ PB, ΣB, ΦB. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ NO ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ P, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ OP· τὰ ἄρα ἀπὸ τ ON, NP τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τ OP. ἴση δὲ ἡ μὲν ON τῇ NB, ἡ δὲ OP τῇ PT· τὰ ἄρα ἀπὸ τ BN, NP τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τ PT. τοῖς δὲ ἀπὸ τ BN, NP τὸ ἀπὸ τ BP ἐστιν ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τ BP τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τ PT· ὥστε τὰ ἀπὸ τ BP, PT τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τ PT. τοῖς δὲ ἀπὸ τ BP, PT ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τ BT· τὸ ἄρα ἀπὸ τ BT τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τ PT· διπλῆ ἄρα ἡ BT τ TP. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΦT τ TP διπλῆ, ἐπεὶ περ καὶ ἡ PΣ τ PO, τουτέστι τ PT ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ BT τῇ TΦ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τ BX, XΓ, ΓΦ ἑκατέρᾳ τ BT, TΦ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ BTΦΓX πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ O ἑκατέρα τῶν PT, ΣΦ ᾠδήποτε ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου ἡ OΨ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΘ, ΘX· λέγω ὅτι ἡ ΨΘX εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ T, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΠT· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΠ πρὸς τὴν ΠT οὕτως ἡ ΠT πρὸς τὴν TΘ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΘΠ τῇ ΘO, ἡ δὲ ΠT ἑκατέρα τ TX, OΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘO πρὸς τὴν OΨ οὕτως ἡ XT πρὸς τὴν TΘ. καὶ ἔστι ᾠδαλλήλους ἡ μὲν ΘO τῇ TX, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ BΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ δὲ TΘ τῇ OΨ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ BZ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν (ὡς τὰ ΨOΘ, ΘTX) τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ ᾠδαλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσονται· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΨΘ τῇ ΘX. πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ TBXΓΦ πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ NO ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ P, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ OP, ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ NO, OP πρὸς τὴν ON οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OΣ. ἴση δὲ ἡ PO τῇ OΣ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣN πρὸς τὴν NO οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OΣ· ἡ NΣ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ O, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ NO· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν NΣ, ΣO τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ON. ἴση δὲ ἡ μὲν ON τῇ NB, ἡ δὲ OΣ τῇ ΣΦ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς NΣ, ΣΦ τετράγωνα τριπλάσιά

ἐστι

ἐστὶ τῆ ἀπὸ τῆς ΝΒ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΦΣ, ΣΝ, ΝΒ πτερπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΣΝ, ΝΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΣ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΣ, ΣΦ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΦΒ, ὀρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ ΦΣΒ γωνία, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· διπλῆ ἄρα ἡ ΦΒ τῆ ΒΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῆ ΒΝ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΦΒ τῆ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΥ, ΥΦ δυσὶ ταῖς ΒΧ, ΧΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΦΒ βάσει τῆ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΥΦ γωνίᾳ τῆ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΥΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῆ ὑπὸ ΒΧΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ πεντάγωνον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ ἄρα ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἐπὶ μιᾶς τῶν κύβου πλευρᾶς τῆς ΒΓ. ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συναφθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ιβ'. πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

ΔΕΙ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρα περιλαβεῖν τῆ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γάρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΨΩ· συμβάλλει ἄρα ἡ ΨΩ τῆ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τεμνουσιν ἀλλήλας, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ προπεπερασμένῳ θεωρήματι τοῦ ια'. βιβλίου. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΟΩ ἡμίσεια πλευρᾶς τοῦ κύβου. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΥΩ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῆ ΨΩ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν ΝΟ τῆ ΟΩ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΨΟ τῆ ΟΣ· ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ ΟΣ τῆ ΨΥ, ἐπεὶ καὶ τῆ ΡΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΥΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΥΩ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρα περιλαβεῖν, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. αἱ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καὶ ἔστιν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἡ ἄρα ΥΩ ἴση ἐστὶ τῆ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. καὶ ἔστι τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ Υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῆ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῆ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκαέδρον τῆ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον τετμημένης, sunt quadrati ex NB: quapropter quadrata ex ΦΣ, ΣΝ, NB quadrati ex NB sunt quadrupla. sed [per 47.1.] quadratis ex ΣN, NB æquale est quadratum ex BΣ: quadrata igitur ex BΣ, ΣΦ, hoc est quadratum ex ΦB, quia angulus ΦΣB est rectus, quadruplum est quadrati ex NB: ideoque ipsa ΦB ipsius BN est dupla. est autem & BΓ dupla ipsius BN: ergo ΦB est æqualis BΓ. & quoniam duæ BΥ, ΥΦ duabus BX, XΓ æquales sunt, & basis ΦB æqualis basi BΓ: erit [per 8. 1.] angulus BΥΦ angulo BXΓ æqualis. similiter ostendemus & ΥΦΓ angulum æqualem esse angulo BXΓ: tres igitur anguli BXΓ, BΥΦ, ΥΦΓ inter se æquales sunt. si autem pentagoni æquilateri tres anguli sint æquales [per 7. 13.] pentagonum æquiangulum erit: æquiangulum igitur est pentagonum BΥΦΓX. ostensum est autem & æquilaterum: ergo pentagonum BΥΦΓX æquilaterum est & æquiangulum; atque est super unum cubi latus BΓ. si igitur in unoquoque duodecim cubi laterum eadem constituamus, figura solida constituetur duodecim pentagonis æquilateris & æquiangulis contenta.

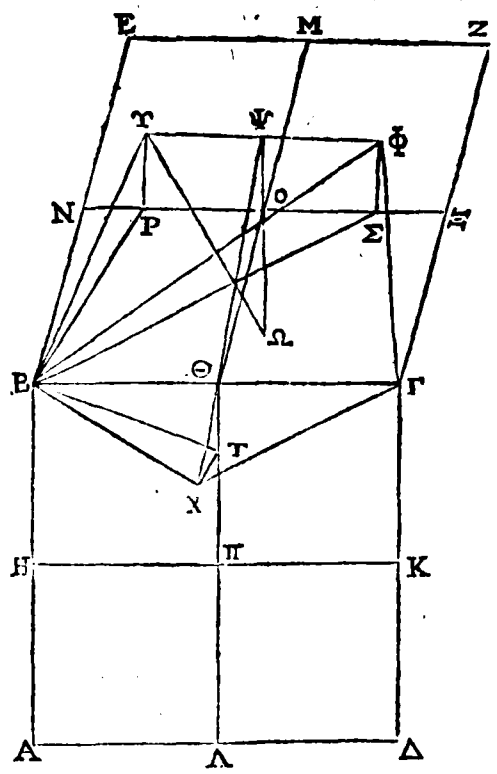
OPORTET autem ipsum & data sphæra comprehendere; atque demonstrare dodecaedri latus esse irrationalem lineam quæ apotome appellatur.

Producatur enim ΨO, & sit ΨΩ: occurrit igitur ΨΩ diametro cubi, & bifariam se mutuo secant, hoc enim ostensum est penultimo theoremate undecimi libri. secent in Ω: ergo Ω est centrum sphæræ quæ cubum comprehendit, & OΩ dimidium lateris cubi. jungantur ΥΩ. & quoniam recta linea NΣ extrema ac media ratione secta est in O, & NO est ipsius portio major; erunt [per 4. 13.] quadrata ex NΣ, ΣO tripla ejus quod fit ex NO. æqualis autem est NΣ ipsi ΨΩ, quoniam & NO ipsi OΩ est æqualis, & [per constr.] ΨO ipsi OΣ; sed & OΣ quidem est æqualis ΨΥ, quoniam & ipsi PO: quadrata igitur ex ΩΨ, ΨΥ tripla sunt quadrati quod fit ex NO. sed [ad 47.1.] quadratis ex ΩΨ, ΨΥ æquale est quadratum ex ΥΩ: ergo quadratum ex ΥΩ triplum est quadrati ex NO. est autem quæ ex centro sphæræ cubum comprehendentis potentia tripla dimidii lateris cubi, prius enim [ad 15. 13.] ostensum est cubum constituere, & sphæra comprehendere, atque demonstrare sphæræ diametrum potentia triplam esse lateris cubi. si autem sit tota totius, erit & dimidia dimidiæ: & est NO dimidia lateris cubi; ergo ΥΩ est æqualis ei quæ est ex centro sphæræ cubum comprehendentis. estque Ω centrum sphæræ comprehendentis cubum: quare punctum Υ est ad sphæræ superficiem. similiter demonstrabimus & unumquemque reliquorum angulorum dodecaedri esse ad superficiem sphæræ: dodecaedrum igitur est data sphæra comprehensum.

DICO dodecaedri latus irrationalem esse lineam quæ apotome appellatur.

Quoniam enim rectæ lineæ NO extrema ac media

dia ratione ſectæ major portio eſt PO; erit tota NΞ extrema ac media ratione ſecta, & major portio PΣ. nam cum ſit ut NO ad OP ita OP ad PN, & earum duplæ; nam [per 15.5.] partes cum æque multiplicibus eandem habent rationem: erit ut NΞ ad PΣ ita PΣ ad utramque NP, ΣΞ. major autem eſt NΞ quam PΣ: ergo & PΣ eſt major quam utraque NP, ΣΞ: eſt igitur NΞ extrema ac media ratione ſecta, & PΣ eſt ipſius major portio. æqualis autem eſt PΞ ipſi ΥΦ; ergo NΞ extrema ac media ratione ſecta eſt, & major portio eſt ΥΦ. & quoniam ſphæræ diameter eſt rationalis. atque [per 15. 13.] eſt potentia tripla lateris cubi; erit [per 6.def.11.] & rationalis NΞ quæ eſt cubi latus. ſi autem recta linea rationalis extrema ac media ratione ſecta fuerit, utraque portio [per 6.13.] irrationalis eſt quæ apotome appellatur: ergo ΥΦ, quæ eſt latus dodecaedri, irrationalis eſt quæ apotome appellatur. quod erat demonſtrandum.



Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, latere cubi extrema ac media ratione ſecto, ejus portionem majorem eſſe dodecaedri latus.

Prop. XVIII. Probl.

Latera quinque figurarum exponere & inter ſe comparare.

EXponatur datæ ſphæræ diameter AB, & ſecetur in Γ quidem ita ut AΓ ſit æqualis ΓB, in Δ vero ita ut AΔ ipſius ΔB ſit dupla; dein deſcribatur ſuper AB ſemicirculus AEB, & à punctis Γ, Δ ipſi AB ad rectos angulos ducantur ΓE, ΔZ, & AZ, ZB, jungantur. & quoniam AΔ dupla eſt ipſius ΔB, erit AB ipſius BΔ tripla; & per converſionem rationis BA ſeſquialtera ipſius AΔ. ut autem BA ad AΔ ita [per 20. 6.] quadratum ex BA ad quadratum ex AZ; eſt enim [per 8.6.] triangulum AZB triangulo AZΔ æquiangulum: ergo quadratum ex BA ſeſquialterum eſt quadrati ex AZ. eſt autem [per 13. 13.] & ſphæræ diameter potentia ſeſquialtera lateris pyramidis, atque eſt AB ſphæræ diameter: ergo AZ pyramidis lateri eſt æqualis.

RURSUS, quoniam AΔ dupla eſt ΔB, erit AB ipſius BΔ tripla. ſed [per 8. & 20. 6.] ut AB ad BΔ ita quadratum ex AB ad quadratum ex ZB: quadratum igitur ex AB triplum eſt quadrati ex BZ. eſt autem [per 15.

τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ PO· ὅλης ἄρα τῆς NΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ PΣ. οἷον ἐπεὶ ὡς ἡ NO πρὸς τὴν OP ὕτως ἡ OP πρὸς τὴν PN καὶ τὰ δι-πλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἡ NΞ πρὸς τὴν PΣ ὕτως ἡ PΣ πρὸς συναμφότερον τὰς NP, ΣΞ. μείζων δὲ ἡ NΞ τῆς PΣ· μείζων ἄρα καὶ ἡ PΣ συναμφοτέρου τῆς NP, ΣΞ· ἡ NΞ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ PΣ. ἴση δὲ ἡ PΣ τῇ ΥΦ· καὶ ἄρα NΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΥΦ. ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τοῦ σφαίρας διάμετρος, ἐστὶ δυνάμει τε-τραπλασίων τοῦ τοῦ κύβου πλευρᾶς· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ NΞ πλευρὰ ὖσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ἡ ΥΦ ἄρα πλευρὰ ὖσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀπο-τομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τοῦ εἰς κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων συνιστάναι καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

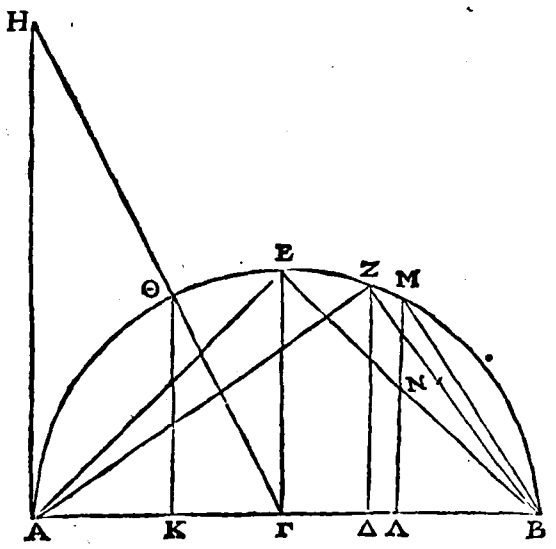
ΕΚκείσθω ἡ τοῦ δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB, καὶ τετμήσθω κατὰ μὲν τὸ Γ ὥστε ἴσην εἶναι τὴν AΓ τῇ ΓB, κατὰ δὲ τὸ Δ ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν AΔ τῆς ΔB, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ EB, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΓE, ΔZ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, ZB. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ AΔ τῆς ΔB, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς BΔ· ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ BA τῆς AΔ. ὡς δὲ ἡ BA πρὸς τὴν AΔ ὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ· ἰσογώνιον γὰρ ἐστὶ τὸ AZB τρίγωνον τῷ AZΔ τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς AZ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τοῦ σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος, ἧς ἐστιν ἡ AB ἡ τοῦ σφαίρας διάμετρος· ἡ AZ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ πυραμίδος.

ΠΑΛΙΝ, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ AΔ τῆς ΔB, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς BΔ. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΔ ὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZB· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BZ. ἐστὶ δὲ καὶ

13.] ſphæræ diameter potentia tripla lateris cubi. atque eſt AB ſphæræ diameter: ergo BZ eſt latus cubi.

ITEM quoniam AΓ eſt æqualis ΓB, erit AB ipſius BΓ dupla. ut autem AB ad BΓ ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE: quadratum igitur ex AB quadrati ex BE eſt duplum. at vero [per 14. 13.] ſphæræ diameter eſt potentia dupla lateris octaedri, & AB eſt diameter datæ ſphæræ: quare BE eſt octaedri latus.

DUCATUR à puncto A ipſi AB ad rectos angulos AH, ponaturque AH æqualis AB, & juncta HΓ à puncto Θ ad AB perpendicularis ducatur ΘK. quoniam igitur AH dupla eſt ipſius AΓ, etenim HA eſt æqualis AB, ut autem HA ad AΓ ita [per 4. 6.] ΘK ad KΓ: erit ΘK ipſius KΓ dupla: ergo [per 20.6.] quadratum ex ΘK quadruplum eſt quadrati ex KΓ: quadrata igitur ex ΘK, KΓ, quod [per 47.1.] eſt quadratum ex ΘΓ quintuplum eſt quadrati ex KΓ. æqualis autem eſt ΘΓ ipſi ΓB: ergo quadratum ex BΓ quintuplum eſt quadrati ex ΓK. & quoniam AB eſt dupla ipſius BΓ, ex quibus AΔ dupla eſt ΔB: erit reliqua BΔ dupla reliquæ ΔΓ; ideoque BΓ ipſius ΓΔ eſt tripla: noncuplum igitur eſt [per 20. 6.] quadratum ex BΓ quadrati ex ΓΔ. ſed quadratum ex BΓ quadrati ex ΓK eſt quintuplum: ergo quadratum ex ΓK majus eſt quadrato ex ΓΔ, & ΓK ipſa ΓΔ major. ponatur ipſi ΓK æqualis ΓΛ; atque à puncto Λ ipſi AB ad rectos angulos ducatur ΛM, & MB jungatur. & quoniam quadratum ex BΓ quintuplum eſt quadrati ex ΓK, atque eſt ipſius quidem ΓB dupla AB, ipſius vero ΓK dupla KΛ; erit quadratum ex AB quadrati ex KΛ quintuplum. ſed [per coroll. 16. 13.] ſphæræ diameter potentia quintupla eſt ejus quæ ex centro circuli à quo icoſaedrum deſcribitur, atque eſt AB diameter ſphæræ: ergo KΛ eſt hexagoni latus dicti circuli. præterea, quoniam [per cor. 16.13.] ſphæræ diameter compoſita eſt ex latere hexagoni & duobus lateribus decagoni in dicto circulo deſcriptorum; atque eſt AB quidem diameter ſphæræ, KΛ vero hexagoni latus, & AK eſt æqualis ΛB: erit utraque ipſarum AK, ΛB latus decagoni deſcripti in eodem circulo, à quo icoſaedrum deſcribitur. & quoniam AB eſt latus decagoni, MA vero latus hexagoni; eſt enim æqualis ipſi KΛ, quia [per 14. 3.] æqualis eſt ipſi ΘK; namque æqualiter à centro diſtant; & eſt utraque ΘK,



ΚΛ

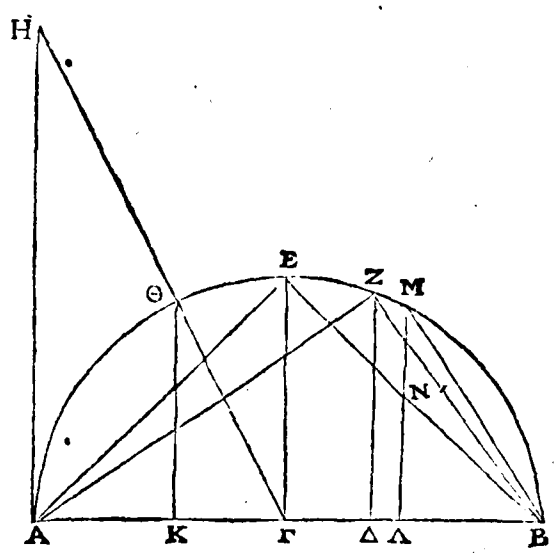
K Λ dupla ipſius K Γ: erit [per 10. 13.] M B latus pentagoni. quod autem eſt latus pentagoni idem eſt [per 16. 13.] & icoſaedri: ergo M B eſt icoſaedri latus.

Et quoniam Z B eſt latus cubi, ſecetur extrema ac media ratione in N, & N B ſit major portio; erit ergo [per cor. 17.13.] N B dodecaedri latus.

Quoniam autem ſphæræ diameter oſtenſa eſt ipſius quidem A Z lateris pyramidis potentia ſeſquialtera, ipſius vero B E octaedri potentia dupla, & ipſius Z B cubi potentia tripla; quarum partium ſphæræ diameter potentia eſt ſex, earum pyramidis quidem latus erit quatuor, octaedri vero trium, & cubi duarum: ergo latus pyramidis octaedri quidem lateris potentia eſt ſeſquitertium; lateris vero cubi potentia duplum. & octaedri latus lateris cubi potentia eſt ſeſquialterum: latera igitur trium figurarum jam dicta, videlicet & octaedri & cubi, inter ſe ſunt in rationibus rationalibus. Dico vero quod reliquorum duorum, nempe icoſaedri & dodecaedri latera, neque inter ſe neque ad jam dicta ſunt in rationalibus rationibus; irrationales enim ſunt, illius quidem [per 16. 13.] minor, hujus vero [per 17.13.] apotome.

Quod vero M B latus icoſaedri majus ſit dodecaedri latere N B, ita demonſtrabimus.

Quoniam enim [per 8.6.] triangulum Z Δ B æquiangulum eſt triangulo Z A B; erit [per 4.6.] ut Δ B ad B Z ita Z B ad B A. & cum tres rectæ lineæ proportionales ſint, ut prima ad tertiam ita erit [per cor. 20. 6.] quadratum primæ ad quadratum ſecundæ: eſt igitur ut Δ B ad B A ita quadratum ex Δ B ad quadratum ex B Z. & invertendo [per coroll. 4. 5.] ut A B ad B Δ ita quadratum ex Z B ad quadratum ex B Δ. tripla autem eſt A B ipſius B Δ: ergo quadratum ex Z B quadrati ex B Δ eſt triplum. verum quadratum ex A Δ quadruplum eſt quadrati ex Δ B; eſt enim A Δ ipſius Δ B dupla: ergo quadratum ex A Δ eſt majus quadrato ex Z B; ac propterea A Δ quam Z B eſt major: multo igitur major eſt A Λ quam Z B. & [per 9. 13.] ipſa quidem A Λ extrema ac media ratione ſecta eſt, & major ejus portio eſt Λ K; quoniam K Λ eſt hexagoni latus, & K A latus decagoni. ipſa vero Z B [per conſtr.] extrema ac media ratione ſecta eſt, & major portio eſt N B: major igitur eſt K Λ quam N B. eſt autem K Λ ipſi Λ M æqualis: ergo Λ M quam N B eſt major. ſed [per 19. 1.] B M eſt major



Κ Λ διπλασίων τῆς Κ Γ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ Μ Β. ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ Μ Β.

Καὶ ἐπεὶ ἡ Ζ Β κύβου ἐστὶ πλευρὰ, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ Ν Β· ἡ Ν Β ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν Α Ζ πλευρᾶς, τοῦ πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου Β Ε δυνάμει τριπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς Ζ Β δυνάμει τετραπλασίων· οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἓξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τετράρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο· ἡ ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἡμιόλιος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ. ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία· αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τεσσάρων σχημάτων πλευραὶ, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, σοῖς ἀλλήλαις εἰσὶν ἐν λόγοις ῥηταῖς· αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἥ τε τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, ὅτι πρὸς ἀλλήλας ὅτι σοῖς τὰς σοσιερημμένοις εἰσὶν οὐ λόγοις ῥηταῖς, ἄλογοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

Οτι δὲ μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ Μ Β τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς Ν Β δείξομεν ὅτως.

Επεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ Ζ Δ Β τρίγωνον τῷ Ζ Α Β τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ Δ Β πρὸς τὴν Β Ζ ὅτως ἡ Β Ζ πρὸς τὴν Β Α. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην ὅτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Δ Β πρὸς τὴν Β Α ὅτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β Ζ. ἀναπαλιν ἄρα ὡς ἡ Α Β πρὸς τὴν Β Δ ὅτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β Δ. τριπλῆ δὲ ἡ Α Β τῆς Β Δ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ζ Β τοῦ ἀπὸ τῆς Β Δ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α Δ τοῦ ἀπὸ τῆς Δ Β τετραπλάσιον· διπλῆ γὰρ ἡ Α Δ τῆς Δ Β· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α Δ τοῦ ἀπὸ τῆς Ζ Β· μεῖζων ἄρα καὶ ἡ Α Λ τῆς Ζ Β μείζων ἐστί. καὶ τῆς μὲν Α Λ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ Κ Λ, ἐπειδήπερ ἡ μὲν Λ Κ ἑξαγώνου ἐστίν, ἡ δὲ Κ Α δεκαγώνου. τῆς δὲ Ζ Β ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ Ν Β· μείζων ἄρα ἡ Κ Λ τῆς Ν Β. ἴση δὲ ἡ Κ Λ τῇ Λ Μ· μείζων ἄρα ἡ Λ Μ τῆς Ν Β. τῆς δὲ Λ Μ μείζων ἡ Μ Β· πολλῷ ἄρα

ἡ Μ Β

ἡ MB πλευρὰ ἤπερ τῆ ἐπισταίδρα μείζων ἐστὶ τῆ NB πλευρᾶς ἤπερ τῆ δωδεκαέδρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ ὅτι μείζων ἡ MB τῆς NB.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ AΔ τῆς ΔB, τριπλῆ ἄρα ἡ AB τῆς BΔ. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν ΔB ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ, διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ZAB τρίγωνον τῷ ZBΔ τριγώνῳ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BZ. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς KΛ πενταπλάσιον· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς KΛ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ZB ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ZB ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς NB μείζονά ἐστιν· ὥστε καὶ ἓν τὸ ἀπὸ τῆς KΛ ἑνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς NB μεῖζόν ἐστι· μείζων ἄρα ἡ KΛ τῆς NB. ἴση δὲ ἡ KΛ τῇ ΛM· μείζων ἄρα ἡ KΛ τῆς NB· πολλῷ ἄρα ἡ MB τῆς NB μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quam MΛ: ergo MB, quæ eſt latus icoſaedri, major eſt ipſa NB dodecaedri latere. quod erat demonſtrandum.

ALITER oſtenditur MB majorem eſſe quam NB.

Quoniam enim AΔ dupla eſt ipſius ΔB, erit AB ipſius BΔ tripla. ut autem AB ad ΔB ita quadratum ex AB ad quadratum ex BZ, propterea quod triangulum ZAB [per 8.6.] triangulo ZBΔ æquiangulum eſt: triplum igitur eſt quadratum ex AB quadrati ex BZ. oſtenſum autem eſt quadratum ex AB quadrati ex KΛ quintuplum: ergo quinque quadrata ex KΛ tribus quadratis ex ZB ſunt æqualia. ſed [ut mox demonſtrabitur] tria quadrata ex ZB majora ſunt quam ſex eorum, quæ fiunt ex NB: & igitur quinque ex KΛ quam ſex eorum quæ ex NB ſunt majora: ergo & unum ex KΛ majus eſt uno ex NB; ac propterea KΛ quam NB major. æqualis autem eſt KΛ ipſi ΛM; major igitur eſt ΛM quam NB: multo igitur major eſt MB quam NB. quod erat demonſtrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Οτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ZB ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς BN μείζονά ἐστι, δείξομεν ὕστερον.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ BN τῆς NZ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ZB, BN μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν BZ, ZN· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BZ, BN μετὰ τοῦ ὑπὸ BZ, ZN μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ BZ, ZN. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ZB, BN μετὰ τοῦ ὑπὸ BZ, BN τὸ ἀπὸ τῆς ZB ἐστι. τὸ δὲ ὑπὸ BZ, ZN ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς BN, ἄκρον γὰρ καὶ μέσον λόγον τέτμηται ἡ BZ κατὰ τὸ N, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ZB μεῖζόν ἐστι διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς BN· ἓν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZB δύο τῶν ἀπὸ τῆς BN μεῖζόν ἐστιν· ὥστε καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ZB ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς BN μείζονά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

LEMMA.

Tria vero quadrata ex ZB majora eſſe quam ſex eorum quæ ex BN, hoc modo oſtendemus.

Quoniam enim major eſt BN quam NZ, erit rectangulum quod continetur ſub ZB, BN majus contento ſub BZ, ZN: quod igitur continetur ſub ZB, BN una cum contento ſub BZ, ZN majus eſt quam duplum ejus quod ſub BZ, ZN continetur. ſed [per 2. 2.] quod quidem continetur ſub ZB, BN una cum contento ſub BZ, ZN eſt quadratum ex ZB. contentum autem ſub BZ, ZN eſt æquale quadrato ex BN; etenim [ex hyp.] BZ extrema ac media ratione ſecta eſt in N, & [per 17. 6.] quod ſub extremis continetur eſt æquale ei quod fit à media: quadratum igitur ex ZB majus eſt quam duplum quadrati ex BN: quare unum quadratum ex ZB duobus ex BN eſt majus; idcirco tria quadrata quæ fiunt ex ZB majora ſunt quam ſex eorum quæ fiunt ex BN. quod erat demonſtrandum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Λέγω δὴ ὅτι πρὸς τοῖς εἰρημένοις ε'. σχήμασι σύστασις ἑτέρου σχήματος περιεχομένου ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Τὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλων δύο ἐπιπέδων γωνία σύστασις). ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ ε'. ἡ τῆς εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία, ἕστις γὰρ τῆς ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς, ἔσονται αἱ ἓξ τετράσιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον, ἅπαιται γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται). ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἡ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, ἔσονται

SCHOLIUM.

Dico præter jam dictas quinque figuras non conſtitui aliam figuram, quæ ſub figuris æquilateris & æquiangulis inter ſe æqualibus contineatur.

Ex duobus enim triangulis, vel ex aliis duobus planis [per 11. def. 11.] non conſtituetur angulus ſus ſolidus. ex tribus autem triangulis conſtituitur angulus pyramidis; ex quatuor octaedri; ex quinque icoſaedri: ſed ex ſex triangulis æquilateris & æquiangulis ad unum punctum conſtitutis non eſt angulus ſolidus; cum enim [per 32. 1.] trianguli æquilateri angulus ſit duæ tertiæ recti, erunt horum ſex quatuor rectis æquales, quod fieri non poteſt, omnis enim ſolidus angulus [per 21. 11.] ſub minoribus quam quatuor rectis continetur. eadem ratione neque ex pluribus quam ſex hujuſmodi angulis planis conſtituitur ſolidus angulus. porro angulus cubi ſub tribus quadratis continetur: ut autem ſub quatuor contineatur fieri non poteſt, eſſent

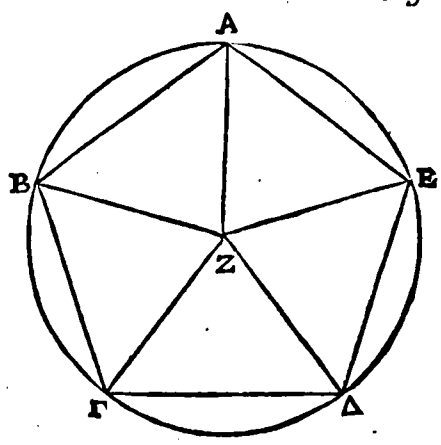
enim rurſus quatuor recti. ſub pentagonis æquilateris & æquiangulis tribus quidem continetur angulus dodecadri: ſed ut ſub quatuor contineatur fieri non poteſt, nam cum pentagoni æquilateri angulus conſtet [ut mox oſtendetur] ex recto & quinta parte recti, erunt quatuor hujuſmodi anguli quatuor rectis majores, quod fieri non poteſt. neq; vero aliis polygonis figuris conſtituetur angulus ſolidus, propter dicta abſurda quæ conſequuntur: non igitur præter jam dictas, figura ſolida conſtituitur ſub figuris æquilateris & æquiangulis contenta. quod erat demon.

γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. τὸ δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου, τὸ μὲν τριῶν ἐστὶ τῶν δωδεκαέδρου· τὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, ὅσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου πενταγώνου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους, ὅπερ ἀδύνατον. ὁδὲ μιᾷ τῶν πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περιεχήσεται στερεὰ γωνία, λέγω τὸ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὑπὸ τῶν εἰρημένων ε'. σχημάτων ἕτερον στερεὸν συσταθήσεται τὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

LEMMA.

Verum enim vero pentagoni æquilateri & æquianguli angulum conſtare ex recto & quinta parte recti hoc modo oſtendemus.

Sit enim pentagonum æquilaterum & æquiangulum ΑΒΓΔΕ, & circa ipſum circulus ΑΒΓΔΕ deſcribatur, ſumaturque ipſius centrum quod ſit Ζ, & jungantur ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ, quæ [per 14.4.] pentagoni ΑΒΓΔΕ angulos bifariam ſecabunt. & quoniam quinque anguli ad Ζ ſunt quatuor rectis æquales, & etiam inter ſe æquales; erit unus ipſorum, ut ΑΖΒ, unus rectus dempta quinta recti parte: ergo [per 32. 1.] reliqui ΖΑΒ, ΑΒΖ conficiunt unum rectum & quintam partem recti. æqualis autem eſt angulus ΖΑΒ angulo ΖΒΓ: & igitur ΑΒΓ totus pentagoni angulus conſtat ex recto & quinta recti parte. quod erat demonſtr.



ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτον, ὕτω δεικτέον.

Ἐστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ· δίχα ἄρα τέμνουσιν τὰς πρὸς ταῖς ΑΒΓΔ, Ε πενταγώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ πέντε γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ εἰσὶν ἴσαι· μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ ΑΖΒ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστι καὶ πέμπτον· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΖΑΒ, ΑΒΖ μιᾶς εἰσὶν ὀρθῆς καὶ πέμπτης. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ὀρθῆς ἐστι καὶ πέμπτης. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΣΣΑΡΕΣΚΑΙΔΕΚΑΤΟΝ,
ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ,
ΩΣ ΟΙΟΝΤΑΙ ΤΙΝΕΣ,
Ως ἄλλοι δὲ, ΥΨΙΚΛΕΟΥΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ περὶ τῶν ε'. συμπάντων πρῶτον.

EUCLIDIS,
UT QUIDAM ARBITRANTUR,
ELEMENTORUM
LIBER DECIMUSQUARTUS,
QUI ET SOLIDORUM QUARTUS,
Aut, *verius* juxta alios, HYPSICLIS ALEXANDRINI de Quinque Corporibus Liber prior.

ΒΑΣΙΛΙΔΗΣ ὁ Τύριος, ὦ Πρώταρχε, παραγενηθεὶς εἰς Αλεξάνδρειαν, καὶ συγχαθεὶς τῷ πατρὶ ἡμῶν διὰ τὴν ἀπὸ τῶν μαθήματος συγγένειαν, συνδιέτριψεν αὐτῷ τὸ πλεῖστον τῆς ἐπιδημίας χρόνον. καίποτε διελθόντες τὸ περὶ Απολλωνίου γεγραφὸς περὶ τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου τῆς εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένων, τίνα λόγον ἔχει ταῦτα πρὸς ἄλληλα· ἔδοξαν τοῦτα μὴ ὀρθῶς γεγραφέναι τὸν Απολλώνιον. αὐτοὶ δὲ ταῦτα διαγαθάμενοι ἐγραψαν ὡς ἐν ἀκόλουθον τοῦ πατρός. ἐγὼ δὲ ὕστερον πεπίστευον ἑτέρῳ βιβλίῳ τὸν Απολλωνίου ἐκδεδομένῳ, καὶ πρόχειρα ἀπόδειξιν ὑγιῆ περὶ τοῦτων εὑρηκέναι· καὶ μεγάλως ἐφυχαγωγήθην ὅτι τῇ προβλήματος ζητήσει. τὸ μὲν ὑπὸ Απολλωνίου ἐκδοθὲν ἔοικε καινὴν σκοπεῖν, καὶ γὰρ περιφέρεται τοῦτ' ὑφ' ἡμῶν δοκοῦν ὕστερον γεγραφέναι φιλοπόνως ὅσα δοκεῖν ἐπομνηματισάμην, ἔκρινα προσῆκόν σοι, διὰ τὴν ἐν ἅπασι μαθήμασι, μάλιστα δ' ἐν γεωμετρίᾳ προκοπὴν,

BASILIDES Tyrius, Protarche, cum Alexandriam veniſſet, patrique noſtro ob mathematicarum diſciplinarum ſocietatem commendatus fuiſſet, ipſo peregrinationis tempore cum eo diu multumque verſatus eſt. Ipſi ergo cum id aliquando expenderent, quod ab Apollonio de dodecaedri & icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum comparatione ſcriptum eſt, quam ſcilicet hæc inter ſe rationem habeant; arbitrati ſunt ea non recte tradidiſſe Apollonium. Ideoque ea, à ſe emendata, ut pater meus dicebat, memoriæ ac literis prodiderunt. Ego vero poſtea incidi in alium librum ab Apollonio editum, qui propoſitæ rei demonſtrationem accuratam complectebatur; ex ejuſque problematis indagatione magnam profecto cepi voluptatem. Illud quidem, quod ab Apollonio editum eſt, quilibet facile perſpicere poteſt, cum in omnium manibus verſetur: quod autem nos poſtea ſummo, quantum conjici licet, ſtudio lucubraſſe videmur, id literis mandatum tibi dedicandum cenſuimus, ut qui ob excellentem in omnibus diſciplinis mathematicis, & præſertim in geometria, cognitio-

nem, prudenter judicabis ea quæ dicturi sumus; ob eam vero, quæ tibi cum patre meo fuit, vitæ consuetudinem, & ob benevolentiam, qua nos complecteris, tractationem ipsam libenter audies. Sed jam tempus est ut procemio finem imponentes opus ipsum aggrediamur.

ἐμπείρως κρίνοντι τὰ ῥηθησόμενα· σὺ δὲ τὴν τοῦ πατρὸς σου πρὸς ἐμὲ συνήθειαν, καὶ τὴν τοῦ πρὸς ἡμᾶς εὔνοιαν, εὐμενῶς ἀνασχόμενος τῆς πραγματείας, καιρὸς δ' ἂν εἴη τοῦ προοιμίου μὲ πεπαῦθαι, καὶ τῆς συντάξεως ἄρχεσθαι.

Prop. I. Theor.

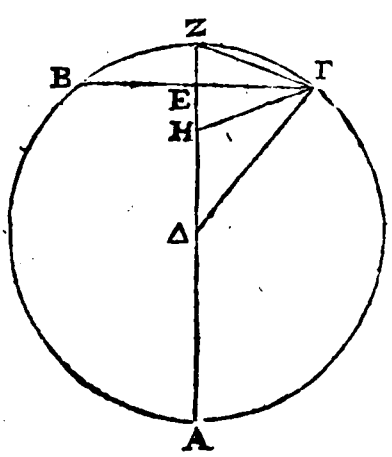
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Quæ à centro circuli alicujus ad latus pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti perpendicularis ducitur, dimidia est utriusque, & ejus quæ ex centro & lateris decagoni in eodem circulo descripti.

Η ἀπὸ τοῦ κέντρου κύκλου πινὸς ἴσης τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, καθετος ἀγομένη, ἡμίσεια ἐστὶ συναμφοτέρου, καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

SIT circulus ABΓ, & in eo describatur pentagoni æquilateri latus BΓ, sumaturque circuli centrum Δ; & ad BΓ ducta ΔE perpendiculari, producatur in directum ipsi ΔE recta linea AEZ: dico ΔE dimidiam esse ~~utriusque~~, & hexagoni lateris & decagoni in eodem circulo descriptorum.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΕ κάθετος ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΔΕ εὐθεῖα ἡ ΑΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ἡμίσειά ἐστι τοῦ τε ἐξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.



Jungantur enim AΓ, ΓZ; ponaturque HE ipsi EZ æqualis, & à puncto H ad Γ ducatur HΓ. quoniam igitur circumferentia totius circuli quintupla est circumferentiæ BZΓ, atque est totius quidem circuli circumferentiæ dimidia AΓZ, ipsius vero BZΓ dimidia ZΓ, erit & circumferentia AΓZ quintupla circumferentiæ ZΓ: ideoque circumferentia AΓ ipsius ΓZ est quadrupla. ut autem AΓ ad ZΓ ita est [per 33. 6.] AΔΓ angulus ad angulum ZΔΓ: angulus igitur AΔΓ quadruplus est anguli ZΔΓ. duplus autem est [per 20.3.] angulus AΔΓ anguli EZΓ: ergo & angulus EZΓ anguli HΔΓ est duplus. est autem [per 4.1.] & EZΓ angulus æqualis angulo EHΓ: duplus igitur est angulus EHΓ anguli HΔΓ; quare & [per 6. & 32.1.] ΔH ipsi HΓ est æqualis. sed [per 4.1] HΓ æqualis est ZΓ: ergo & ΔH ipsi ZΓ est æqualis. est autem & HE æqualis EZ: æqualis igitur est ΔE utrique EZ, ZΓ. communis apponatur ΔE; utraque igitur ΔZ, ZΓ ipsius ΔE est dupla. sed est ΔZ quidem [per 14 4.] hexagoni lateri æqualis, ZΓ vero æqualis lateri decagoni: ergo ΔE est dimidia & lateris hexagoni & decagoni in eodem circulo descriptorum. quod erat demonstrandum.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΓ, ΓZ, καὶ κάθου τῇ EZ ἴση ἡ HE, καὶ ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ HΓ. ἐπεὶ πενταπλασίων ἐστὶν ὅλος τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τοῦ BZΓ περιφερείας, καὶ ἐστι τοῦ μὲν ὅλου τοῦ κύκλου περιφερείας ἡμίσεια ἡ ΑΓΖ, τοῦ δὲ BZΓ ἡμίσεια ἡ ZΓ· καὶ ΑΓΖ ἄρα περιφέρεια πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ZΓ περιφερείας· τετραπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΖΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΖΓ οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΖΔΓ γωνίαν· τετραπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΖΔΓ. διπλῆ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΕΖΓ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ τῆς ΗΔΓ. ἐστι δὲ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΗΓ· διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΓ τῆς ὑπὸ ΗΔΓ· ἴση ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΗΓ. ἀλλὰ ἡ ΗΓ τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΖΓ. ἐστι δὲ καὶ ἡ ΗΕ τῇ ΕΖ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΕ συναμφοτέρῳ τῇ ΕΖ, ΖΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΕ· συναμφότερος ἄρα ἐστὶ ἡ ΔΖ, ΖΓ διπλῆ τῆς ΔΕ. καὶ ἐστι ἡ μὲν ΔΖ ἴση τῇ τοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΖΓ ἴση τῇ τοῦ δεκαγώνου· ἡ ΔΕ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τοῦ τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Corollarium.

Manifestum vero est ex theorematibus decimitertii libri, [sc. 12. 13.] eam quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur dimidiam esse ejus quæ ex centro circuli.

Πόρισμα.

Φανερὸν δὴ ἐκ τούτων ἐν τῷ τρισκαιδεκάτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου κάθετος ἀγομένη ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

PRO-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ο αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό,τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τοῖς εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

Τοῦτο δὲ γράφεται μὲν * Ἀριστάιῳ ἐν τῷ περὶ τῶν πέντε σχημάτων συγκρίσει. γράφει δὲ Ἀπολλώνιος ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω καὶ τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον· ἀνάγκη δὲ τὴν αὐτὴν εἶναι καθ' ἣν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον. χρήσιμον δὲ καὶ ἡμῖν αὐτῆς, ὅπι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τοῖς εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων τοῦδε,

PROP. II. THEOR.

Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.

HOC autem conscribitur ab *Aristæo in libro de quinque figurarum comparatione, & ab Apollonio in secunda editione comparationis dodecaedri cum icosaedro: videlicet ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse & ipsum dodecaedrum ad icosaedrum, quia perpendicularis ducta à centro sphæræ ad dodecaedri pentagonum eadem est cum illa quæ ad icosaedri triangulum ducitur: porro nobis quoque describendum monstrandumque est eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum, hoc quidem præmisso,

(ΛΗΜΜΑ.)

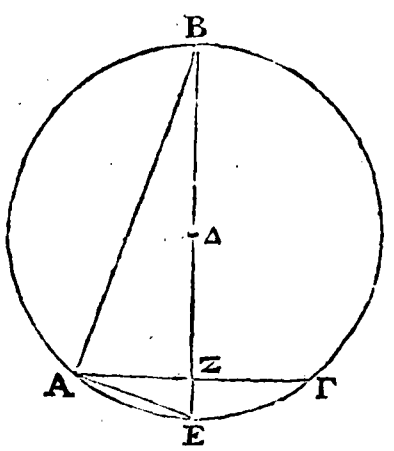
Ἐὰν εἰς κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου ἐγγραφῇ, τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὑπὸ δύο πλευρῶν τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης εὐθείας, πενταπλάσιον ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

(LEMMA.)

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quadratum quod fit ex latere pentagoni, una cum quadrato quod fit ex recta quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, quintuplum erit quadrati ejus quæ est ex circuli centro.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ πενταγώνου πλευρὰ ἔστω ἡ ΑΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΔΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Β, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πτερώνα πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΕ πτερωνου.

Sit ΑΒΓ circulus, & in eo pentagoni latus ΑΓ, sumaturque circuli centrum Δ, & ad ΑΓ perpendicularis ducta ΔΖ in puncta Β, Ε producatur, & jungatur ΑΒ: dico quadrata ex ΒΑ, ΑΓ quadrati ex ΔΕ quintupla esse.



Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· δωδεκαγώνου ἄρα ἡ ΑΕ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΕ τῆς ΕΔ, πτεραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ· πτεραπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ ΒΑ, ΑΕ τοῦ ἀπὸ ΕΔ· πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΑΕ καὶ ΕΔ τοῦ ἀπὸ ΕΔ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ ἴσα τῷ ἀπὸ ΑΓ· πενταπλάσια ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΕΔ.

Jungatur enim ΑΕ: decagoni ergo latus est. & quoniam ΒΕ dupla est ipsius ΕΔ; erit [per corol. 20.6.] quadratum ex ΒΕ quadrati ex ΕΔ quadruplum. quadrato autem ex ΒΕ æqualia sunt quadrata ex ΒΑ, ΑΕ: ergo quadrata ex ΒΑ, ΑΕ quadrupla sunt quadrati ex ΕΔ: quare etiam quadrata ex ΑΒ, ΑΕ & ΕΔ sunt quintupla quadrati ex ΕΔ. sed [per 10. 13.] quadrata ex ΔΕ, ΕΑ æqualia sunt quadrato ex ΑΓ: quadrata igitur ex ΒΑ, ΑΓ quadrati ex ΕΔ sunt quintupla.

Τούτου δεδειγμένου, λοιπὸν ὅπι ὁ αὐτὸς κύκλος λαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

Hoc ita ostenso, demonstrandum quidem est eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.

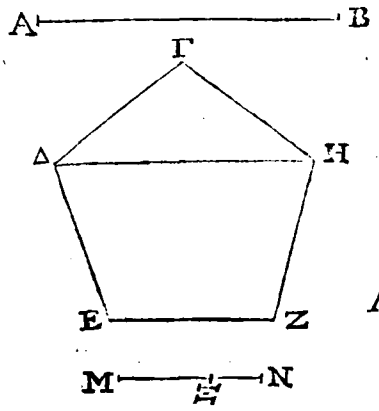
Ἐκκείσθω ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰ-

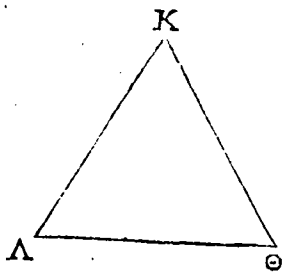
Exponatur sphæræ diameter ΑΒ, & in eadem sphæra describatur dodecaedrum & icosaedrum,

* *Aristæi* libros quinque τῶν πέντε σχημάτων describit *Pappus* in præfatione ad lib. VII. *Collect. Math.* nulla hujus *de quinque figurarum comparatione facta* mentione.

ſitque unum quidem dodecaedri pentagonum ΓΔΕΖΗ, icoſaedri vero triangulum ΚΛΘ: dico eundem circulum comprehendere pentagonum ΓΔΕΖΗ & ΚΛΘ triangulum.

Jungatur ΔΗ: ergo [per 8. & 17. 13.] ΔΗ eſt cubi latus. exponatur recta linea quædam ΜΝ, ita ut quadratum ex ΑΒ quadrati ex ΜΝ ſit quintuplum. eſt autem [per cor. 16. 13.] & ſphæræ diameter potentia quintupla ejus quæ eſt ex centro circuli, à quo icoſaedrum deſcribitur. ſecetur [per 30. 6.] ΜΝ extrema ac media ratione in Ξ: & ſit ΜΞ portio major; ergo [per 5. & 9. 13.] ΜΞ eſt decagoni latus. & quoniam quadratum ex ΒΑ quintuplum eſt quadrati ex ΜΝ, & triplum quadrati ex ΔΗ; erunt tria quadrata ex ΔΗ quadratis quinque ex ΜΝ æqualia. ut autem tria quadrata ex ΔΗ ad quadrata quinque ex ΜΝ ita [per 8. 13. & 7. 14.] tria quadrata ex ΓΗ ad quinque quadrata ex ΜΞ: tria igitur quadrata ex ΓΗ quinque quadratis ex ΜΞ ſunt æqualia. quinque autem quadrata ex ΚΛ æqualia ſunt [per 5. 9 & 10. 13.] quinque quadratis ex ΜΝ & quinque quadratis ex ΜΞ: ergo quinque quadrata ex ΚΛ tribus quadratis ex ΔΗ & tribus quadratis ex ΓΗ ſunt æqualia. ſed tria quadrata ex ΔΗ & tria quadrata ex ΓΗ æqualia ſunt quindecim quadratis ejus quæ ex centro circuli deſcripti circa pentagonum ΓΔΕΖΗ, antea enim [per lem. præm.] demonſtratum eſt quadrata ex ΔΗ, ΓΗ quintupla eſſe quadrati ejus quæ eſt ex centro circuli circa pentagonum ΓΔΕΖΗ deſcripti. quinque autem quadrata ex ΚΛ ſunt æqualia quindecim quadratis ejus quæ eſt ex centro circuli deſcripti circa triangulum ΚΛΘ; etenim demonſtratum eſt [ad 12. 13.] quadratum ex ΚΛ triplum eſſe quadrati ejus quæ eſt ex centro circuli circa triangulum ΚΛΘ deſcripti: quindecim igitur quadrata ejus quæ eſt ex centro circuli quindecim quadratis ejus quæ eſt ex centro circuli ſunt æqualia: quare & diameter diametro eſt æqualis.





Idem igitur circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum.

Prop. III. Theor.

Si fuerit pentagonum æquilaterum & æquiangulum, & circa ipſum circulus; à centro autem ad unum latus perpendicularis ducta fuerit: quod tricies ſub uno latere & perpendiculari continetur ſuperficiei dodecaedri eſt æquale,

κοσαέδρου, καὶ ἔστω ἐν μὲν τῷ δωδεκαέδρῳ πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ, εἰκοσαέδρου δὲ τρίγωνον τὸ ΚΛΘ· λέγω ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε ΓΔΕΖΗ πεντάγωνον καὶ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον.

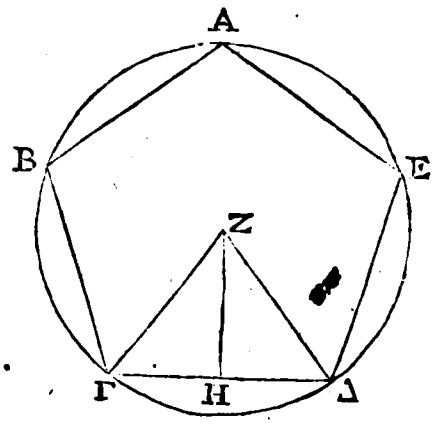
Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ· κύβου ἄρα πλευρὰ ἡ ΔΗ. ἐκκείσθω δή τις εὐθεῖα ἡ ΜΝ ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΜΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τοῦ σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασία τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται. τετμήσθω ἡ ΜΝ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ ΜΞ δεκαγώνου ἄρα ἡ ΜΞ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΒΑ τοῦ ἀπὸ ΜΝ, τριπλάσιον δέ τὸ ἀπὸ ΒΑ τοῦ ἀπὸ ΔΗ· τρία ἄρα τὰ ἀπὸ ΔΗ ἴσα πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΝ. ὡς δὲ τρία τὰ ἀπὸ ΔΗ πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ ΜΝ οὕτως τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ ΜΞ· τρία ἄρα τὰ ἀπὸ ΓΗ τοῖς πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΞ ἐστιν ἴσα. πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΚΛ τοῖς πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΝ καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΞ ἐστιν ἴσα· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα ἐστὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΔΗ καὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΓΗ. τρία δὲ τὰ ἀπὸ ΔΗ καὶ τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου κύκλου περὶ τὸ ΓΔΕΖΗ, ὡς ἐδείχθη γὰρ τὰ ἀπὸ ΔΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΗ πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ κύκλου. ἀλλὰ πέντε μὲν τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον κύκλου, ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ ΚΛ τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ ΚΛΘ τριγώνου κύκλου· δεκαπέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα ἐστὶ τοῖς δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ ἄρα διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ.

Ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τὸ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ᾖ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, περὶ τοῦτο κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου καθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἀχθῇ· τὸ τριακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τῆς καθέτου ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Ἔστω πενταγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περὶ τὸ πενταγωνον κύκλος, ὁ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον δώδεκα πενταγώνοις τοῖς ΑΒΓΔΕ.



SIT pentagonum æquilaterum & æquiangulum ΑΒΓΔΕ, & circa ipſum circulus; ſumatur autem ejus centrum Z, & à Z ad ΓΔ perpendicularis ducatur ΖΗ: dico quod tricies ſub ΓΔ, ΖΗ continetur duodecim pentagonis ΑΒΓΔΕ æquale eſſe.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΓΔΖ τριγώνου, τὸ ἄρα πεντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ δέκα τριγώνοις ἐστὶν ἴσον. τὰ δὲ δέκα τρίγωνα δύο ἐστὶ πενταγώνοις καὶ πάντα ἑξάκις· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ δώδεκα πενταγώνοις. δώδεκα δὲ πενταγώνοις ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐστὶν ὑπιφάνεια· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ὑπιφανείᾳ.

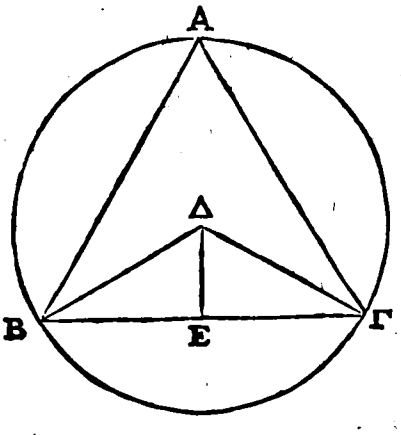
Jungantur ΓΖ, ΖΔ. & quoniam [per 41. 1.] quod ſub ΓΔ, ΖΗ continetur duplum eſt trianguli ΓΔΖ, erit quod quinquies continetur ſub ΓΔ, ΖΗ decem triangulis æquale. decem autem triangula ſunt duo pentagona; pariterque eorum ſextupla: ergo quod tricies ſub ΓΔ, ΖΗ continetur eſt æquale duodecim pentagonis. ſed duodecim pentagona ſunt dodecaedri ſuperficies: ergo quod tricies continetur ſub ΓΔ, ΖΗ ſuperficiei dodecaedri æquale erit.

ΟΜΟΙΩΣ δὴ δείξομεν ὅτι ἐὰν ᾖ τρίγωνον ἰσόπλευρον ὡς τὸ ΑΒΓ, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος, καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ κάθετος ἡ ΔΕ, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ὑπιφανείᾳ.

SIMILITER demonſtrabimus, ſi fuerit triangulum æquilaterum, ut ΑΒΓ, & circa ipſum circulus cujus centrum Δ, & ab eo perpendicularis ΔΕ, quod tricies ſub ΒΓ, ΔΕ continetur ſuperficiei icoſaedri æquale eſſe.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΒΓ, δύο ἄρα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ, καὶ πάντα τρίς· ἓξ ἄρα τρίγωνα τὰ ΔΒΓ ἴσα ἐστὶ τρισὶ τοῖς ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ. ἓξ δὲ τρίγωνα ὡς τὰ ΔΒΓ ἴσα ἐστὶ δυσὶ τοῖς ΑΒΓ, καὶ πάντα δεκάκις· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ ἴσον ἐστὶν εἴκοσι τοῖς ΑΒΓ τριγώνοις, τουτέστι τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ὑπιφανείᾳ· ὥστε ἔσται ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ὑπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ὑπιφάνειαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ.

Quoniam enim rurſus [per 41. 1.] quod ſub ΒΓ, ΔΕ continetur duplum eſt trianguli ΔΒΓ, erunt duo triangula æqualia ei quod continetur ſub ΒΓ, ΔΕ; pariterque eorum tripla: ſex igitur triangula ΔΒΓ æqualia ſunt tribus quæ ſub ΒΓ, ΔΕ continentur. at ſex triangula ΔΒΓ ſunt æqualia duobus ΑΒΓ triangulis; pariterque eorum decupla: ergo quod tricies ſub ΒΓ, ΔΕ continetur eſt æquale viginti triangulis ΑΒΓ, hoc eſt icoſaedri ſuperficiei. erit igitur ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita quod continetur ſub ΓΔ, ΖΗ [fig. præc.] ad id quod ſub ΒΓ, ΔΕ continetur [fig. annex.]



Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ὑπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ὑπιφάνειαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ πενταγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων εἰκοσαέδρου καὶ δωδεκαέδρου.

Corollarium.

Ex hoc vero perſpicuum eſt, ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe quod continetur ſub latere pentagoni & recta linea, quæ à centro circuli circa pentagonum deſcripti in ipſum latus perpendicularis ducitur, ad id quod continetur ſub latere icoſaedri & perpendiculari, quæ à centro circuli circa triangulum deſcripti ad ipſum latus ducta fuerit; nimirum dodecaedro & icoſaedro in eadem ſphæra deſcriptis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

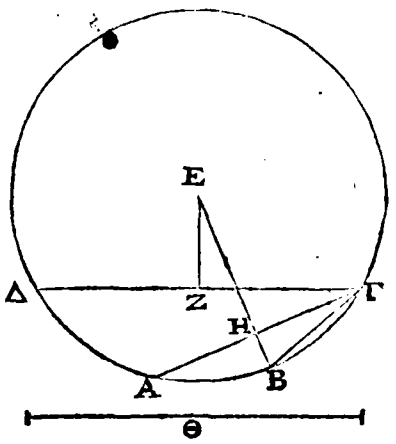
Τούτου δῆλον ὄντος, δεικτέον, ὅτι ἔστιν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ὑπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκο-

PROP. IV. THEOR.

Hoc probato, demonſtrandum erit, ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſae-

icosaedri ita esse latus cubi ad icosaedri latus.

EXponatur circulus ΔΒΓ comprehendens [per 2. 14.] & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum, & in ipso describatur trianguli quidem æquilateri latus ΓΔ, pentagoni vero latus ΑΓ; sumatur circuli centrum Ε, & ab eo ad ΔΓ, ΓΑ perpendiculares ducantur ΕΖ, ΕΗ, & producatur in directum ipsi ΕΗ recta linea ΗΒ; jungaturque ΒΓ, & exponatur cubi latus Θ: dico ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri ita esse Θ ad ipsam ΓΔ.



Quoniam enim [per 9. 13.] utriusque simul ΕΒΓ extrema ac media ratione sectæ major portio est ΒΕ, & est [per 1. 14.] utriusque quidem ΕΒΓ dimidia ΕΗ, ipsius vero ΒΕ [per cor. 1. 14.] dimidia ΕΖ: erit & ipsius ΕΗ extrema ac media ratione sectæ major portio ΕΖ. est autem & ipsius Θ extrema ac media ratione sectæ major portio ΓΑ, ut in dodecaedro [ad cor. 17. 13.] ostensum fuit: ut igitur Θ ad ΓΑ ita est [per 7. 14.] ΕΗ ad ΕΖ; ideoque [per 16. 6.] contentum sub Θ, ΖΕ est æquale ei quod sub ΓΑ, ΕΗ continetur. & quoniam est [per 1. 6.] ut Θ ad ΓΔ ita quod continetur sub Θ, ΕΖ ad contentum sub ΓΔ, ΕΖ; ei vero, quod sub Θ, ΕΖ continetur est æquale contentum sub ΓΑ, ΕΗ: erit [per 16. 6.] ut Θ ad ΓΔ ita contentum sub ΓΑ, ΕΗ ad id quod sub ΓΔ, ΕΖ continetur, hoc est [per cor. 3. 14.] ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri ita Θ ad ΓΔ.

ALITER

Demonstrare, ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse latus cubi ad icosaedri latus, hoc quidem præmisso.

LEMMA.

Sit circulus ΑΒΓ, & in eo describantur æquilateri pentagoni latera ΑΒ, ΑΓ, & jungatur ΒΓ; sumatur autem circuli centrum Δ, & jungatur ΑΔ, ipsique ΑΔ producatur in directum ΔΕ, ponatur ipsius ΑΔ dimidia ΔΖ, sitque ΗΓ ipsius ΓΘ tripla: dico quod sub ΑΖ, ΒΘ continetur pentagono æquale esse.

Jungatur enim ΒΔ. & quoniam ΑΔ dupla est ipsius ΔΖ, erit ΑΖ ipsius ΑΔ sesquialtera.

Ἐκκείσθω κύκλος περιλαμβάνων τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τουτέστιν εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ὁ ΔΒΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΔΒΓ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ ΓΔ, πενταγώνου δὲ ἡ ΑΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΔΓ, ΓΑ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐκβεβλήθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΗ εὐθεῖα ἡ ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἐκκείσθω κύβου πλευρὰ ἡ Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ συναμφοτέρου τῆς ΕΒΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΕ, καὶ ἔστι συναμφοτέρου μὲν τῆς ΕΒΓ ἡμίσεια ἡ ΕΗ, τῆς δὲ ΒΕ ἡμίσεια ἡ ΕΖ· καὶ τῆς ΕΗ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΕΖ. ἔστι δὲ καὶ τῆς Θ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ ΓΑ, ὡς ἐν τῷ δωδεκαέδρῳ ἐδείχθη· ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΖ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ Θ, ΖΕ τῷ ὑπὸ ΓΑ, ΕΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ Θ, ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΕΖ, τῷ δὲ ὑπὸ Θ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΑ, ΕΗ· ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΑ, ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΕΖ, τουτέστιν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ.

ΑΛΛΩΣ

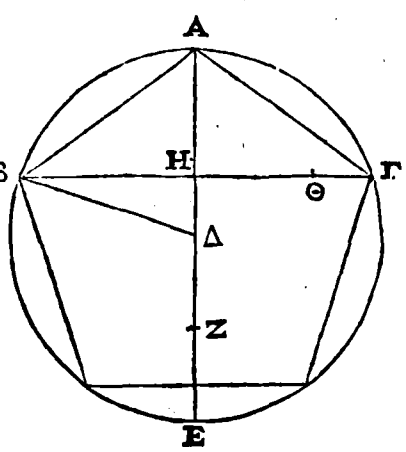
Δεῖξαι, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ὀπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ὀπιφάνειαν, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν περιγραφέντος τοῦδε.

ΛΗΜΜΑ.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ὅπι τὸ Δ ἐπεζεύχθω εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΔ εὐθεῖα ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῆς μὲν ΑΔ εὐθείας ἡμίσεια ἡ ΔΖ, ἡ δὲ ΗΓ τῆς ΓΘ τριπλῆ ἔστω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΘ ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ.

Ἀπὸ γὰρ τοῦ Β ὅπι τὸ Δ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΖ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ ἡ ΑΖ.

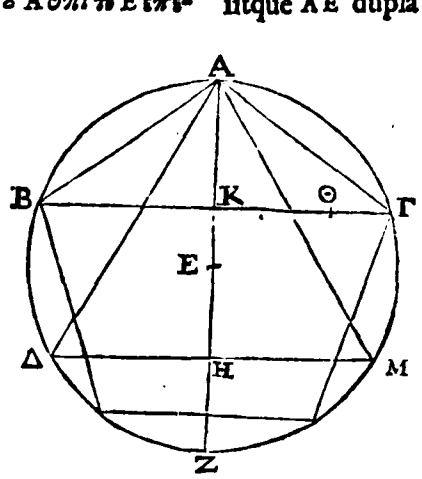
ΑΖ. πάλιν, ἐπεὶ τριπλῆ ἐστιν ἡ ΗΓ τῆς ΓΘ, διπλῆ δὲ ἡ ΗΘ τῆς ΘΓ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ τῆς ΘΗ· ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΘ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΗ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΓΗ. ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΗ ἴση ἐστί· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔ, ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΘΗ. τὸ δὲ ὑπὸ ΑΔ, ΒΗ δύο ἐστὶ τρίγωνα ὡς τὰ ΑΒΔ· καὶ τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ ἄρα δύο ἐστὶ ΑΒΔ· πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ δέκα τρίγωνά ἐστι. δέκα δὲ τρίγωνα δύο ἐστὶ πεντάγωνα· πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ δύο πενταγώνοις ἴσα ἐστί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΗΘ τῆς ΘΓ, τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ· δύο ἄρα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶν ἑνὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ, καὶ δέκα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶν πέντε τοῖς ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ, τουτέστι δύο πενταγώνοις· ὥστε πέντε τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ. πενταπλάσια δὲ τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ, ἐπεὶ δὴ πενταπλῆ ἐστιν ἡ ΘΒ τῆς ΘΓ, ἐστὶ δὲ κοινὸν ὕψος ἡ ΑΖ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΖ, ΒΘ ἴσον ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ.



ΤΟΥΤΟΥ δήλου ὄντος, νυνὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ περιλαμβάνων τὸ, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Α διὰ τοῦ Ε ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΕ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἔστω ἡ ΑΕ τῆς ΕΘ διπλῆ, τριπλῆ δὲ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΑΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΜ· τριγώνου ἄρα ἐστὶν ἰσοπλεύρου ἡ ΔΜ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΜ τρίγωνον. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΗ, ΘΒ ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΗ, ΗΔ τῷ ΑΔΜ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΔ οὕτως τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΔ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΗ· καὶ ὡς ἄρα δώδεκα αἱ ΘΒ πρὸς εἴκοσι ΔΗ οὕτω δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, τουτέστι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου. καὶ ἔστι δώδεκα μὲν αἱ ΒΘ δέκα αἱ ΒΓ, ἡ μὲν γὰρ ΒΘ τῆς ΘΓ ἐστι πενταπλῆ, ἡ δὲ ΒΓ τῆς ΘΓ ἑξαπλῆ·

tera. rurſus, quoniam ΗΓ tripla eſt ipſius ΓΘ, erit ΗΘ ipſius ΘΓ dupla: ſeſquialtera igitur eſt ΗΓ ipſius ΘΗ: quare ut ΖΑ ad ΑΔ ita ΓΗ ad ΗΘ: ideoque [per 16. 6.] contentum ſub ΑΖ, ΘΗ eſt æquale ei quod ſub ΔΑ, ΓΗ continetur. ſed ΓΗ eſt æqualis ΒΗ: ergo contentum ſub ΑΔ, ΒΗ eſt æquale ei quod ſub ΑΖ, ΘΗ continetur. contentum autem ſub ΑΔ, ΒΗ [per 41. 1.] eſt æquale duobus triangulis ut ΑΒΔ: quod igitur ſub ΑΖ, ΗΘ continetur æquale eſt duobus triangulis ΑΒΔ: ergo quinque rectangula contenta ſub ΑΖ, ΗΘ decem ſunt triangula. decem autem triangula duo pentagona ſunt: quinque igitur rectangula contenta ſub ΑΖ, ΗΘ duobus pentagonis ſunt æqualia. & quoniam ΗΘ eſt dupla ΘΓ, erit contentum ſub ΑΖ, ΗΘ duplum ejus quod ſub ΑΖ, ΘΓ continetur; ergo duo rectangula contenta ſub ΑΖ, ΘΓ ſunt æqualia uni quod continetur ſub ΑΖ, ΗΘ decem igitur rectangula contenta ſub ΑΖ, ΘΓ ſunt æqualia quinque quæ ſub ΑΖ, ΗΘ continentur, hoc eſt duobus pentagonis: ergo quinque contenta ſub ΑΖ, ΘΓ uni pentagono ſunt æqualia. quinque autem rectangula contenta ſub ΑΖ, ΘΓ ſunt æqualia ei quod continetur ſub ΑΖ, ΘΒ; quoniam ΘΒ quidem quintupla eſt ipſius ΘΓ, & ΑΖ eſt communis altitudo: quod igitur ſub ΑΖ, ΒΘ continetur uni pentagono eſt æquale.

Hoc demonſtrato, nunc exponatur circulus comprehendens & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum, atque in circulo ΑΒΓ deſcribantur æquilateri pentagoni latera ΒΑ, ΑΓ, & jungatur ΒΓ; ſumatur præterea circuli centrum Ε, & ab Α ad Ε ducatur ΑΕ, & producatur ΑΕ ad Ζ; ſitque ΑΕ dupla ipſius ΕΗ, ipſa vero ΚΓ ipſius ΓΘ tripla; & per Η ipſi ΑΖ ad rectos angulos ducatur ΔΜ: ergo [per cor. 1. 14.] ΔΜ eſt latus trianguli æquilateri, & æquilaterum eſt ΑΔΜ triangulum. & quoniam [per lem. præm.] rectangulum quidem contentum ſub ΑΗ, ΘΒ eſt æquale pentagono; contentum vero ſub ΑΗ, ΗΔ [per 41. 1.] æquale triangulo ΑΔΜ: erit ut rectangulum contentum ſub ΑΗ, ΘΒ ad rectangulum ſub ΑΗ, ΗΔ ita pentagonum ad triangulum. ut autem rectangulum contentum ſub ΑΗ, ΒΘ ad rectangulum ſub ΑΗ, ΗΔ ita [per 1. 6.] ΒΘ ad ΔΗ: & igitur ut duodecim ΘΒ ad viginti ΔΗ ita duodecim pentagona ad viginti triangula; hoc eſt, dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri. & duodecim quidem ΒΘ ſunt decem ΒΓ; etenim ΒΘ quintupla eſt [per conſtr.] ipſius ΘΓ, & ΒΓ ipſius ΘΓ ſextupla:



ideoque duodecim B Θ ſunt æquales decem B Γ. viginti autem Δ H ſunt decem Δ M; dupla enim eſt Δ M ipſius Δ H: ut igitur decem B Γ ad decem Δ M, hoc eſt ut B Γ ad Δ M, ita dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri. atque [per 8. & 17. 13.] eſt B Γ quidem cubi latus, Δ M vero latus icoſaedri: & igitur ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita B Γ ad Δ M, hoc eſt cubi latus ad latus icoſaedri.

δώδεκα ἄρα αἱ Β Θ ἴσαι εἰσὶ δέκα τῇ Β Γ. εἴκοσι δὲ ἡ Δ Η δέκα ἐστὶν αἱ Δ Μ, διπλῆ γὰρ ἡ Δ Μ τῆς Δ Η· ὡς ἄρα δέκα αἱ Β Γ πρὸς δέκα τὰς Δ Μ, τουτέστιν ὡς ἡ Β Γ πρὸς τὴν Δ Μ, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν. ἡ δὲ Β Γ ἐστὶν ἡ μὲν Β Γ ἡ τοῦ κύβου πλευρά, ἡ δὲ Δ Μ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρά· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως ἡ Β Γ πρὸς τὴν Δ Μ, τουτέστιν ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

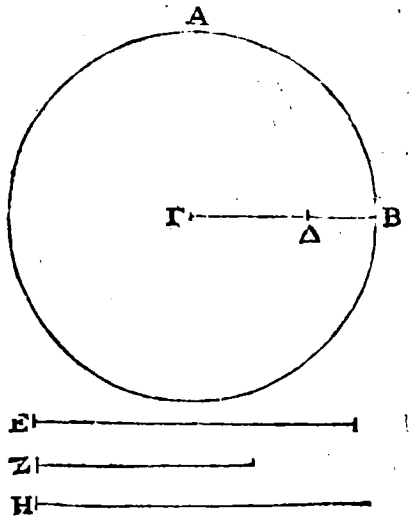
Prop. V. Theor.

Oſtendendum vero eſt etiam, qualibet recta linea extrema ac media ratione ſecta, quam rationem habet ea quæ poteſt quadratum totius & quadratum majoris portionis ad eam quæ poteſt quadratum totius & quadratum minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icoſaedri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Δεικτέον δή, ὅτι ἡ εὐθείας ἡσδηποτοῦν τμηθείσης ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ὃν λόγον ἔχει ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

SIT circulus A B comprehendens & dodecaedri pentagonum & [per 2. 14.] icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum, ſumaturque circuli centrum Γ, & à Γ ducatur recta linea utcunque Γ B, & ſecetur extrema ac media ratione in Δ ita ut Γ Δ ſit major portio: quare [per 5. & 9. 13.] Γ Δ eſt latus decagoni in eodem circulo deſcripti. exponatur [per 18. 13.] icoſaedri latus E, dodecaedri Z, & cubi H: ergo E eſt trianguli æquilateri latus, Z pentagoni in eodem circulo deſcripti, atque [per cor. 17. 13.] eſt Z ipſius H major portio. & quoniam E eſt æqualis lateri trianguli æquilateri; trianguli autem æquilateri latus [per 12. 13.] eſt potentia triplum ipſius B Γ: ergo quadratum ex E quadrati ex B Γ eſt triplum. ſuntque [per 4. 13.] quadrata ex B Γ, B Δ quadrati ex Γ Δ tripla; & permutando igitur ut quadratum ex E ad quadrata ex Γ B, B Δ ita quadratum ex Γ B ad quadratum ex Γ Δ. ſed [per 7. 14.] ut quadratum ex B Γ ad quadratum ex Γ Δ ita eſt quadratum ex H ad quadratum ex Z, eſt enim [per 17. 13.] Z major portio ipſius H: & igitur ut quadratum ex E ad quadrata ex Γ B, B Δ ita quadratum ex H ad quadratum ex Z; & permutando invertendoque: ergo ut quadratum ex H ad quadratum ex E ita quadratum ex Z ad quadrata ex Γ B, B Δ. quadrato autem ex Z æqualia ſunt quæ ex B Γ, Δ Γ fiunt quadrata; etenim [per 10. 13.] latus pentagoni poteſt & hexagoni & decagoni latus: ut igitur quadratum ex H ad quadratum ex



ΕΣτω κύκλος ὁ Α Β περιλαμβάνων τό,τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τὸ εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω τις ἀπὸ τοῦ Γ ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ Γ Β, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Δ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἔστω ἡ Γ Δ· δεκαγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἡ Γ Δ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου. ἐκκείσθω δὴ εἰκοσαέδρου μὲν πλευρὰ ἡ Ε, δωδεκαέδρου δὲ ἡ Ζ, κύβου δὲ ἡ Η· ἡ μὲν ἄρα Ε τριγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρά, ἡ δὲ Ζ πενταγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, ἡ δὲ Ζ τῆς Η μεῖζον ἐστὶ τμῆμα. καὶ ἐπεὶ ἡ Ε ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἰσοπλεύρου πλευρᾷ, ἡ δὲ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς Β Γ· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τοῦ ἀπὸ τῆς Β Γ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν Β Γ, Β Δ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ Γ Δ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὰ ἀπὸ Γ Β, Β Δ οὕτω τὸ ἀπὸ Γ Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Δ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Β Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Δ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ· μεῖζον γάρ ἐστι τμῆμα ἡ Ζ τῆς Η· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Β, Β Δ οὕτω τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ, καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ε οὕτω τὸ ἀπὸ Ζ πρὸς τὰ ἀπὸ Γ Β, Β Δ. τῷ δὲ ἀπὸ Ζ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ Β Γ, Δ Γ, ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου πλευράν, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ

Ε οὕτω

Ε ἔστω τὸ ἀπὸ ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ, ἕτως, εὐθεῖα ἡ ΖΗ διηιρημένη ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένη, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε, ἕτως, εὐθεῖα ἡ ΖΗ διηιρημένη ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένη, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. καὶ ἔστι ἡ μὲν Η κύβος πλευρά, ἡ δὲ Ε εἰκοσαέδρου.

Εαν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλασσον τμῆμα, ἕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου τὴν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ε ita quadrata ex ΒΓ, ΓΔ ad quadrata ex ΓΒ, ΒΔ. ſed [per 7. 14.] ut quadrata ex ΒΓ, ΓΔ ad quadrata ex ΓΒ, ΒΔ, ita, qualibet recta linea extrema ac media ratione ſecta, quadratum totius & majoris portionis ad quadratum totius & minoris portionis: & igitur ut quadratum ex Η ad quadratum ex Ε, ita, qualibet recta linea extrema ac media ratione ſecta, quadratum totius & majoris portionis ad quadratum totius & minoris portionis. ſed eſt Η quidem cubi latus, Ε vero icoſaedri.

Si igitur recta linea extrema ac media ratione ſecetur, erit ut ea quæ poteſt totam & majorem portionem ad eam quæ poteſt totam & minorem portionem, ita cubi latus ad latus icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Δεικτέον δὴ νῦν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου.

PROP. VI. THEOR.

Oſtendendum vero nunc eſt, ut latus cubi ad icoſaedri latus ita eſſe dodecaedri ſolidum ad ſolidum icoſaedri.

Επεὶ γὰρ ἴσοι κύκλοι περιλαμβάνουσι τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τὰ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων· αἱ δὲ τὰς σφαίρας οἱ ἴσοι κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, αἱ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα καθετοι ἀγόμεναι ἴσαι τε εἰσὶ καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων πίπτουσιν· ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τό, τε τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καὶ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον ἴσαι εἰσὶ, τυγχάνουσι, αἱ κάθετοι· ἰσοῦψεῖς ἄρα εἰσὶν αἱ πυραμίδες, αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνα καὶ αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνα. αἱ δὲ ἰσοῦψεῖς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ὡς ἄρα τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον ἕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· καὶ ὡς ἄρα δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα ἕτω δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ δώδεκα πεντάγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειά ἐστιν, εἴκοσι δὲ τρίγωνα ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειά ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν ἕτω δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βασεις ἐχούσας. καὶ εἰσὶ δώδεκα μὲν πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου, εἴκοσι δὲ πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δωδεκαέδρου

QUoniam enim [per 2.14.] æquales circuli comprehendunt & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum: in ſphæris autem æquales circuli æqualiter à centro diſtant; nam quæ à centro ſphæræ ad plana circulorum perpendiculares ducuntur & æquales ſunt & in centra circulorum cadunt; ergo quæ à centro ſphæræ ducuntur ad centra circulorum, quæ comprehendunt dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum, æquales ſunt, videlicet perpendiculares ipſæ; itaque & pyramides, quæ baſes habent dodecaedri pentagona & icoſaedri triangula, æqualtæ ſunt. pyramides autem æqualtæ [per 5. & 6.12.] inter ſe ſunt ut baſes: ut igitur pentagonum ad triangulum ita pyramis, cujus baſis eſt dodecaedri pentagonum & vertex centrum ſphæræ, ad pyramidem, cujus baſis eſt icoſaedri triangulum vertex autem ſphæræ centrum, ergo & ut duodecim pentagona ad viginti triangula ita duodecim pyramides, pentagonales baſes habentes, ad viginti pyramides quæ triangulares habent baſes. ſed duodecim pentagona ſunt dodecaedri ſuperficies, & viginti triangula ſuperficies icoſaedri: eſt igitur ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita duodecim pyramides, pentagonales baſes habentes, ad viginti pyramides, quæ triangulares baſes habent. & duodecim pyramides, pentagonales baſes habentes, ſunt dodecaedri ſolidum; viginti autem pyramides, quæ triangulares habent baſes, ſunt ſolidum icoſaedri: quare & ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita ſolidum dodecaedri ad icoſaedri ſolidum. ut autem dodecaedri ſuperfi-

cies ad ſuperficiem icoſaedri ita oſtenſum eſt [ad 4. 14.] eſſe latus cubi ad icoſaedri latus: & igitur ut latus cubi ad icoſaedri latus ita dodecaedri ſolidum ad ſolidum icoſaedri.

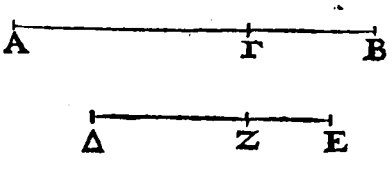
πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῦ εἰκοσαέδρυ ἕτως ἐδείχθη ἡ τῦ κύβυ πλευρὰ πρὸς τὴν τῦ εἰκοσαέδρυ πλευράν· ἡ ὡς ἄρα ἡ τῦ κύβυ πλευρὰ πρὸς τὴν τῦ εἰκοσαέδρυ πλευρὰν ἕτω τὸ στερεὸν τῦ δωδεκαέδρυ πρὸς τὸ στερεὸν τῦ εἰκοσαέδρυ.

PROP. VII. THEOR.

Deinde vero, ſi duæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ fuerint, in ſubjecta eas eſſe analogia, ita demonſtrabimus.

SEcetur enim AB extrema ac media ratione in Γ, & ejus major portio ſit AΓ; & ſimiliter ΔE extrema ac media ratione ſecetur in Z, ut ΔZ ſit ejus portio major: dico ut tota AB ad majorem portionem AΓ ita eſſe totam ΔE ΔZ majorem portionem.

Quoniam enim [per 17. 6.] rectangulum quidem ſub AB, BΓ eſt æquale quadrato ex AΓ; rectangulum vero ſub ΔE; EZ æquale quadrato ex ΔZ: erit ut rectangulum ſub AB, BΓ ad quadratum ex AΓ ita rectangulum ſub ΔE, EZ ad quadratum ex ΔZ: quare etiam [per 15. 5.] ut rectangulum quod quater continetur ſub AB, BΓ ad quadratum ex AΓ ita quod quater continetur ſub ΔE, EZ ad quadratum ex ΔZ. componendoque ut rectangulum quod quater continetur ſub AB, BΓ una cum quadrato ex AΓ ad quadratum ex AΓ ita quod quater continetur ſub ΔE, EZ una cum quadrato ex ΔZ ad quadratum ex ΔZ. ergo etiam [per 8.2.] ut quadratum ex utraque ſimul AB, BΓ ad quadratum ex AΓ ita quadratum ex utraque ſimul ΔE, EZ ad quadratum ex ΔZ: quare [per 22. 6.] & longitudine; ſc. ut utraque ſimul AB, BΓ ad AΓ ita utraque ſimul ΔE, EZ ad ΔZ: unde componendo ut utraque ſimul AB, BΓ una cum AΓ ad AΓ, hoc eſt duæ AB ad AΓ, ita utraque ſimul ΔE, EZ una cum ΔZ ad ΔZ, hoc eſt duæ ΔE ad ΔZ: pariterque antecedentium dimidia; videlicet ut AB ad AΓ ita ΔE ad ΔZ. quod erat demonſt.



Corollarium.

Iaque hoc [ad 5. 14.] demonſtrato; videlicet, qualibet recta linea extrema ac media ratione ſecta, quam rationem habet ea quæ poteſt quadratum totius & majoris portionis ad eam quæ poteſt quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icoſaedri. atque hoc etiam demonſtrato [ad 5. 14.] ut latus cubi ad icoſaedri latus, ita eſſe dodecaedri ſuperficiem ad ſuperficiem icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: & inſuper hoc [ad 6. 14.] cognito, ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita eſſe dodecaedrum ad ipſum icoſaedrum; propterea quod idem cir-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Καὶ ἐξῆς, ὅτι ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῶσιν, αἱ ἀναλογίαι εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ, δείξομεν ἕτως.

ΤΕτμήθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, μεῖζον δὲ τμῆμα αὐτῆς ἔστω ἡ ΑΓ· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΔΕ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἔστω ἡ ΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὅλη ἡ ΑΒ πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν ΑΓ ἕτως ὅλη ἡ ΔΕ πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν ΔΖ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΔΖ· ἔστι δὲ ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ ἕτως τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ ὡς τὸ τετράκις ἄρα ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τὴν ΑΓ ἐστιν ἕτω τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ ὡς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ ἕτω τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τῦ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΔΖ· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ συναμφοτέρυ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ ἕτω τὸ ἀπὸ συναμφοτέρυ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ μήκει, ὡς συναμφοτέρα ἡ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὴν ΑΓ ἕτω συναμφοτέρα ἡ ΔΕ, ΕΖ πρὸς ΔΕ· συνθέντι ἄρα ὡς συναμφότεροι αἱ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τὴν ΑΓ πρὸς τὴν ΑΓ ἕτω συναμφότεροι αἱ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ πρὸς τὴν ΔΖ, τυπῇ δύο αἱ ΔΕ πρὸς ΔΖ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἥμισυ, τυπῇ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΔΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Δεδειγμένυ τῦτο, ὅτι, εὐθείας ἡσθηποτῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης, ὃν λόγον ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τὸ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἐλάσσονος τμήματος, τῦτον ἔχει ἡ τῦ κύβυ πλευρὰ πρὸς τὴν τῦ εἰκοσαέδρυ πλευράν. δεδειγμένυ δὴ τῦτο, ὅτι ὡς ἡ τῦ κύβυ πλευρὰ πρὸς τὴν τῦ εἰκοσαέδρυ πλευράν, ἕτως ἡ τῦ δωδεκαέδρυ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῦ εἰκοσαέδρυ ἐπιφάνειαν τὴν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων· συνεστηκέναι δὲ καὶ τῦτο, ὅτι ὡς ἡ τῦ δωδεκαέδρυ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῦ εἰκοσαέδρυ ἐπιφάνειαν ἕτως καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκαέδρον πρὸς τὸ εἰκοσαέδρον, διὰ τὸ ὑπὸ τῦ αὐτῦ κύκλυ

κλὰ ϖ̃ειλαμβάνεσθαι τό, τε τ̃ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τ̃ εἰκοσαέδρου τρίγωνον· δῆλον ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, λόγον ἔξουσιν εὐθείας οἵας δηπ̃τ̃ν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τ̃ ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τ̃ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τ̃ ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τ̃ ἐλάσσονος τμήματος.

[Τούτων δὴ πάντων γνωρίμων ἡμῖν γενομένων, δῆλον ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον, τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον λόγον ἔχει ὃν εὐθείας οἵας δηπ̃τ̃ν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τὴν ὅλην μετὰ τ̃ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα.

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον οὕτως ἡ τ̃ δωδεκαέδρου ὑπὸ φάνεια πρὸς τὴν τ̃ εἰκοσαέδρου, τουτέστιν ὡς ἡ τ̃ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τ̃ εἰκοσαέδρου πλευράν· ὡς δὲ ἡ τ̃ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τ̃ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἐστὶν, εὐθείας ἧς δηπ̃τ̃ν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα· ὡς ἄρα τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον τ̃ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, οὕτως, εὐθείας ἧς δηπ̃τ̃ν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα.]

culus comprehendit & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum: conſtat, ſi in ipſa ſphæra deſcribatur & dodecaedrum & icoſaedrum, eandeminter ſe rationem habere, quam, ſi recta linea extrema ac media ratione ſecetur, habet ea quæ poteſt quadratum totius & majoris portionis ad eam quæ poteſt quadratum totius ac minoris portionis.

[Iſtis ergo omnibus jam notis, patet, ſi eidem ſphæræ inſcribantur dodecaedrum & icoſaedrum, eam rationem habere dodecaedrum ad icoſaedrum, quam, ſi recta quævis extrema ac media ratione ſecetur, ea quæ poteſt totam & portionem majorem ad illam quæ totam & minorem portionem poteſt.

Quoniam enim eſt [per 5.14.] ut dodecaedrum ad icoſaedrum ita dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, hoc eſt ita latus cubi ad icoſaedri latus; ut autem latus cubi ad icoſaedri latus, ita, qualibet recta linea extrema ac media ratione ſecta, potens quadratum totius & majoris portionis ad eam quæ poteſt quadratum totius & minoris portionis: ergo ut dodecaedrum ad icoſaedrum, quæ in eadem ſphæra deſcribuntur, ita, qualibet recta linea extrema ac media ratione ſecta, potens quadratum totius & majoris portionis ad eam quæ poteſt quadratum totius & minoris portionis.]

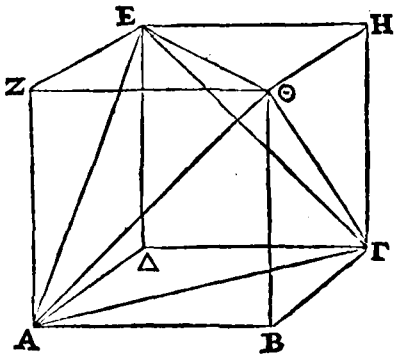
Cuncta autem iſta uncis concluſa rectius omitti poſſunt: etſi in omnibus quidem *Codicibus Græcis* reperiantur.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΣΣΑΡΕΣΚΑΙΔΕΚΑΤΟΝ,
ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΠΕΜΠΤΟΝ,
ΩΣ ΟΙΟΝΤΑΙ ΤΙΝΕΣ,
Ὡς ἄλλοι δὲ, ΥΨΙΚΛΕΟΥΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ περὶ τῶν ε'. σωμάτων δεύτερον.

EUCLIDIS,
UT QUIDAM ARBITRANTUR,
ELEMENTORUM
LIBER DECIMUSQUINTUS,
QUI ET SOLIDORUM QUARTUS,
Aut, *verius* juxta alios, HYPSICLIS ALEXANDRINI de Quinque Corporibus Liber ſecundus.

PROP. I. PROBL.
In dato cubo *pyramidem deſcribere.

SIT datus cubus ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ, in quo oporteat pyramidem deſcribere. jungantur ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ, ΑΘ, ΕΘ, ΘΓ. itaque perſpicuum eſt triangula ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΓΘΕ æquilatera eſſe; quadratorum enim diametri ſunt eorum latera: pyramis igitur eſt ΑΕΓΘ [per 26. def. 11.] & deſcripta eſt in dato cubo. quod erat faciendum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.
Εἰς τὴν δοθεῖσαν κύβον πυραμίδα ἐγγράψαι.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κύβος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, εἰς ὃν δεῖ πυραμίδα ἐγγράψαι. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ, ΑΘ, ΕΘ, ΘΓ. φανερὸν δὴ ὅτι τὰ ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΓΘΕ τρίγωνα ἰσόπλευρά ἐστι, τετραγώνων γὰρ εἰσὶ διάμετροι αἱ πλευραί· πυραμὶς ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕΓΘ, ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν δοθέντα κύβον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. II. PROBL.
In data pyramide octaedrum deſcribere.

SIT data pyramis ΑΒΓΔ, cujus latera ſecentur bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, atque jungantur ΘΚ, ΘΛ, ΕΖ, ΖΗ & reliquæ.

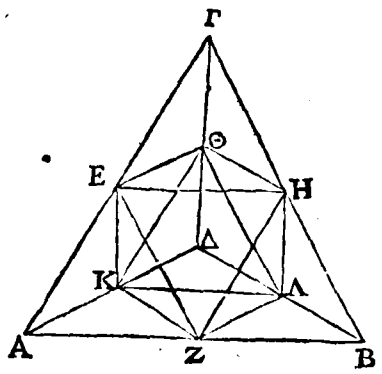
ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.
Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

ΕΣΤΩ ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ἡ ΑΒΓΔ, τετμήσθω δίχα ταῖς Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημείοις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΚ, ΘΛ, ΕΖ, ΖΗ καὶ αἱ λοιπαί.

* Sive potius *tetraedron*, quod & in ſequentibus intelligendum eſt.

* καὶ

* καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ διπλῆ ἐστιν ἑκατέρας τ῀ ΘΚ, ΗΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τ῀ ΗΖ καὶ παράλληλος. ὁμοίως καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΖΚ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΚΖΗ. λέγω ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τ῀ ΚΛ καθῶσιν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ΕΖΒΗ, ΖΓΕΗ, ΕΖΘΗ, ΘΚΖΗ, ὁμοίως δείξομεν τὰ ἐπὶ τ῀ ΘΚΖΗ τετραγώνου ἰσόπλευρα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

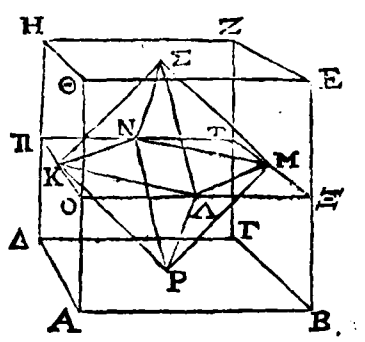


* quoniam igitur ΑΓ dupla eſt utriuſque ΘΚ, ΗΖ, erit ΘΚ ipſi ΗΖ æqualis & parallela. ſimiliter & ΘΗ æqualis & parallela ipſi ΖΚ: æquilaterum igitur eſt ΘΚΖΗ. dico & rectangulum eſſe. ſi enim ab ipſa ΚΛ perpendiculares ducantur ad plana ΕΖΒΗ, ΖΓΕΗ, ΕΖΘΗ, ΘΚΖΗ, ſimiliter demonſtrabimus quæ in quadrato ΘΚΖΗ æquilatera eſſe. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Εἰς τ῀ δοθέντα κύβον ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

ΕΣτω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα ἐφεξῆς τῶν τετραγώνων τὰ Κ, Λ, Μ, Ν· λέγω ὅτι τὸ ΚΛΜΝ τετράγωνόν ἐστιν. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τ῀ Κ, Λ, Μ, Ν σημείων τ῀ ΔΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΠΟ, ΟΞ, ΞΤ, ΤΠ. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν ἡ ΠΟ τ῀ ΟΚ, ἡ δὲ ΞΟ τ῀ ΟΛ, ἴση ἡ ΠΟ τῇ ΞΟ, ἀπὸ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΟΚ τῇ ΟΛ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΟΛ. ἀπὸ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ἀπὸ ΜΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΛΞ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ἀπὸ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΜΛ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΜΝ. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. εἰλήφθω τ῀ ΒΔ, ΕΗ δύο τετράγωνα, καὶ τὰ κέντρα τὰ Ρ, Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΚ, ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ, ΣΚ, ΣΛ, ΣΜ, ΣΝ. καὶ φανερὸν ὅτι ἰσόπλευρά ἐστι τὰ περιεχόμενα τὸ ὀκτάεδρον τρίγωνα· τῷ γὰρ αὐτῷ λόγῳ δοθήσεται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



PROP. III. PROBL.

In dato cubo octaedrum deſcribere.

SIT datus cubus ΑΒΓΔΕΖΗΘ, & ſumantur centra inſiſtentium quadratorum Κ, Λ, Μ, Ν: dico ΚΛΜΝ quadratum eſſe. ducantur enim per Κ, Λ, Μ, Ν ipſis ΔΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ parallelæ ΠΟ, ΟΞ, ΞΤ, ΤΠ. quoniam igitur ΠΟ quidem dupla eſt ipſius ΟΚ, & ΞΟ dupla ipſius ΟΛ, ſuntque æquales ΠΟ, ΟΞ; erunt & ΟΚ, ΟΛ inter ſe æquales: quadratum igitur ex ΚΛ [per 47. 1.] duplum eſt quadrati ex ΟΛ. eadem ratione & quadratum ex ΜΛ duplum eſt quadrati ex ΛΞ: ergo quadratum ex ΚΛ quadrato ex ΜΛ eſt æquale, & ipſa ΚΛ ipſi ΜΛ æqualis: æquilaterum igitur eſt ΚΛΜΝ. & conſtat etiam illud rectangulum eſſe. ſumantur duo quadrata ΒΔ, ΕΗ, ipſorumque centra Ρ, Σ; atque jungantur ΡΚ, ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ, ΣΚ, ΣΛ, ΖΜ, ΣΝ. perſpicuum eſt æqualia triangula, quæ octaedrum efficiunt, æquilatera eſſe; hoc enim eadem ratione demonſtrabimus. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι.

ΕΙλήφθω τ῀ περὶ τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΕ, ΑΔΕ τρίγωνα κύκλων τὰ κέντρα τὰ Θ, Λ, Η, Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΘ, ΗΚ, ΛΚ, ΛΘ· λέγω ὅτι ΗΘΚΛ τετράγωνόν ἐστιν. ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Θ, Κ, Λ, τῇς ΕΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ παράλληλοι αἱ

PROP. IV. PROBL.

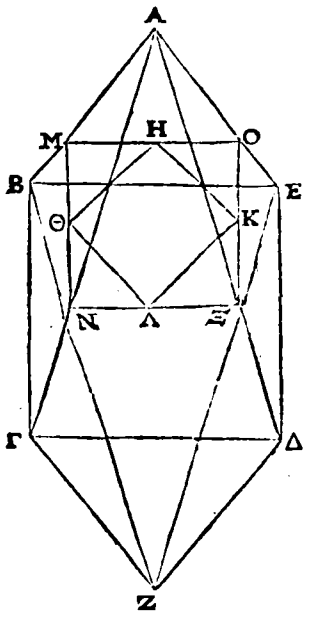
In dato octaedro cubum deſcribere.

SUmantur [per 5. 4.] centra circulorum qui ſunt circa triangula ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΕ, ΑΔΕ, quæ ſint Θ, Λ, Η, Κ; atque ΗΘ, ΗΚ, ΛΚ, ΛΘ jungantur: dico ΗΘΚΛ quadratum eſſe. ducantur per Η, Θ, Κ, Λ ipſis ΕΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ paral-

* Univerſus hic liber decimus quintus corruptiſſimus eſt. Verum licet demonſtrationis modus abhorreat ab illo Veterum caſtigatiſſimo, in aliis propoſitionibus res aliquo ſaltem modo conficitur; in hac vero propoſitione quæ ſequuntur propoſitum nullo modo attingunt. liceat igitur breviter oſtendere per conſtructionem prædictam octaedrum in tetraedro eſſe deſcriptum. Quoniam ΔΑ & ΔΓ biſecantur in Κ & Θ, patet [ex 4. 6.] ΚΘ eſſe æqualem dimidiæ ipſius ΑΓ; eadem ratione ΘΛ æqualis eſt dimidiæ ipſius ΓΒ, item ΚΕ & ΛΗ dimidiæ ipſius ΔΓ æquales: ſimiliter ΘΕ æqualis eſt dimidiæ ipſius ΑΔ, item ΘΗ dimidiæ ipſius ΔΒ, & ΕΗ dimidiæ ipſius ΑΒ: pariterque ΚΛ, ΔΖ & ΖΚ ſunt æquales dimidiis ipſarum ΑΒ, ΑΔ & ΔΒ. Sed [per 26. def. 11.] ſex tetraedri latera ΑΒ, ΒΔ, ΔΑ, ΑΓ, ΓΒ, ΓΔ ſunt inter ſe æqualia; igitur & rectæ ΘΚ, ΘΛ, ΘΕ, ΘΗ, ΘΓ, ΖΕ, ΖΚ, ΖΗ, ΖΛ, ΗΛ, ΕΚ, ΕΗ ſunt inter ſe æquales. unumquodque igitur triangulorum ΘΚΛ, ΘΚΕ, ΘΕΗ, ΘΗΛ, ΖΕΗ, ΖΕΚ, ΖΚΛ, ΖΛΗ eſt æquilaterum: ſolidum igitur ΘΚΕΖΗΛ eſt octaedrum, cujus ſex anguli ſolidi Θ, Κ, Ε, Ζ, Η, Λ ſunt in mediis punctis ſex laterum dati tetraedri. quod erat demonſtrandum.

lelæ

lelæ MO, MN, NΞ, ΞO. quoniam igitur æquilaterum eſt ABΓ triangulum, recta linea quæ à puncto A ducitur ad Θ centrum circuli circa triangulum ABΓ deſcripti bifariam ſecat angulum ad A trianguli ABΓ: æqualis igitur eſt [per 4. 1.] NΘ ipſi MΘ. eadem ratione & MH eſt æqualis HO. quoniam autem MN eſt æqualis MO & MO ipſi OΞ; erit igitur & NΘ æqualis MH, & ΘM ipſi HO & MH ipſi OK. ſuntq; anguli ΘMH, HOK recti: ergo [per 4.1.] HΘ ipſi HK eſt æqualis. eadem ratione & reliquæ æquales erunt. cum igitur parallelogrammum ſit HΘKΛ [per 7. 11.] in uno erit plano. & cum uterque angulorum MHΘ, OHK ſit dimidius recti, reliquus ΘHK [per 13. 1.] rectus erit; ſimiliter & reliqui: quadratum igitur eſt HΘΛK. poſſumus autem à principio ſumentes centra H, Θ, K, Λ, ducenteſque parallelas MN, NΞ, ΞO, OM jungere HΘ, ΘΛ, ΛK, KH, & dicere HΘKΛ quadratum eſſe. quod ſi ſumentes reliquorum triangulorum centra, ipſa jungamus; oſtendentur & reliqua quadrata eſſe, habebimuſque in dato octaedro deſcriptum cubum. quod erat faciendum.

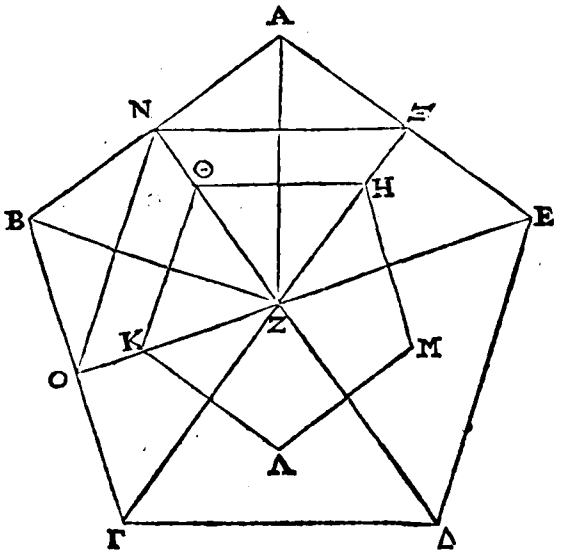


MO,MN,NΞ,ΞO. ἐπεὶ ἴση ἐστὶ πλευρὰ τὸ ABΓ τρίγωνον, ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ Θ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ABΓ τρίγωνον κύκλου δίχα τέμνει τὴν πρὸς τῷ A τῷ ὑπὸ ABΓ τριγώνου· ἴση ἄρα ἡ NΘ τῇ MΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ MH τῇ HO. ἐπεὶδὴ δὲ ἡ MN τῇ MO, καὶ ἡ MO τῇ OΞ ἐστιν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ NΘ τῇ MH, καὶ ἡ ΘM τῇ HO καὶ ἡ MH τῇ OK. αἱ δὲ ὑπὸ ΘMH, καὶ HOK ὀρθαί· ἐξ οὗ φανερὸν ὅτι ἡ HΘ ἴση ἐστὶ τῇ HK. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ λοιπαί. ἐπεὶ οὖν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ HΘKΛ, ἐστὶ δὲ καὶ ἰσόπλευρον. καὶ ἐπεὶ ἡμισύ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ MHΘ, OHK ὀρθῆς, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΘHK ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαί· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ HΘKΛ. δυνατὸν δὲ τὰ ἐξ ἀρχῆς λαμβάνοντα τὰ H, Θ, K, Λ κέντρα. καὶ παραλλήλους ἀγαγόντας τὰς MN, NΞ, ΞO, OM ἁπτεσθαι τὰς HΘ, ΘΛ, ΛK, KH, καὶ εἰπεῖν τὸ HΘKΛ τετράγωνον. ἐὰν δὴ λάβωμεν καὶ τὰ τῶν λοιπῶν τριγώνων τὰ κέντρα καὶ ἁπτεσθαι ποιήσωμεν καὶ τὰ αὐτὰ, δείξομεν τὰ λοιπὰ τετράγωνα, καὶ ἔχομεν εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. V. Probl.

In dato icoſaedro dodecaedrum deſcribere.

EXponatur pentagonum icoſaedri ABΓΔE, & [per 5. 4.] ſumantur centra circulorum qui ſunt circa triangula AZE, AZB, BZΓ, ΓZΔ, ΔZE, videlicet H, Θ, K, Λ, M, junganturque HΘ, ΘK, KΛ, ΛM, MH: & rurſus junctæ ZH, ZΘ, ZK producantur ad puncta Ξ, N, O, & ita rectas lineas EA, AB, BΓ in Ξ, N, O punctis bifariam ſecabunt, atque erit [per 4.6] ut NΞ ad NO ita HΘ ad ΘK; æqualis igitur eſt & HΘ ipſi ΘK. ſimiliter autem & reliqua pentagoni HΘKΛM latera æqualia oſtendentur. dico & æquiangulum eſſe. quoniam enim duæ NΞ, NO parallelæ duabus HΘ, ΘK æquales angulos continent; & reliqua manifeſta ſunt. intelligatur à puncto Z



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι.

ΕΚκείσθω πενταγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου τὸ ABΓΔE, καὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν περὶ τὰ AZE, AZB, BZΓ, ΓZΔ, ΔZE τρίγωνα, τὰ H, Θ, K, Λ, M, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ HΘ, ΘK, KΛ, ΛM, MH· καὶ πάλιν ἐπεζεύχθεισαι αἱ ZH, ZΘ, ZK ἐκβεβλήθωσαν ἐπὶ τὰ Ξ, N, O, δίχα δὴ τμηθήσονται αἱ EA, AB, BΓ, τοῖς Ξ, N, O σημείοις, καὶ ὡς ἡ NΞ πρὸς NO οὕτως ἡ HΘ πρὸς ΘK· ἴση ἄρα καὶ ἡ HΘ τῇ ΘK. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ HΘKΛM πενταγώνου πλευραὶ ἴσαι δειχθήσονται. λέγω ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ NΞ, NO δυσὶ ταῖς HΘ, ΘK ἴσας γωνίας περιέχουσι, καὶ τὰ λοιπὰ φανερά. νενοήσθω ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ τοῦ

ΑΒΓΔΕ πενταγώνῳ ἐπίπεδον καθετος ἠγμένη, ἥτις πεσεῖται ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου. ἐὰν δὴ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος, ἐπιζευχθῶμεν, καὶ διὰ τοῦ Θ τῇ ΖΝ παράλληλον αὐτῇ ἀγάγωμεν, φανερὸν ὅτι συμβαλεῖ τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ καθέτῳ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ παράλληλος ὀρθὴν γωνίαν περιέξει μετὰ τῆς ἀπὸ τοῦ Ζ καθέτου. πάλιν, ἐὰν ἐπιζευχθῶμεν ἀπὸ τῶν Ξ, Ο ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλου, καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ *Θ τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὰ Η, Κ, φανερόν· ὅτι ἡ διὰ ΖΝ ἐπίπεδος ὀρθὰς περιέξει μετ' αὐτῆς. ἐξ ὧν φανερὸν ὅτι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον.

ad planum pentagoni ΑΒΓΔΕ ducta perpendicularis, quæ cadet in centrum circuli circa pentagonum descripti. si igitur à puncto Ν ad punctum, in quod dicta perpendicularis cadit, rectam lineam ducamus, & per Θ ducamus ipsi parallelam; perspicuum est hanc perpendiculari à Ζ occurrere, & parallelam per Θ rectum angulum continere cum perpendiculari. rursus, si à punctis Ξ, Ο ad centrum circuli circa pentagonum ΑΒΓΔΕ descripti rectas lineas jungamus; & à puncto, in quo linea per Θ ducta occurrit perpendiculari ex Ζ, ad Η, Κ puncta rectas lineas ducamus: manifestum est ipsas cum dicta perpendiculari rectos angulos continere. ex quo perspicue constat pentagonum ΗΘΚΛΜ esse in uno plano.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Τῶν πέντε σωμάτων τὰς πλευρὰς καὶ γωνίας ἐξευρεῖν.

ΔΕΙ εἰδέναι ἡμᾶς, ὅτι ἐάν τις ἐρωτᾷ ἡμᾶς πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ εἰκοσάεδρον, φήσομεν ἔτως. φανερὸν ὅτι ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιέχεται τὸ εἰκοσάεδρον, καὶ ὅτι ἕκαστον τριγώνου ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται· δεῖ δὴ ἡμᾶς πολλαπλασιάσαι τὰ εἴκοσι τρίγωνα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, γίνεται δὲ ἑξήκοντα, ὧν ἥμισυ γίνεται τριάκοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ δωδεκαέδρου. ἐπεὶ δὲ δώδεκα πεντάγωνα περιέχει τὸ δωδεκάεδρον, πάλιν δὲ ἕκαστον πενταγώνου ἔχει πέντε εὐθείας, ποιοῦμεν δωδεκάκις πέντε, καὶ γίνονται ἑξήκοντα· πάλιν τὸ ἥμισυ γίνεται τριάκοντα. λαβὲ τόδε ἥμισυ ποιοῦμεν, ἐπειδὴ ἑκάστη πλευρὰ, κἂν τε ἡ τριγώνου ἢ πενταγώνου ἢ τετραγώνου, ὡς ἐπὶ κύβου, οὐκ ἀδυτέρως λαμβάνεται. ὁμοίως δὲ τῇ αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐπὶ κύβου καὶ ἐπὶ τῆς πυραμίδος καὶ τοῦ ὀκτάεδρου τὰς αὐτὰς ποιήσας εὑρήσεις τὰς πλευράς.

Εἰ δὲ βουληθείης πάλιν ἑκάστου τῶν πέντε σχημάτων εὑρεῖν τὰς γωνίας, πάλιν τὰ αὐτὰ ποιήσας, μερίζε κατὰ τὰ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα μίαν γωνίαν τοῦ στερεοῦ· οἷον, ἐπειδὴ τῶν μὲν εἰκοσαέδρου γωνίαν περιέχουσι ε' τρίγωνα, μέρισε παρὰ τὰς ε', γίνονται δώδεκα γωνίαι τοῦ εἰκοσαέδρου. ἐπεὶ δὲ τὸ δωδεκάεδρον τρία πεντάγωνα περιέχουσι τῶν γωνίαν, μέρισε κατὰ τὰ τρία, ἓξ ἕξεις κ' γωνίας ὅσας τὸ δωδεκαέδρου. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εὑρήσεις τὰς γωνίας.

PROP. VI. PROBL.

Quinque figurarum latera & angulos invenire.

OPortet autem scire, si quis interroget nos quot latera icosaedrum habeat, ita respondendum esse. patet icosaedrum contineri sub viginti triangulis, & unumquodque triangulum sub tribus rectis lineis comprehendi: multiplicanda sunt igitur viginti triangula per numerum laterum trianguli; & fient sexaginta, cujus dimidium triginta. similiter autem & in dodecaedro: quoniam enim duodecim pentagona dodecaedrum continent, & unumquodque pentagonum habet quinque rectas lineas; conficientur decies quinque, & fient sexaginta, cujus rursus dimidium triginta: dimidium autem idcirco accipimus, quod singula latera (sive sit triangulum, sive pentagonum, sive quadratum, ut in cubo) bis sumantur. eadem methodo & ratione utentes, & in cubo, & in pyramide, & in octaedro latera inveniemus.

Si vero singularum quinque figurarum anguli inveniendi sint, rursus eadem facientes, partiemur per numerum planorum, quæ unum solidi angulum continent: ut quoniam icosaedri angulum continent quinque triangula; partiemur per quinque: erunt duodecim anguli in icosaedro. quoniam autem tria pentagona dodecaedri continent angulum; partiemur per tria, & habebimus angulos viginti in dodecaedro. similiter in reliquis figuris anguli invenientur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Τῶν ὑπὸ τῶν πέντε στερεῶν ἑκάστου περιεχόντων κλίσιν εὑρεῖν.

ΕΖΗΤΗΤΗ πῶς ἐφ' ἑκάστου τῶν ε' στερεῶν σχημάτων, ἑνὸς ἐπιπέδου τῶν περιεχόντων ὁποιονδηποτοῦν δοθέντος, εὑρίσκεται καὶ ἡ κλίσις, ἐν ᾗ κέκλιται πρὸς ἄλληλα τὰ περιέχοντα ἐπίπεδα ἑκάστου τῶν σχημάτων. ἡ δὲ εὕρεσις, ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον. ὅπου μὲν ἐπὶ κύβου

PROP. VII. PROBL.

Planorum, quæ singulas quinque figuras continent, inclinationem invenire.

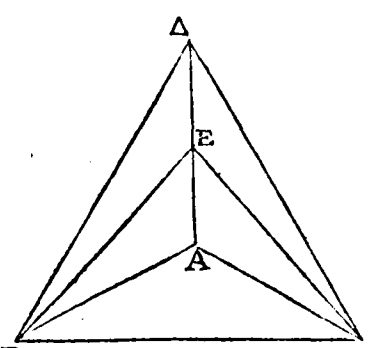
QUæsitum est quomodo, in unaquaque quinque solidarum figurarum, dato uno planorum continentium, inveniatur inclinatio planorum quæ ipsam continent. inventio autem, ut narravit Isidorus magnus præceptor noster, hoc modo se habet. in cubo quidem

* Ita restituimus ex conjectura. Prius erat τῇ διὰ τοῦ Ζ ἐπιζευγνυμένῃ ὀρθῇ, ἃ περιέξει &c. nullo plane sensu.

plana, quæ ipſum continent, ad rectos inter ſe angulos inclinari manifeſtum eſt. in pyramide vero, expoſito uno triangulo, centris quidem terminis unius lateris, intervallo autem recta linea, quæ à vertice trianguli ad baſim perpendicularis ducitur, circumferentiæ deſcriptæ ſe mutuo ſecent; à ſectione ad centra junctæ rectæ lineæ continebunt inclinationem planorum quæ pyramidem comprehendunt. at in octaedro, à latere trianguli deſcripto quadrato, & centris quidem terminis diametri quadrati, intervallo autem ſimiliter perpendiculari, quæ à vertice trianguli ad baſim ducitur, deſcribantur circumferentiæ; atque rurſus rectæ lineæ à communi ſectione ad centra junctæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis ejus quam inquirimus. in icoſaedro autem, à latere trianguli deſcripto pentagono, jungatur recta linea quæ duobus lateribus ſubtenditur, & centris quidem terminis ejus, intervalloque perpendiculari ipſius trianguli deſcriptis circumferentiis; rectæ lineæ à communi ſectione ad centra junctæ continebunt ſimiliter angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum ipſius icoſaedri. denique in dodecaedro, expoſito uno pentagono, & juncta ſimiliter recta linea quæ duobus lateribus ſubtenditur, centris quidem terminis ipſius, intervallo autem perpendiculari, quæ à bipartita ſectione ad latus pentagoni parallelum ducitur, deſcribantur circumferentiæ; & à puncto, in quo conveniunt, ad centra ſimiliter junctæ rectæ lineæ continebunt angulum, reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum dodecaedri.

Hunc quidem vir ille clariſſimus de prædictis ſermonem habuit, cum demonſtratio eorum ſibi manifeſta videretur: ſed ut contemplatio demonſtrativa perſpicue appareat, ſermonem in unoquoque explicabo; & primum in pyramide.

* Intelligatur pyramis ΑΒΓΔ quatuor triangulis æquilateris contenta, cujus baſis ΑΒΓ & vertex Δ punctum: ſecto autem latere ΑΔ bifariam in Ε, jungantur ΒΕ, ΕΓ. & quoniam æquilatera ſunt ΑΔΒ, ΑΔΓ triangula, & bifariam ſecta eſt ΑΔ; erunt [per 8. 1.] ΒΕ, ΕΓ ad ipſam ΑΔ perpendiculares. dico angulum ΒΕΓ acutum eſſe. quoniam enim ΑΓ dupla eſt ipſius ΑΕ, erit quadratum ex ΑΓ quadrati ex ΑΕ quadruplum. ſed [per 47. 1.] quadratum ex ΑΓ æquale eſt quadratis ex ΑΕ, ΕΓ, ex quibus quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΕ rationem habet quam 4 ad 3, atque eſt ΓΒ ipſi ΒΒ æqualis: quadratum igitur ex ΒΓ minus eſt quadratis ex ΒΕ, ΕΓ; ideoq; [per converſ. 13. 2.] angulus ΒΕΓ eſt acutus. quoniam igitur duorum pla-



κατ' ὀρθὰς τέμνουσι γωνίαν τὰ περιέχοντα αὐτὸν ἐπίπεδα ἀλλήλοις, φανερόν. ἐπὶ δὲ τῆς πυραμίδος, ἐκτεθέντος ἑνὸς τριγώνου, κέντροις μὲν τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῷ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν καθέτῳ ἀγομένῃ, περιφέρειαι γραφεῖσαι τεμοῦσιν ἀλλήλας· αἱ ἀπὸ τῶν τομῶν ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα ἐπιπέδων. ἐπὶ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος τετραγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς διαγωνίου, διαστήματι δὲ ὁμοίως τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γραφόμεναι περιφέρειαι, καὶ πάλιν αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τὴν ἐπιζευγνυμένης κλίσεως. ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπεζεύχθω ἡ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσα εὐθεῖα, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφεισῶν περιφερειῶν, αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι περιέξουσι τὴν λείπουσαν, ὁμοίως εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τὴν κλίσεως τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, ἐκτεθέντος ἑνὸς πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης ὁμοίως τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης εὐθείας, κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀγομένῃ καθέτῳ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν παρ' ἀλλήλην αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου γραφόμεναι περιφέρειαι, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι ὁμοίως περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τὴν κλίσεως τῶν ἐπιπέδων τοῦ δωδεκαέδρου.

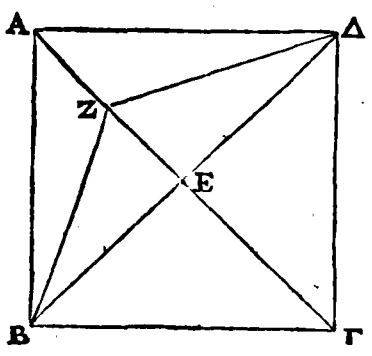
Οὕτω μὲν ἦν ὁ εἰρημένος εὐκλείδατος ἀνὴρ τὴν περὶ τῶν εἰρημένων διδοὺς λόγον, σαφῶς ἐφ' ἑκάστου φαινομένης αὐτῷ τῆς ἀποδείξεως· ἐπὶ δὲ τὸ προδηλον ποιῆσαι τὴν ἐν αὐτῇ ἀποδεικτικὴν θεωρίαν, τὸν λόγον ἐφ' ἑκάστου σαφηνίσω· καὶ πρότερον ἐπὶ τῆς πυραμίδος.

* ΝΕΝΟΗΣΘΩ πυραμὶς ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχομένη ἡ ΑΒΓΔ, ἧς ΑΒΓ βάσεως οὔσης κορυφὴ τὸ Δ· καὶ τμηθείσης τῆς ΑΔ πλευρᾶς δίχα κατὰ τὸ Ε, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρά ἐστι τὰ ΑΔΒ, ΑΔΓ τρίγωνα, καὶ δίχα τέτμηται ἡ ΑΔ· αἱ ΒΕ, ΕΓ ἄρα καθετοί εἰσιν ἐπὶ τὴν ΑΔ. λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία ὀξεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΑΕ, τετραπλάσιον ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ, ὧν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ λόγον ἔχει ὃν δ' πρὸς γ', καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΓΕ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΒΓ ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ ΒΕ, ΕΓ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ. ἐπεὶ οὖν δύο ἐπιπέδων

* Sequitur ipſius *Hypſiclis* demonſtratio eorum quæ tradidit *Iſidorus*.

τ ΑΒΔ, ΑΔΓ κοινὴ τομή ἐστιν ἡ ΑΔ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ πρὸς ὀρθὰς εἰσιν εὐθεῖαι ἐν ἑκατέρῳ τ ἐπιπέδων ἠγμέναι αἱ ΒΕ, ΕΓ, καὶ ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν· ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ἄρα γωνία ἡ κλίσις ἐστὶ τ ἐπιπέδων. Ϛ ἔστι δεδομένη, δέδοται γὰρ ἡ ΒΓ πλευρὰ ἴσου τ τριγώνου, καὶ ἑκατέρα τ ΕΒ, ΕΓ κάθετος ἴσου τ ἰσοπλεύρου τριγώνου· κέντροις τοίνυν τοῖς Β, Γ, τυπτοῖς τοῖς πέρασι τ μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ τ τριγώνου καθέτῳ, γεγράφθωσαν περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον, Ϛ αἱ ἀπ' αὐτ ἐπὶ τὰ Β, Γ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν κλίσιν τ ἐπιπέδων. τοῦτο δὲ ἦν τὸ εἰρημένον. καὶ ὅτι μὲν κέντροις τοῖς Β, Γ, διαστήματι δὲ τῇ τ τριγώνου καθέτῳ, γεγράφθωσαν κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους, φανερόν· ἑκατέρα γὰρ τ ΒΕ, ΕΓ μείζων ἐστὶ τ ἡμισείας τ ΒΓ· αἱ δὲ κέντροις τοῖς Β, Γ, διαστήματι δὲ τῇ ἡμισείᾳ τ ΒΓ, γεγράφθωσαν κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. εἰ δὲ ἐλάττων ἦ, οὐδὲ ἐφάπτονται οὐδὲ τέμνουσιν· εἰ δὲ μείζων, πάντως τέμνουσι, Ϛ ὅτως ὁ περὶ τ πυραμίδος σαφής τε Ϛ ἀκόλουθος τοῖς ἀποδείξεσι φαίνεται λόγος.

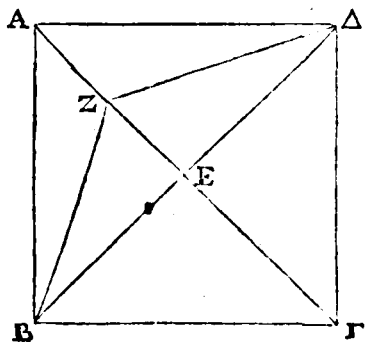
ΣΥΝΝΟΕΙΣΘΩ πάλιν ἐπὶ τετραγώνου τ ΑΒΓΔ πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ Ε, καὶ τὰ περιέχοντα αὐτὴν δίχα τ βάσεως τρίγωνα ἰσόπλευρα· ἔσται δὲ ἡ ΑΒΓΔΕ πυραμὶς ἥμισυ ὀκταέδρου. τετμήσθω μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ ΑΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΔΖ· ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ΒΖ, ΔΖ καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΕ. λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία ἀμβλεῖά ἐστιν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, διάμετρος δὲ ἡ ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλάσιόν ἐστι τ ἀπὸ τ ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τ ΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τ ΔΖ λόγον ἔχει ὃν ἐν τῷ πρὸ τούτου εἴρηται, ἔν δ' πρὸς γ· καὶ τὸ ἀπὸ τ ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τ ΔΖ λόγον ἔχει ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία. ὑπὲρ δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΔ τῶν ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΖΔ μεῖζόν ἐστιν· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΖΔ. Ϛ ἐπεὶ δύο ἐπιπέδων τ ΑΒΕ, ΑΔΕ τεμνόντων ἄλληλα, κοινὴ τομή ἐστιν ἡ ΑΕ, αἱ δὲ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐν ἑκατέρῳ τ ἐπιπέδων ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΒΖ, ΖΔ περιέχουσι ἀμβλεῖαν· ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἄρα γωνία λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τ κλίσεως τ ΑΒΕ, ΑΔΕ ἐπιπέδων· ἐὰν ἄρα δοθῇ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ, δέδοται Ϛ ἡ εἰρημένη κλίσις. ἐπεὶ οὖν δέδοται τὸ τριγώνου τοῦ ὀκταέδρου καὶ μία πλευρά ἐστι τοῦ ὀκταέδρου ἡ ΑΔ, καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀναγέγραπται τὸ ΑΓ, δέδοται καὶ ἡ ΒΔ διάμετρος ἴσου τ τετραγώνου. ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ ΒΖ, ΖΔ κάθετοι τ τριγώνου· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία δέδοται· ἀναγεγραφέντος ἄρα τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τ πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ὡς τὸ ΑΓ, Ϛ ἐπιζευχθείσης τ διαμέτρου ὡς τ ΒΔ, ἐὰν κέντροις τοῖς Β, Δ, διαστήματι δὲ τῇ τ τριγώνου καθέτῳ κύκλους ἐγγράψωμεν, τέμνουσιν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ζ, καὶ αἱ ἀπὸ τ Ζ ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμενοι



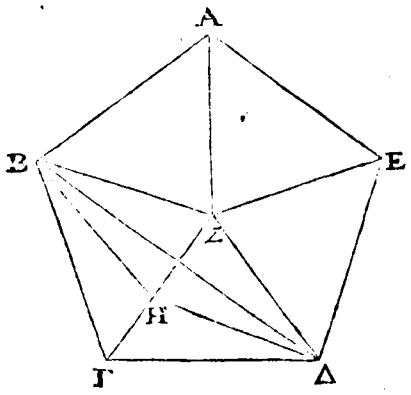
norum ΑΒΔ, ΑΔΓ communis ſectio eſt ΑΔ, & communi ſectioni ad rectos angulos occurrunt in utroque planorum rectæ lineæ ΒΕ, ΕΓ, quæ acutum angulum continent: erit [per 6. def. 11.] angulus ΒΕΓ planorum inclinatio; atque eſt data; datur enim ΒΓ nempe latus trianguli, atque etiam utraque ipſarum ΕΒ, ΕΓ, ſc. perpendicularis trianguli æquilateri: centris igitur Β, Γ, hoc eſt terminis unius lateris, & intervallo trianguli perpendiculari, deſcriptæ circumferentiæ ſe invicem ſecent in puncto Ε, & ab eo ad Β, Γ junctæ rectæ lineæ planorum inclinationem continebunt. hoc autem eſt quod dicebatur. verum illud, quod centris quidem Β, Γ, intervallo autem trianguli perpendiculari deſcripti circuli ſe mutuo ſecent, manifeſtum eſt: utraque enim ΒΕ, ΕΓ major eſt quam dimidia ipſius ΒΓ: & centris Β, Γ, & intervallo ipſius ΒΓ dimidio æquali, deſcripti circuli ſeſe tangunt. ſi autem minor ſit, neque ſe tangunt neque ſecant: quod ſi major, omnino ſecant; itaque de pyramide ſermo & manifeſtus & demonſtrationibus congruens apparet.

INTELLIGATUR rurſus ſuper quadratum ΑΒΓΔ pyramis, verticem habens punctum Ε, & continentia ipſam præter baſim triangula æquilatera: erit autem ΑΒΓΔΕ pyramis dimidia octaedri. ſecetur ΑΕ latus unius trianguli bifariam in Ζ; & ΒΖ, ΔΖ jungantur: ſunt igitur ΒΖ, ΔΖ & æquales inter ſe & ad ipſam ΑΕ perpendiculares. dico angulum ΒΖΔ obtuſum eſſe. jungatur enim ΒΔ. & quoniam ΑΓ eſt quadratum cujus diameter ΒΔ, erit quadratum ex ΒΔ quadrati ex ΔΑ duplum; quadratum autem ex ΔΑ ad quadratum ex ΔΖ rationem habet, ut ſuperius dictum eſt, quam 4 ad 3: ergo & quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΔΖ rationem habebit quam 8 ad 3. eſt autem ΔΖ æqualis ΖΒ: quadratum igitur ex ΒΔ majus eſt quadratis ex ΒΖ, ΖΔ; quare & [per converſ. 12. 2.] angulus ΒΖΔ eſt obtuſus. & quoniam duorum planorum ΑΒΕ, ΑΔΕ ſe invicem ſecantium communis ſectio eſt ΑΕ, & ipſi ad rectos angulos in utroque plano ductæ ſunt ΒΖ, ΖΔ angulum obtuſum continentes: erit [per 6. def. 11.] angulus ΒΖΔ reliquus ex duobus rectis inclinationis planorum ΑΒΕ, ΑΔΕ: ſi igitur angulus ΒΖΔ datus ſit, & dicta inclinatio dabitur. itaque quoniam triangulum octaedri datum eſt, & unum ejus latus eſt ΑΔ, à quo quadratum ΑΓ deſcribitur; datur & ΒΔ nempe diameter quadrati. ſed & ΒΖ, ΖΔ trianguli perpendiculares datæ ſunt: ergo & angulus ΒΖΔ dabitur: deſcripto igitur quadrato à latere trianguli ut ΑΓ, & juncta diametro ΒΔ, ſi centris quidem Β, Δ, intervallo autem perpendiculari trianguli circulos deſcribamus, ſe mutuo ſecabunt in Ζ, & rectæ lineæ à puncto Ζ ad centra

tra ductæ continebunt angulum BZΔ, qui quidem est reliquus ex duobus rectis, ut dictum est, inclinationis planorum. hoc quoque loco patet utramque ipsarum BZ, ZΔ majorem esse quam ipsius BΔ dimidiam: ideoque in constructione organica necesse esse circulos se mutuo secare. constat enim ex demonstratione ipsam BΔ ad ΔZ potentia rationem habere quam habet 8 ad 3. & BΔ [per 20. 6.] dimidiæ sui potentia est quadrupla: ergo utraque ipsarum BZ, ZΔ major est quam dimidia ipsius BΔ. & hæc quidem de octaedro dicta sint.



In icosaedro autem intelligatur pentagonum æquilaterum ABΓΔE, super hoc vero pyramis verticem habens punctum Z, ita ut continentia ipsam sint triangula æquilatera: erit ABΓΔE pyramis figuræ icosaedri pars. secetur ZΓ latus unius trianguli bifariam in H, & BH, HΔ jungantur, æquales quidem & ad ipsam ZΓ perpendiculares: dico angulum BHΔ obtusum esse, quod per se manifesto constat. juncta enim BΔ obtusum angulum BΓΔ pentagoni subtendit. hoc autem major est [per 21. 1.] angulus BHΔ: nam BH, HΔ ipsis BΓ, ΓΔ sunt minores. similiter iis, quæ proxime dicta sunt, patet angulum BHΔ esse eum qui relinquitur ex duobus rectis inclinationis triangulorum BZΓ, ΓZΔ. hoc autem dato, dabitur & planorum icosaedri inclinatio: à latere enim trianguli icosaedri descripto pentagono & recta linea BΔ data, quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, ut in figura, similiterque datis BH, HΔ perpendicularibus triangulorum, dabitur & BHΔ angulus. nam si centris quidem terminis ipsius BΔ, quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, intervallo autem perpendiculari trianguli, circuli describantur, se invicem secabunt, ut in H; & rectæ lineæ à puncto H ad centra B, Δ ductæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum. item hoc loco ex figura manifestum est utramque BH, HΔ majorem esse quam dimidiam ipsius BΔ, quod etiam ex constructione organica demonstrari potest.



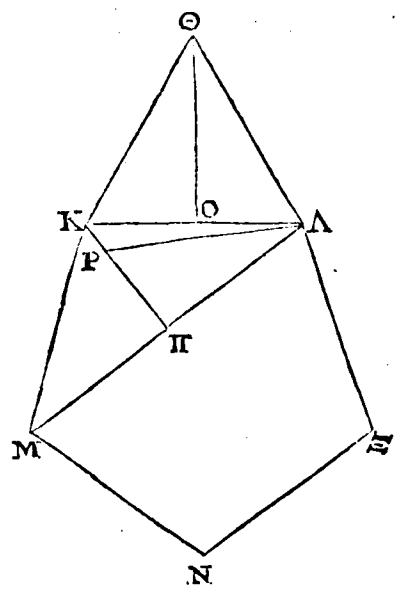
Intelligatur enim seorsim triangulum æquilaterum ΘΚΛ, & ab ipsa ΚΛ pentagonum describatur ΚΜΝΞΛ, junctaque ΜΛ ducatur ΘΟ perpendicularis trianguli ΘΚΛ; dico ΘΟ majorem esse dimidia ipsius ΜΛ, quæ inclinationem planorum subtendit. ducta à puncto Κ ad ΜΛ perpendiculari ΚΠ, quoniam angulus ΚΛΠ major est tertia parte recti, hoc est major angulo ΚΘΟ; constituatur ipsi ΚΛ æqualis ΚΡ, & ΡΣ ipsi ΚΠ æqualis ad rectos ipsi ΚΡ, & ΣΛ jungatur. quoniam igitur ΚΡ, ΡΣ æquales sunt ipsis ΚΛ, ΚΠ, & angulus ΚΡΣ rectus angulo ΚΛΠ major, erit ΣΛ ipsis ΚΛ, ΚΠ major. sed ΚΛ, ΚΠ ipsi ΚΘ, ΚΟ sunt æquales, & angulus ΚΛΠ major angulo ΚΘΟ. ergo ΣΛ ipsis ΚΘ, ΚΟ major est. & ΣΛ, ΚΘ, ΚΟ ipsi ΟΘ æquales sunt. ergo ΟΘ major est quam ΣΛ. sed ΣΛ ipsi ΜΛ æqualis est. ergo ΟΘ major est quam ΜΛ. quare ΟΘ major est quam dimidia ipsius ΜΛ. & ΜΛ ipsi ΒΔ æqualis est. ergo ΟΘ major est quam dimidia ipsius ΒΔ. ducta autem à puncto Κ ad ΜΛ perpendiculari ΚΠ, quoniam angulus ΚΛΠ major est tertia parte recti, hoc est major angulo ΚΘΟ; constituatur ipsi ΚΛ æqualis ΚΡ, & ΡΣ ipsi ΚΠ æqualis ad rectos ipsi ΚΡ, & ΣΛ jungatur. quoniam igitur ΚΡ, ΡΣ æquales sunt ipsis ΚΛ, ΚΠ, & angulus ΚΡΣ rectus angulo ΚΛΠ major, erit ΣΛ ipsis ΚΛ, ΚΠ major. sed ΚΛ, ΚΠ ipsi ΚΘ, ΚΟ sunt æquales, & angulus ΚΛΠ major angulo ΚΘΟ. ergo ΣΛ ipsis ΚΘ, ΚΟ major est. & ΣΛ, ΚΘ, ΚΟ ipsi ΟΘ æquales sunt. ergo ΟΘ major est quam ΣΛ. sed ΣΛ ipsi ΜΛ æqualis est. ergo ΟΘ major est quam ΜΛ. quare ΟΘ major est quam dimidia ipsius ΜΛ. & ΜΛ ipsi ΒΔ æqualis est. ergo ΟΘ major est quam dimidia ipsius ΒΔ. ducta autem à puncto Κ ad ΜΛ perpendiculari ΚΠ, quoniam angulus ΚΛΠ major est tertia parte recti, hoc est major angulo ΚΘΟ; constituatur ipsi ΚΛ æqualis ΚΡ, & ΡΣ ipsi ΚΠ æqualis ad rectos ipsi ΚΡ, & ΣΛ jungatur. quoniam igitur ΚΡ, ΡΣ æquales sunt ipsis ΚΛ, ΚΠ, & angulus ΚΡΣ rectus angulo ΚΛΠ major, erit ΣΛ ipsis ΚΛ, ΚΠ major. sed ΚΛ, ΚΠ ipsi ΚΘ, ΚΟ sunt æquales, & angulus ΚΛΠ major angulo ΚΘΟ. ergo ΣΛ ipsis ΚΘ, ΚΟ major est. & ΣΛ, ΚΘ, ΚΟ ipsi ΟΘ æquales sunt. ergo ΟΘ major est quam ΣΛ. sed ΣΛ ipsi ΜΛ æqualis est. ergo ΟΘ major est quam ΜΛ. quare ΟΘ major est quam dimidia ipsius ΜΛ. & ΜΛ ipsi ΒΔ æqualis est. ergo ΟΘ major est quam dimidia ipsius ΒΔ.

μήμαι εὐθεῖαι περιέχουσι τὴν κλίσιν τὴν ὑπὸ BZΔ, ἥτις ἐστὶν ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. καὶ ἐνταῦθα δὲ σαφὲς μᾶλλον ὡς ἑκατέρα τῶν BZ, ZΔ ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς BΔ μείζων. ἔδειξε γὰρ ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀνάγκη τέμνειν τοὺς κύκλους ἀλλήλους. ἐκ δὲ τῆς ἀποδείξεως δὲ δῆλον γέγονεν ὡς ἡ BΔ πρὸς μὲν τὴν ΔZ δυνάμει ἐστὶ τριπλασία· ὥστε διὰ τοῦτο μείζονα γίνεσθαι ἑκατέραν τῶν BZ, ZΔ τῆς ἡμισείας τῆς BΔ. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ ὀκταέδρου.

Ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου νενοήσθω πεντάγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔBΓΔE, ἐπὶ δὲ τούτου πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ Z, ὥστε περιέχοντα αὐτὴν τρίγωνα ἰσόπλευρα εἶναι· ἔστω δὴ ἡ ABΓΔE πυραμὶς μέρος εἰκοσαέδρου σχήματος. τετμήσθω μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ ZΓ δίχα κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BH, HΔ ἴσαι τε οὖσαι καὶ κάθετοι γινόμεναι ἐπὶ τὴν ZΓ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ BHΔ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι· καὶ ἔστιν αὐτόθι φανερόν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ BΔ ἀμβλεῖαν μὲν ὑποτείνει τὴν ὑπὸ BΓΔ τοῦ πενταγώνου γωνίαν. ταύτης δὲ μείζων ἡ ὑπὸ BHΔ· ἐλάττονες γὰρ αἱ BH, HΔ τῶν BΓ, ΓΔ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρὸ τούτου ὅτι ἡ ὑπὸ BHΔ γωνία ἡ λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο τῶν κλίσεως τῶν BZΓ, ΓZΔ τριγώνων. ταύτης δοθείσης, δεδομένη ἔσται καὶ ἡ κλίσις τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων· ἀπὸ γὰρ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τῆς BΔ δεδομένης, ὁμοίως δὲ καὶ τῆς BH, HΔ καθέτων τῶν τριγώνων, δέδοται καὶ ἡ ὑπὸ BHΔ. εἰ γὰρ κέντροις τοῖς πέρασι τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου ὡς τῆς BΔ, λαμβανομένῃ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλοι γραφῶσι, τέμνουσιν ἀλλήλους ὡς κατὰ τὸ H, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὰ B, Δ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. καὶ ἐνταῦθα δὲ ἐκ μὲν τῆς καταγραφῆς δῆλόν ἐστιν ὅτι ἑκατέρα τῶν BH, HΔ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς BΔ, εἶναι δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀποδειχθήσεται.

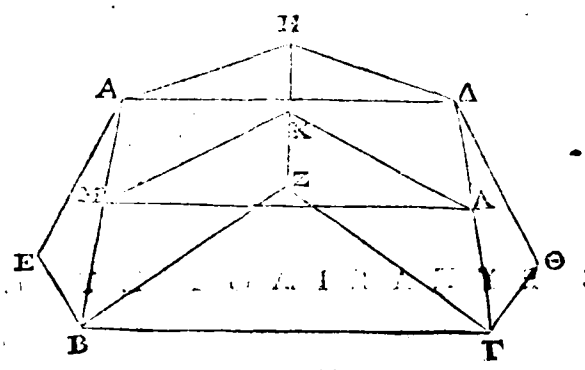
Νενοήσθω χωρὶς ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον τὸ ΘΚΛ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΛ πενταγώνου ἀναγεγράφθω τὸ ΚΜΝΞΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΛ, καὶ ἤχθω κάθετος τοῦ ΘΚΛ τριγώνου ἡ ΘΟ· λέγω ὅτι ἡ ΘΟ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΜΛ τῆς ὑποτεινούσης τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. ἀχθείσης ἀπὸ Κ ἐπὶ τὴν ΜΛ καθέτου τῆς ΚΠ, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΚΛΠ μείζων ἐστὶ τρίτου ὀρθῆς, τῇ δὲ ἴσῃ τῆς ὑπὸ ΚΘΟ, συνεστάτω τῇ

τῇ ὑπὸ ΚΘΟ ἴση ἡ ὑπὸ ΠΛΡ· ἡ ἄρα ΠΛ κάθετός ἐστιν ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ ΡΛ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΡΛ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΛΠ λόγον ἔχει ὃν ὁ δ' πρὸς τὸν γ'. μείζων δὲ ἡ ΚΛ τῆς ΛΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΛ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΛΠ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὁ δ' πρὸς τὸν γ'. ἔχει δὲ καὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΟ ὃν ὁ δ' πρὸς τὸ γ'· ἡ ἄρα ΚΛ πρὸς τὴν ΛΠ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΘΟ· μείζων ἄρα ἡ ΘΟ τῆς ΛΠ.



tuatur angulo ΚΘΟ æqualis angulus ΠΛΡ: ergo ΠΛ eſt perpendicularis æquilateri trianguli, cujus latus eſt ΡΛ: quare quadratum ex ΡΛ ad quadratum ex ΛΠ rationem habet quam 4 ad 3. ſed [per 21. 1.] major eſt ΚΛ quam ΛΡ: ergo quadratum ex ΚΛ ad quadratum ex ΛΠ majorem habet rationem quam 4 ad 3. habet autem & ad quadratum ex ΘΟ rationem quam 4 ad 3: ergo ΚΛ ad ΛΠ majorem rationem habet quam ad ΘΟ: major igitur [per 10. 5.] eſt ΘΟ quam ΛΠ.

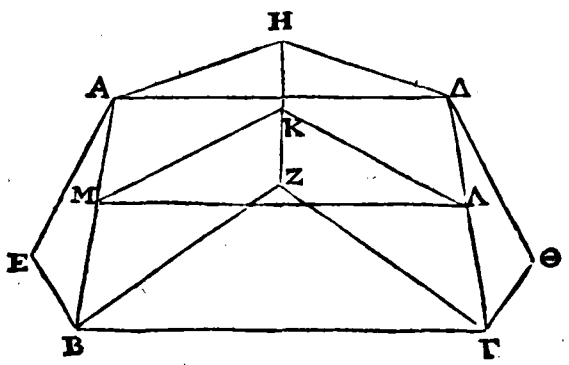
ΕΠΙ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου οὕτως. νενοήσθω ἐν πενταγώνου τοῦ κύβου, ἀφ' οὗ τὸ δωδεκαέδρον ἀναγράφεται τὸ ΑΒΓΔ, καὶ δύο ἐπίπεδα τοῦ δωδεκαέδρου τὰ ΑΕΒΖΗ, ΗΔΘΓΖ· λέγω δὴ ἐντεῦθεν δεδομένην εἶναι τὴν κλίσιν τῶν δύο πενταγώνων. τετμήσθω ἡ ΖΗ δίχα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων αἱ ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΛ. λέγω δὴ πρῶτον ὅτι ἡ ὑπὸ ΜΚΛ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ιγ'. βιβλίῳ τῶν στοιχείων ἡ τῆς σφαίρας τοῦ δωδεκαέδρου, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ ΑΒΓΔ πενταγώνου ἡμίσειά ἐστι τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου· ὥστε ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΜΛ· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ὑπὸ ΜΚΛ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. συναποδέδεικται δὲ ἐν τῷ αὐτῷ θεωρήματι, ὅτι καὶ τὸ μὲν ἀπὸ ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, ὥστε τὴν αὐτὴν τὴν ΚΛ καὶ τὴν ΚΜ, ἴσας οὔσας, μείζονας εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς ΜΛ· τῆς ἄρα ὑπὸ ΜΚΛ γωνίας δοθείσης, ἡ λειπουσα εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ κλίσις ἔσται τῶν ἐπιπέδων δηλονότι δεδομένη. ἐπεὶ οὖν ἡ πλευρὰ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἡ ὑποτείνουσά ἐστι τὰς δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου, δέδοται δὲ τὸ πεντάγωνον· δέδοται ἄρα ἡ ΜΛ. δέδονται δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΜΚ, ΚΛ, κάθετοι γάρ εἰσιν ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς ΑΒ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου, ὡς τὴν ΖΗ· δέδοται ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΚΜ ἡ λειπουσα, ὡς εἴρηται,



IN dodecaedro autem hoc modo. intelligatur ΑΒΓΔ unum cubi quadratum, à quo [per 17.13.] dodecaedrum deſcribitur, & duo plana dodecaedri ΑΕΒΖΗ, ΗΔΘΓΖ: dico & ſic datam eſſe duorum pentagonorum inclinationem. ſecetur ΖΗ bifariam in Κ, & à puncto Κ ipſi ΖΗ ad rectos angulos ducantur in utroque planorum ΚΛ, ΚΜ; atque ΜΛ jungatur. itaque primum dico angulum ΜΚΛ obtuſum eſſe. oſtenſum enim eſt libro decimo tertio elementorum [ad 17.13.] ſcilicet in conſtitutione dodecaedri, rectam lineam, quæ à puncto Κ ad quadratum ΑΒΓΔ perpendicularis ducitur, *dimidiam eſſe lateris pentagoni: quare minor eſt quam dimidia ipſius ΜΛ †; ideoque angulus ΜΚΛ eſt obtuſus. ſimul autem demonſtratum eſt in eodem theoremate, quadratum quidem ex ΚΛ æquale eſſe & quadrato dimidii lateris cubi & quadrato dimidii lateris pentagoni ‡, ita ut ΚΛ & ΚΜ, inter ſe æquales, majores ſint quam dimidia ipſius ΜΛ: angulo igitur ΜΚΛ dato, reliquus ex duobus rectis, hoc eſt inclinatio planorum data erit. itaque quoniam latus quadrati ΑΒΓΔ duobus lateribus pentagoni ſubtenditur, & datum eſt pentagonum; erit & ΜΛ data. data autem eſt & utraque ipſarum ΜΚ, ΚΛ, perpendiculares enim ſunt à bipartita ſectione rectæ lineæ ΑΒ, quæ duobus lateribus ſubtenditur ad latus pentagoni ipſi parallelum, ut ad ΖΗ; ergo angulus ΛΚΜ datus eſt,

*. Iſta enim perpendicularis eſt eadem cum recta Ψ Ο in fig. prop. 17. lib. 13. &, ex conſtructione, iſta Ψ Ο æqualis eſt Ρ Ο ſive majori portioni ipſius Ν Θ ſc. ſemiſſis lateris cubi extrema & media ratione ſectæ, ſive ſemiſſi majoris portionis ipſius Β Γ lateris cubi extrema ac media ratione ſecti. ſed per corol. 17.13. lateris cubi extrema ac media ratione ſecti major portio eſt dodecaedri latus; dicta igitur perpendicularis à puncto Κ ad quadratum ΑΒΓΔ eſt dimidia lateris dodecaedri ſive pentagoni. † Nam ΜΛ ſive ΑΔ major eſt quam ΗΔ. ‡ Nam in fig. prop. 17. lib. 13. quadratum ipſius Θ Ψ æquale quadratis ipſius Θ Ο & quadrato ipſius Ο Ψ, quia angulus Θ Ο Ψ eſt rectus.

nempe reliquus ex duobus rectis, ut dictum est, inclinationis ejus quam inquirimus. pulchre igitur in constructione organica dixit, oportere in dato pentagono jungere rectam lineam duobus lateribus subtensam, quæ lateri cubi est æqualis; & centris quidem terminis ipsius, intervallo autem perpendiculari, quæ à bipartita sectione ad latus pentagoni parallelum agitur, (ut in figura sunt K Λ, K M) describere circumferentias; atque à puncto, in quo conveniunt, ad centra rectas lineas ducere, quæ continent angulum reliquum, ex duobus rectis, inclinationis planorum. quod vero perpendicularis K M major est dimidia ipsius M Λ jam dictum est, ut in elementis quoque demonstratum est.



εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τὴν ἐπιζητουμένην κλίσεως. καλῶς ἄρα ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς εἶπεν, ὡς χρὴ δοθέντος τοῦ πενταγώνου ἐπιζεῦξαι τινὶ εὐθείᾳ τὴν ὑποτείνουσαν τὰ δύο πλευρὰς, ἥτις ἴση γίνεται τῇ πλευρᾷ τοῦ κύβου· τὰ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς δίχοτομίας ἀγομένῃ καθέτῳ, ἐπὶ τὰ ἀπεναντίον αὐτῇ τοῦ πενταγώνου πλευρὰν ὡς ἐπὶ τὰ καταγραφῆς αἱ Κ Λ, Κ Μ γραφόμεναι περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ τῆς συμβολῆς τῶν περιφερειῶν σημείου ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζεύξαι εὐθείας περιεχούσας τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τὴν κλίσεως τῶν ἐπιπέδων. ὅτι γὰρ ἡ Κ Λ καθέτος μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς Μ Λ, εἴρηται, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις ἀπεδείχθη τοῦτο.

ΤΕΛΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

FINIS ELEMENTORUM EUCLIDIS.

EI-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ,
ΚΑΙ
ΜΑΡΙΝΟΥ ΤΟΥ ΦΙΛΟΣΟΦΟΥ
Η
ΕΙΣ ΑΥΤΑ ΠΡΟΘΕΩΡΙΑ.

EUCLIDIS
DATA,
CUM PRÆFATIONE
MARINI.

ΜΑΡΙΝΟΥ ΤΟΥ ΦΙΛΟΣΟΦΟΥ

Η

ΕΙΣ ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΠΡΟΘΕΩΡΙΑ.

MARINI PHILOSOPHI

IN

DATA EUCLIDIS

PRÆFATIO.

ΠΡΩΤΟΝ δεῖ θέσθαι τί τὸ δεδομένον· ἔπειτα τί τὸ χρήσιμον τῆς περὶ τούτου πραγματείας εἰπεῖν· καὶ τρίτον ὑπό τινα ἐπιστήμην ἀνάγειν.

Ὁρίζονται δὲ τὸ δεδομένον πολλαχῶς· καὶ ἄλλως μὲν οἱ παλαιότεροι, ἄλλως δὲ οἱ νεώτεροι. διὸ καὶ σαφῆ χαλεπὴν εἶναι τὴν ἀληθῆ περὶ αὐτοῦ ἀπόδοσιν. ἔνιοι μὲν γὰρ ὅλως ὁρισμόν τινα αὐτοῦ ἀποδεδώκασιν, ἴδιον δέ τι τοῦ δεδομένου εὑρίσκειν ἐπειράθησαν. ἕτεροι δὲ συμπλέξαντες ἤδη τὰ παρ' ἐκείνων λεγόμενα, ὁρίζεσθαι αὐτὸ ἐπεχείρησαν· ἃ δεῖ ἴσως * συμφώνως ἑαυτοῖς. ἔοικασι δὲ πάντες, ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐννοίας καὶ ὑπολήψεως ὁρμηθέντες, λέγειν τι περὶ αὐτοῦ. καταλῆπτον γάρ τι τὸ δεδομένον εἶναι ὑπέλαβον. διὸ τῶν ἁπλουστέρως καὶ μιᾷ τινι διαφορᾷ περιγράφειν τὸ δεδομένον πεπειραμένων, οἱ μὲν ταγμένον ὡς Ἀπολλώνιος ἐν τῇ περὶ νεύσεων, καὶ ἐν τῇ καθόλου πραγματείᾳ· οἱ δὲ γνώριμον, ὡς Διόδωρος· ἔστω γὰρ † τὰς εὐθείας γραμμὰς καὶ τὰς γωνίας δεδόσθαι λέγει, καὶ πᾶν τὸ εἰς γνῶσίν τινα ἐλθὸν, καὶ εἰ μὴ ῥητὸν εἴη. ἔνιοι δὲ ῥητὸν αὐτὸ εἶναι ἀπεφήναντο, ὥσπερ δοκεῖ ὁ Πτολεμαῖος, δεδομένα σκέψεσι περιαγορεύων, ὧν τὸ μέτρον ἐστὶ γνώριμον, ἢ περὶς ἀκρίβειαν, ἢ κατὰ τὸ σύνεγγυς. καὶ τὸ ἐν ὑποθέσει δὲ δοθὲν τῷ περιβάλλοντος περιθεμένου, δεδομένον εἶναί τινες ὑπειλήφασιν. λέγουσι δὲ καὶ ἄλλον τρόπον ἐν ταῖς πρώταις στοιχειώσεσι τὸ δοθὲν καὶ τὸν δοθέντα, τουτέστι ηλίκλειν ἄν τις ἀφορίσῃ ἃ δῶ εὐθεῖαν. πάντα δὲ πάντα καταλῆψιν τινα βέλτιστα σημειῶσθαι· ὅθεν ἃ μάλιστα τῶν ὁρων ἐκεῖνοι εὐδοκιμοῦσιν, ὅσοι μάλιστα τὸ καταλῆπτον ἐφαίζουσιν, ὡς προσθεῖσιν ἡμῖν ἔσεσθαι καταφανές.

IMPRIMIS quid ſit *datum* ſtatuere neceſſe eſt; tum demum inſtitutæ de *dato* tractationis utilitates recenſere: tertio dicere ad quam ſcientiam ea tractatio revocetur.

Datum porro multipliciter definitur: atque aliter quidem à veteribus, aliter autem à recentioribus. qua quidem ratione factum eſt, ut aliquid de illo proferre, quod verum ſit, difficile videatur. Quidam enim *dati* nullam definitionem attulerunt, ſed potius proprietatem ejus quam ſtudioſe rimati ſunt. Aliqui autem, conjungentes & commiſcentes ea quæ ab aliis prius dicta fuerant, definire *datum* voluerunt: ſed neque ſibi ipſis admodum conſentiunt; quanquam & omnes ab una eademque ratione exorſi de illo differuerunt. *Datum* enim cuncti *comprehenſibile* eſſe ſupponunt. Quamobrem eorum, qui ſimplicius & per aliquam differentiam *datum* deſcribere ſtuduerunt, alii quidem id quod *ordinatum* eſt *datum* eſſe exiſtimaverunt, ut Apollonius in tractatu de inclinationibus, & in univerſali tractatu; alii autem quod *cognitum*, ut Diodorus: etenim ea ratione rectas lineas & angulos dari dicit, atque omne quod in cognitionem aliquam venit, etiamſi *effabile* non ſit. Alii autem *effabile* illud ipſum eſſe affirmarunt, uti voluiſſe videtur Ptolemæus, qui illa vocat *data*, quorum menſura nota eſt, vel accurate vel proxime. Quidam etiam id quod in *hypotheſi* à *proponente conceſſum eſt*, *datum* eſſe putaverunt. Ajunt autem aliter accipi in prioribus elementis datum punctum & datam rectam, hoc eſt quantam quis daret ac determinaret. Hæc tamen omnia *comprehenſionem* quandam ſignificare videntur: quamobrem ex his definitionibus, illæ maxime placent, quotquot *comprehenſionem* evidentius manifeſtant; ſicut à nobis in ſequentibus oſtendetur.

* Συμφωνῶν in Græco exemplari ad finem *Procli* excuſo. † Al. τὰς ἀπείρους γ.

Jam vero eorum, qui pauci non ſunt, quique tenui & unico quopiam *dati* naturam circumſcribentes talem qualem illius definitionem proferunt, diverſas ſententias afferamus. etenim recapitulantes facillime horum omnium differentias enumerare poſſumus. Alii enim *datum* id quod *ordinatum* & *porimum* eſt definiverunt: alii autem id quod *ordinatum* eſt ſimul & *cognitum*: alii autem quod *porimum* eſt ſimul & *cognitum*. Quamobrem videntur illi omnes, ad *comprehenſionem* aut *ſumptionem* & *inventionem dati* reſpicientes, ita definiviſſe. Atque ut hanc illorum ſententiam percipiamus plenius, & inſuper ex multorum dictis veram propoſiti definitionem eruamus; conſiderabimus primum ſingulorum ſimplicium & incomplexorum, nec non oppoſitorum terminorum ſignificationem, *inordinati* inquam & *incogniti* & *apori* & *irrationalis*; ſiquidem ea pertinent ad hanc materiam geometricam, & ad res naturales, nec non ad alias mathematicas diſciplinas.

Itaque *ordinatum* deſcribitur, id quod ſemper obſervat id per quod dicitur ordinari, ſive quoad magnitudinem, ſive quoad ſpeciem, ſive quoad aliud quidpiam ejuſmodi. alio modo item definitur, quod aliter fieri non poteſt, ſed ſolummodo definitum aliquem locum ſortitur: quemadmodum, (ut exempli gratia dicam) per data duo puncta linea recta dicitur ordinari, quia aliter multipliciterque non poteſt duci. *Inordinata* autem eſt circumferentia per duo puncta, multipliciter enim variabiliterque conſtituitur, majori minorive circulo in infinitum per duo puncta deſcripto. E converſo per tria puncta circumferentia dicitur *ordinata*: atque iſtiuſmodi etiam *ordinata* eſſe dicuntur; ut ſuper data recta triangulum æquilaterum conſtituere; non enim aliter dicitur, ſed ad utramvis lineæ partem unice & invariabiliter: & datam rectam data ratione ſecare; unico enim modo tantum fieri poteſt ad alteram partem biſectionis. *Inordinata* ſunt ea quæ iis oppoſito modo ſe habent: ut ſcalenum triangulum conſtruere; & rectam lineam indefinite ſecare. Illud autem, per quod ordinatur problema, in determinatione proponitur; quandoquidem poteſt aliquid unum, quod *ordinatum* ſit, aliquatenus quidem *ordinatum*, aliquatenus autem *inordinatum* eſſe: quemadmodum æquilaterum triangulum, quatenus æquilaterum eſt, *ordinatum* eſt; magnitudine autem omnino non definitur.

Cognitum autem dicitur id quod notum eſt, ut clarum & comprehenſum à nobis; *incognitum* vero eſt quod minime notum eſt, neque comprehenſum à nobis: ut longitudo itineris cognita vocatur, quando quot ſit ſtadiorum cognoſcitur; item quod trianguli tres anguli duobus rectis æquales ſint; item quod binomium irrationale ſit. Talia quoque *cognita* ſunt: unicam *ſc.* eſſe tangentem helicis à dato extra punctо ad alterutram partem; ſi enim alia eſſet, duæ rectæ ſpatium comprehenderent, quod eſt impoſſibile. Quæ porro *incognita* ſunt, non ea quidem irrationalia ſunt; ſed ea tan-

* Νωὶ δὲ ϗ τ μὴ μόνων, ψιλῶ ϗ ἐνὶ χαρακτηριζόντων τὶω τ δεδομθμὸν φύσιν, οἷον δ' ὁρισμὸν αὐτ πιάντων, τὰς διαφορὰς αὐτῶν ἐκδώμεθα. συγκεφαλαιωμθμοίς δὲ καὶ τάτων οἱ τρόποι εὐαρίθμητοι γίγνονται. εἰ μὲν γὰρ τεταγμθμὸν ἓ πέριμον τὸ δεδομθμὸν εἶναι ἀφορίσαντο· ἕτεροι δὲ τὸ τεταγμθμὸν ἅμα ϗ γνώριμον· τινὲς δὲ τὸ † πέριμον ἅμα ϗ γνώριμον. φαίνον᾽ δὲ ϗ ἅπαντες πρὸς τὶω καταλῆψιν, ἤτοι λῆψιν ἓ εὕρεσιν δ δεδομθμὸν ἀφεωρακότες τ εἰρημθμὸν τρόπον ὁρίζεσθαι. ἵνα δὲ ταύτὶω τ αὐτῶν τ ἔννοιαν ‡ καταδηλώμεθα, ἔπειμὲν ϗ τ ἀληθῆ τὰ προκειμθμὰ ὅρον ἐκ πολλῶν τ προδεδομθμων ἐλώμεν, σκεπτέον πρότερον ἑκάστ τ ἁπλῶν τὸ σημαινόμθμον, ϗ τ τάτοις ἀντικειμθμων· τοῦτ᾽ ἀτακτα λέγω καὶ ἀγνώστ καὶ ἄπορα καὶ ἄλογα· καὶ ὅτι τὶω ἐνεστώσαν γεωμετρικὶω ὕλὶω ἐπεκτείνεται γ᾽ τὰ τοιαῦτα, καὶ ὅτι τὰ φυσικὰ πράγματα, καὶ ἄλλας δὲ μαθηματικὰς ἐπιστήμας.

Ὑπογράφσιν τινὶω τὸ τεταγμθμὸν, τὸ ἀεὶ ταὐτὸ σωζόμθμον καθ᾽ ὃ πεπέχθαι λέγεται, ἤτοι κατὰ μέγεθος, ἢ εἶδ@, ἢ ἄλλό τι τῶν τοιούτων. ἢ καὶ ἑτέρως, ὅπερ μὴ ἐνδέχεται ἄλλως γίγνεσθαι, ἀλλὰ μοναχῶς ἐν ἀφορισμθμῷ τινι τόπῳ, οἷον, ὡς τύπῳ εἰπεῖν, ἡ διὰ δύο σημείων γραφομένη εὐθεῖα πεπέχθαι λέγεται, διὰ τὸ μὴ ἄλλως καὶ ἀσάτως ἄγεσθαι. ἄτακτος δέ ἐστιν ἡ διὰ δυοῖν περιφέρεια, πολλαχῶς γὰρ καὶ ἀσάτως γράφεται, καὶ μείζονος ϗ ἐλάττον@ κύκλ ἐπ᾽ ἄπειρον γραφομένου διὰ τῶν δύο σημείων. πάλιν δὲ τεταγμθμὴ ἐστὶν ἡ διὰ τριῶν σημείων περιφέρεια· ἔστι δὲ καὶ τὰ τοιαῦτα τῶν τεταγμένων, ὡς τὸ ὑπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ἰσόπλευρον τρίγωνον συστήσασθαι· ὃ γὰρ καὶ διχῶς λέγεται, ἀλλὰ καθ᾽ ἑκάτερον μέρος τ εὐθείας μοναχῶς καὶ ἀμεταπτώτως. καὶ τὶω δοθείσαν εὐθεῖαν εἰς τ δοθέντα λόγον τεμεῖν, μοναχῶς γὰρ ἂν καὶ τοῦτο γένοιτο ἐπὶ θ᾽ ἄτερα τῆς διχοτομίας. ἄτακτα δέ ἐστι τὰ τούτοις ἀντικείμενα ἔχοντα, ὡς τὸ σκαλιὸν συστήσασθαι, καὶ τὶω εὐθεῖαν ἀορίστως τεμεῖν. πρόκειται δὲ τῷ ὅρῳ τὸ καθ᾽ ὃ πέπακται· ἐπεὶ δυνατόν τι ἓν καὶ πῇ μὲν τεταγμθμὸν, ἄλλως δ᾽ ἄτακτον εἶναι, οἷον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἢ μὲν ὑπὸ πλευρὸν ἐστὶ πέπακται, μεγέθει δ᾽ οὐχ ὥρισται πάντως.

Γνώριμον δέ ἐστιν τὸ γιγνωσκόμθμον, ὡς τὸ δῆλον ἡμῖν καὶ καταλαμβανόμθμον, ἄγνωστον δὲ τὸ μὴ γιγνωσκόμθμον, μηδὲ καταλαμβανόμθμον ὑφ᾽ ἡμῶν, οἷον τὸ μῆκος τ ὁδὸς γνώριμον εἶναι λέγεται, ὅταν ὁπόσων ἐστὶ σταδίων γιγνώσκεται, καὶ τριγώνς ὅτι τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, ϗ ὅτι ἡ ἐκ δυοῖν ὀνομάτων ἄλογόν ἐστιν. ἔτι μὲν τὰ τοιάδε γνώριμα λέγεται, ὡς τὸ μίαν εἶναι τὶω ἐφαπτομένλω τ ἑλικὸς ἀπὸ δ᾽ ἑκατὸς δοθέντος σημείς ὅτι θ᾽ ἕτερα μέρη· εἰ γὰρ ἄλλη εἴη, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἀδυνατον. ἄγνωστα δὲ τὰ ἄλογά ἐστιν, ἀλλὰ

* Mendoſe in altera editione Γυμνὸν δὲ ϗ μὴ μόνον ψιλῶς &c. † Al. τετραγμένον. ‡ Prius καταδηλώμεθα. τὰ

τὰ μὴ γιγνωσκόμενα μηδὲ καταλαμβανόμενα ὑφ' ἡμῶν.

Πόριμον δέ ἐστιν ὃ δυνατόν ἐσμεν ἤδη ποιῆσαι ἢ κατασκευάσαι, τοῦτ' ἔστιν εἰς διάνοιαν ἀγαγεῖν. ἄλλως δὲ πάλιν ὁρίζονται τὸ πόριμον, ἤτοι τὸ δι' ἀποδείξεως περιόριστον, ἢ ὅταν τι φαινόμενον ἢ καὶ χωρὶς ἀποδείξεως· οἷον τὸ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψαι, καὶ τὸ τρίγωνον συστήσασθαι, ὃ μόνον ἰσόπλευρον, ἀλλὰ καὶ σκαληνὸν, καὶ τὸν ἐκ δύο ὀνομάτων εὑρεῖν, καὶ εὐθείας ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους εὑρεῖν, καὶ τὰ ἀπειραχῶς γεγονότα πόριμά ἐστιν, ὥσπερ τὸ διὰ δύο σημείων κύκλον γράψαι. ἄπορον δέ ἐστι τῷ πεῖραν ἀντικειμένως ἔχον, ὡς ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμός· ἔστω γὰρ ἐστιν ἐν πόρῳ, εἰ καὶ οἰόντε αὐτὸ περιθεῖναι, καὶ ἐστιν ἄδηλον· ἄδηλόν γὰρ αὐτοῦ ἔστω κατείληπται. νῦν δὲ ὡδὶ ὃ ἤδη ὄντος ἐν πόρῳ λόγος ἀποδέδοται, ὅπερ καὶ * κύριον πόριμον ἐπονομάζουσιν. τὸ γὰρ μήπω ὂν ἐν πόρῳ, ἐνδεχόμενον δὲ περιθεῖναι, περισὸν ἰδίως ὠνόμασαν. ἄπορον δέ ἐστιν ὡς εἴρηται, τῷ πεῖραν ἀντικειμένως ἔχον, τοῦτ' ἔστιν ὃ ζήτησις ἀδιάκριτος ἐστιν.

Ῥητὸν δέ ἐστιν ὅπερ ἔχομεν εἰπεῖν μέγεθος, ἢ εἶδος, ἢ θέσιν. ἀλλ' ὅτος μὲν ὁ ὅρος κοινότερός ἐστιν, ἰδίως δὲ καθ' αὐτὸ ῥητόν ἐστιν, † τὸ κατά τινα γιγνωσκόμενον, καὶ πρὸς τὸ τῇ θέσει μέτρον, παλαιστὴν εἰ τύχοι, ἢ δάκτυλον.

‡ Οὕτω δὴ διωρισμένων, ῥᾴδιον τὸ λοιπὸν διασκοπεῖν, τίνι τε κοινωνίᾳ τ' εἰρημένων καὶ τίνι διαφορᾷ, καὶ πρῶτον ὅπως ἔχει τὸ τεταγμένον πρὸς τὸ γνώριμον, καὶ τὰ τούτοις ἀντικείμενα πρὸς ἄλληλα. ὁμοίως ἐστὶ δὴ τῶν ἀναιρεφόντων τὰ τοιαῦτα, ἐάν μὴ ἐκείνων ἐν οἷς τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου διπλέον ἐστίν. εἰ γὰρ καὶ κοινὰ αὐτοῖς πολλὰ ὑπάρχει, ὡς τὸ διὰ δύο σημείων εὐθεῖαν γράψαι, καὶ διὰ τριῶν κύκλον **[καὶ τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι]. ἀλλα τὸ παραγωνίζειν τὸν κύκλον τεταγμένον μὲν, ἄγνωστον δέ. καὶ ὅτι μία εὐθεῖα τὸν ἑλικοειδῆ ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐφάπτεται, τῶν τεταγμένων καὶ μὴ ἐνδεχομένων ἄλλως ἔχειν ἐστίν· ὃ μὴν καὶ ἔγνωσται αὐτῶν ἡ ἀποδεῖξις, ἤτοι κατασκευή. πάλιν δ' ἡ ἐπ' ἄπειρον τομὴ, καὶ ἡ τοῦ σκαληνοῦ σύστασις ἔγνωσται μὲν, ἀκέτι δὲ τέτακται· ὥστε φανερὸν ὅτι ἔστι τοῦ τεταγμένου τὸ μὲν γνώριμον, τὸ δὲ ἄγνωστον. καὶ ἀνάπαλιν ἢ τοῦ γνωρίμου τὸ μὲν τεταγμένον, τὸ δὲ ἄτακτον. ὡσαύτως ἔχει ταῦτα πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ λογικὸν καὶ τὸ πεζόν· ἅτε γὰρ ἐξισάζειν τὰ τοιαῦτα ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἢ ἑτέρου διπλέον ἐστίν.

Ὁμοίως δὲ ἔχει καὶ τὸ τεταγμένον καὶ τὸ ἄτακτον πρὸς τὸ πόριμον καὶ τὸ ἄπορον, κοινωνία τε γὰρ αὐτοῖς ἔνεστι πολλὴ, καὶ διαφέρει ἀλλήλων τὸν εἰρημένον τρόπον. ἡ γὰρ ἑλιξ τέτακται, ἀλλ' οὐκ ἦν τοῖς πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους χρόνοις· καὶ τὰ ἀπειραχῶς γιγνόμενα καὶ ἄτακτα, πόριμα μέν ἐστιν, ἐὰν κατασκευὴ διανοητή τις αὐτῶν καὶ τίνι σύστασιν, ἀκέτι δὲ καὶ

tum quæ neque cognita ſunt neque comprehenſa à nobis.

Porimum (ſeu quod factionem habet) appellatur id quod poſſumus facere & conſtruere, hoc eſt in cognitionem deducere. Rurſus autem alia ratione definitur illud, ſc. quod per demonſtrationem exhiberi poteſt, aut quod apparens eſt ſine demonſtratione; quale eſt, centro intervalloque circulum deſcribere; nec non triangulum non modo æquilaterum, ſed & ſcalenum conſtruere; aut binomium invenire; aut duas rectas potentia ſolum commenſurabiles invenire, aliaque quæ infinitis modis fiunt, *porima* ſunt, ut per duo puncta circulum deſcribere. *Aporum* (id eſt quod factionem non habet) *porimo* maxime opponitur; ut circuli tetragoniſmus; nondum enim inventus eſt, quanquam inveniri & ſciri poſſe certum ſit, illius enim ratio nondum comprehenſa eſt. Hic autem loquimur de eo, quod notum jam eſt, quod *porimum præcipuum* appellatur; quod enim nondum in promptu, poſſibile tamen eſt, *periſton* appellatur. *Aporum* autem, ut dictum eſt, *porimo* opponitur, *i. e.* cujus inquiſitio dijudicari determinarique non poteſt.

Effabile autem eſt id cujus exprimere poſſumus magnitudinem, vel ſpeciem, vel poſitionem. Sed hæc definitio generalior eſt; proprie vero & ſecundum ſe *effabile* eſt, quod per quædam cognitum eſt, & ad datam poſitione menſuram, palmum puta, aut etiam digitum.

His itaque explicatis, quod reliquum eſt facile conſiderare poſſumus, in quibus ſcilicet omnia, quæ ſuperius allata ſunt à nobis, conveniant & differant; & primum quidem quomodo ſe habeant *ordinatum* ad *cognitum*, & illorum oppoſita ad invicem. Non enim ea convertibiliter dicuntur, neque aliud alio latius patet, etſi conveniunt in multis; ut per duo puncta rectam deſcribere, perque tria circulum **[triangulum æquilaterum conſtituere]. Porro quadrare circulum *ordinatum* quidem eſt, *incognitum* tamen: item quod unica ſit helicis tangens ab uno puncto, ex *ordinatorum* genere quidem eſt, & quod aliter fieri non poteſt; atqui non ideo eorum demonſtratio & conſtructio cognita eſt. Rurſus autem rectæ ſectio indefinita, & ſcaleni conſtitutio, cognoſcitur quidem, nec tamen adhuc ordinatur: ita ut clarum ſit *ordinatum* tam eſſe *cognitum* quam *incognitum*, & vice verſa *cognitum* tam eſſe *ordinatum* quam *inordinatum*. Itaque ſe habent hæc ad invicem, ut rationale & pedeſtre; neque enim exæquant illa ſeſe, nec aliud alio latius patet.

Similiter autem & *ordinatum* & *inordinatum* ſe habent ad *porimum* & *aporum*; quippe inter illa ſimilitudo maxima eſt, differunt porro inter ſe dicta ratione. Etenim helix quidem *ordinata* eſt, ſed non erat ante Archimedem *porima*. Eadem autem ratione quæ infinitis modis fiunt *porima* ſunt: namque *inordinatorum* aliqua *porima* quidem ſunt, ſi conſtitutionem eorum quis noverit & conſtructionem, non utique

* Al. κυρίως. † Al. ὃ κατά τινα γιγνωσκόμενον ἀριθμόν. ‡ Mallem τοῦτον. ** Illa uncis incluſa rectius abeſſent.

tamen *ordinata* ſunt: quale eſt illud, ſcalenum triangulum conſtituere; etenim conſtructionem illius cognitam reddere ex æquilatero non eſt arduum, quin immo facile admodum; etiamſi *inordinatum* ſit, & infinitis modis fiat.

Ita autem ſe habent *ordinatum* & *inordinatum* ad *effabile* & *irratioanle*: nam inter ſe conveniunt in multis; dicta ratione tamen differunt. Enimvero illa ſe non adæquant invicem, neque aliud alterum continet; quælibet enim ex binis nominibus, & quæ irrationales ita aſſumptæ ſunt, *ordinatæ* quidem ſunt, non ideo tamen *effabiles*; ut neque diameter reſpectu lateris quadrati. *Effabilium* vero *inordinata* multa ſunt, & ea quæ multipliciter & infinitis modis cognoſcuntur: poteſt enim ſcalenum triangulum menſurari à propoſita & definita menſura, quamvis *inordinatum* ſit.

Cogniti autem cum *porimo* ſimilitudines omnes perſpectas quidem habere facile eſt, differentiam autem aſſignare difficilius eſt: finitima ſiquidem eſt eorum natura, ita ut videantur invicem ſe adæquare. attentius tamen conſideranti, differentia quædam ineſſe apparebit. Siquidem quod ab uno puncto una recta helicem tangat, clarum eſt & *cognitum*; ſed non propterea cognitum eſt quomodo conſtruatur, quod adhuc non eſt comprehenſum: ita ut quod cognitum eſt, non ideo *porimum* ſit, etſi omne quod *porimum* eſt *cognitum* ſit; latius igitur patet *cognitum porimo*.

Rurſus autem *cognitum* & *porimum* & *effabile* in aliquibus conveniunt, in aliquibus autem differunt, ea qua diximus ratione. Etenim eæ lineæ quæ irrationales appellantur *cognitæ* quidem ſunt, non tamen *effabiles*. Contra numerus omnis *effabilis* quidem eſt, non tamen omnis *cognitus*. *Effabile* porro ex natura ſua ſemper *effabile* eſt: quanquam aliqua longitudo *effabilis* modo ſit, modo non, ſi quidem ad eandem menſuram cum aliqua alia exigatur. Sed & illa eadem longitudo aliquando *cognita* eſt, aliquando minime, quamvis inter illas omnino conveniat. Non parum autem difficile eſt reperire aliquid quod *effabile* ſit, atque etiam *incognitum*: etenim latius videtur patere *cognitum* quam *effabile*. Ex his autem clarum eſt *porimum* & *aporum* differre à *rationali* & *irrationali*: poſſibile enim eſt & *irrationalium* aliqua *porima* eſſe, non autem *rationalium* aliqua eſſe *irrationalia*. In quibus itaque prædicta conveniant manifeſtiſſimum eſt, ita tamen illa ſe habent ad invicem, ut latius patere videatur *porimum effabili*.

Ex iis autem licet hoc loco eorum quæ dicta ſunt differentiam contemplari. Nam *effabile* quidem & *irrationale* dicitur ſecundum reſpectum ad menſuram, quæ tamen ad cognitionem noſtram non pervenit. Poteſt enim aliquid quod *rationale* eſt non eſſe nobis *cognitum*; ſimiliter *rationale* eſſe, neque comprehendi unquam quod *rationale* ſit. *Ordinatum* autem & *inordinatum* ſecundum ſe propriamque ejus rei natu-

τεταγμένα· οἷον σκαληνὸν τρίγωνον ὑπονοῆσαι, & εἰς τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ τὴν ἀναγαγεῖν τὴν δοθεῖσαν· ὅτι τὸ ἰσόπλευρον ῥᾴδιον χαλεπὸν, ἀλλὰ εὐπορίστον ἐστὶ καίτοι ἄτακτον ὂν καὶ ἄπειρον.

Οὕτω δὲ ἔχει καὶ πρὸς τὸ ῥητὸν καὶ ἄλογον τὸ τεταγμένον τε καὶ ἄτακτον· κοινωνοῦντα γὰρ ἀλλήλοις πολλαχῇ, καὶ διαλύοντε τὸ εἰρημένον τρόπον. ἐδὲ γὰρ ταῦτα ἐξισάζει * ἄλληλα, ἐδ' ἕτερον ἕτερα ἐστὶ περιληπτικὸν, ἡ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων, καὶ αἱ ἐκτὸς κατειλημμέναι ἄλογοι τεταγμέναι μόνον εἰσὶν, ἐκεῖ δὲ καὶ ῥηταί, καὶ ὁ τῆς δοθείσης πρὸς τὴν τοιάδε τὸ τετράγωνα. πολλὰ δὲ καὶ τῶν ῥητῶν ἄτακτά ἐστιν, ὡς τὸ πολλαχῶς καὶ ἀορίστως γεγωμένα. δυνατὸν γὰρ καὶ σκαληνὸν τρίγωνον μετρεῖσθαι ὑπό τινος ὡρισμένου καὶ ὡρισμένης ῥητῆς μέτρου, καίτοι ἄτακτον ὑπάρχον.

Τῶν δὲ γνωρίμων πρὸς τὸ πόριμον τὴν μὲν ὁμοιότητα † παντὶ γε δεῖδειν ῥᾴδιον, τὴν δὲ διαφορὰν χαλεπὸν ἐλεῖν· σύνεγγυς γάρ εἰσι τῇ φύσει ἀλλήλων, ὥστε & ἐξισάζειν δοκεῖν. ἐ μὲν ἀλλὰ κἂν τοῦτο ἀκριβῶς ἐπιβλέψαντι ὀφθήσεταί τις ἐνοῦσα διαφορά. εἰ μὲν γὰρ μία ἐστὶν ἡ τῆς ἑλικὸς ἀφ' ἑνὸς σημείου ἁπτομένη, ἐμφανὲς ἐστι καὶ γνώριμον, ἀλλ' ἐ διὰ τοῦτο ἤδη καὶ πόριμον ἐστὶ τὸ πρόβλημα, μήπω κατειλημμένον· ‡ ὥστε πᾶν τὸ γνώριμον οὐκ ἔστι καὶ πόριμον, τὸ μέντοι πόριμον πᾶν καὶ γνώριμον, διπλοῦν ἄρα τὸ γνώριμον τοῦ πορίμου.

Πάλιν δ' αὖ τὸ γνώριμον καὶ τὸ πόριμον & τὸ ῥητὸν πῇ μὲν κοινωνεῖ, πῇ δὲ διαφέρει ἀλλήλων, κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον. αἱ γὰρ εἰρημέναι ἄλογοι γνώριμα μέν εἰσιν, ἐκεῖ δὲ καὶ ῥηταί. ὁ γὰρ ἀριθμὸς πᾶς ῥητὸς μέν ἐστιν, ἐκεῖ δὲ γνώριμος πᾶς. καὶ τὸ μὲν ῥητὸν τοῖς κατὰ ταὐτὸν εἶδος ὁμοίως δὲ ῥητὸν ἐστὶ· καὶ τὸ μὲν ῥητὸν ἔσαι τι μῆκος, τὸ δ' ἐ, εἰ δὴ ταὐτὸ ἀνύσοιεν μέτρον. γνώριμον δὲ τὸ μὲν αὐτὸ μῆκος, τὸ δ' ἐ, κἂν ἐν τῇ αὐτῇ σωμηθείσα ὦσιν. ἴσως δὲ καὶ παντὸς χαλεπόν τι ἐστιν εὑρεῖν ῥητὸν μόνον, ἄγνωστον δὲ· δοκεῖ γὰρ καὶ τὸ ῥητὸν διπλοῦν εἶναι τὸ γνώριμον. ὅτι δὲ καὶ τὸ πόριμον καὶ τὸ ἄπορον διαφέρει τοῦ τε ῥητοῦ καὶ ἀλόγου φανερὸν ἐκ τούτων· πόριμα γὰρ εἶναι δυνατὸν καὶ τῶν ἀλόγων τινὰ, ὑδὲν δὲ τῶν ῥητῶν ἄλογον. ἡ δὲ συγγένεια τούτων αὐτῶν καθάπερ καὶ τῶν ἄλλων παντὶ καταφανὴς, ὅτω μόνον καὶ ταῦτα ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὥστε τὸ πόριμον διπλοῦν εἶναι δοκεῖν τοῦ ῥητοῦ.

Ἐξεστι δὲ τῶν προειρημένων τὰς διαφορὰς διασκοπεῖν τῇδε. ῥητὸν μὲν τὸ ἄλογον κατὰ τὴν ἐπὶ τὸ μέτρον ἀναφορὰν λέγεται, ὁ πρὸς τὴν ἡμετέραν γνῶσιν ἀναπεμπόμενον. δυνατὸν γάρ τι ῥητὸν ὂν μὴ εἶναι ἡμῖν γνώριμον, ὅμως ῥητὸν εἶναι μηδὲ κατειλῆφθαί πω ὅτι ῥητόν ἐστι. τὸ δὲ τεταγμένον & ἄπειρον καθ' αὑτὸ καὶ κατ' ἰδίαν

* Al. ἀλλήλοις. † Παντὶ δέ γε ἰδίως ῥᾴδιον in *Editis* vulgatis. Edidit quidem *Claudius Hardy*, ὥστε τὸ πόριμον πᾶν τῷ γνώριμον, διπλοῦν ἄρα &c.

‡ Ita legimus ex Græco exemplari ad finem *Procli* excuſo.

φύσιν

φύσιν θεωρεμένα ἐστὶ, καὶν ὑφ' ἡμῶν μήπω καταλαμβάνηται. πολλὰ γὰρ τεταγμένα φύσει * ὕστερον Ἀρχιμήδης ἢ Σερήνος ἐθεώρει ὅτι τέτακται. γνώριμον δὲ καὶ ἄγνωστον κατὰ τὴν πρὸς ἡμᾶς ἀναφορὰν λέγεται, ὥστε διαφέρειν ἂν τὰ εἰρημένα ἀλλήλων· ἔστιν τὸ μὲν πρὸς ἡμᾶς ἔχει τὴν ἀναφοράν, τόδε πρὸς τὴν φύσιν, τόδε πρὸς τὸ μέτρον.

Διωρισμένης δὲ καὶ τῆς κοινωνίας καὶ διαφορᾶς τῶν προτεθέντων, ἑπόμενον ἂν εἴη λοιπὸν τί ποτέ ἐστι τὸ δεδομένον ἐπισκέψασθαι. ὅσοι τοίνυν τὸ καθ' ὑπόθεσιν δεδομένον ὑπὸ τοῦ προβάλλοντος οἴονται εἶναι τὸ δεδομένον, διαμαρτάνουσι τοῦ ζητουμένου. τὰ γὰρ στοιχεῖα πάντα τοῦ δεδομένου συντέτακται, ἐκ τοῦ καθ' ὑπόθεσιν τοιοῦτα, ὡς ἔξεστιν ἰδεῖν ἐπὶ πάσιν τοῖς τοῦτο πραγματείαις. διὸ δεῖ καὶ ἡμᾶς, ἀφέντας τὴν τοιαύτην ὑπόληψιν, τοὺς ἄλλους ὁρισμοὺς ἐξετάσαι· ἔστι δὲ τὸ καθ' ὑπόθεσιν δεδομένον, τὸ ἀκολούθως τῇ δοχῇ θεωρούμενον. ὁρίζονται δή τινες μὲν ὀνομαστικοῖς ὅροις χρώμενοι, ἑνί τινι τῶν εἰρημένων αὐτὸ χαρακτηρίζοντες, ὡς ἐν ἀρχῇ εἴρηται· πάντες δὲ σχεδὸν ὥσπερ κοινὴν ἔννοιαν τοῦ δεδομένου δοκοῦσιν ἐοικέναι, καταλῆψιν χάρ τινα αὐτὸ εἶναι ὑπέλαβον, ὡς αὐτὸ ἐμφαίνει τὸ δεδομένου ὄνομα· οὗ μάλιστα οἱ τὸ καθ' ὑπόθεσιν δεδομένον ὑποφάσκοντες. ἔνιοι δὲ πρὸς τὸ συγχωρούμενον ἀπέβλεψαν. χρώμενοι δὲ καὶ ἡμεῖς τῷ εἰρημένῳ, ὥσπερ κάνονι καὶ κριτηρίῳ, δυνησόμεθα εὑρίσκειν τὸ τέλειον τοῦ δοθομένου ὁρισμόν. δῆλον δὲ ὅτι καὶ ἐξισάζειν ἢ τοι ἀντιστρέφειν αὐτὸ δεῖ πρὸς τὸν ὁρισμόν· καὶ γὰρ τοῦτο ὑπάρχειν δεῖ τοῖς ὀρθῶς ἀποδεδομένοις ὁρισμοῖς. ἔστι δὲ προκείμενος τοιοῦτος ὁ μὲν τοῖς ἁπλουστέροις εἰρημένοις ὁρισμοῖς, ὁ τὸ πόρισμα ὁρισάμενος, ἐν δὲ τοῖς συμπεπλεγμένοις ὁ τὸ γνώριμον ἅμα καὶ πόρισμα, ἀτελεῖς δὲ οἱ λοιποὶ πάντες. ὅτι γὰρ ὁ τεταγμένον ὁρισάμενος αὐταρκής ἐστι πρὸς τὸ τοῦ δεδομένου περιοχὴν, δῆλον μήτε τὸ πᾶν μήτε μόνον τὸ τεταγμένον εἶναι καταλῆψιν· ἀλλὰ καὶ τῶν ἀπάντων τινὰ, ὡς ἐπιδέδεικται. ὅτι δὲκεῖνος ἱκανὸς, ὁ γνώριμον αὐτὸ ἀφορίζομενος, δῆλον· οὐ γὰρ τοῦτο πᾶν ἐστι καταλῆψιν, εἰ καὶ μόνον· τὸ γὰρ ἄγνωστον οὐκ ἂν εἴη καταλῆψιν. οὐδὲ μὴν ὁ ῥητὸν αὐτὸ ἀποφαινόμενος ὅρος τέλειος ἔσται· οὐδὲ γὰρ τοῦτο μόνον καταλῆψιν, ὡς ἐν τοῦτο διώρισται πρότερον. λείπεται δὲ ἐν τοῖς ὀνομαστικῶς ἀποδεδομένοις τὸ πόρισμα, ὅπερ δοκεῖ μάλιστα τὴν καταλῆψιν ἐμφαίνειν· ἐν γὰρ τὸ πόρισμα καταλῆψιν καὶ μόνον. τῷ τοιούτῳ καὶ Εὐκλείδης ἐχρήσατο, ὁρώμενος εἴδη τοῦ δεδομένου πάντα ὑπογραφών. τῶν δὲ συντεθέντων ὁρισμῶν μόνος τέλειος ἔστιν, ὁ γνώριμον ἅμα καὶ πόρισμα τὸ δεδομένον ἀφορίζόμενος, γένει μὲν ἀνάλογον ἔχον τὸ γνώριμον, διαφορᾷ δὲ τὸ πόρισμα. ὁ δὲ τεταγμένον ἅμα καὶ πόρισμον λέγει, οὐκ ἀληθῆς· ἐν μόνα γὰρ τὰ τοιαῦτα ἐστι δεδομένα. καὶ ὁ τὸ τεταγμένον δὲ ῥητὸν ὁμοίως ἐλλιπῶς περιέχει τὸ δεδομένον· ὁ δὲ τὸ γνώριμον ἅμα καὶ τεταγμένον, διὰ τὸ ὑπερβάλλειν τὸ ὑποκείμενον

ram, quæ in contemplationem venit, dicitur; etiamsi à nobis minime comprehendatur. nam multa Archimedes posterius *ordinata* esse natura deprehendit, quæ Serenus fuerat contemplatus. *Cognitum* autem & *incognitum* secundum respectum ad nos dicitur, ita ut prædicta differant ab invicem; siquidem hoc refertur ad nos, illud ad propriam naturam, posterius autem ad mensuram.

Explicatis autem & similitudinibus & differentiis eorum quæ proposita sunt, consequens fuerit considerare quid sit *datum*. quotquot enim *id quod in hypothesi conceſsum est à proponente* putant esse *datum*, aberrant à quæsito. Etenim omnia *datorum* elementa de ejusmodi *dato*, quod est secundum hypothesim, composita non sunt; ut videre licet versatis in tractatione quæ habetur de *dato*. Quamobrem, omissa hac opinione, oportet nos de aliorum definitionibus ferre judicium: quod vero secundum hypothesin datur, est aliquid quod consequenter ex principiis cognoscitur. Porro definitionibus, quæ uno verbo constant, utentes, illud definiunt & aliquo prædictorum insigniunt, ut principio dictum est: ita ut fere omnes hoc idem de *dato* sensisse videantur, ut illud (quod & ipsum *dati* nomen innuit) *comprehensum* quiddam esse supponerent: atque inter illos ii maxime qui illud per *hypothesim* descripserunt; alii autem ad id quod *conceſsum* est respexerunt. Nos autem utentes dictis, ut regula & criterio, poterimus invenire perfectam *dati* definitionem. Clarum siquidem est quod exæquare aut converti ipsam oportebit cum definito: nam hoc oportet fieri in omnibus definitionibus recte traditis. Est autem propositi talis definitio; in simplicius quidem traditis, illa quæ definit *porimum*; in complexis vero quæ *porimum* & simul *gnorimum*, imperfectæ vero sunt reliquæ omnes. Neque enim quæ *ordinatum* definit sufficit ad *dati* comprehensionem, quia neque illud omne neque illud solum quod *ordinatum* est *comprehensum* est: etenim *inordinatorum* aliqua talia sunt, ut ostensum est. Neque illa satisfacit quæ *cognitum* illud esse describit; nam non illud omne solum *comprehensum* est; & si solum esset; incognitum utiq; numquid esset comprehensum? Neque item quæ *effabile* illud esse definit perfecta est; non enim illud omne solum *comprehensum* est, ut superius declaratum est. Porro in iis definitionibus, quæ uno verbo traditæ sunt, maxime deficit illa *porimi*, quæ videtur comprehensionem manifestare: non enim illud solum quod *porimum* est *comprehensum* est. Tali autem & ipse Euclides definitione usus est, cum perspectas sibi *dati* species omnes describeret. Compositarum autem definitionum ea perfecta est, quæ *cognitum* simul & *porimum datum* esse definit, pro genere quidem analogico habens *cognitum*, pro differentia autem *porimum*. Quæ porro *ordinatum* simul & *porimum* dicit, imperfecta est; non enim quæ talia sunt sola *data* sunt. quæ vero & *ordinatum* & *effabile* similiter cum defectu comprehendit *datum*; quod vero *cognitum* simul & *ordinatum*, quia propositum excedit, sana

* Omnino legendum ὕστερον Ἀρχιμήδους ἢ Σίρηνος ἐθεώρει. † *sc.* p. 454. v. 1 & 2.

non

non est; neque enim illud solum quod tale est *datum* est. soli autem illi, quod superest, ad *dati* cognitionem perveniisse videntur, qui illud quod *cognitum* est, esse *datum* ostenderunt: quod enim tale est, omne & solum *comprehensum* est; quæ utraque inesse debent rectè traditis definitionibus. accedunt autem ad eos proxime qui ita definiverunt: *datum est cui æquale possumus exhibere, secundum ea quæ proposita sunt à nobis in primis hypothesibus & principiis.* Ex quorum numero est Euclides ipse ubique usus verbo πείσασθαι, quanquam prætermittat *cognitum* ut consequens ex *porimo*. Posset autem illum aliquis merito reprehendere, quod non prius quidem *datum in communi* definierit, sed immediate specierum *dati* quamlibet, quamvis in geometricis elementis visus sit simplicem lineam ante species lineæ descripsisse, & alia similiter.

Quæ sit utilitas tractatus de datis.

Igitur cum universalius à nobis, & quantum quidem ad hoc negotium necessarium esse visum est, quid sit *datum* exposuerimus, consequens fuerit hujusce tractationis utilitates aperire. Etenim ea tractatio talis est, ut non sui solum, sed alicujus alterius rei gratia instituatur: etenim ad *locum resolutum* maxime necessaria est hæc scientia. Quantam porro vim *resolutus locus* obtineat in mathematicis disciplinis, & quæ ad illas proxime accedunt, Optica & Canonica, alio loco dictum est à nobis, tum quod *resolutio* sit demonstrationis inventio, tum quod in similibus rebus ad demonstrationis inventionem nobis ea multum conferat, tum quod longè præstantius sit potentiam resolutivam nancisci, quam multas particulares demonstrationes possidere.

Ad quam Scientiam datorum *tractatio revocetur.*

Porro cum ad omnes ejusmodi scientias utilis sit *datorum* consideratio, quippe quæ ad *resolutionem* multum utilitatis afferat, merito dicetur non quidem ad unam scientiam, sed ad universalem illam Mathematicam potius revocari, quæ versatur circa numeros, magnitudines, tempora, velocitatem, & omnia quæ sunt ejusmodi, quæque de rationibus agit, nec non de proportionibus atque omnibus omnino medietatibus. quamobrem ad perfectam & demonstrativam *datorum* cognitionem tantopere utilem, hunc *datorum librum* elaboravit Euclides ille qui, inter eos qui elementa Geometrica composuerunt, facile principatum obtinet. quippe cum omnium fere mathematicarum disciplinarum (ut omnis Geometriæ in XIII. libris, Astronomiæ in Phænomenis, Musicæ & Opticæ) elementa seu verius introductiones exaravisset, in hoc opere tractationis de *dato*, elementa resolutiva conscripta reliquit. Sed cum Geometra esset, quæ reliquis communia erant cum *dato*, magnitudinibus particulariter accommodavit.

τὸν ἐχ ὑγιὲς ἔσεσθαι. ἐδὲ γὰρ πᾶν τὸ τοιῦτο δεδομένον ἐστί. μόνοι δὲ, λοιπὸν, δοκεῖσιν καθικνεῖσθαι τῇ ἐννοίας τῦ δεδομένυ, οἱ γνώρεμον αὐτὸ εἶναι ἀποφηνάμενοι· τὸ γὰρ τοιῦτο πᾶν καταλημπὸν καὶ μόνον· ταῦτα δὲ ἀμφότερα δεῖ ὑπάρχειν, τοῖς ὀπισημονικῶς ὑποδεδομένοις ὁρισμοῖς. ἐγγὺς δὲ τῶτων ἐσὶν οἱ σωλέντες καὶ ὧτως· δεδομένον ἐσὶν ᾧ πορίσασθαι δυνάμεθα ἴσον, λαβὸν τῦ κειμένων ἡμῖν ἐν ταῖς πρώταις ὑποθέσεσίν τε καὶ ἀρχαῖς. τῶν δὲ προειρημένων εἴη ἂν Εὐκλείδης, πανταχῆ τῷ πορίσασθαι χρώμενος, εἰ μὴ προλιμπάνει τὸ γνώρεμον, ὡς παρεπόμενον τῷ πορίσμῳ. ἀπιάσειε δ' ἄν τις αὐτὸν εὐλόγως ὡς ὑ προτερον καινῶς τὸ δεδομένον ὁρισάμενον, ἀλλ' ἀμέσως τῦ εἰδῶν αὐτὸ ἕκαστον, καί τοι ἐν τῇ γεωμετρικῇ στοιχειώσει, φάναι) περὶ τῦ εἰδῶν τῦ γραμμῆς, τὴν ἁπλῶς γραμμὴν ὁρισάμενος, καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως.

Τί τὸ χρήσιμον τῦ περὶ τῦ δεδομένων πραγματείας.

Διαχειλθέντος τοίνυν καινότερον, καὶ ἴσον καὶ πρὸς τὴν παρέσαν χρείαν τῦ δεδομένυ, ἐφέξῃς ἂν εἴη τὸ χρήσιμον τῆς περὶ αὐτὸ πραγματείας ὑποδῦναι. ἐσὶ δὲ καὶ τῦτο τῶν πρὸς ἄλλο ἐχόντων τὴν ἀναφοράν· πρὸς γὰρ τὸ ἀναλυόμενον λεγόμενον τόπον ἀναγκαιοτάτη ἐσὶν ἡ τῦτο γνῶσις. ὅσην δ' ἔχει δύναμιν ἐν ταῖς μαθηματικαῖς ὀπισήμαις, καὶ ταῖς συγγενῶς ὀπτικαῖς τε καὶ κανονικαῖς, ὁ ἀναλυόμενος τόπος ἐν ἄλλοις διώρισται, καὶ ὅτι ὑποδείξεώς ἐστιν εὕρεσις ἡ ἀνάλυσις. καὶ ὅτι πρὸς εὕρεσιν τῦ τῶ ὁμοίων ὑποδείξεως ἡμῖν συμβάλλεται, καὶ ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ δύνασθαι ἀναλυτικὴν κτήσασθαι, τοῦ πολλὰς ὑποδείξεις τῶν ὀπὶ μέρυς ἔχειν.

Ὑπό τινα ὀπισήμην ἀνάγεται ἡ τῦ δεδομένων πραγματεία.

Εἰς πόσας τοίνυν τὰς τοιαύτας ὀπισήμας χρήσιμη ἔσται ἡ περὶ τῦ δεδομένων θεωρία, ἔπειπερ εἰς ἀνάλυσιν μέγα συμβάλλεται, εἰκὸς ἂν ῥηθείη ἀνάγεσθαι ὑχ ὑπὸ μίαν ὀπισήμην, ἀλλ' εἰς τὴν καθόλυ λεγομένην μαθηματικήν· αὕτη δέ ἐστιν ἡ περὶ τὰ πλήθη, καὶ μεγέθη, καὶ χρόνυς, καὶ τάχυν ἔχοντα καὶ ταῦτα πάντα, καθάπερ δὴ καὶ ἡ περὶ λόγυς, καὶ ἀναλογίας καὶ τὰς πανταχῆ μεσότητας πραγματευομένη. πρὸς ταύτην τοίνυν τὴν δεδομένην ὀπισημονικὴν καταλῆψιν χρησιμωτάτην ὄσαν, τὸ τῦ δεδομένων βιβλίον ὁ Εὐκλείδης ἐξεπόνησεν, ὃν καὶ στοιχειωτικὴν κύκλον ἐπωνόμασαν. πόσης γὰρ ἀχθον μαθηματικῆς ὀπισήμης στοιχεῖα, καὶ ὅσην εἰσαγωγὴν πρεσπαρέχει, ὡς γεωμετρίας μὲν ὅλης ἐν τοῖς ιγ'. βιβλίοις, καὶ τῆ ἀστρονομίας ἐν τοῖς φαινομένοις, καὶ μυσικῆς δὲ καὶ ὀπτικῆς ὁμοίως στοιχεῖα περιδέδωκεν, καὶ τῆ περὶ δεδομένην ταύτης πραγματείας ἐν τῷ προκειμένῳ βιβλίῳ στοιχείωσιν ἀναλυτικὴν ἐποιήσατο. γεωμετρικὸς δὲ ὢν ἀνὴρ διαφερόντως τὰς καινὰς λόγυς τοῖς μεγέθεσιν ἰδίως

ἰδίως ἐφάρμοσεν, ὃν τρόπον ἐποίησεν καὶ ἐπὶ τῶ καθόλε λόγων, ὡς ὑπὶ μεγεθῶν ἰδίως αὐτὰς πραγματευσάμενος ἐν τῷ πέμπτῳ βιβλίῳ τῶ ἐπιπέδε.

Κοινῶς μὲν καὶ εἰρηται τί τὸ δεδομένον, καὶ ἐπὸ ποίαν ἐπιστήμην ἀνάγε), καὶ ὅτι χρησιμωτάτη ἐστὶν ἡ περὶ αὐτῶν θεωρία. προσκείσθω δὲ τοῖς εἰρημένοις καὶ ἡ περιγραφὴ τῶ περὶ αὐτῶν ἐπιστήμης. ἔστι δὴ αὕτη, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων φανερὸν, καταληψις τῶν δεδομένων κατὰ πάντα τρόπον, καὶ τῶν περὶ αὐτὰ συμβαινόντων. ἰδίως δὲ καὶ ὡς πρὸς τὸ προκείμενον βιβλίον, λεγέσθω εἶναι μέθοδος στοιχείωσιν περιέχουσα τῆς ὅλης περὶ τὸ δεδομένον ἐπιστήμης. ἕξει δὲ αὕτη τὸ χρήσιμον ἀκολούθως, καὶ τὰ ἄλλα, κατὰ τὴν ἀναφορὰν τὴν πρὸς τὸ δεδομένον.

Διήρη) δὲ τὸ βιβλίον πρὸς τὰ δεδομένα εἴδη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον αὐτῶν τμῆμα περιέχει τὰ κατὰ λόγον δεδομένα, τὸ δὲ δεύτερον τὰ τῇ θέσει, ἔπειτα δὲ, τὰ τῷ εἴδει. ἁπλοῦν γὰρ ἐστὶ τὸ περὶ τὸ μεγέθει δεδομένον, κατέπαυσα) δὲ καὶ ταῦτα μερικῶς ἐν τοῖς ἄλλοις, καὶ μάλιστα τὸ εἶδος δεδομένου· ἤρξατο δὲ ἀπὸ τῶν λόγῳ καὶ θέσει δεδομένων, ἐπεὶ καὶ ἐκ τούτων συνίστανται τὰ τῷ εἴδει δεδομένα. καὶ ἄλλως δὲ ἡ διαίρεσις αὐτὰ τοῦ βιβλίου γέγονεν, εἴς τε καθ' ὅλα μεγέθη, καὶ εἰς γραμμὰς, καὶ ἐπίπεδα, καὶ κυκλικὰ θεωρήματα· τῇ δὲ ὁμοίᾳ τάξει ἐχρήσατο καὶ ἐπὶ τῶν ὅρων, ἥπερ ὑποθέσεων τοῦ βιβλίου· τρόπῳ δὲ διδασκαλίας ἐκ κατὰ συνθεσιν ἐνταῦθα ἠκολούθησεν, ἀλλὰ τῷ κατὰ ἀνάλυσιν, ὡς ὁ Πάππος ἱκανῶς ἀπέδειξεν ἐν τοῖς εἰς τὸ βιβλίον ὑπομνήμασι.

davit; quam rationem ipſe ſervavit, cum de rationibus in univerſum loqueretur, de iis, tanquam ad magnitudines ſolum ſpectantibus, locutus in libro quinto de planis.

Nunc generaliter quidem dictum eſt quid ſit *datum*, & ad quam ſcientiam pertineat, & quod utiliſſima ſit ejus contemplatio. Adjiciatur autem ad ea quæ dicta ſunt, & illius ſcientiæ, quæ circa datum verſatur, deſcriptio. Eſt illa quippe, ut ex dictis patet, omnimoda comprehenſio *datorum*, & eorum quæ illis accidunt. Peculiariter autem & congruenter ad propoſitum librum dicatur eſſe methodus continens elementa ejus ſcientiæ quæ *datum* contemplatur. Habebit autem & illa utilitatem ex conſequenti, atque alia, quatenus refertur ad *datum*.

Porro hic liber ſecundum *datorum* ſpecies dividitur; & prima quidem ejus ſectio continet quæ *data* ſunt *ratione*, ſecunda ea quæ *poſitione*, tum ea quæ *ſpecie data* ſunt. Etenim illud quod *magnitudine datum* eſt, ſimplex eſt, & in aliis particulariter continetur, & præcipue in *datis ſpecie*. Incepit autem à *ratione* & *poſitione datis*, quoniam ex his reſultant *ſpecie data*. Aliam vero diviſionem recipit hic liber; dividitur quippe & in *magnitudines in univerſum*, & in *lineas*, & in *ſuperficies*, & in *theoremata de circulis*; quem ordinem ſecutus fere eſt in definitionibus & ſuppoſitionibus hujus libri. Genere porro docendi uſus eſt, non qui per compoſitionem procedit, ſed qui per reſolutionem, ut à Pappo * in commentariis ad hunc librum fuſe ſatis oſtenſum eſt.

* Præfat. ad lib. VII. Collect. Math.

EY-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS DATA.

ΟΡΟΙ.

α'. Δεδόμενα τῷ μεγέθει λέγεται, χωρία τε, καὶ γραμμαὶ, καὶ γωνίαι, οἷς δυνάμεθα ἴσα ποιήσασθαι.

β'. Λόγος δεδόσθαι λέγεται, ᾧ δυνάμεθα τὸν αὐτὸν ποιήσασθαι.

γ'. Εὐθύγραμμα σχήματα τῷ εἴδει δεδόσθαι λέγεται, ὧν αἵ τε γωνίαι δεδομέναι μία καθ' μίαν, καὶ οἱ λόγοι τῶν πλευρῶν τοῖς ἀλλήλαις δεδομένοι.

δ'. Τῇ θέσει δεδόσθαι λέγεται, σημεῖά τε, καὶ γραμμαὶ, καὶ χωρία, καὶ γωνίαι, ἃ τὸν ἀεὶ τόπον ἔχει.

ε'. Κύκλος τῷ μεγέθει δεδόσθαι λέγεται, ὅταν δέδοται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει.

ϛ'. Τῇ θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει κύκλος δεδόσθαι λέγεται, ὅταν δέδοται τὸ μὲν κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει.

ζ'. Τμήματα κύκλου τῷ μεγέθει δεδόσθαι λέγεται, ἐν οἷς αἵ τε γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ βάσεις τῶν τμημάτων τῷ μεγέθει.

η'. Τῇ θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει τμήματα δεδόσθαι λέγεται, ἐν οἷς αἵ τε γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει, καὶ αἱ βάσεις τῶν τμημάτων τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

θ'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν, ὅταν, ἀφαιρεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἴσον ᾖ.

ι'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, ἔλαττόν ἐστιν, ὅταν, προσκειμένου τοῦ δοθέντος, τὸ ὅλον τῷ αὐτῷ ἴσον ᾖ.

DEFINITIONES.

1. DATA magnitudine dicuntur, ſpatia, lineæ, angulique, quibus æqualia poſſumus invenire.

2. Ratio dari dicitur, cui poſſumus eandem invenire.

3. Rectilineæ figuræ ſpecie dari dicuntur, quarum & ſinguli anguli dati ſunt, & laterum rationes ad invicem etiam datæ.

4. Poſitione dari dicuntur, puncta, lineæ, ſpatia, & anguli, quæ eundem ſitum ſemper obtinent.

5. Circulus magnitudine dari dicitur, cujus datur ea quæ ex centro magnitudine.

6. Poſitione & magnitudine dari dicitur circulus, cujus centrum quidem datur poſitione, & ea quæ ex centro magnitudine.

7. Circuli ſegmenta magnitudine dari dicuntur, in quibus & anguli & ſegmentorum baſes magnitudine data ſunt.

8. Poſitione & magnitudine dari dicuntur circuli ſegmenta, in quibus anguli magnitudine dati ſunt, atque ſegmentorum baſes poſitione ſimul ac magnitudine.

9. Magnitudo magnitudine major eſt, data; quando, ablata data, reliqua eidem æqualis eſt.

10. Magnitudo magnitudine minor eſt, data; quando, adjuncta data, tota eidem æqualis eſt.

11. Magnitudo magnitudine major eſt, data *magnitudine*, quam in ratione: quando, ablata data, reliqua ad eandem habet rationem datam.

12. Magnitudo magnitudine minor eſt, data, quam in ratione: quando, adjuncta data, tota ad eandem habet rationem datam.

13. Deducta linea recta eſt, quæ à dato puncto ad datam poſitione rectam in angulo dato ducitur.

14 Educta vero linea recta eſt, quæ à dato puncto ad datam poſitione rectam in dato angulo protrahitur.

15. Contra poſitione recta eſt, quæ per datum punctum datæ poſitione rectæ parallela ducitur.

ια'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μεῖζόν ἐστι ἢ σὺ λόγῳ, ὅταν, ἀφαιρεθέντος δοθέντος, τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχει δεδομένον.

ιβ'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, ἔλασσόν ἐστι ἢ σὺ λόγῳ, ὅταν, προστεθέντος δοθέντος, τὸ ὅλον πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχει δεδομένον.

ιγ'. Κατηγμένη ἐστίν, ἡ ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει εὐθεῖαν ἀγομένη εὐθεῖα ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ.

ιδ'. Ἀνῃγμένη ἐστίν, ἡ ἀπὸ δεδομένου σημείου πρὸς θέσει εὐθεῖαν ἀγομένη εὐθεῖα σὺ δεδομένῃ γωνίᾳ.

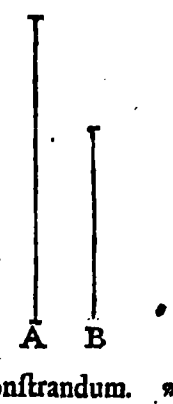
ιε'. Παρὰ θέσει ἐστίν, ἡ ἀφ' δεδομένου σημείου δεδομένῃ θέσει εὐθείᾳ παράλληλος ἀγομένη.

PROP. I.

Datarum magnitudinum ratio ad invicem datur.

SInt datæ magnitudines A, B: dico rationem ipſius A ad B datam eſſe.

Quoniam enim datur magnitudo A, poſſumus [per 1. def. dat.] illi invenire æqualem. inveniatur, & eſto Γ. rurſus cum data ſit magnitudo B, illi poſſumus invenire æqualem. inveniatur, & eſto Δ. quoniam igitur A æqualis eſt ipſi Γ, & B ipſi Δ; erit ut A ad Γ ita B ad Δ: permutando igitur erit [per 16.5.] ut A ad B ita Γ ad Δ. ratio igitur ipſius A ad B [per 2.def.dat.] data eſt; huic enim eadem inventa eſt, ſc. ratio ipſius Γ ad Δ. quod erat demonſtrandum.

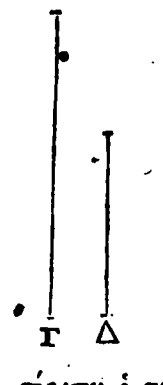


ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τῶν δεδομένων μεγεθῶν ὁ λόγος ὁ πρὸς ἄλληλα δέδοται.

ΕΣτω δεδομένα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ Α, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον προσκεῖσθαι. προσκείσθω, καὶ ἔστω τὸ Γ. πάλιν ἐπεὶ δεδομένον ἐστὶ τὸ Β, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον προσκεῖσθαι. προσκείσθω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ, τὸ δὲ Β τῷ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Β πρὸς τὸ Δ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτω τὸ Γ πρὸς τὸ Δ. τοῦ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς· ὁ αὐτὸς γὰρ αὐτῷ προσκείσθω ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

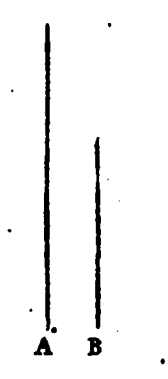


PROP. II.

Si data magnitudo ad aliam aliquam magnitudinem rationem datam habeat; datur quoque alia illa magnitudine.

DAta enim magnitudo A ad aliam magnitudinem B habeat rationem datam: dico & ipſam B magnitudine datam eſſe.

Quoniam enim data eſt A, poſſumus [per 1. def. dat.] illi æqualem invenire. inveniatur, & eſto Γ. & quoniam data eſt ratio ipſius A ad B; (ita enim ſupponitur,) poſſumus huic æqualem invenire. inveniatur, & eſto ratio ipſius Γ ad Δ. & quoniam eſt ut A ad B ita Γ ad Δ; erit quoque permutando ut A

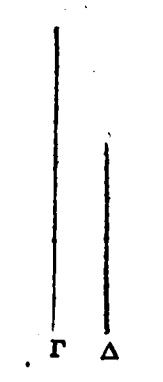


ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν δεδομένον μέγεθος πρὸς ἄλλό τι μέγεθος λόγον ἔχῃ δεδομένον, δέδοται καὶ ἐκεῖνο τὸ μέγεθος.

ΔΕδομένου γὰρ μεγέθους τοῦ Α πρὸς ἄλλό τι μέγεθος τὸ Β λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι δέδοται καὶ τὸ Β τῷ μεγέθει.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ Α, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον προσκεῖσθαι. προσκείσθω γὰρ ἔστω Γ. καὶ ἐπεὶ δέδοται ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος, ἔστω δὲ ὑποκείσθω, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ τῷ ἴσον προσκεῖσθαι. προσκείσθω καὶ ἔστω ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ λόγος. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτω τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς



πρὸς τὸ Γ ὕτω τὸ Β πρὸς τὸ Δ. ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Γ· ἴσον ἄρα τὸ Β τῷ Δ· δέδοται ἄρα τὸ Β μέγεθος, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπέλεται τὸ Δ.

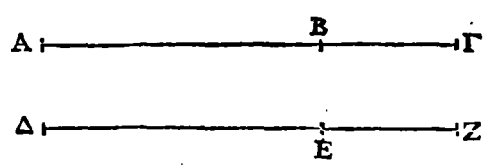
ad Γ ita Β ad Δ. æqualis autem est Α ipsi Γ; æqualis igitur est & Β ipsi Δ. itaque [per 1 def. dat.] magnitudo Β data est; illi enim æqualis inventa est Δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν δεδομένα μεγέθη ὁποσαοῦν συντεθῇ, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν συγκείμενον δεδομένον ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ ὁποσαοῦν δεδομένα μεγέθη, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ συγκείμενον τὸ ΑΓ δεδομένον ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ ΑΒ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πεπέλεσθαι. πεπελέσθω καὶ ἔστω τὸ ΔΕ. πάλιν ἐπεὶ δέδοται τὸ ΒΓ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πεπέλεσθαι. πεπελέσθω καὶ ἔστω τὸ ΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΔΕ, τὸ δὲ ΒΓ τῷ ΕΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἐστιν ἴσον· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓ, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπέλεται τὸ ΔΖ.



Prop. III.

Si quotlibet datæ magnitudines componantur; quæ ex iis componitur magnitudo data erit.

COmponantur enim quotlibet magnitudines datæ ΑΒ, ΒΓ: dico dari etiam magnitudinem ΑΓ, quæ ex ipsis ΑΒ, ΒΓ componitur.

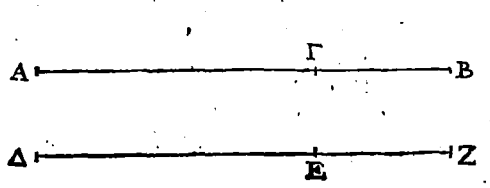
Quoniam enim datur ΑΒ, possumus [per 1. def. dat.] illi invenire æqualem. inveniatur & esto ΔΕ. rursus quia datur ΒΓ, possumus illi invenire æqualem. inveniatur & esto ΕΖ. quoniam igitur æqualis est ΑΒ ipsi ΔΕ, atque ΒΓ ipsi ΕΖ: erit & tota ΑΓ toti ΔΖ æqualis: itaque [per 1. def. dat.] data est ΑΓ; illi enim æqualis inventa est magnitudo ΔΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου μεγέθους δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν δεδομένον ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου μεγέθους τοῦ ΑΒ δεδομένον μέγεθος ἀφῃρήσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ ΓΒ δεδομένον ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ ΑΒ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πεπέλεσθαι. πεπελέσθω καὶ ἔστω τὸ ΔΖ. πάλιν, ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΓ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πεπέλεσθαι. πεπελέσθω καὶ ἔστω τὸ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΔΖ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΔΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΒ λοιπῷ τῷ ΕΖ ἴσον ἐστί· δέδοται ἄρα τὸ ΓΒ, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπέλεται τὸ ΕΖ.



Prop. IV.

Si à data magnitudine data magnitudo auferatur; etiam reliqua magnitudo data erit.

A Data enim magnitudine ΑΒ auferatur data magnitudo ΑΓ: dico & reliquam magnitudinem ΓΒ datam esse.

Quoniam enim data est ΑΒ, possumus [per 1. def. dat.] illi invenire æqualem. inveniatur & esto ΔΖ. rursus, quia data est ΑΓ, possumus illi invenire æqualem. inveniatur & esto ΔΕ. quoniam igitur magnitudo ΑΒ quidem ipsi ΔΖ, magnitudo autem ΑΓ ipsi ΔΕ æqualis est: erit & reliqua ΓΒ reliquæ ΕΖ æqualis: itaque [per 1. def. dat.] data est ΓΒ; æqualis enim ipsi inventa est ΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν μέγεθος πρός ἑαυτοῦ τι μέρος λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν ἕξει δεδομένον.

Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος τὸ ΑΓ λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ ΒΓ λόγον ἕξει δεδομένον.

Κείσθω γὰρ δεδομένου μέγεθος τὸ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ

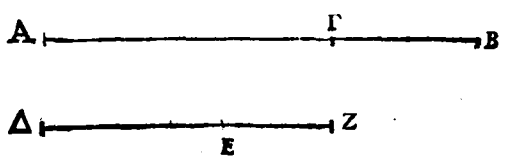
Prop. V.

Si magnitudo ad suiipsius aliquam partem habeat rationem datam; etiam ad reliquam habebit rationem datam.

MAgnitudo enim ΑΒ ad suiipsius partem aliquam ΑΓ habeat rationem datam: dico illam etiam ad reliquam ΒΓ habere rationem datam.

Exponatur enim data magnitudo ΔΖ. quoniam

niam autem ratio magnitudinis AB ad magnitudinem AΓ data eſt; fiat huic eadem ratio ipſius ΔZ ad ΔE: ergo [per 1.def. dat.] data eſt ratio ipſius ΔZ ad ΔE. eſt autem ΔZ data: ergo [per 2.dat.] data eſt ΔE: quare [per 4. dat.] & reliqua EZ data eſt. data autem eſt ΔZ; igitur [per 1. dat.] ratio ipſius ΔZ ad ZE data eſt. quoniam vero eſt [per conſtr.] ut ΔZ ad ΔE ita AB ad AΓ: ergo per converſionem rationis eſt [per cor. 19. 5.] ut ΔZ ad ZE ita AB ad BΓ. eſt autem ratio ipſius ΔZ ad ZE data, ut oſtenſum eſt: quare & magnitudinis AB ad BΓ ratio eſt data.



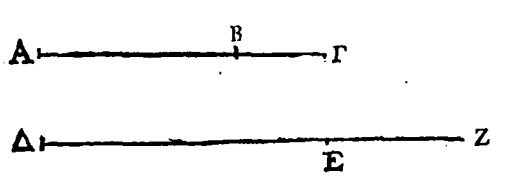
λόγος ἐστὶ δοθεὶς ὁ τῆ̃ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΓ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ ποιήσθω ὁ τῆ̃ ΔΖ πρὸς ΔΕ· λόγος ἄρα ἐστὶν ὁ τῆ̃ ΔΖ πρὸς ΔΕ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΔΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΔΕ· καὶ λοιπὰν ἄρα τὸ ΕΖ δοθέν ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΔΖ δοθέν· λόγος ἄρα τῆ̃ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ δοθείς ἐστι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΔΖ πρὸς ΔΕ οὕτως καὶ τὸ ΑΒ πρὸς ΑΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ. λόγος δὲ τῆ̃ ΔΖ πρὸς ΖΕ δοθείς ἐστιν, ὡς δέδεικται· λόγος ἄρα καὶ τῆ̃ ΑΒ πρὸς ΒΓ δοθείς ἐστιν.

PROP. VI.

Si componantur duæ magnitudines habentes ad invicem rationem datam; & ea, quæ ex iis componitur, magnitudo ad utramque rationem datam habebit.

COmponantur enim duæ magnitudines AB, BΓ, habentes ad invicem rationem datam: dico quod tota AΓ ad utramque AB, BΓ rationem habet datam.

Exponatur enim data magnitudo ΔE. quoniam vero ratio ipſius AB ad BΓ data eſt; fiat huic eadem ratio ipſius ΔE ad EZ. ratio igitur ipſius ΔB ad EZ eſt data: igitur [per 2. dat.] utraque magnitudinum ΔE, EZ data eſt: quare [per 1. & 3.dat.] ipſius ΔZ ad utramque ΔE, EZ ratio eſt data. quoniam autem eſt ut AB ad BΓ ita ΔE ad EZ; componendo igitur erit [per 18.5.] ut AΓ ad BΓ ita ΔZ ad ZE; & [per cor. 19.5.] convertendo ut AΓ ad AB ita ΔZ ad ΔE. & quoniam eſt ut ΔZ ad utramque ΔE, EZ ita AΓ ad utramque AB, BΓ: ipſius igitur AΓ ad utramque AB, BΓ ratio eſt data.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη συντεθῆ̃ τοὺς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ τὸ ὅλον πρὸς αὐτῶν ἑκάτερον λόγον ἕξει δεδομένον.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη ΑΒ, ΒΓ, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ πρὸς ἑκάτερον τῶ̃ν ΑΒ, ΒΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

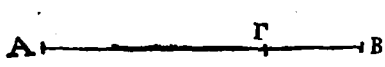
Ἐκκείσθω γὰρ δεδομένου μέγεθος τὸ ΔΕ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶν ὃν ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ ποιήσθω ὁ τῆ̃ ΔΕ πρὸς ΕΖ. ὁ ἄρα τῆ̃ ΔΕ πρὸς ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔστιν ἂν ἑκάτερον τῶ̃ν ΔΕ, ΕΖ δοθέν· λόγος ἄρα καὶ τῆ̃ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶ̃ν ΔΕ, ΕΖ δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτω τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· συνθέντι ἄρα ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτω τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ· καὶ ἀναστρέψαντι ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΔΕ. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶ̃ν ΔΕ, ΕΖ οὕτω τὸ ΑΓ πρὸς ἑκάτερον τῶ̃ν ΑΒ, ΒΓ· λόγος ἄρα καὶ τῆ̃ ΑΓ πρὸς ἑκάτερον τῶ̃ν ΑΒ, ΒΓ δοθείς.

PROP. VII.

Si data magnitudo in data ratione ſecetur; utrumque ſegmentorum datum eſt.

MAgnitudo enim data AB ſecetur in ratione data, nempe ipſius AΓ ad ΓB: dico utramque ipſarum AΓ, ΓB datam eſſe.

Quoniam enim data eſt ratio ipſius AΓ ad ΓB; igitur [per 6.dat.] ratio quoque ipſius AB ad utramque AΓ, ΓB data erit. datur autem AB; igitur [per 2.dat.] utraque ipſarum AΓ, ΓB data eſt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῆ̃, ἑκάτερον τῶ̃ν τμημάτων δεδομένον ἐστίν.

Δεδομένου γὰρ μέγεθος τὸ ΑΒ εἰς δεδομένον λόγον διῃρήσθω τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶ̃ν ΑΓ, ΓΒ δοθέν ἐστιν.

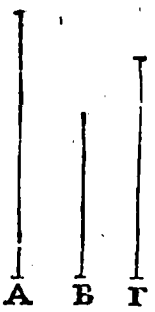
Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τῆ̃ ΑΓ πρὸς ΓΒ δοθείς· λόγος ἄρα τῆ̃ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶ̃ν ΑΓ, ΓΒ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΑΒ· δοθὲν ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶ̃ν ΑΓ, ΓΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Τὰ πρὸς αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Γ πρὸς τὸ Β λόγον δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Γ λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἔστω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ Δ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ ποιείσθω ὁ τοῦ Δ πρὸς Ε. δοθὲν δὲ τὸ Δ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ ποιείσθω ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ. δοθὲν δὲ τὸ Ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. ἔστι δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ Δ πρὸς τὸ Ζ ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτω τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. λόγος δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸ Ζ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Γ δοθείς.

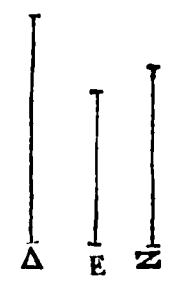


PROP. VIII.

Quæ ad idem datam rationem habent; etiam ad invicem datam rationem habebunt.

UTraque enim magnitudinum A, Γ ad magnitudinem B habeat rationem datam: dico magnitudinem A ad magnitudinem Γ datam quoque rationem habere.

Sit enim data magnitudo Δ. quoniam vero ratio ipsius A ad B data est; fiat huic eadem ratio ipsius Δ ad E. est autem Δ data; igitur [per 2. dat.] & E data erit. rursus quoniam ipsius B ad Γ data est ratio; fiat huic eadem ratio ipsius E ad Z. est autem E data; quare & Z data est. at vero data est Δ; ergo [per 1. dat.] ipsius Δ ad Z ratio est data. cumque sit ut A ad B ita Δ ad E; atque ut B ad Γ ita B ad Z: ex æquo igitur erit [per 22. 5.] ut A ad Γ ita Δ ad Z. est autem ratio ipsius Δ ad Z data: quare & ratio ipsius A ad Γ data est.

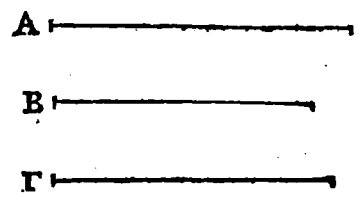


ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν δύο ἢ πλείονα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἔχῃ δὲ καὶ αὐτὰ μεγέθη πρὸς ἄλλά τινα μεγέθη λόγους δεδομένους, οὐ τοὺς αὐτούς· καὶ ταῦτα τὰ μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγους ἕξει δεδομένους.

Δύο γὰρ ἢ πλείονα μεγέθη τὰ Α, Β, Γ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, ἐχέτω δὲ καὶ αὐτὰ μεγέθη τὰ Α, Β, Γ πρὸς ἄλλά τινα μεγέθη τὰ Δ, Ε, Ζ λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτούς· λέγω ὅτι καὶ τὰ Δ, Ε, Ζ μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ἔστω ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ὁ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τοῦ Β πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ὁ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν, ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ δοθείς, τοῦ δὲ Β πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ὁ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· τὰ Δ, Ε, Ζ ἄρα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον.

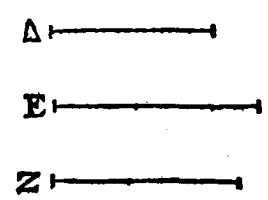


PROP. IX.

Si duæ pluresve magnitudines ad invicem habeant rationem datam; habeant autem illæ magnitudines ad alias quasdam magnitudines rationes datas, etsi non easdem: illæ aliæ magnitudines etiam ad invicem rationes datas habebunt.

DUÆ enim pluresve magnitudines A, B, Γ habeant ad invicem rationem datam; habeant autem & illæ eædem magnitudines A, B, Γ ad alias quasdam magnitudines Δ, E, Z rationes datas, non easdem tamen: dico ipsas magnitudines Δ, E, Z ad invicem rationem habere datam.

Quoniam enim ratio ipsius A ad B data est, & ratio ipsius A ad Δ etiam data; ratio ipsius Δ ad B [per 8. dat.] data erit. sed ipsius B ad E ratio est data: ergo [per 8. dat.] data etiam est ratio ipsius Δ ad E. rursus, quoniam ratio ipsius B ad Γ est data, ipsiusque B ad E ratio etiam data; ratio quoque ipsius E ad Γ [per 8. dat.] data erit. ipsius autem Γ ad Z ratio est data: quare & ratio ipsius E ad Z data est: ergo Δ, E, Z habent ad invicem rationem datam.

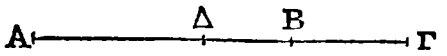


PROP. X.

Si magnitudo magnitudine major fuerit, data, quam in ratione; etiam utraque simul illa eadem major erit, data, quam in ratione. item si utraque simul magnitudo eadem magnitudine major fuerit, data, quam in ratione; aut reliqua illa eadem major erit, data, quam in ratione; aut reliqua una cum consequente, ad quam altera magnitudo datam habet rationem, data erit.

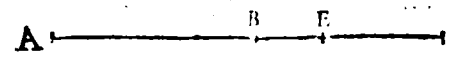
MAgnitudo enim AB magnitudine BΓ major sit, data, quam in ratione: dico quod simul utraque AΓ eadem BΓ major est, data, quam in ratione.

Quoniam enim AB ipsa BΓ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo AΔ: ergo [per 11. def dat.] reliquæ ΔB ad BΓ ratio est data: & componendo igitur, ipsius ΔΓ ad BΓ ratio [per 6 dat.] est data. sed & data est magnitudo AΔ: quare AΓ ipsa ΓB major est, data, quam in ratione.



RURSUS magnitudo AΓ magnitudine BΓ major sit, data, quam in ratione: dico reliquam AB eadem BΓ aut majorem esse, data, quam in ratione; aut ipsam quidem AB una cum consequente, ad quam BΓ rationem datam habet, datam esse.

Quoniam enim magnitudo AΓ magnitudine BΓ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo. data autem magnitudo aut minor est magnitudine AB, aut major. Sit primum minor, & sit AΔ. ergo reliquæ ΔΓ ad ΓB ratio est data: dividendo igitur, ipsius ΔB ad BΓ ratio est data. data autem est magnitudo AΔ: quare magnitudo AB magnitudine BΓ major est, data, quam in ratione. Sed sit data magnitudo major magnitudine AB, & ponatur ipsi æqualis AE; reliquæ igitur EΓ ad ΓB ratio est data: ideoque permutando, ipsius BΓ ad EΓ ratio est data: quare convertendo, ipsius BΓ ad BE ratio [per 5 dat.] est data. data autem est EB una cum BA, quia tota AB data est: ergo ipsa AB una cum consequente, ad quam BΓ rationem datam habet, data est.



PROP. XI.

Si magnitudo magnitudine major sit, data, quam in ratione; eadem major erit utraque simul, data, quam in ratione. item si eadem major sit utraque simul, data, quam in ratione; eadem quoque reliqua magnitudine major erit, data, quam in ratione.

MAgnitudo enim AB magnitudine BΓ major sit, data, quam in ratione: dico

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ὁ λόγῳ, καὶ τὸ συναμφότερον δὲ αὐτῶν, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ὁ λόγῳ. καὶ ἐὰν τὸ συναμφότερον δὲ αὐτῶν, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ὁ λόγῳ, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ αὐτῶν, ἤτοι δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ὁ λόγῳ, ἢ τὸ λοιπὸν μετὰ τῆς ἐξῆς, πρὸς ὃ τὸ ἕτερον λόγον ἔχει δεδομένον, δοθέν ἐστι.

ΜΕγεθος γὰρ τὸ ΑΒ μέγεθος τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ὁ λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ συναμφότερον τὸ ΑΓ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΒΓ δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ὁ λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΒ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ὁ λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΒ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΔ· τὸ ΑΓ ἄρα τοῦ ΓΒ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ὁ λόγῳ.

ΠΑΛΙΝ ἤτοι τὸ ΑΓ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ὁ λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ λοιπὸν τὸ ΑΒ τοῦ αὐτοῦ ΒΓ, ἤτοι δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ὁ λόγῳ, ἢ τὸ ΑΒ μετὰ τῆς ἐξῆς, πρὸς ὃ τὸ ΒΓ λόγον ἔχει δοθέντα, δοθὲν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΓ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ὁ λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος. τὸ δὴ δοθὲν ἤτοι ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΑΒ, ἢ μεῖζον. ἔστω πρότερον ἔλασσον, καὶ ἔστω τὸ ΑΔ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΓ πρὸς ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· διελόντι ἄρα τὸ ΔΒ πρὸς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΔ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ὁ λόγῳ. Ἀλλὰ δὴ τὸ δοθὲν μεῖζον ἔστω τοῦ ΑΒ, καὶ κείσθω αὐτῷ ἴσον τὸ ΑΕ· λόγος ἄρα τοῦ λοιποῦ τοῦ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΒ ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ ἀνάπαλιν τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀναστρέψαντι ὁ τοῦ ΒΓ πρὸς ΒΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ ΕΒ μετὰ τοῦ ΒΑ δοθέν, ὅλον γὰρ τὸ ΑΕ δοθὲν ἐστι· τὸ ΑΒ ἄρα μετὰ τῆς ἐξῆς, πρὸς ὃ τὸ ΒΓ λόγον ἔχει δοθέντα, δοθὲν ἐστι.

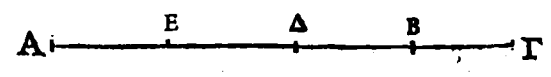
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ὁ λόγῳ, τὸ αὐτὸ καὶ συναμφοτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ὁ λόγῳ. καὶ ἐὰν τὸ αὐτὸ συναμφοτέρου, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ὁ λόγῳ, τὸ αὐτὸ καὶ ἑνὸς λοιποῦ, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ὁ λόγῳ.

ΜΕγεθος γὰρ τὸ ΑΒ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ὁ λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΑΓ

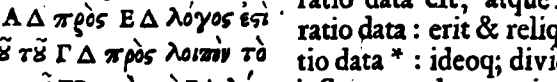
τοῦ ΑΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἡ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΒ τῷ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος, καὶ ἔστω τὸ ΑΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΒ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀνάπαλιν δὴ καὶ συνθέντι λόγος ἐστὶ τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ΔΒ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΑΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΔΕ· ὥστε καὶ λοιπὸν τὸ ΑΕ δοθὲν ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὅλου τοῦ ΑΓ πρὸς ὅλον τὸ ΕΒ λόγος δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΕΒ πρὸς τὸ ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΕ· τὸ ΑΒ ἄρα τῷ ΑΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



ΑΛΛΑ δὴ τὸ ΑΒ συναμφοτέρῳ τῷ ΑΓ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ αὐτὸ τὸ ΑΒ καὶ λοιπῷ τῷ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τοῦ ΕΒ πρὸς τὸ ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΑΓ πρὸς τὸ ΕΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ· καὶ τοῦ ΑΔ ἄρα πρὸς τὸ ΔΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀναστρέψαντι τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀνάπαλιν τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ δοθὲν τὸ ΑΕ· δοθὲν ἄρα καὶ ὅλον τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ὅλου τοῦ ΑΓ πρὸς ὅλον τὸ ΕΒ λόγος ἐστὶ δοθείς, ὡς καὶ τοῦ ΑΔ πρὸς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔσται δὴ καὶ λοιποῦ τοῦ ΓΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΒΔ λόγος δοθείς· καὶ διελόντι τοῦ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΔΒ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ ΑΔ· τὸ ΑΒ ἄρα τῷ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



Deinde vero AB utraque AΓ major sit, data, quam in ratione: dico ipſam AB reliqua BΓ majorem eſſe, data, quam in ratione.

Auferatur data magnitudo AE; reliquæ ergo EB ad AΓ data eſt ratio: quare & ipſius AΓ ad EB data eſt ratio. fiat huic eadem ratio ipſius AΔ ad ΔE: itaque ipſius AΔ ad ΔE ratio data eſt: convertendo ergo [per 5.dat.] ipſius AΔ ad AE ratio data eſt; & invertendo ratio ipſius AE ad AΔ data eſt. data autem [ex hyp.] eſt AE: quare [per 2.dat.] tota AΔ data eſt. quoniam vero totius AΓ ad totam EB ratio data eſt; atque etiam ipſius AΔ ad EΔ ratio data: erit & reliquæ ΓΔ ad reliquam BΔ ratio data *: ideoq; dividendo [per converſ.6.dat.] ipſius ΓB ad BΔ ratio data eſt: quare & ipſius ΔB ad BΓ ratio data eſt. data autem eſt AΔ: quare AB ipſa BΓ major eſt, data, quam in ratione.

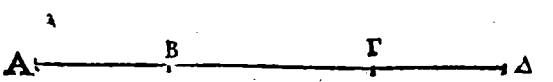
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϚ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον μετὰ τοῦ δευτέρου ᾖ δοθέν, ᾖ δὲ καὶ τὸ δεύτερον μετὰ τοῦ τρίτου δοθέν· τὸ πρῶτον πρὸς τρίτον ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν.

Prop. XII.

Si fuerint tres magnitudines, quarum prima cum ſecunda data ſit, atque etiam ſecunda cum tertia; aut prima tertiæ æqualis eſt, aut altera altera major eſt, data.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, καὶ τὸ μὲν ΑΒ μετὰ τοῦ ΒΓ δοθὲν ἔστω τὸ ΑΓ, τὸ δὲ ΒΓ μετὰ τοῦ ΓΔ δοθὲν ἔστω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ τὸ ἕτερον ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν.



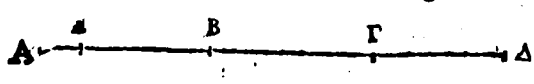
Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΒΔ· τὰ δὲ δοθέντα ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἄνισα. Ἐστω πρότερον ἴσα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ τῷ ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ λοιπῷ τῷ ΓΔ ἴσον ἐστί. Μὴ ἔστω δὴ ἴσα, ἀλλ' ἔστω μεῖζον τὸ ΑΓ τοῦ ΒΔ, καὶ κείσθω τῷ ΒΔ

Sint tres magnitudines AB, BΓ, ΓΔ; & AB quidem cum BΓ data eſto, ſc. AΓ; atque etiam BΓ cum ΓΔ ſit data, nempe BΔ: dico magnitudinem AB aut magnitudini ΓΔ æqualem eſſe, aut alteram altera majorem eſſe, data.

Quoniam enim utraque magnitudinum AΓ, BΔ data eſt: datæ magnitudines æquales ſunt inter ſe, aut inæquales. Sint primum æquales; itaque æqualis eſt AΓ ipſi BΔ. communis auferatur BΓ; reliqua igitur AB reliquæ ΓΔ æqualis eſt. Sed non ſint inter ſe æquales; ſitque AΓ major ipſa BΔ, & ponatur ipſi

* Per 19. 5, quoniam prædictæ duæ rationes ſunt eædem & datæ.

B Δ æqualis Γ E. data autem est B Δ: ergo data est & Γ E. est autem [ex hyp.] tota A Γ data: quare [per 4. dat.] & reliqua A E data est. quoniam vero æqualis est E Γ ipsi B Δ, communis auferatur B Γ: reliqua ergo B E reliquæ Γ Δ æqualis est. data autem est magnitudo A E: quare [per 9. def. dat.] A B ipsa Γ Δ major est, data.



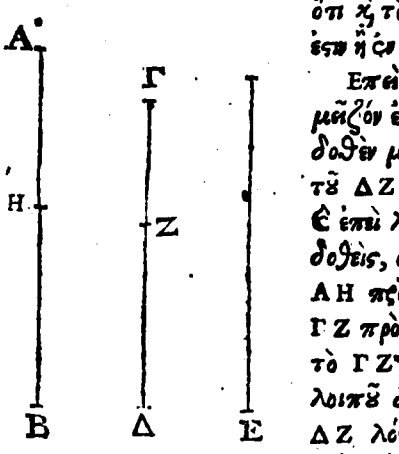
ἴσον τὸ Γ E. δοθὲν δὲ τὸ B Δ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Γ E. ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ A Γ δοθέν, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ A E δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ E Γ τῷ B Δ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ B Γ· λοιπὸν ἄρα τὸ B E λοιπῷ τῷ Γ Δ ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ A E· τὸ A B ἄρα τῷ Γ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν.

PROP. XIII.

Si fuerint tres magnitudines, & earum prima ad secundam habeat rationem datam, secunda autem tertia major sit, data, quam in ratione; prima quoque tertia major erit, data, quam in ratione.

SInt tres magnitudines A B, Γ Δ, E, & A B quidem ad Γ Δ habeat rationem datam; magnitudo autem Γ Δ magnitudine E major esto, data, quam in ratione: dico quod magnitudo A B magnitudine E major est, data, quam in ratione.

Quoniam enim Γ Δ ipsa E major est, data, quam in ratione, auferatur data magnitudo Γ Z: igitur [per 11. def. dat.] reliquæ Δ Z ad E ratio est data. cumque [ex hyp.] ratio ipsius A B ad Γ Δ data sit; fiat huic eadem ratio ipsius A H ad Γ Z: itaque ratio ipsius Γ Z ad A H data est. est autem Γ Z data: ergo [per 2. dat.] A H data est: quare [per 19. 5.] & reliquæ H B ad reliquam Δ Z ratio data est. ipsius autem Δ Z ad E ratio [ex hyp.] data est: quare [per 8. dat.] & ipsius H B ad E ratio data est. data autem est A H: ergo A B ipsa E major est, data, quam in ratione.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὴν πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον λόγον ἔχῃ δεδομένον, τὸ δὲ δεύτερον πρὸς τὸ τρίτον, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ καὶ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

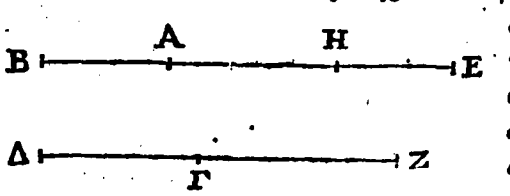
Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A B, Γ Δ, E, καὶ τὸ μὴν A B πρὸς τὸ Γ Δ λόγον ἐχέτω δεδομένον, τὸ δὲ Γ Δ τοῦ E, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ A B τοῦ E, δοθέντι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Γ Δ τοῦ E, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ Γ Z· λοιπὸν ἄρα τὸ Δ Z πρὸς τὸ E λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ A B πρὸς τὸ Γ Δ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ A H πρὸς τὸ Γ Z· λόγος ἄρα τοῦ Γ Z πρὸς τὸ A H δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ Γ Z· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ A H· καὶ λοιπὸν ἄρα τοῦ H B πρὸς λοιπὸν τὸ Δ Z λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ Δ Z πρὸς τὸ E λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ H B ἄρα πρὸς τὸ E λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ A H· τὸ A B ἄρα τοῦ E, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XIV.

Si duæ magnitudines ad invicem habeant rationem datam; utrique autem illarum adjiciatur data magnitudo: totæ ad invicem aut habebunt rationem datam, aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

DUÆ enim magnitudines A B, Γ Δ ad invicem habeant rationem datam, & adjiciatur utrique earum data magnitudo, tam A E quam Γ Z: dico quod totæ E B, Z Δ aut habent ad invicem rationem datam, aut altera altera major est, data, quam in ratione.



Quoniam enim data est utraque E A, Z Γ, ipsius quoque E A ad Z Γ [per 1. dat.] data est ratio. &

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ προστεθῇ ἑκατέρῳ αὐτῶν δεδομένον μέγεθος· τὰ ὅλα πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ A B, Γ Δ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, καὶ προσκείσθω ἑκατέρῳ αὐτῶν δεδομένον μέγεθος, τὸ μὲν A E καὶ τὸ Γ Z· λέγω ὅτι ὅλα τὰ E B, Z Δ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν E A, Z Γ, λέγω ἄρα τοῦ E A πρὸς τὸ Z Γ δοθείς. καὶ εἰ μὲν ὁ αὐ-

ὁ αὐτὸς τῷ τῆ̃ ΑΒ πρὸς ΓΔ, ἕξει καὶ ὅλη τῆ̃ ΕΒ πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Μὴ ἔστω δὲ ὁ αὐτὸς, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω τὸ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ· λόγος ἄρα καὶ τῆ̃ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΗΑ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΑ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΗ δοθὲν ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω τὸ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ, λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΒ πρὸς τὸ ΖΔ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΕΗ· τὸ ΕΒ ἄρα τῆ̃ ΖΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

igitur si hæc ratio eadem sit quæ ipsius AB ad ΓΔ; totius quidem EB ad totam ZΔ ratio [per 12. 5.] data erit. At vero non sit eadem; & fiat ut AB ad ΓΔ ita HA ad ΓZ: itaque ratio ipsius HA ad ΓZ data est. est autem magnitudo ΓZ data: quare [per 2. dat.] HA data est. sed & ipsa EA data est: ergo [per 4. dat.] etiam reliqua EH data est. quoniam vero ut AB ad ΓΔ ita HA ad ΓZ, ratio quoque ipsius HB ad ZΔ [per 12. 5.] data est. data autem est magnitudo EH: quare [per 11. def. dat.] magnitudo EB magnitudine ZΔ major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν δεδομένον μέγεθος· τὰ λοιπὰ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τῶ̃ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

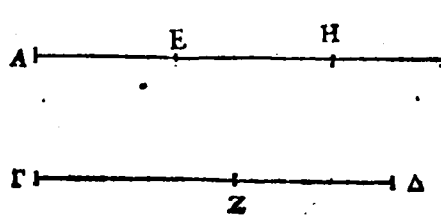
Prop. XV.

Si duæ magnitudines habeant ad invicem rationem datam, & ab utraque earum auferatur data magnitudo: reliquæ magnitudines aut ad invicem habebunt rationem datam; aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν δεδομένον μέγεθος, ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ τὸ ΑΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΓΔ τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι τὰ λοιπὰ τὰ ΕΒ, ΖΔ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τῶ̃ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Duæ enim magnitudines AB, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, & auferatur ab utraque earum data magnitudo; à magnitudine quidem AB magnitudo AE, à magnitudine autem ΓΔ magnitudo ΓZ: dico quod reliquæ EB, ZΔ aut habent ad invicem rationem datam, aut altera altera major est, data, quam in ratione.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερον τῶν ΑΕ, ΓΖ δοθέν ἐστι, λόγος τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ ἐστὶ δοθείς. Καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, ἔσται καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Μὴ ἔστω δὴ ὁ αὐτὸς, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΖ. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΕ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΗ δοθέν. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΖ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΕΗ· τὸ ΕΒ ἄρα τῆ̃ ΖΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



Quoniam enim utraque AE, ΓZ data est, ratio etiam ipsius AE ad ΓZ data est. Si igitur ratio hæc eadem sit quæ ipsius AB ad ΓΔ; erit [per 19. 5.] & reliquæ EB ad reliquam ZΔ ratio data. At vero non sit eadem; & fiat ut AB ad ΓΔ ita AH ad ΓZ. est autem ipsius AB ad ΓΔ ratio data: ergo ratio magnitudinis AH ad ΓZ data est. verum [ex hyp.] ΓZ data est; quare [per 2. dat.] data est AH. est autem & AE data; reliqua igitur EH [per 4. dat.] data est. quoniam vero ut AB ad ΓΔ ita est AH ad ΓZ; itaque [per 9. 5.] reliquæ HB ad reliquam ZΔ ratio est data. & data est EH; quare EB ipsa ZΔ major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Ἐν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἀπὸ μὲν ἑνὸς αὐτῶν δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῇ, τῷ δὲ ἑτέρῳ αὐτῶν δεδομένον μέγεθος προστεθῇ· τὸ ὅλον τοῦ λοιποῦ, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Prop. XVI.

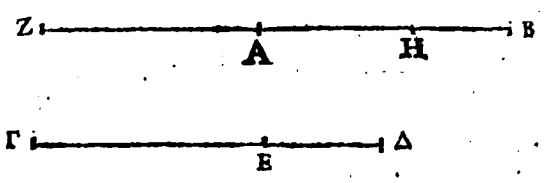
Si duæ magnitudines ad invicem habeant rationem datam; & ab una quidem illarum auferatur data magnitudo, alteri autem earum adjiciatur data magnitudo: tota quidem reliqua major erit, data, quam in ratione.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ λόγον ἐχέτω δεδομένον, καὶ ἀπὸ τοῦ μὲν ΓΔ δεδομένον μέγεθος ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ΑΒ δεδομένον μέγεθος προσ-

Duæ enim magnitudines AB, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, & à ΓΔ quidem auferatur data magnitudo ΓE; magnitudini autem AB adjiciatur data magnitudo

Z A: dico totam Z B reliqua E Δ majorem esse, datâ, quam in ratione.

Quoniam enim ratio ipsius AB ad ΓΔ data est; fiat huic eadem ratio ipsius AH ad ΓE: ergo [per 2. def. dat.] ratio ipsius AH ad ΓE data est. data autem est ΓE: itaque [per 2. dat.] AH data est. est autem & AZ data: quare [per 3. dat.] tota ZH data est. & quoniam est ut AB ad ΓΔ ita AH ad ΓE; ratio etiam reliquæ HB ad reliquam EΔ [per 19.5.] data erit. sed & data est HZ: ergo [per 11. def. dat.] magnitudo ZB magnitudine EΔ major est, data, quam in ratione.



κείσθω τῷ ΖΑ. λέγω ὅτι ὅλον τὸ ΖΒ λοιπῷ τῷ ΕΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

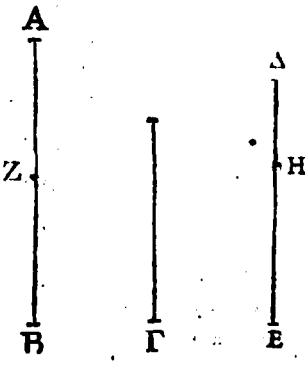
Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΕ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΕ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΕ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΖ δοθέν· ὅλον ἄρα τὸ ΖΗ δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΗΖ· τὸ ΖΒ ἄρα τῷ ΕΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XVII.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem secunda major sit, data, quam in ratione; tertia autem eadem secunda major sit, data, quam in ratione: prima ad tertiam aut rationem habebit datam; aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

SInt tres magnitudines AB, Γ, ΔE, & utraque magnitudinum AB, ΔE magnitudine Γ major sit, data, quam in ratione: dico magnitudines AB, ΔE aut ad invicem habere rationem datam; aut alteram altera majorem esse, data, quam in ratione.

Quoniam enim magnitudo AB magnitudine Γ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo AZ: ergo [per 11. def. dat.] reliquæ ZB ad Γ ratio est data. rursus quia ΔE ipsa Γ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo ΔH: ergo reliquæ HE ad Γ ratio est data. ipsius vero ZB ad Γ ratio est data: igitur [per 8. dat.] ratio ipsius ZB ad HE data est. adjiciuntur verò ipsis datæ magnitudines AZ, ΔH: igitur [per 14. dat.] totæ AB, ΔE aut habent ad invicem rationem datam; aut altera altera major est, data, quam in ratione.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ πρῶτον τοῦ δευτέρου, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ, ἢ δὲ καὶ τὸ τρίτον τοῦ αὐτοῦ, δοθέντι, μεῖζον ἢ ὁ λόγος· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ὁ λόγος.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, ΔΕ, καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΔΕ τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ὁ λόγος· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, ΔΕ ἤτοι πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΒ τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΒ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΕ τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΔΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΕ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΖΒ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ λόγος ἄρα τοῦ ΖΒ πρὸς τὸ ΗΕ ἐστὶ δοθείς. ℂ πρόσκειται αὐτοῖς δεδομένα μεγέθη τὰ ΑΖ, ΔΗ· τὰ ὅλα ἄρα τὰ ΑΒ, ΔΕ ἤτοι πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XVIII.

Si fuerint tres magnitudines, atque ex his una utraque reliquarum major sit, data, quam in ratione: reliquæ duæ aut datam rationem habebunt ad invicem, aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

SInt tres magnitudines AB, ΓΔ, EZ; atque ex his una, nempe ΓΔ, utraque reliquarum AB, EZ major sit, data, quam in ratione: dico

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

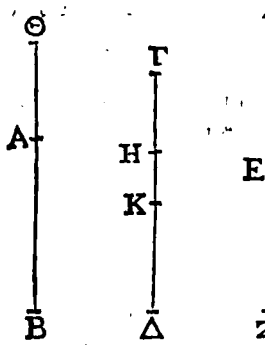
Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, ἓν δὲ αὐτῶν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ· τὰ λοιπὰ δύο πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ἓν δ' αὐτῶν τὸ ΓΔ τοῦ ἑκατέρου τῶν λοιπῶν τῶν ΑΒ, ΕΖ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι

τὰ

τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ ἤτοι λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τῶν ἑτέρων δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΔ τοῦ ΑΒ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ΓΗ πρὸς τὸ ΑΘ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΗ πρὸς τὸ ΑΘ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΗ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΘ· καὶ ὅλα τοῦ ΓΔ πρὸς ὅλον τὸ ΘΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπεὶ τὸ ΓΔ τοῦ ΕΖ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΔ πρὸς τὸ ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω, ὁ τοῦ ΓΚ πρὸς τὸ ΛΕ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΚ πρὸς τὸ ΛΕ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΚ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΛΕ· καὶ ὅλα τοῦ ΓΔ πρὸς ὅλον τὸ ΛΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΓΔ πρὸς τὸ ΘΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΘΒ ἄρα πρὸς τὸ ΛΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. (ἀφῃρῆ) ἀπ' αὐτῶν δεδομένα μεγέθη τὰ ΘΑ, ΛΕ· τὰ ΑΒ, ΕΖ ἄρα ἤτοι πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



aut magnitudinem AB ad EZ rationem habere datam; aut alteram altera majorem esse, data, quam in ratione.

Quoniam enim magnitudo ΓΔ magnitudine AB major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo ΓH: ergo reliquæ HΔ ad AB ratio est data. fiat huic eadem ratio ipsius ΓH ad AΘ: itaque ratio ipsius ΓH ad AΘ data est. est autem ΓH data; quare AΘ data est: itaque [per 12. 5.] & totius ΓΔ ad totam ΘB ratio est data. rursus cum ΓΔ ipsa EZ major sit, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo ΓK: itaque [per 11. def. dat.] reliquæ KΔ ad EZ ratio est data. fiat huic eadem ratio ipsius ΓK ad ΛE: ergo ipsius ΓK ad ΛE data est ratio. data autem est ΓK: quare ΛE data est: ergo [per 12. 5.] & totius ΓΔ ad totam ΛZ ratio est data. ipsius autem ΓΔ ad ΘB ratio est data: quare [per 8. dat.] & ipsius ΘB ad ΛZ ratio est data. ablatæ autem sunt ab ipsis datæ magnitudines ΘA, ΛE: quare [per 15. dat.] AB, EZ aut ad invicem habent rationem datam, aut altera altera major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον τοῦ δευτέρου, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ, ᾖ δὲ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ· καὶ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

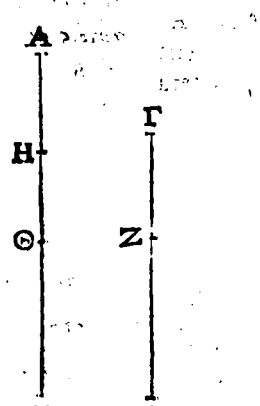
Prop. XIX. Theor.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem magnitudo secunda magnitudine major sit, data, quam in ratione; sit autem secunda tertia major, data, quam in ratione: prima quidem tertia major erit, data, quam in ratione.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, καὶ τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Sint tres magnitudines AB, ΓΔ, E, & magnitudo quidem AB magnitudine ΓΔ major sit, data, quam in ratione; magnitudo autem ΓΔ magnitudine E major sit, data, quam in ratione: dico quod AB ipsa E major est, data, quam in ratione.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΔ τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΔ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπεὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ· ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω τοῦ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΗΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΗΑ δοθέν· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΘΑ δοθὲν ἐστί. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΗΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω καὶ τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ λοιπὸν τοῦ ΘΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς·



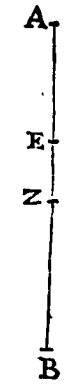
Quoniam enim ΓΔ ipsa E major est, data quam in ratione; auferatur data magnitudo ΓZ: ergo [per 11. def. dat.] reliquæ ZΔ ad E data est ratio. rursus quia AB ipsa ΓΔ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo AH: ergo reliquæ HB ad ΓΔ ratio est data. Fiat huic eadem ratio ipsius HΘ ad ΓZ; itaque ipsius HΘ ad ΓZ ratio est data. est autem ΓZ data: quare HΘ data est. sed & HA data est: quare [per 3. dat.] tota magnitudo ΘA data est. quoniam vero [ex hyp.] est ut HB ad ΓΔ ita HΘ ad ΓZ; reliquæ quoque ΘB ad reliquam ZΔ ratio est * data. ipsius autem ZΔ ad E ratio est data: quare

* Quia, per 19. 5, est eadem cum prædictis rationibus datis.

[per 8. dat.] ipſius ΘΕ ad Β ratio eſt data. verum data eſt magnitudo ΘΑ: itaque [per 11. def. dat.] ΒΑ ipſa Ε major eſt, data, quam in ratione.

ALITER

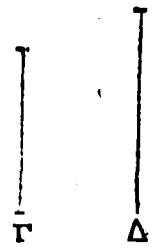
Sint tres magnitudines ΑΒ, Γ, Δ, & ΑΒ quidem ipſa Γ major eſto, data, quam in ratione; ſit autem & Γ ipſa Δ major, data, quam in ratione: dico quod ΑΒ ipſa Δ major eſt, data, quam in ratione.



Quoniam enim ΑΒ ipſa Γ major eſt, data, quam in ratione, auferatur data magnitudo ΑΕ: ergo [per 11. def. dat.] reliquæ ΕΒ ad Γ ratio data eſt. eſt autem [ex hyp.] magnitudo Γ magnitudine Δ major, data, quam in ratione: quare [per 13. dat.] ΕΒ ipſa Δ major eſt, data, quam in ratione. auferatur data magnitudo ΕΖ: reliquæ igitur ΖΒ ad Δ ratio data eſt. data autem [per 3. dat.] eſt ΑΖ: itaque ΑΒ ipſa Δ major eſt, data, quam in ratione.

ΑΛΛΩΣ

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, Δ, καὶ τὸ μὲν ΑΒ τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ, τὸ δὲ Γ τοῦ Δ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ τοῦ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



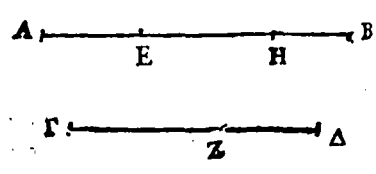
Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΒ τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. τὸ δὲ Γ τοῦ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ· καὶ τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ. ἀφῃρήσθω ἴση τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΕΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΒ πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΖ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XX.

Si datæ fuerint duæ magnitudines, & auferantur ab ipſis magnitudines habentes ad invicem rationem datam; reliquæ magnitudines aut habebunt ad invicem rationem datam, aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

SInt duæ datæ magnitudines ΑΒ, Γ Δ, & ab ΑΒ, Γ Δ auferantur magnitudines ΑΕ, Γ Ζ habentes ad invicem rationem datam: dico quod magnitudines ΕΒ, Ζ Δ aut habebunt ad invicem rationem datam; aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Quoniam enim data eſt utraque ΑΒ, Γ Δ; [per 1. dat.] ipſius quoque ΑΒ ad Γ Δ ratio data eſt. Itaque ſi eadem ſit quæ ipſius ΑΕ ad Γ Ζ; erit [per 19. 5.] & reliquæ ΕΒ ad reliquam Ζ Δ ratio data. At vero non ſit eadem; & fiat ut ΑΕ ad Γ Ζ ita ΑΗ ad Γ Δ. eſt autem [ex hyp.] ratio ipſius ΑΕ ad Γ Ζ data: itaque ratio ipſius ΑΗ ad Γ Δ data eſt. data autem eſt Γ Δ: itaque [per 2. dat.] data eſt ΑΗ. ſed & data eſt ΑΒ: reliqua igitur ΗΒ [per 4. dat.] data eſt. & quoniam eſt ut ΑΕ ad Γ Ζ ita ΑΗ ad Γ Δ; etiam [per 19. 5.] reliquæ ΕΗ ad reliquam Ζ Δ ratio data eſt. ſed & data eſt ΗΒ: quare [per 11. def. dat.] magnitudo ΕΒ magnitudine Ζ Δ major eſt, data, quam in ratione.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν ἦ δύο μεγέθη δεδομένα, καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῶν μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον· τὰ λοιπὰ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Ἔστω δύο μεγέθη δεδομένα τὰ ΑΒ, Γ Δ, καὶ ἀπὸ τῶν ΑΒ, Γ Δ ἀφῃρήσθω μεγέθη τὰ Α Ε, Γ Ζ λόγον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα δεδομένον· λέγω ὅτι τὰ ΕΒ, Ζ Δ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, Γ Δ· λόγος ἄρα καὶ ΑΒ πρὸς τὸ Γ Δ δοθείς. καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτός ἐστι τοῖς ΑΕ πρὸς τὸ Γ Ζ· ἔσται καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ Ζ Δ λόγος δοθείς. μὴ ἔστω δὴ ὁ αὐτός, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ Γ Ζ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ Δ. λόγος δὲ τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ Γ Ζ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ Γ Δ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ Γ Δ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΗ. ἔστι δὲ καὶ τὸ Α Β δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ Γ Ζ οὕτω τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ Δ, καὶ λοιπὸν τοῦ ΕΗ πρὸς λοιπὸν τὸ Ζ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΗΒ· τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ Ζ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XXI.

Si fuerint duæ magnitudines datæ, & adjiciantur ipſis alia magnitudines habentes ad invicem rationem datam;

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ἦ δύο μεγέθη δεδομένα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομέ-

νον·

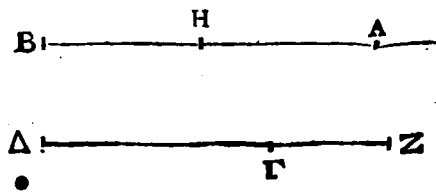
νον· τὰ ὅλα τοῖς ἀλλήλοις ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον ὑπ' ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

totæ aut habebunt ad invicem rationem datam, aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Ἔστω δύο μεγέθη δεδομένα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ προσκείσθω αὐτοῖς μεγέθη τὰ ΑΕ, ΓΖ λόγον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα δεδομένον· λέγω ὅτι τὰ ὅλα τὰ ΕΒ, ΖΔ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον ὑπ' ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Sint duæ magnitudines datæ ΑΒ, ΓΔ, & adjiciantur ipsis magnitudines ΑΕ, ΓΖ, habentes ad invicem rationem datam: dico quod totæ ΕΒ, ΖΔ aut habebunt ad invicem rationem datam; aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Ἐπεὶ γὰρ δοθὲν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, ἔσται καὶ ὅλου τοῦ ΕΒ πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. εἰ δὲ οὔ· ποιείσθω ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτω τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ· καὶ ὅλου τοῦ ΕΗ πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ δοθὲν τὸ ΗΒ· τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



Quoniam enim data est utraque ΑΒ, ΓΔ; ipsius quidem ΑΒ ad ΓΔ ratio data est. Si igitur eadem sit quæ ipsius ΑΕ ad ΓΖ, erit [per 12.5.] & totius ΕΒ ad totam ΖΔ ratio data. Sin autem non sit eadem; fiat ut ΑΒ ad ΓΖ ita ΑΗ ad ΓΔ: itaque ratio ipsius ΑΗ ad ΓΔ data est. est autem ΓΔ data: ergo [per 2. dat.] ΑΗ data est. sed & ΑΒ data est: quare [per 4.dat.] reliqua ΗΒ data est. & quoniam est ut ΕΑ ad ΓΖ ita ΑΗ ad ΓΔ: totius igitur ΕΗ ad totam ΖΔ ratio [per 12. 5.] data est. data vero est ΗΒ: quare [per 11. def. 5.] magnitudo ΕΒ magnitudini ΖΔ major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϚ'.

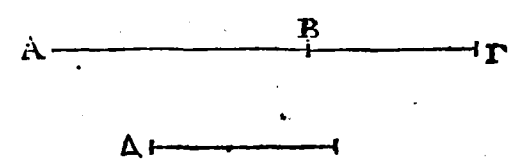
Ἐὰν δύο μεγέθη πρός τι μέγεθος λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ τὸ συναμφότερον πρὸς αὐτὸ λόγον ἕξει δεδομένον.

PROP. XXII.

Si duæ magnitudines ad aliam aliquam magnitudinem habeant rationem datam; & simul utraque ad eandem illam habebit rationem datam.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ πρός τι μέγεθος τὸ Δ λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ τὸ συναμφότερον τὸ ΑΓ πρὸς τὸ αὐτὸ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.

Duæ enim magnitudines ΑΒ, ΒΓ ad aliquam aliam magnitudinem Δ habeant rationem datam: dico quod simul utraque ΑΓ ad illam eandem Δ rationem habet datam.



Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει δεδομένον· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ δοθείς· καὶ συνθέντι τοῦ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΒΓ πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Quoniam enim utraque ΑΒ, ΒΓ ad Δ rationem habet datam: ratio ipsius ΑΒ ad ΒΓ [per 8. dat.] data est: quare componendo [per 6. dat.] ipsius ΑΓ ad ΓΒ ratio est data. ipsius autem ΒΓ ad Δ [ex hyp.] data est ratio: ideoque [per 8. dat.] ipsius ΑΓ ad Δ ratio est data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ὅλον πρὸς ὅλον λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἔχῃ δὲ καὶ τὰ μέρη πρὸς τὰ μέρη λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοὺς δέ· καὶ πάντα πρὸς πάντα λόγους ἕξει δεδομένους.

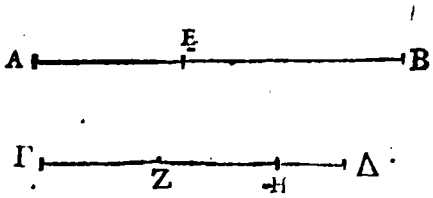
PROP. XXIII.

Si totum ad totum habeat rationem datam; habeant autem & partes ad partes rationes datas, etsi non easdem: habebunt omnia ad omnia rationes datas.

Ἐχέτω γὰρ ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ λόγον δεδομένον, ἐχέτω δὲ καὶ τὰ ΑΕ, ΕΒ μέρη πρὸς τὰ ΓΖ, ΖΔ μέρη λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοὺς δέ· λέγω ὅτι καὶ τὰ πάντα πρὸς πάντα λόγους ἕξει δεδομένους.

Habeat enim totum ΑΒ ad totum ΓΔ rationem datam; habeant autem & partes ΑΕ, ΕΒ, ad partes ΓΖ, ΖΔ rationes datas, etsi non easdem: dico etiam omnia ad omnia rationes datas habere.

Quoniam enim ipſius AB, ad ΓZ ratio data eſt; fiat huic eadem ratio ipſius AB ad ΓH: igitur ratio ipſius AB ad ΓH data eſt: quare [per 19. 5. & 2. def. dat.] reliquæ EB ad reliquam ZH ratio eſt data. data autem [ex hyp.] eſt ratio ipſius EB ad ZΔ: ergo [per 8. dat.] ipſius ZΔ ad ZH ratio data eſt: quare convertendo [per 5. dat.] ipſius ZΔ ad ΔH data eſt ratio. & quoniam ipſius BA ad utramque ΔΓ, ΓH, data eſt ratio: etiam [per 8. dat.] ipſius ΔΓ ad ΓH ratio data eſt: unde convertendo [per 5. dat.] ipſius ΓΔ ad ΔH ratio data eſt. ſed [ex hactenus oſtenſis] ipſius HΔ ad ZΔ data eſt ratio: quare [per 8. dat.] & ipſius ΓΔ ad ΔZ data eſt ratio: adeoque [per 5. dat.] & ipſius ΓZ ad ΔZ ratio data eſt. ſed [ex hyp.] ipſius ΓZ quidem ad AE data eſt ratio, atque ipſius ZΔ ad BE ratio data eſt: quamobrem & omnium ad omnia rationes datæ ſunt.



Επεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ δοθεὶς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΗ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΗ ἐστὶ δοθείς. ἔστι δὲ καὶ ὅλου ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΗ λόγος δοθείς. ἔστι δὲ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΖΔ ἄρα πρὸς τὸ ΖΗ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἀναστρέψαντι ἄρα καὶ τοῦ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΒΑ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΓ, ΓΗ δοθείς· καὶ τοῦ ΔΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΗ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἀναστρέψαντι ἄρα καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τοῦ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΓΖ πρὸς τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τοῦ μὲν ΓΖ πρὸς τὸ ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς, τοῦ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ ΒΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε πάντων πρὸς πάντα λόγος ἐστὶ δοθείς.

PROP. XXIV.

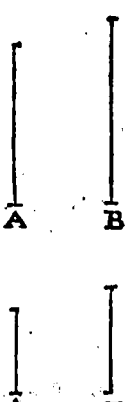
Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; prima autem ad tertiam habeat rationem datam: ea etiam ad ſecundam datam rationem habebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ δὲ πρώτη πρὸς τρίτην λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ πρὸς τὴν δευτέραν λόγον ἕξει δεδομένον.

SInt tres rectæ lineæ proportionales A, B, Γ, ſitque ut A ad B ita B ad Γ; habeat autem A ad Γ rationem datam: dico ipſam quoque ad B rationem datam habere.

Exponatur enim recta data Δ. & quoniam ratio ipſius A ad Γ data eſt; fiat huic eadem ratio ipſius Δ ad Z: igitur ratio Δ ad Z data eſt. eſt autem Δ data: ergo [per 2. dat.] etiam Z data eſt. ſumatur autem [per 13. 6.] inter duas rectas Δ, Z media proportionalis E: igitur [per 17. 6.] quod continetur ſub Δ, Z æquale eſt quadrato rectæ E. id autem quod continetur ſub Δ, Z datum eſt; quia data eſt utraque rectarum Δ, Z: quare [per 1. def. dat.] quadratum rectæ E datum eſt: ergo data eſt recta E. eſt autem Δ data: quare [per 1. dat.] ipſius Δ ad E ratio data eſt. quoniam vero [ex hyp.] eſt ut A ad Γ ita Δ ad Z: ſed ut A quidem ad Γ ita [per 1. 6.] quadratum rectæ A ad id quod continetur ſub rectis A, Γ; ut vero Δ ad Z ita quadratum rectæ Δ ad id quod continetur ſub rectis Δ, Z: erit ergo ut quadratum rectæ A ad id quod continetur ſub rectis A, Γ ita quadratum rectæ Δ ad id quod continetur ſub rectis Δ, Z. ſed [per 17. 6.] id quod continetur quidem ſub rectis A, Γ æquale eſt quadrato rectæ B, quia [ex hyp.] proportionales ſunt A, B, Γ; ei autem quod continetur ſub Δ, Z æquale eſt quadratum rectæ E: quare ut quadratum rectæ A ad quadratum rectæ B ita eſt quadratum rectæ Δ ad quadratum



Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ; καὶ ἔστω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ δὲ Α πρὸς τὴν Γ λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς τὴν Β λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἐκκείσθω γὰρ δοθεῖσα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὴν Γ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ Δ πρὸς τὴν Ζ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ Δ πρὸς τὴν Ζ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ Δ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ. εἰλήφθω τῶν Δ, Ζ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Ε· δοθὲν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ, δοθεῖσαι γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ Ε. ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ δοθεῖσα· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ Δ πρὸς τὴν Ε δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ, ὡς δὲ ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Α οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, αἱ γὰρ Α, Β, Γ ἀνάλογόν εἰσι· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς

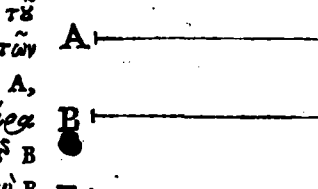
τὸ

τὸ ἀπὸ τῆς Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτω ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. λόγος δὲ τῆς Δ πρὸς τὴν Ε δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς Α πρὸς τὴν Β δοθείς.

rectæ Β; ergo [per 22. 6.] ut Α ad Β ita eſt Δ ad Ε. eſt autem [per prius oſtenſa] ratio ipſius Δ ad Ε data: quare & ratio ipſius Α ad Β data eſt.

ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ.

Ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὴν Γ δοθείς, ὡς δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ δοθείς. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς Β· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β δοθείς· ὥστε καὶ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγος ἐστὶ δοθείς· ἑκατέρα γὰρ τῶν Α, Β ἴσην ἐπιζευχθείσῃ ἐν τῷ οἰκείῳ ἑκάστῳ τετραγώνῳ.



ALITER IDEM.

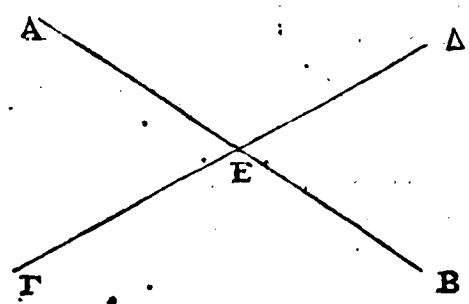
Quoniam ratio ipſius Α ad Γ data eſt; atque eſt [per 1.6.] ut Α ad Γ ita quadratum rectæ Α ad id quod continetur ſub rectis Α, Γ: igitur ratio quadrati rectæ Α ad id quod continetur ſub rectis Α, Γ data eſt. ei autem quod continetur ſub rectis Α, Γ æquale eſt [per 17. 6.] quadratum rectæ Β: ergo quadrati rectæ Α ad quadratum rectæ Β data eſt ratio: quamobrem [per 2. def. dat.] ipſius Α ad Β data ratio eſt; utrique enim rectarum Α, Β æqualis inventa eſt, in proprio uniuſcujuſq; quadrato.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν δύο γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι τέμνωσιν ἀλλήλας· δέδοται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας.

Δύο γὰρ γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι αἱ Α Β, Γ Δ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι δοθέν ἐστι τὸ Ε σημεῖον.

Εἰ γὰρ μή, μεταπεσεῖται τὸ Ε σημεῖον· μεταπεσεῖται ἄρα καὶ μιᾶς τῶν Α Β, Γ Δ θέσις. ἀλλὰ μεταπέπτωκε δέ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ε σημεῖον.



PROP. XXV.

Si duæ quævis lineæ poſitione datæ ſe mutuo invicem ſecuerint; punctum, in quo ſe invicem ſecant, etiam datum eſt.

DUÆ enim lineæ poſitione datæ Α Β, Γ Δ ſecent ſe invicem in puncto Ε: dico datum eſſe punctum Ε.

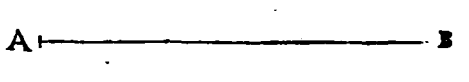
Si non, excidet punctum Ε: igitur alterius è rectis Α Β, Γ Δ poſitio excidet. atqui [ex hyp.] non excidit: ergo punctum Ε datum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν εὐθείας γραμμῆς τὰ πέρατα ᾖ δεδομένα τῇ θέσει· δέδοται ἡ εὐθεῖα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Εὐθείας γὰρ γραμμῆς τῆς Α Β τὰ πέρατα τὰ Α, Β δεδομένα ἔστω τῇ θέσει· λέγω ὅτι δέδοται ἡ Α Β τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Εἰ γὰρ, μένοντος τοῦ Α σημείου, μεταπεσεῖται τῆς Α Β εὐθείας ἢ ποι ἡ θέσις ἢ τὸ μέγεθος· μεταπεσεῖται ἄρα καὶ τὸ Β σημεῖον. ἀλλὰ μεταπέπτωκε δέ· δέδοται ἄρα ἡ Α Β εὐθεῖα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.



PROP. XXVI.

Si rectæ lineæ extrema poſitione data ſint; recta poſitione & magnitudine data eſt.

RECTÆ enim lineæ Α Β extrema Α, Β data ſint poſitione: dico rectam Α Β poſitione & magnitudine datam eſſe.

Si enim, manente puncto Α, excidat poſitio aut magnitudo rectæ Α Β; excidet & punctum Β. atqui [ex hyp.] non excidit: ergo recta Α Β poſitione & magnitudine data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐὰν εὐθείας γραμμῆς, τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένης, τὸ ἓν πέρας δοθὲν ᾖ· καὶ τὸ ἕτερον δοθήσεται.

Εὐθείας γὰρ γραμμῆς, τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένης, τῆς Α Β, τὸ ἓν πέρας δοθὲν ἔστω τὸ Α· λέγω ὅτι καὶ τὸ Β δοθέν ἐστιν.

PROP. XXVII.

Si rectæ lineæ, poſitione & magnitudine datæ, datum fuerit unum extremum; alterum quoque datum erit.

RECTÆ enim lineæ Α Β, poſitione & magnitudine datæ, datum ſit unum extremum Α: dico & extremum Β datum eſſe.

Si

Si enim, manente puncto A, punctum B excidat; excidit quoque rectæ AB aut positio aut magnitudo. atqui [ex hyp.] neutra excidit: quare punctum B datum est.

Εἰ γὰρ, μένοντος τοῦ Α σημείου, μετοπεσοῦνται τὸ Β σημεῖον· μετοπεσοῦνται ἄρα καὶ ἡ ΑΒ εὐθείας ἤτοι ἡ θέσις ἢ τὸ μέγεθος. ἀλλὰ μετοπίπτει δέ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Β σημεῖον.

ALITER.

Centro A, intervallo AB, describatur circumferentia ΓΒ: circumferentia igitur ΓΒ [per 6. def. dat.] positione data est. recta autem AB [ex hyp.] positione data est: ergo [per 25. dat.] punctum B datum est.

ΑΛΛΩΣ.

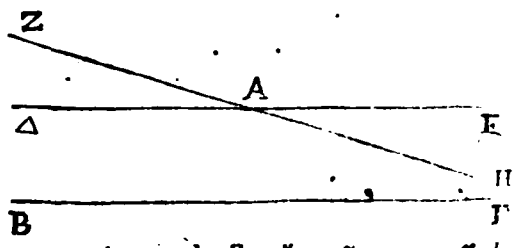
Κέντρῳ γὰρ τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ, περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΓΒ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ περιφέρεια ΓΒ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ εὐθεῖα· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Β σημεῖον.

PROP. XXVIII.

Si per datum punctum contra datam positione rectam agatur recta linea; acta recta positione data est.

PER datum enim punctum A, contra datam positione rectam ΒΓ, agatur recta linea ΔΑΕ: dico positione datam esse lineam ΔΑΕ.

Si enim non; manente puncto A excidet rectæ ΔΑΕ positio. excidat ergo, manente ΒΓ ad illam parallela, & sit ΖΑΗ; itaque parallela est ΒΓ ipsi ΖΑΗ. at vero ΒΓ [ex hyp.] ipsi ΔΑΕ parallela est: quare [per 30. 1.] ΔΑΕ ipsi ΗΑΖ parallela est. sed & cum ea concurrit, quod est absurdum; ergo positio rectæ ΔΑΕ non excidit: recta igitur ΔΑΕ positione data est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν διὰ δεδομένου σημείου τῷ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

ΔΙΑ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α, τῷ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΔΑΕ· λέγω ὅτι δέδοται ἡ ΔΑΕ τῇ θέσει.

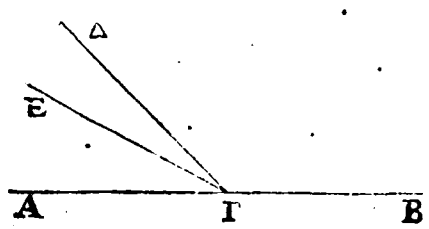
Εἰ γὰρ μή· μένοντος τοῦ Α σημείου μετοπεσοῦνται τὰ ΔΑΕ ἡ θέσις. διαμενούσης τῆς ΒΓ τῷ θέσει παράλληλος μετοπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ ΖΑΗ· τῷ θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΖΑΗ. ἀλλὰ ἡ ΒΓ τῇ ΔΑΕ ἐστὶ τῷ θέσει παράλληλος· καὶ ἡ ΔΑΕ ἄρα τῇ ΗΑΖ τῷ θέσει παράλληλός ἐστιν. ἀλλὰ καὶ συμπίπτει, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα μετοπεσοῦνται τὰ ΔΑΕ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑΕ.

PROP. XXIX.

Si ad positione datam rectam lineam, datumque in ea punctum, agatur recta linea, quæ faciat angulum datum; acta recta etiam positione data est.

AD datam enim positione rectam lineam ΑΒ, & datum in ea punctum Γ, agatur linea ΓΔ, quæ faciat angulum datum ΑΓΔ: dico rectam ΓΔ positione datam esse.

Si enim non; manente puncto Γ, excidet positio rectæ ΓΔ, servata anguli ΑΓΔ magnitudine. excidat ergo, & sit ΓΕ. itaque angulus ΔΓΑ angulo ΕΓΑ æqualis est; major minori, quod est absurdum. quare positio rectæ ΔΓ non excidet: data est igitur recta ΓΔ positione.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν καὶ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ, εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

ΠΡΟΣ θέσει γὰρ δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, καὶ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Γ, εὐθεῖα ἤχθω ἡ ΓΔ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΓΔ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΓΔ.

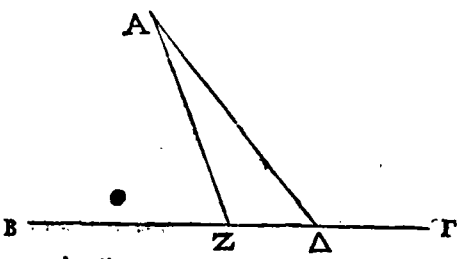
Εἰ γὰρ μή, μένοντος τοῦ Γ σημείου, μετοπεσοῦνται τὰ ΓΔ ἡ θέσις, διαμενούσης τῆς ὑπὸ ΑΓΔ γωνίας μέγεθος· μετοπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΓΕ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΑ, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μετοπεσοῦνται τὰ ΔΓ ἡ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ὅπι θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν· δοθὴ ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

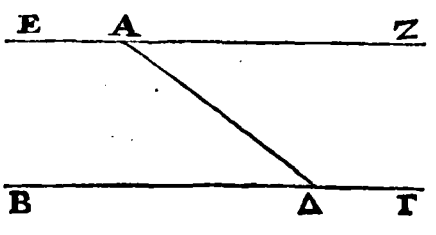
Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α ὅπι θέσει δεδομένῃ εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΔ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΑΔ.

Εἰ γὰρ μή, μενόντος τοῦ Α σημείου μεταπεσεῖται ἡ ΑΔ ἡ θέσις, διατηρῦσα τὴν ὑπὸ ΑΔΒ γωνίας τὸ μέγεθος. μεταπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΑΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΖΔ γωνίᾳ, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον ἐστι· οὐκ ἄρα μεταπεσεῖται ἡ ΑΔ ἡ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.



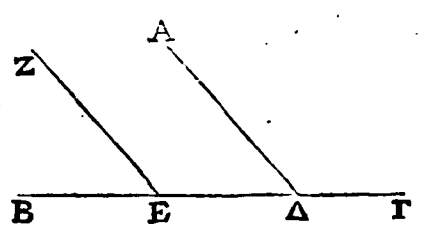
ΑΛΛΩΣ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΔΓ παράλληλος εὐθεῖα ἡ ΕΑΖ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Α παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΔΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ. ἐπεὶ δὲ εἰσι παράλληλοι αἱ ΒΔΓ, ΕΑΖ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΔΑ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΑΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΔ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ ΕΑΖ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Α, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΔ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΑΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.



ΑΛΛΩΣ.

Εἰλήφθω ὅπι τοῦ ΒΔ δοθὲν σημεῖον τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΖΕ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΕΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ. δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΔΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕΓ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Ε, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΖ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΖΕΓ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Α, παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΖΕ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.



ΑΛΛΩΣ.

Εἰλήφθω ὅπι τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΑ. ἐπεὶ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν

PROP. XXX.

Si à dato puncto in datam positione rectam agatur recta linea, quæ faciat angulum datum; acta recta positione data est.

A Dato enim puncto A in positione datam rectam ΒΓ agatur recta linea ΑΔ, quæ faciat angulum datum ΑΔΒ: dico positione datam esse rectam ΑΔ.

Si enim non, manente puncto A excidet positio rectæ lineæ ΑΔ, servata anguli ΑΔΒ magnitudine. excidat ergo; & sit recta ΑΖ. itaque angulus ΑΔΒ angulo ΑΖΔ æqualis est; major minori [per 16.1.]; quod fieri non potest: ergo non excidet positio rectæ ΑΔ: recta igitur ΑΔ positione data est.

ALITER.

Agatur [per 31.1.] per punctum A rectæ ΒΔΓ parallela ΕΑΖ. quoniam igitur per datum punctum A contra datam positione rectam ΒΔΓ acta est recta linea ΕΑΖ: positione datur [per 28.dat.] recta ΕΑΖ. quoniam vero rectæ ΒΔΓ, ΕΑΖ sunt parallelæ; atque in illas incidit recta ΔΑ: angulus igitur ΕΑΔ angulo ΑΔΓ [per 29.1.] æqualis est: datus autem est [ex hyp.] ΑΔΓ: quare & angulus ΕΑΔ datus est. quoniam itaque ad positione datam rectam lineam ΕΑΖ, & datum in ea punctum A, acta est recta linea, quæ facit angulum ΕΑΔ datum: recta igitur ΑΔ [per 29. dat.] positione data est.

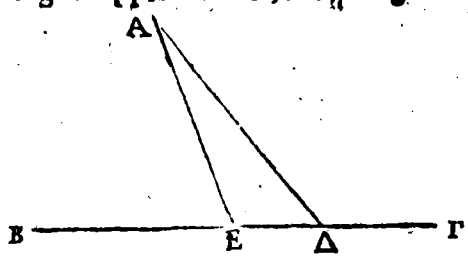
ALITER.

Sumatur in linea ΒΔ datum punctum Ε; & per punctum Ε agatur [per 31.1.] ipsi ΑΔ parallela ΕΖ. itaque cum parallela sit ΖΕ ipsi ΑΔ, & in illas incidat ΒΕΔ: erit [per 29.1.] angulus ΖΕΔ angulo ΑΔΓ æqualis. est autem [ex hyp.] angulus ΑΔΓ datus: igitur angulus ΖΕΓ datus est. quoniam itaque ad positione datam rectam ΒΓ, & datum in ea punctum Ε, acta est recta ΕΖ, quæ facit angulum datum ΖΕΓ; recta ΕΖ [per 29.dat.] positione data est. quoniam ergo per datum punctum A, contra datam positione rectam ΖΕ, acta est recta linea ΑΔ: recta linea ΑΔ [per 28. dat.] positione data est.

ALITER.

Sumatur in recta ΒΓ quodlibet punctum Ε, & connectatur ΕΑ. quoniam itaq; datum est utrum-

que punctorum A, E: positione igitur [per 26. dat.] data est A E. est autem & B Γ positione data: ergo * angulus A E Δ datus est. est autem [ex hyp.] angulus A Δ E datus: quare & [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus E A Δ datus est. quoniam itaque ad positione datam rectam A E, & datum in ea punctum A, recta linea A Δ acta est, quæ facit angulum E A Δ datum: igitur [per 29. dat.] recta A Δ positione data est.



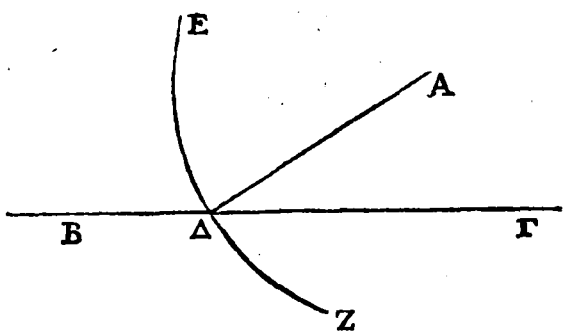
A, E σημείων. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ A E. θέσει δὲ καὶ ἡ B Γ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ A E Δ γωνία. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ A Δ E· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν E A Δ δοθεῖσά ἐστιν. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν A E, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A, εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ A Δ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ E A Δ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ A Δ.

Prop. XXXI.

Si à dato puncto, in datam positione rectam, data magnitudine recta producatur; ea etiam positione data est.

A Dato enim puncto A agatur in positione datam rectam B Γ data magnitudine recta A Δ: dico eam etiam positione datam esse.

Centro enim A, intervallo autem A Δ, circulus E Δ Z describatur. itaque [per 6. def. dat.] positione datus est circulus E Δ Z: nam ejus centrum positione datum est, & quæ ex centro, ipsa A Δ, magnitudine. sed & recta B Γ est etiam positione data. at vero si duæ lineæ positione datæ se invicem secent; punctum intersectionis [per 25. dat.] datum est: ergo datum est punctum Δ. est autem punctum A datum: quare [per 26. dat.] A Δ positione data est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ὁπὸ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ προσβληθῇ δεδομένην τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ τῇ θέσει.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ A ὁπὸ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν B Γ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ A Δ, δεδομένην τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι καὶ τῇ θέσει δέδοται.

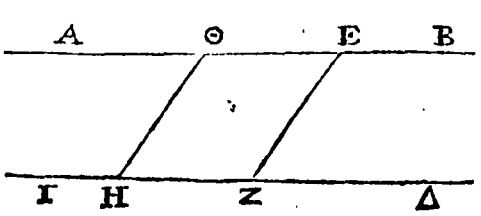
Κέντρῳ γὰρ τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ A Δ, κύκλος γεγράφθω ὁ E Δ Z. θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ E Δ Z κύκλος, δέδοται γὰρ αὐτοῦ τὸ A κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ A Δ τῷ μεγέθει. θέσει δὲ καὶ ἡ B Γ εὐθεῖα. ἐὰν δὲ δύο γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομένην τέμνωσιν ἀλλήλας, δέδοται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ. ἔστι δὲ καὶ τὸ A δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ A Δ.

Prop. XXXII.

Si in positione datas parallelas rectas agatur recta linea, quæ faciat angulos datos; acta recta magnitudine data est.

IN datas enim positione parallelas rectas A B, Γ Δ agatur recta linea E Z, faciens angulos B E Z, E Z Δ datos: dico magnitudine datam esse rectam E Z.

Sumatur enim in Γ Δ datum punctum H, & [per 31. 1.] per H agatur ipsi E Z parallela H Θ. & quoniam parallela est H Θ ipsi E Z, & in illas incidit Γ Δ; erit [per 29. 1.] angulus E Z Δ angulo Θ H Δ æqualis. angulus autem E Z Δ [ex hyp.] datus est: quare & angulus Θ H Δ datus est. quoniam itaque ad positione da-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν εἰς ἀλλήλας τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένας ποιοῦσα γωνίας, δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῷ μεγέθει.

Εἰς γὰρ ἀλλήλας τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς A B, Γ Δ, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ E Z, δεδομένας ποιοῦσα γωνίας τὰς ὑπὸ B E Z, E Z Δ· λέγω ὅτι δέδοται ἡ E Z τῷ μεγέθει.

Εἰλήφθω γὰρ ὁπὶ τῆς Γ Δ δοθὲν σημεῖον τὸ H, καὶ διὰ τοῦ H τῇ E Z ἀλλήλαις ἤχθω ἡ H Θ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ H Θ τῇ E Z, καὶ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ Γ Δ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ E Z Δ τῇ ὑπὸ Θ H Δ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ E Z Δ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Θ H Δ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδο-

* Nam rectarum positione datarum datur inclinatio ad invicem; hoc est, angulus ab illis comprehensus.

μένην

μὴν εὐθείᾳ τῇ ΓΔ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Η, εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ ΗΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΘΗΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Η δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστιν ἴση τῇ ΕΖ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ τῷ μεγέθει.

tam rectam ΓΔ, & datum in ea punctum Η, acta est recta ΗΘ, quæ facit angulum ΘΗΖ datum: positione data erit [per 29. dat.] recta ΗΘ. est autem [ex hyp.] ΑΒ positione data: itaque [per 25. dat.] punctum Θ datum est. est autem [per constr.] punctum Η datum; quare [per 26. dat.] ΗΘ magnitudine data est. atque [per 34.1.] est æqualis ipsi ΕΖ: ergo etiam [per 1. def. dat.] ΕΖ magnitudine data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. λγ'.

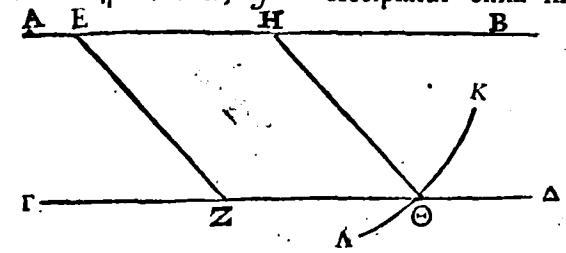
Ἐὰν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένη τῷ μεγέθει· δεδομένας ποιήσει γωνίας.

PROP. XXXIII.

Si in datas positione rectas parallelas agatur recta magnitudine data; faciet ea angulos datos.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΕΖ, δεδομένη τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι δεδομένας ποιήσει γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΓ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΑΒ δοθὲν σημεῖον τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ τῇ ΗΘ. δοθεῖσα δὲ ΕΖ τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΘ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστι τὸ Η δοθέν· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ, κύκλος γραφόμενος ἥξει τῇ θέσει. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΚΘΛ· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΚΘΛ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Η δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. θέσει δὲ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΓ γωνία. καὶ ἔστι τῇ ὑπὸ ΕΖΓ ἴση· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΓ· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΖ δοθεῖσά ἐστι.

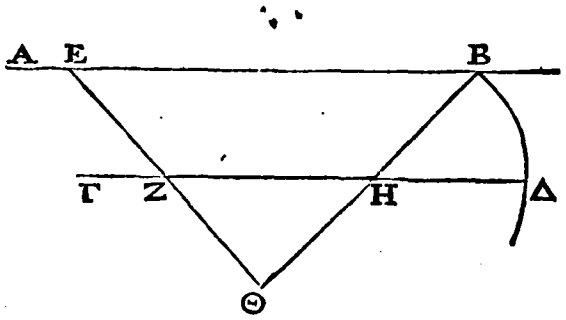


IN datas enim positione parallelas rectas ΑΒ, ΓΔ agatur recta ΕΖ magnitudine data: dico quod ipsa faciet angulos ΑΕΖ, ΕΖΓ datos.

Accipiatur enim in recta ΑΒ datum punctum Η, & per punctum Η agatur [per 31. 1.] ipsi ΕΖ parallela ΗΘ: æqualis igitur [per 34.1.] est ΖΕ ipsi ΗΘ. est autem [ex hyp.] ΕΖ magnitudine data: ergo ΗΘ magnitudine data est. & datum est punctum Η: quare [per 6. def. dat.] centro Η, intervallo ΗΘ, descriptus circulus positione datus erit. describatur, & sit ΚΘΛ: positione igitur datus est circulus ΚΘΛ. est autem [ex hyp.] ΓΔ positione data: ergo [per 25. dat.] datum est punctum Θ. sed & [per constr.] punctum Η datum est: quare [per 26.dat.] recta ΗΘ positione data est. positione autem data est [ex hyp.] recta ΓΔ: itaque angulus ΗΘΓ datus est. & est ΗΘΓ [per 29. 1.] ipsi ΕΖΓ æqualis: igitur angulus ΕΖΓ datus est: igitur [per 32. 1. & 4. dat.] & reliquus ΑΕΖ datus est.

ΑΛΛΩΣ.

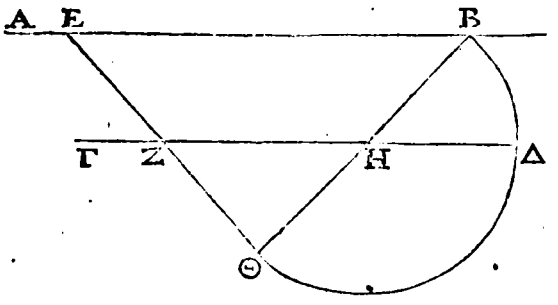
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΔ δοθὲν σημεῖον τὸ Η, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΗΔ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΒ· θέσει ἄρα ὁ ΔΒ κύκλος, δέδοται γὰρ αὐτοῦ τὸ κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἡ ἐκ κέντρου τῷ μεγέθει. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Β σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Η δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΗΔ γωνία. καὶ εἰ μὲν παραλλήλος ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΒ, ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνία δοθεῖσα· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΖΕΒ γωνία δοθεῖσα ἐστίν· εἰ δὲ μὴ παραλλήλος ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΒ, ἔστω παράλληλος ἡ ΗΘ· καὶ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνία δοθεῖσα· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΖΕΒ γωνία δοθεῖσά ἐστιν.



ALITER.

Sumatur in recta ΓΔ datum punctum Η, & ponatur ipsi ΕΖ æqualis ΗΔ, dein centro quidem Η, intervallo autem ΗΔ, circulus ΔΒ describatur: positione igitur datus est [per 6. def. dat.] circulus ΔΒ; ipsius enim centrum positione datum est, & ea quæ ex centro magnitudine. est autem [ex hyp.] recta ΑΒ positione data: quare [per 25. dat.] punctum Β datum est. verum [per constr.] & punctum Η datum est: itaque positione data est recta ΗΒ. sed [ex hyp.] positione data est etiam recta ΓΔ: ergo angulus ΒΗΔ datus est. unde, si parallela sit ΕΖ ipsi ΗΒ, angulus ΕΖΗ [per 29.1. & 1. def.dat.] datus erit: necnon & reliquus angulus ΖΕΒ [per

32. 1. & 4. dat.] datus erit. ſi vero parallelæ non ſint; rectæ EZ, BH concurrant in puncto Θ. quoniam itaque [per conſtr.] æqualis eſt EZ ipſi ΔH, hoc eſt ipſi HB; atque [ex hyp.] parallela eſt EB ipſi ZH: erit [per 2. 6.] ZΘ ipſi ΘH æqualis: quare [per 6. 1.] & angulus ΘHZ angulo ΘZH æqualis eſt. datus autem [per 15. 1.] eſt angulus ΘHZ: ergo angulus HZΘ datus eſt: quare [per 32. 1. & 4. dat.] & qui deinceps eſt angulus HZE datus eſt: angulus igitur ZEB datus eſt.



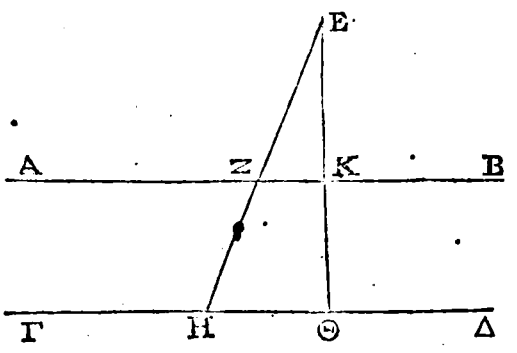
θεῖσά ἐστι. εἰ δὲ ὄ, συμπιπτέτωσαν αἱ EZ, BH κατὰ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ EZ τῇ ΔH, τοῦτ' ἔστιν τῇ HB, καὶ ἔστι παράλληλος ἡ EB τῇ ZH· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZΘ τῇ ΘH· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΘHZ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘZH ἐστιν ἴση. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΘHZ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ HZΘ· ὥστε καὶ ἡ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ HZE δοθεῖσά ἐστι· καὶ ἡ ὑπὸ ZEB ἄρα δοθεῖσά ἐστι.

PROP. XXXIV.

Si in datas poſitione parallelas rectas à dato puncto recta linea agatur; ſecabitur illa in data ratione.

IN parallelas enim poſitione datas rectas AB, ΓΔ, à dato puncto E, agatur linea EZH: dico ipſius EZ ad ZH rationem datam eſſe.

Agatur enim [per 12. 1.] à puncto E in rectam ΓΔ perpendicularis EKΘ. & quoniam à dato puncto E ad poſitione datam rectam ΓΔ recta EΘ acta eſt, quæ facit angulum EΘH datum: [per 30. dat.] poſitione data erit EΘ. eſt autem [ex hyp.] utraque rectarum AB, ΓΔ poſitione data: itaque [per 25. dat.] utrumque punctorum K, Θ datum eſt. ſed & punctum E datum eſt: quare [per 26. dat.] utraque rectarum EK, KΘ data eſt: igitur [per 1. dat.] ratio ipſius EK ad KΘ data eſt. ſed [per 2. 6.] eſt EK ad KΘ ut EZ ad ZH: ergo [per 2. def. dat.] ratio ipſius EZ ad ZH data eſt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Εὰν εἰς παράλληλος τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας ἀπὸ δεδομένου σημείου εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, εἰς δεδομένον λόγον τμηθήσεται.

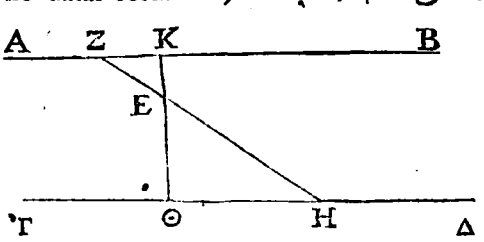
ΕΙΣ γὰρ παράλληλος τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς AB, ΓΔ, ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ EZH· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς EZ πρὸς τὴν ZH δοθείς.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ E σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ EKΘ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκταί ἡ EΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ EΘH· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ EΘ. θέσει δὲ ἑκατέρα τῶν AB, ΓΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν K, Θ σημείων. ἔστι δὲ καὶ τὸ E δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν EK, KΘ· λόγος ἄρα τῆς EK πρὸς τὴν KΘ δοθείς. καὶ ἔστιν ὡς ἡ EK πρὸς τὴν KΘ ὅλη ἡ EZ πρὸς τὴν ZH· λόγος ἄρα καὶ τῆς EZ πρὸς τὴν ZH δοθείς.

* ALITER.

In parallelas enim poſitione datas rectas AB, ΓΔ, per datum punctum E, agatur recta linea ZEH: dico ipſius HE ad EZ rationem datam eſſe.

Agatur enim [per 12. 1.] à puncto E in rectam ΓΔ perpendicularis EΘ, & producatur ad punctum K. quoniam igitur à puncto dato E ad poſitione datam rectam ΓΔ acta eſt EΘ, quæ facit angulum



* ΑΛΛΩΣ.

Εἰς γὰρ παράλληλος τῇ θέσει δεδομένας τὰς AB, ΓΔ, ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ZEH· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς HE πρὸς τὴν EZ δοθείς.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ E σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ EΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ K. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἦκταί ἡ EΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν

* Eſt verius caſus alter quam alia demonſtratio.

τὴν

τὸ ὑπὸ ΕΘΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. θέσει δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ· ἑκάτερον ἄρα τῶν Κ, Θ σημείων δοθέν ἐστιν. ἔστι καὶ τὸ Ε δοθέν· δοθεῖσαι ἄρα ἑκατέρα τῶν ΘΕ, ΕΚ· λόγος ἄρα τοῦ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΚ δοθείς. ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΚ ἕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς.

ΕΘΗ datum; data erit positione [per 30. dat.] ipsa ΕΘ. est autem [ex hyp.] utraque rectarum ΑΒ, ΓΔ positione data: quare [per 25. dat.] utrumque punctorum Κ, Θ datum est: datum autem est [ex hyp.] punctum Ε: ergo [per 26. dat.] utraque rectarum ΘΕ, ΕΚ data est: ideoque [per 1. dat.] ipsius ΘΕ ad ΕΚ ratio est data. verum ut ΘΕ ad ΕΚ ita [per 4. 6.] ΗΕ ad ΕΖ: itaque [per 2. def. dat.] ratio ipsius ΗΕ ad ΕΖ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λέ.

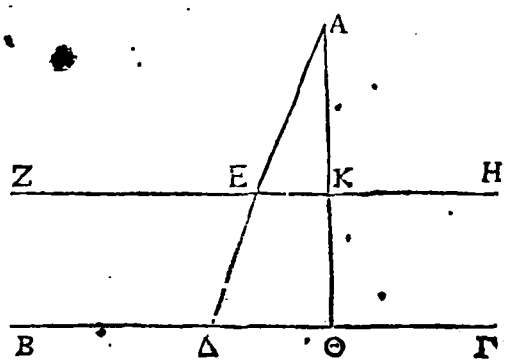
Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ τμηθῇ εἰς δεδομένον λόγον, ἅψεται δὲ τομῆς παρά τινα θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθεῖσα τῇ θέσει δεδόσθω ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

PROP. XXXV.

Si à dato puncto in datam positione rectam ducatur recta linea, secetur-que in data ratione, per punctum vero sectionis contra datam positione rectam agatur recta linea; acta recta positione data est.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΔ, καὶ τετμήσθω εἰς δεδομένον λόγον, τὸν τῆς ΔΕ πρὸς ΕΑ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΖΕΗ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΖΕΗ.

Ducatur enim à puncto Α ad rectam ΒΓ perpendicularis ΑΘ. quoniam ergo à dato puncto Α in datam positione rectam ΒΓ acta est recta linea ΑΘ, quæ facit angulum ΑΘΔ datum: [per 30. dat.] positione data erit ipsa ΑΘ. est autem [ex hyp.] ΒΓ positione data: itaque [per 25. dat.] datum est punctum Θ. at vero [ex hyp.] punctum Α datum est: ergo [per 26. dat.] recta ΑΘ positione & magnitudine data est. quoniam vero est [per 2. 6.] ut ΑΕ ad ΕΔ ita ΑΚ ad ΚΘ; atq; data est [ex hyp.] ratio ipsius ΑΕ ad ΕΔ: igitur [per 2. def. dat.] ratio ipsius ΑΚ ad ΚΘ data est: ideoq; componendo [per 6. dat.] ipsius ΑΘ ad ΑΚ data est ratio. data autem est Α magnitudine: quare [per 2. dat.] ΑΚ magnitudine data est. sed positione quoque data est ΑΚ; atque datum est [ex hyp.] punctum Α: itaque [per 27. dat.] datum est punctum Κ. quoniam igitur per datum punctum Κ, contra datam positione rectam ΒΓ, recta linea ΖΗ acta est: igitur [per 28. dat.] recta ΖΗ positione data erit.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΘΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Α δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ ἕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ, καὶ ἔστι λόγος τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς· λόγος ἄρα τῆς ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ δοθείς· συνθέντι ἄρα λόγος τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΑΚ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΘ τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΑΚ τῷ μεγέθει. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ δοθὲν τὸ Α· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Κ, τῇ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ·

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ προστεθῇ τις αὐτῇ εὐθεῖα, λόγον ἔχουσα πρὸς αὐτὴν δεδομένον, ἅψεται δὲ τὸ πέρατος τὸ προστεθεῖσης παρά τινα θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐ-

PROP. XXXVI.

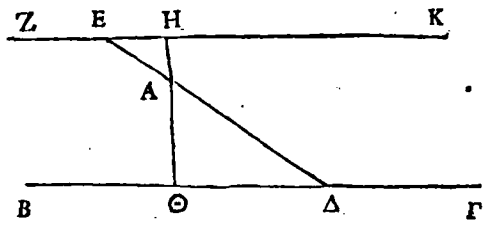
Si à dato puncto in datam positione rectam lineam ducatur recta linea, atque adjiciatur ipsi aliqua recta, quæ ad illam habeat rationem datam; per extremum vero adjectæ lineæ contra datam positione rectam linea re-

cta agatur: acta recta positione data est.

θεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

A Dato enim puncto A ad positione datam rectam BΓ ducatur recta AΔ: atque adjiciatur ipsi AΔ recta AE, quæ ad AΔ rationem datam habeat; per punctum vero E ipsi BΓ agatur parallela ZK: dico ZK esse positione datam.

Agatur enim à puncto A ad BΓ perpendicularis AΘ, & producatur ad punctum H. quoniam igitur à dato puncto A ad datam positione rectam BΓ acta est recta linea AΘ, quæ facit angulum AΘΓ datum; ΘAH [per 30.dat.] positione data est. est autem [ex hyp.] BΓ positione data: quare [per 25. dat.] datum est punctum Θ. sed & [ex hyp.] punctum A datum est: itaque [per 26. dat.] data est recta AΘ. & quoniam [ex hyp.] ratio ipsius AE ad AΔ data est, & est per 4. 6.] ut AH ad AΘ ita EA ad ΔA. ratio ipsius AH ad AΘ [per 2.def. dat.] data erit. data autem est ΘA: quare [per 2.dat.] & AH magnitudine data est. sed & etiam positione data est AH; atque datum est punctum A: ergo [per 27. dat.] punctum H datum est. quoniam itaque per datum punctum H, contra datam positione rectam BΓ acta est recta linea ZHK: ipsa ZHK [per 28. dat.] positione data est.



Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ A ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν BΓ εὐθεῖα γεγραμμένη ἤχθω ἡ AΔ, καὶ προσκείσθω τῇ AΔ ἡ AE λόγον ἔχουσα πρὸς τὴν AΔ δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ E τῇ BΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ZK· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ZK.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν BΓ κάθετος ἡ AΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ H. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ A ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν BΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἧπται ἡ AΘ δεδομένην, ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ AΘΓ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘAH. θέσει δὲ καὶ ἡ BΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ A δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ AΘ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς AE πρὸς τὴν AΔ δοθείς, ὡς δὲ ἡ AH πρὸς τὴν AΘ ἕτως ἡ EA πρὸς τὴν ΔA· λόγος ἄρα καὶ τῆς AH πρὸς τὴν AΘ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΘA· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ AH. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ A· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ H. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ H παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν BΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἧπται ἡ ZHK· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ZHK.

PROP. XXXVII.

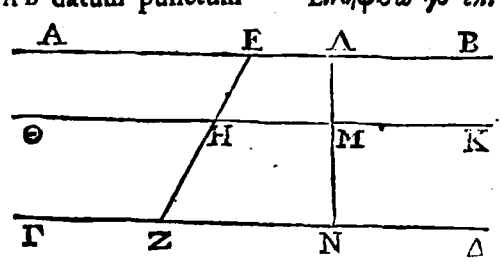
Si in parallelas rectas positione datas ducatur recta linea, secetur que in ratione data; per sectionis autem punctum contra datas positione rectas agatur linea recta acta recta positione data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἐὰν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ τμηθῇ εἰς δεδομένον λόγον, διὰ δὲ τομῆς παρά τινας ἐν τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

IN parallelas enim positione datas rectas AB, ΓΔ agatur recta linea EZ, & secetur in data ratione ipsius ZH ad HE; & ducatur per punctum H utrilibet rectarum AB, ΓΔ parallela ΘK: dico positione datam esse ΘK.

Sumatur enim in recta AB datum punctum Λ, & deducatur à puncto Λ in rectam ΓΔ perpendicularis ΛN. quoniam itaque à dato puncto Λ, ad datam positione rectam ΓΔ, acta est recta linea ΛN, quæ facit angulum datum ΛNΔ: ipsa ΛN [per 30. dat.] positione data est. est autem [ex hyp.] ΓΔ positione data: ergo [per 25. dat.] datum est punctum N. sed & datum est punctum Λ: quare [per 26.dat.] data est recta ΛN. quoniam vero [ex hyp.] ratio ipsius ZH ad HE data est, atque est [per 2.6.] ut ZH ad HE ita NM ad MΛ.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς AB δοθὲν σημεῖον τὸ Λ, καὶ κατήχθω ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΛN. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Λ ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΓΔ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΛN, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΛNΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΛN. θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ· δοθὲν ἄρα τὸ N σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Λ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΛN. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ZH πρὸς τὴν HE δοθείς, ὡς δὲ ἡ ZH πρὸς τὴν HE ἕτως ἡ NM πρὸς τὴν

ΜΛ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΝΜ πρὸς τὸ ΜΛ δοθείς. ὥστε καὶ τῆς ΝΛ πρὸς τὸ ΛΜ λόγος ἐστὶ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΝΛ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΛΜ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Λ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Μ. ἐπὶ ἄρα δοθὲν δεδομένῃ σημείῳ τῷ Μ παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΘΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ.

MΛ: ratio quoque ipſius NM ad MΛ [per 2. def. dat.] data eſt. ideoque [per 6. dat.] ratio ipſius NΛ ad ΛM eſt data. eſt autem NΛ data: quare [per 2. dat.] data eſt ΛM. ſed & etiam poſitione data eſt; & datum eſt punctum Λ: quare [per 26. dat.] & punctum M datum eſt. quoniam itaque per datum punctum M contra poſitione datam rectam ΓΔ acta eſt recta linea ΘK; ipſa ΘK [per 28. dat.] poſitione data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

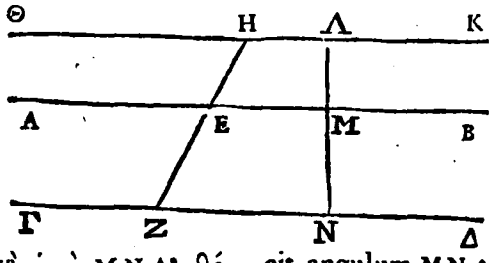
Ἐὰν εἰς ὁποιανοῦν τῶν θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἣ προσεκβληθεῖσά τις αὐτῇ εὐθεῖα λόγον ἔχουσα πρὸς αὐτὴν δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ πέρατος τῆς προσεκβληθείσης παρὰ τὰς θέσει δεδομένας παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

Prop. XXXVIII.

Si in datas poſitione parallelas rectas ducatur recta linea, adjiciaturque ei quædam recta habens ad ipſam rationem datam; per extremum vero adjectæ contra datas poſitione parallelas recta linea agatur: acta recta poſitione data eſt.

ΕΙΣ γὰρ ὁποιανοῦν τῶν θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ προσεκβεβλήσθω τις αὐτῇ εὐθεῖα ἡ ΕΗ λόγον ἐχουσα πρὸς τὴν ΕΖ δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ Η ὁποτερασοῦν τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθειῶν εὐθεῖα γραμμὴ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΘΚ.

IN parallelas enim poſitione datas rectas ΑΒ, ΓΔ agatur recta linea ΕΖ, & adjiciatur ipſi quæpiam recta ΕΗ, quæ ad ΕΖ habeat rationem datam; per punctum autem Η utrilibet rectarum ΑΒ, ΓΔ agatur parallela recta linea ΘΚ: dico quod ΘΚ poſitione data eſt.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΑΒ δοθὲν σημεῖον τὸ Μ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΜΝ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ δεδομένου τοῦ Μ, ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΓΔ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΜΝ, δεδομένην περιέχουσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΜΝΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ν σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Μ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ δοθείς, ὡς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ ὅτως ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΜΛ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΝΜ πρὸς τὴν ΜΛ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΜΝ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΜΛ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι τὸ Μ δοθέν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Λ παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΑΒ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΘΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ.

Sumatur enim in recta ΑΒ datum punctum Μ, & [per 12. 1.] ducatur à puncto Μ in lineam ΓΔ perpendicularis recta ΜΝ, & producatur ad punctum Λ. quoniam igitur à dato puncto Μ, in poſitione datam rectam ΓΔ, acta eſt recta linea ΜΝ, quæ facit angulum ΜΝΔ datum: recta ΜΝ [per 28. dat.] poſitione data eſt. ſed & ΓΔ [ex hyp.] poſitione data eſt: ergo [per 25. dat.] datum eſt punctum Ν. eſt autem & punctum Μ datum: quare [per 26. dat.] data eſt ΜΝ. quoniam vero ratio ΖΕ ad ΕΗ [ex hyp.] data eſt; atque eſt [per 2. 6.] ut ΖΕ ad ΕΗ ita ΝΜ ad ΜΛ: ratio quoque ΝΜ ad ΜΛ [per 2. def. dat.] data eſt. data autem eſt ΜΝ: quare [per 2. dat.] ΜΛ data eſt. ſed & poſitione data eſt ΜΛ, atque etiam datum eſt punctum Μ: ergo [per 26. dat.] & punctum Λ datum eſt. quoniam igitur [ex hyp.] per datum punctum Λ contra datam poſitione rectam ΑΒ acta eſt recta linea ΘΚ: ipſa ΘΚ [per 28. dat.] poſitione data erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ.

Ἐὰν τριγώνου ἑκάστη τῶν πλευρῶν δεδομένη ᾖ τῷ μεγέθει, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Prop. XXXIX.

Si trianguli ſingula latera magnitudine data ſint; triangulum ſpecie datum eſt.

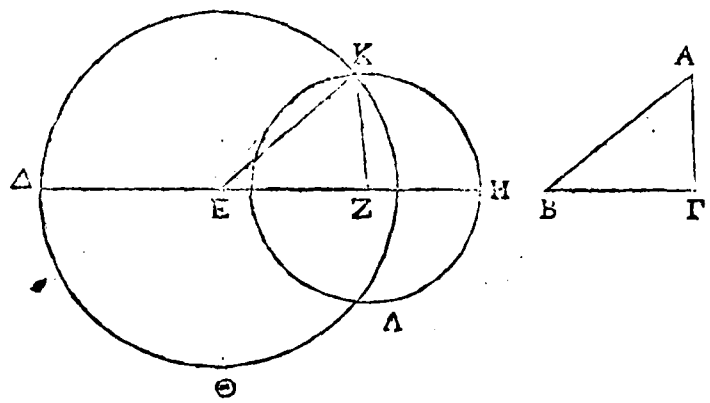
ΤΡΙΓΩΝΟΥ γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἑκάστη τῶν πλευρῶν δεδομένη ἔστω τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

TRianguli enim ΑΒΓ ſingula latera magnitudine data ſint: dico triangulum ΑΒΓ ſpecie datum eſſe.

Ἐκκείσθω γάρ ἡ εὐθεῖα τῇ θέσει δεδομένη ἡ ΔΗ, πεπερατωμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ

Exponatur enim recta poſitione data ΔΗ, finita quidem ad punctum Δ, infinita vero verſus alte-

alteram partem; in ea autem ponatur [per 3. 1.] ipſi AB æqualis Δ E. eſt autem AB data; ergo data eſt Δ E. ſed & Δ E [ex hyp.] poſitione data eſt; atque datum eſt punctum Δ: igitur [per 27. dat.] punctum E datum eſt. ponatur vero ipſi BΓ æqualis EZ. eſt autem BΓ data; ergo data eſt EZ. ſed & EZ poſitione data eſt; atque datum eſt punctum E: quare punctum Z datum eſt. rurſus, ponatur ipſi AΓ æqualis ZH. eſt autem AΓ data: ergo & ZH data eſt. ſed & poſitione eſt ZH; atque datum eſt punctum Z: quare & punctum H datum eſt. dein centro quidem E, intervallo autem EΔ, circulus deſcribatur ΔKΘ: itaque [per 6. def. dat.] poſitione datus eſt circucus ΔKΘ. rurſus, centro quidem Z, intervallo autem ZH, circulus deſcribatur HKΛ: itaque poſitione datus eſt circulus HKΛ: quare [per 25. dat.] punctum K datum eſt. eſt autem utrumque punctorum E, Z datum: ergo [per 26. dat.] unaquæque linearum KE, EZ, ZK poſitione & magnitudine data eſt: igitur [per 3. def. dat.] triangulum KEZ ſpecie datum eſt. atque [per 8. 1.] æquale eſt ac ſimile triangulo ABΓ: ergo triangulum ABΓ ſpecie datum eſt.



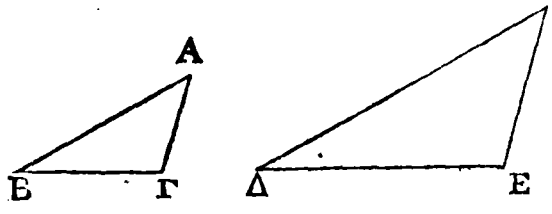
τὸ λοιπόν· καὶ κείσθω τῇ μὲν AB ἴση ἡ Δ E. δοθεῖσα δὲ ἡ AB· δοθεῖσα ἄρα ἡ Δ E. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Δ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ E. τῇ δὲ BΓ κείσθω ἴση ἡ EZ. δοθεῖσα δὲ ἡ BΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ EZ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ E· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Z. πάλιν, κείσθω τῇ AΓ ἴση ἡ ZH. δοθεῖσα δὲ ἡ AΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ZH. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ δοθὲν ἐστι τὸ Z· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ H. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ E, διαστήματι δὲ τῷ EΔ, γεγράφθω κύκλος ὁ ΔKΘ· θέσει ἄρα ἐστὶ τὸ ΔKΘ κύκλος. πάλιν, τῷ μὲν κέντρῳ Z, διαστήματι δὲ τῷ ZH, γεγράφθω HKΛ κύκλος· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ HKΛ κύκλος· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ K σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν E, Z δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν KE, EZ, ZK τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δίδοται ἄρα τὸ KEZ τρίγωνον τῷ εἴδει. καὶ ἔστιν ἴσον τε καὶ ὅμοιον τῷ ABΓ· δέδοται ἄρα τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

PROP. XL.

Si trianguli ſinguli anguli magnitudine dati ſint; triangulum ipſum ſpecie datum eſt.

TRianguli enim ABΓ unuſquiſque angulorum magnitudine datus ſit: dico triangulum ABΓ ſpecie datum eſſe.

Exponatur enim poſitione & magnitudine data recta Δ E, & [per 23. 1.] ad rectam Δ E, & ad puncta Δ, E in ipſa, angulo quidem ABΓ æqualis conſtituatur angulus rectilineus ZΔE; angulo autem AΓB æqualis ZEΔ: itaque [per 32. 1.] reliquus angulus BAΓ reliquo ΔZE æqualis eſt. unuſquiſque autem eorum, qui ad A, B, Γ puncta ſunt, angulorum datus eſt: quare & unuſquiſque angulorum ad Z, Δ, E datus erit. quoniam itaque ad poſitione datam rectam lineam Δ E, & ad datum in ea punctum Δ acta eſt recta linea ΔZ, faciens angulum datum ad punctum Δ, ipſa ΔZ [per 29. dat.] poſitione data erit. ſimili-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Ἐὰν τριγώνου ἑκάστη τῶν γωνιῶν δεδομένη ᾖ τῷ μεγέθει, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

ΤΡιγώνου γὰρ ABΓ ἑκάστη τῶν γωνιῶν δεδομένη ἔστω τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ABΓ δέδοται τῷ εἴδει.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τὸ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ Δ E, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ Δ E, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, E, τῇ μὲν ὑπὸ ABΓ γωνίᾳ ἴση γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ZΔE, τῇ δὲ ὑπὸ AΓB ἴση ἡ ὑπὸ ZEΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BAΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔZE ἴση ἐστί. δοθεῖσα δὲ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς A, B, Γ, σημείοις γωνιῶν· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς Z, Δ, E. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ Δ E, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Δ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΔZ, δεδομένην περιέχουσα γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Δ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔZ. διὰ τὰ

τὸ αὐτὸ δὴ καὶ ἡ ΕΖ θέσει ἐστὶ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ σημεῖον. ἔστι δὲ ἑκάτερον τῶν Δ, Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΕΖ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΔΖΕ τρίγωνον τῷ εἴδει, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

ter quoque positione data est & ΕΖ: quare [per 25. dat.] punctum Ζ positione datum est. datum autem est utrumque punctorum Δ, Ε: unaquæque igitur linearum ΔΕ, ΔΖ, ΕΖ [per 26. dat.] positione & magnitudine data est: itaque [per 39. dat.] triangulum ΔΖΕ specie datum est; atque [per 4. 6.] simile est triangulo ΑΒΓ: triangulum igitur ΑΒΓ specie datum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνιῶν δεδομένην, περὶ δὲ τὴν δεδομένην γωνίαν δύο πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσιν δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

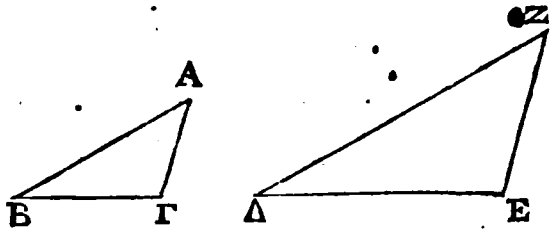
PROP. XLI.

Si triangulum unum angulum datum habeat, circa datum autem angulum duo latera ad invicem habeant rationem datam; triangulum ipsum specie datum est.

Ἐχέτω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν γωνιῶν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, περὶ δὲ τὴν ὑπὸ ΒΑΓ αἱ πλευραὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

HAbeat enim triangulum ΑΒΓ unum angulum datum, nempe ΒΑΓ; circa datum autem angulum ΒΑΓ latera ΒΑ, ΑΓ ad invicem rationem datam habeant: dico triangulum ΑΒΓ specie datum esse.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ζ, τῇ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΕ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ ΔΖ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ δεδομένῳ σημείῳ τῷ Ζ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΕ, δεδομένην περιέχουσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΔΖΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς ΔΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΕ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΔΖ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΖΕ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι τὸ Ζ δοθέν· δοθὲν ἄρα τὸ Ε. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν Δ, Ζ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΔΖ, ΖΕ, ΔΕ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΔΖΕ τρίγωνον τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχει, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, περὶ δὲ τὰς ὑπὸ τὰ ΒΑΓ, ΔΖΕ γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. δέδοται δὲ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.



Exponatur enim positione & magnitudine data recta ΔΖ, & constituatur [per 23. 1.] ad rectam ΔΖ, & datum in ea punctum Ζ, angulo ΒΑΓ æqualis angulus ΔΖΕ. est autem angulus ΒΑΓ datus: quare & angulus ΔΖΕ datus est. quoniam igitur ad positione datam rectam ΔΖ, & datum in ea punctum Ζ, acta est recta linea ΖΕ, faciens angulum ΔΖΕ datum: positione data erit [per 29. dat.] recta ΖΕ. quoniam ergo [ex hyp.] ratio ipsius ΒΑ ad ΑΓ data est; fiat huic eadem ratio ipsius ΔΖ ad ΖΕ, & connectatur ΔΕ: itaque [per 2. def. dat.] ratio ΔΖ ad ΖΕ data est. data autem est ΔΖ: igitur [per 2. dat.] data est ΖΕ. sed & ipsa etiam positione data est; & datum est punctum Ζ: itaque [per 27. dat.] datum est punctum Ε. est autem utrumque punctorum Δ, Ζ datum: quare [per 26. dat.] data est unaquæque linearum ΔΖ, ΖΕ, ΔΕ positione & magnitudine: itaque [per 39. dat.] triangulum ΔΖΕ specie datum est. quoniam vero duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ unum angulum uni angulo æqualem habent, scilicet angulum ΒΑΓ angulo ΔΖΕ, circa æquales autem angulos ΒΑΓ, ΔΖΕ latera proportionalia; triangulum ΑΒΓ [per 6. 6.] triangulo ΔΕΖ simile erit. triangulum autem ΔΕΖ specie datum est: triangulum igitur ΑΒΓ specie etiam datum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν τριγώνου αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

PROP. XLII.

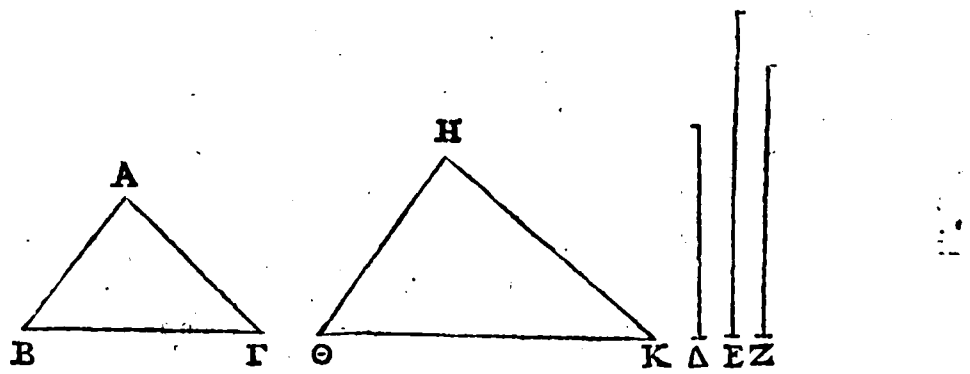
Si trianguli latera ad invicem habeant rationem datam, triangulum specie datum est.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

TRianguli enim ΑΒΓ latera ad invicem habeant rationem datam: dico triangulum ΑΒΓ specie datum esse.

Exponatur enim data magnitudine recta Δ. quoniam vero ratio ipsius AB ad BΓ data est, fiat huic eadem ratio ipsius Δ ad E. data autem est Δ: quare [per 2. dat.] & data est E. rursus quoniam ratio ipsius BΓ ad AΓ data est; fiat huic eadem ratio ipsius E ad Z. est autem E data: itaque Z data est. deinde [per 22. 1.] ex tribus rectis, quæ tribus datis rectis Δ, E, Z æquales sunt, quarum duæ reliqua majores sint utcunque sumptæ, constituatur triangulum HΘK; ita ut æqualis sit recta Δ ipsi HΘ, recta autem E ipsi ΘK, & Z ipsi HK. est autem unaquæque linearum Δ, E, Z data; quare data est unaquæque linearum HΘ, ΘK, KH magnitudine: triangulum igitur HΘK [per 39. dat.] specie datum est. quoniam autem est ut AB ad BΓ ita Δ ad E, atque est Δ æqualis rectæ HΘ, ipsa vero E rectæ ΘK; erit quoque [per 11. 5.] ut AB ad BΓ ita HΘ ad ΘK. rursus quoniam est ut BΓ ad ΓA ita E ad Z, atque est E æqualis ipsi ΘK & Z ipsi KH; erit etiam ut BΓ ad ΓA ita ΘK ad KH. ostensum autem est ut AB ad BΓ ita esse HΘ ad ΘK: est igitur ex æquo [per 22. 5.] ut AB ad AΓ ita HΘ ad HK. est autem ut AΓ ad BΓ ita HK ad KΘ: itaque [per 5. 6.] triangulum ABΓ triangulo HΘK simile est. verum triangulum HΘK specie datum est: quare & triangulum ABΓ specie datum est.

Εκκείσθω γὰρ δεδομένη τῷ μεγέθει εὐθεῖα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς AB πρὸς τὴν BΓ δοθεὶς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς Δ πρὸς τὴν E. δοθεῖσα δὲ ἡ Δ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ E. πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς BΓ πρὸς τὴν AΓ δοθεὶς, αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς E πρὸς τὴν Z. δοθεῖσα δὲ ἡ E· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Z. καὶ ἐπεὶ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς Δ, E, Z, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, τετράγωνον συνεστάτω τὸ HΘK, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν Δ τῇ HΘ, τὴν δὲ E τῇ ΘK, τὴν δὲ Z τῇ HK. δοθεῖσαι δὲ ἑκάστη τῶν Δ, E, Z· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν HΘ, ΘK, KH τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ HΘK τρίγωνον τῷ εἴδει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν E, ἴση δὲ ἡ μὲν Δ τῇ HΘ, ἡ δὲ E τῇ ΘK· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ HΘ πρὸς τὴν ΘK. πάλιν ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν ΓA οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z, ἴση δὲ ἡ E τῇ ΘK, ἡ δὲ Z τῇ HK· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν ΓA οὕτως ἡ ΘK πρὸς τὴν KH. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ HΘ πρὸς τὴν ΘK· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν AΓ οὕτως ἡ HΘ πρὸς τὴν HK. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ AΓ πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ HK πρὸς τὴν KΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ HΘK τριγώνῳ. δέδοται δὲ τὸ HΘK τρίγωνον τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.



Prop. XLIII.

Si trianguli rectanguli latera, circa unum acutorum angulorum, ad invicem habeant rationem datam; triangulum ipsum specie datum est.

TRianguli enim rectanguli ABΓ rectum habentis angulum BAΓ, latera ΓB, BA, circa unum acutorum angulorum ΓBA, habeant rationem datam: dico triangulum ABΓ specie datum esse.

Exponatur enim positione & magnitudine data recta ΔE; super ΔE vero describatur semicirculus ΔHE: itaque [per 6. def. dat.] positione datus est semicirculus ΔHE. & quoniam ratio ipsius ΓB ad BA data est; fiat huic eadem ratio ipsius ΔE ad Z: quare ratio ipsius ΔE ad Z data est. data autem est ΔE: ergo

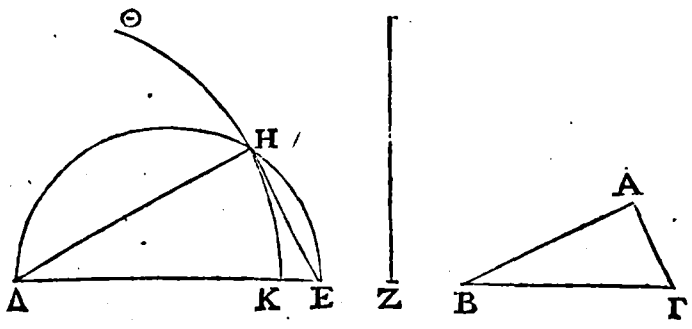
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ΄.

Ἐὰν τριγώνου ὀρθογωνίου περὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ ABΓ ὀρθὴν ἔχοντος τὴν ὑπὸ BAΓ γωνίαν, περὶ μίαν τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν τὴν ὑπὸ ΓBA, αἱ περιέχουσαι αἱ ΓB, BA πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΔE, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΔE ἡμικύκλιον τὸ ΔHE· θέσει ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔHE ἡμικύκλιον. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΓB πρὸς τὴν BA δοθεὶς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς ΔE πρὸς τὴν Z· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΔE πρὸς τὴν Z δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΔE· δοθεῖσα

δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Z. καὶ ἔστι μείζων ἡ ΓΒ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΔ τῆς Z. ἐνηρμόσθω τῇ Z ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΘΗΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΘΗΚ κύκλος, δέδοται γὰρ αὐτοῦ τὸ κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει. θέσει δὲ καὶ τὸ ΔΗΕ ἡμικύκλιον· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Η σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν Δ, Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΗΔ, ΕΗ, ΕΔ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΗΔΕ τρίγωνον τῷ εἴδει. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΗ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΗΕ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΕΔΗ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν ὑπὸ ΒΓΑ, ΔΕΗ ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΕΗ. δέδοται δὲ τὸ ΔΕΗ τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.



[per 2. dat.] Z data est. & [per 19. 1.] major. est ΓΒ ipsa ΒΑ: quare & major est ΕΔ ipsa Z. accommodetur [per 1. 4.] ipsi Z æqualis ΔΗ, & connectatur ΗΕ, dein centro quidem Δ, intervallo autem ΔΗ, circulus describatur ΘΗΚ: itaque [per 6. def. dat.] positione datus est semicirculus ΘΗΚ; ipsius namque centrum datum est, & ea quæ ex centro est magnitudine. sed & semicirculus ΔΗΕ positione datus est: ergo [per 25. dat.] punctum Η datum est. datum est autem utrumq; punctorum Δ, Ε: igitur [per 26. dat.] unaquæque linearum ΗΔ, ΕΗ, ΕΔ positione & magnitudine data est: quare [per 3. def. dat.] triangulum ΗΔΕ specie datum est. quoniam itaque triangula ΑΒΓ, ΔΕΗ unum angulum uni angulo æqualem habent, angulum scilicet ΒΑΓ angulo ΔΗΕ, circa alios autem angulos ΓΒΑ, ΕΔΗ latera proportionalia, reliquorum autem ΒΓΑ, ΔΕΗ simul utrumque [ex hyp.] recto minorem; ΑΒΓ quidem [per 7. 6.] ipsi ΔΕΗ simile erit. triangulum autem ΔΕΗ [ex ostensis] specie datum est: quare triangulum quoque ΑΒΓ specie datum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

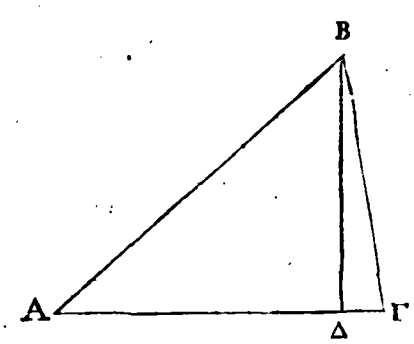
Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΒΓ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ λόγον ἐχέτωσαν πρὸς ἀλλήλας δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

PROP. XLIV.

Si triangulum angulum unum habeat datum; latera autem circa alium angulum habeant ad invicem rationem datam: triangulum specie datum est.

SIT triangulum ΑΒΓ, quod unum angulum habeat datum qui sit ΒΑΓ; circa alium autem angulum ΑΒΓ latera ΑΒ, ΒΓ habeant rationem datam: dico triangulum ΑΒΓ specie datum esse.

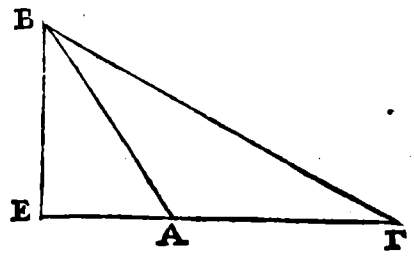
Μὴ ἔστω δὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή, ἀλλὰ ἔστω πρότερον ὀξεῖα· καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δοθείσαί εἰσιν ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΒΑΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. ἀλλὰ τοῦ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΒΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἐστὶ δο-



Non sit autem angulus ΒΑΓ rectus; sed primum acutus: & agatur à puncto Β in lineam ΑΓ perpendicularis ΒΔ. quoniam vero datus est angulus ΒΔΑ, estque [ex hyp.] angulus ΒΑΔ datus; ergo & [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus ΑΒΔ datus est: itaque [per 40. dat.] triangulum ΒΑΔ specie datum est: quare [per 3. def. dat.] ratio ipsius ΒΑ ad ΒΔ data est. sed [ex hyp.] rectæ ΑΒ ad ΒΓ data est ratio: ergo [per 8. dat.] & ratio ipsius ΒΔ ad ΒΓ data est. rectus autem est [per constr.] angulus ΒΔΓ: quare [per 43 dat.] triangulum ΒΔΓ specie datum est: datus igitur est angulus ΒΓΔ. est autem [ex hyp.] angulus ΒΑΓ datus: quare & [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus angulus ΑΒΓ datus

tus eſt: triangulum igitur ABΓ [per 40. dat.] ſpecie datum eſt.

Sed ſit angulus BAΓ obtuſus, & producatur ΓA ad punctum E, atque agatur à puncto B ad rectam AE perpendicularis BE. & quoniam angulus BAΓ datus eſt; etiam [per 13. 1. & 4. dat.] & qui deinceps eſt angulus BAE datus erit. eſt autem & angulus BEA datus: reliquus igitur EBA [per 32. 1. & 4. dat.] datus eſt: quare [per 40. dat.] triangulum EBA ſpecie datum eſt: ergo [per 3. def. dat.] ratio ipſius EB ad BA data eſt. eſt autem [ex hyp.] ratio ipſius AB ad BΓ data: quare [per 8. dat.] & ratio ipſius EB ad BΓ data eſt. ſed rectus eſt [per conſtr.] angulus BEΓ: ergo [per 43. dat.] triangulum EBΓ ſpecie datum eſt: quare [per 3. def. dat.] datus eſt angulus BΓE. eſt autem [ex hyp.] angulus BAΓ datus: itaque reliquus angulus ABΓ datus eſt: triangulum igitur ABΓ [per 40. dat.] ſpecie datum eſt.



δεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

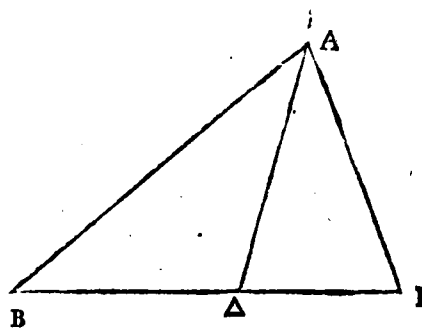
Ἀλλὰ ἔστω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἀμβλεῖα, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΑΕ κάθετος ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΕ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΑ δοθεῖσά ἐστιν· δέδοται ἄρα τὸ ΕΒΑ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τῆς ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ δοθείς. τῆς δὲ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΕΒ ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

PROP. XLV.

Si triangulum angulum unum habeat datum; circa datum autem angulum latera ſimul utraque, tanquam unum, ad reliquum latus habeant rationem datam: triangulum ipſum ſpecie datum eſt.

SIT triangulum ABΓ quod unum angulum BAΓ habeat datum; circa angulum autem BAΓ latera, hoc eſt ſimul utraque BAΓ, tanquam unum, ad BΓ rationem habeant datam: dico triangulum ABΓ ſpecie datum eſſe.

Secetur enim [per 9. 1.] angulus BAΓ bifariam recta AΔ: itaque [per 2. dat.] datus eſt angulus BAΔ. quoniam vero [per 3. 6.] ut BA ad AΓ ita BΔ ad ΔΓ; erit quoque permutando ut AB ad BΔ ita AΓ ad ΓΔ: adeoque [per 12. 5.] ut ſimul utraque BAΓ ad BΓ ita erit AB ad BΔ. data autem eſt [ex hyp.] ratio utriuſque ſimul BAΓ ad BΓ: quare & ratio ipſius AB ad BΔ data eſt. & datus etiam eſt angulus BAΔ: quare [per 44. dat.] triangulum ABΔ ſpecie datum eſt: angulus igitur ABΔ datus eſt. datus autem eſt [ex hyp.] angulus BAΓ. itaque [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus angulus AΓB datus eſt: ergo [per 40. dat.] triangulum ABΓ ſpecie datum eſt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

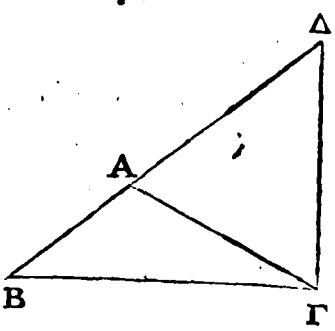
Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην, αἱ δὲ περὶ τὴν δεδομένην γωνίαν πλευραὶ συναμφότεραι, ὡς μία, πρὸς τὴν λοιπὴν λόγον ἔχουσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν γωνίαν δεδομένην ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, περὶ δὲ τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν αἱ πλευραὶ, τουτέστι συναμφότερος ἡ ΒΑΓ, ὡς μία, πρὸς τὴν ΒΓ λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. λόγος δὲ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

* ΑΛΛΩΣ.

Ἐκβεβλήθω ἡ ΒΑ ἐπ' εὐθείας, καὶ τῇ ΑΓ κείσθω ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΔ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΒΑΔ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡμίσεια γάρ ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ· δέδοται ἄρα τὸ ΒΑΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.



* ALITER.

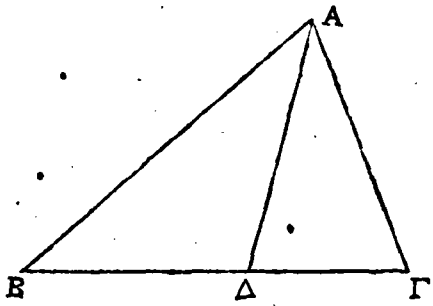
Producatur BA in directum, & [per 2.1.] ipsi AΓ ponatur æqualis AΔ, & connectatur ΔΓ. Quoniam vero ratio simul utriusque BAΓ ad BΓ data est, atque æqualis est ΓA ipsi ΔA: igitur ratio totius BAΔ ad BΓ data est. verum datus est angulus AΔΓ; dimidius namque est [per 5. & 32. 1.] ipsius BAΓ: igitur [per 44. dat.] triangulum BΔΓ specie datum est: ergo [per 3.def.dat.] angulus ABΓ datus est. angulus autem BAΓ etiam [ex hyp.] datus est: quare [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus AΓB datus est. triangulum igitur ABΓ [per 40. dat.] specie datum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην, τὴν δὲ ἄλλην γωνίαν αἱ πλευραὶ συναμφότεραι, ὡς μία, τὴν λοιπὴν λόγον ἔχουσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

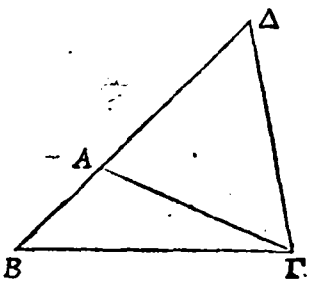
Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, τὴν δὲ ἄλλην γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ αἱ πλευραὶ συναμφότεραι, ὡς μία, τυπίσῃ ἡ ΒΑΓ, πρὸς τὴν ΒΓ λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ ὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. λόγος δὲ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία. καὶ ἔστιν αὐτῆς διπλασίων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.



ΑΛΛΩΣ.

Ἐκβεβλήθω ἡ ΒΑ, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΔ· λόγος ἄρα τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία. καὶ ἔστιν αὐτῆς διπλῆ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ·



* Hæc demonstratio non reperitur in Cod. MS. Saviliano.

PROP. XLVI.

Si triangulum unum angulum habeat datum; circa alium autem angulum simul utraque latera, tanquam unum, habeant ad reliquum rationem datam: triangulum ipsum specie datum est.

SIT triangulum ABΓ, quod unum angulum ABΓ datum habeat, circa alium autem angulum BAΓ simul utraque latera, tanquam unum (hoc est BAΓ) ad BΓ datam rationem habeant: dico triangulum ABΓ specie datum esse.

Secetur enim [per 9. 1.] angulus BAΓ bifariam recta AΔ: itaque [per ostensa in præc.] erit ut simul utraque BAΓ ad BΓ ita AB ad BΔ. est autem ratio simul utriusque BAΓ ad BΓ [ex hyp.] data; ergò & ratio ipsius AB ad BΔ data est. datus autem [ex hyp.] est angulus ABΔ: ergo [per 41.dat.] triangulum ABΔ specie datum est: quare [per 3.def.dat.] angulus BAΔ datus est. ipsius autem duplus est [per constr.] angulus BAΓ: igitur [per 2. dat.] angulus BAΓ datus est. est autem [ex hyp.] & angulus ABΓ datus: quare & [per 32. 1. & 4.dat.] angulus AΓB datus est: triangulum igitur ABΓ [per 40.dat.] specie datum est.

ALITER.

Producatur BA in directum, & ponatur ipsi ΓA æqualis ΔA, & connectatur recta ΔΓ. quoniam vero [ex hyp.] data est ratio simul utriusque BAΓ ad BΓ; estque [ex constr.] ΓA æqualis ipsi AΔ: igitur ratio ipsius ΔB ad BΓ data est. datus autem est [ex hyp.] angulus ABΓ: quare [per 41. dat.] triangulum ΔBΓ specie datum est; ergo datus est [per 3. def. dat.] angulus BΔΓ. estque hujus duplus [per 5. & 32. 1.] angulus BAΓ:

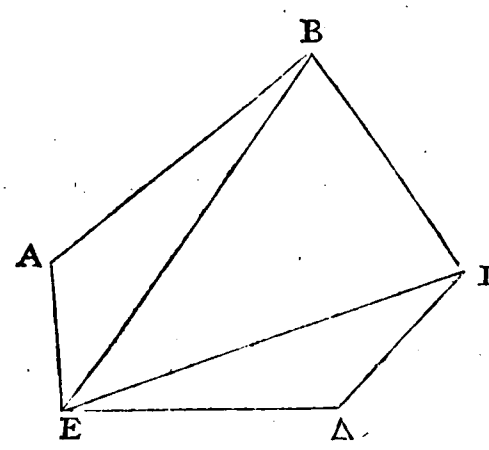
BAΓ: angulus igitur BAΓ datus eſt: quare & reliquus AΓB datus eſt: & igitur [per 40.dat.] triangulum ABΓ ſpecie datum eſt.

PROP. XLVII.

Rectilinea ſpecie data in data ſpecie triangula dividuntur.

SIT datum ſpecie rectilineum ABΓΔE: dico rectilineum ABΓΔE in data ſpecie triangula dividi.

Connectantur enim rectæ BE, EΓ. quoniam vero rectilineum ABΓΔE ſpecie datum eſt; igitur [per 3. def.dat.] angulus BAE datus eſt, & etiam ratio lateris BA ad EA data. quoniam itaque angulus BAE datus eſt, atque ratio ipſius BA ad AE data: triangulum BAE [per 41. dat.] ſpecie datum eſt: quare [per 3. def. dat.] angulus ABE datus eſt. totus autem angulus ABΓ [per 3.def.dat.] datus eſt: ergo [per 4. dat.] & reliquus EBΓ datus eſt. ipſius autem AB ad BE, necnon ipſius AB ad BΓ data eſt ratio: ergo [per 8. dat.] ratio quoque lateris BΓ ad BE data eſt. ſed & datus eſt angulus ΓBE: triangulum igitur BΓE [per 41. dat.] ſpecie datum eſt. ſimili vero ratione & triangulum ΓΔE ſpecie datum eſt. rectilinea igitur ſpecie data in data ſpecie triangula dividuntur.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

Τὰ δεδομένα εὐθύγραμμα τῷ εἴδει εἰς δεδομένα τρίγωνα τῷ εἴδει διαιρεῖται.

ΕΣτω δεδομένον εὐθύγραμμον τῷ εἴδει τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ εὐθύγραμμον εἰς δεδομένα τῷ εἴδει τρίγωνα διαιρεῖται.

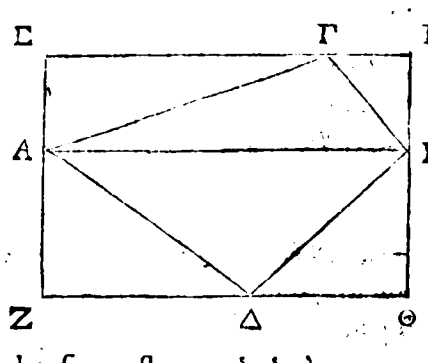
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΕΓ. καὶ ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΒΓΔΕ εὐθύγραμμον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία, καὶ ἔστι λόγος τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ δοθείς· ἐπεὶ ἂν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία, καὶ ἔστι λόγος τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ δοθείς· δέδοται ἄρα τὸ ΒΑΕ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ δοθεῖσά ἐστιν. καὶ ἔστι λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ δοθείς, τῆς δὲ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΓΒΕ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΒΓΕ τρίγωνον τῷ εἴδει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον τῷ εἴδει δέδοται· τὰ ἄρα δεδομένα εὐθύγραμμα τῷ εἴδει εἰς δεδομένα τῷ εἴδει τρίγωνα διαιρεῖται.

PROP. XLVIII.

Si ab eadem recta triangula ſpecie data deſcribantur; habebunt ad invicem rationem datam.

AB eadem enim recta AB duo triangula ſpecie data deſcribantur ABΓ, ABΔ: dico rationem trianguli ABΓ ad triangulum ABΔ datam eſſe.

Agantur enim [per 11.1.] à punctis A, B ipſi AB ad rectos angulos rectæ AE, BH, & producantur ad puncta Z, Θ; per puncta autem Γ, Δ [per 31. 1.] ipſi AB parallelæ ducantur EΓH, ZΔΘ. quoniam autem triangulum ABΓ [ex hyp.] ſpecie datum eſt; ipſius ΓA ad BA [per 3. def. dat.] ratio data erit. quoniam itaque angulus ΓAB datus eſt, datuſque eſt angulus EAB; etiam [per 4.dat.] reliquus ΓAE da-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀναγραφῇ τρίγωνα δεδομένα τῷ εἴδει· λόγον ἕξει ὃν ἕξει καὶ ἄλληλα δεδομένον.

ΑΠΟ γὰρ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τρίγωνα δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγεγράφθω τὰ ΑΒΓ, ΑΒΔ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΔ δοθείς.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΕ, ΒΗ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ζ, Θ, καὶ διὰ τῶν Γ, Δ σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΓΗ, ΖΔΘ. καὶ ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει, λόγος ἐστὶ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΒΑ δοθείς. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνία, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ δοθεῖσά ἐστιν·

ἐστιν. ἔστι δὲ ἑκάτερα τῶν ΑΕΓ δοθείσων· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΑ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς. τῆς δὲ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΕΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῆς ΖΑ πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΘΑ· ὥστε καὶ τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΘΑ λόγος ἐστὶ δοθείς. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΗ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓ, τὸ δὲ ΑΘ ἥμισυ τοῦ ΑΔΒ· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα πρὸς ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς.

tus erit. angulus autem ΑΕΓ datus eſt: ideoque reliquus angulus ΕΓΑ datus eſt: quare [per 40.dat.] triangulum ΑΕΓ ſpecie datum eſt: igitur [per 3. def. dat.] ipſius ΕΑ ad ΑΓ ratio eſt data. ſed [ex hyp.] & ratio ΓΑ ad ΑΒ data eſt: quare [per 8.dat.] ipſius quoque ΕΑ ad ΑΒ ratio data erit. ſimiliter vero ipſius ΖΑ ad ΑΒ ratio eſt data: quare [per 8.dat.] & ipſius ΕΑ ad ΑΖ data eſt ratio. eſt autem [per 1. 6.] ut ΑΕ ad ΑΖ ita parallelogrammum ΑΗ ad parallelogrammum ΘΑ: ideoque ratio parallelogrammi ΑΗ ad parallelogrammum ΘΑ data eſt. ſed [per 41. 1.] parallelogrammi quidem ΑΗ dimidium eſt triangulum ΑΒΓ; parallelogrammi vero ΑΘ dimidium eſt ΑΔΒ: trianguli igitur ΑΒΓ ad triangulum ΑΔΒ data eſt ratio.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχεν ἀναγραφῇ δεδομένα τῷ εἴδει, λόγον ἕξει πρὸς ἄλληλα δεδομένον.

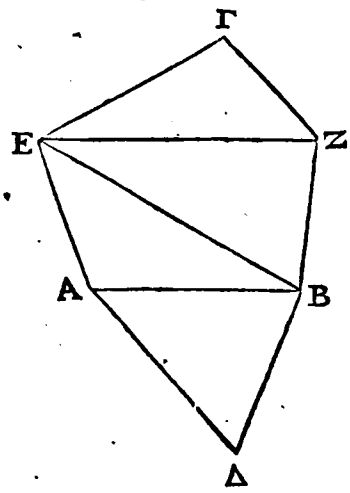
PROP. XLIX.

Si ab eadem recta linea duo quælibet rectilinea ſpecie data deſcribantur; habebunt ad invicem rationem datam.

Ἀπὸ γὰρ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχεν δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγεγράφθω τὰ ΑΕΓΖΒ, ΑΔΒ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΕΓΖΒ πρὸς ΑΔΒ δοθείς.

AB eadem enim recta ΑΒ duo rectilinea quæcunque ſpecie data deſcribantur, ut ΑΕΓΖΒ, ΑΔΒ: dico rationem ipſius ΑΕΓΖΒ ad ΑΔΒ datam eſſe.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΖΕ· δέδοται ἄρα ἕκαστον τῶν ΕΖΓ, ΕΖΒ, ΕΑΒ τριγώνων τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΕΖ δύο τρίγωνα δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγέγραπται τὰ ΕΖΓ, ΕΖΒ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΓΕΖ πρὸς τὸ ΖΕΒ δοθείς· καὶ συνθέντι ἄρα λόγος ἐστὶ τοῦ ΓΕΒΖ πρὸς τὸ ΕΒΖ δοθείς. ἀλλὰ τὸ ΖΕΒ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἐπειδήπερ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΒΕ ἀναγέγραπται δεδομένα τῷ εἴδει τρίγωνα τὰ ΖΕΒ, ΕΑΒ· τοῦ ἄρα ΓΕΒΖ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι ἀναμφοτέρων τοῦ ΓΕΑΒΖ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΕΑΒ πρὸς τὸ ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΓΕΑΒΖ ἄρα πρὸς τὸ ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς.



Connectantur enim ΒΕ, ΖΕ: itaque [per 47. dat.] unumquodque triangulorum ΕΖΓ, ΕΖΒ, ΕΑΒ, ſpecie datum eſt. quoniam vero ab eadem recta ΕΖ triangula ſpecie data ΕΖΓ, ΕΖΒ deſcripta ſunt; ratio ΓΕΖ ad ΖΕΒ [per 48. dat.] data eſt: quare [per 6. dat.] componendo, ratio ipſius ΓΕΒΖ ad ΕΒΖ data eſt. ipſius etiam ΖΕΒ ad ΕΑΒ [per 48. dat.] data ratio eſt; quandoquidem ab eadem recta ΒΕ triangula ſpecie data deſcripta ſunt, ΖΕΒ, ΕΑΒ: quare [per 8.dat.] ipſius ΓΕΒΖ ad ΕΑΒ data eſt ratio: componendo igitur [per 6. dat.] ratio utriuſque ΓΕΑΒΖ ad ΕΑΒ data eſt. ratio autem ipſius ΕΑΒ ad ΑΔΒ [per 48.dat.] data eſt: igitur [per 8. dat.] ratio ipſius ΓΕΑΒΖ ad ΑΔΒ data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

PROP. L.

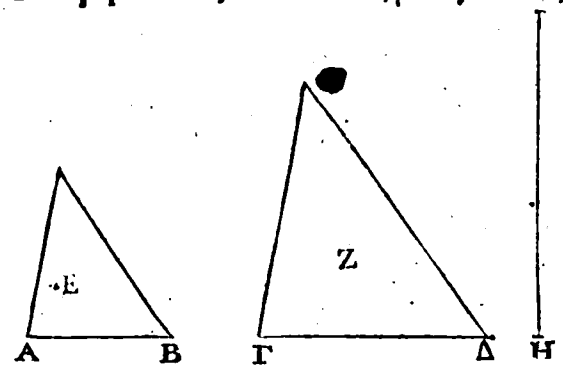
Si duæ rectæ lineæ ad invicem habeant rationem datam, ab illis quoque ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea ad invicem rationem datam habebunt.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ Ε, Ζ· λέγω ὅτι καὶ ὁ αὐτῶν πρὸς ἄλληλα λόγος ἐστὶ δοθείς.

DUÆ enim rectæ ΑΒ, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, & deſcribantur ab illis ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea Ε, Ζ: dico rationem illorum ad invicem datam eſſe.

Acci-

Accipiatur enim [per 11. 6.] ipſius AB, ΓΔ tertia proportionalis H: eſt igitur ut AB ad ΓΔ ita ΓΔ ad H. data autem eſt [ex hyp.] ratio rectæ AB ad rectam ΓΔ: quare etiam ratio ΓΔ ad H data eſt: ideoque [per 8. dat.] & ipſius AB ad H ratio data eſt. verum ut AB ad H ita [per 19. aut 20. 6.] rectilineum E ad rectilineum Z: ratio igitur ipſius E ad Z data eſt.



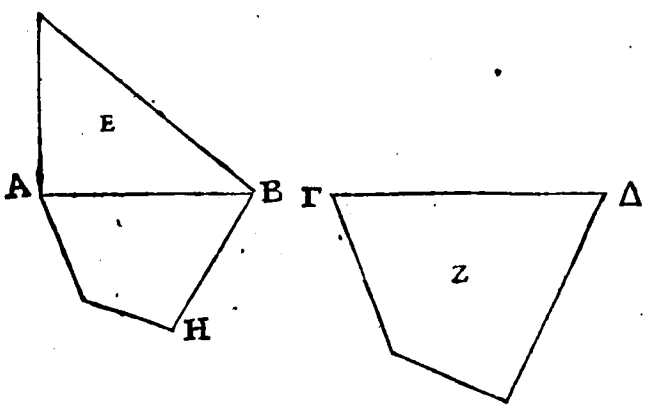
Εἰλήφθω γὰρ τῶν AB, ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ H· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν H. λόγος δὲ τῆς AB πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν H δοθείς· ὥστε καὶ τῆς AB πρὸς τὴν H λόγος ἐστὶ δοθείς. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν H οὕτω τὸ E πρὸς τὸ Z· λόγος ἄρα τοῦ E πρὸς τὸ Z δοθείς.

PROP. LI.

Si duæ rectæ lineæ habeant ad invicem rationem datam, atque ab illis rectilinea quæcunque ſpecie data deſcribantur; habebunt hæc ad invicem rationem datam.

DUÆ enim rectæ AB, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam; & deſcribantur ab ipſis AB, ΓΔ rectilinea quæcunque ſpecie data E, Z: dico ipſius E ad Z rationem datam eſſe.

Deſcribatur enim à recta AB, ipſi Z ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum AH quoniam autem rectilineum E ſpecie datum eſt, atque deſcriptum eſt ab eadem recta aliud rectilineum AH ſpecie datum: ratio igitur ipſius E ad AH [per 49. dat.] data eſt. & quoniam ratio ipſius AB ad ΓΔ data eſt, deſcriptaque ſunt à rectis AB, ΓΔ ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea AH, Z: ratio ipſius AH ad Z [per 50. dat.] data eſt. data autem eſt ratio ipſius AH ad E: ergo [per 8. dat.] & ratio ipſius E ad Z data eſt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Εὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοια ἔτυχεν ἀναγραφῇ δεδομένα τῷ εἴδει· λόγον ἕξει πρὸς ἄλληλα δεδομένον.

ΔΥΟ γὰρ εὐθεῖαι AB, ΓΔ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ εὐθύγραμμα ὅμοια τυχὸν δεδομένα τῷ εἴδει τὰ E, Z· λέγω ὅτι τοῦ E πρὸς τὸ Z λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τῷ Z ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ AH. ἐπεὶ οὖν τὸ E δέδοται τῷ εἴδει, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τὸ εὐθύγραμμον AH δεδομένον τῷ εἴδει λόγῳ· ἄρα τοῦ E πρὸς τὸ AH δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστι τῆς AB πρὸς τὴν ΓΔ λόγος δοθείς, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ AH, Z· λόγος ἄρα τοῦ AH πρὸς τὸ Z δοθείς. ἔστι δὲ καὶ AH πρὸς τὸ E λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ E ἄρα πρὸς τὸ Z λόγος ἐστὶ δοθείς.

PROP. LII.

Si à data magnitudine recta figura ſpecie data deſcribatur; deſcripta figura magnitudine data eſt.

A Data enim magnitudine recta AB deſcribatur data ſpecie figura AΓΔEB: dico figuram AΓΔEB magnitudine datam eſſe.

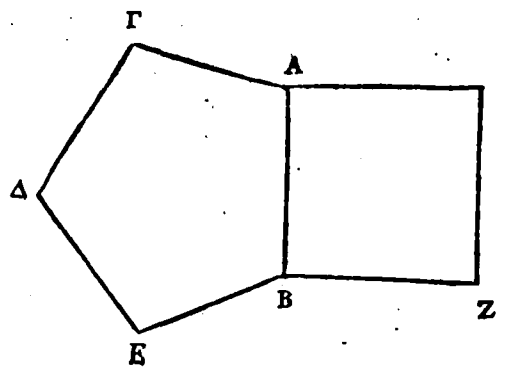
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

Εὰν ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος ἀναγραφῇ, δέδοται τὸ ἀναγραφὲν τῷ μεγέθει.

ΑΠΟ γὰρ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει τῆς AB δεδομένον τὸ εἶδος εἴδος ἀναγεγράφθω τὸ AΓΔEB· λέγω ὅτι τὸ AΓΔEB δέδοται τῷ μεγέθει.

Ana-

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΖ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΖ τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο εὐθύγραμμα ἀναγέγραπται δεδομένα τῷ εἴδει ΑΓΔΕΒ, ΑΖ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΓΔΕΒ πρὸς τὸ ΑΖ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΔΖ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΓΔΕΒ τῷ μεγέθει.



Describatur enim [per 46.1.] à recta AB quadratum AZ: datum itaque [per 3.def. dat.] est ipsum specie & magnitudine. & quia à recta AB duo rectilinea AΓΔEB, AZ specie data, descripta sunt: igitur [per 49. dat.] ratio ipsius AΓΔEB ad AZ data est. quadratum autem AZ magnitudine datum est: ergo [per 2. dat.] etiam figura AΓΔEB magnitudine data est.

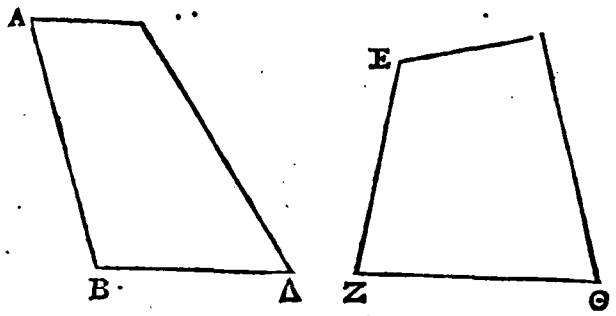
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Ἐὰν δύο εἴδη χωρία εἴδει δεδομένα ᾖ, καὶ μία πλευρὰ ἑνὸς μιᾷ πλευρᾷ ἑτέρου λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἔξουσι δεδομένον.

Prop. LIII.

Si duæ figuræ specie datæ fuerint, & unum latus unius ad unum latus alterius habuerit rationem datam; & etiam reliqua latera ad reliqua latera rationem datam habebunt.

Ἔστω δύο εἴδει δεδομένα τὰ ΑΔ, ΕΘ, καὶ λόγος ἔστω τοῦ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ δοθείς· λέγω ὅτι τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δοθείς.



Sint duæ figuræ specie datæ AΔ, EΘ, sitque ratio ipsius BΔ ad ZΘ data: dico reliquorum etiam laterum ad reliqua rationem datam esse.

Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ δοθείς, τῆς δὲ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΖΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΖΘ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. λέγω τε αὖτε δὴ καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δοθείς.

Quoniam enim [ex hyp.] ratio rectæ BΔ ad ZΘ data est; ipsiusque ΔB ad BA [per 3. def. dat.] ratio est data: erit quoque [per 8. dat.] ratio AB ad ZΘ data. rectæ autem ZΘ ad EZ [per 3. def. dat.] ratio est data: quare [per 8. dat.] ipsius AB ad EZ ratio erit data. similiter & reliquorum laterum ad reliqua latera ratio data erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

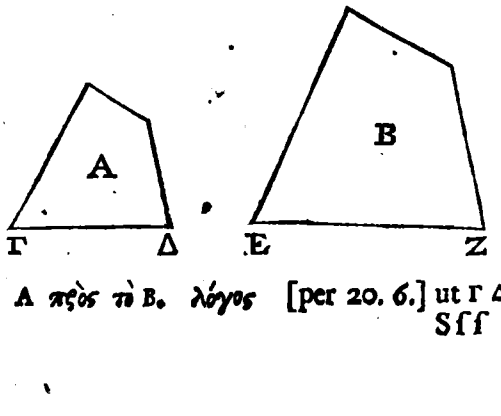
Ἐὰν δύο εἴδη δεδομένα πρὸς εἴδει πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔξουσι δεδομένον.

Prop. LIV.

Si duæ figuræ specie datæ ad invicem habuerint rationem datam; etiam eorum latera inter se habebunt rationem datam.

Δύο γὰρ εἴδη δεδομένα τῷ εἴδει τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔξουσι δεδομένον.

Τὸ γὰρ Α τῷ Β ἤτοι ὅμοιόν ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ὅμοιον, καὶ εἰλήφθω τῶν ΓΔ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ Η· ἔστω ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Η οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β. λόγος

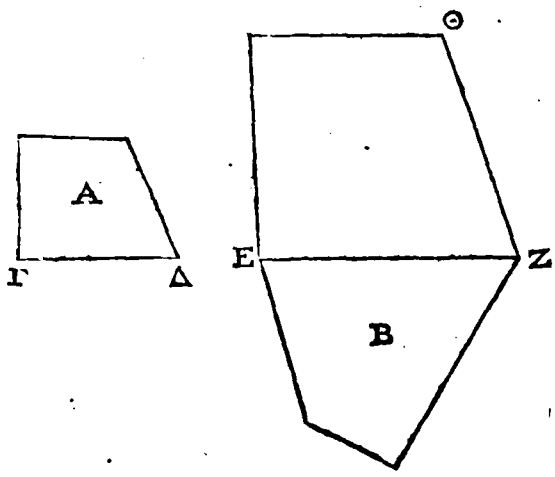


DUÆ enim figuræ specie datæ A, B habeant ad invicem rationem datam: dico eorum etiam latera ad invicem rationem datam habere.

Figura enim A ipsi B aut similis est, aut non. esto primum similis, & sumatur [per 11.6.] rectis ΓΔ, EZ tertia proportionalis H. ideoque [per 20. 6.] ut ΓΔ ad H ita est A ad B. est autem

tem [ex hyp.] ratio ipſius A ad B data: ergo & ratio ipſius Γ Δ ad H data eſt. ſunt autem [per conſtr.] Γ Δ, E Z, H continue proportionales, ipſius igitur Γ Δ ad E Z [per 24.dat.] data eſt ratio. ſimilis vero eſt [ex hyp.] figura A ipſi B: quare [per 53. dat.] reliqua latera ad reliqua latera habebunt rationem datam.

δὲ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Γ Δ πρὸς τὴν Η δοθείς. καὶ εἰσὶν αἱ Γ Δ, Ε Ζ, Η ἀνάλογον· καὶ τοῦ Γ Δ ἄρα πρὸς τὴν Ε Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἔστω ὅμοιον τὸ Α τῷ Β· καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἕξουσι δεδομένον.



Verum figura A non ſit ſimilis figuræ B, & [per 18. 6.] deſcribatur ab E Z ipſi A ſimilis & ſimiliter poſita E Θ: itaque figura E Θ ſpecie data eſt. eſt autem [ex hyp.] figura B ſpecie data: ergo [per 49. dat.] ratio ipſius B ad E Θ data eſt: ideoque [per 8. dat.] ratio ipſius A ad E Θ data eſt. at vero [per conſtr.] ſimilis eſt figura A ipſi E Θ: ratio igitur rectæ Γ Δ ad E Z [per 20. 6. & 24.dat.] data eſt. ſimiliter & ratio reliquorum laterum ad reliqua latera data eſt.

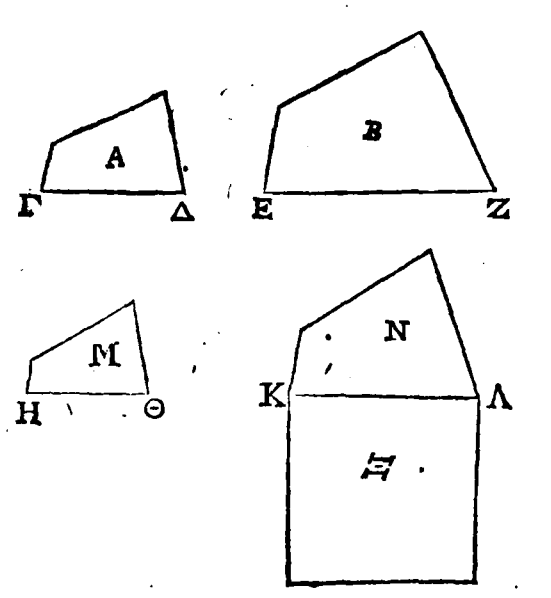
Μὴ ἔστω δὴ ὅμοιον τὸ Α τῷ Β, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς Ε Ζ τῷ Α ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ Ε Θ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Ε Θ τῷ εἴδει. δέδοται δὲ καὶ τὸ Β· λόγος ἄρα τοῦ Β πρὸς τὸ Ε Θ δοθείς· καὶ τοῦ Α ἄρα πρὸς τὸ Ε Θ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Ε Θ· λόγος ἄρα τοῦ Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ δοθείς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δοθείς.

ALITER.

Exponatur data recta H Θ. aut ergo figura A figuræ B ſimilis eſt, aut non. ſit primum ſimilis. & [per 12. 6.] fiat ut Γ Δ ad E Z ita H Θ ad K Λ, dein [per 18.6.] deſcribantur ab H Θ, K Λ ipſis A, B ſimiles ſimiliterque poſitæ figuræ M, N: utraque igitur figura M, N ſpecie data eſt. & quoniam eſt ut Γ Δ ad E Z ita H Θ ad K Λ, & deſcripta ſunt à lineis Γ Δ, E Z, H Θ, K Λ ſimilia ſimiliterque poſita rectilinea A, B, M, N: erit igitur [per 22.6.] ut A ad B ita M ad N. eſt autem ratio ipſius A ad B [ex hyp.] data: igitur & ratio ipſius M ad N data eſt. M autem [per 52.dat.] data eſt; ſiquidem à data magnitudine recta data ſpecie figura deſcripta eſt: ergo & [per 2. dat.] figura N data eſt. deſcribatur autem [per 46. 6.] à recta K Λ quadratum Ξ: figura igitur Ξ ſpecie data eſt: ergo ratio ipſius N ad Ξ data eſt. data autem eſt N: quare & Ξ data eſt; ergo data eſt K Λ. eſt autem H Θ data: ergo [per 1. dat.] ratio ipſius H Θ ad K Λ data eſt. ſed [per conſtr.] ut H Θ ad K Λ ita eſt Γ Δ ad E Z: ratio igitur ipſius Γ Δ ad E Z data eſt. ſimilis vero [ex hyp.] eſt figura A figuræ B: itaque [per 53.

ΑΛΛΩΣ.

Ἐκκείσθω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ Η Θ. τὸ δὲ Α τῷ Β, ἤτοι ὅμοιόν ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ὅμοιον. καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ οὕτως ἡ Η Θ πρὸς τὴν Κ Λ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῶν Η Θ, Κ Λ τοῖς Α, Β ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ Μ, Ν· δέδοται ἄρα τὸ ἑκάτερον τῶν Μ, Ν τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ οὕτως ἡ Η Θ πρὸς τὴν Κ Λ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῶν Γ Δ, Ε Ζ, Η Θ, Κ Λ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ Α, Β, Μ, Ν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. λόγος δὲ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Μ πρὸς τὸ Ν δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ Μ, ἀπὸ γὰρ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει ἀναγέγραπται δεδομένον εἶδος· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ν. ἀναγεγράφθω δὲ ἀπὸ τῆς Κ Λ πεντάγωνον τὸ Ξ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Ξ τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τοῦ Ν πρὸς τὸ Ξ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ Ν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ξ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ Κ Λ. ἔστι δὲ καὶ ἡ Η Θ δοθεῖσα· λόγος ἄρα καὶ τῆς Η Θ πρὸς τὴν Κ Λ δοθείς. καὶ ἔστιν ὡς ἡ Η Θ πρὸς τὴν Κ Λ οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ· λόγος ἄρα καὶ τῆς Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ δοθείς. καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Β· καὶ αἱ



λοιπαὶ

λοιπαὶ πλευραὶ ἄρα πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἔξουσι δεδομένον. μὴ ἔστω δὴ ὅμοιον· ἀκολούθως δὴ τῇ προτέρᾳ ἀποδείξει τὸ λοιπὸν δειχθήσεται.

dat.] reliqua latera ad reliqua latera habebunt datam rationem. deinde vero non ſit ſimilis; eodem ergo modo, quo in ſuperiori demonſtratione, reliqua pars propoſitionis oſtendetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

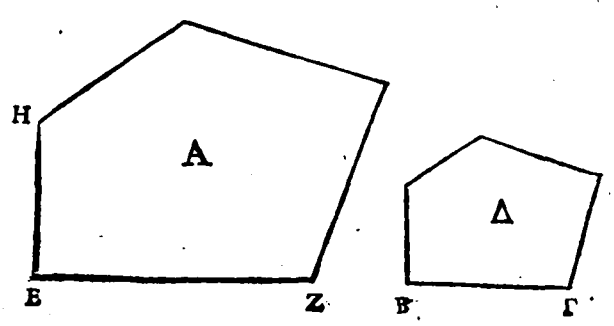
Ἐὰν χωρίον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον ᾖ, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τῷ μεγέθει δεδομέναι ἔσονται.

PROP. LV.

Si ſpatium magnitudine & ſpecie datum fuerit, etiam latera ejus magnitudine data erunt.

Ἔστω χωρίον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον τὸ Α· λέγω ὅτι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεδομέναι εἰσί.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΒΓ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΒΓ τῷ Α ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ Δ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένης τῷ μεγέθει εὐθείας τῆς ΒΓ δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος ἀναγέγραπται τὸ Δ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ μεγέθει. δέδοται δὲ καὶ τὸ Α· λόγος ἄρα τοῦ Α πρὸς τὸ Δ δοθείς. καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Δ· λόγος ἄρα τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΒΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΖ. καὶ ἔστι λόγος τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ δοθείς· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΗ. ὁμοίως τὸ αὐτὸ δὴ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν δέδοται τῷ μεγέθει.



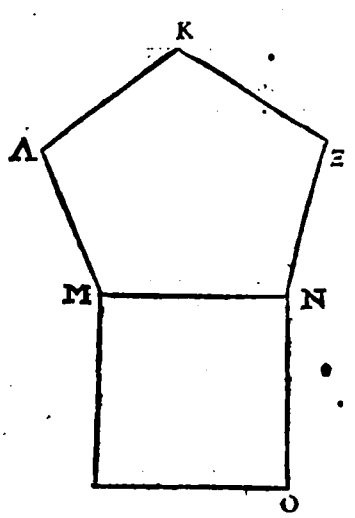
Sit ſpatium A ſpecie & magnitudine datum: dico latera illius magnitudine data eſſe.

Exponatur enim poſitione & magnitudine data recta BΓ, & deſcribatur à recta BΓ ipſi A ſimile & ſimiliter poſitum ſpatium Δ: itaque ſpatium Δ ſpecie datum eſt. quoniam vero à data recta BΓ data ſpecie figura Δ deſcripta eſt: igitur [per 52. dat.] magnitudine data eſt Δ. eſt autem [ex hyp.] & figura A data: itaque [per 1. dat.] ratio ipſius A ad Δ data eſt. ſimilis autem [per conſtr.] figura A figuræ Δ: eſt ergo [per 54. dat.] rectæ EZ ad BΓ ratio data eſt. data autem eſt BΓ: quare etiam EZ data eſt. verum [per 3. def. dat.] ipſius EZ ad EH ratio data eſt: ergo recta EH data eſt. ſimiliter vero unumquodque reliquorum laterum magnitudine datum eſt.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω χωρίον τὸ ΚΛΜΝΞ δεδομένον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΜΝ τετράγωνον τὸ ΜΟ· δέδοται ἄρα τῷ εἴδει. ἀλλὰ καὶ τὸ ΛΝ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΛΝ πρὸς τὸ ΜΟ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΛΝ τῷ μεγέθει· δοθὲν ἄρα τὸ ΜΟ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστι τετράγωνον τὸ ΜΟ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΝ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῷ μεγέθει. ὁμοίως τὸ αὐτὸ δὴ καὶ ἐπὶ τῶν ΜΛ, ΛΚ, ΚΞ, ΞΝ δοθεῖσά ἐστι τῷ μεγέθει.



ALITER.

Sit ſpatium ΚΛΜΝΞ ſpecie & magnitudine datum: dico latera ejus magnitudine quoque data eſſe.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] à recta MN quadratum MO: itaque illud ſpecie datum eſt. ſed [ex hyp.] & ſpatium ΛN ſpecie datum eſt: ergo [per 49. dat.] ratio ſpatii ΛN ad MO data eſt. datum autem eſt [ex hyp.] ΛN magnitudine: igitur [per 2. dat.] datum eſt MO magnitudine. eſt autem MO quadratum à recta MN: itaque quadratum à recta MN datum eſt: quare data eſt recta MN magnitudine. ſimiliter quoque unaquæque linearum MΛ, ΛK, KΞ, ΞN magnitudine data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ'.

Ἐὰν δύο ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον ἔστιν ὡς ἡ

PROP. LVI.

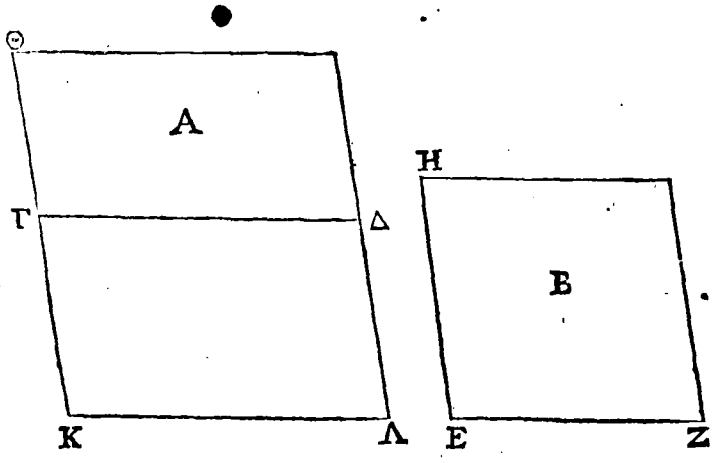
Si duo æquiangula parallelogramma habuerint ad invicem rationem datam; eſt

ut primi latus ad latus ſecundi ita reliquum ſecundi latus ad rectam lineam ad quam alterum primi latus habet ratiõnem datam, quam nempe habet parallelogrammum ad parallelogrammum.

πρώτου πλευρὰ πρὸς τὴν δευτέρου πλευρὰν ὥστε ἡ λοιπὴ τοῦ δευτέρου πλευρὰ πρὸς ἣν ἡ ἑτέρα τοῦ πρώτου πλευρὰ λόγον ἔχει δεδομένον, ὃν τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει πρὸς παραλληλόγραμμον.

DUO enim æquiangula parallelogramma A, B habeant ad invicem rationem datam: dico ut Γ Δ ad E Z ita eſſe E H ad eam ad quam Γ Θ habet rationem datam, quam nempe parallelogrammum A habet ad parallelogrammum B.

Producatur enim Γ K in directum ipſi Γ Θ, & fiat [per 12. 6.] ut Γ Δ ad E Z ita E H ad Γ K, compleaturque parallelogrammum Γ Λ. quoniam ergo eſt ut Γ Δ ad E Z ita eſt E H ad Γ K, eſtque [per 34. 1.] recta Γ Δ æqualis ipſi K Λ: igitur ut K Λ ad E Z ita E H ad Γ K. adeoque circa æquales angulos Γ K Λ, H E Z latera reciproce proportionalia ſunt: quare [per 14. 6.] æquale eſt K Δ ipſi H Z. quoniam vero ratio A ad B data eſt; æquale autem eſt B ipſi Γ Λ: ipſius igitur Θ Δ ad Γ Λ ratio data eſt. ut autem Θ Δ ad Γ Λ ita [per 1. 6.] Θ Γ ad Γ K: ergo & ratio Θ Γ ad Γ K data eſt. quoniam vero [per conſtr.] ut Γ Δ ad E Z ita eſt E H ad Γ K; habetque recta Θ Γ ad Γ K rationem datam, eam nempe quam habet ſpatium A ad B: eſt igitur ut Γ Δ ad E Z ita E H ad eam ad quam Θ Γ habet rationem datam, eam nempe quam ſpatium habet A ad ſpatium B, hoc eſt rationem ipſius Θ Γ ad Γ K.



Δύο γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ A, B πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ E H πρὸς ἣν ἡ Γ Θ λόγον ἔχει δεδομένον, ὃν τὸ A παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ B παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ Γ Θ ἡ Γ K, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ E H πρὸς τὴν Γ K, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ παραλληλόγραμμον Γ Λ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ E H πρὸς τὴν Γ K, ἴση δέ ἐστιν ἡ Γ Δ τῇ K Λ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ K Λ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ E H πρὸς τὴν Γ K. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ Γ K Λ, H E Z αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ K Δ τῷ H Z. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ A πρὸς τὸ B δοθείς, ἴσον δὲ τὸ B τῷ Γ Λ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ Θ Δ πρὸς τὸ Γ Δ δοθείς. ὡς δὲ τὸ Θ Δ πρὸς τὸ Γ Δ οὕτως ἡ Θ Γ πρὸς τὴν Γ K· καὶ τοῦ Θ Γ ἄρα πρὸς τὴν Γ K λόγος ἐστὶ δοθείς. καί ἐστιν ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ E H πρὸς τὴν Γ K. ἡ δὲ Θ Γ πρὸς τὴν Γ K λόγον ἔχει δοθέντα, ὃν τὸ A χωρίον πρὸς τὸ B· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ E H πρὸς ἣν ἡ Θ Γ λόγον ἔχει, ὃν τὸ A χωρίον πρὸς τὸ B, τουτέστι τὸ Θ Γ πρὸς τὴν Γ K.

PROP. LVII.

Si datum ſpatium ad datam rectam applicatum fuerit in angulo dato; datur quoque latitudo applicationis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Ἐὰν δοθὲν χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβληθῇ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, δέδοται τὸ πλάτος τῆς παραβολῆς.

DAtum enim ſpatium A H ad datam rectam A B applicetur in angulo Γ A B dato: dico datam eſſe rectam Γ A.

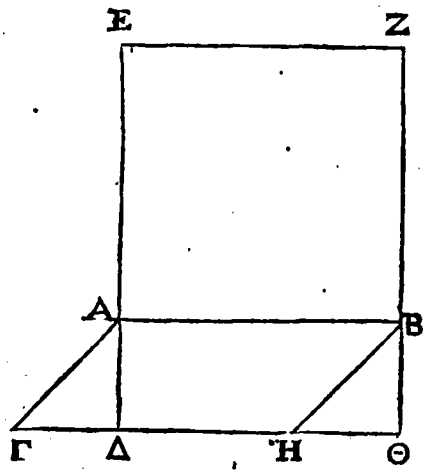
Deſcribatur ab A B quadratum E B: itaque quadratum E B datum eſt. dein producantur lineæ E A, Z B, Γ H ad puncta Δ, Θ. & quoniam datum eſt utrumque ſpatiorum E B, A H: ratio igitur ipſius E B ad A H data eſt. æquale autem eſt [per 35. 1.] A Θ ipſi A H: igitur ratio ipſius E B ad A Θ data eſt: unde & [per 1. 6.] ratio E A ad A Δ data eſt. æqualis autem

Δοθὲν γὰρ τὸ A H παρὰ δοθεῖσαν τὴν A B παραβεβλήσθω ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ Γ A B· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἡ Γ A.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς A B τετράγωνον τὸ E B· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ E B. καὶ διήχθωσαν αἱ E A, Z B, Γ H ἐπὶ τὰ Δ, Θ. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν E B, A H· λόγος ἄρα τοῦ E B πρὸς τὸ A H δοθείς. τῷ δὲ A H ἴσον ἐστὶ τὸ A Θ· καὶ τοῦ E B ἄρα πρὸς τὸ A Θ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς E A πρὸς τὴν A Δ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἴση δὲ ἡ

E A

ΕΑ τῇ ΑΒ· λόγος ἐστὶ ἄρα καὶ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνία, ὡς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ δοθεῖσά ἐστι· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΔ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΑ δοθεῖσα, ἀφὴ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς. τῆς δὲ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΑΒ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΑΓ.



est EA ipsi AB: igitur ratio ipsius BA ad AΔ data est. & quoniam datus est angulus ΓAB, & datus etiam est angulus ΔAB: reliquus igitur ΓAΔ [per 4. dat.] datus est. angulus autem ΓΔA datus est; quia rectus: quare [per 32.1. & 4. dat.] reliquus AΓΔ datus est: ergo [per 40. dat.] triangulum AΔΓ specie datum est; igitur [per 3. def. dat.] ipsius AΓ ad AΔ data est ratio. data autem est ratio ipsius AΔ ad AB: igitur [per 8. dat.] ratio ipsius ΓA ad AB data est. & [ex hyp.] data est AB; igitur [per 2. dat.] data est AΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νη'.

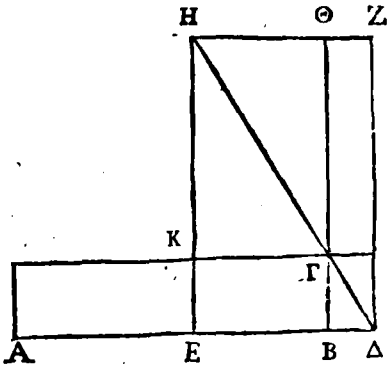
Ἐὰν δοθὲν χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβληθῇ, ἔλλειπον εἴδει δεδομένῳ τῷ εἴδει δίδοται τὰ πλάτη τῆς ἐλλείμματος.

PROP. LVIII.

Si spatium datum ad datam rectam applicetur, deficiens data specie figura; latitudines defectus etiam datæ sunt.

Δοθὲν γὰρ τὸ ΓΑ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΑΔ παραβεβλήσθω, ἔλλειπον εἴδει δεδομένῳ τῷ ΔΓ· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΒΔ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῷ μεγέθει. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΔ τῷ ΓΔ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΕΖ, καὶ παραγεγράφθω τὸ σχῆμα· δέδοται ἄρα τὸ ΕΖ τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῆς ΕΔ δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος ἀναγέγραπται τὸ ΕΖ· δέδοται ἄρα τὸ ΕΖ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ΑΓ, ΚΘ· δέδοται ἄρα καὶ τὰ ΑΓ, ΚΘ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστι τὸ ΑΓ δοθὲν τῷ μεγέθει, ἴσάκις γάρ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΘ δοθὲν ἐστὶ τῷ μεγέθει. ἔστι δὲ καὶ τῷ εἴδει δοθέν, ὅμοιον γάρ ἐστι τῷ ΓΔ· τῶν ΘΚ ἄρα δεδομένων εἰσὶν αἱ πλευραί· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΓ. καί ἐστιν ἴση τῇ ΕΒ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΔ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΒ δοθεῖσα. καὶ λόγος τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ.



Datum enim spatium ΓA ad datam rectam AΔ applicetur, deficiens data specie figura ΔΓ: dico datam esse utramque rectarum ΒΓ, ΒΔ.

Secetur enim [per 10.1.] AΔ bifariam in puncto E: igitur [per 2. dat.] data est EΔ magnitudine. dein describatur [per 18. 6.] ab ipsa EΔ ipsi ΓΔ simile similiterque positum rectilineum EZ, & constituatur figura: igitur specie datum est EZ. & quoniam, à data recta EΔ, figura specie data descripta est EZ; figura EZ [per 52. dat.] data est magnitudine. est autem [per 36. & 43. 1.] æqualis ipsis AΓ, KΘ: quare figuræ AΓ, KΘ datæ sunt magnitudine. data vero est figura AΓ magnitudine; supponitur enim: ergo [per 4. dat.] reliqua figura KΘ data est magnitudine. sed & eadem specie data est; similis enim est [per constr.] figuræ ΓΔ: quare [per 55. dat.] ipsius ΘK latera data sunt: adeoque KΓ data est. est autem [per 34.1.] æqualis ipsi EB: ergo EB data est. data vero est & EΔ: quare [per 4. dat.] & reliqua ΔB data est. sed ratio ipsius BΔ ad BΓ [per 3. def. dat.] data est: ergo [per 2. dat.] BΓ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

Ἐὰν δοθὲν χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβληθῇ, ὑπερβάλλον εἴδει δεδομένῳ εἴδει δίδοται τὰ πλάτη τῆς ὑπερβολῆς.

PROP. LIX.

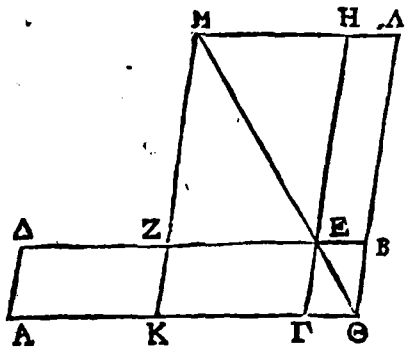
Si spatium datum ad datam rectam applicetur, excedens data specie figura; latitudines excessus etiam datæ sunt.

Δοθὲν γὰρ τὸ ΑΒ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΑΓ παραβεβλήσθω, ὑπερβάλλον εἴδει δεδομένῳ εἴδει

Datum enim spatium AB ad datam rectam AΓ applicetur, excedens data specie figura ΓB:

Γ Β: dico datam esse utramque rectarum Θ Γ, Γ Ε.

Secetur enim Δ Ε bifariam in puncto Z, & [per 18.6.] describatur ab Ε Ζ ipsi Γ Β simile & similiter positum rectilineum Ζ Η, atque construatur figura. quoniam itaque Γ Β simile est ipsi Ζ Η; circa eandem igitur diametrum est Ζ Η [per 26. 6.] cum ipso Γ Β. est autem Γ Β specie datum: ergo Ζ Η etiam specie datum est. sed & à data recta Ζ Ε descriptum est: quare [per 52. dat.] Ζ Η magnitudine datum est. datum autem [ex hyp.] est Α Β: ideoque Α Β, Ζ Η magnitudine data sunt. ipsis autem Α Β, Ζ Η [per 36. & 43. 1.] æquale est Κ Λ: ergo [per 3. dat.] Κ Λ magnitudine datum est. sed & specie datum est; simile enim est [per constr.] ipsi Γ Β: itaque [per 55. dat.] ipsius Κ Λ latera data sunt: ideoque latus Κ Θ datum est. latus autem Κ Γ datum est; æquale enim est [per 34. 1.] ipsi Ζ Ε: reliqua igitur recta Γ Θ data est; atque etiam [per 3. def. dat.] rationem datam habet ad Θ Β: igitur [per 2. dat.] data est Θ Β.



τῷ Γ Β· λέγω ὅτι δοθεῖσαί εἰσιν ἑκατέρα τῶν Θ Γ, Γ Ε.

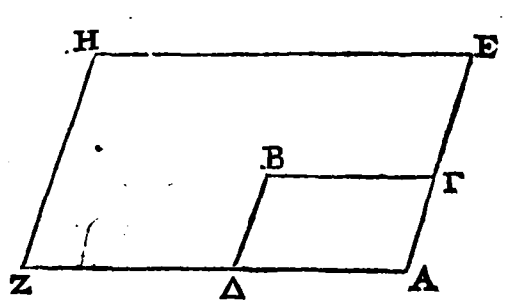
Τετμήσθω γὰρ δίχα ἡ Δ Ε κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς Ε Ζ τῷ Γ Β ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ Ζ Η, καὶ παραγεγράφθω τὸ αὐτὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Γ Β τῷ Ζ Η, ὡσὶ δὲ αὐτῆς παραμέτρος ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ Η τῷ Γ Β. δέδοται δὲ τὸ Γ Β τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Ζ Η τῷ εἴδει. καὶ ἀναγεγραπται ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῆς Ζ Ε· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ Η τῷ μεγέθει. ἔστι δὲ καὶ τὸ Α Β δοθέν· δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ Α Β, Ζ Η τῷ μεγέθει. τοῖς δὲ Α Β, Ζ Η ἴσον ἐστὶ τὸ Κ Λ· δέδοται ἄρα τὸ Κ Δ τῷ μεγέθει. ἔστι δὲ καὶ τῷ εἴδει, ὅμοιον γὰρ ἐστὶ τῷ Γ Β· τὸ Κ Λ ἄρα αἱ πλάγιαι δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ Κ Θ. καὶ ἡ Κ Γ δοθεῖσά ἐστιν, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ Ζ Ε· λοιπὴ ἄρα ἡ Γ Θ δοθεῖσά ἐστι, καὶ λόγον ἔχει πρὸς τὸ Θ Β δοθέντα· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Θ Β.

Prop. LX.

Si datum specie & magnitudine parallelogrammum dato gnomone augeatur, aut minuatur; latitudines gnomonis datæ sunt.

Parallelogrammum enim Α Β specie & magnitudine datum augeatur primum dato gnomone Ε Γ Β Δ Ζ Η: dico utramque rectarum Γ Ε, Δ Ζ datam esse.

Quoniam enim datum est Α Β, est & gnomon Ε Γ Β Δ Ζ Η datus; igitur spatium totum Α Η datum est. sed & specie datum est Α Η; est enim [per 26. 6.] simile ipsi Α Β: igitur [per 55. dat.] ipsius Α Η latera data sunt: quare utraque rectarum Α Ε, Α Ζ data est. utraque autem rectarum Γ Α, Α Δ data est: reliqua igitur, nempe utraque rectarum Ε Γ, Δ Ζ, [per 4. dat.] data est.



Rursus vero parallelogrammum Α Η, specie & magnitudine datum, minuatur dato gnomone Ε Γ Β Δ Ζ Η: dico datam esse utramque rectarum Γ Ε, Δ Ζ.

Quoniam enim datum est Α Η, cujus gnomon Ε Γ Β Δ Ζ Η datus est: igitur [per 4. dat.] reliquum Α Β magnitudine datum est. sed & specie datum est; etenim [per 26. 6.] simile est ipsi Η Α; latera igitur ipsius Α Β [per 55. dat.] data sunt: adeoque utraque rectarum Γ Α, Α Δ data est. utraque autem rectarum Ε Α, Α Ζ [ex

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον δεδομένον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένῳ γνώμονι αὐξηθῇ ἢ μειωθῇ, δίδονται καὶ αἱ πλάτη τοῦ γνώμονος.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ Α Β δεδομένον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει αὐξήσθω πρότερον δεδομένῳ γνώμονι τῷ Ε Γ Β Δ Ζ Η· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν Γ Ε, Δ Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθὲν Α Β, ἔστι δὲ καὶ ὁ Ε Γ Β Δ Ζ Η γνώμων δοθείς· καὶ ὅλον ἄρα τὸ Α Η δοθέν ἐστι. ἀλλὰ καὶ τῷ εἴδει, ὅμοιον γὰρ ἐστὶ τῷ Α Β· τοῦ Α Η ἄρα δεδομέναι εἰσὶν αἱ πλάγιαι· δοθεῖσαι ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν Α Ε, Α Ζ. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν Γ Α, Α Δ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν Ε Γ, Ζ Δ δοθεῖσά ἐστιν.

ΠΑΛΙΝ δὴ ὑπαραλληλόγραμμον τὸ Α Η δεδομένον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει μεμειώσθω δεδομένῳ γνώμονι τῷ Ε Γ Β Δ Ζ Η· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν Γ Ε, Δ Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθὲν ἐστὶ τὸ Α Η, οὗ ὁ Ε Γ Β Δ Ζ Η γνώμων δοθείς ἐστι· λοιπὸν ἄρα τὸ Α Β δοθέν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τῷ εἴδει, ὅμοιον γὰρ ἐστὶ τῷ Η Α· τοῦ Α Β ἄρα παραλληλόγραμμα εἰσὶν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν Γ Α, Α Δ. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν Ε Α,

Α Ζ

ΑΖ δοθῆναι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΔΖ δοθεῖσά ἐστιν.

hyp.] data est: reliqua igitur, nempe utraque rectarum ΕΓ, ΔΖ, [per 4. dat.] data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξα'.

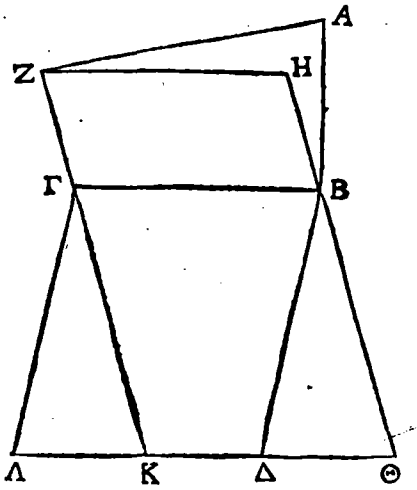
Ἐὰν δεδομένῳ τῷ εἴδει εἴδους παρά μίαν τῶν πλευρῶν παραλληλόγραμμον χωρίον παραβληθῇ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἔχῃ δὲ τὸ εἶδος πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον λόγον δεδομένον· δέδοται τὸ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει.

PROP. LXI.

Si ad datæ ſpecie figuræ unum latus applicetur ſpatium parallelogrammum in angulo dato, habeat autem data figura ad parallelogrammum rationem datam; parallelogrammum ipſum ſpecie datum eſt.

Δεδομένῳ γὰρ τῷ εἴδει εἴδους τοῦ ΑΖΓΒ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΒ παραλληλόγραμμον χωρίον παραβεβλήσθω τὸ ΓΔ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΓΒ, λόγος δὲ ἔστω τοῦ ΑΓ εἴδους πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΓΔ τῷ εἴδει.

Ηχθω γὰρ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΖΓ παράλληλος ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΓΒ παράλληλος ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Κ, Θ σημεῖα. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΒ γωνία καὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΒ δοθείς· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει. δέδοται δὲ τῷ εἴδει τὸ ΑΖΓΒ εἶδος, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΓΒ παραλληλόγραμμον δεδομένον τῷ εἴδει τὸ ΖΒ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΓΖΒ εἴδους πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον δοθείς. τοῦ δὲ ΑΓΖΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἐπειδὴ ὑπόκειται, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῷ ΚΒ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΚΒ πρὸς τὸ ΓΗ δοθείς, ὥστε καὶ τοῦ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΒ γωνία· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΛ γωνία δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΓΚ ἐστὶ δοθεῖσα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΛΚΓ γωνία δοθεῖσα, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΚΓΒ· λοιπὴ ἄρα ΓΛΚ ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΛΚΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΚ δοθείς. τῆς δὲ ΓΚ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΛΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΛΓΒ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει.



AD unum enim latus ΓΒ datæ ſpecie figuræ ΑΖΓΒ applicetur parallelogrammum ſpatium ΓΔ in angulo dato ΑΓΒ, ſitque ratio figuræ ΑΓ ad parallelogrammum ΓΔ data: dico ipſum ΓΔ ſpecie datum eſſe.

Agatur enim [per 31. 1.] per punctum Β ipſi ΖΓ parallela ΒΗ, per punctum autem Ζ ipſi ΓΒ parallela ΖΗ, & producantur ΖΓ, ΗΒ ad puncta Κ, Θ. quoniam itaque [per 3. def. dat.] datus eſt angulus ΖΓΒ, & ratio ipſius ΖΓ ad ΓΒ data eſt; parallelogrammum ΖΒ ſpecie datum eſt. eſt autem figura ΑΖΓΒ ſpecie data, atque deſcriptum eſt ab eadem recta ΓΒ datum ſpecie parallelogrammum ΖΒ: quare [per 49. dat.] ratio figuræ ΑΓΖΒ ad parallelogrammum ΖΒ data eſt. data autem eſt ratio ipſius ΑΓΖΒ ad ΓΔ, quoniam ita ſupponitur; eſt etiam [per 35. 1.] ΓΔ æquale ipſi ΚΒ: quare [per 8. dat.] & ratio ipſius ΚΒ ad ΓΗ data eſt; adeoque [per 1. 6.] & ratio rectæ ΖΓ ad ΓΚ data eſt. ipſius autem ΖΓ ad ΓΒ [per 3. def. dat.] data eſt ratio; ergo [per 8. dat.] & ratio ipſius ΒΓ ad ΓΚ data eſt. quoniam vero datus eſt angulus ΖΓΒ, etiam [per 13. 1. & 4. dat.] & qui deinceps eſt angulus ΒΓΚ datus eſt. angulus autem ΒΓΛ [ex hyp.] datus eſt: reliquus igitur ΛΓΚ [per 4. dat.] datus eſt. angulus item ΛΚΓ datus eſt; æqualis enim eſt [per 29. 1.] angulo ΚΓΒ: ergo reliquus angulus ΓΛΚ [per 32. 1. & 4. dat.] datus eſt: triangulum igitur ΛΚΓ [per 40. dat.] ſpecie datum eſt: quare [per 3. def. dat.] ratio ipſius ΛΓ ad ΓΚ data eſt. ipſius autem ΓΚ ad ΒΓ data eſt ratio: igitur [per 1. dat.] & ratio ipſius ΛΓ ad ΓΒ data eſt. & datus eſt [ex hyp.] angulus ΛΓΒ: itaque [per 3. def. dat.] parallelogrammum ΓΔ ſpecie datum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξβ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ ἀναγραφῇ ἀπὸ μιᾶς δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος, ἀπὸ δὲ τῆς ἑτέρας χωρίον παραλληλόγραμμον ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἔχῃ δὲ

PROP. LXII.

Si duæ rectæ ad invicem habeant rationem datam, & ab una quidem data ſpecie figura deſcripta ſit, ab altera autem ſpatium parallelogrammum in angulo dato, habeat etiam

figura

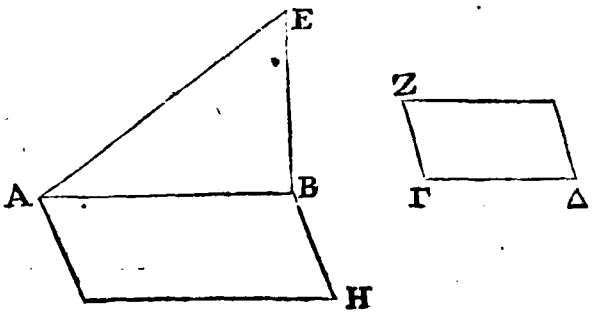
gura ad parallelogrammum rationem datam; parallelogrammum ipſum ſpecie datum eſt.

τὸ εἶδος πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον λόγον δεδομένον· δέδοται τὸ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει.

DUÆ enim rectæ AB, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, & deſcribatur à recta quidem AB data ſpecie figura AEB, à recta autem ΓΔ parallelogrammum ΔZ in angulo ZΓΔ dato, ſit etiam ratio ipſius AEB ad parallelogrammum ZΔ data: dico parallelogrammum ΔZ ſpecie datum eſſe.

ΔΥΟ γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ μὲν τῆς AB δεδομένῳ τῷ εἴδει εἴδος τὸ AEB, ἀπὸ δὲ τῆς ΓΔ παραλληλόγραμμον τὸ ΔZ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ZΓΔ, λόγος δὲ ἔστω ὃν ἔχει τὸ AEB εἶδος πρὸς τὸ ZΔ παραλληλόγραμμον δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΔZ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει.

Deſcribatur enim [per 18.6.] à recta AB ipſi ZΔ ſimile ſimiliterque poſitum parallelogrammum AH. quoniam igitur ratio ipſius AB ad ΓΔ data eſt, atque deſcripta ſunt à rectis AB, ΓΔ ſimilia ſimiliterque poſita, rectilinea AH, ZΔ; ratio ipſius AH ad ZΔ [per 50. dat.] data eſt. ratio autem ipſius ZΔ ad AEB [ex hyp.] data eſt: quare [per 8 dat.] & ratio ipſius AEB ad AH data eſt. ſed & datus eſt angulus ABH; ſiquidem æqualis eſt [per conſtr.] angulo ZΓΔ: quoniam igitur figura AEB ſpecie data eſt, & ad unum ejus latus AB applicatum eſt parallelogrammum AH in angulo dato ABH; & ratio figuræ AEB ad parallelogrammum AH [per 49.dat.] data eſt; ipſum igitur AH [per 61.dat.] ſpecie datum eſt. ſimile autem eſt [per conſtr.] ipſi ZΔ: quare & parallelogrammum ZΔ [per 3. def. dat.] ſpecie datum eſt.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τῷ ZΔ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ AH. καὶ ἐπεὶ λόγος ὃν ἔχει ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς ἐστι, καὶ ἀναγεγραπται ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ AH, ZΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ AH πρὸς τὸ ZΔ δοθείς. ὃν δὲ ZΔ πρὸς τὸ AEB λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ AEB ἄρα πρὸς τὸ AH λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ABH γωνία, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ὑπὸ ZΓΔ· ἐπεὶ οὖν δεδομένῳ τῷ εἴδει εἶδός τι τὸ AEB παραβέβληται μίαν τῶν πλευρῶν τὴν AB παραβεβλημένον τὸ AH ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ABH, καὶ λόγος ἐστὶ τοῦ AEB εἴδους πρὸς τὸ AH παραλληλόγραμμον δοθείς· δέδοται ἄρα τὸ AH τῷ εἴδει. καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ ZΔ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ZΔ τῷ εἴδει.

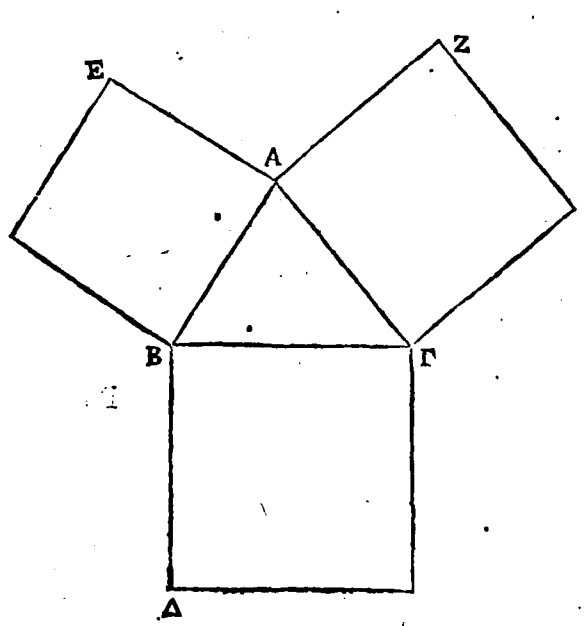
PROP. LXIII.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξγ'.

Si triangulum ſit ſpecie datum; quod ab unoquoque laterum deſcribitur quadratum ad triangulum habebit rationem datam.

Ἐὰν τρίγωνον τῷ εἴδει δεδομένον ᾖ, τὸ ἀπὸ ἑκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τετράγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

SIT triangulum ABΓ ſpecie datum, & deſcribantur ab unoquoque laterum ipſius quadrata EB, ΓΔ, ΓZ: dico unumquodque quadratorum EB, ΓΔ, ΓZ ad triangulum ABΓ rationem datam habere.



Ἔστω τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει τὸ ABΓ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ ἑκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τετράγωνα τὰ EB, ΓΔ, ΓZ· λέγω ὅτι ἕκαστον τῶν EB, ΓΔ, ΓZ πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Quoniam enim ab eadem recta BΓ rectilinea quædam ſpecie data deſcripta ſunt ABΓ, ΓΔ; igitur [per 49.dat.] ratio ipſius ABΓ

Ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς BΓ εὐθύγραμμα δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγέγραπται ἃ ἔτυχεν, τά ABΓ, ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ABΓ πρὸς

πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΒ, ΖΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔξει δοθείς.

ad ΓΔ data est. similiter quoque utriusque quadratorum ΕΒ, ΖΓ ad triangulum ΑΒΓ ratio data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξδ'.

Ἐὰν τρίγωνον ἀμβλεῖαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην· ᾧ μεῖζον δύναται ἡ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

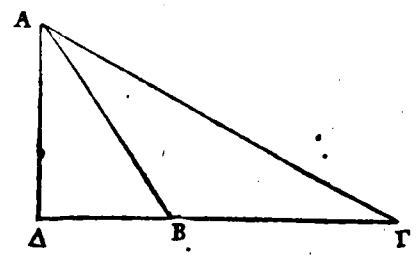
PROP. LXIV.

Si triangulum angulum obtusum datum habeat; illud spatium, quo latus angulum obtusum subtendens magis potest quam latera obtusum angulum ambientia, ad triangulum habebit rationem datam.

Ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον τὸ ΑΒΓ, ἀμβλεῖαν ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΒΓ δεδομένην, καὶ διήχθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΒΓ εὐθεῖα ἡ ΒΔ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

SIT triangulum obtusangulum ΑΒΓ, quod angulum obtusum ΑΒΓ datum habeat; & producatur in directum ipsi ΒΓ recta ΒΔ, & à puncto Α ad rectam ΔΓ perpendicularis agatur ΑΔ: dico quod spatium, quo quadratum rectæ ΑΓ excedit quadrata rectarum ΑΒ, ΒΓ, hoc est rectangulum quod bis continetur sub ΔΒ, ΒΓ, ad triangulum ΑΒΓ habebit rationem datam.

Ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΒ δοθεῖσά ἐστι· δεδόσθω ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγον ἄρα τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ δοθήσεται. ἔστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ· λόγον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ δοθείς· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ δοθείς. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἐκεῖνο ἄρα τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.



Quoniam enim angulus ΑΒΓ datus est, etiam & ΑΒΔ [per 13.1. & 4.dat.] datus erit. verum & est angulus ΑΔΒ datus; igitur [per 32. 1. & 4. dat.] & reliquus ΔΑΒ datus erit: quare [per 40. dat.] & triangulum ΑΒΔ specie datum est: ratio igitur ipsius ΑΔ ad ΔΒ [per 3. def.dat.] data est. estque [per 1. 6.] ut ΑΔ ad ΔΒ ita quod continetur sub ΑΔ, ΒΓ ad id quod sub ΔΒ, ΒΓ continetur: ergo ratio ejus quod continetur sub ΑΔ, ΒΓ ad id quod sub ΔΒ, ΒΓ continetur data est: quare ratio ejus quod bis continetur sub ΔΒ, ΒΓ ad id quod continetur sub ΑΔ, ΒΓ data est. sed [per 41. 1.] id quod continetur sub ΑΔ, ΒΓ ad triangulum ΑΒΓ habet rationem datam: itaque [per 8. dat.] ratio ejus quod bis continetur sub ΔΒ, ΒΓ ad triangulum ΑΒΓ data est. quod vero bis continetur sub ΔΒ, ΒΓ [per 12. 2.] est spatium quo quadratum rectæ ΑΓ excedit quadrata rectarum ΑΒ, ΒΓ: igitur spatium istud ad triangulum ΑΒΓ rationem habet datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξε'.

Ἐὰν τρίγωνον ὀξεῖαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην· ᾧ ἔλασσον δύναται ἡ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, ἐκεῖνο χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

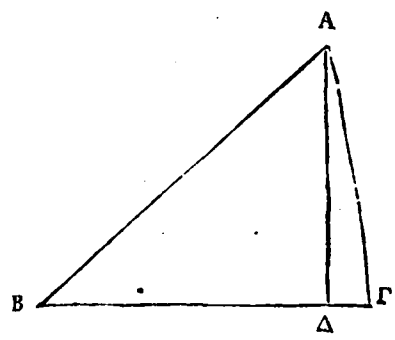
PROP. LXV.

Si triangulum angulum acutum datum habeat; illud spatium, quo latus angulum acutum subtendens minus potest quam latera angulum acutum ambientia, habebit ad triangulum rationem datam.

Ἔστω τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀξεῖαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ΑΔ· λέγω ὅτι ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

SIT triangulum acutangulum ΑΒΓ, quod datum angulum acutum habeat ΑΒΓ; & agatur à puncto Α ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ: dico quod spatium, quo minus est quadratum rectæ ΑΓ quam quadrata linearum ΑΒ, ΒΓ, hoc est id quod bis continetur sub ΓΒ, ΒΔ, habet ad triangulum ΑΒΓ rationem datam.

Quoniam enim angulus ABΔ [ex hyp.] datus eſt, eſtque etiam angulus AΔB datus; reliquus igitur BAΔ [per 32.1.& 4.dat.] datus eſt: itaq; [per 40. dat.] triangulum ABΔ ſpecie datum eſt: quare [per 3. def. dat.] ratio ipſius BΔ ad ΔA data eſt: ideoque [per 1.6.] & ejus quod continetur ſub ΓB, BΔ ad id quod continetur ſub ΓB, AΔ data eſt ratio: ergo & ejus quod bis continetur ſub ΓB, BΔ ad id quod ſub ΓB, AΔ data eſt ratio. ſed [per 41.1.] ejus quod continetur ſub BΓ, AΔ ad triangulum ABΓ data ratio eſt: quare [per 8. dat.] & ejus quod bis continetur ſub ΓB, BΔ ad triangulum ABΓ ratio eſt data. verum [per 13. 2.] quod bis continetur ſub ΓB, BΔ eſt id quo quadratum rectæ AΓ minus eſt quam quadrata rectarum AB, BΓ: igitur illud ſpatium, quo minus eſt quadratum rectæ AΓ quam quadrata rectarum AB, BΓ, ad triangulum ABΓ habebit rationem datam.



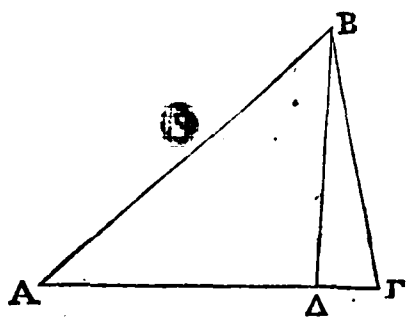
Επεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ABΔ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AΔB δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BAΔ ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ABΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγον ἄρα τῆς BΔ πρὸς τὴν ΔA δοθείς· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓB, BΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓB, AΔ λόγον ἐστὶ δοθείς· ἀλλὰ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓB, BΔ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓB, AΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BΓ, AΔ πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓB, BΔ ἄρα πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓB, BΔ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AΓ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ· ᾧ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AΓ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Prop. LXVI.

Si triangulum habuerit angulum datum; quod ſub rectis datum angulum comprehendentibus continetur rectangulum habebit ad triangulum rationem datam.

SIT triangulum ABΓ, quod datum angulum habeat ad A: dico rectangulum ſub BA, AΓ comprehenſum habere ad triangulum ABΓ rationem datam.

Agatur enim [per 12. 1.] à puncto B ad rectam AΓ perpendicularis BΔ. quoniam itaque angulus BAΔ datus eſt, atque etiam angulus BΔA datus eſt; reliquus quoque ABΔ [per 32. 1. & 4. dat.] datus eſt: ergo [per 40. dat.] triangulum ABΔ ſpecie datur; quare ipſius AB ad BΔ data eſt ratio. ut autem AB ad BΔ ita [per 1. 6.] rectangulum ſub BA, AΓ ad rectangulum ſub BΔ, AΓ: igitur rectanguli ſub BA, AΓ ad rectangulum ſub BΔ, AΓ ratio eſt data. atqui rectanguli ſub BΔ, AΓ ad triangulum ABΓ data eſt ratio: igitur [per 8.dat.] ratio rectanguli ſub BA, AΓ ad triangulum ABΓ data eſt.



Prop. LXVII.

Si triangulum habuerit angulum datum; illud ſpatium, quo duo datum angulum comprehendentia latera, tanquam una recta, plus poſſunt quam quadratum à reliquo latere, ad triangulum habebit rationem datam.

SIT triangulum ABΓ, quod angulum BAΓ datum habeat: dico quod illud ſpatium, quo

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξς'.

Ἐὰν τρίγωνον δεδομένην ἔχῃ γωνίαν· τὸ ὑπὸ τὰ τὴν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ABΓ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τῷ A· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν BA, AΓ πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B ἐπὶ τὴν AΓ κάθετος ἡ BΔ. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ BΔA δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ABΔ γωνία δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ABΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ AB πρὸς τὴν BΔ δοθείς. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA, AΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, AΓ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν BA, AΓ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, AΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν BΔ, AΓ πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν BA, AΓ ἄρα πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξζ'.

Ἐὰν τρίγωνον δεδομένην ἔχῃ γωνίαν· ᾧ μεῖζον δύναται αἱ τὴν δεδομένην γωνίαν περιέχουσαι πλευραί, ὡς μία, ἀπὸ τοῦ λοιποῦ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ABΓ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ BAΓ· λέγω ὅτι ᾧ μεῖζόν ἐστι

τὸ

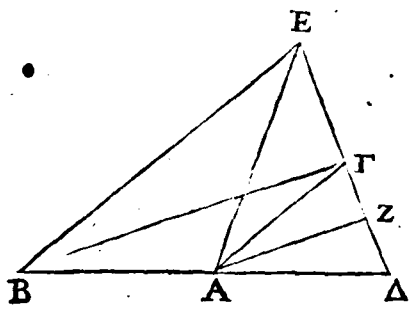
τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Διήχθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ ΒΑ εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ. καὶ δῆκται ἡ ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὥστε τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ μεῖζον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ. λέγω δὴ ὅτι τοῦ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ δοθεῖσα. ἔστι δὲ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΔΓ, ΔΓΑ δοθεῖσα, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἡμίσειά ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ δεδομένης ἄρα δέδοται ἄρα τὸ ΔΑΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸν ΔΓ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλ' ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ ἕτως ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΔ ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. λόγος δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ δοθείς. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΒΑΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· τὸ ἄρα

tum rectæ ΒΓ: igitur quo majus eſt quadratum ab utraque ſimul ΒΑΓ quam quadratum rectæ ΒΓ, illud ſpatium ad triangulum ΑΒΓ rationem datam habebit.

ALITER.

Conſtruantur eadem quæ prius, & [per 12.1.] agatur à puncto Α ad ΓΔ perpendicularis ΑΖ, atque connectatur ΑΕ. & quoniam datus eſt angulus ΒΑΓ, cujus [per 5. & 32.1.] dimidius eſt angulus ΑΓΖ; atque etiam datus eſt angulus ΑΖΓ: triangulum igitur ΑΖΓ [per 40. dat.] ſpecie datum eſt: itaque [per 3. def. dat.] ipſius ΑΖ ad ΖΓ ratio eſt data. ipſius autem ΖΓ ad ΓΔ ratio eſt data, quia hæc illius eſt dupla: ergo [per 8.dat.] ipſius ΔΓ ad ΑΖ data eſt ratio: ideoque [per 1.6.] ejus quod



continetur ſub ΕΓ, ΓΔ ad id quod continetur ſub ΑΖ, ΓΕ data eſt ratio. verum ejus quod continetur ſub ΑΖ, ΓΕ ad triangulum ΑΓΕ ratio eſt data; etenim [per 41. 1.] trianguli duplum eſt: itaque [per 8. dat.] ejus quod continetur ſub ΕΓ, ΓΔ ad triangulum ΑΓΒ data eſt ratio. eſt autem [per 37. 1.] triangulum ΑΓΕ triangulo ΑΒΓ æquale; in eadem enim baſi ΑΓ conſiſtit utrumque & in iiſdem parallelis ΑΓ, ΒΕ: quare [per 8. dat.] & ejus quod continetur ſub ΕΓ, ΓΔ ad triangulum ΑΒΓ data eſt ratio. eſt autem [per not. ad præc. demonſtrationem] id quod continetur ſub ΕΓ, ΓΔ illud ſpatium, quo quadratum utriuſq; ſimul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ: ergo quo quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ, illud ſpatium ad triangulum ΑΒΓ rationem habet datam.

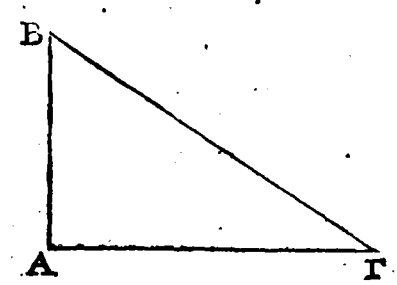
ΑΛΛΩΣ.

Καταγεγράφθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΓΔ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΑΓΖ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΓ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΓ δοθείς. τῆς δὲ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς, διπλασίων γάρ ἐστιν αὐτῆς· καὶ τῆς ΔΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΓΕ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διπλάσιον γάρ ἐστιν αὐτοῦ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΓΕ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. ἴσον δὲ τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ἐπί τε γὰρ τοῦ αὐτῆς βάσεως τοῦ ΑΓ εἰσὶ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις τοῖς ΑΓ, ΒΕ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

ALITER.

Aut enim angulus ad Α rectus eſt, aut acutus, aut obtuſus.

Eſto primum rectus: ergo quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ [per 47.1. & 4.2.] excedit quadratum rectæ ΒΓ eo quod bis continetur ſub ΒΑ ΑΓ. eſt autem [per 66. dat.] ratio rectanguli ſub ΒΑ, ΑΓ ad triangulum ΑΒΓ data, propter datum angulum ΒΑΓ: quare etiam ratio ejus quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΓ ad triangulum ΑΒΓ data eſt.



Dein ſit angulus ΒΑΓ acutus, & à puncto Γ in rectam ΑΒ agatur perpendicularis ΓΔ. quoniam vero triangulum ΑΒΓ acutangulum eſt, & perpendicularis acta eſt ΓΔ; rectarum igitur ΑΒ, ΑΓ quadrata æqualia ſunt [per 13.2.] & quadrato rectæ ΒΓ & rectangulo quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΔ. addatur commune, ſc. duplum rectangulum ſub ΒΑ, ΑΓ: ergo quadrata rectarum ΒΑ, ΑΓ cum eo quod bis continetur ſub rectis ΒΑ,

ΑΛΛΩΣ.

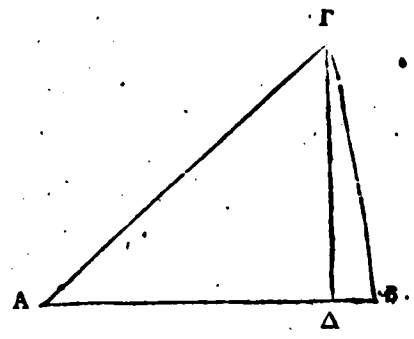
Ητοι γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία ὀρθή ἐστιν, ἢ ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα.

Ἐστω πρότερον ὀρθή· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. ἔστι δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος δοθείς, διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ΒΑΓ γωνίαν· τοῦ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἐστω δὴ ὀξεῖα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὀξυγώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΓΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ,

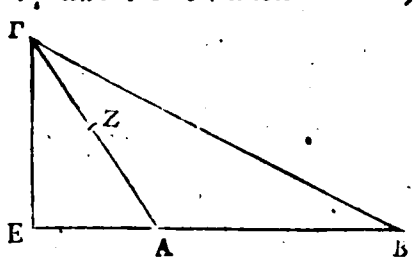
ΑΓ,

ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ, καὶ ἔτι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τουτέστι τῷ δὶς ὑπὸ τῆς ΓΑΔ καὶ τῆς ΒΑ· ὥστε τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑΔ καὶ τῆς ΒΑ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἐστὶ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς ΑΓΔ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου ἄρα τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δὶς ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διὰ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· καὶ τοῦ δὶς ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.



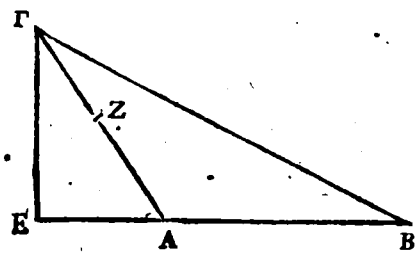
ΑΓ, hoc eſt [per 4.2.] quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ, æqualia ſunt quadrato rectæ ΒΓ & ei quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΔ, & inſuper ei quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΓ; hoc eſt [per 2.2.] ei quod bis continetur ſub utraque ſimul ΓΑΔ & recta ΒΑ: ideoque quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ eo quod bis ſub utraque ſimul ΓΑΔ & recta ΒΑ continetur. quoniam vero [ex hyp.] datus eſt angulus ΒΑΓ, atque etiam angulus ΑΔΓ datus eſt: reliquus igitur angulus ΑΓΔ [per 32.1. & 4. dat.] eſt datus: quare [per 40. dat.] triangulum ΑΔΓ ſpecie datum eſt: ergo ratio ipſius ΑΔ ad ΑΓ data eſt: adeoque [per 6.dat.] ratio utriuſque ſimul ΔΑΓ ad ΑΓ data eſt: igitur [per 1.6] rectanguli ſub utraque ſimul ΔΑΓ & ΑΒ ad rectangulum ſub ΒΑ, ΑΓ data eſt ratio: & ideo ratio ejus quod bis continetur ſub ΔΑΓ & ΑΒ ad id quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ etiam datur. ratio autem ejus quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ ad triangulum ΑΒΓ [per 66.dat.] data eſt, propter datum angulum ΒΑΓ: igitur [per 8.dat.] ratio ejus quod bis continetur ſub utraque ſimul ΔΑΓ & recta ΑΒ ad triangulum ΑΒΓ data eſt.

Αλλὰ δὴ ἔστω ἀμβλεῖα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἐκβεβλήθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ε, ἤχθω ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΕ ἴση ἡ ΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΓΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, τουτέστι μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ· τὸ ἄρα συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΓΖ· ὥστε τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ὑπερέχειν τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΓΖ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ ἄρα δοθεῖσά ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΑ δοθεῖσά ἐστι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΑΕ δοθείς, τουτέστι καὶ πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε καὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν Γ.Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΕΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε τοῦ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν



Sit denique angulus ΒΑΓ obtuſus; atque producta recta ΒΑ ad punctum Ε, in illam ex Γ agatur perpendicularis ΓΕ, ponaturque ipſi ΑΕ æqualis ΑΖ. quoniam igitur angulus ΒΑΓ eſt obtuſus; & perpendicularis acta eſt ΓΕ: quadrata igitur rectarum ΒΑ, ΑΓ cum eo quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΕ, hoc eſt quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΖ, æqualia ſunt [per 13.2.] quadrato rectæ ΒΓ. addatur commune rectangulum, quod ſc. bis continetur ſub ΒΑ, ΑΓ: ergo quadrata rectarum ΒΑ, ΑΓ cum eo quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΓ, hoc eſt [per 4.2.] quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ cum eo quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΖ, æqualia ſunt quadrato rectæ ΒΓ & ei quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΓ. auferatur commune rectangulum quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΖ: ergo quod ab utraque ſimul ΒΑΓ quadratum æquale eſt quadrato rectæ ΒΓ & [per 3.2.] ei quod bis continetur ſub ΒΑ, ΓΖ: ideoque quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ eo quod bis continetur ſub ΒΑ, ΓΖ. quoniam vero angulus ΒΑΓ datus eſt, angulus etiam ΕΑΓ [per 13.1. & 4.dat.] datus eſt. ſed & angulus ΓΕΑ datus eſt; ergo [per 32.1. & 4. dat.] reliquus quoque angulus ΑΓΕ datus eſt: triangulum igitur ΑΓΕ [per 40.dat.] ſpecie datum eſt: quare [per 3.def.dat.] & ipſius ΓΑ ad ΑΕ, id eſt ad ΑΖ, data eſt ratio: ideoque [per 5.dat.] ipſius ΑΓ ad ΓΖ data eſt ratio. ipſius autem ΑΓ ad ΓΕ data eſt ratio: igitur [per 8.dat.] ratio ipſius ΕΓ ad ΓΖ data eſt: quare [per 1.6.] ratio ejus quod continetur ſub ΕΓ, ΑΒ ad id quod continetur

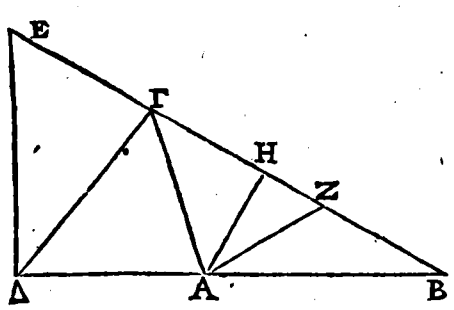
ſub Γ Z, A B data eſt. ejus autem quod continetur ſub A Γ, A B ad id quod continetur ſub E Γ, A B [per 1.6.] ratio eſt data: ideoque [per 8.dat.] ejus quod ſub A Γ, A B ad id quod ſub Γ Z, A B data eſt ratio. at vero ratio ejus quod continetur ſub A Γ, A B ad triangulum A B Γ [per 66. dat.] data eſt: illius igitur quod bis continetur ſub Γ Z, A B ad triangulum A B Γ ratio [per 8.dat.] data eſt. verum [ex ſupra oſtenſis] rectangulum quod bis continetur ſub Γ Z, A B illud eſt quo quadratum utriuſque ſimul B A Γ excedit quadratum rectæ B Γ: quo igitur quadratum utriuſque ſimul B A Γ excedit quadratum rectæ B Γ, illud ſpatium ad triangulum A B Γ rationem habet datam.



Γ Z, A B λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν A Γ, A B πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν E Γ, A B λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A Γ, A B πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ Z, A B λόγον ἐστὶ δοθείς. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν A Γ, A B πρὸς τὸ A B Γ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Γ Z, A B πρὸς τὸ A B Γ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Γ Z, A B ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς B A Γ τοῦ ἀπὸ τῆς B Γ· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς B A Γ τοῦ ἀπὸ τῆς B Γ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ A B Γ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

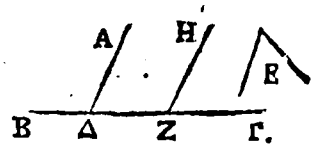
ALITER.

Producatur recta B A ad punctum Δ, & ponatur ipſi Γ A æqualis A Δ, connectaturque Γ Δ. quoniam itaque [ex hyp.] datus eſt angulus B A Γ, & ejus dimidius eſt [per 5. & 32.1.] uterque angulorum A Δ Γ, A Γ Δ; uterque angulorum A Δ Γ, A Γ Δ datus eſt: ergo [per 32. 1. & 4. dat.] & reliquus Δ A Γ datus eſt: quare [per 40. dat.] triangulum A Γ Δ ſpecie datum eſt: ideoque [per 3. def. dat.] ipſius A Γ ad Γ Δ data eſt ratio. quoniam vero angulus A Δ Γ datus eſt, deducatur * ipſi A Δ Γ æqualis uterque angulorum Δ E Γ, A Z Γ. quoniam vero angulus B Δ Γ angulo Δ E Γ æqualis eſt; angulus autem Δ B E & triangulo Δ B E & triangulo Δ B Γ communis eſt: reliquus igitur B Δ E reliquo B Γ Δ [per 32. 1.] æqualis eſt: ideoque triangulum B Δ E triangulo Δ B Γ æquiangulum eſt: quare [per 4. 6.] ut E B ad B Δ ita eſt B Δ ad Γ B: igitur [per 17.6.] quod continetur ſub E B, Γ B, hoc eſt [per 3.2.] rectangulum ſub E Γ, Γ B una cum quadrato rectæ B Γ, æquale eſt quadrato rectæ Δ B; hoc eſt quadrato utriuſque ſimul B A Γ, etenim [per conſtr.] æqualis eſt Δ A ipſi Γ A: igitur rectangulum ſub E Γ, Γ B una cum quadrato rectæ B Γ, hoc eſt quadratum utriuſque ſimul B A Γ, excedit quadratum rectæ B Γ rectangulo quod continetur ſub B Γ, Γ E. dico igitur quod data eſt ratio rectanguli ſub B Γ, Γ E ad triangulum A B Γ. quoniam enim angulus B Δ E angulo B Γ Δ æqualis eſt, ut & angulus A Δ Γ angulo A Γ Δ æqualis: igitur reliquus Γ Δ E reliquo A Γ B æqualis eſt. eſt autem [per conſtr.] & angulus Δ E Γ angulo A Z Γ æqualis: reliquus igitur Γ A Z reliquo Δ Γ E [per 32.1.] æqualis eſt: adeoque triangulum A Γ Z tri-



ΑΛΛΩΣ.

Διήχθω ἡ B A πρὸς τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ Γ A ἴση ἡ A Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ Δ. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ B A Γ γωνία, καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἑκατέρα τῶν ὑπὸ A Δ Γ, A Γ Δ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ A Δ Γ, A Γ Δ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τὰ Δ A Γ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ A Γ Δ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγον ἄρα τῆς A Γ πρὸς τὴν Γ Δ δοθείς. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ A Δ Γ, κατήχθω τῇ A Δ Γ ἴση ἑκατέρα τῶν ὑπὸ Δ E Γ, A Z Γ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ B Δ Γ τῇ ὑπὸ Δ E Γ, κοινὴ δὲ ἡ ὑπὸ Δ B E τῇ Δ B E τρίγωνε ἴσον καὶ τὴν Δ B Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ B Δ E λοιπῇ τῇ ὑπὸ B Γ Δ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ B Δ E τρίγωνον τῷ Δ B Γ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E B πρὸς τὴν B Δ οὕτως ἡ B Δ πρὸς τὴν Γ B· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν E B, Γ B, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν E Γ, Γ B μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς B Γ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Δ B, τουτέστι τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς B A Γ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ Δ A τῇ Γ A· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν E Γ, Γ B μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς B Γ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς συναμφοτέρου τῆς B A Γ, τοῦ ἀπὸ τῆς B Γ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν B Γ, Γ E. λέγω δὴ ὅτι λόγος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν B Γ, Γ E πρὸς τὸ A B Γ τρίγωνον δοθείς. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ B Δ E γωνία τῇ ὑπὸ B Γ Δ, ὡς ἡ ὑπὸ A Δ Γ τῇ ὑπὸ A Γ Δ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ Γ Δ E λοιπῇ τῇ ὑπὸ A Γ B ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ Δ E Γ τῇ ὑπὸ A Z Γ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ Γ A Z λοιπῇ τῇ ὑπὸ Δ Γ E ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ A Γ Z



* Per datum punctum A ad datam rectam B Γ deducatur recta A Δ quæ faciat angulum A Δ Γ æqualem dato angulo E, hoc modo. In B Γ ſumatur punctum utcunque Z, & ad datam rectam B Γ, datumque in ea punctum Z, ducatur [per 23.1.] recta Z H quæ faciat angulum Γ Z H æqualem ipſi E; & per A ipſi Z H [per 31.1.] ducatur parallela A Δ: erit hæc ea quæ quæritur. Nam angulus A Δ Γ [per 29. 1.] æqualis eſt ipſi H Z Γ, qui [per conſtr.] æqualis eſt ipſi E.

τρίγωνον

τρίγωνον τῷ ΔΕΓ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΓΕ. λόγος δὲ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΖ πρὸς τὴν ΓΕ δοθείς. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ κάθετος ἡ ΑΗ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΖΓ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΖ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΑΖ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΗΖ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΖ πρὸς τὴν ΑΗ δοθείς. τῆς δὲ ΖΑ πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΗ ἄρα πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

angulo ΔΕΓ æquiangulum est: quare [per 4. 6.] est ut ΓΑ ad ΑΖ ita ΔΓ ad ΓΕ: ideoque permutando ut ΓΑ ad ΓΔ ita ΑΖ ad ΓΕ. est autem [ex supra ostensis] ratio ipsius ΑΓ ad ΓΔ data: quare & ipsius ΑΖ ad ΓΕ ratio est data. agatur à puncto Α ad rectam ΒΓ perpendicularis ΑΗ. & quoniam angulus ΑΖΓ datus est, atque angulus ΑΗΖ datus: reliquus igitur ΗΑΖ datus est: itaque [per 40.dat.] triangulum ΑΗΖ specie datum est: quare ratio ΑΖ ad ΑΗ data est. ipsius autem ΖΑ ad ΓΕ data est ratio: ergo [per 8.dat.] etiam ratio ipsius ΑΗ ad ΓΕ data est: ideoque [per 1. 6.] ratio ejus quod continetur sub ΑΗ, ΒΓ ad id quod continetur sub ΒΓ, ΓΕ data est. verum [per 41.1.] ejus quod continetur sub ΑΗ, ΒΓ ad triangulum ΑΒΓ data est: quare & ratio ejus quod continetur sub ΒΓ, ΓΕ ad triangulum ΑΒΓ data est. at vero [per supra ostensa] quod continetur sub ΒΓ, ΓΕ est illud spatium quo quadratum utriusque simul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ: igitur illud spatium, quo quadratum utriusque simul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ, ad triangulum ΑΒΓ habet rationem datam.

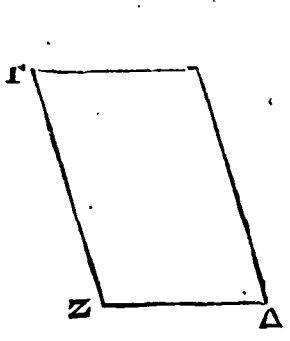
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξή'.

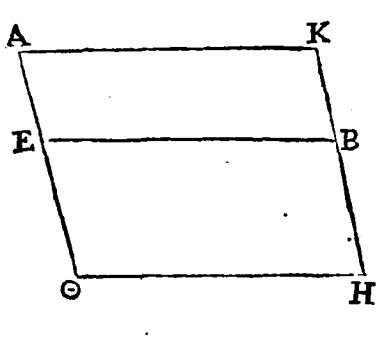
Ἐὰν δύο ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ λοιπὴ πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν πλευρὰν λόγον ἕξει δεδομένον.

PROP. LXVIII.

Si duo parallelogramma æquiangula habeant ad invicem rationem datam, atque unum latus ad unum latus habeat rationem datam; etiam reliquum latus ad reliquum latus rationem habebit datam.

Δύο γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, ἐχέτω δὲ καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον δεδομένον, καὶ ἔστω τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ λόγος δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΖΓ λόγος ἐστὶ δοθείς.





Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΕΒ τῷ ΓΔ ἴσον τὸ ΕΗ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΕ τῇ ΕΘ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΒ τῇ ΒΗ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῷ ΕΗ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΓΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΕΘ. λόγος δὲ τῆς ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ δοθείς· καὶ τῆς ΓΖ ἄρα πρὸς τὴν ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΕΘ πρὸς τὴν ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΕ ἄρα πρὸς τὴν ΓΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.

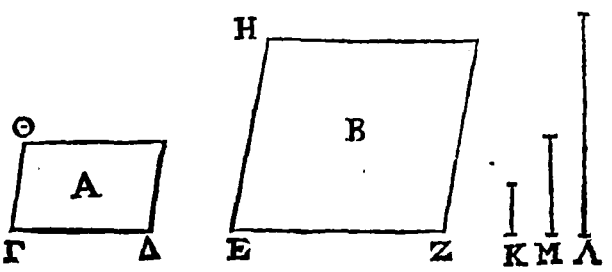
DUO enim æquiangula parallelogramma ΑΒ, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, habeat autem & unum latus ad unum latus rationem datam, sitq; ratio ΒΕ ad ΖΔ data: dico ipsius quoque ΑΕ ad ΖΓ rationem esse datam.

Applicetur enim ad rectam ΕΒ ipsi ΓΔ æquale parallelogrammum ΕΗ, atque ita constituatur, ut in directum jaceat ΑΕ ipsi ΕΘ: adeoque recta ΚΒ in directum erit ipsi ΒΗ. quoniam itaque [ex hyp.] data est ratio ipsius ΑΒ ad ΓΔ; ΓΔ vero [per constr.] æquale est ipsi ΕΗ: igitur ratio ipsius ΑΒ ad ΕΗ data est: adeoq; [per 1.6.] & ratio ipsius ΑΕ ad ΕΘ etiam est data. & quoniam parallelogrammum ΕΗ ipsi ΓΔ æquale est, erit [per 14.6.] ut ΕΒ ad ΖΔ ita ΓΖ ad ΕΘ. sed [ex hyp.] ratio ipsius ΕΒ ad ΖΔ data est: igitur & ratio ipsius ΓΖ ad ΕΘ data est. ipsius autem ΕΘ ad ΑΕ ratio est data: ergo [per 8. dat.] & ratio ipsius ΑΕ ad ΓΖ data est.

ALI-

ALITER.

Exponatur data recta K. & quoniam ratio ipſius A ad B data eſt, fiat huic eadem ratio ipſius K ad Λ. eſt autem ratio ipſius A ad B data; igitur ratio ipſius K ad Λ data eſt. data autem eſt K; ergo & [per 2. dat.] Λ data eſt. rurſus, quoniam ratio ipſius Γ Δ ad E Z data eſt, fiat huic eadem ratio ipſius K ad M: ergo ratio ipſius K ad M data eſt. data autem eſt K; ergo data quoque eſt M. eſt autem & Λ data: quare [per 1. dat.] ratio ipſius Λ ad M data eſt. & quoniam [ex hyp.] æquiangulum eſt A ipſi B; igitur [per 23.6.] A ad B habet rationem compoſitam ex laterum rationibus, hoc eſt, & ex ratione quam habet Γ Δ ad E Z & ex ea quam habet Θ Γ ad H E. ſed ipſa K ad Λ habet rationem compoſitam ex ratione quam habet K ad M & ratione quam habet M ad Λ: igitur ratio compoſita ex ratione quam habet Γ Δ ad E Z & ratione quam habet Θ Γ ad H E eadem eſt cum ratione compoſita ex ratione ipſius K ad M & ratione ipſius M ad Λ. ex quibus ratio ipſius Γ Δ ad E Z eadem eſt [per conſtr.] cum ratione ipſius K ad M: igitur reliqua ratio, nempe ipſius Θ Γ ad H E, eadem eſt cum ratione ipſius M ad Λ. ratio autem ipſius M ad Λ [ex ſupra oſtenſis] data eſt: igitur & ratio ipſius Θ Γ ad H E data eſt.



ΑΛΛΩΣ.

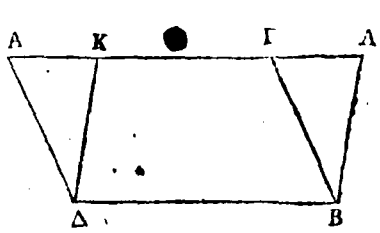
Ἐκκείσθω δεδομένη εὐθεῖα ἡ Κ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ Κ πρὸς τινὰ τὸ Λ. λόγος δὲ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Κ πρὸς τινὰ τὸ Λ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ Κ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Λ. πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ δοθείς τοῦ Γ Δ πρὸς τινὰ τὸ E Z, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ Κ πρὸς τινὰ τὸ Μ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Κ πρὸς τὴν Μ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ Κ· δοθεῖσα ἄρα ἡ Μ. ἔστι δὲ καὶ ἡ Λ δοθεῖσα· λόγος ἄρα τοῦ Λ πρὸς τινὰ τὸ Μ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ Α τῷ Β· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τουτέστιν ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ Γ Δ πρὸς τινὰ τὸ E Z καὶ ἡ Θ Γ πρὸς τινὰ τὸ H E. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ Κ πρὸς τινὰ τὸ Λ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τινὰ τὸ Μ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Μ πρὸς τινὰ τὸ Λ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ Γ Δ πρὸς τινὰ τὸ E Z καὶ ἡ Θ Γ πρὸς τινὰ τὸ H E ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τινὰ τὸ Μ καὶ ἡ Μ πρὸς τινὰ τὸ Λ. ὧν ὁ τοῦ Γ Δ πρὸς τὴν E Z λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ Κ πρὸς τὴν Μ λόγῳ· λοιπὸς ἄρα ὁ τοῦ Θ Γ πρὸς τινὰ τὸ H E λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ Μ πρὸς τινὰ τὸ Λ. τῆς δὲ Μ πρὸς τινὰ τὸ Λ λόγος ἐστὶ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Θ Γ πρὸς τινὰ τὸ H E δοθείς.

PROP. LXIX.

Si duo parallelogramma datos angulos habeant, & ad invicem rationem datam; habeat autem & unum latus ad unum latus rationem datam: & reliquum latus ad reliquum latus habebit rationem datam.

DUO enim parallelogramma A B, E H, habentia datos angulos ad puncta Δ, Z, ad invicem rationem datam habeant; ſitque etiam ratio ipſius Δ B ad Z H data: dico ipſius quoque A Δ ad E Z rationem datam eſſe.

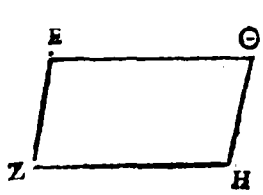
Si A B ipſi E H æquiangulum quidem ſit, res [per 68 dat.] manifeſta eſt. ſi vero non ſit illi æquiangulum; conſtituatur [per 23. 1.] ad rectam Δ B, & ad punctum in illa Δ, angulo E Z H æqualis angulus B Δ K, & [per 31.1.] compleatur parallelogrammum Δ Λ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξθ'.

Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα δεδομένας ἔχῃ γωνίας καὶ λόγον πρὸς ἄλληλα δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν πλευρὰν λόγον ἕξει δεδομένον.

ΔΥΟ γὰρ παραλληλόγραμμα τὰ A B, E H δεδομένας ἐχέτω γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Δ, Z, πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, λόγος δὲ ἔστω τοῦ Δ B πρὸς τὴν Z H δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῆς A Δ πρὸς τὴν E Z λόγος ἐστὶ δοθείς.



Εἰ μὲν οὖν ἰσογώνιόν ἐστι τὸ A B τῷ E H, φανερόν. εἰ δὲ οὔ· συνεστάτω πρὸς τῇ Δ B, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ E Z H γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ B Δ K, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ Δ Λ παραλληλόγραμμον.

C

καὶ ἐπεὶ δοθεῖσαί εἰσιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΑΚ, ΑΚΔ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΚ ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΚ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ δοθείς. ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς, ὑπόκειται γάρ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΔΓ τῷ ΔΛ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΔΛ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς. ἐπεὶδήπερ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΔΑ τῷ ΖΘ, καὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΔΛ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς, καὶ ἔστι τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΖΗ λόγος δοθείς, ὑπόκειται γάρ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τῆς ΔΚ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς. τῆς δὲ ΔΚ πρὸς τὴν ΑΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΔ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.

& quoniam [ex hyp.] uterque angulorum Δ AK, AK Δ datus eſt; reliquus igitur A Δ K [per 32. 1.& 4.dat.] datus eſt: quare [per 40.dat.] triangulum A Δ K ſpecie datum eſt: ideoque ratio ipſius A Δ ad Δ K data eſt. quoniam vero ratio ipſius Δ Γ ad Z Θ data eſt, ita enim ſupponitur; atque [per 35.1.] æquale eſt Δ Γ ipſi Δ Λ: ratio igitur ipſius Δ Λ ad Z Θ data eſt. cumque [per conſtr.] æquiangulum ſit Δ Λ ipſi Z Θ, & ratio ipſius Δ Λ ad Z Θ data ſit; necnon ratio ipſius Δ B ad Z H data, ita enim ſupponitur: ratio igitur ipſius Δ K ad E Z [per 68.dat.] data eſt. eſt autem [ex mox oſtenſis] ratio ipſius Δ K ad A Δ data: ergo [per 8.dat.] & ratio ipſius A Δ ad E Z data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ο'.

Ἐὰν δυοῖν παραλληλογράμμων περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δέ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ αὐτὰ τὰ παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

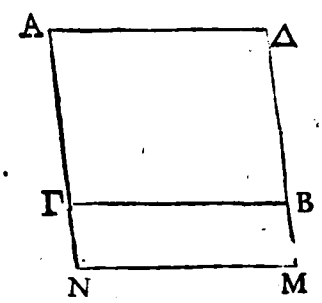
Prop. LXX.

Si duorum parallelogrammorum, circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem datos tamen, latera ad invicem habeant rationem datam; & ipſa quoque parallelogramma ad invicem rationem datam habebunt.

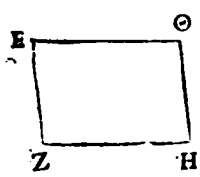
Δυοῖν γὰρ παραλληλογράμμων τῶν ΑΒ, ΕΗ, περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δέ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, τουτέστι λόγος ἔστω τοῦ μὲν ΑΓ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς, τοῦ δὲ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΘ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Duorum enim parallelogrammorum AB, EH, circa æquales angulos ad puncta Γ, Z, aut circa inæquales quidem datos tamen, latera habeant ad invicem rationem datam; nempe data ſit ratio ipſius A Γ ad E Z; ſit quoque ratio ipſius Γ B ad Z H data: dico quod ratio ipſius Γ Δ ad Z Θ data eſt.

Ἔστω γὰρ ἰσογώνιον τῷ ΖΘ τὸ ΓΔ. καὶ παραβεβλήθω παρὰ τὴν ΓΒ εὐθεῖαν παραλληλογράμμῳ ΖΘ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΝ· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΒΜ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΝ τῷ ΖΘ, ἐστὶ δὲ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΝ, ΖΘ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΓΝ. λόγος δὲ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ δοθείς· λόγος ἄρα τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΓΝ δοθείς. τῆς δὲ ΕΖ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΝ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΜ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἔστι δὲ τὸ ΓΜ τῷ ΖΘ ἴσον· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς.



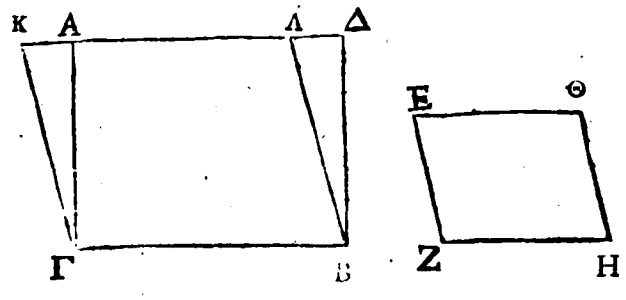
Sit enim primo Γ Δ ipſi Z Θ æquiangulum. & [per 45. 1.] applicetur ad rectam Γ B parallelogrammo Z Θ æquale parallelogrammum Γ M, atque ita conſtituatur ut A Γ in directum ſit ipſi Γ N: erit igitur & Δ B ipſi B M in directum. quoniam itaque B N ipſi Z Θ æquiangulum eſt & æquale: ipſorum igitur B N, Z Θ latera circum æquales angulos ſunt [per 14.6.] reciproce proportionalia; adeoque ut Γ B ad Z H ita eſt Z E ad Γ N. eſt autem [ex hyp.] ratio ipſius Γ B ad Z H data: ipſius igitur E Z ad Γ N data eſt ratio. verum ipſius E Z ad A Γ ratio [ex hyp.] eſt data: quare [per 8.dat.] ratio ipſius A Γ ad Γ N data eſt: adeoque [per 1.6.] & ratio ipſius Γ Δ ad Γ M data eſt. æquale autem eſt [per conſtr.] Γ M ipſi Z Θ: ergo ratio ipſius Γ Δ ad Z Θ data eſt.



Μὴ ἔστω δὴ ἰσογώνιον τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΓ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, τῇ ὑπὸ ΕΖΗ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΚ, καὶ συμπεπληρώσθω ΓΛ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γω-

NON ſit autem AB æquiangulum ipſi EH. & [per 23. 1.] conſtituatur ad rectam B Γ, & datum in ea punctum Γ, angulo E Z H æqualis angulus B Γ K, compleaturque parallelogrammum Γ Λ. quoniam vero angulus A Γ B [ex hyp.] da-

tus est; atque angulus ΚΓΒ [per constr.] datus: igitur [per 4.dat.] reliquus ΑΓΚ datus est. est autem & ΓΑΚ datus: unde [per 32. 1. & 4.dat.] reliquus ΑΚΓ datus est: triangulum igtur ΑΓΚ [per 40.dat.] specie datum est: adeoque ratio ipsius ΑΓ ad ΓΚ data est. ipsius autem ΑΓ ad ΕΖ [ex hyp.] data est ratio: quare [per 8. dat.] & ratio ipsius ΓΚ ad ΕΖ data est. ipsius autem ΓΒ ad ΖΗ ratio [ex hyp.] data est; atque [per constr.] æqualis est angulus ΚΓΒ angulo ΕΖΗ: igitur [per part. prior. hujus] ratio ipsius ΓΔ ad ΖΘ est data.

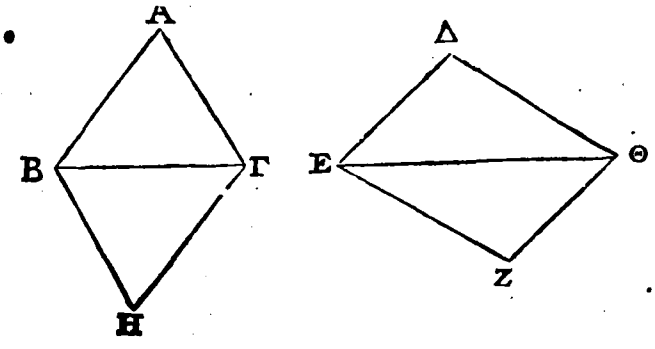


νία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΚΓΒ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΚ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΚ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΓ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΚ τρίγωνον τῷ εἴδει λόγῳ· ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ δοθείς. ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΚ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἔστι δὲ καὶ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ λόγος δοθείς, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΚΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· λόγῳ· ἄρα ἐστὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὴν ΖΘ δοθείς.

Prop. LXXI.

Si duorum triangulorum, circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem datos tamen, latera ad invicem habeant rationem datam; ipsa quoque triangula ad invicem rationem datam habebunt.

Duorum enim triangulorum ΑΒΓ, ΔΕΘ, circa æquales angulos ad puncta Α, Δ, aut circa inæquales quidem datos tamen, latera ad invicem habeant rationem datam, sitque ratio ipsius quidem ΒΑ ad ΕΔ, necnon ipsius ΑΓ ad ΔΘ data: dico rationem trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΘ datam esse.



Compleantur enim parallelogramma ΑΗ, ΔΖ. quoniam itaque duorum parallelogrammorum ΑΗ, ΔΖ, circa æquales angulos ad puncta Α, Δ, aut inæquales quidem sed tamen datos, latera ad invicem habent rationem datam: ratio ipsius ΑΗ ad ΔΖ [per 70.dat.] data est. sed [per 34.1.] ipsius quidem ΑΗ dimidium est triangulum ΑΒΓ; ipsius vero ΔΖ dimidium triangulum ΔΕΘ: ergo trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΘ ratio est data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οα'.

Ἐὰν δυοῖν τριγώνων, περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Δυοῖν γὰρ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΔΕΘ, περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Α, Δ, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἔστω λόγος τοῦ μὲν ΒΑ πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς, τοῦ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΘ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΘ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

Συμπεπληρώσθω γὰρ ΑΗ, ΔΖ παραλληλόγραμμα. ἐπεὶ οὖν δύο παραλληλογράμμων τῶν ΑΗ, ΔΖ περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Α, Δ σημείοις, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δεδομένον· λόγος ἄρα τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΖ δοθείς. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΗ ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ΔΖ τὸ ΔΕΘ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΘ τρίγωνον δοθείς.

Prop. LXXII.

Si duorum triangulorum bases fuerint in ratione data, atque etiam rectæ actæ ab angulis ad bases, quæ faciant angulos æquales, aut inæquales quidem sed tamen datos, habeant ad invicem

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οβ'.

Ἐὰν δυοῖν τριγώνων αἱ τε βάσεις ἐν δεδομένῳ λόγῳ ὦσι, καὶ αἱ ἐπ' αὐτὰς ἠγμέναι ἀπὸ τῶν γωνιῶν, ἥτοι ἴσας γωνίας ποιῶσαι, ἢ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, τὰς πρὸς ταῖς βάσεσιν λό-

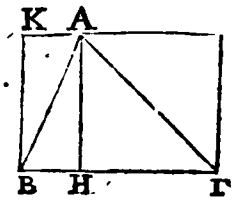
γον ἔχωσι πρὸς ἄλληλα δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔξει δεδομένον.

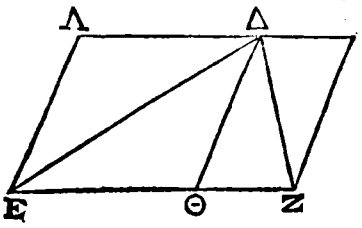
rationem datam: ipsa quoque triangula ad invicem rationem datam habebunt.

Ἐστωσαν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἃ ἴσχωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ ἤτοι ἴσας γωνίας ποιοῦσαι τὰς ὑπὸ ΑΗΓ, ΔΘΖ, ἢ ἀνίσους μὲν δεδομένας δέ, καὶ ἔστω λόγος τῆς μὲν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς, τῆς δὲ ΑΗ πρὸς τὴν ΔΘ λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

SInt duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, & agantur rectæ ΑΗ, ΔΘ, quæ angulos ΑΗΓ, ΔΘΖ ad baſes faciant, aut æquales, aut inæquales quidem ſed tamen datos; ſitque ratio ipſius ΒΓ ad ΕΖ data, atque etiam ipſius ΑΗ ad ΔΘ: dico etiam rationem trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ datam eſſe.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΚΓ, ΛΖ παραλληλόγραμμα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΓ, ΔΘΖ γωνίαι ἤτοι ἴσαι εἰσὶν, ἢ ἄνισοι μὲν, δεδομέναι δὲ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΓ τῇ ὑπὸ ΚΒΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΘΖ τῇ ὑπὸ ΛΕΖ· καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε ἄρα γωνίαι ἤτοι ἴσαι εἰσὶν, ἢ ἄνισοι μὲν, δεδομέναι δέ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΔΘ δοθείς, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΚΒ, ἡ δὲ ΔΘ τῇ ΛΕ· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΚΒ πρὸς τὴν ΛΕ δοθείς. ἔστι δὲ καὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος δοθείς. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε σημείοις γωνίαι ἤτοι εἰσὶν ἴσαι, ἢ ἄνισοι μὲν δεδομέναι δέ· καὶ τοῦ ΚΓ ἄρα παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ΛΖ παραλληλόγραμμον λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.





Compleantur enim parallelogramma ΚΓ, ΛΖ. & quoniam [ex hyp.] anguli ΑΗΓ, ΔΘΖ aut æquales ſunt, aut inæquales quidem ſed tamen dati, angulus autem ΑΗΓ [per 29. 1.] angulo ΚΒΓ eſt æqualis, necnon angulus ΔΘΖ angulo ΛΕΖ: anguli igitur ad puncta Β, Ε aut æquales ſunt, aut inæquales quidem ſed tamen dati. quoniam vero [ex hyp.] ratio ipſius ΑΗ ad ΔΘ data eſt, & eſt [per 34. 1.] ΑΗ quidem ipſi ΚΒ, atque ΔΘ ipſi ΛΕ æqualis: ratio igitur ipſius ΚΒ ad ΛΕ data eſt. eſt autem & ratio ipſius ΒΓ ad ΕΖ [ex hyp.] data. & quoniam anguli ad puncta Β, Ε aut æquales ſunt, aut inæquales quidem ſed tamen dati: igitur [per 70. dat.] ratio parallelogrammi ΚΓ ad parallelogrammum ΛΖ eſt data: adeoque [per 41. 1.] ratio trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ογ'.

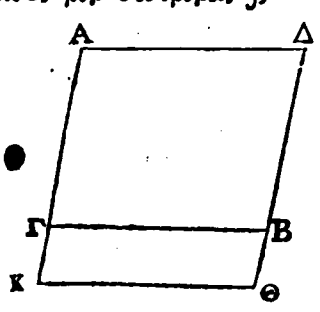
Ἐὰν δυοῖν παραλληλογράμμων περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δέ, αἱ πλευραὶ ὅπως ἔχωσιν, ὥστε εἶναι ὡς τὴν μιᾶς τὴν πρώτην πλευρὰν πρὸς τὴν δευτέρου πλευρὰν ὅπως τὴν λοιπὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν πρὸς ἄλλην τινά, ἔχῃ δὲ ἡ λοιπὴ τοῦ πρώτου πλευρὰ πρὸς αὐτὴν λόγον δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

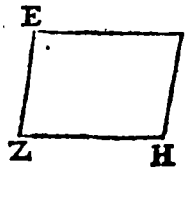
Prop. LXXIII.

Si duorum parallelogrammorum, circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem ſed tamen datos, latera ita ſe habeant, ut ſit quemadmodum primi latus ad ſecundi latus ita reliquum ſecundi latus ad aliam quandam rectam; habeat autem & reliquum primi latus ad eandem iſtam rectam rationem datam: ipſa quoque parallelogramma ad invicem rationem datam habebunt.

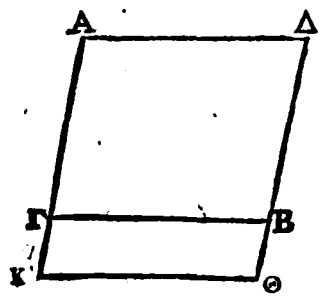
Δυοῖν γὰρ παραλληλογράμμων τῶν ΑΒ, ΕΗ, περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δέ, τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ σημείοις, αἱ πλευραὶ ὅπως ἐκκείσθωσαν πρὸς ἀλλήλας, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ ὅπως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΓΚ, τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΑΒ παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ΕΗ παραλληλόγραμμον λόγος ἐστὶ δοθείς.

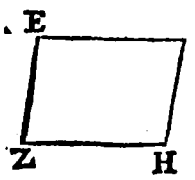
DUorum enim parallelogrammorum ΑΒ, ΕΗ, circa æquales angulos, aut inæquales quidem ſed tamen datos ad puncta Γ, Ζ, latera ad invicem ita ſe habeant, ut ſit quemadmodum ΓΒ ad ΖΗ ita recta ΕΖ ad rectam ΓΚ; ſitque ratio ipſius ΑΓ ad ΓΚ data: dico parallelogrammi ΑΒ ad parallelogrammum ΕΗ rationem datam eſſe.



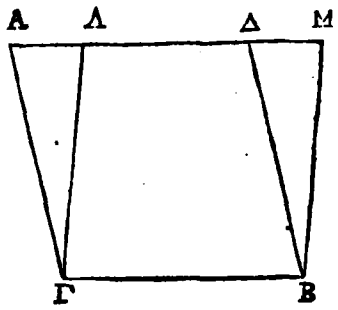


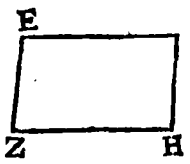
Sit enim primo parallelogrammum AB æquiangulum ipſi EH; atque ita conſtituatur ΓK ut ſit in directum ipſi AΓ, compleaturque parallelogrammum AΘ. quoniam vero eſt ut ΓB ad ZH ita EZ ad ΓK; *erit etiam permutando [per 16. 5.] ut ΓB ad EZ ita ZH ad ΓK: igitur [per 16.6.] quod continetur ſub BΓ, ΓK æquale eſt ei quod continetur ſub EZ, ZH: ergo ΓΘ ipſi EH æquale eſt. ſed & [per 14.6.] eidem eſt æquiangulum: ergo [per 14.6.] latera circa æquales angulos ſunt reciproce proportionalia: eſt igitur ut ΓB ad ZH ita EZ ad ΓK.* ut autem ΓB ad ZH ita [ex hyp.] EZ ad eam ad quam AΓ habet rationem datam: ergo ratio ipſius AΓ ad ΓK data eſt: adeoque [per 1.6.] ratio ipſius AB ad ΓΘ, hoc eſt ad EH, data eſt.





Non ſit autem parallelogrammum AB æquiangulum parallelogrammo EH. & [per 23. 1.] conſtituatur ad rectam BΓ, & ad datum in ea punctum Γ, angulo EZH æqualis angulus BΓΛ; compleaturque parallelogrammum ΓM. & quoniam datus eſt uterque angulorum AΓΛ, AΓB; reliquus igitur AΓΛ datus eſt. angulus autem ΓAΛ [ex hyp.] datus eſt: quare [per 40. dat.] triangulum AΓΛ ſpecie datum eſt: adeoque ratio ipſius AΓ ad ΓΛ data eſt. & quoniam [ex hyp.] eſt ut BΓ ad ZH ita EZ ad eam ad quam AΓ habet rationem datam; ipſiuſque AΓ ad ΓΛ data eſt ratio: eſt igitur ut BΓ ad ZH ita ZE ad eam ad quam ΛΓ habet rationem datam. æqualis autem eſt [per conſtr.] angulus BΓΛ angulo EZH: igitur [per part. prior. hujus] ratio ipſius ΓM ad EH data eſt. ſed [per 35.1.] ipſi ΓM æqualis eſt ΓΔ: ratio igitur ipſius ΓΔ ad EH data eſt.





Εστω δὴ πρότερον τὸ AB τῷ EH ἰσογώνιον, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν AΓ τῇ ΓK, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ AΘ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν ZH οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΓK· *ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ ZH πρὸς τὴν ΓK· τὸ ἄρα ὑπὸ τὰς BΓ, ΓK ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τὰς EZ, ZH· τὸ ΓΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ EH. ἔστι δὲ καὶ ἰσογώνιον· τὰ ΓΘ, EH ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν ZH οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΓK.* ὡς δὲ ἡ ΓB πρὸς τὴν ZH οὕτως ἡ EZ πρὸς ἣν ἡ AΓ λόγον ἔχει δεδομένον· λόγος ἄρα καὶ AΓ πρὸς τὴν ΓK δοθείς· ὥστε τὸ AB πρὸς τὸ ΓΘ, τουτέστι πρὸς τὸ EH, λόγος ἐστὶ δοθείς.

Μὴ ἔστω δὴ ἰσογώνιον τὸ AB τῷ EH. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ BΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ τῇ ὑπὸ EZH γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BΓΛ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΓM. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσαί εἰσιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ AΓΛ, ΛΓB· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AΓΛ ἐστὶ δοθεῖσα. δέδοται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓAΛ· δέδοται ἄρα τὸ AΓΛ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα καὶ AΓ πρὸς τὴν ΓΛ δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν ZH οὕτως ἡ EZ πρὸς ἣν ἡ AΓ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ δὲ AΓ πρὸς τὴν ΓΛ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν ZH οὕτως ἡ ZE πρὸς ἣν ἡ AΛ λόγον ἔχει δεδομένον. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ BΓΛ γωνία τῇ ὑπὸ EZH· λόγος ἄρα καὶ ΓM πρὸς τὸ EH δοθείς. ἴσον δέ ἐστι τὸ ΓM τῷ ΓΔ· λόγος ἄρα καὶ ΓΔ πρὸς τὸ EH δοθείς.

PROP. LXXIV.

Si duo parallelogramma datam rationem habeant, aut in æqualibus angulis, aut inæqualibus quidem ſed tamen datis; erit ut primi latus ad ſecundi latus ita alterum ſecundi latus ad eam ad quam reliquum primi latus rationem habet datam.

DUO enim parallelogramma AB, EH, aut in æqualibus angulis ad puncta Z, Γ, aut inæqualibus quidem, ſed tamen datis, habeant ad invicem rationem datam: dico ut ΓB ad ZH ita eſſe EZ ad eam ad quam ipſa AΓ habet rationem datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οδ'.

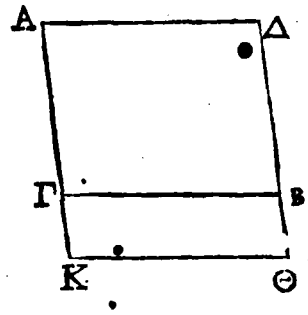
Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἤτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν δεδομέναις δὲ· ἔσται ὡς ἡ μία πλευρὰ πρὸς τὴν μίαν πλευρὰν οὕτως ἡ ἑτέρα μία πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν μίαν πλευρὰν λόγον ἔχει δεδομένον.

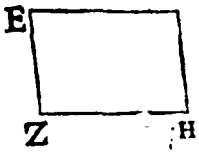
ΔΥΟ γὰρ παραλληλόγραμμα τὰ AB, EH πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, ἤτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν δεδομέναις δὲ, πρὸς τοῖς Z, Γ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν ZH οὕτως ἡ EZ πρὸς ἣν ἡ AΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

Quæ inter ſtellulas incluſa redundant, & tollenda videntur.

Τὸ

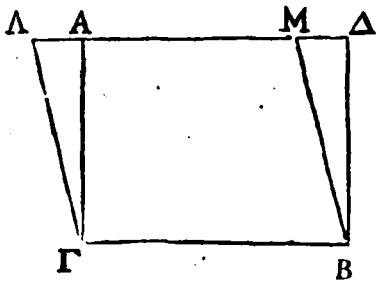
Τὸ γὰρ ΑΒ τῷ ΕΗ ἤτοι ἰσογώνιον ἐστὶ ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἰσογώνιον. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΓΒ εὐθεῖαν τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΘ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΚ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς, ἴσον δὲ τὸ ΕΗ τῷ ΓΘ· τοῦ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ΓΘ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΕΗ, ἐστὶ δὲ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΓΘ, ΕΗ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΚ. τοῦ δὲ ΓΚ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

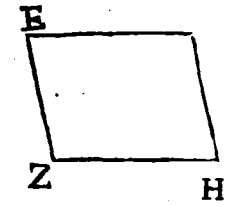




Etenim AB ipſi EH aut æquiangulum eſt aut non. ſit primo æquiangulum. & [per 45.1.] applicetur ad rectam ΓB ipſi EH æquale parallelogrammum ΓΘ, atque ita conſtituatur ut in directum ſit AΓ ipſi ΓK: ergo in directum eſt recta ΔB rectæ BΘ. & quoniam [ex hyp.] ratio ipſius AB ad EH data eſt; atque [per conſtr.] EH æquale eſt ipſi ΓΘ: igitur ratio ipſius AB ad ΓΘ data eſt: adeoque [per 1.6.] & ratio ipſius AΓ ad ΓK data eſt. & quoniam ΓΘ ipſi EH æquale eſt; eſtque etiam æquiangulum: igitur [per 14.6.] ipſorum ΓΘ, EH latera circa æquales angulos ſunt reciproce proportionalia; eſt igitur ut ΓB ad ZH ita EZ ad ΓK. ratio autem ipſius ΓK ad AΓ data eſt: ergo ut ΓB ad ZH ita eſt EZ ad eam ad quam AΓ rationem habet datam.

Μὴ ἔστω δὴ ἰσογώνιον τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΓΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, τῇ ὑπὸ ΕΖΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΓΒ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ παραλληλόγραμμον ΓΜ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῷ ΓΜ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΓΜ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΛΓΒ τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΜ τῷ ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ἣν ὁ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον. τῆς δὲ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΛ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.





Non ſit autem AB ipſi EH æquiangulum. & [per 23. 1.] conſtituatur ad rectam ΓB, & datum in ea punctum Γ, angulo EZH æqualis angulus ΛΓB; compleaturq; parallelogrammum ΓM. quoniam itaque [ex hyp.] ratio ipſius ΓΔ ad EH data eſt; eſt autem [per 35.1.] ΓΔ æquale ipſi ΓM: ipſius igitur ΓM ad EH data eſt ratio. æqualis autem [per conſtr.] eſt angulus ΛΓB angulo EZH; ideoque [per 29. & 34.1.] æquiangulum eſt ΓM ipſi EH: ergo [per part. prior. hujus] ut ΓB ad ZH ita eſt EZ ad eam ad quam recta AΓ habet rationem datam. ratio autem ipſius ΓA ad ΓΛ eſt data: ergo ut ΓB ad ZH ita eſt EZ ad eam ad quam recta AΓ habet rationem datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἤτοι τὰς ἴσας γωνίας, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν δεδομέναις δέ· ἔσται ὡς ἡ μία τῶν πρώτων πλευρὰ πρὸς τὴν μίαν τῶν δευτέρων πλευρὰν οὕτως ἡ ἑτέρα τῶν δευτέρων πλευρὰ πρὸς ἣν ἡ λοιπὴ τῶν πρώτων πλευρὰ λόγον ἔχει δεδομένον.

PROP. LXXV.

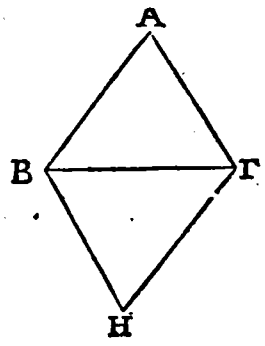
Si duo triangula ad invicem habeant rationem datam, aut in angulis æqualibus, aut inæqualibus quidem ſed tamen datis; erit ut primi latus ad ſecundi latus ita alterum ſecundi latus ad eam rectam ad quam reliquum primi latus rationem datam habet.

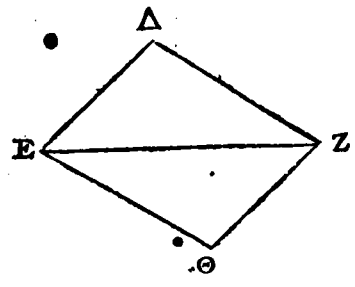
Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ ἔστωσαν αἱ πρὸς τοῖς Α, Δ γωνίαι, ἤτοι ἴσαι, ἢ ἄνισοι μὲν δεδομέναι δέ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν

SInt duo triangula ABΓ, ΔEZ, quæ ad invicem habeant rationem datam; ſintque anguli ad puncta A, Δ æquales, aut inæquales quidem ſed tamen dati: dico ut AB ad ΔE

ita esse Δ Z ad eam ad quam recta A Γ habet rationem datam.

Compleantur enim parallelogramma A H, Δ Θ. & quoniam ratio trianguli A B Γ ad triangulum Δ E Z data est: igitur [per 41. 1.] parallelogrammi A H ad parallelogrammum Δ Θ ratio est data. quoniam igitur duo sunt parallelogramma habentia ad invicem rationem datam, aut in angulis æqualibus, aut inæqualibus quidem sed tamen datis: est igitur [per 74. dat.] ut A B ad Δ E ita Δ Z ad eam ad quam recta A Γ habet rationem datam.





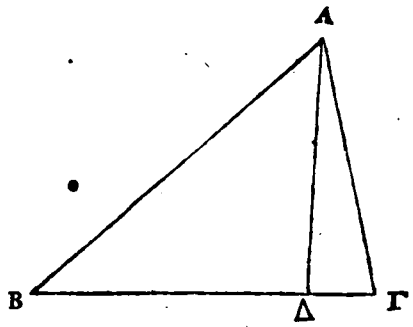
Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ A H, Δ Θ παραλληλόγραμμα. ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ A B Γ τριγώνου πρὸς τὸ Δ E Z δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ A H παραλληλογράμμου πρὸς τὸ Δ Θ παραλληλόγραμμον δοθείς. ἐπεὶ ἂν δύο παραλληλόγραμμά εἰσι πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, ἤτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν δεδομέναις δέ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A B πρὸς τὴν Δ E οὕτως ἡ Δ Z πρὸς ἣν ἡ A Γ λόγον ἔχει δεδομένον.

PROP. LXXVI.

Si à trianguli specie dati vertice recta perpendicularis agatur ad basim; acta recta habebit ad basim rationem datam.

SIT triangulum A B Γ specie datum, & agatur à puncto A in basim B Γ perpendicularis A Δ: dico rationem ipsius A Δ ad B Γ datam esse.

Quoniam enim datur triangulum A B Γ specie: angulus igitur A B Δ [per 3. def. dat.] datus est. angulus autem B Δ A datus est: quare & [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus B A Δ datus est: ergo [per 40. dat.] triangulum A B Δ specie datum est: quare [per 3. def. dat.] ratio ipsius B A ad A Δ data est. est autem [ex hyp.] & ratio ipsius A B ad B Γ data: igitur [per 8. dat.] ratio ipsius A Δ ad B Γ data est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ οϛ'.

Ἐὰν τριγώνου δεδομένου τῷ εἴδει ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν βάσιν λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἔστω τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει τὸ A B Γ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν B Γ κάθετος ἡ A Δ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς A Δ πρὸς τὴν B Γ δοθείς.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ A B Γ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ A B Δ γωνία. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ B Δ A δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ B A Δ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ A B Δ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς B A πρὸς τὴν A Δ δοθείς. ἔστι δὲ καὶ τῆς A B πρὸς τὴν B Γ λόγος δοθείς· καὶ τῆς A Δ ἄρα πρὸς τὴν B Γ λόγος ἐστὶ δοθείς.

PROP. LXXVII.

Si duæ figuræ specie datæ ad invicem habeant rationem datam; quodlibet etiam latus unius harum figurarum ad quodlibet latus alterius rationem datam habebit.

DUÆ enim figuræ A B Γ, Δ E Z specie datæ ad invicem habeant rationem datam: dico latus quodcunque ipsius A B Γ ad latus quodcunque ipsius Δ E Z rationem datam habere.

Describantur enim [per 46. 1.] à rectis B Γ, E Z quadrata B H, E Θ. quoniam vero ab ea-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οζ'.

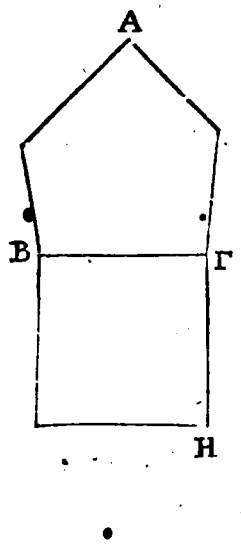
Ἐὰν δύο εἴδη δεδομένα τῷ εἴδει πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ ὁποιαοῦν ἑνὸς τῶν εἰδῶν πρὸς ὁποιανοῦν τοῦ ἑτέρου λόγον ἔξει δεδομένον.

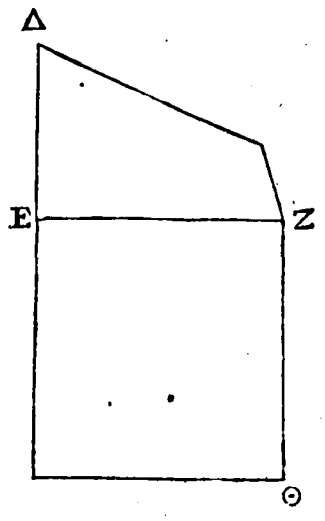
Δύο γὰρ εἴδη τὰ A B Γ, Δ E Z δεδομένα τῷ εἴδει πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ μία πλευρὰ ὁποιαοῦν τοῦ A B Γ πρὸς μίαν πλευρὰν ὁποιανοῦν τοῦ Δ E Z λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν B Γ, E Z τετράγωνα τὰ B H, E Θ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐ-

θείας

δοθείσας τὰ ΒΓ δύο εἴδη ἀναγέγραπται ἃ ἔτυχεν δεδομένα τῷ εἴδει τὰ ΑΒΓ, ΒΗ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΒΗ δοθείς. ἀλλὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΔΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΓ πρὸς τὸ ΒΗ λόγος ἐστὶ δοθείς, τοῦ δὲ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΒΗ ἄρα πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.





dem recta ΒΓ duæ quædam figuræ ſpecie datæ deſcriptæ ſunt, nempe ΑΒΓ, ΒΗ; ratio igitur ipſius ΑΒΓ ad ΒΗ [per 49. dat.] data eſt. ſimiliter quoque ipſius ΔΕΖ ad ΕΘ data eſt ratio. quoniam itaque [ex hyp.] ratio ipſius ΑΒΓ ad ΔΕΖ data eſt; atque etiam data eſt ratio ipſius ΑΒΓ quidem ad ΒΗ, ipſiuſque ΔΕΖ ad ΕΘ: ipſius quoque ΒΗ ad ΕΘ [per 8. dat.] ratio eſt data. quare [per 54. dat.] & ratio ipſius ΒΓ ad ΕΖ data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οη'.

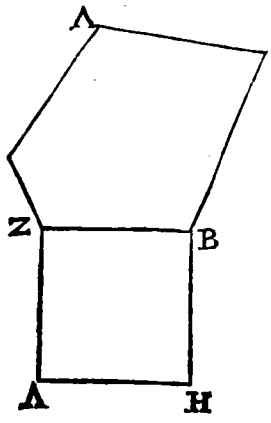
Ἐὰν δοθὲν εἶδος πρός τι ὀρθογώνιον λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχῃ δοθέντα· δέδοται τὸ ὀρθογώνιον τῷ εἴδει.

PROP. LXXVIII.

Si data figura habeat ad aliquod rectangulum rationem datam, atque habeat etiam unum latus ad unum latus rationem datam; rectangulum ipſum ſpecie datum eſt.

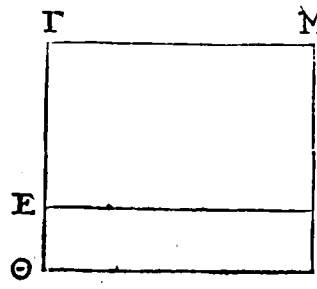
Δοθὲν γὰρ εἶδος τὸ ΑΖΒ πρός τι ὀρθογώνιον τὸ ΓΔ λόγον ἐχέτω δεδομένον, καὶ ἔστω λόγος τοῦ ΖΒ πρὸς τὸν ΕΔ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΓΔ τῷ εἴδει.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΖΒ τετράγωνον τὸ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΔ τῷ ΖΗ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΕΚ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΕ τῇ ΕΘ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΔ τῇ ΔΚ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ εὐθείας τοῦ ΖΒ δύο εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχεν δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγέγραπται τὰ ΑΖΒ, ΖΗ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΖΒ πρὸς τὸ ΖΗ δοθείς. τοῦ δὲ ΑΖΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τὸ ΖΗ τῷ ΕΚ ἐστιν ἴσον· καὶ τοῦ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΕΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον τὸ ΖΗ τῷ ΕΚ, ἐστὶ γὰρ καὶ ὀρθογώνιον· ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αὐτῶν αἱ πλευραί, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΛ. λόγος δὲ ὑπόκειται τοῦ ΖΒ πρὸς



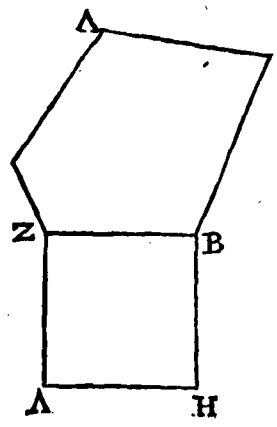
ETenim data figura ΑΖΒ ad aliquod rectangulum ΓΔ habeat rationem datam, & ſit ratio ipſius ΖΒ ad ΕΔ data: dico rectangulum ΓΔ ſpecie datum eſſe.

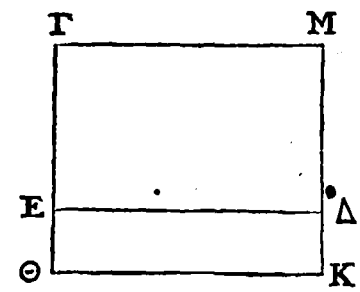
Deſcribatur enim [per 46. 1.] à recta ΖΒ quadratum ΖΗ; dein [per 45. 1.] applicetur ad rectam ΕΔ ipſi ΖΗ æquale parallelogrammum ΕΚ, & conſtituatur ita ut in directum ſit ΓΕ ipſi ΕΘ: eſt igitur in directum ΜΔ ipſi ΔΚ. quoniam vero ab eadem recta ΖΒ duo quædam rectilinea ΑΖΒ, ΖΗ ſpecie data deſcripta ſunt: igitur [per 49. dat.] ratio ipſius ΑΖΒ ad ΖΗ data eſt. ratio autem ipſius ΑΖΒ ad ΓΔ [ex hyp.] data eſt: quare [per 8. dat.] & ratio ipſius ΖΗ ad ΓΔ data eſt. ſed [per conſtr.] ΖΗ ipſi ΕΚ æquale eſt: ipſius igitur ΓΔ ad ΕΚ data eſt ratio. cumque ΖΗ ipſi ΕΚ æquale ſit & æquiangulum; quippe rectangulum etiam eſt: eorum igitur latera [per 14.6.] reciproce proportionalia ſunt, eſtque ut ΖΒ ad ΕΔ ita ΕΘ ad ΖΛ. ratio autem ipſius ΖΒ ad ΕΔ



data

data ſupponitur: quare & ratio ipſius ΕΘ ad ΖΛ data eſt. eſt autem [per 1. 6.] & ratio ipſius ΕΘ ad ΓΕ data: igitur [per 8. dat.] & ipſius ΓΕ ad ΖΛ ratio eſt data. æqualis autem eſt ΛΖ ipſi ΖΒ; eſt enim quadratum: igitur ipſius ΛΖ ad ΕΔ data eſt ratio: igitur [per 8. dat.] & ratio ipſius ΓΒ ad ΕΔ data eſt. & [ex hyp.] eſt angulus ad Β rectus: igitur [per 3. def.dat.] ΓΔ ſpecie datum eſt.





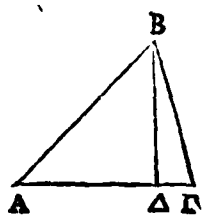
τῷ ΕΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΕΘ πρὸς τὸ ΖΛ δοθείς. τοῦ δὲ ΕΘ πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς τὴν ΖΛ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἴση δὲ ἡ ΛΖ τῇ ΖΒ, τετράγωνον γάρ ἐστι· τοῦ ΛΖ ἄρα πρὸς τὸ ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· τοῦ ΓΕ ἄρα πρὸς τὴν ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστω ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΓΔ τῷ εἴδει.

PROP. LXXIX.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, ab æqualibus autem angulis ad baſes perpendiculares rectæ agantur, ſitque ut primi trianguli baſis ad perpendicularem ita & alterius trianguli baſis ad perpendicularem; triangula ipſa æquiangula ſunt.

SInt duo triangula ΑΒΓ, ΘΖΗ æquales habentia angulos ad puncta Β, Ζ, & agantur à punctis Β, Ζ perpendiculares ΒΔ, ΚΖ; ſit autem ut ΑΓ ad ΒΔ ita ΘΗ ad ΚΖ: dico triangulum ΑΒΓ triangulo ΘΖΗ æquiangulum eſſe.

Circumſcribatur enim [per 5. 4.] circulus circa triangulum ΘΖΗ, cujus ſegmentum ſit ΘΖΗ; dein conſtituatur ad rectam ΘΗ, & ad punctum in ea Θ, angulo ΓΑΒ æqualis angulus ΗΘΛ, & connectantur ΖΛ, ΛΗ, denique agatur perpendicularis ΛΜ. & quoniam æqualis eſt [per 21. 3.] angulus ΗΖΘ angulo ΘΛΗ, in eodem enim ſegmento circuli conſiſtunt; atq; eſt [ex hyp.] ΗΖΘ æqualis ΓΒΑ: igitur & ΗΛΘ ipſi ΓΒΑ eſt æqualis. angulus autem ΛΘΗ [per conſtr.] angulo ΒΑΓ æqualis eſt; reliquus igitur angulus ΑΗΘ reliquo angulo ΒΓΑ æqualis eſt: ergo [per 4. 6.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΘΛΗ ſimile eſt. & ductæ ſunt perpendiculares ΒΔ, ΛΜ: quare [per 4. & 20. 6.] ut ΑΓ ad ΒΔ ita ΘΗ ad ΛΜ. erat vero ut ΑΓ ad ΒΔ ita ΘΗ ad ΖΚ; ita enim ſupponitur: ergo ut ΘΗ ad ΜΛ ita ΘΗ ad ΖΚ: ergo [per 9. 5.] æqualis eſt ΖΚ ipſi ΛΜ. eſt autem [per 28. 1.] & ΖΚ parallela ipſi ΛΜ: quare [per 33. 1.] parallela eſt ΖΛ

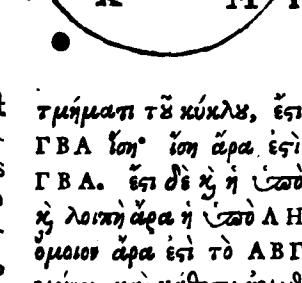


ΠΡΟΤΑΣΙΣ οθ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας ἐπὶ τὰς βάσεις κάθετοι εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν, ἡ δὲ ὡς ἡ τοῦ πρώτου τριγώνου βάσις πρὸς τὴν κάθετον οὕτως ἡ τοῦ ἑτέρου τριγώνου βάσις πρὸς τὴν κάθετον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΘΖΗ ἴσας ἔχοντα γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Β, Ζ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Β, Ζ κάθετοι αἱ ΒΔ, ΖΚ, ἔστω δὲ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΖΚ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τρίγωνον ΑΒΓ τῷ ΘΖΗ τριγώνῳ.

Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΘΖΗ τρίγωνον κύκλος ὁ τμῆμα ἔστω ΘΖΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΗ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, τῇ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΛ, ΛΗ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΖΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΛΗ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ εἰσι τμήματι τοῦ κύκλου, ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΛΘ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΛΘΗ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΗΘ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστιν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΛΗ τριγώνῳ. καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΒΔ, ΛΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΛΜ. ἦν δὲ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΖΚ, ὑπόκειται γάρ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΜΛ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΖΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΚ τῇ ΛΜ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΚ τῇ ΛΜ παράλληλος· καὶ ἡ ΖΛ ἄρα τῇ



ΘΗ

ΘΗ τῷ δὲ ἀλλήλοις ἐστὶν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΛΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΛΘΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ΛΘΗ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΛΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΘΖΗ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΘΗ τριγώνῳ.

ipſi ΘΗ: angulus igitur ΖΛΘ angulo ΛΘΗ [per 29.1.] æqualis eſt. ſed angulus ΛΘΗ [per conſtr.] æqualis eſt angulo ΒΑΓ; angulus autem ΖΛΘ [per 21.3.] angulo ΖΗΘ æqualis eſt: quare & angulus ΒΑΓ angulo ΖΗΘ æqualis eſt. angulus autem ΑΒΓ [ex hyp.] angulo ΘΖΗ æqualis eſt: reliquus igitur ΒΓΑ reliquo ΖΘΗ [per 32.1.] æqualis eſt: ergo triangulum ΑΒΓ triangulo ΖΘΗ æquiangulum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ π'.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην, καὶ τὸ ὑπὸ τὰς δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς πλευρᾶς τετράγωνον λόγον ἔχῃ δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

PROP. LXXX.

Si triangulum unum angulum datum habuerit, quodque ſub lateribus datum angulum comprehendentibus continetur rectangulum habeat ad quadratum reliqui lateris rationem datam; triangulum ipſum ſpecie datum eſt.

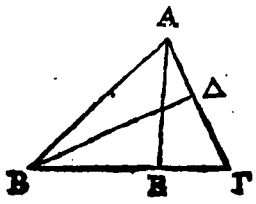
Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α, καὶ τὸ ὑπὸ τὰς ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

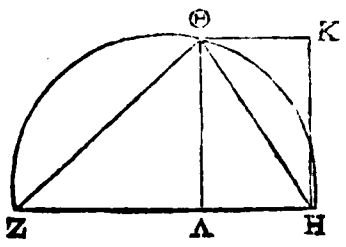
ΗΧΘΩΣΑΝ γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ κάθετοι αἱ ΑΕ, ΒΔ. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τὰς ΒΓ, ΑΕ, ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· λόγος ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ δοθείς. τὸ δὲ ὑπὸ τὰς ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ὡς ἄρα ὑπὸ τὰς ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· τῆς ἄρα ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. σημείῳ δὴ τῷ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένῃ εὐθείᾳ ἡ ΖΗ, καὶ γεγράφθω δὴ τῆς ΖΗ τμῆμα κύκλου τὸ ΖΘΗ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΓ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ἐν τῷ ΖΘΗ τμήματι γωνία· θέσει ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΘΗ τμῆμα. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΚ. καὶ πεπλήσθω ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΚ. λόγος δὲ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΚ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΖΗ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΚ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ δοθὲν ἐστὶ τὸ Η· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Κ. ἦχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΖΗ παράλληλος ἡ ΚΘ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. θέσει

SIT triangulum ΑΒΓ datum angulum habens ad Α; quod autem ſub ΒΑ, ΑΓ continetur ad quadratum rectæ ΒΓ habeat rationem datam: dico triangulum ΑΒΓ ſpecie datum eſſe.

Agantur enim [per 12.1.] à punctis Α, Β ad ΒΓ, ΓΑ perpendiculares ΑΕ, ΒΔ. quoniam itaque angulus ΒΑΔ [ex hyp.] datus eſt, atque angulus ΑΔΒ etiam datus: triangulum igitur ΑΔΒ [per 40. dat.] ſpecie datum eſt: ideoque [per 3.def.dat.] ratio ipſius ΑΒ ad ΒΔ data eſt: ideoque [per 1.6.] & ratio rectanguli ſub ΑΒ, ΑΓ, ad rectangulum ſub ΑΓ, ΒΔ eſt data. eſt autem quod continetur ſub ΑΓ, ΒΔ æquale eſt id quod continetur ſub ΒΓ, ΑΕ; utrumque enim [per 41.1.] duplum eſt trianguli ΑΒΓ: igitur ratio ejus quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ ad id quod continetur ſub ΒΓ, ΑΕ data eſt. ratio autem ejus quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ ad quadratum rectæ ΒΓ [ex hyp.] data eſt: quare [per 8.dat.] & ratio rectanguli ſub ΒΓ, ΑΕ ad quadratum rectæ ΒΓ data eſt: adeoque [per 1.6.] rectæ ΒΓ ad rectam ΑΕ ratio data eſt. exponatur jam recta ΖΗ poſitione & magnitudine data; & [per 33.3.] ſuper ΖΗ deſcribatur circuli ſegmentum ΖΘΗ, quod capiat angulum angulo ΒΑΓ æqualem. angulus autem ΒΑΓ [ex hyp.] datus eſt: ergo & angulus in ſegmento ΖΘΗ datus eſt: quare [per 8.def.dat.] ſegmentum ΖΘΗ poſitione datum eſt. agatur [per 11.1.] à puncto Η rectæ ΖΗ ad angulos rectos recta ΗΚ: ergo [per 29.dat.] ΗΚ poſitione data eſt. deinde fiat [per 12.6.] ut ΒΓ ad ΑΕ ita ΖΗ ad ΗΚ. ratio autem ipſius ΒΓ ad ΑΕ [ex ſupra oſtenſis] data eſt: quare & ratio ipſius ΖΗ ad ΗΚ data eſt. data autem eſt ΖΗ: ergo [per 2. dat.] & ΗΚ data eſt. ſed & hæc poſitione data eſt, datumque eſt punctum Η: quare [per 27. dat.] & punctum Κ datum eſt. agatur [per 31.1.] per punctum Κ ipſi ΖΗ parallela ΚΘ; igitur [per 28. dat.] poſitione data eſt ΚΘ. poſitione autem

autem datum est segmentum ΖΘΗ: ergo [per 25. dat.] punctum Θ datum est. connectantur autem ΘΖ, ΘΗ, & agatur perpendicularis ΘΛ: ergo [per 30.dat.] ΘΛ positione data est. datum autem est punctum Θ, & unumquodque punctorum Ζ, Η: igitur [per 26.dat.] unaquæque rectarum ΘΖ, ΖΗ, ΘΗ positione & magnitudine data est: quare triangulum ΘΖΗ specie datum est. & quoniam [per constr.] est ut ΒΓ ad ΑΕ ita ΖΗ ad ΗΚ, estque [per 34.1.] ΗΚ æqualis ipsi ΛΘ: erit igitur ut ΒΓ ad ΑΕ ita ΖΗ ad ΛΘ. est autem [per constr.] angulus ΒΑΓ æqualis angulo ΖΘΗ: triangulum igitur ΑΒΓ [per 79. dat.] triangulo ΘΖΗ æquiangulum est. triangulum autem ΖΘΗ specie datum est: quare & triangulum ΑΒΓ datum est.

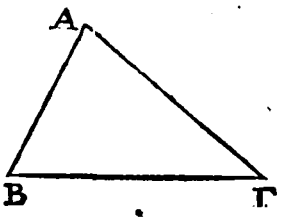


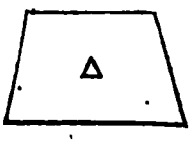


ALITER.

Sit triangulum ΑΒΓ quod datum angulum habeat ad Α; ratio autem ejus quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ ad quadratum rectæ ΒΓ sit data: dico triangulum ΑΒΓ specie datum esse.

Quoniam enim datus est angulus ΒΑΓ, spatium illud, quo quadratum utriusque simul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ, ad triangulum ΑΒΓ [per 67. dat.] rationem datam habet. sit autem Δ spatium, quo quadratum utriusque simul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ: ergo ratio ipsius Δ ad triangulum ΑΒΓ data est. trianguli autem ΑΒΓ ad id quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ [per 66.dat.] ratio est data; quia datus est angulus ΒΑΓ: ergo [per 8. dat.] ratio spatii Δ ad id quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ data est. ejus autem quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ ad quadratum rectæ ΒΓ [ex hyp.] data est ratio: quare [per 8. dat.] & ratio spatii Δ ad quadratum rectæ ΒΓ data est: igitur componendo [per 6. dat.] spatii Δ cum quadrato rectæ ΒΓ ad quadratum rectæ ΒΓ ratio est data. sed [per constr.] spatium Δ una cum quadrato rectæ ΒΓ est ipsum quadratum utriusque simul ΒΑΓ: quare ratio quadrati utriusque simul ΒΑΓ ad quadratum rectæ ΒΓ data est: adeoque [per 54.dat.] & ratio utriusque simul ΒΑΓ ad ΒΓ data est. datus etiam est [ex hyp.] angulus ΒΑΓ: triangulum igitur ΑΒΓ [per 45.dat.] specie datum est.





PROP. LXXXI.

Si tres rectæ, quæ tribus rectis invicem proportionalibus proportionales fuerint, extremas habuerint in ratione data; medias quoque habebunt in ra-

δὲ καὶ τὸ ΖΘΗ τρίγωνον· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. ἐπεζεύχθωσαν δὲ αἱ ΘΖ, ΘΗ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΘΛ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΛ. ἔστι δὲ τὸ Θ σημεῖον δοθέν, ἑκάτερον τῶν Ζ, Η· δέδοται ἄρα ἑκάστη τῶν ΘΖ, ΖΗ, ΘΗ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΘΖΗ τρίγωνον τῷ εἴδει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ ἕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΚ, ἴση δὲ ἡ ΗΚ τῇ ΛΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ ἕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΛΘ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΘΗ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΖΗ τριγώνῳ. δέδοται δὲ τὸ ΖΘΗ τρίγωνον τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

ΑΛΛΩΣ.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α, λόγος δὲ ἔστω τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον. ᾧ δή ἐστι μεῖζον τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἔστω τὸ Δ χωρίον· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ Δ χωρίου πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δοθείς. τοῦ δὲ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· καὶ τοῦ Δ ἄρα χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι λόγος ἄρα τοῦ Δ χωρίου μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τὸ Δ χωρίον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἐστὶ· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ δοθείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πα'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι, ἀνάλογον ὦσαι τρισὶν εὐθείαις ἀνάλογον ὔσαις, τὰς ἄκρας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἔχουσιν· καὶ τὰς μέσας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἕξουσιν·

*

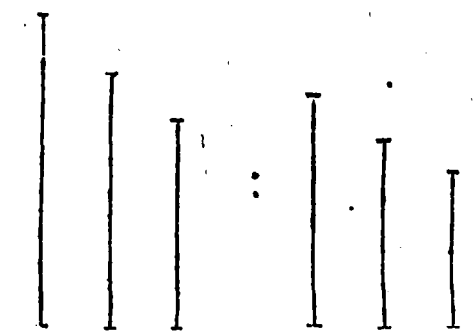
ἔξωσιν. ϗ ἐὰν ἡ ἄκρα πρὸς τὴν ἄκραν λόγον ἔχῃ δεδομένον, ϗ ἡ μέση πρὸς τὴν μέσην· ϗ ἡ λοιπὴ ἄκρα πρὸς λοιπὴν ἄκραν λόγον ἕξει δεδομένον.

tione data. & ſi extrema ad extremam, & media ad mediam, habeat rationem datam; & reliqua extrema ad reliquam extremam rationem datam habebit.

Τρεῖς γὰρ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔστωσαν αἱ Α, Β, Γ τρισὶν εὐθείαις ἀνάλογον ἔστωσαν ταῖς Δ, Ε, Ζ, πάσας ἀκρας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἐχέτωσαν, ϗ τὸ μὲν Α πρὸς τὴν Δ λόγος ἔστω δοθείς, τὸ δὲ Γ πρὸς τὴν Ζ· λέγω ὅτι ϗ τὸ Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν Α πρὸς τὴν Δ, τὸ δὲ Γ πρὸς τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ δοθείς. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ Β, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ Ε· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Ε δοθείς· ὥστε ϗ τὸ Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δοθείς.

ΕΣΤΩ δὲ πάλιν τὸ μὲν Α πρὸς τὴν Δ λόγος δοθείς, τὸ δὲ Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι ϗ τὸ Γ πρὸς τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν Α πρὸς τὴν Δ, τὸ δὲ Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· λόγος ἄρα ἐστὶ ϗ τὸ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Ε δοθείς. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τοῦ Β ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τοῦ Ε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ δοθείς. ϗ μιᾶς πλευρᾶς τῆς Α πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· ϗ λοιπῆς ἄρα τοῦ Γ πρὸς λοιπὴν τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.

TRes enim rectæ A, B, Γ, proportionales tribus rectis proportionalibus Δ, E, Z, extremas habeant in ratione data; ſit nempe ratio ipſius A quidem ad Δ data, ipſius autem Γ ad Z ratio data: dico ipſius quoque B ad E rationem eſſe datam.

Quoniam enim ipſius A ad Δ, ipſiuſque Γ ad Z ratio eſt data: igitur [per 70.dat.] ratio ejus quod continetur ſub A, Γ ad id quod continetur ſub Δ, Z data eſt. ſed [per 17.6.] ei quod continetur ſub A, Γ æquale eſt quadratum rectæ B; atque ei quod ſub Δ, Z æquale eſt quadratum rectæ E: ergo ratio quadrati rectæ B ad quadratum rectæ E data eſt: ideoque [per 54.dat.] ratio rectæ B ad rectam E data eſt.

SIT vero rurſus ratio ipſius A ad Δ, ipſiuſque B ad E data: dico ipſius quoque Γ ad Z rationem datam eſſe.

Quoniam enim ratio ipſius A ad Δ, & ipſius B ad E data eſt: ratio igitur quadrati rectæ B ad quadratum rectæ E [per.50. dat.] data eſt. ſed [per 17.6.] quadrato rectæ B æquale eſt id quod continetur ſub A, Γ; & quadrato rectæ E æquale eſt id quod continetur ſub Δ, Z: igitur ratio ejus quod continetur ſub A, Γ ad id quod continetur ſub Δ, Z data eſt. ratio autem unius lateris A ad unum latus Δ [ex hyp.] data eſt: quare [per 68.dat.] & ratio reliqui lateris Γ ad reliquum latus Z data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πϚ'.

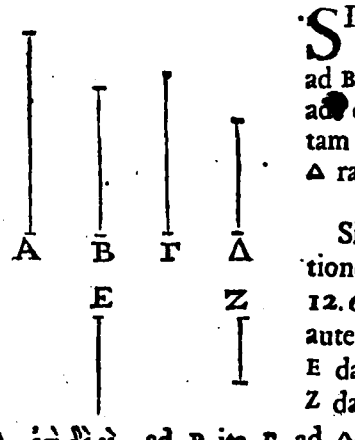
Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν ἡ δευτέρα λόγον ἔχει δεδομένον, οὕτως ἡ τρίτη πρὸς ἣν ἡ τετάρτη λόγον ἔχει δεδομένον.

PROP. LXXXII.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint; erit ut prima ad eam ad quam ſecunda rationem habet datam, ita tertia ad eam ad quam quarta rationem habet datam.

Ἐστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, ϗ ἔστω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· λέγω ὅτι ὡς ἡ Α πρὸς τινὰ ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον οὕτως ἡ Γ πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐστω γὰρ πρὸς ἣν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον ἡ Ε, ϗ πεποιήσθω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. λόγος δὲ τῆς Β πρὸς τὴν Ε δοθείς· λόγος ἄρα ϗ τοῦ Δ πρὸς τὴν Ζ δοθείς. ϗ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐστὶ δὲ ϗ



SInt quatuor rectæ proportionales A, B, Γ, Δ, ſitque ut A ad B ita Γ ad Δ: dico ut A ad eam ad quam B rationem habet datam ita eſſe Γ ad eam ad quam Δ rationem datam habet.

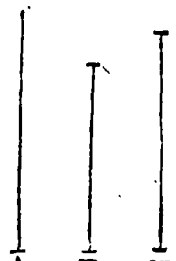
Sit enim E ea ad quam B rationem habet datam; fiatque [per 12.6.] ut B ad E ita Δ ad Z. eſt autem [ex hyp.] ratio ipſius B ad E data: ergo & ratio ipſius Δ ad Z data eſt. & quoniam eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, & eſt etiam [per conſtr.]

ut B ad E ita Δ ad Z: erit igitur ex æquo [per 22.5.] ut A ad E ita Γ ad Z. & [ex hyp.] est E quidem ea ad quam B rationem habet datam; atque Z ea ad quam Δ rationem habet datam: quare ut A ad eam ad quam B rationem habet datam ita est Γ ad eam ad quam Δ rationem habet datam.

PROP. LXXXIII.

Si quatuor rectæ ita ad invicem se habeant, ut tribus ex iis quibuscunque sumptis, & quarta ipsis utcunque accepta ad quam reliqua è quatuor rectis rationem habet datam, proportionales sint quatuor rectæ; erit ut quarta ad tertiam ita secunda ad eam ad quam prima habet rationem datam.

SInt quatuor rectæ A, B, Γ, Δ ita se habentes ad invicem, ut tribus ex iis quibuscunque sumptis A, B, Γ, & quarta ipsis utcunque accepta, quæ sit E, ad quam Δ rationem habet datam, proportionales sint rectæ A, B, Γ, E: dico ut Δ ad Γ ita esse B ad eam ad quam A habet rationem datam.

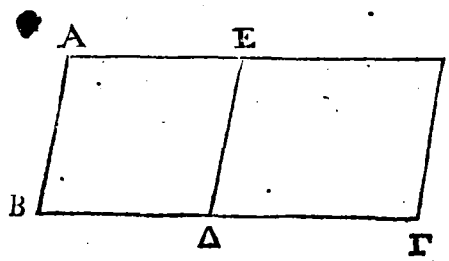


Quoniam enim est [ex hyp.] ut A ad B ita Γ ad E; igitur [per 16.6.] quod continetur sub A, E æquale est ei quod continetur sub B, Γ. quoniam vero [ex hyp.] ratio ipsius E ad Δ data est: igitur [per 1.6.] ratio ejus quod continetur sub A, Δ ad id quod continetur sub A, E data est. quod autem continetur sub A, E æquale est contento sub B, Γ: quare & ratio ejus quod continetur sub A, Δ ad id quod continetur sub B, Γ data est: ergo [per 56.dat.] ut Δ ad Γ ita est B ad eam ad quam A habet rationem datam.

PROP. LXXXIV.

Si duæ rectæ spatium datum comprehendant in angulo dato, sitque altera altera major data; etiam unaquæque ipsarum data erit.

DUÆ enim rectæ AB, BΓ datum spatium AΓ comprehendant in angulo dato ABΓ; sitque ΓB ipsa BA major, data: dico unamquamque rectarum AB, BΓ datam esse.



Quoniam enim ΓB major est quam ipsa BA, data; sit linea data ipsa ΔΓ: igitur [per 2.def.dat.] reliqua ΔB ipsi BA æqualis est. compleatur parallelogrammum AΔ. & quoniam AB æqualis est ipsi BΔ: ratio ipsius AB ad BΔ data est. angulus

ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε ἕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ· δι' ἴσου ἄρα ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε ἕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ζ. καί ἐστιν ἡ μὲν Ε πρὸς ἣν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον, ἡ δὲ Ζ πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς ἣν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον ἕτως ἡ Γ πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πγ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἕτως ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε τριῶν ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν ὁποιωνοῦν, καὶ τετάρτης αὐταῖς ληφθείσης ὡς ἔτυχε πρὸς ἣν ἡ λοιπὴ ἐξ ἀρχῆς τεσσάρων εὐθειῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἀνάλογον γίνεσθαι τὰς τέσσαρας εὐθείας· ἔσται ὡς ἡ τετάρτη πρὸς τὴν τρίτην ἕτως ἡ δευτέρα πρὸς ἣν ἡ πρώτη λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, Δ ἕτως ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ὥστε τριῶν ὁποιωνοῦν ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν Α, Β, Γ, καὶ τετάρτης αὐταῖς προσληφθείσης ὡς ἔτυχε τὴν Ε, πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον, ἀνάλογον εἶναι τὰς Α, Β, Γ, Ε εὐθείας· λέγω ὅτι ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν Γ ἕτως ἡ Β πρὸς ἣν ἡ Α λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β ἕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τὰς Α, Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τὰς Β, Γ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς Ε πρὸς τὴν Δ δοθείς· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ὑπὸ τὰς Α, Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τὰς Α, Ε δοθέν. τὸ δὲ ὑπὸ τὰς Α, Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τὰς Β, Γ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ὑπὸ τὰς Α, Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τὰς Β, Γ δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν Γ ἕτως ἡ Β πρὸς ἣν ἡ Α λόγον ἔχει δεδομένον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ἑτέρα τῆς ἑτέρας δοθείσῃ μείζων ᾖ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δοθὲν χωρίον περιεχέτωσαν τὸ ΑΓ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΒ τῆς ΒΑ δοθείσῃ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΒ τῆς ΒΑ δοθείσῃ μείζων ἐστί, δοθεῖσα ἔστω ἡ ΔΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ ἴση ἐστί. συμπεπληρώσθω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. δοθεῖσα δὲ

δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔ τῷ εἴδει. ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΔΓ παραβέβληται ὑπερβάλλον εἴδει δεδομένῳ τῷ εἴδει τῷ ΑΔ· δέδοται τὸ πλάτος τὸ ὑπερβολῆς· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ δοθεῖσα· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

vero ΑΒΔ [ex hyp.] datus est: quare ΑΔ specie datum est. quoniam itaque datum spatium ΑΓ ad datam rectam ΔΓ applicatum est, excedens data specie figura ΑΔ: latitudo igitur excessus [per 59. dat.] data est; quare ΒΔ data est. sed & ΔΓ [ex hyp.] data est: ergo [per 3.dat.] & tota ΒΓ data est. data autem est ΑΒ: quare utraque rectarum ΑΒ, ΒΓ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πέ.

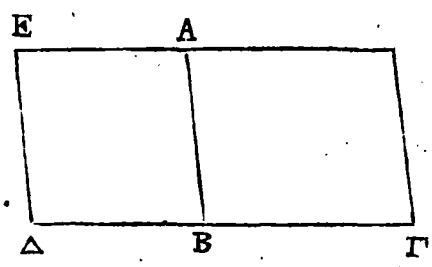
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον παρέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ συναμφότερος δοθεῖσα· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα.

Prop. LXXXV.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in angulo dato, sitque simul utraque data; & earum etiam unaquæque data erit.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δοθὲν χωρίον τὸ ΑΓ παρεχέτωσαν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔστω συναμφότερος ἡ ΑΒΓ δοθεῖσα· λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

Διήχθω γὰρ ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΒΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ, καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία, ἐπεὶ καὶ ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΕΒ τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστι συναμφότερος ἡ ΑΒΓ, ἴση δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΔΓ. ἐπεὶ οὖν δοθὲν τὸ ΑΓ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΔΓ παραβέβληται ἔλλειπον εἴδει δεδομένῳ τῷ εἴδει ΕΒ· δέδοται τὸ πλάτος τὸ ἐλλείμματος· δοθεῖσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΔ. ἀλλὰ καὶ συναμφότερος ἡ ΑΒΓ δοθεῖσά ἐστι· δοθεῖσαι ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.



Duæ enim rectæ ΑΒ, ΒΓ datum spatium ΑΓ comprehendant in angulo dato ΑΒΓ, & utraque simul rectarum ΑΒΓ data sit: dico unamquamque rectarum ΑΒ, ΒΓ datam esse.

Producatur enim ΓΒ ad punctum Δ, & ponatur ipsi ΑΒ æqualis ΒΔ, atque per punctum Δ ipsi ΒΑ parallela agatur ΔΕ, compleaturque ΑΔ. quoniam igitur æqualis est ΔΒ ipsi ΒΑ, atque datus est angulus ΑΒΔ; nam qui est ipsi deinceps [ex hyp.] datus est: parallelogrammum igitur ΕΒ specie datum est. & quoniam data est [ex hyp.] simul utraque ΑΒΓ; estque [per constr.] ΑΒ æqualis ipsi ΒΔ: recta igitur ΔΓ [per 3.dat.] data est. quoniam itaque ad datam rectam ΔΓ datum spatium ΑΓ applicatum est, deficiens data specie figura ΕΒ: igitur [per 58. dat.] latitudines defectus datæ sunt: quare rectæ ΑΒ, ΒΔ datæ sunt. at vero [ex hyp.] utraque simul ΑΒΓ data est: unaquæque igitur rectarum ΑΒ, ΒΓ [per 4.dat.] data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πϛ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον παρέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μιᾶς τῶν ἀπὸ τῆς ἑτέρας, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα.

Prop. LXXXVI.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in angulo dato, quadratum autem unius quadrato alterius majus sit, dato, quam in ratione; & utraque ipsarum data erit.

Ἢ ὡς ἐν ἄλλῳ ἀντιτύπῳ ἀναγινώσκεται.

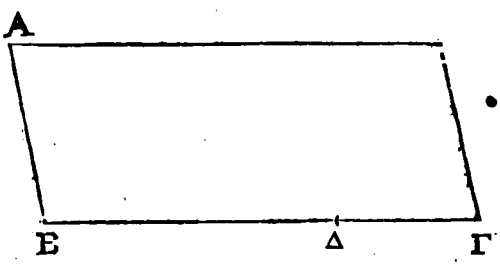
Vel ut legitur in alio exemplari.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, δυνατὸν δὲ ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν, δοθέντι, μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν δοθεῖσα ἔσται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δοθὲν χωρίον περιεχέτωσαν τὸ ΑΓ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

Duæ enim rectæ ΑΒ, ΒΓ datum spatium ΑΓ comprehendant in angulo dato ΑΒΓ; quadratum autem rectæ ΒΓ quadrato rectæ ΑΒ majus sit, dato, quam in ratione: dico utramque rectarum ΑΒ, ΒΓ datam esse.

Quoniam enim quadratum rectæ ΓΒ quadrato rectæ ΒΑ majus eſt, dato, quam in ratione; auferatur datum, ſitque id quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ: ergo [per 11.def.dat.] ratio reliqui, quod nempe continetur ſub ΒΓ, ΓΔ, ad quadratum rectæ ΑΒ data eſt. quoniam vero datum eſt id quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ, atque etiam illud quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ datum: ratio igitur ejus quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ ad id quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ [per 1.dat.] data eſt. ut autem id quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ ad id quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ ita [per 1.6.] eſt ΑΒ ad ΒΔ: quare ratio rectæ ΑΒ ad rectam ΒΔ data eſt: ideoque [per 50. dat.] ratio quadrati rectæ ΑΒ ad quadratum rectæ ΒΔ data eſt. datur autem ratio ejus quod continetur ſub ΒΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΑΒ: ergo [per 8.dat.] & ratio ejus quod continetur ſub ΒΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data eſt: quare ratio ejus quod quater continetur ſub ΒΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data eſt; ideoque [per 6.dat.] & ratio ejus quod quater continetur ſub ΒΓ, ΓΔ una cum quadrato rectæ ΒΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data eſt. ſed [per 8.2.] id quod quater continetur ſub ΒΓ, ΓΔ una cum quadrato rectæ ΒΔ eſt quadratum utriuſque ſimul ΒΓ, ΓΔ: ratio igitur quadrati utriuſque ſimul ΒΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data eſt: quare [per 54.dat.] & ratio utriuſque ſimul ΒΓ, ΓΔ ad ΒΔ data eſt: ergo [per 6.dat.] & componendo ratio rectarum ΒΓ, ΓΔ, necnon ipſius ΒΔ; id eſt duarum ΓΒ, ad ΒΔ data eſt: quare & ratio unius ΓΒ ad ΒΔ data eſt. ut autem ΓΒ ad ΒΔ ita [per 1.6.] quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ ad quadratum rectæ ΒΔ: ergo & ratio ejus quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data eſt. datum autem eſt [per conſtr.] id quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ: quare [per 2. dat.] & quadratum rectæ ΒΔ datum eſt: ideoque data eſt recta ΒΔ: igitur [per 2.dat.] & ipſa ΒΓ data eſt; nam & ratio ipſius ΒΔ ad ΒΓ data eſt, & ipſa ΒΔ data. at vero [ex hyp.] datum eſt ſpatium ΑΓ, anguluſque ΑΒΓ datus: quare [per 57. dat.] data eſt ΑΒ: utraque igitur rectarum ΑΒ, ΒΓ data eſt.



Επὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἡ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ δοθὲν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ δοθέν· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγον ἐστὶ δοθείς. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τὸ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγον ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρας ἐστὶ τῆς ΒΓ, ΓΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρας τῆς ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ δοθείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι ἄρα τῶν ΒΓ, ΓΔ καὶ τῆς ΒΔ, τουτέστι δύο τῶν ΓΒ, πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ μιᾶς τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγον ἐστὶ δοθείς. ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστι, τῆς γὰρ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ λόγον ἐστὶ δοθείς, καὶ δέδοται ἡ ΒΔ. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΓ, καὶ δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

PROP. LXXXVII.

Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato, poſſit autem altera altera majus, dato; & earum utraque data erit.

DUÆ enim rectæ ΑΒ, ΒΓ datum ſpatium ΑΓ comprehendant in angulo dato ΑΒΓ; quadratum autem rectæ ΑΒ quadrato rectæ ΒΓ majus ſit, dato: dico utramque ipſarum ΑΒ, ΒΓ datam eſſe.

Quoniam enim quadratum rectæ ΑΒ quadrato rectæ ΒΓ majus eſt, dato; auferatur datum, ſit-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πζ'.

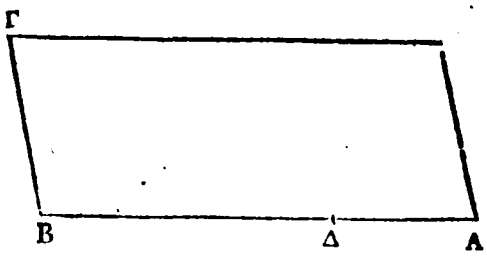
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, δοθέντι, μεῖζον ᾖ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν δοθεῖσα ἔσται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δοθὲν χωρίον περιεχέτωσαν τὸ ΑΓ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν, καὶ ἔστω

τὸ

τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθείς. ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΒ, ΒΓ ἕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ. δοθείς· τοῦ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· καὶ τοῦ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα τοῦ τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς. ἀλλὰ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ δοθείς. καὶ συνθέντι συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ μετὰ τῆς ΒΔ, τετάρτου δύο τῶν ΑΒ, πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ μιᾶς ἄρα τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς, ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, ἕτω γὰρ δοθὲν ἀφήρηται· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΑΒ. καὶ ἐστὶ λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΒΓ.



que id quod continetur ſub AB, BΔ; ergo reliquum, quod ſc. [per 2.2.] continetur ſub BA, AΔ, æquale eſt quadrato rectæ BΓ. quoniam vero id quod continetur ſub AB, BΓ, necnon id quod continetur ſub AB, BΔ, datum eſt: ratio igitur ejus quod continetur ſub AB, BΔ ad id quod continetur ſub AB, BΓ [per 1. dat.] data eſt. atque ut rectangulum ſub AB, BΔ ad rectangulum ſub AB, BΓ ita eſt ΔB ad BΓ: ergo datur ratio rectæ ΔB ad rectam BΓ; adeoque [per 50. dat.] ratio quadrati rectæ ΔB ad quadratum rectæ BΓ data eſt. quadrato autem rectæ BΓ æquale eſt [per conſtr. & 2. 2.] rectangulum ſub BA, AΔ: igitur ratio rectanguli ſub BA, AΔ ad quadratum rectæ ΔB data eſt: ideoque & ratio ejus quod quater continetur ſub BA, AΔ ad quadratum rectæ ΔB data eſt: quare & ratio ejus quod quater continetur ſub BA, AΔ una cum quadrato rectæ ΔB ad quadratum rectæ ΔB data eſt. ſed id quod quater continetur ſub BA, AΔ una cum quadrato rectæ ΔB eſt [per 8. 2.] quadratum utriuſque ſimul BA, AΔ: igitur ratio quadrati utriuſque ſimul BA, AΔ ad quadratum rectæ ΔB data eſt: quare [per 54. dat.] & ratio utriuſque ſimul BA, AΔ ad ΔB data eſt. atque componendo [per 6. dat.] ratio utriuſque ſimul BA, AΔ & ipſius BΔ, hoc eſt duarum AB, ad BΔ data eſt: ergo & ratio unius AB ad BΔ data eſt. at vero ratio ΔB ad BΓ data eſt: ergo [per 8. dat.] & ratio ipſius AB ad BΓ data eſt. & quoniam ratio ipſius AB ad BΔ data eſt; atque [per 1.6.] eſt ut AB ad BΔ ita quadratum rectæ AB ad id quod continetur ſub AB, BΔ: ratio igitur quadrati rectæ AB ad id quod continetur ſub AB, BΔ data eſt. datum autem eſt id quod continetur ſub AB, BΔ; ſic enim ablatum fuit ſpatium datum: ergo [per 2.dat.] & quadratum rectæ AB datum eſt: quare data eſt recta AB. eſt autem ratio ipſius AB ad BΓ data: recta igitur BΓ data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πή'.

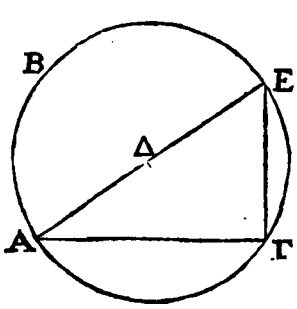
Ἐὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἀποτέμνουσα τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῷ μεγέθει.

PROP. LXXXVIII.

Si in circulum magnitudine datum acta ſit recta linea, ſegmentum auferens quod angulum datum comprehendat; acta recta magnitudine data eſt.

ΕΙΣ γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ ἤχθω ἡ ΑΓ, ἀποτέμνουσα τμῆμα τὸ ΑΕΓ δεχόμενον γωνίαν ΑΕΓ δοθεῖσαν· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ δέδοται τῷ μεγέθει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω καὶ προσεκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΕ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΓ



IN circulum enim magnitudine datum ABΓ agatur recta linea AΓ, auferens ſegmentum AEΓ quod comprehendat angulum datum AEΓ: dico rectam AΓ magnitudine datam eſſe.

Sumatur enim [per 1.3.] circuli centrum Δ, & connexa recta AΔ producatur ad punctum E, atque connectatur ΓE. datus igitur eſt angulus AΓE; etenim [per 31.3.] rectus eſt. angulus quoque AEΓ [ex hyp.] datus

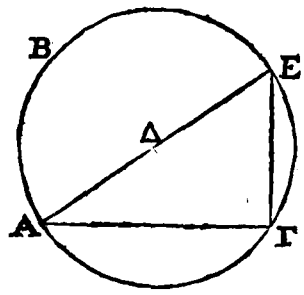
datus est: quare & reliquus angulus ΓΑΕ [per 32. 1. & 4. dat.] datus est: triangulum igitur ΑΓΕ [per 40. dat.] specie datum est; adeoque ratio ipsius ΕΑ ad ΑΓ [per 3. def. dat.] data est. est autem [per 5. def. dat.] ΕΑ magnitudine data; quia datur circulus magnitudine: ergo [per 2. dat.] & ipsa ΑΓ magnitudine data est.

δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ δοθεῖσά ἐστι δόσει ἄρα τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγῳ ἄρα ἐστὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΕΑ τῷ μεγέθει, ἐπεὶ καὶ ὁ κύκλος δέδοται τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῷ μεγέθει.

PROP. LXXXIX.

Si in datum magnitudine circulum data magnitudine recta acta fuerit; auferet segmentum quod angulum datum comprehendet.

IN circulum enim magnitudine datum ΑΒΓ agatur recta magnitudine data ΑΓ: dico quod auferet segmentum quod angulum datum comprehendet.



Accipiatur enim [per 1. 3.] circuli centrum Δ, & connexa recta ΑΔ producatur ad punctum Ε, connectaturque ΓΕ. & quoniam data est utraque rectarum ΕΑ, ΑΓ: igitur [per 1. dat.] ratio ipsius ΕΑ ad ΑΓ data est. rectus autem est [per 31. 3.] angulus ΑΓΕ: quare [per 44. dat.] triangulum ΑΓΕ specie datum est: angulus igitur ΑΕΓ [per 3. def. dat.] datus est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πθ'.

Ἐὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ δεδομένη τῷ μεγέθει· ἀπολήψεται τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν.

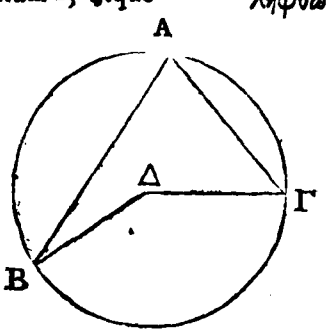
ΕΙΣ γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΓ δεδομένη τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι ἀπολήψεται τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΑ, ΑΓ· λόγῳ ἄρα ἐστὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς. ἔστω ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία.

PROP. XC.

Si in circuli positione dati circumferentia acceptum fuerit datum punctum, ab eo autem puncto ad circumferentiam circuli inflexa fuerit recta linea quæ datum angulum efficiat; inflexæ rectæ altera extremitas data est.

IN circuli enim positione dati ΑΒΓ circumferentia accipiatur punctum datum Β, atque à puncto Β inflectatur recta ΒΑΓ quæ faciat angulum ΒΑΓ datum: dico punctum Γ datum esse.



Accipiatur enim [per 1. 3.] circuli centrum Δ, & connectantur ΒΔ, ΔΓ. & quoniam datum est utrumque punctorum Β, Δ: igitur [per 26. dat.] positione data est ΒΔ. & quoniam datus est angulus ΒΑΓ: angulus igitur ΒΔΓ [per 20. 3. & 2. dat.] datus quoque est. quoniam itaque ad datam positione rectam ΒΔ, & datum in ea punctum Δ, recta ΔΓ acta est quæ facit angulum ΒΔΓ datum: recta igitur ΔΓ [per 29. dat.] positione data est. circulus autem ΑΒΓ positione & magnitudine datus est: quare [per 25. & 26. dat.] positione & magnitudine data est ΔΓ. datum autem est punctum Δ: ergo [per 27. dat.] punctum Γ datum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ὁποιονοῦν περιφερείας δοθὲν σημεῖον ληφθῇ, ἀπὸ δὲ τούτου πρὸς τὸν τοῦ κύκλου περιφέρειαν κλασθῇ τις εὐθεῖα δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν· δέδοται τὸ ἕτερον πέρας τῆς κλασθείσης.

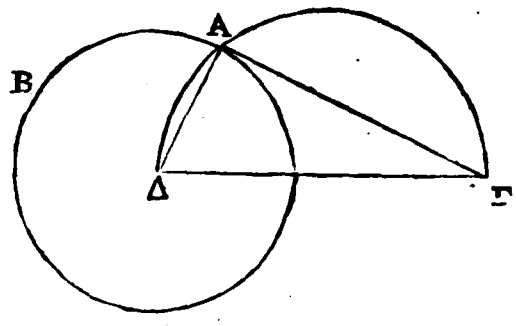
ΚΥΚΛΟΥ γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω ὁποιονοῦν τῆς περιφερείας δοθὲν σημεῖον τὸ Β, ἀπὸ δὲ τοῦ Β σημείου κεκλάσθω εὐθεῖα ἡ ΒΑΓ δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν πρὸς ΒΑΓ· λέγω ὅτι δέδοται τὸ Γ σημεῖον.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ κύκλου τὸ κέντρον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστι ἑκάτερον τῶν Β, Δ, θέσει ἐστὶν ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΔ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΔΓ δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΔΓ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ θέσει. θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει δοθεῖς ἡ ΑΒΓ κύκλος· θέσει ἄρα καὶ τῷ μεγέθει δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΔΓ. καὶ δοθὲν τὸ Δ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Γ σημεῖον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛα'.

Εἰ ἀπὸ δεδομένου σημείου, ᾧ θέσει δεδομένῃ κύκλῳ ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἀχθῇ· δίδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Γ, θέσει δεδομένου κύκλου οὗ ΑΒ ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἡ ΓΑ εὐθεῖα δίδοται τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.



Εἰλήφθω γὰρ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν ἐστιν ἑκάτερον τῶν Δ, Γ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ. καὶ ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει διὰ τοῦ Α. ἤχθω δὴ ἔστω ὁ ΔΑΓ· θέσει ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑΓ. θέσει δὲ καὶ ὁ ΑΒ κύκλος δοθείς· ἐστιν ἄρα τὸ Α δοθέν. ἀλλὰ καὶ τὸ Γ δοθέν ἐστι· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

PROP. XCI.

Si à dato puncto recta linea acta fuerit, quæ datum positione circulum contingat; acta recta positione & & magnitudine data est.

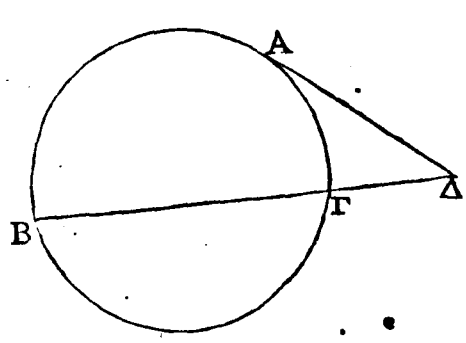
A Dato enim puncto Γ datum positione circulum ΑΒ contingens recta ΓΑ ducatur: dico positione & magnitudine datam esse rectam ΓΑ.

Sumatur enim [per 1.3.] circuli centrum Δ, & connectantur rectæ ΔΑ, ΔΓ. & quoniam utrumque punctorum Δ, Γ datum est: recta igitur ΔΓ [per 26. dat.] positione & magnitudine data est. & [per 18.3.] rectus est angulus ΔΑΓ: ergo [per 31. 3.] super ΔΓ describtus semicirculus transibit per punctum Α. transeat, sitque ΔΑΓ: ergo [per 6.def.dat.] positione datus est circulus ΔΑΓ. est autem [ex hyp.] circulus ΑΒ positione datus: quare [per 25. dat.] punctum Α datum est. sed & punctum Γ [ex hyp.] datum est: recta igitur ΑΓ [per 26. dat.] positione & magnitudine data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛβ'.

Εἰ κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς δοθέν, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ εὐθεῖα· τὸ ὑπὸ τὴν ἀχθεῖσαν καὶ τὴν μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέν ἐστι.

Κύκλου γὰρ δεδομένου τῇ θέσει τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ σημείου διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΒ τεμνέτω τὸν κύκλον· λέγω ὅτι δοθέν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ.



Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ΔΑ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΑΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ.

PROP. XCII.

Si extra circulum positione datum accipiatur aliquod punctum, à dato autem puncto in circulum ducatur recta quædam; rectangulum sub ducta linea & ea quæ inter punctum & convexam peripheriam interjicitur datum erit.

E Xtra enim datum positione circulum ΑΒΓ accipiatur aliquod punctum Δ; à puncto autem Δ agatur quædam recta ΔΒ secans circulum: dico rectangulum sub ΒΔ, ΔΓ datum esse.

Agatur enim [per 17. 3.] à puncto Δ circulum ΑΒΓ contingens recta ΔΑ: recta igitur ΔΑ [per 91.dat.] positione & magnitudine data est. quoniam itaque data est ΑΔ: etiam quadratum rectæ ΑΔ [per 52. dat.] datum est. & [per 36.3.] æquale quidem est ei quod continetur sub ΒΔ, ΔΓ: quare & id quod continetur sub ΒΔ, ΔΓ datum est.

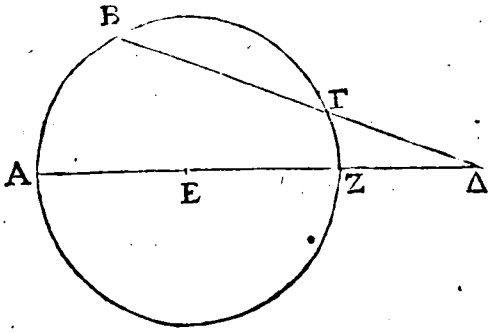
ΑΛΛΩΣ.

Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Α. καὶ ἐπεὶ

ALITER.

Accipiatur [per 1.3.] circuli centrum Ε, & jungatur ΔΕ & producatur ad punctum Α. & quoniam

tum eſt [ex hyp.] utrumque punctorum E, Δ: recta igitur EΔ [per 26. dat.] poſitione & magnitudine data eſt. circulus autem ABZ [ex hyp.] datus eſt magnitudine & poſitione: utrumque igitur punctorum A, Z [per 25. dat.] datum eſt. datum autem [ex hyp.] eſt punctum Δ: utraque igitur rectarum AΔ, ZΔ [per 26. dat.] data eſt: quare quod continetur ſub AΔ, ΔZ datum eſt. & [per 36. 3.] id quod continetur ſub AΔ, ΔZ æquale eſt ei quod continetur ſub BΔ, ΔΓ: ergo & id quod continetur ſub BΔ, ΔΓ datum eſt.



δοθὲν ἐστιν ἑκάτερον τῶν E, Δ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ EΔ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει. δέδοται δὲ καὶ ὁ ABZ κύκλος· δοθὲν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν A, Z. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· δοθεῖσαι ἄρα εἰσὶν ἑκατέρα τῶν AΔ, ZΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔZ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔZ τῷ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ.

PROP. XCIII.

Si intra datum poſitione circulum ſumatur aliquod datum punctum, per punctum autem agatur in circulum recta aliqua linea; quod ſub ſegmentis actæ rectæ lineæ comprehenditur rectangulum datum erit.

ETenim intra circulum poſitione datum BΓ ſumatur aliquod punctum datum A; per punctum autem A agatur quævis recta ΓB: dico rectangulum ſub BA, AΓ datum eſſe.

Accipiatur enim [per 1. 3.] circuli centrum Δ, & connexa recta AΔ producatur ad puncta Z, E. itaque quoniam datum eſt [ex hyp.] utrumque punctorum Δ, A: igitur [per 26. dat.] poſitione data eſt recta ΔA. eſt autem & circulus ΓBZ [ex hyp.] poſitione datus: utrumque igitur punctorum Z, E [per 25. dat.] datum eſt. punctum autem A [ex hyp.] datum eſt: ergo [per 26. dat.] utraque rectarum ZA, AE data eſt: ideoque rectangulum ſub ZA, AE datum eſt. & [per 35. 3.] eſt æquale rectangulo ſub BA, AΓ: igitur rectangulum ſub BA, AΓ datum eſt.

PROP. XCIV.

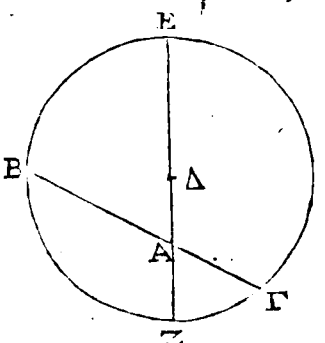
Si in circulum magnitudine datum agatur recta linea, ſegmentum auferens quod angulum datum comprehendat, angulus autem qui in ſegmento conſiſtit bifariam ſecetur: utraque ſimul rectarum, quæ angulum datum comprehendunt, ad lineam, quæ angulum bifariam ſecat, habebit rationem datam; & rectangulum ſub utriſque ſimul, quæ datum angulum comprehendunt, rectis & inferne abſciſſa ab ea, quæ angulum in circumferentia datum bifariam ſecat, datum erit.

IN circulum enim magnitudine datum ABΓ agatur recta BΓ, ſegmentum auferens quod da-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν κύκλῳ δεδομένῳ τῇ θέσει ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς δοθέν, διὰ δὲ τοῦ σημείου διαχθῇ τις εὐθεῖα εἰς τὸν κύκλον· τὸ ὑπὸ τῶν τὴν ἀχθείσης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθὲν ἔσται.

Κύκλος γὰρ δεδομένος τῇ θέσει τὸν ΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ Α δοθέν, διὰ δὲ τοῦ Α διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΒ· λέγω ὅτι δεδομένον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τὰ ΒΑ, ΑΓ.



Εἰλήφθω γὰρ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθεισα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ, Ε. ἐπεὶ οὖν δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν Δ, Α· θέσει ἄρα καὶ ἡ ΔΑ. θέσει δὲ καὶ ὁ ΓΒΖ κύκλος· δοθὲν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Ζ, Ε. ἔστι δὲ καὶ τὸ Α δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΖΑ, ΑΕ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τὰ ΖΑ, ΑΕ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

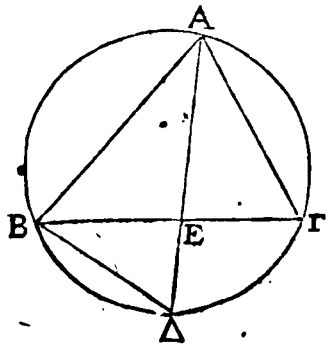
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἀπολαμβάνουσα τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν, καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία δίχα τμηθῇ· συναμφότεροι αἱ τὴν δεδομένην γωνίαν περιέχουσαι πλευραὶ πρὸς τὴν δίχα τέμνουσαν τὴν γωνίαν λόγον ἔξουσι δεδομένον, καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς τὴν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς κάτω ἀπολαμβανομένης ἀπὸ τῆς δίχα τεμνούσης τὴν γωνίαν πρὸς τῇ περιφερείᾳ δοθὲν ἔσται.

ΕΙΣ γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ εὐθεῖα ἤχθω ἡ ΒΓ, ἀπολαμβάνουσα τμῆμα δεχόμενον

χόμβον γωνίαν δοθεῖσαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ μετμήθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθεῖς, καὶ ὅτι δοθέν ἐστι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ.

Ἐπιζεύχθω ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ δέδεκται εὐθεῖα ἡ ΒΓ, ἀπολαμβάνουσα τμῆμα τὸ ΒΑΓ δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῷ μεγέθει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΔ δοθεῖσά ἐστι τῷ μεγέθει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ· καὶ ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. καὶ ἐπεί ἐστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ. λόγος δὲ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς.

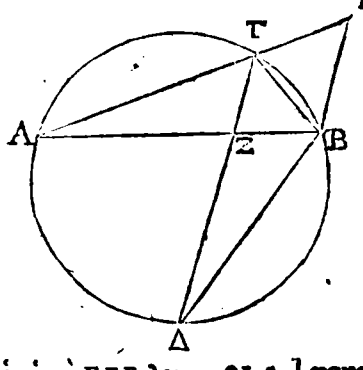


ΛΕΓΩ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΔΕ δοθέν ἐστι.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογωνίου ἐστὶ τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΒ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ· ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἐστὶ συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ· ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ.

ΑΛΛΩΣ.

Διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΒΔ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἑκατέρας τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΕ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΑΒΔ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΕ ἐστιν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΒ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ



tum angulum BAΓ comprehendat, & secetur angulus BAΓ bifariam recta AΔ: dico rationem utriusque simul rectæ BAΓ ad AΔ datam esse; necnon datum esse id quod sub utraque simul BAΓ & recta EΔ continetur.

Connectatur BΔ. & quoniam in circulum ABΓ magnitudine datum acta est recta BΓ, auferens segmentum BAΓ quod angulum datum BAΓ comprehendat: magnitudine igitur [per 88. dat.] data est recta BΓ. similiter data est recta BΔ: igitur ratio ipsius BΓ ad BΔ [per 1.dat.] data est. quoniam vero [ex hyp.] angulus BAΓ recta AΔ bifariam sectus est: est igitur [per 3. 6.] ut BA ad AΓ ita BE ad EΓ: ideoque [per 16. 5.] permutando, ut AB ad BE ita est AΓ ad ΓE: quare [per 12. 5.] ut utraque BAΓ ad BΓ ita AΓ ad ΓE. & quoniam angulus BAE angulo EAΓ æqualis est; estque [per 21.3.] angulus AΓE angulo BΔE æqualis: reliquus igitur AEΓ reliquo angulo ABΔ [per 32. 1.] æqualis est: adeoque æquiangulum est triangulum AEΓ triangulo ABΔ: quare [per 4.6.] ut AΓ ad ΓE ita est AΔ ad ΔB. sed [ex mox ostensis] ut AΓ ad ΓE ita est utraque BAΓ ad BΓ: igitur ut utraque simul BAΓ ad BΓ ita AΔ ad ΔB: ideoque permutando ut utraque BAΓ ad AΔ ita est BΓ ad BΔ. est autem ratio ipsius BΓ ad BΔ data: ergo & ratio utriusque simul BAΓ ad AΔ data est.

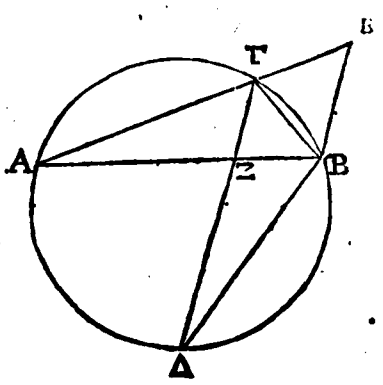
Dico insuper rectangulum sub utraque simul BAΓ & ΔE datum esse.

Quoniam enim [per 15. 1. & 21. 3.] triangulum AEΓ triangulo ΔEB æquiangulum est: est igitur [per 4.6.] ut BΔ ad ΔE ita AΓ ad ΓE. ut autem AΓ ad ΓE ita est [ex supra ostensis] utraque BAΓ ad BΓ: quare [per 11.5.] ut utraque BAΓ ad BΓ ita est BΔ ad ΔE: ideoque [per 16.6.] quod continetur sub utraque BAΓ & ΔE æquale est ei quod continetur sub ΓB, BΔ. quod autem continetur sub ΓB, BΔ [ex mox ostensis] datum est: ergo & id quod continetur sub utraque BAΓ & EΔ datum est.

ALITER.

Producatur AΓ ad punctum E, & ponatur ipsi BΓ æqualis ΓE, connectanturque EB, BΔ. & quoniam [per constr. & 5.& 32.1.] angulus AΓB utriusvis angulorum AΓΔ, ΓBE duplus est: angulus igitur ΓBE æqualis est angulo AΓΔ; hoc est [per 21. 3.] ipsi ABΔ. communis adjiciatur angulus ABΓ: totus igitur angulus ΔBΓ toti angulo ZBE æqualis est. angulus autem ΓAB angulo ΓΔB [per 21.3.] æqualis est: reliquus igitur ΓEB [per 32.1.] reliquo ΔΓB æqualis est: ideoque trian-

gulum EAB triangulo ΓΔB æquiangulum eſt: quare [per 4.6.] ut EA ad AB ita ΓΔ ad ΔB. eſt autem [per conſtr.] recta EA utraq; ſimul AΓB: ergo ut utraque ſimul AΓB ad AB ita eſt ΓΔ ad BΔ: permutando igitur ut utraque ſimul AΓB ad ΓΔ ita eſt AB ad BΔ. eſt autem [per 1. dat.] ratio ipſius AB ad BΔ data; utraque enim earum [per 88.dat.] data eſt: quare ratio utriuſque AΓB ad ΓΔ data eſt.



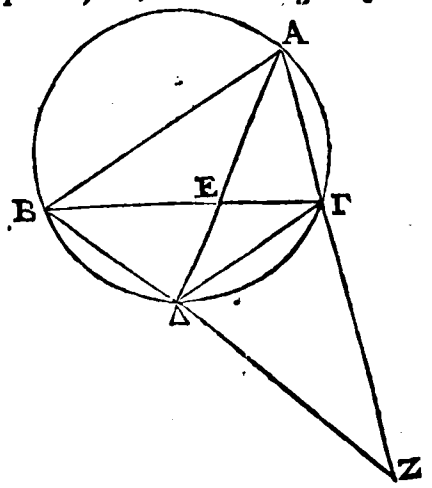
ET quoniam [ex ſupra oſtenſis] triangulum EAB eſt triangulo ZBΔ æquiangulum: erit [per 4.6.] ut EA ad AB ita BΔ ad ΔZ. eſt autem [per conſtr.] EA utraque AΓB: quare ut utraque ſimul AΓB ad AB ita eſt BΔ ad ΔZ: ideoq; [per 16.6.] quod continetur ſub utraque AΓB & ZΔ æquale eſt ei quod continetur ſub AB, BΔ. eſt autem id quod continetur ſub AB, BΔ datum; etenim [per 88.dat.] utraque rectarum AB, BΔ data eſt: ergo quod continetur ſub utraque ſimul AΓB & ZΔ datum eſt.

τὸ EAB τρίγωνον τῷ ΓΔB τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ EA πρὸς τὴν AB ὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔB. ἡ δὲ EA συναμφοτέρος ἐστὶν ἡ AΓB· καὶ ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ AΓB πρὸς τὴν AB ὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν BΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ AΓB πρὸς τὴν ΓΔ ὕτως ἡ AB πρὸς τὴν BΔ. λόγος δὲ ἐστὶ τῆς AB πρὸς τὴν BΔ δοθείς, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν δοθεῖσα ἐστί· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ συναμφοτέρου τῆς AΓB πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ EAB τρίγωνον τῷ ZBΔ τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ EA πρὸς τὴν AB ὕτως ἡ BΔ πρὸς τὴν ΔZ. ἡ δὲ EA συναμφότερός ἐστιν ἡ AΓB· ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ AΓB πρὸς τὴν AB ὕτως ἡ BΔ πρὸς τὴν ΔZ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς AΓB καὶ τῆς ZΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AB, BΔ. δοθὲν δὲ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΔ· δοθεῖσαι γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς AΓB καὶ τῆς ZΔ.

ALITER.

Producatur AΓ ad punctum Z, & fiat ΓZ æqualis ipſi BA, connectanturque BΔ, ΔΓ, ΔZ. & quoniam æqualis eſt BA ipſi ΓZ, atque ΔB [per 26.& 29. 3.] ipſi ΔΓ; adeoque duæ AB, BΔ duabus ZΓ, ΓΔ æquales ſunt utraque utrique. atque etiam [per 13.1.& 22. 3.] angulus ABΔ angulo ΔΓZ æqualis eſt, quia quadrilaterum ABΔΓ eſt in circulo: baſis igitur AΔ [per 4.1.] baſi ΔZ æqualis eſt, & triangulum ABΔ triangulo ΓΔZ æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur; adeoque angulus BAΔ angulo ΔZΓ æqualis eſt. angulus autem BAΔ [ex hyp.] datus eſt: quare angulus ΔZΓ datus eſt. ſed & angulus ΔAZ datus eſt: triangulum igitur AΔZ [per 40. dat.] ſpecie datum eſt: adeoque [per 3.def.dat.] data eſt ratio ipſius ZA ad AΔ. eſt autem AZ utraque ſimul BAΓ; quia [per conſtr.] æqualis eſt ΓZ ipſi BA: ratio igitur utriuſque ſimul BAΓ ad AΔ data eſt.



ET eadem ratione, qua ſuperius, rectangulum ſub utraque ſimul BAΓ & EΔ datum eſſe oſtendemus.

ΑΛΛΩΣ

Διήχθω ἡ AΓ ἐπὶ τὸ Z, καὶ κείσθω τῇ BA ἴση ἡ ΓZ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BΔ, ΔΓ, ΔZ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν BA τῇ ΓZ, ἡ δὲ ΔB τῇ ΔΓ· δύο δὴ αἱ AB, BΔ δυσὶ ταῖς ZΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABΔ τῇ ὑπὸ ΔΓZ ἐστιν ἴση, ἐπειδήπερ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ABΔΓ τετράπλευρον· βάσις ἄρα ἡ AΔ βάσει τῇ ΔZ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ABΔ τρίγωνον τῷ ΓΔZ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔZΓ. δοθεῖσα δὲ ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAΔ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔZΓ γωνία. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔAZ γωνία δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ AΔZ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ZA πρὸς τὴν AΔ δοθείς. ἡ δὲ AZ συναμφότερός ἐστιν ἡ BAΓ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΓZ τῇ BA· λόγος ἄρα ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς BAΓ πρὸς τὴν AΔ δοθείς.

ΚΑΙ ὁμοίως τῷ πρότερον δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς BAΓ καὶ τῆς EΔ δοθέν ἐστι.

PROP. XCV.

Si in circuli poſitione dati diametro ſumatur datum punctum, à puncto autem in circulum producatur quædam re-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛε'.

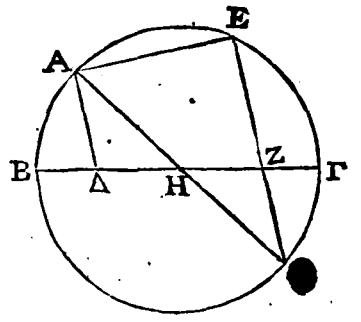
Ἐὰν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ὅτι τῆς διαμέτρου δοθὲν σημεῖον ληφθῇ, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσβληθῇ τις εὐθεῖα,

ἡ ἀπὸ τοῦ τομῆς τις πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ τῇ διαχθείσῃ, ἀφ' οὗ δὲ μὲν σημείου, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου, παράλληλος ἀχθῇ τῇ διαχθείσῃ· δοθὲν ἔσται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθὲν ἔσται.

ecta, agaturque recta à ſectione ad rectos angulos in productam rectam; per punctum autem in quo linea, quæ ad rectos angulos inſiſtit, occurrit circumferentiæ circuli, agatur parallela productæ rectæ: datum eſt illud punctum in quo parallela occurrit ipſi diametro; & quod ſub parallelis lineis comprehenditur rectangulum datum eſt.

Κύκλου γὰρ τῇ θέσει δεδομένου τοῦ ΑΒΓ δέσθω τοῦ διαμέτρου τοῦ ΒΓ εἰλήφθω δοθὲν σημεῖον τὸ Δ, ἀφ' οὗ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν κύκλον προσβεβλήσθω τις τυχοῦσα ἡ ΔΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α τῇ ΔΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ, ἀφ' οὗ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι δοθέν ἐστι τὸ Ζ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΕΖ χωρίον δοθέν ἐστι.

Διήχθω ἡ ΕΖ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΘΕΑ γωνία, ἡ ΘΑ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος· τὸ Η ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Η. ἔστι δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΕΘ, καί ἐστιν ἴση ἡ ΘΗ τῇ ΗΑ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΔΗ τῇ ΗΖ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΖΘ. δοθεῖσα δὲ ἡ ΔΗ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΖ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΖ, ΗΔ δοθεῖσά ἐστι. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Η· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Ζ.



ΚΑΙ ἐπεὶ ἐντὸς κύκλου δεδομένου τῇ θέσει τοῦ ΑΒΓ εἴληπται σημεῖον τὸ Ζ δοθέν, καὶ δῆκται τις ἡ ΕΖΘ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΘ. ἴση δὲ ἡ ΘΖ τῇ ΔΑ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΕΖ.

IN circuli enim poſitione dati ΑΒΓ diametro ΒΓ accipiatur datum punctum Δ, per punctum autem Δ producatur in circulum recta quædam linea ΔΑ, à puncto autem Α ipſi ΔΑ ad angulos rectos agatur recta ΑΕ, atque per punctum Ε ipſi ΑΔ parallela agatur ΕΖ: dico punctum Ζ datum eſſe; atque etiam datum eſſe rectangulum ſub ΑΔ, ΕΖ comprehenſum.

Producatur enim recta ΕΖ ad punctum Θ, & connectatur recta ΑΘ. quoniam angulus ΘΕΑ rectus eſt; recta ΘΑ [per 31.3.] eſt circuli ΑΒΓ diameter. eſt autem [ex hyp.] & ΒΓ diameter circuli ΑΒΓ: ergo punctum Η circuli ΑΒΓ centrum eſt: quare datum eſt punctum Η. eſt autem [ex hyp.] punctum Δ datum: ergo [per 26. dat.] data eſt recta ΔΗ magnitudine. & quoniam recta ΑΔ [ex hyp.] parallela eſt ipſi ΕΘ, atque eſt ΘΗ ipſi ΗΑ æqualis: igitur [per 29. 1. & 4. 6.] æqualis eſt ΔΗ quidem ipſi ΗΖ, & ΑΔ ipſi ΖΘ. eſt autem recta ΔΗ data: ergo etiam data eſt ΗΖ. ſed & etiam poſitione datæ ſunt: ergo utraque rectarum ΗΖ, ΗΔ data eſt. atque datum eſt punctum Η: quare [per 27. dat.] & punctum Ζ datum eſt.

ΕΤ quoniam intra circulum poſitione datum ΑΒΓ acceptum eſt datum punctum Ζ, & acta eſt recta ΕΖΘ: rectangulum igitur ſub ΕΖ, ΖΘ [per 93. dat.] datum eſt. æqualis autem eſt ΘΖ ipſi ΔΑ: ergo rectangulum ſub ΑΔ, ΕΖ datum eſt.

ΤΕΛΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.

FINIS DATORUM EUCLIDIS.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΑΡΜΟΝΙΚΗ.

EUCLIDIS

INTRODUCTIO

HARMONICA.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ.

EUCLIDIS

INTRODUCTIO HARMONICA.

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ἐστιν ἐπιστήμη θεωρητικὴ καὶ πρακτικὴ τῶν τῆ ἡρμοσμένης φύσεως. Ἡρμοσμένον δέ ἐστι τὸ ἐκ φθόγγων ϛ διαστημάτων, ποιάν, τάξιν ἐχόντων, συγκείμενον. μέρη δ' αὐτῆς ἐστιν ἑπτά. περὶ φθόγγων. περὶ διαστημάτων. περὶ γενῶν. περὶ συστημάτων. περὶ τόνων. περὶ μεταβολῆς. περὶ μελοποιΐας.

Φθόγγος μὲν ἔν ἐστι φωνῆς πλῶσις ἐμμελὴς ἐπὶ μίαν τάσιν.

Διάστημα δὲ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο φθόγγων ἀνομοίων ὀξύτητι καὶ βαρύτητι.

Γένος δέ ἐστι ποιὰ τετράρων φθόγγων διαίρεσις.

Σύστημα δέ ἐστι, τὸ ἐκ πλειόνων ἢ ἑνὸς διαστημάτων συγκείμενον.

Τόνος δέ ἐστι τόπος τις τῆς φωνῆς, δεκτικὸς συστήματος, ἀπλατής.

Μεταβολὴ δέ ἐστιν ὁμοίου τινὸς εἰς ἀνόμοιον τόπον μετάθεσις.

Μελοποιΐα δέ ἐστι χρῆσις τῶν ὑποκειμένων τῇ ἁρμονικῇ πραγματείᾳ, πρὸς τὸ οἰκεῖον ἑκάστης ὑποθέσεως.

Ταῦτα δὲ θεωρεῖται ἐν φωνῆς ποιότητι, ἧς κινήσεις εἰσὶ δύο. ἡ μὲν συνεχὴς τις καὶ λογικὴ καλουμένη· ἡ δὲ διαστηματικὴ τις καὶ μελωδική. Ἡ μὲν οὖν συνεχὴς κίνησις τῆς φωνῆς τὰς τε ἐπιτάσεις, καὶ τὰς ἀνέσεις ἀφανῶς ποιεῖται, μηδαμοῦ ἱσταμένη, ἢ μέχρι σιωπῆς· ἡ δὲ διαστηματικὴ κίνησις τῆς φωνῆς ἐναντίως κινεῖται τῇ συνεχεῖ· μονάς τε γὰρ ποιεῖ, καὶ τὰς μεταξὺ τούτων διαστάσεις. ἀναλαμβάνει δ' αὐτῶν ἑκάτερον τίθησι. τὰς μὲν οὖν μονὰς, τάσεις καλοῦμεν· τὰς δὲ διαστάσεις, μεταβάσεις, τὰς δὲ τάσεων ἐπὶ τάσεις. τὰ δὲ ποιοῦντα τὴν τῶν τάσεων διαφορὰν, ἐπίτασίς ἐστι καὶ ἄνεσις. ἀποτέλεσμα δὲ τούτων ὀξύτης καὶ βαρύτης. τὸ μὲν γὰρ δι' ἐπιτάσεως γινόμενον, εἰς ὀξύτητα ἄγει· τὸ δὲ

HARMONICE est scientia, quæ modulatæ seriei naturam contemplatur, eamque effectui destinat. Modulata vero series est, quæ ex sonis & intervallis, secundum qualitatem ordinatis, componitur. Illius partes sunt septem. De sonis. de intervallis. de generibus. de systematis. de tonis. de commutatione. de melopœia.

Sonus est vocis casus, cantui aptus, in unam tensionem.

Intervallum vero est, quod continetur duobus sonis, acumine & gravitate differentibus.

Genus est quatuor sonorum secundum qualitatem distributio.

Systema est, quod ex pluribus uno intervallis constat.

Tonus est locus quidam vocis, systematis capax, latitudine carens.

Commutatio est similis alicujus in dissimilem locum transpositio.

Melopœia est usus eorum, quæ harmonicæ tractationi sunt subjecta; ita ut cuilibet argumento character suus tribuatur.

Hæc vero considerantur in vocis qualitate, cujus duo sunt motus. unus continuus vocatur, quo sermocinantes utimur: alter intervallis discretus, quem in modulationibus adhibemus. Porro continuus vocis motus tam tensiones quam remissiones efficit non apparentes, nullo in loco consistens antequam desinat. intervallis vero discretus vocis motus contra quam continuus observat motum: moras enim facit, quibus intervalla intercipiuntur: alternis vero utrumque illorum ponitur. moras itaque tensiones vocamus: transitus vero à tensionibus ad tensiones, intervalla. cæterum quæ differentes illas tensiones faciunt, intensio sunt ac remissio. quarum effectus sunt acumen atque gravitas. nam quod fit intensione, in acumen tendit: quod

vero remiſſione, ad gravitatem. acumen igitur eſt effectus intenſionis; ut contra gravitas, remiſſionis. utriſque enim accidit tenſiones eſſe conſecutum. tenſiones vero & ſoni pro eodem accipiuntur. tenſiones quidem ab inſtrumentis quæ tanguntur, à *tendendo* appellatæ: ſoni vero, quod à *voce* procreentur. atque illi quidem ob diverſas tenſiones ſunt innumeri: nominatim vero in quoque genere octodecim.

Genera ſunt tria; diatonum, chroma, harmonia. Ex his diatonum modulamur, ab acuto verſus grave, per tonum, & tonum, & hemitonium: contra, à gravi acutum verſus, per hemitonium, & tonum, & tonum. Chroma, in gravem ſonum, per triemitonium & hemitonium & hemitonium: in acumen, contrario modo, per hemitonium, & hemitonium, & triemitonium. Harmonia, in gravem ſonum, per ditonum, & dieſin, & dieſin: in acumen vero contra, per dieſin, & dieſin & ditonum.

Porro in diatono genere hi ſunt ſoni:

Proſlambanomenos.	Προσλαμβανόμενος.
Hypate hypaton.	Ὑπάτη ὑπατῶν.
Parypate hypaton.	Παρυπάτη ὑπατῶν.
Lichanos hypaton diatonos.	Λιχανὸς ὑπατῶν διάτονος.
Hypate meſon.	Ὑπάτη μέσων.
Parypate meſon.	Παρυπάτη μέσων.
Lichanos meſon diatonos.	Λιχανὸς μέσων διάτονος.
Meſe.	Μέση.
Trite ſynemmenos.	Τρίτη συνημμένων.
Paranete ſynemmenon diatonos.	Παρανήτη συνημμένων διάτονος.
Nete ſynemmenon.	Νήτη συνημμένων.
Parameſe.	Παραμέση.
Trite diezeugmenon.	Τρίτη διεζευγμένων.
Paranete diezeugmenon diatonos.	Παρανήτη διεζευγμένων διάτονος.
Nete diezeugmenon.	Νήτη διεζευγμένων.
Trite hyperbolæon.	Τρίτη ὑπερβολαίων.
Paranete hyperbolæon diatonos.	Παρανήτη ὑπερβολαίων διάτονος.
Nete hyperbolæon.	Νήτη ὑπερβολαίων.
In chromate vero hi:	Ἐν δὲ χρώματι οἵδε·
Proſlambanomenos.	Προσλαμβανόμενος.
Hypate hypaton.	Ὑπάτη ὑπατῶν.
Parypate hypaton.	Παρυπάτη ὑπατῶν.
Lichanos hypaton chromatice.	Λιχανὸς ὑπατῶν χρωματική.
Hypate meſon.	Ὑπάτη μέσων.
Parypate meſon.	Παρυπάτη μέσων.
Lichanos meſon chromatice.	Λιχανὸς μέσων χρωματική.
Meſe.	Μέση.
Trite ſynemmenon.	Τρίτη συνημμένων.
Paranete ſynemmenon chromatice.	Παρανήτη συνημμένων χρωματική.
Nete ſynemmenon.	Νήτη συνημμένων.
Parameſe.	Παραμέση.
Trite diezeugmenon.	Τρίτη διεζευγμένων.
Paranete diezeugmenon chromatice.	Παρανήτη διεζευγμένων χρωματική.
Nete diezeugmenon.	Νήτη διεζευγμένων.
Trite hyperbolæon.	Τρίτη ὑπερβολαίων.
Paranete hyperbolæon chromatice.	Παρανήτη ὑπερβολαίων χρωματική.
Nete hyperbolæon.	Νήτη ὑπερβολαίων.

δι' ἀνέσεως, εἰς βαρύτητα. καὶ ὀξύτης μὲν ἔστι, τὸ δι' ἐπιτάσεως γινόμενον ἀποτέλεσμα, βαρύτης δέ, τὸ δι' ἀνέσεως. ἀμφοῖν γὰρ συμβέβηκε τὸ τετάσθαι. καλοῦνται δὲ τάσεις καὶ φθόγγοι. τάσεις μὲν ἀπὸ τῶν ἁπτομένων ὀργάνων, ἃ δὴ τὸ τετάσθαι· φθόγγοι δέ, ἐπεὶ ἀπὸ φωνῆς ἐνεργοῦνται. φθόγγοι δέ εἰσιν τῇ μὲν τάσει ἄπειροι· τῇ δὲ δυνάμει καθ' ἕκαστον γένος δεκαοκτώ.

Γένη δέ ἐστι τρία, διάτονον, χρῶμα, ἁρμονία. καὶ μελῳδεῖται τὸ μὲν διάτονον, ἀπὸ μὲν τοῦ βαρυτάτου, κατὰ τόνον, καὶ τόνον, καὶ ἡμιτόνιον· ἐπὶ δὲ τὸ ὀξὺ ἀνάπαλιν, καθ' ἡμιτόνιον, καὶ τόνον, καὶ τόνον. τὸ δὲ χρῶμα, ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ, κατὰ τριημιτόνιον, καὶ ἡμιτόνιον, καὶ ἡμιτόνιον· ἐπὶ δὲ τὸ ὀξὺ ἀνάπαλιν, καθ' ἡμιτόνιον, καὶ ἡμιτόνιον, καὶ τριημιτόνιον. ἡ δὲ ἁρμονία, ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ, κατὰ δίτονον, καὶ δίεσιν, καὶ δίεσιν· ἐπὶ δὲ τὸ ὀξὺ ἀνάπαλιν, κατὰ δίεσιν, καὶ δίεσιν, καὶ δίτονον.

Εἰσὶ δὲ οἱ μὲν ἐν τῷ διατόνῳ φθόγγοι οἵδε·

Ἐν δὲ ἁρμονίᾳ οἵδε·
Προσλαμβανόμενος.
Ὑπάτη ὑπάτων.
Παρυπάτη ὑπάτων.
Λιχανὸς ὑπάτων ἐναρμόνιος.
Ὑπάτη μέσων.
Παρυπάτη μέσων.
Λιχανὸς μέσων ἐναρμόνιος.
Μέση.
Τρίτη συνημμένων.
Παρανήτη συνημμένων ἐναρμόνιος.
Νήτη συνημμένων.
Παραμέση.
Τρίτη διεζευγμένων.
Παρανήτη διεζευγμένων ἐναρμόνιος.
Νήτη διεζευγμένων.
Τρίτη ὑπερβολαίων.
Παρανήτη ὑπερβολαίων ἐναρμόνιος.
Νήτη ὑπερβολαίων.

In harmonia denique hi:
Proſlambanomenos.
Hypate hypaton.
Parypate hypaton.
Lichanos hypaton enarmonios.
Hypate meſon.
Parypate meſon.
Lichanos meſon enarmonios.
Meſe.
Trite ſynemmenon.
Paranete ſynemmenon enarmonios.
Nete ſynemmenon.
Parameſe.
Trite diezeugmenon.
Paranete diezeugmenon enarmonios.
Nete diezeugmenon.
Trite hyperbolæon.
Paranete hyperbolæon enarmonios.
Nete hyperbolæon.

Κατὰ δὲ μίξιν τ γενῶν οἵδε·
Προσλαμβανόμενος.
Ὑπάτη ὑπάτων.
Παρυπάτη ὑπατῶν.
Λιχανὸς ὑπατῶν ἐναρμόνιος.
Λιχανὸς ὑπατῶν χρωματικὴ.
Λιχανὸς ὑπατῶν διάτονος.
Ὑπάτη μέσων.
Παρυπάτη μέσων.
Λιχανὸς μέσων ἐναρμόνιος.
Λιχανὸς μέσων χρωματικὴ.
Λιχανὸς μέσων διάτονος.
Μέση.
Τρίτη συνημμένων.
Παρανήτη συνημμένων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη συνημμένων χρωματικὴ.
Παρανήτη συνημμένων διάτονος.
Νήτη συνημμένων.
Παραμέση.
Τρίτη διεζευγμένων.
Παρανήτη διεζευγμένων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη διεζευγμένων χρωματικὴ.
Παρανήτη διεζευγμένων διάτονος.
Νήτη διεζευγμένων.
Τρίτη ὑπερβολαίων.
Παρανήτη ὑπερβολαίων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη ὑπερβολαίων χρωματικὴ.
Παρανήτη ὑπερβολαίων διάτονος.
Νήτη ὑπερβολαίων.

Porro ſi miſceantur genera, hi:
Proſlambanomenos.
Hypate hypaton.
Parypate hypaton.
Lichanos hypaton enarmonios.
Lichanos hypaton chromatice.
Lichanos hypaton diatonos.
Hypate meſon.
Parypate meſon.
Lichanos meſon enarmonios.
Lichanos meſon chromatice.
Lichanos meſon diatonos.
Meſe.
Trite ſynemmenon.
Paranete ſynemmenon enarmonios.
Paranete ſynemmenon chromatice.
Paranete ſynemmenon diatonos.
Nete ſynemmenon.
Parameſe.
Trite diezeugmenon.
Paranete diezeugmenon enarmonios.
Paranete diezeugmenon chromatice.
Paranete diezeugmenon diatonos.
Nete diezeugmenon.
Trite hyperbolæon.
Paranete hyperbolæon enarmonios.
Paranete hyperbolæon chromatice.
Paranete hyperbolæon diatonos.
Nete hyperbolæon.

Τῶν δὲ ἐξηριθμημένων φθόγγων οἱ μέν εἰσιν ἑστῶτες· οἱ δὲ κινούμενοι. ἑστῶτες μὲν οὖν εἰσιν, ὅσοι ἐν ταῖς τ γενῶν διαφοραῖς οὐ μεταπίπτουσιν, ἀλλὰ μένουσιν ἐπὶ μιᾶς τάσεως. κινούμενοι δὲ, ὅσοι τἀναντίον πεπόνθασιν. ἐν γὰρ ταῖς τ γενῶν διαφοραῖς μεταβάλλουσιν, οὐ δὲ μένουσιν ἐπὶ μιᾶς τάσεως.

Horum vero, quos recenſuimus, ſonorum alii ſunt ſtantes: alii mobiles. ſtantes ſunt, qui in diverſis generibus loca non mutant, ſed in una tenſione conſiſtunt. mobiles vero, quibus contrarium accidit. in diverſis enim generibus diverſa habent loca, nec in una tenſione conſiſtunt.

Εἰσὶ δὲ οἱ μὲν ἑστῶτες ὀκτὼ οἵδε·
Προσλαμβανόμενος.

Stantes itaque hi octo numerantur:
Proſlambanomenos.

Hypate hypaton.
Hypate meſon.
Meſe.
Nete ſynemmenon.
Parameſe.
Nete diezeugmenon.
Nete hyperbolæon.

Ὑπάτη ὑπατῶν.
Ὑπάτη μέσων.
Μέση.
Νήτη συνημμένων.
Παραμέση.
Νήτη διεζευγμένων.
Νήτη ὑπερβολαίων.

Mobiles autem, qui media inter hoſce loca occupant. Rurſus ſtantium alii ſunt barypycni: alii apycni, qui perfecta ſyſtemata continent. Barypycni ſunt hi quinque:

Κινούμενοι δὲ, οἱ ἀνὰ μέσον τούτων πάντες. Τῶν δὲ ἑστώτων οἱ μὲν εἰσι βαρύπυκνοι· οἱ δὲ ἄπυκνοι, τὰ τέλεια συστήματα περιέχοντες. Βαρύπυκνοι μὲν οὖν εἰσι πέντε οἵδε·

Hypate hypaton.
Hypate meſon.
Meſe.
Parameſe.
Nete diezeugmenon.

Ὑπάτη ὑπατῶν.
Ὑπάτη μέσων.
Μέση.
Παραμέση.
Νήτη διεζευγμένων.

Apycni, qui perfecta ſyſtemata continent, hi tres ſequentes:

Ἄπυκνοι δὲ, καὶ περιέχοντες τὰ τέλεια συστήματα, οἱ λοιποὶ τρεῖς οἵδε·

Proſlambanomenos.
Nete ſynemmenon.
Nete hyperbolæon.

Προσλαμβανόμενος.
Νήτη συνημμένων.
Νήτη ὑπερβολαίων.

Mobilium alii ſunt meſopycni; alii oxypycni; alii diatoni.

Τῶν δὲ κινουμένων οἱ μὲν εἰσι μεσόπυκνοι, οἱ ὀξύπυκνοι, οἱ δὲ διάτονοι.

Mmeſopycni ſunt hi quinque:

Μεσόπυκνοι μὲν οὖν εἰσι πέντε οἵδε·

Parypate hypaton.
Parypate meſon.
Trite ſynemmenon.
Trite diezeugmenon.
Trite hyperbolæon.

Παρυπάτη ὑπατῶν.
Παρυπάτη μέσων.
Τρίτη συνημμένων.
Τρίτη διεζευγμένων.
Τρίτη ὑπερβολαίων.

Oxypycni ſimiliter in ſingulis generibus numerantur quinque. nimirum in harmonia enarmonii: in chromate, chromatici. ſed diatonum de ſpiſſi natura non participat.

Ὀξύπυκνοι δὲ ὁμοίως κατὰ γένος πέντε. ἐν μὲν ἁρμονίᾳ οἱ ἐναρμόνιοι· ἐν δὲ χρώματι οἱ χρωματικοί. τὸ γὰρ διάτονον τῆς πυκνότητος οὐ μετέχει.

In harmonia itaque ſunt hi:

Εἰσὶν οὖν οἱ μὲν ἐν τῇ ἁρμονίᾳ οἵδε·

Lichanos hypaton enarmonios.
Lichanos meſon enarmonios.
Paranete ſynemmenon enarmonios.
Paranete diezeugmenon enarmonios.
Paranete hyperbolæon enarmonios.

Λιχανὸς ὑπατῶν ἐναρμόνιος.
Λιχανὸς μέσων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη συνημμένων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη διεζευγμένων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη ὑπερβολαίων ἐναρμόνιος.

Deinde in chromate hi:

Ἐν δὲ τῷ χρώματι, οἵδε·

Lichanos hypaton chromatice.
Lichanos meſon chromatice.
Paranete ſynemmenon chromatice.
Paranete diezeugmenon chromatice.
Paranete hyperbolæon chromatice.

Λιχανὸς ὑπατῶν χρωματική.
Λιχανὸς μέσων χρωματική.
Παρανήτη συνημμένων χρωματική.
Παρανήτη διεζευγμένων χρωματική.
Παρανήτη ὑπερβολαίων χρωματική.

Intervallorum differentiæ ſunt quinque. nam & magnitudine inter ſe differunt, & genere; & ut conſona à diſſonis: deinde ut compoſita ab incompoſitis; & *tandem* ut rationalia ab irrationalibus. eſt autem *per magnitudinem differentia*, qua intervallorum quædam ſunt majora, quædam minora: ut ditonum, triemitonium, tonus, hemitonium, dieſis, diateſſaron, diapente, diapaſon, & ſimilia. *differentia per genus eſt*, qua intervallorum alia ſunt diatona; alia chromatica, alia enarmonia. differentia *per conſona & diſſona* eſt, qua intervallorum alia ſunt conſona, alia diſſona. conſona ſunt, diateſſaron, diapente, diapaſon, & ſimilia. diſſona

Τῶν δὲ διαστημάτων διαφοραὶ εἰσι πέντε. ἤτε μεγέθει ἀλλήλων διαφέρει, ἤτε κατὰ γένος· καὶ ἢ κατὰ σύμφωνα τῶν διαφώνων, καὶ τὰ σιγῇ τῶν ἀσιγήτων, καὶ τὰ ῥητὰ τῶν ἀλόγων. ἡ μὲν οὖν κατὰ τὸ μεγέθος ἐστι, καθ' ἣν ἃ μέν ἐστι μείζονα τῶν διαστημάτων, ἃ δὲ ἐλάττονα, οἷον δίτονον, τριημιτόνιον, τόνος, ἡμιτόνιον, δίεσις, διὰ τεσσάρων, διὰ πέντε, διὰ πασῶν, καὶ τὰ ὅμοια. ἡ δὲ κατὰ γένος, καθ' ἣν ἃ μέν ἐστι τῶν διαστημάτων διατονικὰ, ἃ δὲ χρωματικὰ, ἃ δὲ ἐναρμόνια. ἡ δὲ τὰ συμφώνα, καθ' ἣν ἃ μέν ἐστι τῶν διαστημάτων σύμφωνα, ἃ δὲ διάφωνα. σύμφωνα μὲν οὖν ἐστι, διὰ τεσσάρων, διὰ πέντε, διὰ πασῶν, καὶ τὰ ὅμοια. διάφωνα δὲ

δὶ τὰ ἐλάττονα τῶ διὰ τεσσάρων, ἢ τὰ μεταξὺ τ συμφώνων πάντα. ἐλάττονα μὲν ἔν ἐστι τὸ διὰ τεσσάρων, διέσις, ἡμιτόνιον, τόνος, τριημιτόνιον, δίτονον. μεταξὺ δὲ τ συμφώνων, τρίτονον, τετράτονον, πεντάτονον, καὶ τὰ ὅμοια. ἔστι δὲ συμφωνία μὲν, κρᾶσις δύο φθόγγων, ὀξυτέρα, καὶ βαρυτέρα. διαφωνία δὲ τἐναντίον, δύο φθόγγων ἀμιξία, μὴ οἵων τε κραθῆναι, ἀλλὰ τραχυνθῆναι τὴν ἀκοήν. ἡ δὲ διαφορὰ ἐστὶ διαφορᾶ, καθ' ἣν τὰ μὲν ἐστι τ διαστημάτων ἀσύνθετα· τὰ δὲ σύνθετα. ἀσύνθετα μὲν ἔν διαστήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ τ ἑξῆς φθόγγων περιεχόμενα, οἷον ὑπάτης καὶ παρυπάτης· καὶ λιχανὸς καὶ ὑπάτης μέσων. ὁ αὐτὸς λόγος καὶ ἐπὶ τ λοιπῶν διαστημάτων. σύνθετα δὲ τὰ ὑπὸ τ μὴ ἑξῆς, οἷον μέσης καὶ παρυπάτης, μέσης καὶ νήτης, παραμέσης καὶ ὑπάτης. ἔστι δέ τινα κοινὰ συνθέτων καὶ ἀσυνθέτων διαστήματα, τὰ ἀπὸ ἡμιτονίου μέχρι δι-τόνου. τὸ μὲν γὰρ ἡμιτόνιον ἐστιν ἐν ἁρμονίᾳ συνθετον· ἐν δὲ χρώματι καὶ διατόνῳ ἀσύνθετον. ὁ τόνος ἐν μὲν χρωματι συνθετος, ἐν δὲ διατόνῳ ἀσύνθετος. τὸ τριημιτόνιον ἐν μὲν χρώματι ἀσύνθετον, ἐν δὲ διατόνῳ συνθετον. τὸ δίτονον ἐν μὲν ἁρμονίᾳ ἀσύνθετον, ἐν δὲ χρώματι καὶ διατόνῳ συνθετον. τὰ δὲ ἐλάττω τοῦ ἡμιτονίου πάντα ἐστὶν ἀσύνθετα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ μείζω τοῦ δίτονου πάντα συνθετα. ἡ δὲ τῶ ῥητὸ καὶ ἀλόγου διαφορά ἐστι, καθ' ἣν τ διαστημάτων τὰ μὲν ἐστι ῥητὰ, τὰ δὲ ἄλογα. ῥητὰ μὲν ἔν ἐστιν, ὧν οἷόν τ' ἐστὶ τὰ μεγέθη ἀποδιδόναι, οἷον τόνου, ἡμιτονίου, δίτονου, τρίτονου, καὶ τὰ ὅμοια· ἄλογα δὲ τὰ τοῦτοις ἀσύμμετρα μεγέθη ὁπὶ τὸ μεῖζον ἢ ὁπὶ τὸ ἔλαττον, ἀλόγῳ τινὶ μεγέθει.

Γένη δέ ἐστι τρία τὰ προειρημένα. πᾶν γὰρ ἔν ἔσται μέλος ἤτοι διατονικὸν, ἢ χρωματικὸν, ἢ ἐναρμόνιον, ἢ κοινὸν, ἢ μικτὸν ἐκ τούτων. διατονικὸν μὲν οὖν ἐστι τὸ τῇ διατονικῇ διαιρέσει χρώμενον. χρωματικὸν δὲ, τὸ τῇ χρωματικῇ. ἐναρμόνιον δὲ, τὸ τῇ ἐναρμονίῳ. κοινὸν δὲ τὸ ἐκ τ ἑστώτων συγκείμενον. μικτὸν δὲ, τὸ ἐν ᾧ δύο ἢ τρεῖς χαρακτῆρες γνωσὶ ἐμφαίνονται, οἷον διατόνου καὶ χρώματος, ἢ διατόνου καὶ ἁρμονίας, ἢ χρώματος καὶ ἁρμονίας, ἢ καὶ διατόνου, καὶ χρώματος καὶ ἁρμονίας. γίνονται δὲ αἱ τ γενῶν διαφοραὶ κατὰ τὰς κινουμένας τ φθόγγων. κινεῖται δὲ ἡ μὲν λιχανὸς ἐν τονιαίῳ τόπῳ. ἡ δὲ παρυπάτη ἐν διεσιαίῳ· λιχανὸς μὲν ἔν ἐστιν ὀξυτάτη, ἡ τόνον ἀπὸ τοῦ ὀξυτέρου ἀπέχουσα τ τὸ τετράχορδον περιεχόντων· βαρυτάτη δὲ, ἡ δίτονον. ὁμοίως δὲ καὶ παρυπάτη ἐστὶ βαρυτάτη μέν, ἡ διέσιν ἀπὸ τοῦ βαρυτέρου τ τετράχορδον περιεχόντων ἀπέχουσα· ὀξυτάτη δὲ, ἡ ἡμιτόνιον ἀπέχουσα. χρόα δέ ἐστι γένους εἰδικὴ διαίρεσις. χρόαι δέ εἰσιν αἱ ῥηταὶ καὶ γνώριμοι ἐξ ἁρμονίας μιᾶς, χρώματος τρεῖς, διατόνου δύο. ἡ μὲν ἔν τ ἁρμονίας τῇ αὐτῇ ᾧ γένους διαιρέσει καὶ αὐτὸ κέχρηται· μελῳδεῖται γὰρ κατὰ διέσιν τὸ τεταρτημόριον τόνου, καὶ διέσιν τινὶ ἴσῃ, ἢ δίτονον ἀσύνθετον. τ δὲ χρωματικῶν διαιρέσεων τὸ μὲν καλούμενον μαλακὸν χρῶμα, τὸ δὲ

vero, quæ diatessaron consonantia sunt minora, quæque inter consona interponuntur, omnia. & quidem minora quam diatessaron sunt; diesis, hemitonium, tonus, triemitonium, ditonum. inter consona vero, tritonum, tetratonum, pentatonum, & similia. porro consonantia est mistio duorum sonorum, acuti scilicet & gravis. dissonantia contra est in duobus sonis mistionis fuga, qui cum misceri recusent asperitate quadam aures lædunt. compositi differentia est, qua intervallorum alia sunt incomposita, alia composita. incomposita itaque intervalla sunt, quæ à sonis deinceps positis continentur, ut est intervallum ab hypate & parypate comprehensum: item à lichano & hypate meson. eadem ratio obtinet in reliquis intervallis. composita vero sunt, quæ à sonis non deinceps positis comprehenduntur; ut à mese & parypate, mese & nete, parамese & hypate. sunt deinde quædam intervalla communia, quæ compositi atque incompositi naturam obtinent, sc. ab hemitonio ad ditonum omnia. quippe hemitonium in harmonia est compositum: in chromate & diatono incompositum. tonus in chromate est compositus; in diatono incompositus. triemitonium in chromate est incompositum; in diatono compositum. ditonum in harmonia est incompositum; in chromate & diatono compositum. quæ vero sunt hemitonio minora intervalla, omnia sunt incomposita. ut contra omnia ditono majora sunt composita. rationabilis & irrationabilis differentia est, qua intervallorum alia sunt rationabilia, alia irrationabilia. rationabilia sunt, quorum magnitudines exhibere possumus: ut tonus, hemitonium, ditonum, tritonum, & similia: irrationabilia, quæ hasce magnitudines variant vel in majus, vel in minus, magnitudine aliqua irrationabili.

Genera sunt tria illa prædicta. omnis itaque cantus aut diatonicus erit, aut chromaticus, aut enarmonius, aut communis, aut etiam ex hisce mistus. diatonicus est, qui divisione utitur diatonica. chromaticus, qui chromatica. enarmonius, qui enarmonia. communis qui ex sonis stantibus est compositus.. mistus, in quo duorum aut trium generum characteres cernuntur: ex.gr. diatoni & chromatis; aut diatoni & harmoniæ; aut chromatis, & harmoniæ; aut etiam diatoni, chromatis & harmoniæ. Fiunt autem generum differentiæ à sonis mobilibus. & quidem lichanus movetur in loco, qui saltem capiat tonum. parypate, in loco qui capiat diesin. est itaque acutissima lichanus, quæ tono distat ab acutiore eorum, qui tetrachordum comprehendunt: gravissima vero, quæ ditono. eodem modo gravissima est parypate, quæ distat diesi à graviore eorum, quæ tetrachordum includunt: acutissima vero, quæ distat hemitonio. Color est generis divisio specialis. sunt vero rationabiles. & noti colores sex: harmoniæ unus, tres chromatis, diatoni duo. harmoniæ color eadem, qua genus ipsum, divisione utitur. canitur enim per diesin, quæ est toni pars quarta, & diesin, priori æqualem, & ditonum incompositum. porro ex chromaticis divisionibus aliud vocatur chroma molle; aliud

ſeſcuplum, aliud toniæum. & quidem chroma molle canitur per dieſin, quæ eſt toni pars tertia, & dieſin illi æqualem, & intervallum incompoſitum, quod æquale eſt tono, ejuſque dimidio & trienti. ſeſquialterum, per dieſin, quæ ſit ſeſquialtera enarmoniæ dieſeos, & dieſin priori æqualem, & intervallum incompoſitum, conſtans ex ſeptem dieſibus, quarum quælibet ſit toni pars quarta. toniæum chroma eodem, quo genus, utitur colore. quippe canitur per hemitonium, & hemitonium, & triemitonium. atque hæc ſic explicata chromata appellationeş habent ab iis, quæ ipſis inſunt, ſpiſſis. toniæum enim appellatur ab eo, qui in ipſo eſt per compoſitionem, tono. & ſeſquialterum, à dieſibus, quæ in ipſo ſunt, ſeſcuplis dieſium enarmoniarum. eodem modo chroma ſpiſſi minimi molle dicitur, quoniam, quod in ipſo eſt, ſpiſſum remittitur, & tantum non plane enervatur. diatonicarum diviſionum alia nuncupatur diatonum molle; alia, ſyntonum. diatoni mollis color canitur per hemitonium, & per trium dieſium incompoſitum intervallum, & per quinque dieſium ſimiliter incompoſitum intervallum. diatoni ſyntoni color communem habet cum ſuo genere diviſionem. canitur enim per hemitonium, & tonum, & tonum. ſed & in numeris monſtrantur illi colores, hoc modo: ſupponitur tonus in minimas duodecim partes diviſus, quarum quælibet duodecima pars toni appellatur. atque eadem ratione, qua tonus, reliqua dividuntur intervalla. nempe hemitonium in ſex partes duodecimas: dieſis quadrantalis in tres: dieſis trientalis in quatuor: totum diateſſaron in triginta. harmonia itaque canetur per magnitudinem trium partium duodecimarum, & trium, & viginti quatuor. chroma molle per magnitudinem quatuor partium duodecimarum, & quatuor & viginti duarum, ſeſquialterum chroma per magnitudinem partium duodecimarum quatuor ſemis, & quatuor ſemis, & viginti unius. toniæum chroma per ſex, & ſex, & octodecim. diatonum molle per ſex, & novem, & quindecim. ſyntonum per ſex, & duodecim, & duodecim.

Syſtematum differentiæ ſunt ſeptem, quarum quatuor eædem ſunt, quæ in intervallis conſiderantur. nimirum, *differentia per magnitudinem*; *per genus*; *item differentia conſoni & diſſoni*; *tum rationabilis & irrationabilis*. tres vero ſunt peculiares ſyſtematum differentiæ; nempe, *ordine procedentis & præpoſteri*; *conjuncti & disjuncti*; *immutabilis & mutabilis*. *magnitudine* igitur *differunt* majora ſyſtemata à minoribus, ut diapaſon à tritono, aut diapente, aut diateſſaron, aut ſimilibus. *genere differunt* diatonica ab enarmoniis aut chromaticis: aut chromatica aut enarmonia à cæteris. *conſoni differentia*, ut quæ à conſonis ſonis continentur, differunt ab iis, quæ à diſſonis. conſona vero ſyſtemata in immutabili ſyſtemate ſunt ſex; quorum minimum eſt diateſſaron, tonorum duorum ſemis, cujuſmodi eſt ab hypate hypaton ad hypaten meſon. alterum eſt diapente, tonoημόλιον, τὸ δὲ τονιαῖον. τὸ μὲν ἓν μαλακὸν χρῶμα μελῳδεῖται κατὰ δίεσιν τὴν τριτημόριον τόνου, καὶ δίεσιν τὴν ἴσην, ἐ ἴσον τόνῳ καὶ τῷ ἡμίσει, ἢ τρίτῳ, ἀσυνθέτου διάστημα. τὸ δὲ ἡμιόλιον, κατὰ δίεσιν, ἡμιόλιον τὸ ἐναρμονίου διέσεως, καὶ δίεσιν τὴν ἴσην, καὶ ἑπτὰ διέσεων τεταρτημορίων ἀσυνθέτου διάστημα, τὸ δὲ τονιαῖον χρῶμα τῇ αὐτῇ τὸ γένους κέχρηται χρόᾳ. μελῳδεῖται γὰρ κατὰ ἡμιτόνιον, καὶ ἡμιτόνιον, καὶ τριημιτόνιον. κέκληται δὲ τὰ εἰρημένα χρώματα ἀπὸ τῶν ὑπαρχόντων αὐτοῖς πυκνῶν. τὸ, τε γὰρ τονιαῖον ἀπὸ τοῦ ὑπάρχοντος αὐτῷ κατὰ συνθέσεως τόνου. καὶ ἡμιόλιον, ἀπὸ τῶν ὑπαρχόντων αὐτῷ διέσεων, ἡμιολίων τῶν ἐναρμονίων διέσεων. μαλακὸν δὲ διὰ τὸ ἐλαχίστου πυκνοῦ, ὡσαύτως καὶ χρῶμα, ἐπειδὴ τὸ ἐν αὐτῷ πυκνὸν χρῶμα ἀνίεταί τε καὶ ἐκλύεται. τῶν δὲ διατονικῶν διαιρέσεων τὸ μὲν διάτονον μαλακὸν καλεῖται· τὸ δὲ, συντονον. ἡ μὲν οὖν διὰ μαλακοῦ διατόνου χρόα μελῳδεῖται κατὰ ἡμιτόνιον, καὶ τριῶν διέσεων ἀσυνθέτου διάστημα, καὶ κατὰ πέντε διέσεων ὁμοίως ἀσυνθέτου διάστημα. ἡ δὲ τοῦ συντόνου διατόνου τῇ αὐτῇ τοῦ γένους διαπεφωνεῖ διαιρέσει. μελῳδεῖται γὰρ καθ' ἡμιτόνιον, καὶ τόνον, καὶ τόνον. δείκνυται δὲ καὶ ἀριθμῷ αἱ χρόαι τὸν τρόπον τοῦτον· ὑποτίθεται γὰρ ὁ τόνος εἰς δώδεκά τινα ἐλάχιστα μόρια διαιρούμενος, ὧν ἕκαστον δωδεκατημόριον τόνου καλεῖται. ἀναλόγως δὲ τῷ τόνῳ καὶ τὰ λοιπὰ διαστήματα. τὸ μὲν γὰρ ἡμιτόνιον εἰς ἓξ δωδεκατημόρια· ἡ δὲ δίεσις, ἡ μὲν τεταρτημόριος, εἰς τρία· ἡ δὲ τριτημόριος, εἰς τέσσαρα· ὅλον δὲ τὸ διὰ τεσσάρων εἰς τριάκοντα. ἡ μὲν οὖν ἁρμονία μελῳδηθήσεται κατὰ τριῶν δωδεκατημορίων μεγέθος, καὶ τριῶν, καὶ εἰκοσιτεσσάρων. τὸ δὲ μαλακὸν χρῶμα, κατὰ τεσσάρων, καὶ τεσσάρων, ἐ εἰκοσιδυοῖν. τὸ δὲ ἡμιόλιον χρῶμα κατὰ τεσσάρων ἥμισυ, καὶ τεσσάρων ἥμισυ, καὶ εἰκοσιενός· τὸ δὲ τονιαῖον χρῶμα, κατὰ ἓξ, καὶ ἓξ, καὶ ὀκτωκαίδεκα. τὸ δὲ μαλακὸν διάτονον, κατὰ ἓξ, καὶ ἐννέα, καὶ δεκαπέντε· τὸ δὲ συντονον κατὰ ἓξ, καὶ δώδεκα, καὶ δώδεκα.

Τῶν δὲ συστημάτων διαφοραί εἰσιν ἑπτά· τέσσαρες μὲν αἱ αὐταὶ τοῖς διαστήμασιν, ἥτε κατὰ μέγεθος, καὶ ἡ κατὰ γένος, καὶ ἡ τὸ συμφώνου καὶ διαφώνου, καὶ ἡ τὸ ῥητὸν καὶ ἀλόγου. τρεῖς δὲ ἴδιαι τῶν συστημάτων διαφοραί εἰσιν, ἥ τε ἑξῆς, καὶ τὸ ὑποζευκτόν, καὶ ἡ δι' ὅλων διαζευγμένου, καὶ ἡ τὸ ἀμεταβόλου καὶ ἐμμεταβόλου. μεγέθει μὲν οὖν διαφέρει τὰ μείζω συστήματα τῶν ἐλαττόνων, καθάπερ τὸ διὰ πασῶν ἢ τριτόνου, ἢ διὰ πέντε, ἢ διὰ τεσσάρων, ἢ τῶν ὁμοίων. γένει δὲ τὰ διατονικὰ τῶν ἐναρμονίων, ἢ χρωματικῶν· ἢ τὰ χρωματικὰ ἢ ἐναρμόνια τῶν λοιπῶν. τῇ δὲ τοῦ συμφώνου διοίσει τὰ ὑπὸ τῶν συμφώνων φθόγγων περιεχόμενα τῶν ὑπὸ διαφώνων. σύμφωνα δέ ἐστιν ἐν τῷ ἀμεταβόλῳ συστήματι ἓξ· ἐλάχιστον μὲν τὸ διὰ τεσσάρων, τόνων δύο ἡμίσεως, οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ ὑπάτης ὑπατῶν ἕως ὑπάτης μέσων. δεύτερον δὲ τὸ διὰ πέντε, τό-

νων

νων τριῶν ἡμίσεως· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένης ὑπάτης μέσων. τρίτον δὲ τὸ διὰ πασῶν, τόνων ἕξ· οἷόν ἐστι, τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένης μέσης. τέταρτον δὲ τὸ διὰ πασῶν καὶ διὰ τεσσάρων, τόνων ὀκτὼ ἡμίσεως· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένης ὑπάτης παρανήτης συνημμένων, ἢ παρανήτης διεζευγμένων διάτονον. πέμπτον δὲ τὸ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε, τόνων ἐννέα ἡμίσεως· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένης ὑπάτης νήτης διεζευγμένων. ἕκτον δὲ τὸ δὶς διὰ πασῶν, τόνων δώδεκα· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένης ὑπάτης νήτης ὑπερβολαίων. τὸ δὲ συνημμένων καλούμενον σύστημα προέισι μέχρι τετάρτης συμφωνίας. τὸ δὲ διεζευγμένων μέχρι πέμπτης συμφωνίας· καὶ τὸ τῶν ὑπερβολαίων μέχρι ἕκτης: πρῶτον γὰρ αὐτῶν τὸ διὰ τεσσάρων. δεύτερον, τὸ διὰ πέντε. τρίτον, τὸ διὰ πασῶν. τέταρτον, τὸ διὰ πασῶν καὶ διὰ τεσσάρων. πέμπτον, τὸ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε. ἕκτον, τὸ δὶς διὰ πασῶν. ὁ δὲ τῆς φωνῆς τόπος αὔξει μέχρι τῆς ὀγδόης συμφωνίας, ὅπερ ἐστὶ δὶς διὰ πασῶν καὶ διὰ τεσσάρων, καὶ δὶς διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε. διάφωνα δέ ἐστι, τάττε ἐλάττω ἢ διὰ τεσσάρων, καὶ μεταξὺ τῶν εἰρημένων συμφώνων πάντα. γίνεται δὲ καὶ σχήματα ἐξ αὐτῶν μεγίθους ἐκ τῶν αὐτῶν ἀσυνθέτων συγκείμενα καὶ ἀριθμοῦ, εἰ ἡ τάξις αὐτῶν ἀλλοίωσιν λάβοι, ἐνυπάρχοντός τινος ἀνομοίου. καὶ γὰρ ἐξ ἴσων πάντων, ἢ ὁμοίων σχημάτων, ἀλλοίωσιν οὐ ποιεῖ. τῶν μὲν οὖν διὰ τεσσάρων τρία εἴδη. πρῶτον μὲν τὸ ἀπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ βαρυτάτης ὑπατῶν ἐπὶ βαρύτητα μέσων. δεύτερον τὸ ἀπὸ μεσοπύκνων περιεχόμενον, οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ παρυπάτης ὑπατῶν ἐπὶ παρυπάτην μέσων. τρίτον δὲ τὸ ἀπὸ ὀξυπύκνων περιεχόμενον· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ λιχανοῦ ὑπατῶν ἐπὶ λιχανὸν μέσων. ἐν μὲν οὖν ἁρμονίᾳ καὶ χρώματι πρὸς τὴν τοῦ πυκνοῦ χύσιν τὰ σχήματα τῶν συμφώνων λαμβάνεται· ἐν δὲ διατόνῳ ἐπὶ πυκνοῦ οὐ γίνεται. διαιρεῖται δὲ τὸ γένος τοῦτο εἰς ἡμιτόνια καὶ τόνους. ὑπάρχει δὲ ἐν τῇ διατεσσάρων συμφωνίᾳ ἡμιτόνιον μὲν ἕν, τόνοι δὲ δύο. ὁμοίως δὲ καὶ τῷ διὰ πέντε, ἡμιτόνιον μὲν ἕν, τόνοι δὲ τρεῖς. ἐν δὲ τῷ διὰ πασῶν ἡμιτόνια μὲν δύο, τόνοι δὲ πέντε. πρὸς δὲ τὴν τῶν ἡμιτονίων χύσιν τὰ σχήματα θεωρεῖται. τὸ οὖν διὰ τεσσάρων πρῶτόν μέν ἐστιν εἶδος, ἐν ᾧ τὸ ἡμιτόνιον ἐπὶ τὸ βαρὺ τῶν τόνων κεῖται. δεύτερον δέ, ἐν μέσῳ τοὺς τόνους. τρίτον, ἐν πρώτῳ ἐπὶ τὸ ὀξὺ τῶν τόνων. ἔχει δὲ καὶ πέντε ὁμοίως τοῖς λοιποῖς τοῖς γένεσιν ἀπὸ τῶν αὐτῶν φθόγγων ἐπὶ τοὺς αὐτούς. τὸ δὴ διὰ πέντε τέσσαρα ἐστὶ σχήματα. πρῶτον μὲν τὸ ἀπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, ἐν πρώτῳ ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ ὑπάτης μέσων ἐπὶ παραμέσην. δεύτερον δὲ, τὸ ἀπὸ μεσοπύκνων περιεχόμενον, ἐν δευτέρῳ ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ παρυπάτης μέσων ἐπὶ τρίτην διεζευγμένων. τρίτον δὲ, τὸ ἀπὸ ὀξυπύκνων περιεχόμενον, ἐν τρίτῳ ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ λιχανοῦ μέσων ἐπὶ παραπάτην διεζευγμένων. τέταρτον δὲ, τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, ἐν τετάρτῳ ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ μέσης ἐπὶ

rum trium ſemis: ut eſt à proſlambanomeno ad hypaten meſon. tertium eſt diapaſon, tonorum ſex: quale eſt à proſlambanomeno ad meſen. quartum, diapaſon & diateſſaron, tonorum octo ſemis: veluti eſt à proſlambanomeno ad neten ſynemmenon, aut paraneten diezeugmenon diatonon. quintum, diapaſon & diapente, tonorum novem ſemis: cujuſmodi eſt à proſlambanomeno ad neten diezeugmenon. ſextum, bis diapaſon, tonorum duodecim: cujuſmodi eſt à proſlambanomeno ad neten hyperbolæon. conjunctarum quod vocatur ſyſtema progreditur ad quartum ſyſtema conſonum. disjunctarum autem ad quintum conſonum; & hyperbolæon ad ſextum. primum enim ipſorum eſt diateſſaron. alterum, diapente. tertium, diapaſon. quartum, diapaſon & diateſſaron. quintum, diapaſon & diapente. ſextum, bis diapaſon. vocis autem locus augeri poteſt ad octavum uſque ſyſtema conſonum, quod eſt, adjectis duobus; nimirum bis diapaſon & diateſſaron, & bis diapaſon & diapente. diſſona vero ſunt, tum quæ minora ſunt quam diateſſaron, tum quæ inter dicta conſona interjiciuntur, omnia. porro unius ejuſdemque magnitudinis quoque exiſtunt figuræ, ex iiſdem incompoſitis, & numero æqualibus conſtitutæ, ſi nimirum ordo ipſorum varietur, & jam ante adſit aliquod diſſimile. neque enim, quæ ex æqualibus inter ſe omnibus, vel ſimilibus, conſtant intervallis, ullam varietatem admittunt. quare diateſſaron ſpecies ſunt tres. prima, quæ à barypycnis comprehenditur; cujuſmodi eſt ab hypate hypaton ad hypaten meſon. altera, quæ à meſopycnis continetur; ut eſt à parypate hypaton ad parypaten meſon. tertia quæ ab oxypycnis includitur; ut à lichano hypaton ad lichanon meſon. atque ita in harmonia ac chromate, ſpiſſi ratione habita, figuræ conſonorum ſumuntur: in diatono vero ſpiſſum non reperitur. hoc quippe genus in hemitonia dividitur & tonos. ita ut in diateſſaron concentu hemitonium ſit unum, toni vero duo. ſimiliter in diapente, hemitonium unum, toni tres. in diapaſon item, hemitonia duo, toni quinque. reſpectu vero ad hemitonia habito, figuras illas contemplamur. hinc prima diateſſaron ſpecies eſt, cujus hemitonium, infra tonos, loco eſt graviſſimo. altera, cujus hemitonium eſt loco medio. tertia, cujus hemitonium primum eſt in acumine. atque hæc eodem modo ſe habent in reliquis generibus, ab iiſdem ſonis ad eoſdem. diapente habet quatuor ſpecies. prima, quæ à barypycnis continetur, cujus tonus primus eſt in acumine. eſtque ab hypate meſon ad parameſen. altera, quæ à meſopycnis comprehenditur, cujus tonus ſecundo loco eſt in acumine. eſt vero à parypate meſon ad triten diezeugmenon. tertia, quæ ab oxypycnis continetur, cujus tertius ab acumine eſt tonus: ut à lichano meſon ad paraneten diezeugmenon. quarta, quæ barypycnis rurſus includitur, cujus quartus ab acumine eſt tonus. eſt vero à meſe

ἐπὶ

ad neten diezeugmenon: aut à proſlambanomeno ad hypaten meſon. at vero in diatono prima diapente ſpecies eſt, cujus hemitonium primum eſt in gravi. altera, cujus primum in acumine. tertia, cujus ſecundum in acumine. quarta, cujus tertium in acumine. Porro diapaſon ſpecies ſunt ſeptem. prima, quæ à barypycnis continetur, cujus primus tonus eſt in acumine. eſtque ab hypate hypaton ad parameſen. à veteribus vocabatur mixolydia. altera, quæ comprehenditur à meſopycnis, cujus tonus ſecundo loco eſt in acumine. ut à parypate hypaton ad triten diezeugmenon. vocabatur ab iiſdem lydia. tertia, quæ ab oxypycnis; cujus tertius ab acumine eſt tonus. eſt vero à lichano hypaton ad paraneten diezeugmenon. vocabatur phrygia. quarta, quæ rurſus à barypycnis comprehenditur, cujus quartus ab acumine eſt tonus. eſtque ab hypate meſon ad neten diezeugmenon. vocabatur doria. quinta, quæ à meſopycnis; cujus quinto ab acumine loco eſt tonus. ut à parypate meſon ad triten hyperbolæon. vocabatur hypolydia. ſexta, quæ ab oxypycnis, cujus ſextus ab acumine eſt tonus, ut à lichano meſon ad paraneten hyperbolæon. vocabatur hypophrygia. ſeptima, quæ à barypycnis continetur, cujus primus tonus loco eſt graviſſimo. eſt vero à meſe ad neten hyperbolæon; aut à proſlambanomeno ad meſen. vocabatur communis & locrenſis & hypodoria. at in diatono prima eſt diapaſon ſpecies, cujus primum hemitonium eſt in gravi, quartum vero ab acumine. altera, cujus tertium eſt in gravi, primum in acumine. tertia, cujus ſecundum in utramque partem. quarta, cujus primum in gravi, tertium in acumine. quinta, cujus quartum in gravi, primum in acumine. ſexta, cujus tertium in gravi, ſecundum in acumine. ſeptima, cujus ſecundum eſt hemitonium in gravi, tertium in acumine. ſunt vero hæ ſpecies ab iiſdem ſonis, à quibus in harmonia & chromate incipiebant, ad eoſdem; appellanturque iiſdem nominibus. *rationabilis atque irrationabilis differentia* different ſyſtemata, illa quæ ex rationabilibus conſtituuntur, ab iis quæ ex irrationabilibus. quæ enim rationabilia, ſunt ex rationabilibus. ut contra, quæ irrationabilia, ex irrationabilibus. *continui atque interrupti differentia* different ſyſtemata, illa quæ per deinceps poſitos ſonos canuntur, ab iis quæ per non proximos. *conjuncti atque disjuncti differentia* different ſyſtemata, illa quæ ex conjunctis tetrachordis compoſita ſunt, ab iis quæ ex disjunctis. eſt vero conjunctio, duorum tetrachordorum, deinceps modulatorum ac ſpecie ſimilium, ſonitus communis. hinc disjunctio eſt, duorum tetrachordorum, deinceps modulatorum ac ſpecie ſimilium, tonus intermedius. ſunt autem in univerſum conjunctiones tres: media, acutiſſima, graviſſima. graviſſima eſt ex hypaton tetrachordo & meſon. communis vero ſonus ea conjungit hypate meſon. media conjunctio eſt, ex tetrachordo meſon & ſynemmenon. quæ jungit communis ſo-

ὅλη νήτῃ διεζευγμένων, ἡ ἀπὸ προσλαμβανομένης ὅλης ὑπάτην μέσων. ἐν δὲ διατόνῳ πρώτη μέν ἐστι σχῆμα, ἧς πρῶτον τὸ ἡμιτόνιον ὅλης τὸ βαρύ. δεύτερον δέ, ἧς πρῶτον ὅλης τὸ ὀξύ. τρίτον, ἧς δεύτερον ὅλης τὸ ὀξύ. τέταρτον, ἧς τρίτον ὅλης τὸ ὀξύ. ἧς δὲ διὰ πασῶν εἴδη ἐστὶν ἑπτά. πρώτη μεν, τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, ἧς πρῶτος ὁ τόνος ὅλης τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ ὑπάτης ὑπατῶν ὅλης μέσην. καλεῖτο δὲ ὑπὸ τ δωρίων μιξολύδιον. δεύτερον δὲ, τὸ ὑπὸ μεσοπύκνων περιεχόμενον, ἧς δεύτερος ὁ τόνος ὅλης τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ παρυπάτης ὑπατῶν ὅλης τρίτην διεζευγμένων. καλεῖτο δὲ λύδιον. τρίτον, τὸ ὑπὸ ὀξυπύκνων περιεχόμενον, ἧς τρίτος ὁ τόνος ὅλης τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ λιχανὸς ὑπατῶν ἐπὶ παραμέσην διεζευγμένων. καλεῖτο δὲ φρύγιον. τέταρτον, τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, ἧς τέταρτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ ὑπάτης μέσων ἐπὶ νήτην διεζευγμένων. καλεῖτο δὲ δώριον. πέμπτον, τὸ ὑπὸ μεσοπύκνων περιεχόμενον, ἧς πέμπτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ παρυπάτης μέσων ἐπὶ τρίτην ὑπερβολαίων. καλεῖτο δὲ ὑπολύδιον. ἕκτον, τὸ ὑπὸ ὀξυπύκνων περιεχόμενον, ἧς ἕκτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ λιχανὸς μέσων ἐπὶ παραμέσην ὑπερβολαίων. καλεῖτο δὲ ὑποφρύγιον. ἕβδομον, τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, ἧς πρῶτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ βαρύ. ἔστι δὲ ἀπὸ μέσης ἐπὶ νήτην ὑπερβολαίων, ἡ ἀπὸ προσλαμβανομένης ἐπὶ μέσην. καλεῖτο δὲ κοινὸν ἢ λοκρικὸν, ἢ ὑποδώριον. ἐν δὲ τῷ διατόνῳ πρῶτον μέν ἐστιν εἶδος ἧς διὰ πασῶν, ἧς πρῶτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, τέταρτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξὺ, ἐστὶ τὸ ἡμιτόνιον. δεύτερον δὲ, ἧς τρίτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, πρῶτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ. τρίτον δὲ, ἧς δεύτερον ἑφ' ἑκάτερα. τέταρτον δὲ, ἧς πρῶτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, τρίτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξὺ. πέμπτον δὲ, ἧς τέταρτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, πρῶτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἕκτον δὲ, ἧς τρίτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, δεύτερον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἕβδομον δὲ, ἧς δεύτερον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, τρίτον ἢ ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι ἢ ταῦτα ἀπὸ τ αὐτῶν φθόγγων ἐπὶ τὰς αὐτὰς, καθάπερ ἐπὶ τ ἁρμονίας καὶ χρώματος, καὶ καλεῖτο τοῖς αὐτοῖς ὀνόμασι. τῇ δὲ τ ῥητὰ καὶ ἄλογα διαφορᾷ διοίσει συστήματα, ὅσα ἐκ ῥητῶν διαστημάτων συγκεῖται, τ ἐξ ἀλόγων. ὅσα μὲν γὰρ ῥητὰ ἐκ ῥητῶν ἐστιν. ὅσα ἢ ἄλογα, ἐξ ἀλόγων. τῇ ἢ δ ἑξῆς καὶ ὑπερβατῷ διαφορᾷ διοίσει συστήματα, τὰ διὰ τῶν ἑξῆς φθόγγων μελῳδούμενα, τ δι' ὑπερβατῶν. τῇ ἢ δ συνημμένα καὶ διεζευγμένα διαφορᾷ διοίσει συστήματα, ὅσα διὰ τ συνημμένων τετραχόρδων τὴν σύνθεσιν ἔχει, τ διὰ τ διεζευγμένων. ἔστι ἢ συναφὴ μὲν, δύο τετραχόρδων, ἑξῆς μελῳδουμένων, ὁμοίων κατὰ σχῆμα, φθόγγος κοινός. διάζευξις δέ ἐστι δύο τετραχόρδων, ἑξῆς μελῳδουμένων, ὁμοίων κατὰ σχῆμα, τόνος ἀνὰ μέσον. εἰσὶ δὲ αἱ πᾶσαι συναφαὶ τρεῖς· μέση, ὀξυτάτη, βαρυτάτη. καὶ ἔστι βαρυτάτη μὲν, ἡ ἐκ τ ὑπατῶν καὶ μέσων τετραχόρδ. κοινὸς δὲ αὐτὰ συνάπτει φθόγγος, ὑπάτη μέσων. μέση δέ ἐστι συναφὴ, ἐκ τῶν μέσων καὶ συνημμένων. κοινὸς δὲ αὐτὰ συνάπτει φθόγγος

μέση.

μέση. ὀξυτάτη δέ ἐστι συναφὴ ἐκ τῶ διεζευγμένων καὶ ὑπερβολαίων. κοινὸς δὲ αὐτὰ συνάπτει φθόγγος, νήτη διεζευγμένων. διάζευξις δέ ἐστι μία ἐκ τῶ μέσων καὶ διεζευγμένων. κοινὸς δὲ αὐτὰ διαζεύγνυσι τόνος, ὁ μεταξὺ μέσης καὶ παραμέσης. τέλεια δέ ἐστι συστήματα δύο, ὧν τὸ μὲν ἔλαττον, τὸ δὲ μεῖζον. καὶ ἔστι τὸ μὲν ἔλαττον κατὰ συναφήν, ἀπὸ προσλαμβανομένης ὑπάτης ἐπὶ νήτην συνημμένων. ὑπάρχει δὲ ἐν αὐτῷ τετράχορδα τρία συνημμένα τάδε· ὑπατῶν, μέσων, συνημμένων. καὶ τόνος ἀπὸ προσλαμβανομένης ὑπάτης ἐπὶ ὑπάτην ὑπατῶν. συμφώνῳ δὲ ὁρίζεται τῷ διὰ πασῶν καὶ διὰ τεσσάρων· τὸ δὲ μεῖζόν ἐστι κατὰ διάζευξιν, ἀπὸ προσλαμβανομένης ὑπάτης ἐπὶ νήτην ὑπερβολαίων. ὑπάρχει δὲ ἐν αὐτῷ τετράχορδα μὲν τέσσαρα, διὰ δυοῖν διεζευγμένα, ἀλλήλοις δὲ συνημμένα, τό, τε ὑπατῶν, καὶ μέσων, καὶ διεζευγμένων, καὶ ὑπερβολαίων. καὶ ἐπὶ τόνοι δύο· ὅ, τε ἀπὸ προσλαμβανομένης ὑπάτης ὑπάτην ὑπατῶν, καὶ ὁ ἀπὸ μέσης ἐπὶ παραμέσην. συμφώνῳ δὲ ὁρίζεται τῷ δὶς διὰ πασῶν. πέντε δὲ ὄντων τετραχόρδων ἐν τῷ ἀμεταβόλῳ συστήματι, ὅπερ ἐστὶν ἐξ ἀμφοῖν τελείοιν συνῳδοῖν, τὰ μὲν δύο κοινά ἐστιν ἑκατέρῳ τ τελείων, τό, τε ὑπατῶν καὶ μέσων· ἴδια δὲ, τὸ μὲν κατὰ συναφὴν, τὸ νητῶν συνημμένων· τὸ δὲ κατὰ διάζευξιν, τὸ νητῶν διεζευγμένων, καὶ τὸ νητῶν ὑπερβολαίων. τῇ δὲ τὸ ἀμεταβόλε καὶ ἐμμεταβόλε διοίσει, καθ' ἣν διαφέρει τὰ ἁπλᾶ συστήματα τ μὴ ἁπλῶν. ἁπλᾶ μὲν ἔν ἐστι τὰ πρὸς μίαν μέσην ἡρμοσμένα· διπλᾶ δὲ, τὰ πρὸς δύο· τριπλᾶ δὲ τὰ πρὸς τρεῖς· πολλαπλάσια δὲ τὰ πρὸς πλείονας. ἔστι δὲ μέση φθόγγε δύναμις, ᾧ συμβέβηκεν κατὰ μὲν διάζευξιν, ὀξὺ μὲν τὸ ὀξύ, τόνον ἔχειν ἀσύνθετον, ἁπλοῦν ὄντος δ συστήματος· βαρὺ δὲ τὸ βαρὺ, δίτονον, ἢ τ συνθετὸν ἢ ἀσύνθετον· κατὰ δὲ συναφὴν, ᾧ συμβαίνει τριῶν τετραχόρδων συνημμένων, ἤτοι δ μέσε ὀξυτάτῳ εἶναι, ἢ τὸ ὀξυτάτε, βαρυτάτῳ. ἀπὸ δὲ τ μέσης καὶ τ λοιπῶν φθόγγων αἱ δυνάμεις γνωρίζονται. τὸ δὲ πῶς ἔχει ἑκαστος αὐτῶν πρὸς τὴν μέσην φανερῶς γένεται.

Τόνος δὲ λέγεται τετραχῶς. καὶ γὰρ ὡς φθόγγος, καὶ ὡς διάστημα, καὶ ὡς τόπος φωνῆς, καὶ ὡς τάσις· ἐπὶ μὲν ἓν τὸ φθόγγε χρῶνται τῷ ὀνόματι οἱ λέγοντες ἑπτάτονον τὴν φόρμιγγα, καθάπερ Τέρπανδρος καὶ Ιων. ὁ μὲν γάρ φησιν,

Ημεῖς τοι τετράχηρυν ἀποσείσαντες ἀοιδὴν,
Επτατόνῳ φόρμιγγι νέας κελαδήσομεν ὕμνους.

Ο δὲ ἐν δεκαχόρδῳ λύρᾳ·

——τὴν δεκαβάμονα τάξιν ἔχουσα
Τὰς συμφωνούσας ἁρμονίας τελούσης.

Πρὶν μέν σ' ἑπτάτονον ψάλλον διὰ τέσσαρα πάντες
Ελλῆνες, πανίαν μᾶσαν ἀειράμενοι.

καὶ ἕτεροι δὲ οὐκ ὀλίγοι κέχρηνται τῷ ὀνόματι. ἐπὶ δὲ τ διαστήματος, ὅταν λέγωμεν ἀπὸ μέσης ἐπὶ παραμέσην τόνον εἶναι. ὁ δὲ ὡς τόπος, ὅταν λέγωμεν, φωνῆς, δώριον, ἢ φρύγιον, ἢ λύδιον, ἢ τ ἄλλων τινά. εἰσὶ δὲ κατὰ Αριστόξενον τελοι παίδεκα τόνοι. ὑπερμιξολύδιος, καὶ ὑπερφρύγιος καλούμενος,

nus meſe. acutiſſima denique conjunctio eſt, ex tetrachordo diezeugmenon & hyperbolæon. quæ communis copulat ſonus, nete diezeugmenon. disjunctio una eſt, ex tetrachordo meſon & diezeugmenon. communis vero tonus ille disjungit, qui eſt inter meſen & parameſen. porro perfecta ſunt ſyſtemata duo, quorum alterum minus eſt, alterum majus. ac minus quidem eſt per conjunctionem, à proſlambanomeno ad neten ſynemmenon. ſunt vero in eo tria hæc tetrachorda conjuncta, hypaton, meſon, ſynemmenon. præterea tonus à proſlambanomeno ad hypaten hypaton. finitur denique conſonantia diapaſon & diateſſaron. majus vero eſt per disjunctionem, à proſlambanomeno ad neten hyperbolæon. in quo ſunt quatuor tetrachorda, quorum bina à binis disjuncta, inter ſe vero conjuncta; nimirum hypaton, & meſon; & diezeugmenon, & hyperbolæon. & inſuper toni duo: tum qui à proſlambanomeno eſt ad hypaten hypaton, tum qui à meſe ad parameſen. includitur autem concentu bis diapaſon. cum vero quinque ſint tetrachorda in ſyſtemate immutabili, quod ex binis perfectis conſtat, bina quidem utrique perfectorum ſunt communia, hypaton ſcilicet & meſon: propria vero, conjuncto quidem, tetrachordum neton ſynemmenon: disjunctio vero, tetrachordum neton diezeugmenon & neton hyperbolæon. *immutabilis & mutabilis differentia* diſtabunt, quæ ut ſimplicia ſyſtemata differunt à non ſimplicibus. ſimplicia ſunt, quæ modulatam ſeriem uni meſe aptatam habent: duplicia, quæ duabus: triplicia, quæ tribus: multiplicia, quæ pluribus. eſt vero *meſe* poteſtas ſoni, cui in disjunctione quidem accidit, acumen verſus, tonum habere incompoſitum, ſi ſyſtema omni affectione careat; verſus grave vero, ditonum, idque vel compoſitum, vel incompoſitum: in conjunctione vero, cui inter tria tetrachorda conjuncta contingit, aut medii eſſe acutiſſimum; aut acutiſſimi, graviſſimum. meſes deinde beneficio relinquorum poteſtates innoteſcunt. quomodo enim quiſque illorum ad meſen ſe habeat, fit manifeſtum:

Tonus quatuor modis dicitur. nam & pro *ſono* uſurpatur, & pro *intervallo*, & pro *vocis loco*, & pro *tentione*. pro *ſono* uſurpant hoc nomen, qui citharam vocant *heptatonon*, id eſt, ſeptem ſonis conſtantem, quomodo Terpander atque Ion. ille enim ita:

At nos quadriſono contempto carmine, poſthac
Rite novos citharæ heptatono cantabimus hymnos.

Hic vero in lyra decem chordis inſtructa:

------decimus tibi pſallitur ordo,
Concentuque placent harmoniæ triplices.
Omnes heptatonon diateſſara, te ante canebant
Græci, queis placuit rara Camœna nimis.

atque alios non paucos hoc vocabulo ita uſos invenimus. pro *intervallo*, cum dicimus à meſe ad parameſen eſſe tonum. pro *vocis loco*, cum dicimus tonum Dorium, aut Phrygium, aut Lydium, aut reliquorum aliquem. ſunt vero, ut cenſet Ariſtoxenus, toni tredecim. hypermixolydius, qui & hyperphrygius vocatur. mi-

xolydii duo; acutior & gravior. quorum acutior, qui ordine eſt ſecundus, Hyperiaſtius vocatur: gravior vero, etiam Hyperdorius. Lydii duo; acutior, & gravior, qui & Æolius appellatur. Phrygii duo; quorum alter gravis, qui & Iaſtius; alter acutus. Dorius unus. Hypolydii duo; acutior, & gravior, qui & Hypoæolius vocatur. Hypophrygii duo, quorum gravior quoque appellatur Hypoiaſtius. Hypodorius. Ex his graviſſimus eſt Hypodorius: qui vero deinceps exiſtunt, à graviſſimo ad acutiſſimum, hemitonio ſe invicem excedunt. alterni vero duo, tono; terni, triemitonio. ſimiliter de reliquorum tonorum diſtantia concludes. Hypermyxolydius denique Hypodorium per diapaſon intervallum acumine ſuperat. Pro *tenſione* tonus accipitur, quando dicimus, acuto aliquem vocis tono uti, aut gravi, aut etiam medio.

Mutatio quatuor modis dicitur: *per genus, per ſyſtema, per tonum, & per melopœiam.* per *genus* fit mutatio, cum ex diatono in chroma, aut harmoniam: aut ex chromate, aut harmonia in reliquorum generum aliquod fit tranſitus. per *ſyſtema* vero, cum ex conjunctione in disjunctionem, aut vice verſa, fit mutatio. per *tonum*, cum ex Doriis cantilenis in Phrygias, aut ex Phrygiis in Lydias, aut Hypermixolydias, aut Hypodorias; aut in univerſum, cum ex tredecim tonorum aliquo in reliquorum aliquem, mutationem inſtituimus. atque hæ mutationes ab hemitonio intervallo ad diapaſon procedunt. quorum aliæ per conſona fiunt intervalla; aliæ per diſſona. atque adeo quædam harum minus ſunt concinnæ, aut inconcinnæ; quædam magis. inter quas itaque major eſt communio, illæ ſunt concinniores; ut contra, in quibus minor, inconcinniores. quippe omni mutationi neceſſe eſt aliquid eſſe cum alio commune; aut ſonum, aut intervallum, aut ſyſtema. atque hæc communicatio per ſonorum ſimilitudinem aſſumitur. cum enim in commutationibus mutuo cadunt ſimiles ſoni, ita ut ſpiſſi fiat participatio, concinna eſt mutatio: cum contra diſſimiles, inconcinna. denique per *melopœiam* fit mutatio, cum ex diſtendente more in contrahentem, aut quietum; aut ex quieto in reliquorum aliquem fit tranſitus. eſt vero diſtendens mos melopœiæ, quo ſignatur magnificentia ac virile animi robur, tum actiones heroicæ, atque his ſimiles affectus. hiſce itaque maxime utitur tragœdia, & quæ ex reliquis huic characteri ſunt propiora. contrahens mos eſt, quo animus contrahitur ad humilitatem, & effeminatam diſpoſitionem. atque hujuſmodi ſtatus conveniet amatoriis affectibus, tum lamentis & miſerationibus, atque id genus aliis. quietus denique melopœiæ mos eſt, quem conſequitur animi tranquillitas, ſtatuſque liberalis ac pacificus. huic conveniunt hymni, pæanes, laudes, conſulta, atque his ſimilia.

Melopœia eſt uſus partium Harmonices, quæ à nobis ſunt expoſitæ, quæque propoſitorum

μιξολύδιοι δύο, ὀξύτερος καὶ βαρύτερος· ὧν ὀξύτερος καὶ δεύτερος ὑπερϊάστιος καλεῖται· ὁ δὲ βαρύτερος, καὶ ὑπερδώριος. λύδιοι δὲ δύο, ὀξύτερος καὶ βαρύτερος, ὃς καὶ αἰόλιος καλεῖται. φρύγιοι δύο, ὁ μὲν βαρὺς, ὃς καὶ ἰάστιος· ὁ δὲ ὀξύς. δώριος εἷς. ὑπολύδιοι δύο· ὀξύτερος, καὶ βαρύτερος, ὃς καὶ ὑποαιόλιος καλεῖται. ὑποφρύγιοι δύο, ὧν ὁ βαρύτερος καὶ ὑποϊάστιος καλεῖται. ὑποδώριος. τούτων βαρύτατος μὲν ὑποδώριος· οἱ δὲ ἑξῆς, οἱ ἀπὸ τοῦ βαρυτάτων μέχρι τοῦ ὀξυτάτου ἡμιτονίῳ ἀλλήλων ὑπερέχοντες. τῶν δὲ ἄλλήλοι δύο, τόνῳ· τρεῖς δὲ, τριημιτονίῳ. ἀναλόγως δὲ ἕξει καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν τόνων διαστάσεως. ὁ δὲ ὑπερμιξολύδιος τοῦ ὑποδωρίου τῷ μὲν πασῶν ἐστὶν ὀξύτερος. ὁ δὲ, ὡς πᾶσι, τόνος λέγεται, καθ' ὃ φαμὲν ὀξυτονεῖν τινα ἢ βαρυτονεῖν, ἢ μέσῳ τῷ τῆς φωνῆς τόνῳ κεχρῆσθαι.

Μεταβολὴ δὲ λέγεται τετραχῶς. καὶ γὰρ κατὰ γένος, καὶ κατὰ σύστημα, καὶ κατὰ τόνον. καὶ κατὰ μελοποιΐαν. κατὰ μὲν οὖν γένος γίνεται μεταβολὴ, ὅταν ἐκ διατόνου εἰς χρῶμα, ἢ ἁρμονίαν· ἢ ἐκ χρώματος ἢ ἁρμονίας εἴς τι τῶν λοιπῶν μεταβολὴ γένηται. κατὰ σύστημα δὲ, ὅταν ἐκ συναφῆς εἰς διάζευξιν, ἢ ἀνάπαλιν, μεταβολὴ γένηται. κατὰ τόνον δὲ, ὅταν ἐκ δωρίων εἰς φρύγια, ἢ ἐκ φρυγίων εἰς λύδια, ἢ ὑπερμιξολύδια, ἢ ὑποδώρια, ἢ καθόλου, ὅταν ἔκ τινος τῶν δεκατριῶν τόνων εἴς τινα τῶν λοιπῶν μεταβολὴ γένηται. γίνονται δὲ αἱ μεταβολαὶ ἀπὸ ἡμιτονίου ἀρξάμεναι μέχρι τοῦ διὰ πασῶν. ὧν αἱ μὲν κατὰ σύμφωνα γίνονται διαστήματα, αἱ δὲ κατὰ διάφωνα. τούτων δ' αἱ μὲν ἐμμελεῖς ἧττον ἢ ἐκμελεῖς, αἱ δὲ μᾶλλον. ἐν ὅσαις μὲν οὖν αὐτῶν πλείων ἡ κοινωνία, ἐμμελέστεραι· ἐν ὅσαις δὲ ἐλάττων, ἐκμελέστεραι. ἐπειδὴ ἀναγκαῖον πάσῃ μεταβολῇ κοινόν τι ὑπάρχειν, ἢ φθόγγον, ἢ διάστημα, ἢ σύστημα. λαμβάνεται δὲ ἡ κοινωνία καθ' ὁμοιότητα φθόγγων. ὅταν γὰρ ἐπ' ἀλλήλας ἐν ταῖς μεταβολαῖς πέσωσιν ὅμοιοι φθόγγοι κατὰ τὸν τῆς πυκνῆς μετοχὴν, ἐμμελὴς γίνεται ἡ μεταβολή· ὅταν δὲ ἀνόμοιοι, ἐκμελής. κατὰ δὲ μελοποιΐαν γίνεται μεταβολὴ, ὅταν ἐκ διαστελτικοῦ ἤθους εἰς συστελτικὸν, ἢ ἡσυχαστικὸν, ἢ ἐξ ἡσυχαστικοῦ εἴς τι τῶν λοιπῶν ἡ μεταβολὴ γένηται. ἔστι δὲ διαστελτικὸν μὲν ἦθος μελοποιΐας, δι' ὃ σημαίνεται μεγαλοπρέπειά τε καὶ διάρμα ψυχῆς ἀνδρῶδες, καὶ πράξεις ἡρωϊκαὶ, καὶ πάθη τούτοις οἰκεῖα. χρῆται δὲ τούτοις μάλιστα μὲν ἡ τραγῳδία, καὶ [illegible] τῶν λοιπῶν δὲ ὅσα τούτου ἔχεται τοῦ χαρακτῆρος. συστελτικὸν δὲ, δι' ὃ σημαίνει ἡ ψυχὴ εἰς ταπεινότητα καὶ ἀνανδρον διάθεσιν. ἁρμόττει δὲ τὸ τοιοῦτον κατάστημα τοῖς ἐρωτικοῖς πάθεσι καὶ θρηνώδεσι, καὶ οἰκτοις καὶ τοῖς ὠδαπληστικοῖς. ἡσυχαστικὸν δὲ ἦθός ἐστι μελοποιΐας, ᾧ παρέπεται ἠρεμότης ψυχῆς, καὶ κατάστημα ἐλεύθερόν τε καὶ εἰρηνικόν. ἁρμόττουσι δὲ αὐτῷ ὕμνοι, παιᾶνες, ἐγκώμια, συμβολαὶ, καὶ τὰ τούτοις ὅμοια.

Μελοποιΐα ἐστὶ χρῆσις τῶν προειρημένων μερῶν τῆς ἁρμονικῆς, καὶ ὑποκειμένων δυνάμεων ἐχόντων.

ἐχόντων. δι' ὧν δὲ μελοποιία ὁλοπελεῖται, τέτταρά ἐστιν· ἀγωγή, τροκή, πεῖρα, τονή. ἀγωγὴ μὲν οὖν ἐστιν, ἡ διὰ τῆς ἑξῆς φθόγγων ὁδὸς τοῦ μέλους. τροκὴ δέ, ἡ ἐναλλαξὶ τῶν τε διαστημάτων θέσις ὑπεναντία. πεῖρα δὲ, ἡ ἐφ' ἑνὸς τόνου πολλάκις γινομένη πληξις. τονὴ δέ, ἡ ἐπὶ πλείονα χρόνον μονὴ, κατὰ μίαν γινομένη προφορὰν τῆς φωνῆς. διάγραμμα δέ, σχῆμα ὑπόπεδον, τὰς τῶν μελῳδουμένων περιέχον δυνάμεις. δύναμις δέ ἐστι τάξις φθόγγου, δι' ἧς γνωρίζομεν τῶν φθόγγων ἕκαστον. μελοποιία δέ ἐστι χρῆσις τῶν ὑποκειμένων τῇ ἁρμονικῇ πραγματείᾳ, πρὸς τὸ οἰκεῖον ἑκάστης ὑποθέσεως. ὅπερ ὁ ὅρος τῆς κατὰ τὸ ἡρμοσμένον ἐστὶ πραγματείας.

virtutem complectuntur. quatuor vero ſunt, quibus melopœia perficitur: *Ductus*, *Nexus*, *Pettia*, *Extenſio*. *Ductus* itaque eſt, cantilenæ via, per deinceps poſitos ſonos confecta. *Nexus* vero contra, via permutata, ſpatiorumque poſitio alterna. *Pettia* eſt percuſſio in uno eodemque tono frequenter facta. *Extenſio* eſt diuturnior mora, quæ una vocis prolatione conficitur. Diagramma eſt figura plana, eorum quæ modulamur continens poteſtates. poteſtas vero eſt, quæ vicem ſoni obtinet, per quam ſonorum quemlibet cognoſcimus. Melopœia denique eſt uſus eorum, quæ Harmonicæ tractationi ſunt ſubjecta, ad proprietatem cujuſque argumenti exprimendam. Atque hic eſt tractationis de modulata ſerie finis.

ΤΕΛΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ.

FINIS INTRODUCTIONIS HARMONICÆ EUCLIDIS.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΚΑΤΑΤΟΜΗ

ΚΑΝΟΝΟΣ.

EUCLIDIS

SECTIO

CANONIS.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΚΑΤΑΤΟΜΗ
ΚΑΝΟΝΟΣ.

EUCLIDIS
SECTIO
CANONIS.

Εἰ ἡσυχία εἴη ἡ ἀκινησία, σιωπὴ ἂν εἴη. σιωπῆς δὲ ὄσης μηδενὸς κινουμένου, ἠδὲν ἂν ἀκούοιτο· εἰ οὖν μέλλει τι ἀκουσθήσεσθαι, θλῆψιν καὶ κίνησιν πρότερον δεῖ γενέσθαι. ὥστε, ἐπειδὴ πάντες οἱ φθόγγοι γίνονται θλῆψής τινος γινομένης, θλῆψιν δὲ ἀμήχανον γενέσθαι, μὴ ἐκ κινήσεως προτέρου γενομένης· τῶν δὲ κινήσεων αἱ μὲν πυκνότεραί εἰσιν, αἱ δὲ ἀραιότεραι· καὶ αἱ μὲν πυκνότεραι ὀξυτέρους ποιοῦσι τοὺς φθόγγους, αἱ δὲ ἀραιότεραι, βαρυτέρους· ἀναγκαῖον τοὺς μὲν ὀξυτέρους εἶναι, ἐκ πυκνοτέρων καὶ πλειόνων σύγκει) κινήσεων· τοὺς δὲ βαρυτάτους, ἐκ ἀραιοτέρων καὶ ἐλαττόνων σύγκει) κινήσεων. ὥστε τοὺς μὲν ὀξυτέρους δέοντος ἀνιεμένους ἀφαιρέσει κινήσεων τυγχάνειν τοῦ δέοντος· τοὺς δὲ βαρυτέρους ἐπιτεινομένους, προσθέσει κινήσεων, τυγχάνειν τοῦ δέοντος. διόπερ ἐκ μορίων τοὺς φθόγγους συγκεῖσθαι φατέον, ἐπειδὴ προσθέσει καὶ ἀφαιρέσει τυγχάνουσι δέοντος. πάντα δὲ τὰ ἐκ μορίων συγκείμενα, ἀριθμῷ λόγῳ λέγε) πρὸς ἄλληλα. ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν ἀριθμῷ λόγῳ λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους. τοῦδε ἀριθμῶν οἱ μὲν ἐν πολλαπλασίοι λόγῳ λέγονται· οἱ δὲ ἐν ἐπιμορίῳ· οἱ δὲ ἐν ἐπιμερεῖ. ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν τοῖς τοιούτοις λόγοις λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους. τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι, καὶ ἐπιμόριοι ἐνὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους. γινώσκομεν δὲ καὶ τοὺς φθόγγους τοὺς μὲν συμφώνους ὄντας, τοὺς δὲ διαφώνους. καὶ τοὺς μὲν συμφώνους μίαν κρᾶσιν τινὰ ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦντας· τοὺς δὲ διαφώνους, ὄ. τούτων ὄντως ἐχόντων, εἰκὸς τοὺς συμφώνους φθόγγους, ἐπειδὴ μίαν, τινὰ ἐξ ἀμφοῖν, ποιοῦντα κρᾶσιν τῆς φωνῆς, εἶναι τοῦ ἐν ἑνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους λεγομένων ἀριθμῶν, ἤτοι πολλαπλασίους ὄντας, ἢ ἐπιμορίους.

SI omnia quieſcerent, nihilque moveretur, ſilentium foret. ſi ſilentium foret, nihilque moveretur, nihil quoque audiretur: quare, ſi quid audiri debeat, percuſſionem atque motum præcedere oportet. hinc adeo, cum omnes ſoni fiant præcedente aliqua percuſſione; percuſſio vero fieri nequeat niſi præceſſerit motus: & cum motuum alii ſint ſpiſſiores, alii rariores; & quidem ſpiſſiores faciant ſonos acutiores; rariores vero, graviores: neceſſe eſt, illos quidem eſſe acutiores, quod ex ſpiſſioribus & pluribus componantur motibus; hos vero graviores, quod ex motibus conſtituantur & rarioribus & paucioribus. ut hac ratione, qui juſto ſunt acutiores, ſi remittantur, ablatione motuum juſtum ſonum conſequantur; ut contra, qui graviores, ſi intendantur, motuum additione juſti fiunt. ſonos itaque ex partibus componi dicendum, quod additione & ablatione fiant juſti. jam vero, quæ ex partibus conſtant, omnia, numeri inter ſe ratione dicuntur. ut ſonos quoque numeri ratione inter ſe dici ſit neceſſe. porro numerorum alii dicuntur in ratione multiplici, alii in ſuperparticulari, alii in ſuperpartiente. ut & ſonos neceſſe ſit iis inter ſe rationibus appellari. atque horum multiplices & ſuperparticulares uno inter ſe nomine dicuntur. deihde quoque eſt notum, ſonorum alios eſſe conſonos, alios diſſonos. & conſonos quidem unam ex ambobus facere miſtionem: diſſonos vero non item. cum hæc ita ſe habeant, rationi eſt conſentaneum, ſonos conſonos, quod vocis unam ex ambobus miſtionem, faciant ad numeros, qui uno nomine mutuum ſuum dicunt reſpectum, vel multiplices, vel ſuperparticulares.

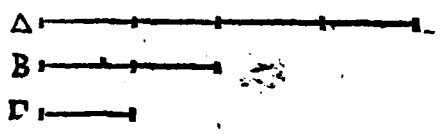
PROP.

THEOREMA I.

Si intervallum multiplex, bis compositum, fecerit aliquod intervallum; etiam illud erit multiplex.

ESto intervallum B, Γ, ita ut B sit multiplex ipsius Γ; porro factum sit, ut Γ ad B ita B ad Δ: dico Δ quoque multiplicem esse ipsius Γ.

Quoniam enim B multiplex est ipsius Γ, me-



titur ergo Γ ipsum B. sed erat quoque ut Γ ad B ita B ad Δ: quare & Γ metitur ipsum Δ: ergo Δ est multiplex ipsius Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ α'.

Ἐὰν διάστημα πολλαπλάσιον, δὶς συντεθέν, ποιή τι διάστημα· καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἔσται.

Ἔστω διάστημα τὸ Β, Γ, καὶ ἔστω πολλαπλάσιον τὸ Β διὰ Γ, καὶ γεγονέσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· φημὶ δὴ καὶ τὸν Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιον εἶναι.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Β διὰ Γ πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ

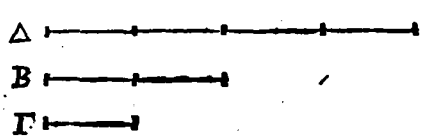
ἄρα ὁ Γ τὸν Β. ἦν δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· ὥστε μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Δ· πολλαπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Γ.

THEOREMA II.

Si intervallum, bis compositum, totum fecerit intervallum multiplex; ipsum quoque erit multiplex.

SIT intervallum B, Γ, factumque sit ut Γ ad B ita B ad Δ, sit quoque Δ multiplex ipsius Γ: dico etiam B ipsius Γ esse multiplicem.

Quia enim Δ est multiplex ipsius Γ, igi-



tur Γ metitur ipsum Δ. didici autem; si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, & primus metiatur ultimum, illum quoque intermedios mensurum: quare & Γ metitur ipsum Δ: ergo B est multiplex ipsius Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ β'.

Ἐὰν διάστημα, δὶς συντεθέν, τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον· καὶ αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.

Ἔστω διάστημα τὸ Β, Γ, καὶ γεγονέσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔστω ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· φημὶ δὴ καὶ τὸν Β τοῦ Γ εἶναι διπλάσιον.

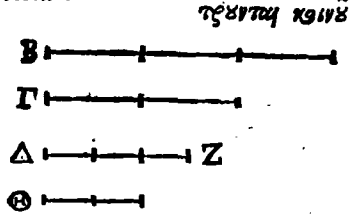
Ἐπεὶ γὰρ ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ

ἄρα ὁ Γ τὸν Δ. ἔμαθον δὲ, ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὁποσοιοῦν, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τοὺς μεταξὺ μετρήσει· μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ· πολλαπλάσιος ἄρα ὁ Β τοῦ Γ.

THEOREMA III.

Superparticulare intervallum neque unum neque plures habebit proportionaliter incidentes numeros medios.

SIT enim superparticulare intervallum B, Γ. minimi vero in eadem ratione, in qua sunt B, Γ, sint Δ Z, Θ. hos igitur sola unitas, tanquam mensura communis metitur.



Aufer H Z æqualem numerum ipsi Θ, & relinquitur unitas: est igitur Δ Z superparticularis ipsius Θ. excessus vero ipse Δ H communis mensura

ΘΕΩΡΗΜΑ γ'.

Ἐπιμερὲς διαστήματος μέσοι, ὅπερ εἷς ὅπερ πλείους ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί.

Ἔστω γὰρ ἐπιμερὲς διάστημα τὸ Β, Γ. ἐλάχιστοι δὲ ἐπὶ τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς Β, Γ ἔστωσαν οἱ Δ Ζ, Θ· ὅτοι ἂν ὑπὸ μονάδος μόνης μετρῶνται κοινὸν μέτρον.

Ἀφελὲ ἴσον τῷ Θ τὸν Η Ζ, καὶ ἐπιλοιπὸν μονάς. ἐπιμερὲς ἐστιν ἄρα ὁ Δ Ζ τοῦ Θ. καὶ ἡ ὑπεροχὴ ὁ Δ Η κοινὸν μέτρον τούτε

Δ Ζ

ΔΖ ϗ Θ· οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τὰς ΔΖ, Θ μέσης ἀδεὶς. ἔσται γὰρ ὁ ἐμπίπτων τῷ ΔΖ ἐλάττων, τῷ δὲ Θ μείζων· ὥστε τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τὰς ΔΖ, Θ τις. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς ἐλαχίστους μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τὰς τὸν αὐτὸν λόγον ἐχούσας ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. ἀδὲς δὲ εἰς τὰς ΔΖ, Θ ἐμπεσεῖται· ἀδὲ ἄρα εἰς τὰς Β, Γ ἐμπεσεῖται.

ipsius ΔΖ & Θ: nullus igitur inter ΔΖ & Θ medius cadet proportionalis. Foret enim qui incideret, ipso ΔΖ minor, major vero ipso Θ; atque hac ratione unitas divideretur, quod fieri nequit: nullus ergo inter ΔΖ & Θ incidet. quot autem inter minimos cadunt medii proportionales, tot etiam inter alios, eandem rationem habentes, incident proportionales. sed nullus cadit inter ΔΖ & Θ; quare nec inter Β, Γ quisquam incidet.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'.

Ἐὰν διάστημα, μὴ πολλαπλάσιον, δὶς συντεθῇ· τὸ ὅλον οὔτε πολλαπλάσιον ἔσται, οὔτε ἐπιμόριον.

Ἔστω γὰρ διάστημα μὴ πολλαπλάσιον τὸ Β, Γ, ϗ γενέσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸ Δ· λέγω ὅτι ὁ ΔΓ οὔτε πολλαπλάσιός, οὔτε ἐπιμορίου ἐστίν.

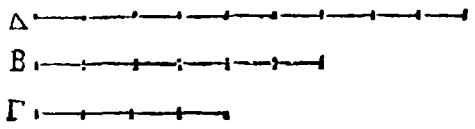
Εἰ γὰρ πρῶτον ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· ἐκ-

Theorema IV.

Si intervallum non multiplex bis componatur; totum, quod producitur, intervallum, neque multiplex erit, neque superparticulare.

Sit enim intervallum non multiplex Β, Γ; & fiat ut Γ ad Β ita Β ad Δ: dico Δ neque multiplicem esse, neque superparticularem ipsius Γ.

Sit enim primo Δ multiplex ipsius Γ; atqui



ἴσμεν ἐμάθομεν, ὅτι ἐὰν διάστημα, δὶς συντεθὲν, τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον, ϗ αὐτὸ πολλαπλάσιόν ἐστιν· ἔσται ἄρα ὁ Β τοῦ Γ πολλαπλάσιος. οὐκ ἔστω δὲ· ἀδύνατον ἄρα τὸ Δ τοῦ Γ εἶναι πολλαπλάσιον. ἀλλὰ μὴν ἀδ' ἐπιμόριον, ἐπιμορίου γὰρ διαστήματος μέσος ἀδεὶς ἀνάλογον ἐμπίπτει· εἰς δὲ τὰς Δ, Γ ἐμπίπτει ὁ Β· ἀδύνατον ἄρα τὸ Δ τοῦ Γ ἢ πολλαπλάσιον, ἢ ἐπιμόριον εἶναι.

didicimus, si intervallum, bis compositum, totum fecerit multiplex, ipsum quoque esse multiplex: erit igitur Β multiplex ipsius Γ. sed hoc non erat: quare impossibile est ut Δ sit multiplex ipsius Γ. sed neque secundo, superparticularis; cum superparticulare intervallum nullum habeat medium *numerum* proportionaliter intervenientem. jam vero inter Δ, Γ cadit Β: quare fieri nequit ut Δ ipsius Γ aut multiplex sit aut superparticularis.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'.

Ἐὰν διάστημα, δὶς συντεθέν, τὸ ὅλον μὴ ποιῇ πολλαπλάσιον· οὐδ' αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.

Ἔστω διάστημα τὸ Β, Γ, ϗ γεγενήσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸ Δ. ϗ μὴ ἔστω ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ Β τοῦ Γ ἔσται πολλαπλάσιος.

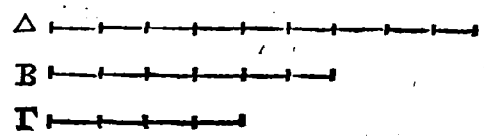
Εἰ γὰρ ἔστιν ὁ Β τοῦ Γ πολλαπλάσιος, ἔστω ϗ ὁ Δ

Theorema V.

Si intervallum, bis compositum, totum non fecerit multiplex; ipsum quoque non erit multiplex.

Sit enim intervallum Β, Γ; sitque factum ut Γ ad Β ita Β ad Δ; porro Δ non sit multiplex ipsius Γ: dico nec Β ipsius Γ fore multiplicem.

Si enim Β fuerit multiplex ipsius Γ, erit



τοῦ Γ πολλαπλάσιος. ἐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ὁ Β τοῦ Γ ἔσται πολλαπλάσιος.

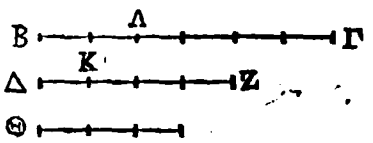
quoque Δ multiplex ipsius Γ. atqui non est: neque igitur Β erit multiplex ipsius Γ.

THEOREMA VI.

Duplex intervallum conſtat ex duobus maximis ſuperparticularibus, ſeſquialtero ſcilicet & ſeſquitertio.

SIT enim ΒΓ ſeſquialter ipſius ΔΖ, ΔΖ vero ſeſquitertius ipſius Θ: dico ΒΓ duplum eſſe ipſius Θ.

Quoniam enim dempſi ΖΚ æqualem ipſi Θ, deinde ipſi ΔΖ æqualem ΓΛ: hinc, quoniam ΒΓ eſt ſeſquialter ipſius ΔΖ, exiſtit ΒΛ pars tertia ipſius ΒΓ, at dimidia ipſius ΔΖ. rurſus, quoniam ΔΖ eſt ſeſquitertius ipſius Θ, ΔΚ eſt pars quarta ipſius ΔΖ, at tertia ipſius Θ: cum igitur ΔΚ ſit pars quarta ipſius ΔΖ, at ΒΛ pars tertia ipſius ΒΓ; erit ΔΚ pars ſexta ipſius ΒΓ. atqui idem ΔΚ erat pars tertia ipſius Θ: ergo ΒΓ duplus eſt ipſius Θ.



ΘΕΩΡΗΜΑ ϛ'.

Τὸ διπλάσιον διάστημα ἐκ δύο τῶν μεγίστων ἐπιμορίων συνέστηκεν, ἔκ τε τοῦ ἡμιολίου καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτρίτου.

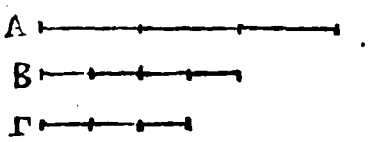
ΕΣτω γὰρ ὁ μὲν ΒΓ τοῦ ΔΖ ἡμιόλιος, ὁ δὲ ΔΖ τοῦ Θ ἐπίτριτος· φημὶ τὸν ΒΓ τοῦ Θ διπλάσιον εἶναι.

Αφείλθω γὰρ ἴσον τῷ Θ τὸ ΖΚ, καὶ τῷ ΔΖ τὸ ΓΛ· ὡκοῦν ἐπεὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΔΖ ἡμιόλιος, ὁ ΒΛ ἄρα τοῦ ΒΓ τρίτον μέρος ἐστὶν, τοῦ δὲ ΔΓ ἥμισυ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ ΔΖ τοῦ Θ ἐπίτριτός ἐστιν, ὁ ΔΚ τοῦ μὲν ΔΖ τεταρτημόριόν ἐστι, τοῦ δὲ Θ τριτημόριον· ὥστε ἐπεὶ ὁ ΔΚ τοῦ ΔΖ ἐστὶ τεταρτημόριον, ὁ δὲ ΒΛ τοῦ ΒΓ τρίτον μέρος· ὁ ἄρα ΔΚ τοῦ ΒΓ ἕκτον μέρος ἐστίν. ἴσον δὲ ὁ ΔΚ τοῦ Θ τρίτον μέρος· ὁ ἄρα ΒΓ τοῦ Θ διπλάσιός ἐστιν.

ALITER.

Sit enim Α ſeſquialter ipſius Β, ipſe autem Β ſeſquitertius ipſius Γ; dico Α eſſe duplum ipſius Γ.

Quoniam enim Α ſeſquialter eſt ipſius Β, Α continet ipſum Β atque ejus ſemiſſem: quare duo Α æquales ſunt tribus Β. rurſus, quoniam Β eſt ſeſquitertius ipſius Γ, continet ergo Β ipſum Γ & tertiam ejus partem: quare tres Β æquales ſunt quatuor Γ. atqui tres Β æquales quoque ſunt duobus Α: quare duo Α æquales ſunt quatuor Γ. atque hinc Α eſt æqualis duobus Γ: eſt igitur Α duplus ipſius Γ.



ΑΛΛΩΣ.

Εστω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β ἡμιόλιος. ὁ δὲ Β τοῦ Γ ἐπίτριτος· λέγω ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστὶ διπλάσιος.

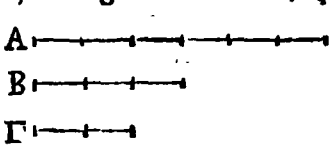
Επεὶ γὰρ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ Α τοῦ Β· ὁ Α ἄρα ἔχει τὸν Β, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ· δύο ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ τρισὶ τοῖς Β. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τοῦ Γ ἐστιν ἐπίτριτος· ὁ Β ἄρα ἔχει τὸν Γ καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ· τρεῖς ἄρα οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τέτταρσι τοῖς Γ. τρεῖς δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶ δυσὶ τοῖς Α· δύο ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ τέτταρσι τοῖς Γ· ὁ Α ἄρα ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς Γ· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ.

THEOREMA. VII.

Ex duplo intervallo & ſeſcuplo, triplum fit intervallum.

SIT enim Α duplus ipſius Β, Β vero ſeſcuplus ipſius Γ: dico Α eſſe triplum ipſius Γ.

Cum enim Α ſit duplum ipſius Β; eſt ergo Α æqualis binis Β. rurſus, cum Β ſit ſeſquialter ipſius Γ; continet ergo Β ipſum Γ ejuſque



ΘΕΩΡΗΜΑ ζ'.

Ἐκ δύο διπλασίου διαστήματος καὶ ἡμιολίου, τριπλάσιον διάστημα γίνεται.

ΕΣτω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β διπλάσιος, ὁ δὲ Β τοῦ Γ ἡμιόλιος· λέγω ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστὶ τριπλάσιος.

Επεὶ γὰρ ὁ Α τοῦ Β ἐστὶ διπλάσιος· ὁ ἄρα Α ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς Β. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τοῦ Γ ἐστὶν ἡμιόλιος· ὁ Β ἄρα ἔχει τὸν Γ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ.

δύο

δύο ἄρα οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τρισὶ τοῖς Γ. δύο δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τῷ Α· καὶ ὁ Α ἄρα ἴσος ἐστὶ τρισὶ τοῖς Γ· τριπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ.

quare bini B æquales ſunt ternis Γ. atque bini B æquales ſunt ipſi A: ergo A quoque æqualis eſt ternis Γ: eſt ergo A triplus ipſius Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ η'.

Ἐὰν ἀπὸ ἡμολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον.

Ἔστω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β ἡμιόλιος, ὁ δὲ Γ τοῦ Β ἐπίτριτος· λέγω ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστὶν ἐπόγδοος.

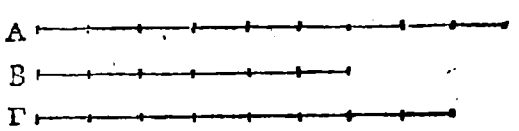
Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τοῦ Β ἐστὶν ἡμιόλιος, ὁ Α ἄρα ἔχει τὸ Β καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ· ὀκτὼ ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ δώδεκα τοῖς Β. πάλιν ἐπεὶ ὁ Γ τοῦ Β ἐστὶν ἐπίτριτος· ὁ Γ ἄρα ἔχει τὸ Β καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ· ἐννέα ἄρα οἱ Γ ἴσοι εἰσὶ δώδεκα τοῖς Β. δώδεκα δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶν ὀκτὼ τοῖς Α· ὀκτὼ ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶν ἐννέα τοῖς Γ· ὁ ἄρα Α ἴσος ἐστὶ τῷ Γ καὶ τῷ ὀγδόῳ αὐτοῦ· ὁ Α ἄρα τοῦ Γ ἐστὶν ἐπόγδοος.

THEOREMA VIII.

Si à ſeſcuplo intervallo ſeſquitertium intervallum auferatur; quod relinquitur, eſt ſeſquioctavum.

ESto enim A ſeſquialter ipſius B, at Γ ſeſquitertius ipſius B: dico A eſſe ſuperoctavum ipſius Γ.

Quoniam enim A eſt ſeſquialter ipſius B, habet ergo A ipſum, ejuſque ſemiſſem: quare octo A æquales ſunt duodecim B. porro, quoniam Γ eſt ipſius B ſeſquitertius, habet ergo Γ ipſum B ejuſque trientem: quare novem Γ æquales ſunt duodecim B. atqui duodecim B æquales ſunt octonis A: octoni ergo A æquales ſunt novenis Γ: quare A æqualis eſt ipſi Γ ejuſque parti octavæ: atque adeo A ſeſquioctavus eſt ipſius Γ.



ΘΕΩΡΗΜΑ θ'.

Τὰ ἓξ ἐπόγδοα διαστήματα μείζονά ἐστι διαστήματος ἑνὸς διπλασίου.

Ἔστω γὰρ ὁ ἐξῆς ἀριθμὸς ὁ Α, καὶ τοῦ μὲν Α ἐπόγδοος ἔστω ὁ Β, τοῦ δὲ Β ἐπόγδοος ὁ Γ, τοῦ δὲ Γ ἐπόγδοος ὁ Δ, τοῦ δὲ Δ ἐπόγδοος ὁ Ε, τοῦ δὲ Ε ἐπόγδοος ὁ Ζ, τοῦ δὲ Ζ ἐπόγδοος ὁ Η· λέγω ὅτι ὁ Η τοῦ Α μείζων ἐστὶν ἢ διπλάσιος.

Ἐπεὶ ἐμάθομεν εὑρεῖν ἑπτὰ ἀριθμοὺς ἐφεξῆς ἐπογδόους ἀλλήλων, εὑρήσθωσαν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η. καὶ γίνεται ὁ μὲν Α, εἰκοσιἓξ μύρια, ἑξακισχίλια, ἑκατὸν καὶ πεντήκοντα καὶ πεντάκις· ὁ δὲ Β, εἰκοσιεννέα μύρια, τετρακισχίλια, ἐννεακόσια καὶ δώδεκα· ὁ δὲ Γ, τεσσαρακοντατρία μύρια, χίλια, ἑπτακόσια, καὶ ἑβδομηκοντατρίς· ὁ δὲ Δ, τεσσαρακοντατρὶς μύρια, τετρακισχίλια, διακόσια καὶ πεντεκαιτεσσαρακοντακτώ· ὁ δὲ Ε, πεντεκαιτεσσαρακοντατὲν μύρια, ἐννεακισχίλια, ἐννεακόσια καὶ πέντε· ὁ δὲ Ζ, πεντεκαιτεσσαρακοντατετὰ μύρια, διακισχίλια, τριακόσια καὶ ἐννενηκονταδύο· ὁ δὲ Η, πεντηκοντατετρία μύρια, χίλια, τετρακόσια καὶ πεντεκαιτεσσαράκοντα ἕν· καὶ ἔστιν ὁ Η τοῦ Α μείζων ἢ διπλάσιος.

THEOREMA IX.

Sex intervalla ſeſquioctava majora ſunt uno intervallo duplo.

SIT enim unus numerus A, atque hujus A ſeſquioctavus ſit B, hujus vero B ſeſquioctavus ſit Γ, hujus vero Γ ſeſquioctavus ſit Δ, rurſus hujus Δ ſeſquioctavus ſit E, ipſius vero E ſeſquioctavus ſit Z, denique ipſius Z ſeſquioctavus ſit H: dico H numerum duplo & amplius majorem eſſe ipſo A.

Quoniam didicimus invenire ſeptem numeros deinceps inter ſe ſeſquioctavos, inventi ſint, A, B, Γ, Δ, E, Z, H. fit itaque A vicies-ſexies dena millia, duo millia, centum quadraginta quatuor; B autem, vicies-novies dena millia, quatuor millia, nongenta & duodecim; deinde Γ, tricies-ter dena millia, mille, ſeptingenta, ſeptuaginta ſex; & Δ, tricies-ſepties dena millia, tria millia, ducenta & quadraginta octo; & E, quadragies-ſemel dena millia, novem millia, nongenta & quatuor; porro Z, quadragies-ſepties dena millia, duo millia, trecenta & nonaginta duo; tandem H, quinquagies-ter dena millia, mille, quadringenta & quadraginta unum; eſtque H duplo & amplius major quam A.

A, 262144. B, 294912. Γ, 331776.
Δ, 373248. E, 419904. Z, 472392. H, 531441.

THEOREMA X.

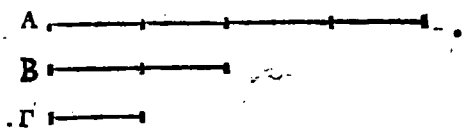
Intervallum diapaſon eſt multiplex.

SIT enim nete quidem hyperbolæon A, meſe vero B, & proſlambanomenos Γ: ergo A, Γ intervallum, cum ſit bis diapaſon, eſt con-

ΘΕΩΡΗΜΑ ι'.

Τὸ διὰ πασῶν διάστημα ὅτι πολλαπλάσιον.

ΕΣτω γὰρ νήτη μὲν ὑπερβολαίων ὁ Α, μέση δὲ ὁ Β, παρανήτη δὲ ὁ Γ· τὸ ἄρα Α, Γ διάστημα, ὃ ἐστὶ διὰ πασῶν ὄν, ἐστὶ σύμφωνον.



ſonum. eſt igitur vel ſuperparticulare, vel multiplex. non eſt autem ſuperparticulare, quoniam in ſuperparticulari intervallo nullus cadit medius proportionalis: eſt ergo multiplex. quoniam ergo bina æqualia intervalla, A, B: B, Γ, compoſita faciunt multiplex; ideo & A, B erit multiplex.

ἤτοι ἐν ἐπιμορίῳ ἐστίν, ἢ πολλαπλάσιον. ἐπιμόριον μὲν οὖν οὐκ ἔστιν, ἐπιμορίῳ γὰρ διαστήματος μέσος οὐδεὶς ἀνάλογον ἐμπίπτει· πολλαπλάσιον ἄρα ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο ἴσα διαστήματα, τὰ Α, Β· Β, Γ συνῃθέντα ποιεῖ πολλαπλάσιον τὸ ὅλον· καὶ τὸ Α, Β ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον.

THEOREMA XI.

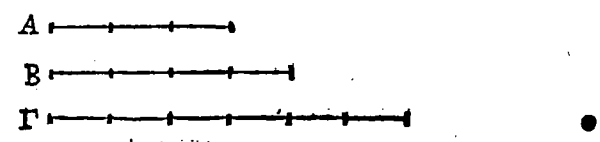
Diateſſaron intervallum & diapente, utrumque eſt ſuperparticulare.

ESto enim nete quidem ſynemmenon A, meſe vero B, & hypate meſon Γ: quare A, Γ intervallum, cum ſit bis diateſſaron, eſt

ΘΕΩΡΗΜΑ ια'.

Τὸ διὰ τεσσάρων διάστημα καὶ τὸ διὰ πέντε, ἑκάτερον ἐπιμόριόν ἐστιν.

ΕΣτω γὰρ νήτη μὲν συνημμένων ὁ Α, μέση δὲ ὁ Β, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ Γ· τὸ ἄρα Α, Γ διάστημα, ὃ ἐστὶ διὰ τεσσάρων ὄν, ἐστὶ διάφω-



diſſonum: non eſt ergo multiplex. quoniam itaque duo intervalla æqualia, A, B: B, Γ compoſita totum non faciunt multiplex, neque ergo A, B eſt multiplex. eſt tamen conſonum: ergo ſuperparticulare. eadem demonſtratio obtinet in diapente.

νον· οὐκ ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον. ἐπεὶ οὖν δύο διαστήματα ἴσα τὰ Α Β· Β Γ συνῃθέντα τὸ ὅλον μὴ ποιεῖ πολλαπλάσιον, οὐδὲ ἄρα τὸ Α, Β ἐστὶ πολλαπλάσιον. καί ἐστι σύμφωνον· ἐπιμόριον ἄρα. ἡ αὐτὴ δὲ ἀποδειξις ἐπὶ τοῦ διὰ πέντε.

THEOREMA XII.

Intervallum diapaſon eſt duplum.

QUippe monſtravimus ipſum eſſe multiplex: quare aut duplum eſt, aut duplo majus. ſed monſtravimus intervallum duplum conſtare ex duobus maximis ſuperparticularibus: unde diapaſon intervallum, ſi duplo fuerit majus, non erit compoſitum ex duobus ſolum ſuperparticularibus, ſed ex pluribus. atqui componitur ex duobus intervallis conſonis, nimirum ex diapente & diateſſaron: quare diapaſon non erit duplo majus: ergo duplum. quoniam vero diapaſon eſt duplum, & duplum conſtat ex duobus maximis ſuperparticularibus; idcirco diapaſon ex ſeſquialtero conſtat & ſeſquitertio: hæc enim ſunt maxima; ſiquidem ex diapente & diateſſaron, quæ ſuperparticularia ſunt, componitur. porro diapente, quoniam majus eſt, erit ſeſcuplum;

ΘΕΩΡΗΜΑ ιϚ'.

Τὸ διὰ πασῶν διάστημα ὅτι διπλάσιον.

ΕΔείξαμεν γὰρ αὐτὸ πολλαπλάσιον· οὐκοῦν ἤτοι διπλάσιόν ἐστιν, ἢ μεῖζον ἢ διπλάσιον. ἀλλ' ἐπεὶ ἐδείξαμεν τὸ διπλάσιον διάστημα ἐκ δύο τῶν μεγίστων ἐπιμορίων συγκείμενον· ὥστε εἰ ἔσται τὸ διὰ πασῶν μεῖζον διπλασίου, οὐ συγκείσεται ἐκ δύο μόνων ἐπιμορίων, ἀλλ' ἐκ πλειόνων. σύγκειται δὲ ἐκ δύο συμφώνων διαστημάτων, ἔκ τε τοῦ διὰ πέντε καὶ διὰ τεσσάρων· οὐκ ἄρα ἔστιν διὰ πασῶν μεῖζον διπλασίου· διπλάσιον ἄρα. ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ διὰ πασῶν ἐστι διπλάσιον, τὸ δὲ διπλάσιον ἐκ τῶν δύο μεγίστων ἐπιμορίων συνέστηκεν· καὶ τὸ διὰ πασῶν ἄρα ἐξ ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου συνέστηκεν· τοῦτα δὲ μέγιστα, συνέστηκε γὰρ ἔκ τε τοῦ διὰ πέντε καὶ ἐκ τοῦ διὰ τεσσάρων ὄντων ἐπιμορίων· τὸ μὲν ἄρα διὰ πέντε, ἐπειδὴ μεῖζόν ἐστιν, ἡμιόλιον ἂν

ἔη.

ἐπ· τὸ δὲ διὰ πασάρων διτέταρτον. Φανερὸν δὴ ὅτι τὸ διὰ πέντε καὶ τὸ διὰ πασῶν τριπλάσιόν ἐστιν, ἐδείξαμεν γὰρ ὅτι ἐκ διπλασίου διαστήματος καὶ ἡμιολίου τριπλάσιον διάστημα γίνεται· ὥστε καὶ τὸ διὰ πασῶν καὶ τὸ διὰ πέντε τριπλάσιον. τὸ δὲ δὶς διὰ πασῶν τετραπλάσιόν ἐστιν· * ἀποδέδεικται ἄρα τῶν συμφώνων ἕκαστον ἐν τοῖσι λόγοις ἔχει σὺν ᾧ περιέχοντας φθόγγους πρὸς ἀλλήλους.

diatessaron vero sesquitertium. manifestum quoque, intervallum quod fit ex diapente & diapason additis, esse triplum; etenim monstravimus, ex duplo intervallo & sesquialtero, intervallum fieri triplum: ideoque diapason & diapente triplum est. bis diapason autem quadruplum: demonstratum ergo est, quibus inter se rationibus constitutos habet sonos, qui ipsum continent consonorum, *intervallorum* unumquodq;.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιγ'.

Λοιπὸν δὲ περὶ τοῦ τονιαίου διαστήματος διελθεῖν, ὅτι ἐπόγδοον.

Μάθομεν γὰρ ὅτι ἐὰν μὲν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἀπὸ τρίτου διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλειπόμενον ἐπόγδοον· ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ διὰ πέντε τὸ διὰ τεσσάρων ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν τονιαῖόν ἐστι διάστημα· τὸ ἄρα τονιαῖον διάστημα ἐπόγδοόν ἐστιν.

THEOREMA XIII.

Reliquum est ut de toni intervallo dispiciamus, quod est sesquioctavum.

NAM didicimus, si à sescuplo intervallo auferatur intervallum sesquitertium, id quod relinquitur, esse sesquioctavum; porro si à diapente auferatur diatessaron, reliquum esse toni intervallum: quare toni intervallum est sesquioctavum.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιδ'.

Τὸ διὰ πασῶν ἔλαττόν ἐστιν ἢ ἐξ τόνων.

Δέδεικται γὰρ τὸ μὲν διὰ πασῶν διπλάσιον· ὁ δὲ τόνος ἐπόγδοος. τὰ δὲ ἓξ ἐπόγδοα διαστήματα μείζονα διαστήματός ἐστι διπλασίου· τὸ ἄρα διὰ πασῶν ἔλαττόν ἐστιν ἓξ τόνων.

THEOREMA XIV.

Diapason est minus sex tonis.

MONSTRATUM enim est, diapason quidem esse duplum: tonus vero est sesquioctavus. at sex sesquioctava intervalla majora sunt intervallo duplo: quare diapason minus est sex tonis.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιε'.

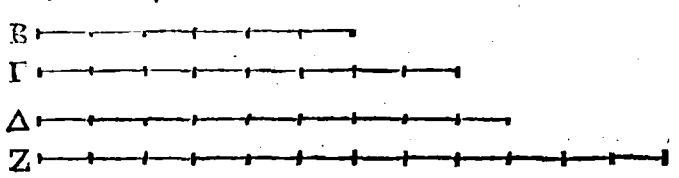
Τὸ δὲ διὰ τεσσάρων ἔλαττόν ἐστι δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου. καὶ τὸ διὰ πέντε ἔλαττόν ἐστι τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου.

Ἔστω γὰρ νήτη μὲν διεζευγμένων ὁ Β, παραμέση δὲ ὁ Γ, μέση δὲ ὁ Δ, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ Ζ· τοῦ ἄρα μὲν Γ, Δ διάστημα τόνος ἐστί. τὸ δὲ Β, Ζ διὰ πασῶν ὄν, ἔλαττόν ἐστιν ἓξ τόνων· τὰ λοιπὰ ἄρα, τό, τε Β, Γ καὶ τὸ Δ, Ζ, ἴσα ὄντα, ἐλάττονά ἐστι πέντε τόνων· ὥστε τὸ Β, Γ ἔλαττον, δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου ὄν, ἐστὶ διὰ τεσσάρων· τὸ δὴ Β, Δ, ἔλαττον τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου ὄν, ἐστὶ διὰ πέντε.

THEOREMA. XV.

Diatessaron minus est duobus tonis & hemitonio. item diapente minus est tribus tonis & hemitonio.

SIT enim nete quidem diezeugmenon Β, parameses vero Γ, mese Δ, hypate meson Ζ: quare Γ, Δ intervallum est tonus. at



Β, Ζ cum sit diapason, minus est sex tonis: ergo reliqua, scilicet Β Γ, & Δ Ζ, cum sint æqualia, minora sunt tonis quinque: quare Β, Γ; cum duobus tonis & hemitonio existat minus, est diatessaron: deinde Β, Δ, cum tribus tonis & hemitonio sit minus, est diapente.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιϛ'.

Ὁ τόνος οὐ διαιρεθήσεται εἰς δύο ἴσους, οὔτε εἰς πλείους.

Ἐδείχθη γὰρ ὢν ἐπιμόριος. ἐπιμορίου δὲ διαστήματος οὔτε πλείους οὔτε εἰς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν· οὐκ ἄρα διαιρεθήσεται ὁ τόνος εἰς ἴσα.

THEOREMA. XVI.

Tonus in duas pluresve æquales partes dividi nequit.

MONSTRATUS enim est esse superparticularis. at superparticulare intervallum neq; unum neque plures capit medios proportionaliter intervenientes: quare nec tonus in æqua dividetur.

* In editis *Euclidis* perperam, ἀποδέδεικται ἄρα ὅτι τῶν συμφώνων ἕκαστον ἐν τοῖσι λόγοις, &c.

THEOREMA XVII.

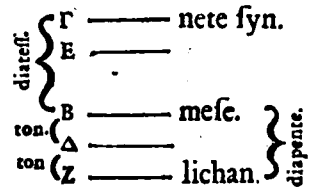
Paranetæ & lichani ſumentur per conſonantiam hoc modo.

ESto enim meſe B, intendatur diateſſaron ad Γ, atque à Γ remittatur diapente ad Δ: eſt igitur tonus B, Δ. rurſus à Δ intenda-

ΘΕΩΡΗΜΑ ιζ'.

Αἱ παρανῆται καὶ αἱ λιχανοὶ ληφθήσονται διὰ συμφωνίας ὅλου.

ΕΣτω γὰρ μέση ὁ Β, ὑπατοειδὴς δὲ παρανήτη ἡ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἀνειλήφθω διὰ πασῶν ἐπὶ τὸ Δ· τόνος ἄρα ἐστὶ τὸ Β, Δ. πάλιν δὴ ἀπὸ τοῦ Δ



tur diateſſaron ad E, & ab E remittatur diapente ad Z: quare tonus eſt Z, Δ: unde Z, B eſt ditonum: ergo Z eſt lichanos. ſimili quoque ratione ſumentur paranetæ.

διὰ πασῶν ἐπιτεταάσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἀνειλήφθω ἐπὶ τὸ Ζ διὰ πέντε· τόνος ἄρα τὸ Ζ, Δ· δίτονον ἄρα τὸ Ζ, Β· λιχανὸς ἄρα τὸ Ζ. ὁμοίως δὴ καὶ αἱ παρανῆται ληφθήσονται.

THEOREMA XVIII.

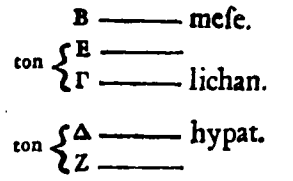
Parypatæ & tritæ non dividunt ſpiſſum in partes æquales.

ESto enim meſe quidem B, lichanos vero Γ, & hypate Δ; remittatur diapente à B ad Z: quare tonus eſt Z, Δ. porro à Z intendatur

ΘΕΩΡΗΜΑ ιη'.

Αἱ παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα.

ΕΣτω γὰρ μέση μὲν ὁ Β, λιχανὸς δὲ ὁ Γ, ὑπάτη δὲ ὁ Δ, ἀνειλήφθω ἀπὸ τοῦ Β διὰ πέντε ἐπὶ τὸ Ζ· τόνος ἄρα τὸ Ζ, Δ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ διὰ πα-



diateſſaron ad E: itaque tonus eſt tum Z, Δ intervallum, tum Γ, E. commune intervallum Δ, Γ addatur: quare Z, Γ æquale eſt ipſi Δ, E. at Z, E eſt diateſſaron: nullus ergo medius proportionaliter incidit inter Z, E: eſt enim intervallum hoc ſuperparticulare. eſtque Δ, Z æqualis ipſi Γ, E: non ergo cadet medius inter Δ, Γ intervallum, quod eſt ab hypate ad lichanon: hinc neque parypate in æqua dividet ſpiſſum. ſimili ratione neque trite.

σῶν ἐπιτεταάσθω ἐπὶ τὸ Ε· τόνος ἐστὶν ἄρα τὸ Ζ, Δ διάστημα, καὶ τὸ Γ, Ε. κοινὸν προσκείσθω τὸ Δ, Γ· τὸ ἄρα Ζ, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ Δ, Ε. ἀλλὰ πασῶν δὲ τὸ Ζ, Ε· οὐκ ἄρα μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει τις τῶν Ζ, Ε, ὑπερμερὲς γὰρ τὸ διάστημα. καὶ ἔστιν ἴσος ὁ Δ, Ζ τῷ Γ, Ε· οὐκ ἄρα τῶν Δ, Γ μέσος ἐμπεσεῖται, ὅ ἐστιν ἀπὸ ὑπάτης ἐπὶ λιχανόν· οὐκ ἄρα ἡ παρυπάτη διαιρεῖ τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ τρίτη.

THEOREMA XIX.

Canonem deſignare ſecundum ſyſtema, quod vocatur immutabile.

SIT Canonis longitudo, quæ & chordæ, A B; ac dividatur in quatuor partes æquales, nimirum Γ, Δ, E: erit itaque B A, cum graviſſimus ſit ſonus, bombus. porro hic A B eſt ſeſquitertius ipſius Γ B: itaque Γ B ipſi A B conſonabit diateſſaron verſus acumen. eſtque A B proſlambanomenos: quare Γ B erit hypaton diatonos. rurſus, quoniam A B eſt duplus ipſius

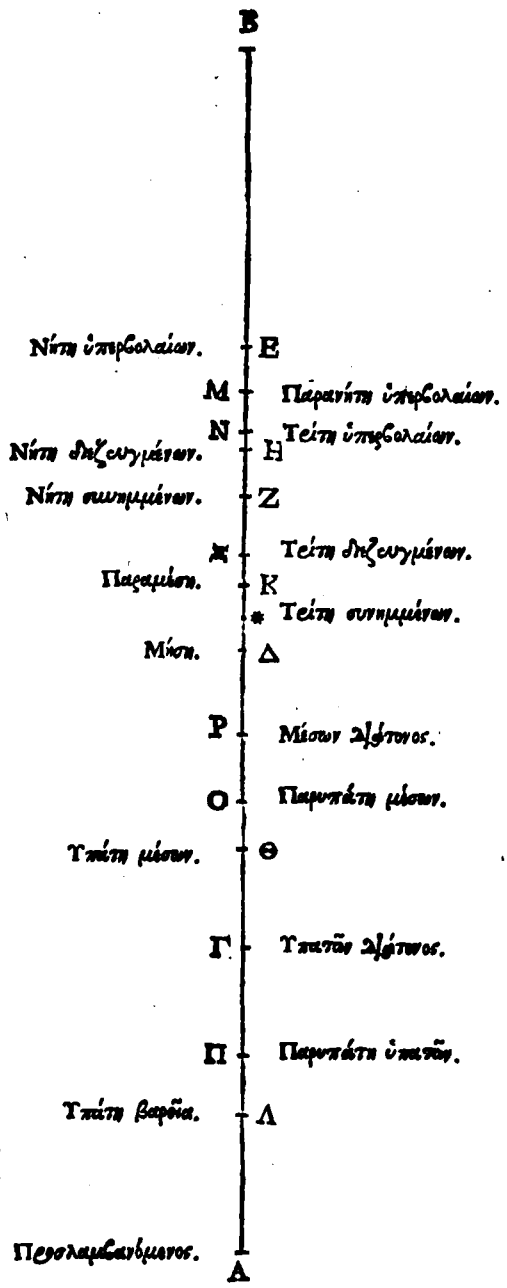
ΘΕΩΡΗΜΑ ιθ'.

Τὸν κανόνα καταγράψαι κατὰ τὸ καλούμενον ἀμετάβολον σύστημα.

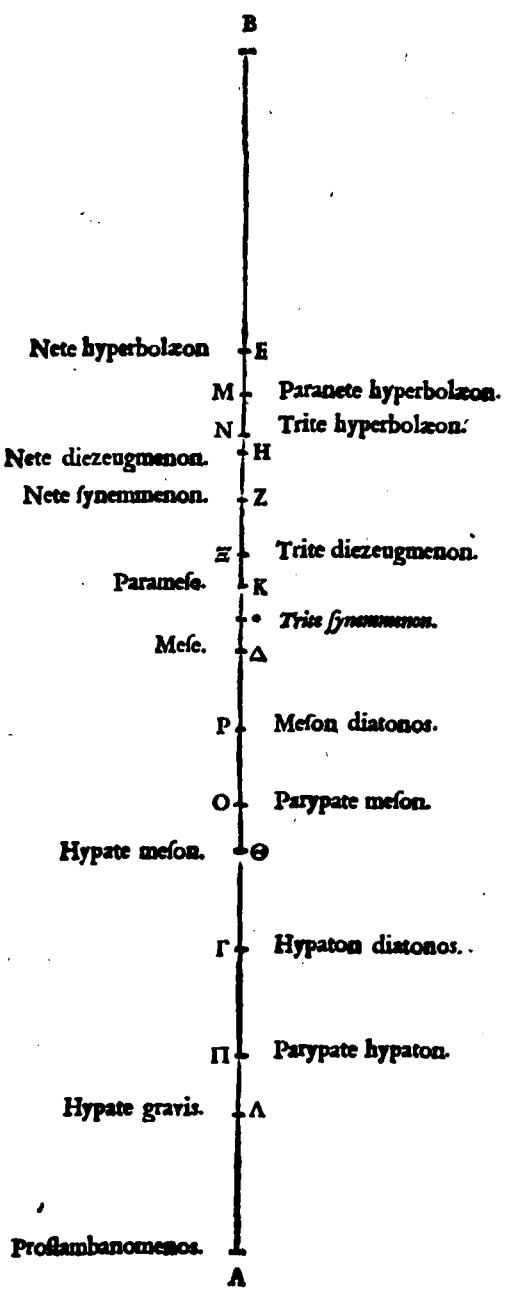
ΕΣτω τοῦ κανόνος μῆκος, ὁ δὲ τῆς χορδῆς, τὸ Α Β, καὶ διῃρήσθω εἰς τέσσαρα ἴσα, τὰ Γ, Δ, Ε· ἔσται ἄρα ὁ Β Α βαρύτατος ὢν φθόγγος, βόμβος. ὅτι δὲ ὁ Α Β τοῦ Γ Β ἐπίτριτός ἐστιν· ὥστε ὁ Γ Β τῷ Α Β συμφωνήσει διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὸ ὀξύτατα. καὶ ἔστιν ὁ Α Β προσλαμβανόμενος· ὁ ἄρα Γ Β ἔσται ὑπατῶν διάτονος. πάλιν ἐπεὶ ὁ Α Β τοῦ Β Δ ἐστὶ δι-

πλάσιος,

πλάσιος, συμφωνήσει αὐτῇ διὰ πασῶν, ᾧ ἔσχε ὁ ΒΔ μέση. πάλιν, ἐπεὶ τετραπλάσιός ἐστιν ὁ ΑΒ τοῦ ΕΒ, ἔσχε τὸ ΕΒ νήτη ὑπερβολαίων. ἔτμηται τὴ ΓΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἔσχε διπλάσιος ὁ ΓΒ τοῦ ΖΒ· ὥστε συμφωνεῖν τὴν ΓΒ πρὸς τὴν ΖΒ διὰ πασῶν· ὥστε εἶναι τὴν ΖΒ νήτην συνημμένων. ἀπείληφθω τοῦ ΔΒ τρίτον μέρος τὸ ΔΗ, καὶ ἔσχε ἡμιόλιος ὁ ΔΒ τοῦ ΗΒ· ὥστε συμφωνήσει ὁ ΔΒ πρὸς τὸν ΗΒ, ἐν τῷ διὰ πέντε· ὁ ἄρα ΗΒ νήτη ἔσχε διεζευγμένων. ἔθηκα τῷ ΗΒ ἴσον τὴν ΗΘ· ὥστε ὁ ΘΒ πρὸς τὴν ΗΒ συμφωνήσει διὰ πασῶν· ὡς εἶναι τὴν ΘΒ ὑπάτην μέσων. ἔλαβον τοῦ ΘΒ τρίτον μέρος τὸ ΘΚ, καὶ ἔσχε ἡμιόλιος ὁ ΘΒ τοῦ ΚΒ· ὥστε εἶναι τὴν ΚΒ παραμέσην. ἀπείληφθω τῷ ΚΒ ἴσον τὴν ΛΚ, καὶ γενήσεται ὁ ΛΒ ὑπάτη βαρεῖα· ἴσονται ἄρα ἀλλήλαις αἱ ΗΒ, ΘΚ, ΛΚ· ὥστε αἱ φθόγγοι τοῦ ἀμετακόλητου συστήματος.



ΗΒ; ut hac ratione ΔΒ conſonet ad ΗΒ, diapente intervallo: ergo ΗΒ erit nete diezeugmenon. poſui ipſi ΗΒ æqualem, ſcilicet ΗΘ: ergo ΘΒ conſonabit diapaſon ad ΗΒ, ut ΘΒ ſit hypate meſon. ſumpſi ipſius ΘΒ partem tertiam, ΘΚ, eritque ΘΒ ſeſquialter ipſius ΚΒ; ita ut ΚΒ ſit parameſe. porro abſcidi ipſi ΚΒ æqualem ΛΚ, fietque ΛΒ hypate gravillima: quare ſoni omnes ſyſtematis immutabilis ſumpti erunt in canone.



THEOREMA XX.

Reſtat tandem ut mobiles deſignentur.

DIviſi EB in octo partes, quarum uni æqualem poſui EM; ut MB fiat ipſius EB ſeſquioctavus. ac rurſus diviſo MB in partes octo, illarum uni æqualem poſui NM: tono itaque gravior erit NB quam BM, MB vero quam BE: ita ut NB quidem ſit trite hyperbolæon, MB vero paranete hyperbolæon diatonos. porro in tres partes diviſi NB, illarumque uni æqualem poſui NΞ; ita ut ΞB ſit ſeſquitertius ipſius NB, ac diateſſaron conſonet verſus gravitatem, fiatque ΞB, trite diezeugmenon. rurſus ipſius ΞB ſumpta parte dimidia, æqualem ipſi poſui ΞO; ut hac ratione OB conſonet diapente ad ΞB: quare OB erit parypate meſon. deinde ipſi ΞO æqualem poſui OΠ; ut ΠB fiat parypate hypaton. ſumpſi quoque ipſius ΓB partem quartam ΓP; ut PB fiat meſon diatonos.

ΘΕΩΡΗΜΑ κ'.

Λοιπὸν δὲ τὰς φερομένας λαβεῖν.

ΕΤεμνέτω ἡ ΕΒ εἰς ὀκτὼ, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔθηκα τὴν ΕΜ· ὥστε ἡ ΜΒ τῆς ΕΒ γενέσθαι ἐπόγδοον. καὶ πάλιν διελὼν τὴν ΜΒ εἰς ὀκτὼ, ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔθηκα τὴν ΝΜ· τόνῳ ἄρα βαρύτερος ἔσται ὁ ΝΒ τοῦ ΒΜ, ὁ δὲ ΜΒ τοῦ ΒΕ· ὥστε ἔσται μὲν ὁ ΝΒ τρίτη ὑπερβολαίων, ὁ δὲ ΜΒ παρανήτη ὑπερβολαίων διάτονος. ἔλαβον τοῦ ΝΒ τρίτον μέρος, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔθηκα τὴν ΝΞ· ὥστε ἡ ΞΒ τῆς ΝΒ εἶναι ἐπίτριτον, ἡ δὲ διὰ τεσσάρων συμφωνεῖν ἐπὶ τὸν βαρύτητα, καὶ γενέσθαι τὴν ΞΒ τρίτην διεζευγμένων. πάλιν τῆς ΞΒ λαβὼν ἥμισυ μέρος ἔθηκα ἴσον αὐτῇ τὴν ΞΟ, ὥστε διὰ πέντε συμφωνεῖν τὴν ΟΒ πρὸς τὴν ΞΒ· ὁ ἄρα ΟΒ ἔσται παρυπάτη μέσων. καὶ τῇ ΞΟ ἴσον ἔθηκα τὴν ΟΠ· ὥστε γενέσθαι τὴν ΠΒ παρυπάτην ὑπατῶν. ἔλαβον δὲ καὶ τὸ ΓΒ τέταρτον μέρος τὸ ΓΡ· ὥστε γενέσθαι τὴν ΡΒ μέσων διάτονον.

ΤΕΛΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΤΑΤΟΜΗΣ ΚΑΝΟΝΟΣ.

FINIS EUCLIDIS SECTIONIS CANONIS.

ΕΥ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS
PHÆNOMENA.

ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

ΦΑΣΙΝΟΜΕΝΑ.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS

PHÆNOMENA.

ΕΠΕΙΔΗ ὁρᾶται τὰ ἀπλανῆ ἄστρα ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἀνατέλλοντα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν τόπον δυόμενα, καὶ τὰ ἅμα ἀνατέλλοντα ἀεὶ ἅμα ἀνατέλλοντα, καὶ τὰ ἅμα δυόμενα ἀεὶ ἅμα δυόμενα, καὶ ἐν τῇ ἀπ' ἀνατολῆς ἐπὶ δύσιν φορᾷ τὰ πρὸς ἄλληλα διαστήματα τὰ αὐτὰ ἔχοντα, τοῦτο δὲ γίγνεται διὰ τῶν ἐγκυκλίων φορὰν φερομένων μόνον, ἐπὰν ἡ ὄψις πάντη τῆς περιφερείας ἴσον ἀπέχῃ, ὡς ἐν τοῖς ὀπτικοῖς δείκνυται· δεῖ δὴ τὰ ἄστρα ἐγκυκλίως φέρεσθαι, καὶ ὑποκεῖσθαι ὡς ἑνὶ σώματι, καὶ τῷ ὄψιν ἴσον ἀπέχειν τῶν περιφερειῶν.

Ὁρᾶται δέ τις ἀστὴρ μεταξὺ τῆς ἄρκτου, καὶ μεταλλάσσων τόπον οὐκ τόπου, ἀλλ' ἐν ᾧ ἐστὶ χώρᾳ ἐν ταύτῃ φερόμενος, ἐπεὶ δὲ ἔστος πρὸς τὰς περιφερείας τῶν κύκλων, καθ' οὓς οἱ λοιποὶ ἀστέρες φέρονται, ἴσον ἀπέχων πάντῃ φαίνεται· δεῖ δὴ τοὺς κύκλους πάντας παραλλήλους εἶναι, ὥστε πάντα τὰ ἀπλανῆ ἄστρα κατὰ παραλλήλων φέρεσθαι πόλον ἐχόντων τὸν περιεκτικὸν ἀστέρα.

Τούτων δὲ ἔνια οὔτε ἀνατέλλοντα οὔτε δύοντα ὁρᾶται, διὰ τὸ ἐπὶ μειζόνων κύκλων φέρεσθαι, οὓς καλοῦσιν ἀεὶ φανεροὺς. ταῦτα δέ ἐστι τὰ ἐχόμενα [1] τοῦ φανεροῦ πόλου ἄστρα ἕως τοῦ ἀρκτικοῦ κύκλου. καὶ ἐλάχιστον μὲν κύκλον φέρονται οἱ ἔγγιον

QUANDOQUIDEM aſtra inerrantia ex eodem ipſo loco ſemper oriri, & in eodem ipſo loco occidere conſpiciuntur; & quæ ſimul oriuntur, ſemper ſimul oriri, quæve contra ſimul occidunt, ſimul ſemper occidere videntur; præterea in converſione, quam ab ortu faciunt ad occaſum, intervalla eadem mutuo retinere; quod quidem iis aſtris accidit, quæ motu tantummodo circulari feruntur, quandoquidem, ut in opticis eſt demonſtratum, viſus omni ex parte à circumferentia æque diſtat: ponendum ſiquidem eſt, aſtra circulari motu moveri, uni infixa eſſe corpori, & viſum ab circumferentiis æque diſtantem eſſe.

Et quoniam aſtrum quoddam, quod intra circulum arcticum ſitum eſt, locum de loco non apparet permutare, ſed in quo loco ſitum eſt ac poſitum, in illo ipſo circumvolvi videtur; præterea etiam quoniam hoc jam dictum aſtrum à circulorum circumferentiis, in quibus reliqua feruntur aſtra, æqualiter diſtare omniquaque conſpicitur: idcirco ponendum deinceps eſt, circulos omnes eſſe parallelos, & aſtra inerrantia idcirco omnia in circulis ferri parallelis, polum dictum jam aſtrum habentibus.

Atqui horum quidem aſtrorum quædam neque oriri neque occidere videntur, propterea quod in ſublimioribus ferantur circulis, qui ſemper-apparentes circuli nominantur. ſunt autem hæc aſtra illa quidem, quæ intra polum conſpicuum & arcticum circulum continentur. feruntur vero minimo quidem circulo aſtra illa, quæ

[1] Ἐπίμβρια τῷ φανερῷ πόλῳ Bridl.

polo ſunt propinquiora; maximo autem, quæ à circulo arctico minime diſtant: ac quæ in ipſo arctico circulo ſunt, radere horizonta conſpiciuntur.

Porro autem quæcunque aſtra ab his recedunt meridiem verſus, omnia & oriri & occidere videntur; propterea quod horum non integri circuli ſupra terram exiſtant, ſed horum circulorum pars quidem ſit ſupra terram, pars autem reliqua ſub terram occultetur. ex ſegmentis vero quæ ſupra terram ſunt uniuſcujuſque jam dictorum circulorum, illud ſegmentum majus eſt, quod propius quidem eſt maximo circulo ſemper-apparentium circulorum: ex illis vero ſegmentis, quæ ſub terram manent occultata, illud minimum eſt, quod magis ad jam dictum circulum accedit; quoniam tempus quo ſub terram in hoc dicto circulo aſtra convertuntur, minimum eſt; tempus vero quo ſupra terram circumferuntur, maximum. præterea aſtra quæ magis ab commemoratis jam aſtris recedunt, ſupra terram quidem in converſione ſua ſemper minus tempus comprehendunt; ſub terram autem majus: quæ autem meridei quamproxima ſunt, in converſione, quam ſupra terram peragunt, minimum tempus habebunt; quæ vero ſub terram, contra maximum.

Apparent deinde aſtra, quæ in circulo ſita ſunt inter omnes ſphæræ circulos medium locum obtinente, æquale tempus inſumere in motu ſupra terram atque in motu qui fit infra terram, & idcirco talem circulum æquinoctialem circulum appellamus. præterea aſtra, quæ ſunt ſita in circulis æque diſtantibus ab æquinoctiali circulo, æquali tempore motus ſuos peragunt, ſcilicet in ſegmentis permutatim aſſumptis: ita ut ſegmenta, quæ ſunt ſupra terram, quæve ad ſeptentrionem ſpectant, æqualia ſint ſegmentis ſub terram exiſtentibus, & ad meridiem vergentibus; & contra quæ ſunt ſegmenta ſupra terram ad meridiem vergentia æqualia ſint ſegmentis ſub terram ad ſeptentrionem pertinentibus. nam tempus quidem utrumque, quo dicti feruntur circuli tam ſupra terram quam continue ſub terram, cæterorum circulorum utrique tempori ſimiliter æquale apparet: & circulus præterea qui lacteus dicitur, quinetiam zodiacus, cum obliqui ſint ad parallelos circulos & ſe invicem ſecent, in ſphæræ converſione ſemicirculos ſupra terram habere conſpiciuntur.

ὑπὸ πόλου ὄντες, μέγιστοι δὲ οἱ ἐπὶ τῷ ἀρκτικῷ. οἱ δὲ ἐπὶ τῷ ἀρκτικῷ κύκλῳ ὄντες φαίνονται ξύοντες τὸ ὁρίζοντα.

Τὰ δὲ πρὸς μεσημβρίαν τούτων ἐχόμενα ἅπαντα καὶ ἀνατέλλοντα καὶ δυόμενα ὁρᾶται, διὰ τὸ τοὺς κύκλους αὐτῶν μὴ ὅλους εἶναι ὑπὲρ γῆς, ἀλλὰ μέρος μὲν αὐτῶν ὑπὲρ γῆς, τὸ δὲ λοιπὸν ὑπὸ τὴν γῆν. τῶν δὲ ὑπὲρ γῆς τμημάτων ἐκάστου αὐτῶν μόνον φαίνεται τὸ ἔγκιον τοῦ μεγίστου τῶν ἀεὶ φαινερῶν, τῶν δὲ ὑπὸ γῆν ἐλάχιστον τὸ ἔγκιον τοῦ εἰρημένου κύκλου, διὰ τὸ τὸν χρόνον τῆς ὑπὸ γῆν φορᾶς τῶν ἐπὶ τούτου τοῦ κύκλου ἀστέρων ὄντων ἐλάχιστον ἔχειν, τῆς δὲ ὑπὲρ γῆς φορᾶς, πλεῖστον. τὰ δὲ ἐπὶ τὸν ἀπώτερον τούτων ἀεὶ τοῦ μὲν ὑπὲρ γῆς φορὰν ἐλάσσονα χρόνον ἔχειν, τοῦ δὲ ὑπὸ γῆν πλείονα· ἐλάχιστον δὲ χρόνον ἔχει τῆς ὑπὲρ γῆς φορᾶς τὰ ἔγκιστα τῆς μεσημβρίας ὄντα, τῆς δὲ ὑπὸ γῆν πλεῖστον.

Φαίνονται δὲ οἱ ἐπὶ τοῦ κατὰ μέσον τούτων ὄντες ἰσοχρόνιον ποιούμενοι τὴν ὑπὲρ γῆς φορὰν τῇ ὑπὸ γῆν· διὸ λέγομεν τοῦτον τὸν κύκλον ἰσημερινόν. οἱ δὲ ἐπὶ τοῦ ἴσου ἀπεχόντων τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου ἰσοχρόνιον ποιούμενοι τὴν φορὰν ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασιν· οἷον τὰ ὑπὲρ γῆς τοῦ πρὸς ἄρκτους ὄντων τοῖς ὑπὸ γῆν τοῦ πρὸς μεσημβρίαν, τὰ δὲ ὑπὲρ γῆς τοῦ πρὸς μεσημβρίαν τοῖς ὑπὸ γῆν τῶν πρὸς ἄρκτους ὄντων· ὁ δὲ συναμφότερος χρόνος ἑκάστου κύκλου, ὅτε ὑπὲρ γῆς, καὶ ὁ συνεχὴς ὑπὸ γῆν τῷ συναμφοτέρῳ ἑκάστου ἴσος φαίνεται· ἔτι δὲ ὁ τοῦ γαλακτικοῦ κύκλου καὶ ὁ ζωδιακός, λοξοὶ ὄντες πρὸς τοὺς ἀλλήλους κύκλους καὶ τέμνοντες ἀλλήλους ἐν τῇ περιφορᾷ, ἀεὶ ἡμικύκλους ὑπὲρ γῆς ἔχοντες φαίνονται.

Διὰ

Διὰ δὴ τὰ προειρημένα πάντα, ὁ κόσμος ὑποκείσθω σφαιροειδὴς· εἴτε γὰρ ἐν κυλινδροειδὴς ἢ κωνοειδὴς, οἱ ὑπὸ τῶν λοξῶν κύκλων καὶ τεμνόντων τὸν ἰσημερινὸν λίχα [1]λαμβανόμενοι ἀστέρες οὐ τῇ [2]φορᾷ οὐκ ἂν ἐφαίνοντο ἀεὶ ἐπὶ ἡμικυκλίων ἴσων φερόμενοι, ἀλλ' ὅτε μὲν ἐπὶ μείζονος ἡμικυκλίου τμήματος, ὅτε δὲ ἐπὶ ἐλάσσονος. ἐὰν γὰρ κῶνος ἢ κύλινδρος ὑπιπέδῳ τμηθῇ μὴ παρὰ τὴν βάσιν, ἡ τομὴ γίγνεται ὀξυγωνίου κώνου τομὴ, ἥτις ἐστὶν ὁμοία θυρεῷ. δῆλον δ' ὅτι τοιούτου σχήματος ἀφ' οὗ μέσου τεμνομένου κατά τε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος, ἀνόμοια τμήματα ποιεῖ· δῆλον δὲ ὅτι κἂν λοξαῖς τομαῖς τμηθῇ ἀφ' οὗ μέσου, καὶ οὕτως ἀνόμοια τμήματα ποιεῖ· ὅπερ ὑ φαίνεται τοῦτο γιγνόμενον κατὰ τὸν κόσμον.

Διὰ δὴ ταῦτα πάντα ὁ κόσμος ἔσται σφαιροειδὴς, καὶ φέρεται ὁμαλῶς περὶ ἄξονα· οὗ ὁ μὲν εἷς πόλος ὑπὲρ γῆς φανερὸς, ὁ δὲ εἷς ὑπὸ γῆν ἀφανής.

Ὁρίζων δὲ καλείσθω, τὸ δι' ἡμῶν ἐπίπεδον ἐκπίπτον εἰς τὸν κόσμον, καὶ ἀφορίζον τὸ ὑπὲρ γῆς ὁρώμενον ἡμισφαίριον. [3]ἔστι δὲ κύκλος· ἐὰν γὰρ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, ἡ [4]κοινὴ τομὴ κύκλος ἐστί.

Μεσημβρινὸς δὲ κύκλος καλείσθω, ὁ ἀφ' ἑκατέρου τῶν πόλων τῆς σφαίρας καὶ [5]ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

Τροπικοὶ δὲ, ὧν ὁ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλος ἐφάπτεται τοὺς αὐτοὺς πόλους ἐχόντων τῇ σφαίρᾳ.

Ὁ δὲ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλος καὶ ὁ ἰσημερινὸς μέγιστοί εἰσι· δίχα γὰρ τέμνουσιν ἀλλήλους. ἥτε γὰρ ἀρχὴ τοῦ κριοῦ καὶ ἡ ἀρχὴ τῶν χηλῶν κατὰ διάμετρόν τε εἰσι, καὶ ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ οὖσαι κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλουσί τε καὶ δύνουσιν, [6]μεταξὺ τῶν ἀρχῶν ἔχουσαι τῶν μὲ δώδεκα ζῳδίων ἓξ ζῴδια, οὗ δὲ ἰσημερινοῦ κύκλου ἡμικύκλια δύο. ἐπειδήπερ ἑκατέρα ἀρχὴ ἐπὶ μὲν ἰσημερινοῦ κύκλου οὖσα ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ φέρεται, ἡ μὲν τὸ ὑπὲρ γῆς φορὰν, ἡ δὲ τὸ ὑπὸ

Propter hæc igitur omnia jam expoſita, ſupponatur mundum ſphærica eſſe figura ornatum: ſive enim cylindricam figuram, aut conicam habeat, aſtra quæ in circulis obliquis, lacteo (inquam) & zodiaco continentur, ſecantibus æquinoctialem in partes duas æquales, in mundi converſione non apparerent ſemper in ſemicirculis æqualibus ferri; verum aliquando in ſegmentis ſemicirculo majoribus, aliquando autem minoribus. conus enim, aut cylindrus, ſi plano aliquo ſectus fuerit, quod parallelum non ſit ipſorum baſi, ſectio illa acutanguli coni ſectio eſt, quæ quidem clypeo aſſimilatur. & patet etiam ſi hujuſmodi figura per medium juxta longitudinem & latitudinem dividatur, diſſimilia facere ſegmenta: & manifeſtum hinc eſt quoque, quod ſi ſectionibus obliquis medium dividatur, ſimiliter facere ſegmenta diſſimilia; quod autem fieri in mundo nullo modo perſpicitur.

Cum itaque hæc omnia ſic ſe habeant, mundus omnino ſphæricus erit, & circa ſuum axem æquabiliter volvitur; cujus quidem polus alter ſupra terram apparet, alter ſub terram occultatur.

Nominetur præterea circulus horizon illud planum, quod è viſu noſtro in ipſum mundum incidit, & ſeparat hemiſphærium nobis conſpicuum ſupra terram ab occulto. tale autem planum circulus eſt: ſi quidem enim ſphæra plano aliquo ſecta fuerit, ſectio circulus eſt.

Meridianus porro circulus dicetur is, qui per ſphæræ polos incedit & horizonti eſt ad angulos rectos.

Tropici autem ſunt hi, quos circulus zodiacus tangit, & qui polos etiam cum ſphæra habent eoſdem.

Zodiacus autem circulus & æquinoctialis maximi circuli ſunt: bifariam enim ſeſe mutuo ſecant. arietis namque principium & libræ principium per diametrum ſunt, & cum in æquinoctiali circulo ſint, conjugate & oriuntur & occidunt; intra quæ principia ſex continentur ſigna ex duodecim zodiaci ſignis, æquinoctialis etiam duo ſemicirculi. quoniam utrumque principium, in ipſo circulo æquinoctiali ſitum, eodem tempore fertur, illud quidem in motu ſupra terram, hoc autem ſub

1 ὑπολαμβανόμενοι, Bodl. 2 φορᾷ Bodl. 3 ἴσην δὲ Bodl. 4 κοινὴ deeſt Bodl. 5 ὀρθὸς Bodl. 6 μεταξὺ αὐτῶν Bodl.

terram. etenim ſphæra ſi æquabiliter volvatur circa ſuum proprium axem, omnia puncta, quæ ſunt in ſphæræ ſuperficie, æquali tempore ſimiles parallelorum circulorum circumferentias, in quibus feruntur, præteribunt: ſimiles igitur circumferentias circuli æquinoctialis percurrunt, alteram quidem circumferentiam, quæ eſt ſupra terram, alteram autem, quæ eſt ſub terram: æquales igitur ſunt circumferentiæ: erit igitur ſemicirculus utraque. tempus enim ab ortu rurſus ad ortum, & ab occaſu rurſus ad occaſum integrum circulum abſolvit: quare & zodiacus & æquinoctialis invicem ſe ſecant. nam ſi in ſphæra duo circuli ſe invicem bifariam ſecent, uterque alterum ſecans maximus circulus erit: zodiacus circulus igitur & æquinoctialis maximi circuli ſunt.

Atqui horizon quoque eſt unus è maximis circulis; nam & zodiacum, & æquinoctialem, maximos circulos exiſtentes, ſemper bifariam ſecat. ſemper enim ex ſignorum zodiaci duodecim, ſex ſupra terram apparent; & æquinoctialis circuli ſemper ſemicirculus ſupra terram conſpicitur: ideoque accidit, ut quæ in hoc ſita ſint aſtra, ſimul & oriantur, & ſimul etiam occidant; & alterum quidem horum aſtrorum eodem temporis ſpatio ab ortu accedat ad occaſum, alterum vero ab occaſu ad ortum.

Ac patet jam igitur ex explicatis & præoſtenſis, æquinoctialis circuli ſemper ſemicirculum ſupra horizonta exſtare. ſi etenim in ſphæra manens fixus circulus ſecuerit bifariam aliquem maximum circulum ſemper mobilem, tunc & ſecans maximus circulus eſt: ſequitur igitur horizontem eſſe unum de maximis circulis.

THEOREMA I.

Terra in medio mundi ſita eſt, cujus ratione centri vicem obtinet.

SIT in mundo circulus horizon AB, terra autem ſit viſus noſter, qui quidem ſit in puncto Δ, partes orientales ſint verſus Γ punctum, occidentales autem ad A; & conſpiciatur per dioptram, in Δ puncto manentem, cancer oriens in puncto Γ; ſpectabitur igitur per eandem dioptram capricornus occidens. ſpectetur in A puncto. & quoniam A, Γ puncta per dioptram Δ ſpectata ſunt; recta igitur linea eſt, quæ per A, Δ, Γ puncta ſpectatur. ſitque ipſa AΔΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ α'.

Η γῆ ἐν μέσῳ τῷ κόσμῳ ἐστὶ, καὶ κέντρου τάξιν ἐπέχει πρὸς τὸν κόσμον.

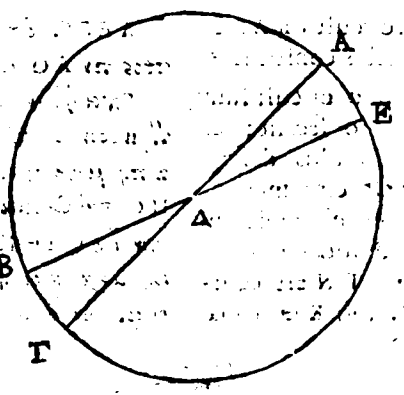
ΕΣτω ἐν κόσμῳ ὁ ὁρίζων ὁ AB, γῆ δὲ ἡ ἡμετέρα ὄψις ἡ πρὸς τῷ Δ σημείῳ, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν μέρη τὰ Γ, δυτικὰ δὲ τὰ A, καὶ θεωρήσθω διὰ διόπτρας κεκμένης πρὸς τῷ Δ σημείῳ καρκῖνος ἀνατέλλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· θεωρηθήσεται ἄρα διὰ τῆς αὐτῆς διόπτρας αἰγοκέρως δυόμενος. θεωρήσθω κατὰ τὸ A σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τὰ A, Γ σημεῖα διὰ διόπτρας τεθέωρηται τῷ Δ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν A, Δ, Γ. ἔστω ἡ AΔΓ.

1 διέξησι *Bodl.* 2 Deeſt *Bodl.* 3 κύκλος *Bodl.* 4 ἄνω ἴχει *Bodl.* 5 ἀεί. 6 ἐπὶ *Bodl.* 7 τίμνει. 8 Η γῆ ἐν. deeſt. 9 ἡ deeſt.

Φανερὸν

Φανερὸν δὴ ὅτι ἡ Α Δ Γ διάμετρός ἐστι καὶ τῶν ἀπλανῶν σφαίρας καὶ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου, ἐπεὶ δήπου τοῦ ζωδιακοῦ ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἓξ ζῴδια ἀποτέμνει. πάλιν δὴ μετακινηθέντος τοῦ τε τῶν ζωδίων κύκλου καὶ τοῦ διόπτρας, τεθεωρήσθω λέων ἀνατέλλων κατὰ τὸ Β σημεῖον· θεωρηθήσεται ἄρα διὰ τῆς αὐτῆς διόπτρας ὑδροχόος δυσῶν· τεθεωρήσθω κατὰ τὸ Ε σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τὰ Β, Ε σημεῖα τεθεώρηται διὰ διόπτρας τῆς Δ, εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν Ε, Δ, Β. ἔστω ἡ Ε Δ Β· ἡ Ε Δ Β ἄρα διάμετρός ἐστι τε τῶν ἀπλανῶν σφαίρας καὶ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ Α Δ Γ· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ἀπλανῶν σφαίρας, καὶ ἔστι πρὸς τῇ γῇ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἐὰν ληφθῇ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς γῆς κέντρον ἐστὶ τοῦ κόσμου.

Ἡ γῆ ἄρα ἐν μέσῳ τῷ κόσμῳ ἐστί, καὶ κέντρου τάξιν ἐπέχει πρὸς τὸν κόσμον.



manifestum itaque est quod recta linea Α Δ Γ diameter est & sphæræ astrorum inerrantium & zodiaci circuli; quandoquidem zodiaci sex signa supra horizontem abscindit. rursus jam zodiaco circulo circumvoluto, quinetiam dioptra, leo videbitur oriens in puncto Β: quare per eandem dioptram conspicietur & aquarius occidens. conspiciatur in puncto Ε. quoniam vero puncta Β, Ε visa sunt per dioptram Δ; recta igitur linea est quæ per Ε, Δ, Β spectatur. sit ipsa Ε Δ Β: quare Ε Δ Β recta linea diameter est & sphæræ astrorum inerrantium & zodiaci circuli. est autem demonstratum idem de recta Α Δ Γ: quamobrem punctum Δ est centrum sphæræ astrorum inerrantium, & est super terram. similiter jam ostendetur, si quodvis aliud punctum fuerit sumptum super terram, quod mundi centrum est.

Terra igitur in medio mundo sita est, cujus ratione centri vicem obtinet.

ΘΕΩΡΗΜΑ β'.

Ἐν μιᾷ κόσμου περιφορᾷ ὁ μὲν διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας κύκλος δὶς ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα· ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος πρὸς μὲν τὸν μεσημβρινὸν δὶς ἔσται ὀρθός, πρὸς δὲ τὸν ὁρίζοντα οὐδέποτε, ὅταν ὁ πόλος ᾖ ὁρίζοντος μεταξὺ τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ καὶ τοῦ ἀρκτικοῦ. ἐὰν δὲ ὁπουοῦν τῶν τροπικῶν ὁ πόλος ᾖ ὁρίζοντος, ὁ τῶν ζωδίων κύκλος ἅπαξ ὀρθὸς ἔσται πρὸς τὸν ὁρίζοντα· ὅταν δὲ ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ τῶν τροπικῶν κύκλων ὑπάρχῃ, δὶς ἔσται ὁ τῶν ζωδίων κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

THEOREMA II.

In una mundi revolutione circulus quidem per sphæræ polos ductus bis erit horizonti ad angulos rectos: zodiacus autem circulus ad meridianum bis quoque erit rectus; ad horizontem vero minime, quando polus horizontis fuerit inter tropicum cancri & polum arcticum. quod si horizontis polus in aliquo fuerit tropicorum circulorum, tum zodiacus semel erit horizonti ad angulos rectos constitutus: quando denique polus horizontis fuerit inter tropicos circulos, tunc demum circulus zodiacus horizonti bis erit ad angulos rectos.

Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ Ω Β Γ, καὶ μέγιστος μὲν τῶν ἀεὶ φαινομένων κύκλων ἔστω ὁ Ω Δ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ ἀφανῶν ἔστω ὁ Ε Ζ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ Η Θ Κ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ Λ Μ Ν, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω ὡς τὴν Κ Λ, πόλος δὲ τῶν σφαίρας τὰ Ξ, Ο σημεῖα, καὶ γεγράφθω διὰ τῶν Ξ, Ο μέγιστος κύκλος ὁ Α Ξ Ε Ο· λέγω ὅτι ἐν μιᾷ περιφορᾷ, ὁ μὲν διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας κύκλος δὶς ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος πρὸς μὲν τὸν μεσημβρινὸν δὶς ἔσται ὀρθός, πρὸς δὲ τὸν ὁρίζοντα οὐδέποτε, ὅταν ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ τῶν Η Θ Κ, Ξ ὑπάρχῃ.

SIT horizon circulus Ω Β Γ; maximus autem eorum qui semper apparent, sit circulus Ω Δ; maximus vero eorum qui semper occulti sunt, sit circulus Ε Ζ; æstivus tropicus sit Η Θ Κ, hybernus autem sit Λ Μ Ν; zodiacus circulus positionem habeat veluti Κ Λ; sphæræ poli sint puncta Ξ, Ο; & describatur per Ξ, Ο puncta maximus circulus Α Ξ Ε Ο: dico quod in una sphæræ revolutione circulus quidem per sphæræ polos ductus bis erit horizonti ad angulos rectos; zodiacus autem ad meridianum bis quoque erit rectus, ad horizontem vero minime, quando polus horizontis fuerit inter Η Θ Κ & Ξ.

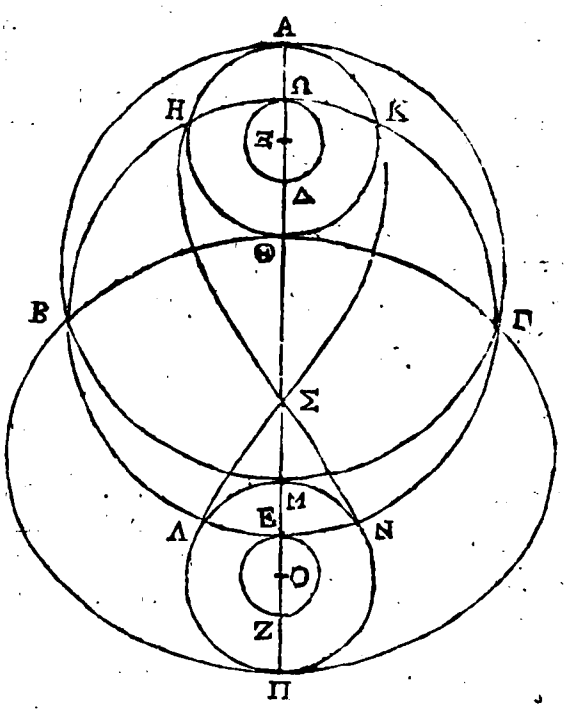
1 Δ deest in MS. Bodl. 2 In MSS. perperam legitur Ω Δ.

Quod

Quod autem circulus per ſphæræ polos ductus bis horizonti ΒΒΓ ſit ad angulos rectos, jam * demonſtratum fuit.

Dico jam quod & zodiacus circulus ΚΛ meridiano ΑΘ bis erit ad angulos rectos conſtitutus.

Quoniam in ſphæra quidem duo circuli ſunt ΩΒΓ & ΑΗΘΚ, qui ſeſe mutuo ſecant; & per ipſorum polos maximus circulus deſcriptus eſt ΑΘΟ: æqualis igitur eſt circumferentia ΗΘ circumferentiæ ΘΚ, & circumferentia ΛΠ circumferentiæ ΠΝ. ſed tota circumferentia ΗΘΚ toti circumferentiæ ΛΠΝ eſt æqualis: quare circumferentia ΛΠ ipſi ΚΘ æqualis eſt. quo igitur tempore punctum Κ, incipiens à puncto Κ & circumferentiam ΚΘ percurrens, pervenit ad Θ punctum; hoc ipſo tempore & punctum Λ, inchoans à puncto Λ & circumferentiam ΛΠ pertranſiens, pervenit ad punctum Π, & zodiacus circulus poſitionem habebit ΘΒΠΓ. & quoniam in ſphæra duo circuli ΑΗΘΚ, ΘΒΠΓ ſeſe tangunt, maximus autem circulus ΖΘΟΠ deſcriptus eſt per polos unius circuli & amborum contactum: circulus igitur ΖΘΟΠ tranſibit etiam per polos circuli ΘΒΠΓ, atque ipſi erit ad angulos rectos: quare & ΘΒΠΓ ad ΖΘΟΠ etiam eſt ad angulos rectos. rurſus, quoniam circumferentia ΘΗ circumferentiæ ΠΝ ſimilis eſt: quo igitur tempore punctum Θ ad Η punctum pervenit, eodem ipſo tempore & Π ad punctum Ν accedit; & zodiacus circulus poſitionem habebit ΗΣΝ. rurſus, quoniam ΗΛ ſimilis eſt circumferentiæ ΝΜ: quo igitur tempore punctum Η pervenit ad punctum Λ, eodem tempore & punctum Ν pervenit ad punctum Μ, & zodiacus circulus poſitionem habebit ΑΒΜΓ. & quoniam in ſphæra duo circuli ΑΒΜΓ, ΑΗΘΚ ſe mutuo tangunt, & per unius polos & contactum amborum maximus circulus deſcriptus eſt ΑΖΘΟ: circulus igitur ΑΖΘΟ ad ΑΒΜΓ eſt ad angulos rectos: quare & ipſe ΑΒΜΓ ad ΑΖΘΟ etiam eſt ad angulos rectos. rurſus, quoniam circumferentia ΑΚ ſimilis eſt circumferentiæ ΜΛ: quo igitur tempore Α punctum pervenit ad punctum Κ, hoc ipſo tempore & punctum Μ ad punctum Λ accedit; & zodiacus circulus poſitionem habebit ΚΣΛ. quo igitur tempore punctum Κ, incipiens à Κ & circumferentiam ΚΘΗΑ percurrens, ad Κ redit (quod eſt tempus unius revolutionis ſphæræ) circulus ΚΣΛ bis eſt circulo ΑΖΘΟ rectus.



Ὅτι μὴν ὁ διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ΒΕΓ ὀρθός ἐστι, δέδεικται.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ ζωδιακὸς κύκλος ὁ ΚΛ πρὸς τὸν ΑΟ μεσημβρινὸν ὀρθός ἐστιν.

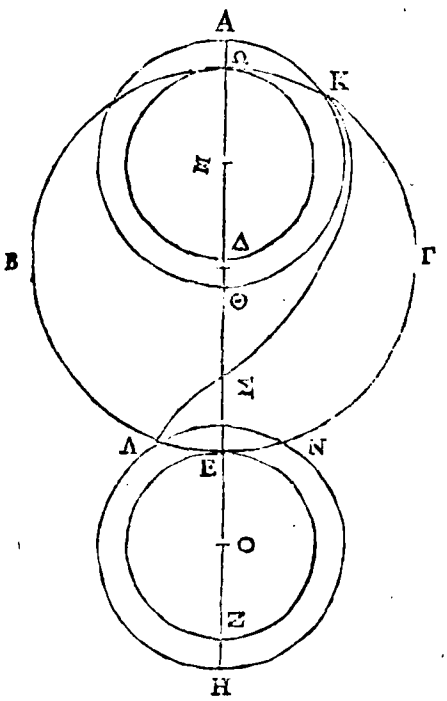
Ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΩΒΓ, ΑΗΘΚ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ ΑΘΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΘ περιφέρεια τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΛΠ τῇ ΠΝ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΗΘΚ περιφέρεια τῇ ΛΠΝ περιφερείᾳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΠ περιφέρεια τῇ ΚΘ περιφερείᾳ. ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ σημεῖον, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ καὶ τὴν ΚΘ περιφέρειαν διελθὸν, ἐπὶ τὸ Θ παραγένηται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΛΠ περιφέρειαν διελθὸν, ἐπὶ τὸ Π παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΘΒΠΓ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΗΘΚ, ΘΒΠΓ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἑνὸς πόλων καὶ τῆς ἀφῆς μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΖΘΟΠ ὁ ΖΘΟΠ ἄρα ἥξει καὶ διὰ τῶν ΘΒΠΓ πόλων, καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτόν· ὥστε καὶ ὁ ΘΒΠΓ πρὸς τὸν ΖΘΟΠ ὀρθός ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΘΗ περιφέρεια τῇ ΠΝ περιφερείᾳ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Θ διὰ τοῦ Η διελήλυθε, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Π διὰ τοῦ Ν, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΗΣΝ. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΗΛ περιφέρεια τῇ ΝΜ περιφερείᾳ· ἐν ᾧ τὸ ἄρα χρόνῳ Η ἐπὶ τὸ Λ παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ν ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΑΒΜΓ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΜΓ, ΑΗΘΚ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἑνὸς πόλων ἐστὶ καὶ ἀφῆς μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΑΖΘΟ· ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΖΘΟ πρὸς τὸν ΑΒΜΓ· ὥστε καὶ ὁ ΑΒΜΓ πρὸς τὸν ΑΖΘΟ ὀρθός ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΑΚ περιφέρεια τῇ ΜΛ περιφερείᾳ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Α ἐπὶ τὸ Κ παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Μ ἐπὶ τὸ Λ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὸν ΚΣΛ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ διὰ τοῦ ΚΘΗΑ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Κ παραγίνεται (ὅς ἐστι χρόνος μιᾶς περιφορᾶς τῆς σφαίρας) δὶς ἔσται ὁ ΚΣΛ κύκλος πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸν ΑΖΘΟ κύκλον.

* Nempe ab *Euclide* Anteceſſore *Autolyco Prop.* 10. *De Sphæra mota.*

Τῶν

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ὁ πόλος τοῦ ΒΕΓΚ κύκλου μεταξὺ τῶν Θ, Ξ σημείων· λέγω ὅτι ὁ ΚΛ ζωδιακὸς κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ΒΕΓΚ ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἔστιν ὁ ΚΣΛ ὀρθὸς πρὸς τὸν ΒΕΓΚ, τεμεῖ αὐτὸν διὰ τῶν πόλων, καὶ ἐλεύσεται διὰ τοῦ πόλου ὃς ἐστι μεταξὺ τῶν Θ, Ξ σημείων τοῦ τροπικοῦ καὶ τοῦ ἀρκτικοῦ, καὶ τεμεῖ τὸν ΑΘΚ τροπικὸν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐδέποτε ἄρα ἔσται ὀρθὸς ὁ ΚΛ ζωδιακὸς πρὸς τὸν ΒΕΓΚ ἐστίν.

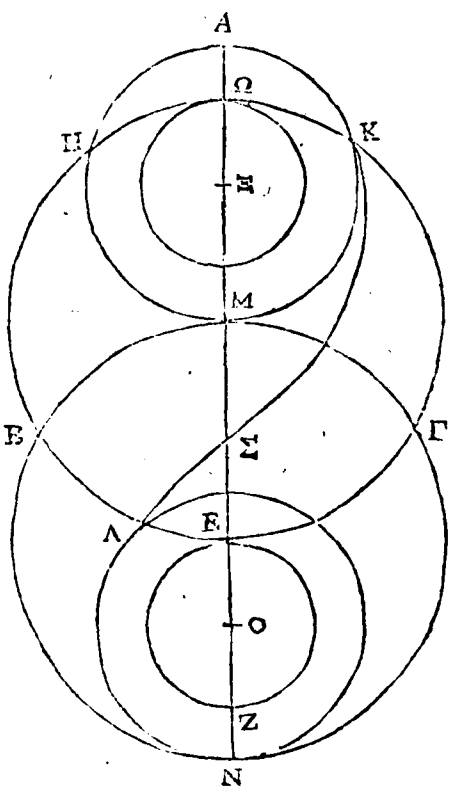


IISDEM ſuppoſitis, ſit polus circuli ΒΕΓΚ inter puncta Θ, Ξ: dico quod circulus zodiacus ΚΛ nequaquam eſt horizonti ΒΕΓΚ ad angulos rectos.

Si enim ΚΣΛ ipſi ΒΕΓΚ eſt ad angulos rectos; ſecaret ipſum per polos, & tranſiret per polum qui eſt inter puncta Θ, Ξ, ſcilicet per polum qui eſt inter circulum arcticum & tropicum; & ſecaret ipſum tropicum circulum ΑΘΚ, quod eſt abſurdum: nullo modo igitur circulus zodiacus ΚΛ eſt ad angulos rectos ipſi ΒΕΓΚ.

ΕΣΤΩ δὲ ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος ἐπὶ τοῦ ΑΗΜΚ τὸ Μ σημεῖον· λέγω ὅτι ἅπαξ ἔσται ὁ ΚΣΛ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΚΜ περιφέρεια τῇ ΑΝ περιφερείᾳ, ἐν ᾧ χρόνῳ τὸ Κ τὴν ΚΜ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ ἐπὶ τὸ Ν παραγέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΜΒΝΓ. ἐπεὶ οὖν ὁ ΜΒΝΓ τὸν ΚΒΓ ὁρίζοντα διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ τῶν ζωδίων κύκλος πρὸς τὸν ὁρίζοντα.



SIT rurſus polus horizontis punctum M in circulo tropico, ſcilicet ΑΗΜΚ, ſitus: dico quod circulus ΚΣΛ ſemel erit ad rectos angulos horizonti.

Quoniam enim circumferentia ΚΜ circumferentiæ ΛΝ ſimilis eſt: quo igitur tempore punctum Κ circumferentiam ΚΜ percurrens pervenit ad Μ, hoc ipſo tempore & punctum Λ pervenit ad punctum Ν, & zodiacus circulus poſitionem habebit veluti ΜΒΝΓ. quoniam igitur ΜΒΝΓ horizontem ΚΒΓ per polos ſecat, & bifariam ipſum ſecabit & ad angulos rectos: quare zodiacus circulus horizonti eſt ad angulos rectos.

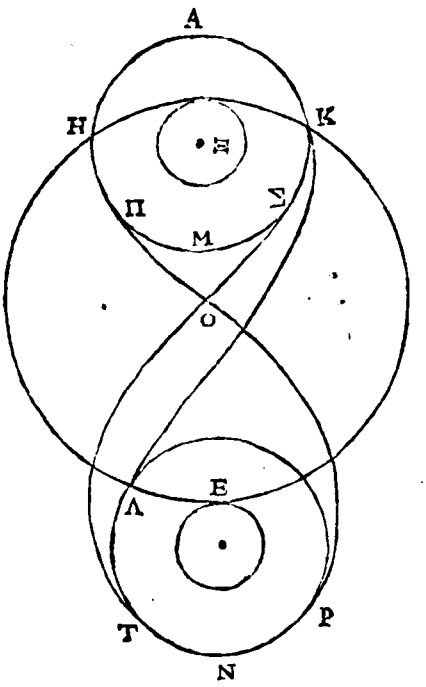
ΕΣΤΩ δὲ ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ τῶν τροπικῶν τὸ Ο σημεῖον· λέγω ὅτι δὶς ἔσται ὁ ΚΛ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

SIT denique polus horizontis punctum Ο inter tropicos circulos: dico quod circulus ΚΛ horizonti bis erit ad angulos rectos.

Γεγράφθωσαν διὰ τοῦ Ο πόλου μέγιστοι κύκλοι οἱ ΣΟΤ, ΠΟΡ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΑΗΜΚ· ἐφάψονται δὴ καὶ τοῦ ΤΝΡ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΠΟΡ τὸν ΗΕΚ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΠΟΡ κύκλος πρὸς τὸν ΗΕΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΣΟΤ πρὸς τὸν ΗΕΚ ὀρθὸς

Deſcribantur per polum Ο maximi circuli ΣΟΤ, ΠΟΡ tangentes circulum ΑΗΜΚ: tangenti igitur & alterum circulum ΤΝΡ. & quoniam circulus ΠΟΡ circulum ΗΕΚ per polos ſecat: bifariam igitur ipſum & ad rectos ſecabit angulos: quare circulus ΠΟΡ circulo ΗΕΚ eſt ad angulos rectos. propter hæc ipſa etiam & circulus ΣΟΤ eſt ad angulos rectos cir-

culo ΗΕΚ. & quoniam ſemicirculus à punctο Κ incipiens, qui ad partes Κ, Λ tendat, non concurrit cum ſemicirculo à punctο Σ inchoante, qui ad partes Σ, Τ profiſcatur; circumferentia igitur ΚΣ ſimilis eſt circumferentiæ ΛΤ: quo igitur tempore punctum Κ ad punctum Σ pervenit, hoc eodem tempore & punctum Λ ad punctum Τ venit, & circulus ΚΛ congruet cum circulo ΣΤ. eſt autem circulus ΣΤ ad rectos angulos ipſi ΗΕΚ: quare & circulus ΚΛ erit ipſi ΗΕΚ ad angulos rectos. rurſus, quoniam circumferentia ΣΜΠ ſimilis eſt circumferentiæ ΤΝΡ: quo igitur tempore punctum Σ ad punctum Π accedit: hoc ipſo tempore & punctum Τ ad punctum Ρ pervenit, & zodiacus circulus congruet cum circulo ΠΟΡ. eſt autem circulus ΠΟΡ ipſi ΗΕΚ ad angulos rectos: quare & circulus zodiacus horizonti ΗΕΚ erit etiam ad angulos rectos. zodiacus igitur circulus horizonti bis erit ad angulos rectos.



ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμπτωτόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ Κ ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Κ, Λ μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Σ ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Σ, Τ μέρη· ὁμοία ἐστὶν ἡ ΚΣ περιφέρεια τῇ ΛΤ περιφερείᾳ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ ἐπὶ τὸ Σ συμπίπτει, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ ἐπὶ τὸ Τ παρέσται, καὶ ὁ ΚΛ κύκλος ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸν ΣΤ κύκλον. ὁ δὲ ΣΤ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΗΕΚ· καὶ ὁ ΚΛ ἄρα ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΗΕΚ κύκλον. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΣΜΠ περιφέρεια τῇ ΤΝΡ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Σ ἐπὶ τὸ Π συμπίπτει, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Τ ἐπὶ τὸ Ρ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸν ΠΟΡ κύκλον. ὁ δὲ ΠΟΡ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΗΕΚ· ὁ ἄρα τῶν ζωδίων κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ὁρίζοντα. δὶς ἄρα ἔσται ὁ τῶν ζωδίων κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

THEOREMA III.

Ex inerrantibus aſtris, quæ ortus & occaſus faciunt, unumquodque in iiſdem horizontis punctis & oritur & occidit.

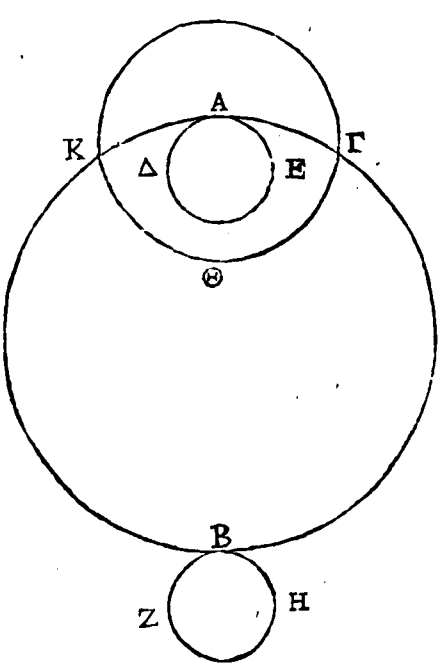
SIT in mundo horizon ΑΒΓ: maximus autem eorum, qui ſemper apparent, ſit circulus ΑΔΕ; maximus vero eorum, qui ſemper occulti ſunt, ſit circulus ΒΗΖ; & ſumatur punctum Θ ex his quæ & ortus & occaſus faciunt; & ſint partes orientales quidem verſus punctum Γ, occidentales autem verſus punctum Κ: dico quod punctum Θ in iiſdem horizontis punctis ſemper & oritur & occidit, ſphæra circumvoluta.

Sit ΓΘΚ circulus in quo punctum Θ feratur: circulus igitur ΓΘΚ horizontem ſecat; quinetiam axi ſphæræ eſt ad angulos rectos. qui vero circuli ſunt ad angulos rectos axi & horizontem ſecant, ortus occaſuſque faciunt in iiſdem punctis horizontis: quare circulus ΓΘΚ in punctο Γ quidem oritur, & in Κ punctο occidit. fertur autem punctum

ΘΕΩΡΗΜΑ γ'.

Τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων τὰ ἀνατολάς τε καὶ δύσεις ποιούμενα ἕκαστον κατὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλει τε καὶ δύνει.

ἜΣΤΩ ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, μέγιστος μὲν τῶν ἀεὶ φανερῶν ἔστω ὁ ΑΔΕ κύκλος, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ ἀφανῶν ὁ ΒΗΖ, καὶ εἰλήφθω σημεῖον τὸ Θ τῶν ἀνατολὰς καὶ δύσεις ποιούμενων, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Κ· λέγω ὅτι τὸ Θ σημεῖον ἀεὶ κατὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλει τε καὶ δύνει, στρεφομένης τῆς σφαίρας.



Ἐστω κύκλος, καθ' ὃ φέρεται τὸ Θ σημεῖον, ὁ ΓΘΚ· ὁ ΓΘΚ ἄρα κύκλος τέμνει τὸν ὁρίζοντα, καὶ ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ἄξονα τῆς σφαίρας. οἱ δὲ τῷ ἄξονι πρὸς ὀρθὰς ὄντες κύκλοι, καὶ τέμνοντες τὸν ὁρίζοντα, τάς τε ἀνατολὰς καὶ δύσεις κατὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος ποιοῦσι· ὁ ΓΘΚ ἄρα κύκλος ἀεὶ κατὰ μὲν τὸ Γ σημεῖον ἀνατέλλει, κατὰ δὲ τὸ Κ δύνει. καὶ φέρεται τὸ Θ σημ

Θ σημεῖον ἅπτηται τῆς περιφερείας τοῦ ΓΘΚ κύκλου· καὶ τὸ Θ ἄρα σημεῖον ἀεὶ κατὰ μὲν τὸ Γ σημεῖον ἀνατέλλει, κατὰ δὲ τὸ Κ δύνει.

Θ in circumferentia circuli ΓΘΚ: quare punctum Θ ſemper in puncto Γ oritur, & in Κ puncto occidit.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'.

Ὅσα τῶν ἄστρων ἐστὶν ἐπὶ μείζονος κύκλου περιφερείας, ὃς μήτε τέμνῃ τὸν μέγιστον τῶν ἀεὶ φαινομένων κύκλων, μήτε ἐφάπτηται αὐτοῦ· τούτων τὰ πρότερον ἀνατέλλοντα καὶ πρότερον δύνει, καὶ τὰ πρότερον δυόμενα πρότερον ἀνατέλλει.

THEOREMA IV.

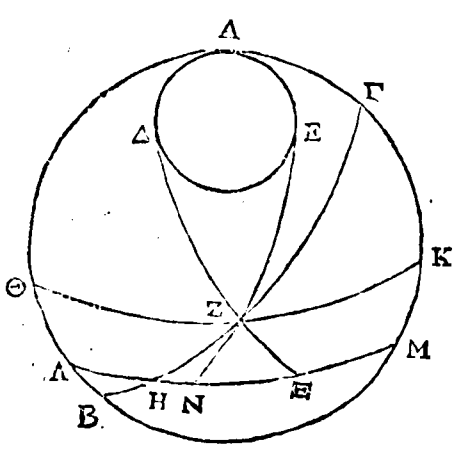
Quæcunque aſtra ſunt in circumferentia maximi circuli, qui neque ſecat maximum ſemper-apparentium circulorum, neque ipſum tangit: horum quæ prius oriuntur prius & occidunt; & quæ prius occidunt, prius etiam & oriuntur.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, καὶ μέγιστος τῶν ἀεὶ φαινομένων ὁ ΑΔΕ, ἕτερος δὲ μέγιστος κύκλος ἔστω ὁ ΓΖΒ, μήτε τέμνων τὸν ΑΔΕ κύκλον μήτε ἐφαπτόμενος αὐτοῦ, καὶ εἰλήφθω ἅπτηται τῆς περιφερείας τοῦ ΓΖΒ κύκλου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η· λέγω ὅτι τῶν Ζ, Η σημείων τὸ πρότερον ἀνατέλλον πρότερον καὶ δύνει, καὶ τὸ πρότερον δῦνον πρότερον καὶ ἀνατέλλει.

Sit in mundo horizon circulus ΑΒΓ; maximus autem ſemper-apparentium ſit circulus ΑΔΕ; alter vero maximus circulus ſit ΓΖΒ, qui neque ſecet circulum ΑΔΕ neque ipſum tangat; ſumantur autem in circumferentia circuli ΓΖΒ duo puncta utcunque, quæ ſint Ζ, Η: dico quod punctorum Ζ, Η quod prius oritur illud quoque prius occidit, & quod prius occidit prius quoque oritur.

Ἐστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἐχέτωσαν παράλληλοι κύκλοι, καθ' ὧν φέρεται τὰ Ζ, Η σημεῖα, οἱ ΘΚ, ΛΜ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ γεγράφθω μέγιστος κύκλος ὁ ΝΖΕ ἐφαπτόμενος μὲν τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ὑπὸ τὸ Ε ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Ν μέρη τῷ ὑπὸ τὸ Α ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὰ Α, Κ μέρη. ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΖ περιφέρεια τῇ ΜΝ περιφερείᾳ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΘ περιφέρεια, καὶ ἡ συνεχὴς αὐτῇ ὑπὸ γῆν ἡ μέχρι τοῦ Κ σημείου, ὁμοία ἐστὶ τῇ ΝΛ περιφερείᾳ καὶ τῇ συνεχεῖ αὐτῇ τῇ ὑπὸ γῆν μέχρι τοῦ Μ σημείου. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὰ Ζ, Ν σημεῖα τὰς ΖΘ, ΝΛ καὶ τὰς συνεχεῖς αὐτῶν μέχρι τῶν Κ, Μ σημείων διαπορεύεται· τὰ Ζ, Ν ἄρα σημεῖα ἅμα ἀνατέλλει. τὸ δὲ Η τοῦ Ν πρότερον ἀνατέλλει· καὶ τὸ Η ἄρα τοῦ Ζ πρότερον ἀνατέλλει. * λέγω ὅτι καὶ πρότερον δύνει. γεγράφθω διὰ τοῦ Ζ σημείου μέγιστος κύκλος ὁ ΞΖΔ ἐφαπτόμενος τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ὑπὸ τὸ Δ ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Δ, Ζ, Ξ μέρη τῷ ὑπὸ τὸ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Α, Θ μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ περιφέρεια τῇ ΞΛ περιφερείᾳ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Ζ σημεῖον τὴν ΖΘ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ τὸ Ξ σημεῖον τὴν ΞΛ περιφέρειαν. τοῦ Ζ ἄρα σημείου ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον φερομένου, καὶ τὸ Ξ ἐπὶ τὸ Λ παρέσται· τὰ Ζ, Ξ ἄρα σημεῖα ἅμα δύνει. τὸ δὲ Η τοῦ Ξ πρότερον δύνει· καὶ τὸ Η ἄρα τοῦ Ζ πρότερον δύνει.

Sint vero partes orientales Γ, occidentales Β; ſintque circuli paralleli ΘΚ, ΛΜ in quibus puncta Ζ, Η ferantur; & per punctum Ζ deſcribatur maximus circulus ΝΖΕ, qui circulum ΑΔΕ tangat; ita ut ſemicirculus qui à puncto Ε incipit, qui ad partes Ζ, Ν tendat, non concurrat cum ſemicirculo à puncto Α inchoante, qui ad partes Λ, Κ proficiſcatur. circumferentia igitur ΚΖ circumferentiæ ΜΝ ſimilis eſt: quare & reliqua ΖΘ, & quæ huic continua eſt ſub terram circumferentia uſque ad punctum Κ contenta, ſimilis eſt etiam circumferentiæ ΝΛ, & ei quæ huic continua eſt ſub terram uſque ad punctum Μ comprehenſæ. æquali igitur tempore [per 2. Autol.] puncta Ζ, Ν circumferentias ΖΘ, ΝΛ percurrunt, & eas etiam quæ his continuæ ſunt uſque ad puncta Κ, Μ interceptæ: quare puncta Ζ, Ν ſimul oriuntur. verum punctum Η prius oritur quam punctum Ν: quare punctum Η prius oritur quam punctum Ζ. dico quod & prius occidit. deſcribatur per punctum Ζ maximus circulus ΞΖΔ qui circulum ΑΔΕ tangat; ita ut ſemicirculus, qui à puncto Δ incipit, qui ad partes Δ, Ζ, Ξ tendat, non concurrat cum ſemicirculo à puncto Α inchoante, qui ad partes Λ, Θ proficiſcatur. circumferentia igitur ΖΘ circumferentiæ ΞΛ ſimilis eſt: æquali igitur tempore punctum Ζ circumferentiam ΖΘ percurrit, ac punctum Ξ circumferentiam ΞΛ pertranſit. cum igitur punctum Ζ ad punctum Θ pervenit, tunc & punctum Ξ ad Δ punctum accedet: puncta igitur Ζ, Ξ ſimul occidunt. ſed Η prius occidit quam punctum Ξ: quare punctum Η prius quoque occidit quam Ζ.



* In *Cod. Bodl.* ἢ καὶ ἅττως. λέγω ὅτι τὸ Η πρότερον δύνει τοῦ Ζ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΚΘ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία τῇ ΜΛ, ὧν ἡ ΚΖ ὁμοία ἐστὶ τῇ ΜΝ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΘΖ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία τῇ ΝΛ· πρότερον ἄρα δύνει τὸ ΝΖ. ἀλλὰ καὶ τὸ Η τοῦ Ν· πολλῷ ἄρα τὸ Η πρότερον δύνει τοῦ Ζ.

Similiter etiam demonſtrabitur, quod & ſi prius occidit & prius quoque orietur.

Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ πρότερον δύνον πρότερον ἀνατέλλει.

THEOREMA V.

Quæcunque aſtra ſunt in circumferentia maximi circuli, qui maximum eorum qui ſemper apparent ſecat; horum quæ magis ſpectant ad ſeptentriones prius quidem oriuntur, poſterius autem occidunt.

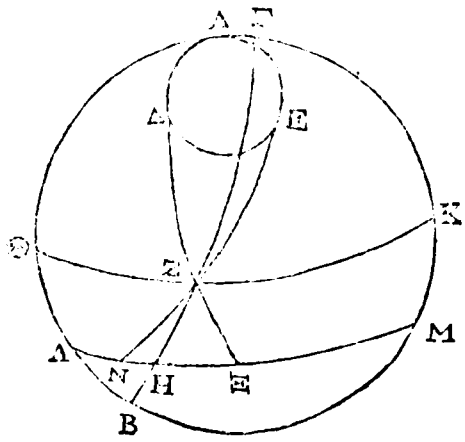
ΘΕΩΡΗΜΑ ε'.

Οσα τῶν ἄστρων ἐστὶν ὅπι μείζων κύκλων περιφερείας, ὃς τέμνει τὸ μέγιστον τῶν ἀεὶ φανερῶν· τούτων τὰ πρὸς τοῖς ἄρκτοις ὄντα πρότερον μὲν ἀνατέλλει, ὕστερον δὲ δύνει.

SIT in mundo circulus horizon ΑΒΓ; maximus autem eorum, qui ſemper apparent ſit circulus ΑΔΕ; alter vero circulus maximus ſit ΓΖΒ, qui ſecet circulum ΑΔΕ; & ſumantur in circumferentia circuli ΓΖΒ duo puncta utcunque ſumpta, quæ ſint Ζ, Η; ſit autem punctum Ζ propius ad ſeptentriones: dico quod punctum Ζ prius oritur quam punctum Η, poſterius autem occidit.

Εστω ἐν κόσμῳ ὁ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, καὶ μέγιστος τῶν ἀεὶ φανερῶν ὁ ΑΔΕ, ἕτερος δὲ μέγιστος κύκλος ἔστω ὁ ΓΖΒ τέμνων τὸν ΑΔΕ κύκλον, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ΓΖΒ κύκλου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ ἔστω τὸ Ζ σημεῖον πρὸς ταῖς ἄρκτοις· λέγω ὅτι τὸ Ζ σημεῖον τοῦ Η πρότερον μὲν ἀνατέλλει, ὕστερον δὲ δύνει.

Sint partes orientales verſus Γ, occidentales vero ſint verſus Β; & ſint circuli paralleli ΚΘ, ΜΛ, in quibus puncta Ζ, Η ferantur; & deſcribatur per punctum Ζ maximus circulus ΝΖΕ tangens circulum ΑΔΕ, ita ut ſemicirculus à puncto Ε inchoans, qui ad partes Ζ, Ν proficiſcatur, non concurrat cum ſemicirculo à puncto Α inchoante, qui ad partes Γ, Κ: quare circumferentia ΖΓ ſimilis eſt circumferentiæ ΜΝ: & reliqua, igitur ΖΘ, & quæ huic ſub terram continua eſt uſque ad punctum Κ intercepta, ſimilis quoque eſt circumferentiæ ΝΛ, & ei quæ huic etiam continua eſt ſub terram uſque ad punctum Μ comprehenſa. quare [per 1. Autol.] tempore æquali puncta Ζ, Ν circumferentias ΖΘ, ΝΛ, & eas quæ his continuæ ſub terram ſunt uſque ad puncta Κ, Μ intercepta, percurrunt: puncta igitur Ζ, Ν ſimul oriuntur. ſed punctum Ν prius oritur quam punctum Η: quare & punctum Ζ prius oritur etiam quam punctum Η. dico quod & poſterius occidit. deſcribatur per punctum Ζ maximus circulus ΞΖΔ tangens circulum ΑΔΕ, itaut ſemicirculus à puncto Δ inchoans, qui ad partes Ζ, Ξ tendat, non concurrat cum ſemicirculo à puncto Α proficiſcente, qui ad partes Α, Β tendat: quare circumferentia ΖΘ ſimilis eſt circumferentiæ ΞΛ. æquali igitur tempore punctum Ζ circumferentiam ΖΘ percurrit atque punctum Ξ ipſam ΞΛ pertranſit: puncto igitur Ζ jam pervento ad punctum Θ & ipſum Ξ perveniet ad punctum Λ: quare puncta Ζ, Ξ ſimul occidunt. ſed punctum Η prius occidit quam punctum Ξ: quare punctum Η prius quoque occidit quam punctum Ζ: punctum igitur Ζ poſterius occidit quam punctum Η. ſed demonſtratum eſt quod & prius oritur: quare punctum Ζ prius quidem oritur quam punctum Η, poſterius autem occidit.



Εστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοι καθ' ὧν φέρεται τὰ Ζ, Η σημεῖα οἱ ΚΘ, ΜΛ, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Ζ σημείου μέγιστος κύκλος ὁ ΝΖΕ ἐφαπτόμενος τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ Ε ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Ν μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Γ, Κ μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΚ περιφέρεια τῇ ΜΝ περιφερείᾳ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΘ περιφέρεια καὶ ἡ συνεχὴς αὐτῇ ὑπὸ γῆν μέχρι τοῦ Κ σημείου ὁμοία ἔσται τῇ ΝΛ περιφερείᾳ καὶ τῇ συνεχεῖ αὐτῇ ὑπὸ γῆν μέχρι τοῦ Μ σημείου. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὰ Ζ, Ν σημεῖα τὰς ΖΘ, ΝΛ περιφερείας καὶ τὰς συνεχεῖς αὐτῶν μέχρι τῶν Κ, Μ σημείων διαπορεύεται· τὰ Ζ, Ν ἄρα σημεῖα ἅμα ἀνατέλλει. τὸ δὲ Ν τοῦ Η πρότερον ἀνατέλλει· καὶ τὸ Ζ ἄρα τοῦ Η πρότερον ἀνατέλλει. λέγω ὅτι καὶ ὕστερον δύνει. γεγράφθω διὰ τοῦ Ζ σημείου μέγιστος κύκλος ὁ ΞΖΔ ἐφαπτόμενος τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ Δ ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Ξ μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Α, Β μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ περιφέρεια τῇ ΞΛ περιφερείᾳ. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Ζ τὴν ΖΘ περιφέρειαν διαπορεύεται καὶ τὸ Ξ τὴν ΞΛ· τοῦ Ζ ἄρα ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον φθάνοντος καὶ τὸ Ξ ἐπὶ τὸ Λ παρέσται· τὰ Ζ, Ξ ἄρα σημεῖα ἅμα δύνει. τὸ δὲ Η τοῦ Ξ πρότερον δύνει· καὶ τὸ Η ἄρα τοῦ Ζ πρότερον δύνει· ὥστε τὸ Ζ τοῦ Η ὕστερον δύνει. ἐδείχθη δὲ καὶ πρότερον ἀνατέλλον· τὸ Ζ ἄρα τοῦ Η πρότερον ἀνατέλλει, ὕστερον δὲ δύνει.

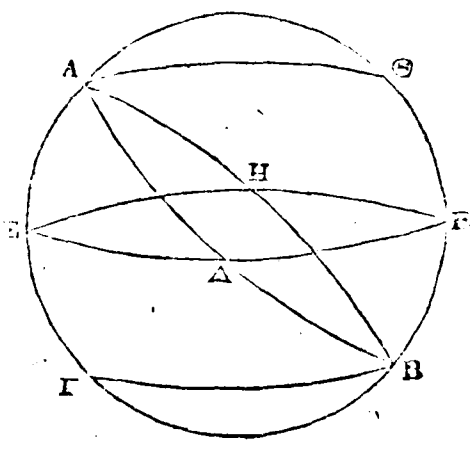
ΘΕΩ-

ΘΕΩΡΗΜΑ ς'.

Τὰ ὁπὶ τῦ ζωδιακῦ κύκλυ ἄστρα τὰ κατὰ διάμετρον ὄντα κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει· ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ὁπὶ τῦ ἰσημερινῦ.

ΕΣτω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΑΒΔ, ἰσημερινὸς δὲ ἔστω ὁ ΕΖ· καὶ ἔστω αὐτῶν τὰ μὲν ὑπὲρ τὴν γῆν τμήματα τὰ ΑΗΒ, ΖΗΕ· κατὰ διάμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν Α σημεῖον τῷ Β, τὸ δὲ Ε τῷ Ζ. λέγω ὅτι τὰ τε Α, Β σημεῖα καὶ τὰ Ε, Ζ κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει.

Ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Α μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι κύκλοι καθ' ὧν φέρεται τὰ Α, Β σημεῖα οἱ ΑΘ, ΒΓ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ΑΘ τμῆμα τὸ ὑπὲρ γῆς, τὸ δὲ ΒΓ τὸ ὑπὸ γῆν. καὶ ἐπεὶ κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ μὲν Α σημεῖον τῷ Β, τὸ δὲ Ε τῷ Ζ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΒ περιφέρεια τῇ ΑΖ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ΕΒ τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν. καὶ ἔστι μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ ΕΔΖ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΘ κύκλος τῷ ΒΓ κύκλῳ. καὶ ἔστιν αὐτῶν τὰ ἐναλλὰξ τμήματα τὰ ΑΘ, ΒΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ περιφέρεια τῇ ΒΓ περιφερείᾳ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Α σημεῖον τὴν ΑΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παρέσται, καὶ τὸ Β τὴν ΒΓ διελθὸν ἐπὶ τὸ Γ παρέσται. ἀλλὰ τὸ μὲν Α τὴν ΑΘ διελθὸν καὶ ἐπὶ τὸ Θ γραφόμενον δύνει, τὸ δὲ Β τὴν ΒΓ διελθὸν καὶ ἐπὶ τὸ Γ γραφόμενον ἀνατέλλει· τῦ Α ἄρα δύνοντος τὸ Β ἀνατέλλει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τῦ Α ἀνατέλλοντος τὸ Β δύνει.



ΠΑΛΙΝ, ἐπεὶ ἡμικύκλιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΕΗΖ, ΖΔΕ, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔΕ περιφέρεια τῇ ΕΗΖ περιφερείᾳ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Ζ σημεῖον τὴν ΖΗΕ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ε παρέσται, καὶ τὸ Ε τὴν ΕΔΖ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ζ παρέσται. ἀλλὰ τὸ μὲν Ζ τὴν ΖΗΕ διελθὸν καὶ ἐπὶ τὸ Ε γραφόμενον δύνει, τὸ δὲ Ε τὴν ΕΔΖ διελθὸν καὶ ἐπὶ τὸ Η γραφόμενον ἀνατέλλει· τῦ Ζ ἄρα δύνοντος τὸ Ε ἀνατέλλει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τῦ Ζ ἀνατέλλοντος τὸ Ε δύνει. ὁμοίως δὴ καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τῦ ζωδιακῦ κύκλου ἄστρα, καὶ τὰ ἐπὶ τῦ ἰσημερινῦ τὰ κατὰ διάμετρον ὄντα, κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει.

ΑΛΛΩΣ

Ἔστω ὁ ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΒΓ, ὁ δὲ τῶ ζω-

THEOREMA VI.

Aſtra quæ in circulo zodiaco per diametrum ſunt poſita, conjugate & oriuntur & occidunt: ſimiliter quæ in circulo æquinoctiali ſita ſint.

SIT in mundo horizon ΑΒΓ, zodiacus circulus poſitionem habeat ΑΒΔ, æquinoctialis vero ſit ΕΖ: ſintque horum circulorum ſegmenta quidem ΑΗΒ, ΖΗΕ ſupra terram; per diametrum igitur eſt punctum Α puncto Β, & punctum Ε puncto Ζ. dico quod puncta Α, Β & Ε, Ζ conjugate & oriuntur & occidunt.

Sint partes orientales Α, occidentales autem Β puncta; ſint vero circuli paralleli ΑΘ, ΒΓ, in quibus puncta Α, Β ferantur; & ſit ſegmentum ΑΘ ſupra terram, & ſegmentum ΒΓ ſub terram. & quoniam punctum Α per diametrum eſt puncto Β, & punctum Ε etiam eſt per diametrum ipſi Ζ: æqualis igitur eſt circumferentia ΕΒ circumferentiæ ΑΖ. ſed circumferentiæ ΖΓ æqualis eſt etiam ipſa ΕΒ: quare circumferentia ΑΖ æqualis quoque eſt ipſi ΖΓ. eſt autem circulus ΕΔΖ maximus parallelorum circulorum: circulus igitur ΑΘ æqualis eſt circulo ΒΓ. & ſunt ipſorum ſegmenta alternatim ſumpta ΑΘ, ΒΓ: quare circumferentia ΑΘ æqualis eſt circumferentiæ ΒΓ: æquali igitur tempore [per 2. Autol.] punctum Α circumferentiam ΑΘ percurrens pervenit ad punctum Θ, & ipſum Β circumferentiam ΒΓ pertranſiens accedit ad punctum Γ. ſed Α percurrens circumferentiam ΑΘ & accedens ad punctum Θ occidit; & Β pertranſiens circumferentiam ΒΓ & perveniens ad punctum Γ oritur: quare puncto Α occidente & Β oritur. ſimiliter demonſtrabitur quod puncto Α oriente Β occidit.

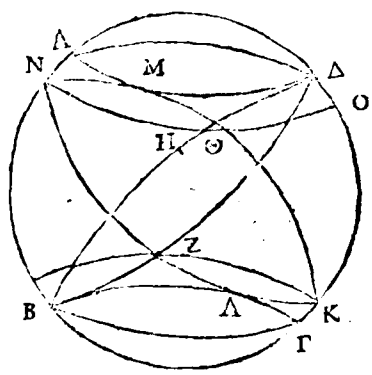
RURSUS, quoniam utraque ΕΗΖ, ΖΔΕ ſemicirculi circumferentia eſt; æqualis igitur eſt ΖΔΕ ipſi ΕΗΖ: quare tempore æquali punctum Ζ percurrens circumferentiam ΖΗΕ pervenit ad punctum Ε; & ipſum Ε pertranſiens circumferentiam ΕΔΖ pervenit ad punctum Ζ. ſed punctum Ζ circumferentiam ΖΗΕ percurrens, & perveniens ad punctum Ε occidit; & punctum Ε perambulans circumferentiam ΕΔΖ & perveniens ad punctum Η oritur: quare puncto Ζ occidente punctum Ε oritur. ſimiliter jam demonſtrabitur quod Ζ oriente Ε occidit. ſimili etiam modo oſtendetur, quod omnia alia puncta, quæcunque ſunt vel in zodiaco circulo vel in æquinoctiali per diametrum poſita, conjugate & oriuntur & occidunt.

ALITER.

Sit horizon circulus ΑΒΓΔ, tropicus æſtivus ſit ΑΔ, hybernus autem ſit ΒΓ, zodiacus

circulus poſitionem habeat ΔHBZ, ſint autem in ΔHBZ per diametrum puncta Z, H: dico quod puncto Z oriente, punctum H occidit.

Si enim fieri poteſt, non occidat, ſed occidat punctum Θ; & per puncta Z, Θ deſcribantur circuli paralleli OΘN, KZ: quare [ex hyp.] puncto Z oriente in puncto K, & punctum Θ occidet in N; & circulus zodiacus poſitionem habebit veluti MNΛK. & quoniam uterque circulus ABΓΔ, MNΛK maximus eſt: punctum igitur K puncto N per diametrum eſt. ſed punctum K idem eſt ac punctum Z, & punctum N idem eſt ac ipſum Θ: quare punctum Z per diametrum eſt puncto Θ. ſed [ex hyp.] & Z per diametrum eſt ipſi H; quod fieri non poteſt: non igitur, puncto Z oriente, punctum H non occidit: occidit igitur.



δίων κύκλος θέσιν ἐχέτω ὡς τὸ ΔHBZ, ἐφ' ἑκάτερα ἐπὶ τὰ ΔHBZ κατὰ διάμετρον τὰ Z, H σημεῖα· λέγω ὅτι τῷ Z ἀνατέλλοντι τὸ H δύνει.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μὴ δυνέτω, ἀλλ' ἔστω τὸ Θ δύνον, καὶ διὰ τῶν Z, Θ παράλληλοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ OΘN, KZ· ὥστε τὸ Z ἀνατέλλοντι κατὰ τὸ K σημεῖον τὸ Θ δύσεται κατὰ τὸ N, καὶ ὁ τοῦ ζωδίου κύκλος θέσιν ἕξει τὴν MNΛK. καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν ABΓΔ, MNΛK κύκλων μέγιστός ἐστι, κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ K τῷ N. ἀλλὰ τὸ μὲν K τῷ Z ἐστι τὸ αὐτὸ, τὸ δὲ N τῷ Θ· καὶ τὸ Z ἄρα τῷ Θ ἐστι κατὰ διάμετρον. ἀλλὰ καὶ τὸ Z τῷ H, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῷ Z ἀνατέλλοντι τὸ H οὐ δύνει· δύνει ἄρα.

THEOREMA VII.

Zodiacus circulus in omni horizontis loco, qui eſt inter tropicos circulos, & oritur & occidit; quando maximus ſemper-apparentium non fuerit circulo tropico major: converſioneſque facit contrario tranſmutatus; nam quando cum ortibus ad meridiem ſe tranſmutaverit, tunc ad ſeptentriones cum occaſibus tranſmutatus apparet; at quando contra cum ortibus ad ſeptentriones ſeſe tranſmutaverit, tunc etiam cum occaſibus ad meridiem tranſmutatus apparet: interdum autem alio modo ſupra nos ſtat.

SIT in mundo circulus horizon ABΓΔ, æſtivus tropicus ſit AΔ, hybernus autem ſit BΓ, zodiacus circulus poſitionem habeat veluti ΔEBZ; & ſit ſegmentum ΔEB ſub terram, ſegmentum vero ΔZB ſupra terram. dico quod zodiacus circulus in omni horizontis loco, qui eſt inter tropicos, & oritur & occidit; & quod contrario tranſmutatus converſiones facit: nam quando cum ortibus meridiem verſus ſeſe mutaverit, tunc cum occaſibus ſeptentriones verſus tranſmutatus apparet; quando autem cum ortibus ad ſeptentriones ſe tranſmutaverit, tunc cum occaſibus meridiem verſus etiam tranſmutatus appparet: interdum vero alio modo ſupra nos conſtitutus eſt.

Sint itaque partes orientales Δ, Γ, occidentales autem ſint A, B. quod igitur circulus zodiacus in omni horizontis loco, qui eſt inter tropicos circulos, faciat & ortus & occaſus, jam manifeſtum eſt [per 11. Autol.]; quandoquidem majores circulos tangit quam eos quos horizon tangit.

JAM dico, quod converſiones facit contrario tranſmutatus.

ΘΕΩΡΗΜΑ ζ'.

Ὁ τῶν ζωδίων κύκλος κατὰ πάντα τὸν ὁρίζοντος τὸν μεταξὺ τόπον τῶν τροπικῶν κύκλων ἀνατέλλει τε καὶ δύνει, ὅταν ὁ μέγιστος τῶν ἀεὶ φαινομένων μὴ μείζων ᾖ τοῦ τροπικοῦ κύκλου, καὶ τροπὰς ποιεῖται ἐναντίως μεθιστάμενος· ὅταν μὲν γὰρ τὰς ἀνατολὰς πρὸς μεσημβρίαν μεθίστηται, τὰς δύσεις πρὸς ἄρκτους μεθιστάμενος φαίνεται· ὅταν δὲ τὰς ἀνατολὰς πρὸς ἄρκτους μεθιστῇ, τὰς δύσεις πρὸς μεσημβρίαν μεθιστάμενος φαίνεται· καὶ ἄλλοτε ἄλλως ὑπὲρ ἡμᾶς ἵσταται.

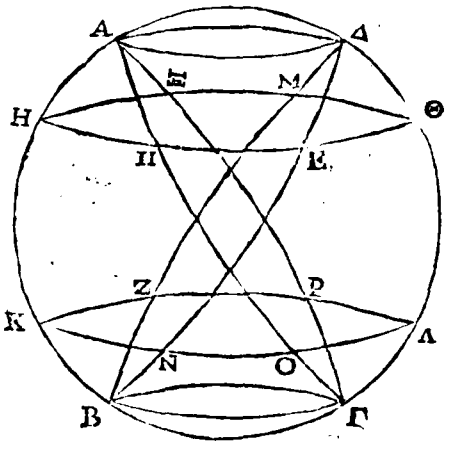
Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ABΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ AΔ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ BΓ, ὁ δὲ τοῦ ζωδίου κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΔEBZ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ΔEB τμῆμα ὑπὸ γῆν, τὸ δὲ ΔZB ὑπὲρ γῆς. λέγω ὅτι ὁ τῶν ζωδίων κύκλος κατὰ πάντα τόπον τὸν ὁρίζοντος μεταξὺ τῶν τροπικῶν ἀνατέλλει καὶ δύνει καὶ τροπὰς ποιεῖται ἐναντίως μεθιστάμενος. ὅταν μὲν γὰρ τὰς ἀνατολὰς πρὸς μεσημβρίαν μεθίστῃ, τὰς δύσεις πρὸς ἄρκτους μεθιστάμενος φαίνεται· ὅταν δὲ τὰς ἀνατολὰς πρὸς ἄρκτους μεθίστῃ, τὰς δύσεις πρὸς μεσημβρίαν μεθιστάμενος φαίνεται· καὶ ἄλλοτε ἄλλως ὑπὲρ ἡμᾶς ἵσταται.

Ἐστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Δ, Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ A, B. ὅτι μὲν οὖν ὁ τῶν ζωδίων κύκλος κατὰ πάντα τόπον τὸν ὁρίζοντος τὸν μεταξὺ τῶν τροπικῶν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει φανερόν· ἐπειδήπερ μειζόνων ἐφάπτεται κύκλων ἢ ὧν ὁ ὁρίζων ἐφάπτεται.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ τροπὰς ποιεῖται ἐναντίως μεθιστάμενος.

Απε-

Απηλήφθωσαν ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ Δ Ε, Ζ Β, καὶ γεγράφθωσαν ὁμοίως ἡμικύκλιοι κύκλοι, καθ' ὧν φέρεται τὰ Ε, Ζ σημεῖα, οἱ Η Ε Θ, Κ Ζ Λ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Δ Ε περιφέρεια τῇ Ζ Β περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ Ε Β· ὅλη ἄρα ἡ Δ Ε Β ὅλῃ τῇ Ε Β Ζ ἐστιν ἴση. ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ Δ Ε Β· ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Ε Β Ζ· κατὰ διάμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Ε σημεῖον τῷ Ζ σημείῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Ε Δ περιφέρεια τῇ Δ Μ περιφερείᾳ, ἡ δὲ Ζ Β τῇ Β Ν, ἀλλὰ ἡ Δ Ε τῇ Ζ Β ἴση ἐστίν· καὶ ἡ Δ Μ ἄρα τῇ Β Ν ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ Μ Β· ὅλη ἄρα ἡ Δ Μ Β ὅλῃ τῇ Μ Β Ν ἐστιν ἴση. ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ Δ Μ Β· ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Μ Β Ν· κατὰ διάμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Μ σημεῖον τῷ Ν σημείῳ. καὶ ἐπεὶ τὰ τῶν ζωδίων κύκλου τὰ κατὰ διάμετρον ὄντα σημεῖα κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τὸ ☾ δυνεῖ· τὰ Δ ἄρα σημεῖα ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Δ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Β δύνει κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ τὰ Ε ἀνατέλλοντα κατὰ τὸ Θ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ζ δύνει κατὰ τὸ Κ σημεῖον, καὶ τὰ Ν σημεῖα ἀνατέλλοντα κατὰ τὸ Λ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Μ δύνει κατὰ τὸ Η σημεῖον, καὶ ἔτι τὰ Β σημεῖα ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Γ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Δ δύνει κατὰ τὸ Α σημεῖον· ὅταν ἄρα ὁ τοῦ ζωδίων κύκλος τοῖς ἀνατολαῖς πρὸς μεσημβρίαν μεθίσῃ, τῇ δύσει πρὸς ἄρκτους μεθίσταται φαίνεται. λέγω ὅτι καὶ ὅταν τοῖς ἀνατολαῖς πρὸς ἄρκτους μεθίσῃται, τοῖς δύσεσι πρὸς μεσημβρίαν μεθίσταται φαίνεται. ἀνατείλαντος γὰρ τοῦ Δ Ε Β ἡμικυκλίου ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει τὴν Α Ξ Γ. καὶ ὁμοίως δείξομεν ὅτι κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ μὲν Ξ σημεῖον τῷ Ο σημείῳ, τὸ δὲ Ρ τῷ Π. καὶ ἐπεὶ τὰ Γ σημεῖα ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Γ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Α δύνει κατὰ τὸ Α σημεῖον, τὰ δὲ Ο σημεῖα ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Λ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ξ δύνει κατὰ τὸ Η σημεῖον, τὰ δὲ Π σημεῖα ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Θ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ρ δύνει κατὰ τὸ Κ σημεῖον, καὶ ἔτι τὰ Α σημεῖα ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Δ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Γ δύνει κατὰ τὸ Β σημεῖον· ὅταν ἄρα ὁ τοῦ ζωδίων κύκλος τοῖς ἀνατολαῖς πρὸς ἄρκτους μεθίσῃται, τοῖς δύσεσι πρὸς μεσημβρίαν μεθίσταται φαίνεται. ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ ὅταν τοῖς ἀνατολαῖς πρὸς μεσημβρίαν μεθίσῃται, τοῖς δύσεσι πρὸς ἄρκτους μεθίσταται φαίνεται. ☾ φανερὸν ὅτι ἄλλοτε ἄλλως ὑπὲρ ἡμᾶς ἵσταται. ὅταν μὲν γὰρ ἡ σωματοειδὴς ζωδιακὸς κύκλος ἢ ὅλη ἢ τὸ διχοτομίας ὑπὲρ γῆς τμήματος ὄρθιος τροπικὸς, ὀρθότατός ἐστι πρὸς ἡμᾶς· ὅταν δὲ ὅλη



Sumantur æquales & oppoſitæ circumferentiæ Δ E, Z B; & deſcribantur paralleli circuli H E Θ, K Z Λ, in quibus puncta E, Z ferantur. quoniam itaque [ex hyp.] circumferentia Δ E æqualis eſt circumferentiæ Z B, communis addatur E B: tota igitur Δ E B toti E B Z æqualis eſt. eſt autem Δ E B ſemicirculi circumferentia: & E B Z igitur ſemicirculi circumferentia eſt: per diametrum igitur eſt punctum E puncto Z. & quoniam circumferentia E Δ æqualis eſt ipſi Δ M, & circumferentia Z B æqualis eſt ipſi B N; ſed & circumferentia Δ E æqualis eſt ipſi Z B: quare & circumferentia Δ M æqualis eſt ipſi B N. communis addatur circumferentia M B: tota igitur Δ M B toti M B N æqualis eſt. eſt autem & circumferentia Δ M B ſemicirculus; & igitur ſemicirculus eſt etiam circumferentia M B N: quare punctum M per diametrum eſt ipſi N poſitum. & quoniam puncta quæ in circulo zodiaco ſunt per diametrum poſita [per 6.Phæn.] conjugate oriuntur & occidunt: puncto igitur Δ oriente in Δ, & punctum B ipſi per diametrum poſitum occidit in puncto B; & puncto E oriente in puncto Θ, & punctum Z quod ipſi eſt per diametrum occidit in puncto K; quinetiam N puncto oriente in puncto Λ, & ipſi per diametrum poſitum M punctum occidit in puncto H; & etiam B oriente in puncto Γ, & ipſi per diametrum Δ occidit in puncto A: quando igitur zodiacus circulus meridiem verſus cum ortibus mutaverit ſeſe, tunc & cum occaſibus ad ſeptentriones tranſmutatus apparet. dico etiam quod quando cum ortibus ad ſeptentriones ſe tranſmutaverit, tunc cum occaſibus ad meridiem tranſmutatus apparet. oriente namque Δ E B ſemicirculo, circulus zodiacus poſitionem habebit A Ξ Γ. & ſimiliter demonſtrabitur quod punctum Ξ per diametrum eſt ipſi O; & punctum P per diametrum eſt puncto Π. & quoniam puncto Γ oriente in Γ puncto, punctum A ipſi Γ per diametrum poſitum occidit in puncto A; & O oriente in puncto Λ, & punctum Ξ ipſi per diametrum poſitum occidit in puncto H; quinetiam Π oriente in Θ puncto, & P punctum ipſi per diametrum poſitum occidit in puncto K; & adhuc puncto A oriente in Δ puncto, punctum Γ per diametrum ipſi A occidit in puncto B: quando igitur zodiacus circulus ſeptentrionem verſus cum ortibus ſe mutaverit, tunc & cum occaſibus meridiem verſus mutatus apparet. eſt autem demonſtratum quod quando ſe mutat meridiem verſus cum ortibus, tunc quoque cum occaſibus ſeptentrionem verſus mutatus apparet. ac manifeſtum quoque eſt quod alio modo atque alio ſe habet ſupra nos. nam quando zodiaci circuli contactus fuerit in medio puncto ſegmenti æſtivi tropici quod eſt ſupra terram, tunc maxime rectus eſt ad nos: quando vero

fuerit

fuerit zodiaci contactus in medio puncto ſegmenti æſtivi tropici quod eſt ſub terram, tunc maxime inclinatus erit ad nos. & ſemper quo longius diſtat contactus à medio puncto, ad nos magis erit inclinatus: ſimiliter autem inclinatus erit, cum contactus ab alterutro medio puncto æquidiſtans fuerit.

τῆς διχοτομίας ὃ ἀπὸ γλῶ τμήματος τῦ θερινῦ τροπικῦ, παπεινότατός ἐστι πρὸς ἡμᾶς. καὶ ἀεὶ μᾶλλον πορρώτερον γινόμενος τ διχοτομίας τῦ ὑπὲρ γῆς τμήματος τῦ θερινῦ τροπικῦ, μᾶλλον ἔσται κεκλιμένος· ὁμοίως δὲ ἔσται κεκλιμένος, ὅταν ἀπέχον ἑκατέρας τῶν διχοτομιῶν.

THEOREMA VIII.

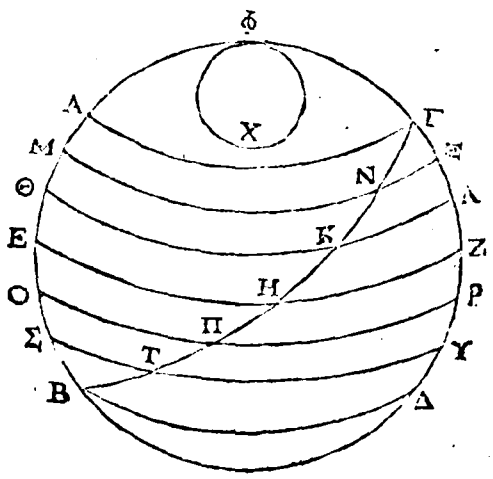
Zodiaci circuli ſigna in ſegmentis horizontis inæqualibus oriuntur & occidunt: atque in maximis quidem, quæ prope æquinoctialem circulum ſunt; in minoribus, quæ deinceps ſequuntur; in minimis vero, quæ prope tropicos circulos ſunt; denique in ſegmentis æqualibus, quæ ab æquinoctiali circulo æque diſtant.

ΘΕΩΡΗΜΑ η'.

Τὰ ζώδια ἐν ἀνίσοις τμήμασι τῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλει τε καὶ δύνει· καὶ ἐν μείζοσι μὲν τὰ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ· ἐν ἐλάττοσι δὲ τὰ ἐξῆς τούτων· ἐν ἐλαχίστοις δὲ τὰ πρὸς τοῖς τροπικοῖς· ἐν ἴσοις δὲ τὰ ἴσον ἀπέχοντα τῦ ἰσημερινῦ κύκλυ.

SIT horizon circulus ΑΒΓΔ, tropici autem ſint ΑΓ, ΒΔ, maximus vero ſemper apparentium circulorum ſit circulus ΦΧ, zodiacus circulus poſitionem habeat ΓΒ, æquinoctialis circulus ſit ΕΖ; & dividatur utraque circumferentia ΓΗ, ΗΒ in tres partes æquales in punctis Ν, Κ, Π, Τ: dico quod circumferentiæ ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ in ſegmentis horizontis inæqualibus & oriuntur & occidunt; & quod circumferentiæ ΚΗ, ΗΠ in maximis; & ΚΝ, ΠΤ in minoribus; in minimis autem circumferentiæ ΓΝ, ΒΤ; at in æqualibus ipſæ ΚΗ, ΗΠ; ΚΝ, ΠΤ; & denique ΝΓ, ΤΒ, & oriuntur & occidunt.

Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, τροπικοὶ δὲ οἱ ΑΓ, ΒΔ, μέγιστος δὲ τ ἀεὶ φαινερῶν ὁ ΦΧ, ὁ δὲ τ ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΓΒ, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ὁ ΕΖ, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τ ΓΗ, ΗΒ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Ν, Κ, Π, Τ σημεῖα· λέγω ὅτι καὶ αἱ ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις τμήμασι τῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλουσι τε καὶ δύνουσι, καὶ ἐν μείζοσι μὲν αἱ ΚΗ, ΗΠ, ἐν ἐλάττοσι δὲ αἱ ΚΝ, ΠΤ, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ ΓΝ, ΒΤ, ἐν ἴσοις δὲ ἡ μὲν ΚΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΚΝ τῇ ΠΤ, ἡ δὲ ΝΓ τῇ ΤΒ.



Sint quidem circuli paralleli ΜΞ, ΘΛ, ΟΡ, ΣΤ, in quibus puncta Ν, Κ, Π, Τ ferantur. quoniam igitur [per conſtr.] circumferentiæ ΗΚ, ΚΝ, ΝΓ æquales invicem ſunt; circumferentiæ ΖΛ, ΛΞ, ΞΓ majores invicem ſunt, initium ſumentes à maxima circumferentia ΖΛ. eadem ratione etiam circumferentiæ ΕΘ, ΘΜ, ΜΑ majores quoque ſunt invicem, initium ſumentes à maxima circumferentia ΕΘ: quinetiam & ipſæ ΖΡ, ΡΤ, ΤΔ majores etiam invicem ſunt, initium ſumentes à maxima circumferentia ΖΡ; & denique circumferentiæ ΕΟ, ΟΣ, ΣΒ majores invicem ſunt, initium ſumentes à maxima circumferentia ΕΟ. & quoniam circumferentiæ ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ oriuntur quidem in circumferentiis ΓΞ, ΞΛ, ΛΖ, ΖΡ, ΡΤ, ΤΔ; occidunt autem in circumferentiis ΑΜ, ΜΘ, ΘΕ, ΕΟ, ΟΣ, ΣΒ: quare in ſegmentis horizontis inæqualibus dictæ circumferentiæ & oriuntur & occidunt. & quoniam circuli paralleli ΘΛ, ΟΡ maximi cujuſdam circuli ΓΒ circumferentias ΠΗ, ΗΚ æquales auferunt ad ma-

Εσωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ Ν, Κ, Π, Τ σημεῖα ὁμόκεντροι κύκλοι οἱ ΜΞ, ΘΛ, ΟΡ, ΣΤ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΗΚ, ΚΝ, ΝΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· αἱ ΖΛ, ΛΞ, ΞΓ ἄρα μείζονές εἰσιν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μείζονος τ ΖΛ. ἀλλὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ΕΘ, ΘΜ, ΜΑ μείζονές εἰσιν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μείζονος τ ΕΘ· καὶ ἔτι αἱ μὲν ΖΡ, ΡΤ, ΤΔ μείζονές εἰσιν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μείζονος τ ΖΡ, καὶ ἔτι αἱ ΕΟ, ΟΣ, ΣΒ μείζονές εἰσιν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μείζονος τῆς ΕΟ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ ἀνατέλλουσι μὲν κατὰ τὰς ΓΞ, ΞΛ, ΛΖ, ΖΡ, ΡΤ, ΤΔ περιφερείας, δύνουσι δὲ κατὰ τὰς ΑΜ, ΜΘ, ΘΕ, ΕΟ, ΟΣ, ΣΒ· ὥστε ἐν ἀνίσοις τμήμασι τῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλουσι τε καὶ δύνουσι. καὶ ἐπεὶ ὁμόκεντροί εἰσι ΘΛ, ΟΡ μείζονός τινος κύκλυ περιφερείας τῦ ΓΒ τὰς ΠΗ, ΗΚ ἴσας ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μείζονα

τῆν

τῶν ϖαραλλήλων τὸν ΕΖ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΘΛ κύκλος τῷ ΟΡ κύκλῳ. ἐπεὶ ἓν ἐν σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ ϖαράλληλοι κύκλοι οἱ ΘΛ, ΟΡ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφερείας τὰς ΑΒΓΔ τὰς ΛΖ, ΖΡ ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν ϖαραλλήλων τὸν ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ τῇ ΖΡ περιφερείᾳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΞΖ περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΖΥ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΛΖ τῇ ΖΡ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΞΛ λοιπῇ τῇ ΡΥ ἐστιν ἴση. ϖλὴ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΞ ἴση ἐστὶ τῇ ΥΔ.

Τὰ ἄρα ζῳδιακὰ ἐν ἀνίσοις τμήμασι τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλει τε καὶ δύνει· καὶ ἐν μεγίστοις μὲν τὰ ϖρὸς τῷ ἰσημερινῷ· ἐν ἐλάσσοσι δὲ τὰ ἑξῆς τούτων· ἐν ἐλαχίστοις δὲ τὰ ϖρὸς τοῖς τροπικοῖς· ἐν ἴσοις δὲ τὰ ἴσον ἀπέχοντα τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου.

maximum parallelorum EZ: circulus igitur ΘΛ circulo OP æqualis eſt. quoniam autem in ſphæra æquales & paralleli circuli ΘΛ, OP maximi cujuſdam circuli ABΓΔ circumferentias, ſcilicet ΛZ, ZP auferunt apud maximum parallelorum EZ: æqualis igitur eſt circumferentia ΛZ circumferentiæ ZP. ſimiliter itaque demonſtrabitur quod & circumferentia ΞZ eſt æqualis circumferentiæ ZΥ; ex quibus ipſa ΛZ æqualis eſt ipſi ZP; & reliqua igitur ΞΛ reliquæ PΥ eſt æqualis. eadem ratione & circumferentia ΓΞ æqualis eſt ipſi ΥΔ.

Quare zodiaci circuli ſigna in ſegmentis horizontis inæqualibus & oriuntur & occidunt: & in maximis quidem quæ prope circulum æquinoctialem ſunt; in minoribus, quæ deinceps ſequuntur; in minimis porro, quæ ſunt prope circulos tropicos; denique in ſegmentis æqualibus, quæ ab æquinoctiali circulo æque diſtant.

ΘΕΩΡΗΜΑ θ'.

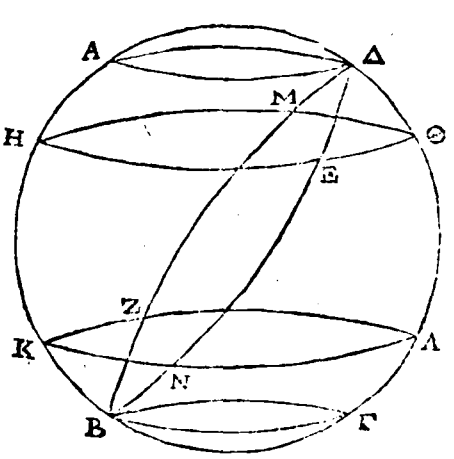
Τῶν τοῦ ζῳδίου κύκλου τὰ ἡμικύκλια, ὅσα μὴ τὰς ἀρχὰς ἔχει ὅπου αὐτῶν τῶν ϖαραλλήλων, ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλει ὅλα· καὶ ἐν ϖλείστῳ μὲν τὸ μετὰ τὸ χειμερινόν, ἐν ἐλάσσονι δὲ, τὰ ἑξῆς τούτου· ἐν ἐλαχίστοις δὲ τὸ ϖρὸς τοῖς τροπικοῖς· ἐν ἴσοις δὲ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω· ὅσα δὲ τὰς ἀρχὰς ἔχει ὅπου αὐτῶν τῶν ϖαραλλήλων, ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει.

THEOREMA IX.

Zodiaci ſemicirculi, quicunque non habent initium ab eodem parallelo circulo, univerſi temporibus oriuntur inæqualibus: ac majori quidem tempore oritur ſemicirculus, qui poſt cancrum eſt; minori vero, qui hunc deinceps ſequuntur: in minimis porro qui eſt poſt capricornum; qui autem initium habent ab eodem parallelo, æqualibus temporibus oriuntur.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, ὁ δὲ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΔΕΒΖ, ἔστω δὲ ἀνατολικὰ μὲν τὰ Γ, Δ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Α, Β, καὶ τὸ μὲν ΔΕΒ ἔστω τὸ μετὰ τὸν καρκῖνον ἡμικύκλιον, τὸ δὲ ΒΖΔ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω· λέγω ὅτι τῶν ζῳδίων κύκλου τὰ ἡμικύκλια, ὅσα μὴ τὰς ἀρχὰς ἔχει ὅπου τῶν αὐτῶν τῶν ϖαραλλήλων, ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλει, καὶ ἐν ϖλείστῳ μὲν τὸ μετὰ τὸν καρκῖνον τὸ ΔΕΒ, ἐν ἐλάσσονι δὲ τὰ ἑξῆς τούτου, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω τὸ ΒΖΔ, ἴσοι δὲ τὰς ἀρχὰς ἔχει ὅπου τῶν αὐτῶν τῶν ϖαραλλήλων ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει.

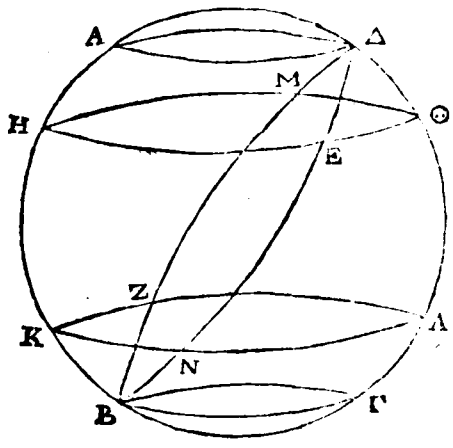
SIT in mundo circulus horizon ABΓΔ; tropicus æſtivus ſit AΔ, hybernus autem ſit BΓ; zodiacus vero circulus poſitionem habeat veluti ΔEBZ; ſint autem partes orientales Γ, Δ puncta, occidentales vero A, B; & ſit ſemicirculus ΔEB poſt cancrum, & ſemicirculus BZΔ poſt capricornum: dico quod ſemicirculi zodiaci, quicunque non habent initium ab eodem parallelo circulo, temporibus oriuntur inæqualibus; & majori tempore oritur ſemicirculus quidem ΔEB, qui eſt poſt cancrum; minori vero qui deinceps ſequitur; at minimo tempore oritur ſemicirculus BZΔ, qui eſt poſt capricornum; quicunque porro initium habent ab eodem parallelo circulo, æqualibus temporibus oriuntur.



Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι ϖεριφέρειαι αἱ ΔΕ, ΒΖ, καὶ γεγράφθωσαν ϖαράλληλοι κύκλοι ΗΕΘΜ, ΚΖΛΝ, καθ' ὧν φέρεται τὰ Ε, Ζ σημεῖα, ἔστω δὲ αὐτῶν τὰ ὑϖὲρ γῆς τμήματα τὰ ΗΜΘ, ΚΖΛ. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς ϖρότερον ὅτι κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ μὲν Ε σημεῖον τῷ Ζ σημείῳ, τὸ δὲ Μ τῷ

Sumantur æquales circumferentiæ ΔE, BZ; & deſcribantur circuli paralleli HEΘM, KZΛN, in quibus puncta E, Z ferantur; ſintque ſegmenta HMΘ, KZΛ ſupra terram. ſimiliter itaque demonſtrari poterit ac ſuperius [ad 7. Phæn.] quod punctum E per diametrum eſt ipſi Z, & punctum M

per diametrum eſt punctо N. & quoniam circumferentia Α Δ major eſt circumferentia Η Μ Θ quam ut ei ſimilis ſit; & Η Μ Θ major etiam eſt ipſa Κ Ζ Λ quam ut ei ſimilis ſit; quinetiam ipſa Κ Ζ Λ major eſt circumferentia Β Γ quam ut ei ſimilis ſit: majori igitur tempore punctum Δ incipiens à Δ circumferentiam Δ Α percurrit, quam punctum Ε inchoans à puncto Θ circumferentiam Θ Μ Η pertranſit; & punctum Ε incipiens à Θ majori tempore percurrit circumferentiam Θ Μ Η, quam punctum Ν inchoans à puncto Λ circumferentiam Λ Ζ Κ pertranſit; quinetiam punctum Ν inchoans à puncto Λ majori tempore percurrit circumferentiam Λ Ζ Κ, quam Β incipiens à puncto Γ circumferentiam Γ Β pertranſit. ſed quo quidem tempore punctum Δ circumferentiam Δ Α percurrit, hoc ipſo tempore punctum Β per diametrum ipſi Δ poſitum percurrit alternam circumferentiam Β Γ, & oritur quidem ſemicirculus Δ Ε Β; & quo tempore punctum Ε incipiens à puncto Θ circumferentiam Θ Μ Η percurrit, hoc ipſo tempore ipſi per diametrum poſitum Ζ incipiens à puncto Κ circumferentiam Κ Ν Λ percurrit, & ſemicirculus Ε Β Ζ oritur; quinetiam quo tempore punctum Ν incipiens à puncto Λ circumferentiam Λ Ζ Κ pertranſit, hoc ipſo tempore & punctum Μ ipſi per diametrum poſitum incipiens à puncto Η circumferentiam Η Ε Θ percurrit, & ſemicirculus Ν Β Μ oritur; & etiam quo tempore punctum Β incipiens à puncto Γ circumferentiam Γ Β pertranſit, hoc ipſo tempore & punctum Δ ipſi per diametrum poſitum, inchoans à puncto Α circumferentiam alternam Α Δ percurrit, & ſemicirculus Β Ζ Δ oritur: quare ſemicirculus Δ Ε Β, qui eſt poſt cancrum, majori tempore oritur; ſed minori tempore oritur Ε Β Ζ quam Δ Ε Β; quinetiam minori tempore Ν Β Μ oritur quam ſemicirculus Ε Β Ζ; at vero minimo tempore oritur ſemicirculus Β Ζ Δ qui eſt poſt capricornum.



Dico etiam quod quicunque initium habent ab eodem circulo parallelo, æqualibus temporibus oriuntur. habeant ſiquidem ſemicirculi Μ Δ Ν, Ε Β Ζ initium ab eodem circulo parallelo: dico quod æqualibus temporibus oriuntur Μ Δ Ν, Ε Β Ζ.

Quoniam enim æquali tempore punctum Μ inchoans à puncto Θ circumferentiam Θ Μ Η percurrit, atque punctum Ε ſimiliter inchoans à puncto Θ circumferentiam Θ Μ Η pertranſit: ſed quo tempore punctum Μ incipiens a puncto Θ circumferentiam Θ Μ Η percurrit, hoc ipſo tempore & punctum Ν ipſi per diametrum poſitum incipiens à puncto Κ circumferentiam Κ Ν Λ pertranſit, & oritur Μ Δ Ν ſemicirculus; & quo tempore punctum Ε inchoans à puncto Θ circumferentiam Θ Μ Η percurrit, hoc ipſo tempore & punctum Ζ ipſi per diametrum poſitum

Ν. Ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία ἡ Α Δ περιφέρεια τῆς Η Μ Θ περιφερείας, ἡ δὲ Η Μ Θ τῆς Κ Ζ Λ, καὶ ἔτι ἡ Κ Ζ Λ τῆς Β Γ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ Δ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὴν Δ Α περιφέρειαν διαπορεύεται, ἤπερ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν Θ Μ Η περιφέρειαν διαπορεύ[ε]ται· καὶ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ ἐν πλείονι χρόνῳ τὴν Θ Μ Η περιφέρειαν διαπορεύ[ε]ται, ἤπερ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὴν Λ Ζ Κ περιφέρειαν διαπορεύεται· καὶ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ ἐν πλείονι χρόνῳ τὴν Λ Ζ Κ περιφέρειαν διαπορεύεται, ἤπερ τὸ Β ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Γ τὴν Γ Β περιφέρειαν διαπορεύεται. ἀλλὰ ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ Δ σημεῖον τὴν Δ Α περιφέρειαν διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Β σημεῖον τὴν ἐναλλὰξ τὴν Β Γ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ Δ Ε Β ἡμικύκλιον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν Θ Μ Η περιφέρειαν διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ζ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τὴν Κ Ν Λ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ Ε Β Ζ ἡμικύκλιον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὴν Λ Ζ Κ διαπορεύ[ε]ται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Μ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Η τὴν Η Ε Θ διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει Ν Β Μ ἡμικύκλιον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Β ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Γ τὴν Γ Β διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α τὴν ἐναλλὰξ τὴν Α Δ διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ Β Ζ Δ ἡμικύκλιον· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἀνατέλλει τὸ μετὰ τὸ καρκῖνον ἡμικύκλιον τὸ Δ Ε Β, ἐν ἐλάσσονι δὲ τοῦ Δ Ε Β τὸ Ε Β Ζ, καὶ ἔτι τοῦ Ε Β Ζ τὸ ἐλάσσονι τὸ Ν Β Μ, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω τὸ Β Ζ Δ.

Λ Ε Γ Ω ὅτι ὅσαι τὰς ἀρχὰς ἔχει ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τῶν ἀλλήλων, ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει. ἐκκείσθω γὰρ τὰ Μ Δ Ν, Ε Β Ζ ἡμικύκλια τὰς ἀρχὰς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τῶν ἀλλήλων· λέγω ὅτι ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει τὰ Μ Δ Ν, Ε Β Ζ ἡμικύκλια.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ἴσῳ χρόνῳ τὸ Μ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν Θ Μ Η περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν Θ Μ Η περιφέρειαν διαπορεύεται· ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ Μ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν Θ Μ Η διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τὴν Κ Ν Λ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ Μ Δ Ν ἡμικύκλιον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Ε σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τὴν Θ Μ Η περιφέρειαν διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ζ ἀρξά-

ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τοῦ ΚΝΛ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ ΕΒΖ ἡμικύκλιον· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ ἀνατέλλει τὰ ΜΔΝ, ΕΒΖ ἡμικύκλια.

incipiens à puncto K circumferentiam ΚΝΛ pertranſit, & ſemicirculus ΕΒΖ oritur: quare tempore æquali ſemicirculi ΜΔΝ, ΕΒΖ oriuntur.

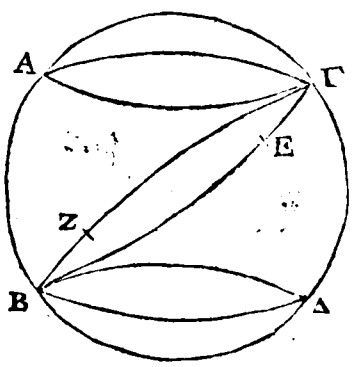
ΘΕΩΡΗΜΑ ί.

Ἐὰν ᾖ τοῦ ζῳδίων κύκλου δύο ἡμικύκλια ἀνατέλλῃ ἐν ἀνίσοις, χρόνοις, κοινόν τινα ἔχοντα περιφέρειαν· καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσιν, καὶ αἱ αὐταὶ διαφοραὶ ἔσονται τῶν χρόνων ἐν οἷς τε τὰ ἡμικύκλια ἀνατέλλει καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι. καὶ ἐὰν ᾖ τῶν ζῳδίων κύκλου δύο ἡμικύκλια ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλῃ, κοινόν τινα ἔχοντα περιφέρειαν· καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλουσι.

Theorema X.

Si duo zodiaci ſemicirculi, communem aliquam habentes circumferentiam, temporibus inæqualibus oriuntur: & oppoſitæ circumferentiæ temporibus quoque inæqualibus oriuntur; atque eædem erunt temporum differentiæ, in quibus & ſemicirculi & oppoſitæ circumferentiæ oriuntur. quod ſi duo zodiaci ſemicirculi, communem aliquam etiam habentes circumferentiam, temporibus æqualibus oriuntur; & oppoſitæ circumferentiæ temporibus quoque æqualibus oriuntur.

Ἔστω ὁρίζων ὁ ΑΒΔΓ, ὁ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ ΑΓ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΒΔ, ζῳδιακὸς δὲ ὁ ΓΒ, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΓΕ, ΒΖ· τὰ ἄρα ΓΕΒ, ΕΒΖ ἡμικύκλια ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλει. λέγω ὅτι καὶ αἱ ΓΕ, ΒΖ περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσιν.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΕΒ τοῦ ΕΒΖ ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει, κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς ΕΒ περιφερείας ἀνατολῆς χρόνος· (ἡ γὰρ ΕΒ περιφέρεια ἑαυτῇ αἰεὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει) λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΕ τῆς ΒΖ ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει. καὶ φανερὸν ὅτι αἱ αὐταὶ διαφοραί εἰσι τῶν χρόνων ἐν οἷς τε τὰ ΓΕΒ, ΕΒΖ ἡμικύκλια ἀνατέλλει, καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΓΕ, ΒΖ. φανερὸν δὲ ὅτι κἂν ἡμικύκλιά τινα ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλῃ, καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλουσιν.

SIT horizon circulus ΑΒΔΓ; tropicus æſtivus ſit ΑΓ, hybernus ſit ΒΔ; zodiacus circulus ſit ΓΒ; & ſumantur zodiaci circuli æquales circumferentiæ ΓΕ, ΒΖ: ſemicirculi igitur ΓΕΒ, ΕΒΖ temporibus inæqualibus oriuntur. dico quod & circumferentiæ ΓΕ, ΒΖ etiam temporibus inæqualibus oriuntur.

Quoniam enim [per 6 Ph.] ΓΕΒ ſemicirculus majori tempore oritur quam ipſe ΕΒΖ, commune auferatur tempus quo circumferentia ΕΒ oritur: (ſemper ſiquidem ipſa æquali tempore ſibi ipſi oritur) quare & reliqua ΓΕ majori tempore oritur quam ipſa ΒΖ. ac manifeſtum eſt quod eædem ſunt temporum differentiæ, in quibus & ſemicirculi ΓΕΒ, ΕΒΖ oriuntur & circumferentiæ ΓΕ, ΒΖ. & patet etiam, ſi ſemicirculi quidam æqualibus temporibus oriuntur, quod & in iis circumferentiæ oppoſitæ æqualibus quoque temporibus oriuntur.

ΘΕΩΡΗΜΑ ια'.

Τῶν τοῦ ζῳδίων κύκλου τῶν ἴσων τε καὶ ἀπεναντίον περιφερειῶν ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἀνατέλλει, ἡ ἑτέρα δύνει· ἐν ᾧ δὲ ἡ ἑτέρα δύνει, ἡ ἑτέρα ἀνατέλλει.

Theorema XI.

Ex æqualibus & oppoſitis zodiaci circumferentiis, quo tempore una oritur, altera occidit: & quo tempore una occidit, altera oritur.

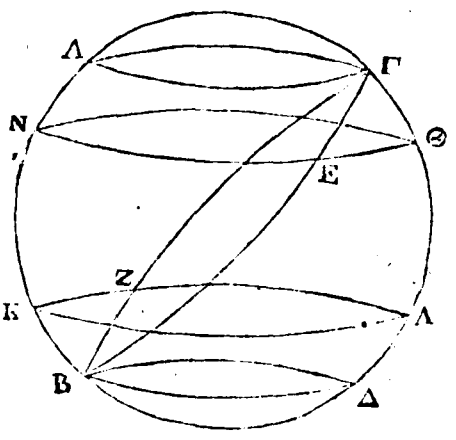
Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΔΓ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΓ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΒΔ, ζῳδιακὸς δὲ ἔστω ὁ ΓΒ, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἐπ' αὐτοῦ ἴσαι καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΓΕ, ΒΖ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΓΕ ἀνατέλλει, ἡ ΒΖ δύνει.

Ἐκβεβλήσθωσαν καθ' ἃ φέρεται τὰ Ε, Ζ σημεῖα παράλληλοι κύκλοι οἱ ΝΘ, ΚΛ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τοῦ ζῳδιακοῦ ἄστρα κατὰ διάμετρον ὄντα κατὰ

SIT horizon circulus ΑΒΔΓ; æſtivus tropicus ſit ΑΓ, hybernus autem ſit ΒΔ, zodiacus circulus ſit ΓΒ; & ſumantur in zodiaco circulo æquales & oppoſitæ circumferentiæ ΓΕ, ΒΖ: dico quod quo tempore ΓΕ circumferentia oritur, & ΒΖ occidit.

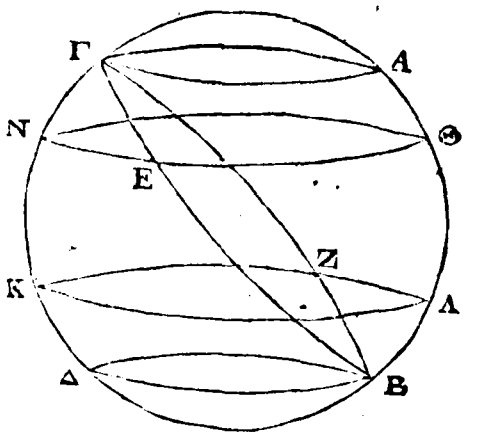
Sint autem circuli ΝΘ, ΚΛ paralleli in quibus puncta Ε, Ζ ferantur. & quoniam [per 6. Phæn.] aſtra, quæ in circulo zodiaco ſunt per

diametrum posita, conjugate & oriuntur & occidunt; quare astro E oriente, & Z occidit: quo igitur tempore astrum E incipiens à puncto E circumferentiam E Θ percurrens pervenit ad punctum Θ, hoc ipso tempore & astrum Z incipiens à puncto Z circumferentiam Z K percurrens pervenit ad punctum K. verum quando E circumferentiam E Θ percurrens pervenit ad punctum Θ, tunc ipsa E Γ oritur; quando vero astrum Z percurrens ipsam Z K pervenit ad K punctum, tunc circumferentia B Z occidit: quare quo tempore Γ E oritur, hoc ipso tempore B Z circumferentia occidit.



συζυγίαν ἀνατέλλει τῇ δυσὶ, τὴν Ε ἄρα ἀνατέλλοντος τὸ Ζ δύσει· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ε τὴν Ε Θ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ φαίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ζ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ζ τὴν Ζ Κ διελθὸν ἐπὶ τὸ Κ φαίνεται. ἀλλ' ὅταν μὲν τὸ Ε τὴν Ε Θ διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ φαίνηται, ἀνατέλλει ἡ ΕΓ· ὅταν δὲ τὸ Ζ τὴν Ζ Κ διελθὸν ἐπὶ τὸ Κ φαίνηται, δύσις ἡ ΒΖ περιφέρεια· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΓΕ περιφέρεια ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΒΖ περιφέρεια δύσει.

Dico etiam quod quo tempore circumferentir B Z oritur, & Γ E occidit. circumvolvatur namque zodiacus circulus, ut se habet in secunda figura, & habeat positionem veluti Γ E B Z: dico quod quo tempore circumferentia B Z oritur, & Γ E occidit. quoniam enim punctum Z est per diametrum ipsi E; quare Z oriente, & E occidit: quo igitur tempore Z circumferentiam Z Λ percurrens pervenit ad punctum Λ, hoc eodem tempore & E circumferentiam E N percurrens pervenit ad punctum N. sed quando Z circumferentiam Z Λ percurrens pervenit ad Λ, tunc ipsa B Z oritur; quando autem E circumferentiam E N percurrens pervenit ad N, tunc ipsa Γ E occidit: quare quo tempore B Z oritur, hoc ipso tempore & Γ E occidit.



Λ Ε Γ Ω ὅτι καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Β Ζ ἀνατέλλει ἡ Γ Ε δύσει. μετακεκινήσθω γὰρ ἐν τῇ δευτέρᾳ πάλιν ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος, καὶ θέσιν ἐχέτω τὴν Γ Ε Β Ζ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Β Ζ ἀνατέλλει, ἡ Γ Ε δύνει. ἐπεὶ γὰρ κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ Ζ σημεῖον τῷ Ε σημείῳ, τὴν ἄρα Ζ ἀνατέλλοντος τὸ Ε δύσει· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Ζ τὴν Ζ Λ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Λ φαίνηται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ε τὴν Ε Ν περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ν φαίνεται. ἀλλ' ὅταν μὲν τὸ Ζ τὴν Ζ Λ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Λ φαίνηται, ἀνατέλλει ἡ Β Ζ· ὅταν δὲ τὸ Ε τὴν Ε Ν περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ν φαίνηται, δύσει ἡ Γ Ε· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ Β Ζ περιφέρεια ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ ἡ Γ Ε περιφέρεια δύσει.

Theorema XII.

Semicirculi, *qui post cancrum est, circumferentiæ æquales temporibus occidunt inæqualibus; atque in maximis quidem, quæ prope contactus sunt tropicorum; in minoribus, quæ has deinceps sequuntur; in minimis autem, quæ prope æquinoctialem sunt circulum: denique temporibus æqualibus oriuntur & occidunt, quæ ab æquinoctiali circulo æqualiter distant.

Sit horizon circulus A B Γ Δ; maximus autem eorum qui semper apparent sit circulus E Z, æstivus tropicus sit A B, hybernus autem sit Γ Δ; & sit post cancrum semicirculus B Δ supra terram, æquinoctialis circulus sit H Θ, & dividatur utraque circumferentia B Δ, Δ Δ in tres partes æquales in punctis K, Λ, M, N: dico quod circumferentiæ B K, K Λ, Λ Ξ, Ξ M, M N, N Δ in inæqualibus

*Hoc est incipiens à cancro, & secundum seriem signorum productus.

Θεώρημα ιϛ'.

Τῷ * μετὰ τὸν καρκῖνον ἡμικυκλίῳ αἱ ἴσαι περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις δύνουσι, καὶ ἐν πλείστοις μὲν αἱ πρὸς ταῖς συναφαῖς τῶν τροπικῶν, ἐν ἐλάττοσι δὲ αἱ ἑξῆς τάττουσαι, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ· ἐν ἴσοις δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου καὶ δύνουσι καὶ ἀνατέλλουσιν.

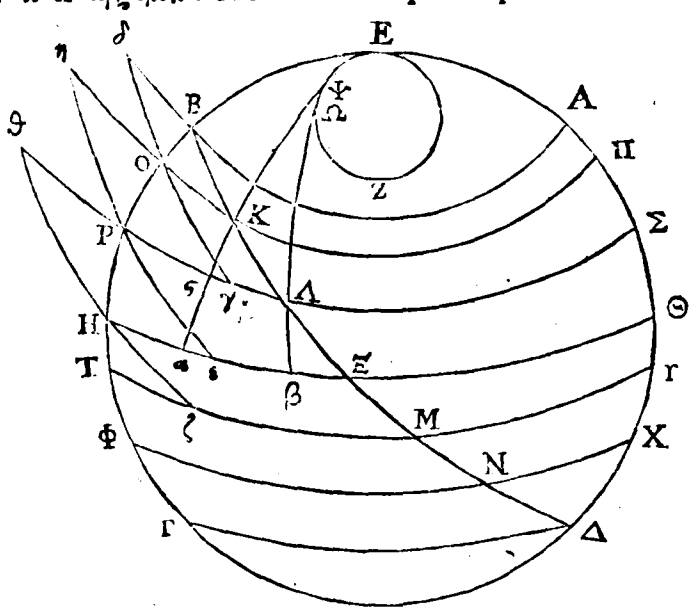
Ἔστω ὀρίζων κύκλος ὁ Α Β Γ Δ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ φανερῶν ὁ Ε Ζ, καὶ χειμερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ Α Β, θερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ Δ Γ, καὶ ἔστω τὸ μετὰ τὸν καρκῖνον ἡμικύκλιον τὸ Β Δ ὑπὲρ γῆς, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ὁ Η Θ, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν Β Ξ, Ξ Δ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα· λέγω ὅτι αἱ Β Κ, Κ Λ, Λ Ξ, Ξ Μ, Μ Ν, Ν Δ ἐν ἀνίσοις χρόνοις δύσεσι

δυώσει, καὶ ἐν μὲν τοῖς μεγίστοις αἱ ΒΚ, ΝΔ, ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ ΚΛ, ΜΝ, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ ΛΞ, ΞΜ· ἐν ἴσοις δὲ ἡ μὲν ΛΞ τῇ ΞΜ, ἡ δὲ ΚΛ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ ΝΔ.

occidunt temporibus; & quod circumferentiæ ΒΚ, ΝΔ in maximis; in minoribus autem circumferentiæ ΚΛ, ΜΝ; in minimis porro ΛΞ, ΞΜ occidunt temporibus: æqualibus vero temporibus occidunt circumferentiæ quidem ΛΞ, ΞΜ, item ΚΛ, ΜΝ, & denique ipſæ ΒΚ, ΝΔ.

Ἐστωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα ὡδιάλληλοι κύκλοι οἱ ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ, ΦΧ, καὶ γεγράφθωσαν ἁψὰ τῶν Κ, Λ σημείων μέγιστοι κύκλοι οἱ Ψα, Ωβ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΕΖ κύκλου. καὶ ἐπεὶ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΞ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· αἱ Ηα, αβ, βΞ ἄρα μείζονές εἰσιν ἀλλήλων, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς Ηα. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ Ηα τῆς αβ, ἀλλ' ἡ μὲν Ηα τῇ ΟΚ ἐστιν ὁμοία, ἡ δὲ αβ τῇ ϛΛ· καὶ ἡ ΟΚ ἄρα τῆς ϛΛ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία, τῆς δὲ ΛΡ ἐλάσσων ἡ ὁμοία ἡ ΟΚ. ἔστω τῇ ΟΚ ὁμοία ἡ Λγ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τὸν ΚΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο ὡδιάγίγνεται, ἐν τούτῳ ἓ τὸ Λ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὸν Λγ διελθὸν ἐπὶ τὸ γ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὸν γΟδ. ἐπεὶ οὖν ὁμοία ἐστὶν ἡ ΟΚ περιφέρεια τῇ γΛ, ἀλλὰ ἡ ΟΚ τῇ Ρϛ ὁμοία ἐστί· καὶ ἡ Ρϛ ἄρα τῇ γΛ ἐστιν ὁμοία. καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἡ Ρϛ τῇ γΛ. κοινὴ προσκείσθω ἡ γϛ· ὅλη ἄρα ἡ Ργ τῇ ϛΛ ἐστιν ἴση. ἡ δὲ ΟΚ τῆς ϛΛ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία· καὶ ἡ ΟΚ ἄρα τῆς Ργ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία· ἐν τοίνυν ᾧ χρόνῳ τὸ Κ τὸν ΚΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται, ἤτοι τὸ γ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ γ τὸν γΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παρέσται. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ Κ τὸν ΚΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται, δυώδ ἡ ΒΚ περιφέρεια, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ γ τὸν γΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ ὡδιάγίγνεται, δυώδ ἡ ΚΛ περιφέρεια· ἐν τοίνυν ἄρα χρόνῳ ἡ ΒΚ δυώδ, ἥπερ ἡ ΚΛ. Πάλιν, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς βΞ, ἀλλ' ἡ αβ τῇ ϛΛ ἐστιν ὁμοία· καὶ ἡ ϛΛ ἄρα τῆς βΞ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία· καὶ ἡ ΟΚ τῆς ϛΛ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία· καὶ ἡ ΟΚ ἄρα τῆς Ργ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία· ἐν τοίνυν ᾧ χρόνῳ τὸ Κ τὸν ΚΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται, ἤτοι τὸ γ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ γ τὸν γΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παρέσται. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ Κ τὸν ΚΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται, δυώδ ἡ ΒΚ περιφέρεια, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ γ τὸν γΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ ὡδιάγίγνεται, δυώδ ἡ ΚΛ περιφέρεια· ἐν τοίνυν ἄρα χρόνῳ ἡ ΒΚ δυώδ, ἥπερ ἡ ΚΛ. Πάλιν, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς βΞ, ἀλλ' ἡ αβ τῇ ϛΛ ἐστιν ὁμοία· καὶ ἡ ϛΛ ἄρα τῆς βΞ μείζων ἐστὶν

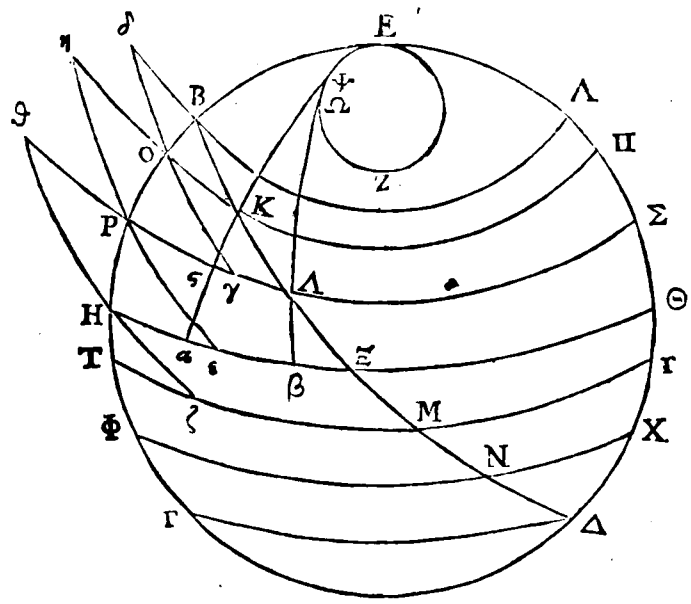
Sint itaque paralleli circuli ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ, ΦΧ, in quibus puncta Κ, Λ, Μ, Ν ferantur; & deſcribantur per puncta Κ, Λ maximi circuli Ψα, Ωβ, qui tangant circulum ΕΖ. quoniam autem [ex hyp.] circumferentiæ ΒΚ, ΚΛ, ΛΞ æquales ad invicem ſunt: circumferentiæ igitur Ηα, αβ, βΞ majores ſunt invicem, initium ſumentes à maxima circumferentia Ηα. & quoniam circumferentia Ηα major eſt ipſa αβ; ſed & ipſa Ηα ſimilis eſt circumferentiæ ΟΚ, & ipſa etiam αβ ſimilis quoque ipſi ϛΛ: circumferentia igitur ΟΚ major eſt circumferentia ϛΛ quam ut ei ſimilis ſit, circumferentia vero ΟΚ minor eſt ipſa ΛΡ quam ut ei ſimilis ſit. ſit ipſi ΟΚ ſimilis circumferentia Λγ: quo igitur tempore punctum Κ incipiens à puncto Κ & circumferentiam ΚΟ percurrens pervenit ad punctum Ο, hoc ipſo tempore & punctum Λ inchoans à puncto Λ & circumferentiam Λγ percurrens pervenit ad punctum γ, & circulus zodiacus poſitionem habebit veluti γΟδ. & quoniam circumferentia ΟΚ ſimilis eſt poſitæ ipſi γΛ; ſed & circumferentia ΟΚ ſimilis eſt ipſi Ρϛ: circumferentia igitur Ρϛ ſimilis eſt etiam ipſi γΛ. & ſunt ejuſdem circuli; quare circumferentia Ρϛ æqualis eſt ipſi γΛ. communis addatur ipſa γϛ: & tota igitur Ργ ipſi ϛΛ æqualis eſt. eſt autem & ΟΚ major ipſa ϛΛ quam ut ei ſimilis ſit: quare & ΟΚ major eſt etiam ipſa Ργ quam ut ei ſimilis ſit: majori igitur tempore punctum Κ circumferentiam ΚΟ percurrens pervenit ad punctum Ο, quam punctum γ incipiens à puncto γ & circumferentiam γΡ pertranſiens pervenit ad punctum Ρ. ſed quo tempore Κ circumferentiam ΚΟ percurrens pervenit ad punctum Ο, ipſa circumferentia ΒΚ occidit; quo vero tempore punctum γ circumferentiam γΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ, circumferentia ipſa ΚΛ quoque occidit: quare majori tempore circumferentia ΒΚ occidit quam ipſa ΚΛ. Rurſus, quoniam circumferentia αβ ipſa ΒΞ major eſt; ſed & ipſa αβ ſimilis eſt circumferentiæ ϛΛ: quare & ϛΛ major eſt circumferen-



Ὅτι δὲ ἡ ΡΛ τῆς ΞΑ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτεται μείζων ἐστὶν ἡ Ηα τῆς αβ, ἡ δὲ αβ τῆς βΞ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ Ηα τῆς βΞ. κοινὴ προσκείσθω ἡ αβ, μείζων ἐστὶν ἡ Ηβ τῆς αΞ· ὥστε καὶ μείζων ἡ ὁμοία ἡ Ηβ τῆς αΞ. ὁμοία δὲ καὶ ἡ Ηβ τῇ ΡΛ· μείζων ἄρα ἡ ὁμοία ἡ ΡΛ τῆς αΞ.

Quod autem circumferentia ΡΛ major ſit ipſa ΞΑ, quam ut ei ſimilis ſit, ita patet: quoniam circumferentia Ηα major eſt ipſa αβ, & αβ major quoque eſt ipſa βΞ: erit & circumferentia Ηα major etiam ipſa βΞ communis addatur αβ: quare Ηβ etiam major eſt ipſa αΞ: major igitur eſt Ηβ circumferentia ipſa αΞ quam ut ei ſimilis ſit. eſt autem ipſa Ηβ ſimilis circumferentiæ ΡΛ: quare & ΡΛ major quoque erit ipſa αΞ quam ut ei ſimilis ſit.

tia βϰ quam ut ei ſimilis ſit: quare ipſa ΡΛ multo major eſt circumferentia βϰ quam ut ei ſit ſimilis, ſed minor circumferentia Ηϰ quam ut ei ſimilis eſſe poſſit. ſit itaque ipſi ΡΛ ſimilis circumferentia ϰϛ: quo igitur tempore punctum Ξ circumferentiam ϰϛ percurrens pervenit ad punctum ϛ, hoc ipſo tempore & punctum Λ circumferentiam ΛΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ, & zodiacus circulus poſitionem habebit veluti ϛΡη. & quoniam ſimilis eſt circumferentia ΡΛ ipſi ϛϰ; ſed & ipſa ΡΛ ſimilis eſt etiam ipſi Ηβ: quare ipſa Ηβ ipſi ϛϰ ſimilis quoque eſt. & ſunt ejuſdem circuli: æqualis igitur eſt circumferentia Ηβ ipſi ϛϰ. communis auferatur ipſa ϛβ: quare & reliqua Ηϛ reliquæ βϰ eſt æqualis. & quoniam ϛΛ major eſt ipſa βϰ quam ut ei ſimilis ſit; eſt autem & ϛΛ æqualis ipſi Ργ; & βϰ etiam eſt æqualis ipſi Ηϛ: quare & ipſa Ργ major eſt quoque circumferentia Ηϛ quam ut ei ſimilis eſſe poſſit: majori igitur tempore punctum γ circumferentiam γΡ percurrens pervenit ad Ρ quam ϛ circumferentiam ϛΗ pertranſiens pervenit ad punctum Η. ſed quo tempore punctum γ circumferentiam γΡ percurrens pervenit ad Ρ, ipſa γΟ circumferentia occidit, hoc eſt ipſa ΚΛ; quo tempore vero punctum ϛ circumferentiam ϛΗ percurrens pervenit ad punctum Η, ipſa ϛΡ occidit, hoc eſt circumferentia Λϰ: quare majori tempore circumferentia ΚΛ occidit quam ipſa Λϰ. Rurſus, quoniam circumferentia ΤΜ major eſt ipſa Ηϰ quam ut ei ſimilis ſit; ſit itaque ipſa Μζ ſimilis ipſi Ηϰ: quo igitur tempore punctum ϰ incipiens ab ϰ circumferentiam ϰΗ percurrens pervenit ad punctum Η, hoc ipſo tempore & punctum Μ circumferentiam Μζ percurrens pervenit ad punctum ζ, & circulus zodiacus poſitionem habebit veluti ζΗϑ. & quoniam in ſphæra duo circuli paralleli ΤΥ, ΡΣ maximi cujuſdam circuli ΒΔ circumferentias æquales ΛΞ, ϰΜ auferunt ad maximum parallelorum circulorum ΗΘ: æqualis igitur eſt circulus ΡΣ circulo ΤΥ. & quoniam in ſphæra æquales & paralleli circuli ΡΣ, ΤΥ maximi cujuſdam circuli ΑΒΓΔ circumferentias ΤΗ, ΗΡ auferunt ad maximum parallelorum circulorum ΗΘ: æqualis igitur eſt circumferentia ΤΗ ipſi ΗΡ. eſt autem ipſa ζΗ æqualis ipſi Ηϑ; (quoniam & Λϰ æqualis eſt ipſi ϰΜ:) quare & recta à puncto ϑ ad punctum Ρ ducta æqualis eſt rectæ à puncto Τ ad punctum ζ ductæ. eſt vero & circulus ΡΣ æqualis circulo ΤΥ: quare [per 28.3.] & circumferentia ϑΡ æqualis eſt ipſi Τζ. ſed circumferentia ϑΡ ſimilis eſt circumferentiæ Ηϛ: quare & ipſa Ηϛ ſimilis quoque eſt circumferen-



ἡ ὁμοία· πολλῷ ἄρα ἡ ΡΛ τῆς βΞ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία, τῆς δὲ ΗΞ ἐλάσσων ἡ ὁμοία. ἔστω ἐν τῇ ΡΛ ὁμοία ἡ Ξε· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Ξ τὴν Ξε περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ ε φ͂ γίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ τὴν ΛΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παρέσται, καὶ ὁ τ͂ ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν εΡη. ἐπεὶ ἐν ὁμοία ἐστὶν ἡ ΡΛ τῇ εΞ, ἀλλ' ἡ ΡΛ τῇ ΗΒ ἐστὶν ὁμοία· καὶ ἡ ΗΒ ἄρα τῇ εΞ ἐστιν ὁμοία. καί εἰσι τ͂ αὐτ͂ κύκλου· ἴση ἄρα ἡ ΗΒ τῇ εΞ περιφερεία. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ εΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ Ηε λοιπῇ τῇ ΒΞ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἡ ϛΛ τῆς βΞ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία, ἴση δὲ ἡ μὲν ϛΛ τῇ Ργ, ἡ δὲ βΞ τῇ Ηε· καὶ ἡ Ργ ἄρα τ͂ Ηε μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ γ τὴν γΡ περιφέρειαν διελθὼν ἐπὶ τὸ Ρ φ͂ γίνεται, ἤπερ τὸ ε τὴν εΗ διελθὸν ἐπὶ τὸ Η φ͂ γίνεται. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ γ τὴν γΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ φ͂ γίνεται, ἡ γΟ περιφέρεια δύσει, τοσοῦτον ἡ ΚΛ περιφέρεια· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ ε τὴν εΗ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η φ͂ γίνεται, δύσει ἡ εΡ, τοσοῦτον ἡ ΛΞ περιφέρεια· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΚΛ δύσει, ἤπερ ἡ ΛΞ. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΤΜ τ͂ Ηϰ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία, ἔστω τῇ ΗΞ ὁμοία ἡ Μζ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Ξ διελθὸν ἀπὸ τ͂ Ξ τὴν ΞΗ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η φ͂ γίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Μ τὴν Μζ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ ζ παρέσται, καὶ ὁ τ͂ ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ζΗϑ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ φ͂ γίλληλοι κύκλοι οἱ ΤΥ, ΡΣ μεγίστ͂ τινος κύκλ͂ τ͂ ΒΔ περιφερείας τὰς ΛΞ, ΞΜ ἴσας ἀφαιρ͂σι φ͂σὶ τὸν μέγιστον τ͂ φ͂ γιλλήλων τὸν ΗΘ· ἴσας ἄρα ἐστὶν ὁ ΡΣ τῷ ΤΥ. ἐπεὶ δ' ἐν σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ φ͂ γίλληλοι κύκλοι οἱ ΡΣ, ΤΥ μεγίστ͂ τινὸς κύκλ͂ τ͂ ΑΒΓΔ περιφερείας τὰς ΤΗ, ΗΡ ἀφαιρ͂σι φ͂σὶ τὸν μέγιστον τ͂ παραλλήλων τὸν ΗΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΤΗ τῇ ΗΡ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ζΗ τῇ Ηϑ ἴση, (ἐπεὶ καὶ ἡ ΛΞ ἴση ἐστὶ τῇ ΞΜ·) ἴση ἄρα καὶ ἡ ἀπὸ τ͂ ϑ ἐπὶ τὸ Ρ τῇ ἀπὸ τ͂ Τ ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἔστιν ἴσος ὁ ΡΣ κύκλος τῷ ΤΥ κύκλῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ϑΡ περιφέρεια τῇ Τζ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ϑΡ τῇ Ηϛ περιφερείᾳ ἐστὶν ὁμοία· καὶ ἡ Ηϛ ἄρα τῇ Τζ ἐστὶν ὁμοία

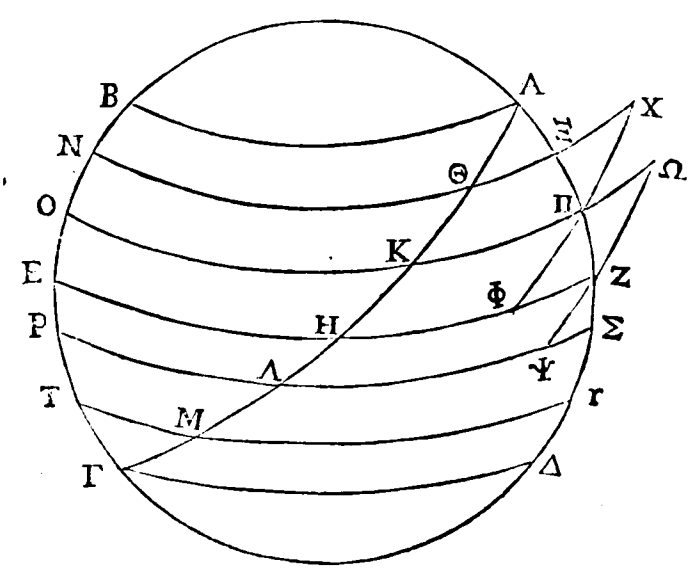
ὁμοία· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ ε τέλους ΕΗ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ ζ τέλους ζΤ διελθὸν ἐπὶ τὸ Τ παραγίνεται. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ ε ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, διώκει ἡ εΡ περιφέρεια, τουτέστιν ἡ ΛΞ περιφέρεια· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ ζ ἐπὶ τὸ Τ παραγίνεται, διώκει ἡ ζΗ περιφέρεια, τουτέστιν ἡ ΞΜ· ἡ ΛΞ ἄρα περιφέρεια τῇ ΞΜ περιφερείᾳ ἐν ἴσῳ χρόνῳ διώκει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΚΞ τῇ ΞΝ ἐν ἴσῳ χρόνῳ διώκει, ὧν ἐπεὶ ἡ ΛΞ τῇ ΞΜ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύναται· λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΜΝ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύναται. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΒΚ τῇ ΝΔ ἐν ἴσῳ χρόνῳ διώκει. καὶ ἐπεὶ ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ΒΚ διώκει ἤπερ ἡ ΚΛ, ἡ δὲ ΚΛ ἤπερ ἡ ΛΞ· ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ ΒΚ διώκει ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΔΝ, ἐν ᾧ δὲ ἡ ΚΛ ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΜΝ, ἐν ᾧ δὲ ἡ ΛΞ ἐν τούτῳ ἡ ΞΜ· καὶ ἡ μὲν ΔΝ ἄρα τῆς ΝΜ ἐν πλείονι χρόνῳ διώκει, ἡ δὲ ΝΜ τῆς ΜΞ.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ἡ μὲν ΛΞ τῇ ΞΜ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει, ἡ δὲ ΚΛ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ ΝΔ.

Καὶ θεωρείσθω τὰ λεγόμενα ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, ᾗ ἔστω τὸ μεσημβρινὸν ἡμικύκλιον ὑπὸ τὸν γῆν τὸ ΑΓ, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΓ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Θ, Κ, Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἔστωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ Θ, Κ, Λ, Μ σημεῖα παράλληλοι κύκλοι οἱ ΝΞ, ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῆς ΚΠ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία, ἔστω τῇ ΚΠ ὁμοία ἡ ΗΦ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τέλους ΚΠ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Π παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Η ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Η τέλους ΗΦ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Φ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὸν ΦΠΧ. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΛΣ τῆς ΗΖ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία, ἔστω τῇ ΗΖ ὁμοία ἡ ΛΨ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Η τὸν ΗΖ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ζ παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ τὸν ΛΨ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ψ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὸν ΨΖΩ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ παντὸς τοῦ Ζ: quo igitur tempore punctum ε inchoans à puncto ε & circumferentiam εΗ percurrens pervenit ad punctum Η, hoc ipso tempore & punctum ζ pertranſiens ζΤ pervenit ad punctum Τ. ſed quo tempore punctum ε pervenit ad punctum Η, ipſa circumferentia εΡ (hoc eſt ΛΞ) occidit: quo autem tempore punctum ζ ad punctum Τ pervenit, ipſa circumferentia ζΗ (hoc eſt ipſa ΞΜ) occidit: quare circumferentia ΛΞ æquali tempore occidit atque ipſa ΞΜ. ſimiliter demonſtrabitur quod & circumferentia ΚΞ æquali tempore occidit ac ipſa ΞΝ; ex quibus quoniam circumferentia ΛΞ æquali tempore occidit ac circumferentia ΞΜ: & reliqua igitur ΚΛ æquali tempore occidit atque ipſa ΜΝ. ſimili modo oſtendetur quod & circumferentia ΒΚ æquali etiam tempore occidit ac circumferentia ΝΔ. & quoniam majori tempore circumferentia ΒΚ occidit quam ipſa ΚΛ, & ΚΛ majori etiam tempore occidit quam ΛΞ; ſed quo tempore ipſa ΒΚ occidit, hoc ipſo tempore & ΔΝ etiam occidit; & quo tempore occidit ipſa ΚΛ hoc ipſo etiam & ΜΝ occidit; præterea quo tempore occidit ipſa ΛΞ hoc ipſo & ΞΜ occidit: quare majori tempore ΔΝ occidit quam ipſa ΝΜ; & ΝΜ majori quoque tempore occidit quam ΜΞ.

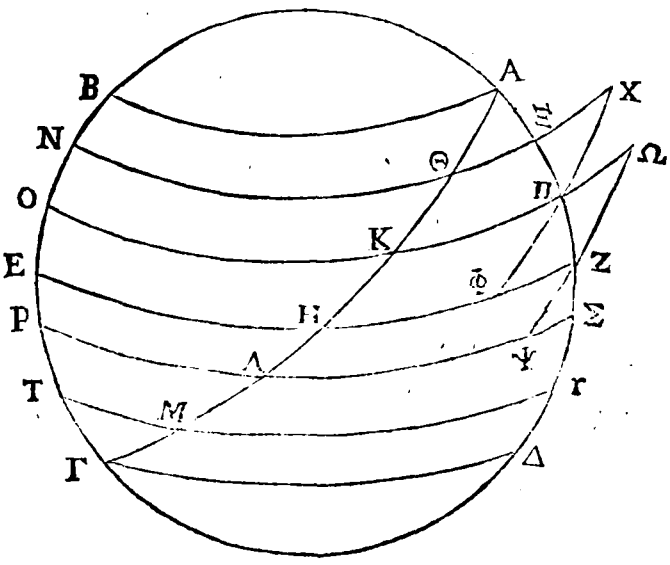
Dico quod & circumferentia quidem ΛΞ æquali tempore oritur ac ipſa ΞΜ; & ipſa ΚΛ etiam æquali tempore oritur ac ipſa ΜΝ; & deniq; quod ipſa ΒΚ æquali etiam tempore oritur ac ΝΔ.

Intelligantur autem in ſecunda figura ea quæ dicta ſunt & explicata prius; & ſit poſt cancrum micirculus ſub terram ΑΓ; & dividatur utraque circumferentia ΑΗ, ΗΓ in tres partes æquales in punctis Θ, Κ, Λ, Μ; & ſint circuli paralleli ΝΞ, ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ in quibus puncta Θ, Κ, Λ, Μ ferantur. & quoniam circumferentia ΖΗ major eſt ipſa ΚΠ quam ut ei ſimilis ſit, ſit ipſi ΚΠ ſimilis circumferentia ΗΦ: quo igitur tempore punctum Κ incipiens à puncto Κ circumferentiam ΚΠ percurrens pervenit ad punctum Π, hoc ipſo tempore & punctum Η incipiens ab Η & circumferentiam ΗΦ percurrens pervenit ad punctum Φ; & zodiacus circulus poſitionem habebit veluti ΦΠΧ. rurſus, quoniam circumferentia ΛΣ major eſt ipſa ΗΖ quam ut ei ſimilis ſit; ſit circumferentiæ ΗΖ ſimilis ipſa ΛΨ: quare quo tempore punctum Η circumferentiam ΗΖ percurrens pervenit ad punctum Ζ, hoc ipſo tempore & punctum Λ circumferentiam ΛΨ percurrens pervenit ad punctum Ψ; & circulus zodiacus poſitionem habebit veluti ΨΖΟ. & quoniam in ſphæra ſunt circuli paralleli



ralleli Ο Π, Ρ Σ, qui maximi cujuſdam circuli Α Γ circumferentias æquales Α Η, Η Κ auferunt ad maximum parallelorum circulorum Ε Ζ: æqualis eſt circulus Ο Π circulo Ρ Σ. & quoniam in ſphæra æquales & paralleli circuli Π Ο, Ρ Σ maximi cujuſdam circuli Α Β Γ Δ circumferentias Σ Ζ, Ζ Π ad maximum parallelorum Ε Ζ auferunt: æqualis eſt circumferentia Σ Ζ ipſi Ζ Π. eſt autem & circumferentia Ψ Ζ æqualis ipſi Ζ Ω: quare recta à puncto Π ad punctum Ω extenſa æqualis eſt rectæ à puncto Ψ uſque ad punctum Σ productæ. & circulus quidem Ο Π circulo Ρ Σ æqualis eſt: & circumferentia igitur Π Ω [per 28.3.] æqualis eſt ipſi Ψ Σ. quoniam vero ſemicirculus à puncto Χ inchoans, qui ad partes Χ, Π tendat, non concurrit cum ſemicirculo à puncto Ω incipiente, qui ad partes Ω, Ζ proficiſcatur; ſimilis igitur eſt circumferentia Π Ω ipſi Φ Ζ. ſed & ipſa Π Ω ipſi Ψ Σ ſimilis etiam eſt; quare & ipſa Φ Ζ circumferentia ipſi Ψ Σ ſimilis quoque eſt: quo igitur tempore punctum Φ circumferentiam Φ Ζ percurrens pervenit ad punctum Ζ, hoc ipſo tempore & punctum Ψ circumferentiam Ψ Σ percurrens pervenit ad punctum Σ. ſed quando quidem Φ jam pervenit ad Ζ, tunc oritur Φ Π, hoc eſt ipſa Κ Η; quando vero Ψ ad Σ accellit, tunc oritur Ψ Ζ, hoc eſt ipſa Λ Η: quare tempore æquali quidem Κ Η & ipſa Λ Η oriuntur. ſimiliter itaque demonſtrabitur quod & ipſæ Κ Θ, Λ Μ & etiam ipſæ Α Θ, Μ Γ æquali tempore oriuntur.

Semicirculi igitur poſt cancrum circumferentiæ æquales temporibus inæqualibus occidunt; & in maximis quidem illæ, quæ prope contactus ſunt tropicorum circulorum; in minoribus autem, quæ deinceps ſequuntur; in minimis vero quæ ſunt prope circulum æquinoctialem; æqualibus denique temporibus & occidunt & oriuntur, quæ ab æquinoctiali circulo æqualiter diſtant.



ἐφάλληλοι κύκλοι οἱ Ο Π, Ρ Σ μεγίστῳ τινὸς κύκλου περιφερείας τῆς Α Γ τὰς Α Η, Η Κ ἴσας ἀφαιρέσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν ὡσαύτως κειμένων τὸν Ε Ζ, ἴσος ἐστὶν ὁ Ο Π τῷ Ρ Σ. ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ ὡσαύτως κείμενοι κύκλοι οἱ Π Ο, Ρ Σ μεγίστῳ τινὸς κύκλου περιφερείας τῆς Α Β Γ Δ τὰς Σ Ζ, Ζ Π ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν ὡσαύτως κειμένων τὸν Ε Ζ, ἴση ἐστὶν ἡ Σ Ζ τῇ Ζ Π. ἔστι δὲ καὶ ἡ Ψ Ζ τῇ Ζ Ω ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Π ἐπὶ τὸ Ω τῇ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὸ Σ. Ὁ δὲ ἴσος ὁ Ο Π κύκλος τῷ Ρ Σ κύκλῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Π Ω τῇ Ψ Σ περιφερείᾳ. ἐπεὶ δὲ ἀσύμπτωτόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ Χ ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Χ, Π μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Ω ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Ω, Ζ μέρη, ὁμοία ἐστὶν ἡ Π Ω περιφέρεια τῇ Φ Ζ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ Π Ω τῇ Ψ Σ ἐστιν ὁμοία· καὶ ἡ Φ Ζ ἄρα τῇ Ψ Σ ἐστιν ὁμοία· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Φ τὴν Φ Ζ περιφέρειαν διῆλθον ἐπὶ τὸ Ζ παραγένηται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ψ τὴν Ψ Σ διῆλθον ἐπὶ τὸ Σ παρέσται. ἀλλ' ὅταν μὲν τὸ Φ ἐπὶ τὸ Ζ παραγένηται, ἀνατέλλει ἡ Φ Π, τουτέστιν ἡ Κ Η· ὅταν δὲ τὸ Ψ ἐπὶ τὸ Σ παραγένηται, ἀνατέλλει ἡ Ψ Ζ περιφέρεια, τουτέστιν ἡ Λ Η· ἡ Κ Η ἄρα τῇ Λ Η ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ Κ Θ τῇ Λ Μ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει, ἡ δὲ Α Θ τῇ Μ Γ.

Τὰ ἄρα μετὰ τὸν καρκῖνον ἡμικύκλια αἱ ἴσαι περιφέρειαι ἀνίσοις χρόνοις διώσι, καὶ ἐν τοῖς μὲν, αἱ πρὸς ταῖς συναφαῖς τῶν τροπικῶν· ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ ἑξῆς τούτων· ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ· ἐν ἴσοις δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου καὶ διώσι καὶ ἀνατέλλουσι.

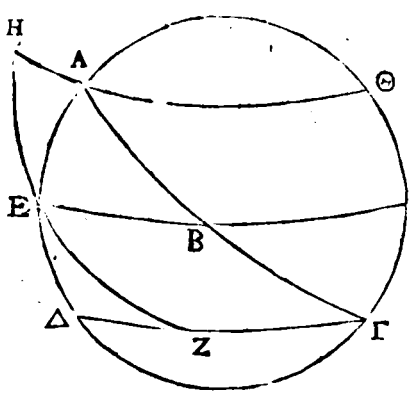
SCHOLIUM EX ABUNDANTI.

Eadem manente deſcriptione, dico quod circumferentia Α Β æquali tempore occidit ac circumferentia Β Γ. quoniam enim Γ Δ major eſt ipſa Β Ε quam ut ei ſimilis ſit; ponatur ipſi Β Ε ſimilis circumferentia Γ Ζ; & circulus zodiacus poſitionem habeat veluti Ζ Ε Η. & quoniam Α Β ipſi Β Γ eſt æqualis: & circulus igitur Α Θ æqualis eſt circulo Γ Δ: quare & circumferentia Α Ε æqualis eſt ipſi Ε Δ. eſt autem Ζ Ε æqualis circumferentiæ Ε Η; quoniam & Γ Β ipſi Β Α æqua-

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΣΟΥ.

Τῆς αὐτῆς καταγραφῆς μενούσης, λέγω ὅτι ἡ Α Β τῇ Β Γ ἐν ἴσῳ χρόνῳ διώσει. ἐπεὶ γὰρ ἡ Γ Δ τῆς Β Ε μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία, κείσθω τῇ Β Ε ὁμοία ἡ Γ Ζ, καὶ ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν Ζ Ε Η. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Α Β τῇ Β Γ, ἴσος ἐστὶν ὁ Α Θ κύκλος τῷ Γ Δ κύκλῳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ Α Ε τῇ Ε Δ. ἔστι δὲ καὶ ἡ Ζ Ε τῇ Ε Η ἴση, ἐπεὶ καὶ ἡ Γ Β τῇ Β Α ἴση· ἔστι

ἔστιν ἄρα καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Α τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ζ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΗ περιφέρεια τῇ ΔΖ περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ ΑΗ τῇ ΕΒ ἐστιν ὁμοία· καὶ ἡ ΕΒ ἄρα τῇ ΔΖ ἐστιν ὁμοία· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Β ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Β τὴν ΒΕ διελθὸν ἐπὶ τὸ Ε παραγίγνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ζ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ζ τὴν Ζ Δ διελθὸν ἐπὶ τὸ Δ παρέσται. ἀλλ' ὅταν μὲν τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε παραγένηται δύεται ἡ ΒΑ περιφέρεια, ὅταν δὲ τὸ Ζ ἐπὶ τὸ Δ παραγένηται δύεται ἡ ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΒΓ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύσει.

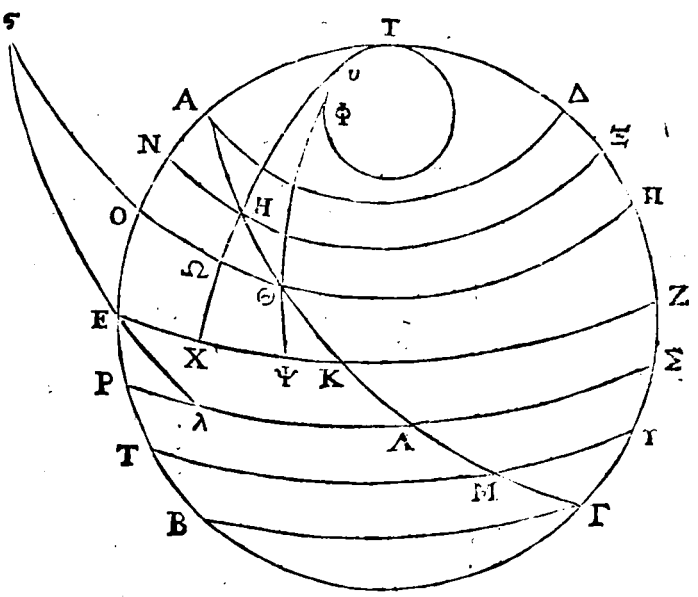


lis est: recta igitur à puncto Η ad punctum Α æqualis est rectæ à puncto Δ ad punctum Ζ ductæ: quare & circumferentia ΑΗ æqualis est circumferentiæ ΔΖ. sed circumferentia ΑΗ similis est ipsi ΕΒ: & circumferentia igitur ΕΒ similis quoque est circumferentiæ ΔΖ: quo igitur tempore punctum Β incipiens à puncto Β circumferentiam ΒΕ percurrens pervenit ad punctum Ε, hoc ipso tempore & punctum Ζ inchoans à puncto Ζ & ipsam ΖΔ percurrens pervenit ad Δ. sed quo quidem tempore Β ad Ε pervenit, ipsa ΒΑ occidit; & quando Ζ ad Δ pervenit, tunc & ipsa ΖΕ, hoc est ipsa ΓΒ, occidit: quare circumferentia ΑΒ æquali tempore occidit quo ipsa ΒΓ.

ΑΛΛΩΣ

Ἐστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, ᾧ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, ζωδιακὸς δὲ ἡμικύκλιον τὸ μετὰ τὸν καρκῖνον ἔστω ὑπὲρ γῆς τὸ ΑΓ, ᾧ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν μέρη τὰ Δ, Γ, δυτικὰ δὲ τὰ Α, Β, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ἔστω ὁ ΕΖ, καὶ διῃρήσθω τὸ ΑΓ ἡμικύκλιον εἰς τὰ ἐν αὐτῷ ζώδια κατὰ τὰ Η, Θ, Λ, Μ σημεῖα, καὶ γεγράφθωσαν ὑπὸ τῶν ἀλλήλοις κύκλοι οἱ ΝΗΞ, ΟΘΠ, ΡΛΣ, ΤΜΥ καθ' ὧν φέρεται τὰ Η, Θ, Λ, Μ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐν πλείονι μὲν χρόνῳ δύσουσιν αἱ ΑΗ, ΜΓ περιφέρειαι, ἐν ἐλάττονι δὲ αἱ ΗΘ, ΛΜ, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ αἱ ΘΚ, ΛΚ, ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ αἱ ἴσαι ἀπέχουσι τῶν ἰσημερινῶν.

Ἐστω μέγιστος ἀεὶ φανερὸς ὁ ΤυΦ, καὶ γεγράφθωσαν διὰ τῶν Η, Θ μέγιστοι κύκλοι οἱ υΗΩΧ, ΦΘΨ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΤυΦ κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτοι εἶναι τὰ ἀπὸ τῶν υ, Φ ἡμικύκλια ὡς ἐπὶ τὰ ΗΧ, ΘΨ μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Τ ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Τ, Α μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΝ περιφέρεια ἑκατέρᾳ τῶν ΩΟ, ΧΕ, ἡ δὲ ΘΩ τῇ ΨΧ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Η τὴν ΗΝ περιφέρειαν διαπορεύεται καὶ τὸ Ω τὴν ΩΟ. ἀλλ' ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Η τὴν ΗΝ περιφέρειαν διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύ-

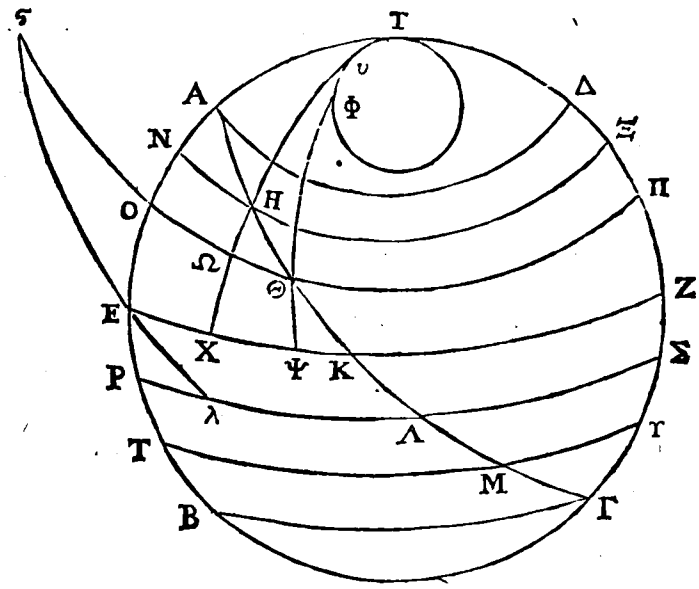


ALITER.

Sit in mundo circulus horizon ΑΒΓΔ; tropicus æstivus sit ΑΔ; hybernus autem sit ΒΓ: zodiaci semicirculus post cancrum supra terram sit ΑΓ; sint autem partes orientales Δ, Γ; occidentales vero Α, Β; æquinoctialis circulus sit ΕΖ; & dividatur semicirculus ΑΓ in signa, quæ sunt in ipso, in punctis Η, Θ, Λ, Μ; & describantur circuli paralleli ΝΗΞ, ΟΘΠ, ΡΛΣ, ΤΜΥ, in quibus puncta Η, Θ, Λ, Μ, ferantur: dico quod majori tempore circumferentiæ ΑΗ, ΜΓ occidunt; minori vero ΗΘ, ΛΜ; & denique minimo tempore ΘΚ, ΛΚ circumferentiæ occidunt; æquali vero tempore quæ ab æquinoctiali circulo æque distant.

Sit maximus semper-apparentium circulus ΤυΦ; & describantur per puncta Η, Θ maximi circuli υΗΩΧ, ΦΘΨ, qui circulum ΤυΦ tangant, ita ut semicirculi, qui à punctis υ, Φ inchoant qui ad partes ΗΧ, ΘΨ tendunt, non concurrant cum semicirculo à puncto Τ inchoante, qui ad partes Τ, Α proficiscitur: quare circumferentia quidem ΗΝ utrique ipsarum ΩΟ, ΧΕ similis est; & similiter circumferentia ΘΩ ipsi ΨΧ etiam similis est: æquali igitur tempore punctum Η circumferentiam ΗΝ percurrit, quo punctum Ω ipsam ΩΟ pertranſit. sed tempus in quo punctum Η circumferentiam ΗΝ percurrit, tempus est in quo cir-

cumferentia H A occidit: & tempus igiturin quo punctum Ω circumferentiam Ω O percurrit, idem eſt cum tempore quo occidit circumferentia H A. rurſus, quoniam tempus in quo punctum Θ percurrit circumferentiam Θ O, tempus eſt quo occidit circumferentia Θ A; ex quo ſi auferatur tempus in quo punctum Ω ipſam Ω O percurrit, quod quidem idem eſt cum tempore in quo occidit circumferentia H A: reliquum igitur tempus,in quo punctum Θ ipſam Θ Ω percurrit, idem eſt cum tempore in quo occidit ipſa H Θ circumferentia. eſt autem [ex modo oſtenſis] ſimilis ipſa Ω O ipſi X E & Ω Θ etiam eſt ſimilis ipſi X Ψ: igitur tempus in quo punctum X percurrit circumferentiam X E, tempus eſt quo ipſa H A occidit; & tempus in quo punctum Ψ ipſam Ψ X percurrit, tempus eſt quo circumferentia Θ H occidit. eadem ratione jam tempus quidem in quo punctum K ipſam K Ψ pertranſit,tempus eſt quo occidit K Θ circumferentia.& quoniam in ſphæra maximus circulus A B Γ Δ quendam circulum ex parallelis tangit, ſcilicet Τ υ Φ, & ipſum A B Γ Δ ſecant maximi circuli E Z, A Γ, quorum quidem E Z [ex hyp.] maximus eſt parallelorum, & A Γ obliquus eſt ad parallelos circulos; & ſumptæ ſunt circumferentiæ A H, H Θ, Θ K in obliqui circuli circumferentia æquales deinceps ad eaſdem partes maximi parallelorum; & per puncta H,Θ deſcripti ſunt maximi circuli υ H X, Φ Θ Ψ tangentes circulum Τ υ Φ: major igitur eſt circumferentia E X ipſa X Ψ: & circumferentia X Ψ major quoque eſt ipſa Ψ K: quare majori tempore X circumferentiam X E percurrit quam Ψ ipſam Ψ X; & Ψ majori quoque tempore circumferentiam Ψ X percurrit quam K ipſam K Ψ. ſed tempus quidem in quo X percurrit circumferentiam X E, tempus eſt quo H ipſam H N pertranſit, id eſt in quo occidit circumferentia A H; tempus autem in quo Ψ pertranſit circumferentiam Ψ X, tempus eſt in quo punctum Θ circumferentiam Θ Ω percurrit, id eſt tempus in quo occidit circumferentia Θ H; & tempus in quo punctum K ipſam K Ψ pertranſit, tempus eſt in quo occidit circumferentia K Θ: majori igitur tempore circumferentia A H occidit quam ipſa H Θ, & H Θ majori quam O K.



Dico jam quod circumferentiæ quæ ab æquinoctiali circulo æque diſtant, temporibus æqualibus occidunt.

Punctum ſiquidem K, cum jam pervenerit ad

νει ἡ Η Α περιφέρεια· καὶ ὁ χρόνος ἄρα ἐν ᾧ τὸ Ω τ Ω Ο διαπορεύε) ὁ αὐτὸς ἐστι τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ δυϊσει ἡ Η Α περιφέρεια. πάλιν, ἐπεὶ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Θ τὼ Θ Ο διαπορεύε) ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δυϊσει ἡ Θ Α περιφέρεια, ὧν ἀφαιρεῖ) ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ω τὼ Ω Ο διαπορεύε), ὁ αὐτὸς ὢν τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ δυϊ ἡ Η Α περιφέρεια· λοιπὸς ἄρα ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Θ τὼ Θ Ω διαπορεύεται, ὁ αὐτός ἐστι τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ δυϊ ἡ Η Θ περιφέρεια. ὁμοία δέ ἐστιν ἡ μὲν Ω Ο τῇ Χ Ε, ἡ δὲ Ω Θ τῇ Χ Ψ· καὶ ὁ χρόνος ἄρα ἐν ᾧ τὸ Χ τὼ Χ Ε διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ὲν ᾧ δυϊ ἡ Η Α περιφέρεια· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ψ τὼ Ψ Χ διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ὲν ᾧ δυϊσει ἡ Θ Η περιφέρεια. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ χρόνος ὲν ᾧ τὸ Κ τὴν Κ Ψ διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ὲν ᾧ δυϊσει ἡ Κ Θ περιφέρεια. Ἐπεὶ ὲν ὑφαίρᾳ ὁ μέγιστος κύκλος Α Β Γ Δ ἐφάπτεταί τινος κύκλου τῶν παραλλήλων τὸ Τ υ Φ, καὶ τὸν Α Β Γ Δ τέμνουσι οἱ μέγιστοι κύκλοι αἱ Ε Ζ, Α Γ, ὧν ὁ μὲν Ε Ζ μέγιστος τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ Α Γ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους· καὶ ἀπειλημμέναι εἰσὶ περιφέρειαι αἱ Α Η, Η Θ, Θ Κ ἀπὸ τῆς τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφερείας ἴσαι ἑξῆς ἀπὸ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ διὰ τῶν Η, Θ σημείων γεγραμμέναι εἰσὶ μέγιστοι κύκλοι οἱ υ Η Χ, Φ Θ Ψ ἐφαπτόμεναι τοῦ Τ υ Φ κύκλου· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν Ε Χ περιφέρεια τῆς Χ Ψ περιφερείας, ἡ δὲ Χ Ψ τῆς Ψ Κ· ὲν ὡσαύτως ἄρα χρόνῳ τὸ Χ τὼ Χ Ε διαπορεύεται ἥπερ τὸ Ψ τὼ Ψ Χ, καὶ τὸ Ψ τὼ Ψ Χ ὲν πλείονι χρόνῳ διαπορεύεται ἥπερ τὸ Κ τὼ Κ Ψ. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Χ τὼ Χ Ε διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Η τὼ Η Ν περιφέρειαν διαπορεύεται, τυγχάνει ἐν ᾧ δυϊσει ἡ Α Η περιφέρεια· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ψ τὼ Ψ Χ διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Θ τὼ Θ Ω διαπορεύεται, τυγχάνει ὁ χρόνος ἐν ᾧ δυϊσει ἡ Θ Η περιφέρεια· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Κ τὼ Κ Ψ διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δυϊσει ἡ Κ Θ περιφέρεια· ἐν ὡσαύτως ἄρα χρόνῳ δυϊσει ἡ μὲν Α Η περιφέρεια τὴν Η Θ περιφερείας, ἡ δὲ Η Θ τῆς Θ Κ.

Λέγω δὴ ὅτι ἐν ἴσοις χρόνοις αἱ ἴσαι ἀπέχουσι τοῦ ἰσημερινοῦ δύσεσιν.

Παραγεγράφθω γὰρ δὴ τοῦ Κ σημείου ἐπὶ τὸ Ε

σημεῖον,

σημεῖον, ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ς Ε λ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ς Ε περιφέρεια τῇ Ε λ περιφερείᾳ, ἔστι δὲ μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ Ε Ζ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ς Θ Π κύκλος τῷ Ρ Λ Σ κύκλῳ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Ο Ε περιφέρεια τῇ Ε Ρ περιφερείᾳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ς Ε τῇ Ε λ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ς ἐπὶ τὸ Ο τῇ ἀπὸ τοῦ Ρ ἐπὶ τὸ λ. καί εἰσιν ἴσοι κύκλοι οἱ ς Θ Π, Ρ Λ Σ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ς Ο περιφέρεια τῇ Ρ λ περιφερείᾳ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ λ σημεῖον τὴν λ Ρ διαπορεύεται καὶ τὸ Ο τὴν Ο ς. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ λ τὴν λ Ρ διαπορεύεται ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύει ἡ λ Ε περιφέρεια, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ο τὴν Ο ς διαπορεύεται ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ δύνει ἡ Ε ς περιφέρεια· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ δύσονται αἱ λ Ε, Ε ς περιφέρειαι. ἴση δὲ ἡ μὲν λ Ε τῇ Λ Κ, ἡ δὲ Ε ς τῇ Κ Θ· αἱ Λ Κ, Κ Θ ἄρα ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύσονται. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ Μ Κ, Κ Η ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύσονται· ὧν αἱ Λ Κ, Κ Θ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύσονται· λοιπαὶ ἄρα αἱ Μ Λ, Θ Η ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύσονται. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ Μ Γ, Α Η περιφέρειαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύσονται. καὶ ἐπεὶ ἐν πλείονι χρόνῳ δύνει ἡ Α Η περιφέρεια ἤπερ ἡ Η Θ, καὶ ἡ Η Θ ἤπερ ἡ Θ Κ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ δύνει καὶ ἡ Γ Μ περιφέρεια ἤπερ ἡ Μ Λ, καὶ ἡ Μ Λ ἤπερ ἡ Λ Κ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ δύσονται αἱ Α Η, Μ Γ περιφέρειαι, ἐν ἐλάσσονι δὲ αἱ Η Θ, Λ Μ, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ αἱ Θ Κ, Λ Κ, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τῷ ἰσημερινῷ καὶ δύσονται καὶ ἀνατελοῦσι. τῆς γὰρ αὐτῆς μενούσης κατασκευῆς, ἐὰν μεταστρέψωμεν τὸν ζωδιακὸν, καὶ ποιήσωμεν τὸ Α Γ ἡμικύκλιον τῷ ζωδιακῷ ὑπὸ γῆν, ἡ αὐτὴ ἀποδειχθήσεται, καὶ δειχθήσονται αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τῷ ἰσημερινῷ ἐν ἴσῳ χρόνῳ καὶ ἀνατελοῦσαι.

punctum Ε, circulus zodiacus positionem habebit veluti ς Ε λ. & quoniam æqualis est circumferentia ς Ε ipsi Ε λ, & [ex hyp.] circulus Ε Ζ maximus est parallelorum circulorum: æqualis igitur est circulus ς Θ Π circulo Ρ Λ Σ: quare & circumferentia Ο Ε ipsi Ε Ρ æqualis est. est autem & ς Ε æqualis ipsi Ε λ: quare & recta à puncto ς ad punctum Ο ducta æqualis est rectæ à puncto Ρ ad punctum λ ductæ. & sunt circuli ς Θ Π, Ρ Λ Σ æquales: similis igitur est circumferentia ς Ο ipsi Ρ λ: quare tempore æquali punctum λ circumferentiam λ Ρ percurrit, atque punctum Ο ipsam Ο ς pertransit. sed tempus quidem in quo λ ipsam λ Ρ percurrit, tempus est quo circumferentia λ Ε occidit; & tempus in quo punctum Ο circumferentiam Ο ς pertransit, æquale est tempori in quo occidit circumferentia Ε ς: quare tempore æquali circumferentiæ λ Ε, Ε ς occidunt. est autem quidem circumferentia λ Ε æqualis ipsi Λ Κ, & Ε ς est etiam æqualis ipsi Κ Θ: quare Λ Κ, Κ Θ tempore æquali occidunt. similiter ostendetur quod & circumferentiæ Μ Κ, Κ Η æquali etiam tempore occidunt; ex quibus ipsæ Λ Κ, Κ Θ æquali tempore occidunt: & reliquæ igitur Μ Λ, Θ Η æquali tempore occidunt. simili modo jam ostendetur quod & circumferentiæ Μ Γ, Α Η æquali tempore occidunt. & quoniam [ex mox ostensis] majori tempore circumferentia Α Η occidit quam ipsa Η Θ, & ipsa Η Θ majori etiam tempore occidit quam Θ Κ: quare majori tempore occidit circumferentia Γ Μ quam ipsa Μ Λ; & similiter ipsa Μ Λ etiam tempore majori occidit quam ipsa Λ Κ: majori igitur tempore circumferentiæ Α Η, Μ Γ occidunt; minori autem Η Θ, Λ Μ; denique minimo tempore Θ Κ, Λ Κ; & tandem quæ ab æquinoctiali circulo æque distant, tempore æquali & occidunt & oriuntur. eadem enim manente descriptione, si convertamus zodiacum, & faciamus Α Γ dimidium zodiaci sub terram, eadem procedet demonstratio; & ostendetur circumferentias, quæ æque distant ab æquinoctiali, & æquali tempore oriri.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιγ'.

Τῶν μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικυκλίων αἱ ἴσαι περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσι, καὶ ἐν πλείστοις μὲν αἱ πρὸς ταῖς συναφαῖς τῶν τροπικῶν, ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ ἐξῆς τούτων, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ, ἐν ἴσοις δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου καὶ ἀνατέλλουσιν καὶ δύνουσιν.

Theorema XIII.

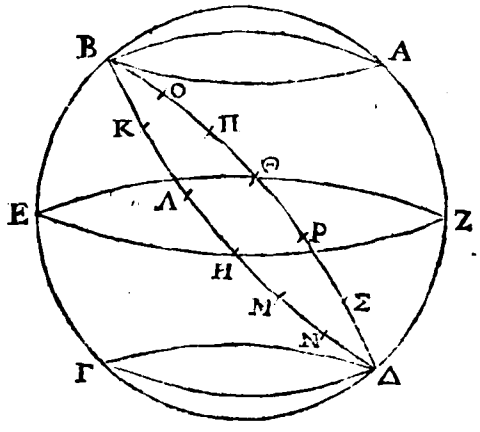
Circumferentiæ æquales semicirculi, qui post capricornum est, temporibus inæqualibus oriuntur; ac majori quidem tempore oriuntur quæ prope contactus sunt tropicorum circulorum; minori vero quæ deinceps sequuntur; minimo autem tempore quæ sunt prope circulum æquinoctialem; denique tempore æquali oriuntur & occidunt quæ ab æquinoctiali circulo æqualiter distant.

Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ Α Β Γ Δ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ Β Α, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ Γ Δ, καὶ ἔστω τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικύκλιον ὑπὸ γῆν τὸ Δ Η Β, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ὁ Ε Θ Ζ Η, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν Β Η, Η Δ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα· λέγω ὅτι

SIT circulus horizon Α Β Γ Δ, tropicus æstivus sit Β Α, hybernus sit Γ Δ; & sit post capricornum sub terram semicirculus Δ Η Β, æquinoctialis circulus sit Ε Θ Ζ Η, & dividatur utraque circumferentia Β Η, Η Δ in tres partes æquales in punctis Κ, Λ, Μ, Ν: dico quod

circumferentiæ BK, KΛ, ΛH, HM, MN, NΔ temporibus oriuntur inæqualibus; & quod majori quidem tempore BK, NΔ, minori vero KΛ, MN, minimo denique ipſæ ΛH, HM circumferentiæ oriuntur; at tempore æquali circumferentiæ quidem BK, NΔ, item KΛ, MN, & tandem ipſæ ΛH, HM oriuntur.

Sit quidem ſupra terram poſt capricornum ſemicirculus BΘΔ; & dividatur utraque circumferentia BΘ, ΘΔ in tres partes æquales in punctis O, Π, P, Σ. & quoniam [per 12. Phæn.] majori tempore circumferentia BO occidit quam ipſa OΠ; ſed [per 11. Phæn.] quo tempore circumferentia BO occidit & ipſa ΔN oritur, & quo tempore OΠ occidit & ipſa MN oritur: majori igitur tempore NΔ oritur quam ipſa NM. rurſus, quoniam circumferentia OΠ majori tempore occidit quam ΠΘ; ſed quo tempore OΠ occidit & ipſa NM oritur, & quo tempore ΠΘ occidit & circumferentia HM oritur: quare majori tempore circumferentia NM oritur quam ipſa MH. eadem ratione & BK majori tempore oritur quam KΛ, & KΛ quam ipſa ΛH. & quoniam quo tempore ΠΘ occidit, hoc eodem tempore & ΘP; ſed quo tempore ΠΘ occidit & ipſa MH oritur, & quo tempore ΘP occidit & HΛ oritur: quare MH circumferentia æquali tempore oritur atque ipſa HΛ. eadem ratione demonſtrabitur quod & KΛ æquali tempore oritur atque ipſa MN; & BK æquali tempore atque ipſa ΔN. rurſus, quoniam quo tempore circumferentia ΠΘ oritur, & eodem tempore etiam ipſa ΘP oritur; ſed quo tempore ΠΘ oritur & MH occidit; & quo tempore ΘP oritur & ipſa HΛ occidit: quare tempore æquali ΛH occidit atque ipſa HM. ſimiliter oſtendetur, quod circumferentia KΛ eodem tempore occidit quo ipſa MN; & item BK eodem quo ipſa ΔN.



αἱ BK, KΛ, ΛH, HM, MN, NΔ περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσι, καὶ ἐν πλείστοις μὲν αἱ BK, NΔ, ἐν ἐλάττοσι δὲ αἱ KΛ, MN, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ ΛH, HM, ἐν ἴσοις δὲ ἡ μὲν BK τῇ NΔ, ἡ δὲ KΛ τῇ MN, ἡ δὲ ΛH τῇ HM ἀνατέλλουσιν.

Ἐστω γὰρ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικύκλιον ὑπὲρ γῆς τὸ BΘΔ, καὶ διηρήσθω ἑκατέρα τῶν BΘ, ΘΔ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ O, Π, P, Σ σημεῖα. καὶ ἐπεὶ ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ BO δύσει ἤπερ ἡ OΠ, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ BO δύσει ἡ ΔN ἀνατέλλει, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ OΠ δύσει ἡ MN ἀνατέλλει· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ NΔ ἀνατέλλει ἤπερ ἡ NM· πάλιν, ἐπεὶ ἡ OΠ ἐν πλείονι χρόνῳ δύσει ἤπερ ἡ ΠΘ, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ OΠ δύνει ἡ NM ἀνατέλλει, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΠΘ δύσει ἡ HM ἀνατέλλει· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ NM ἀνατέλλει ἤπερ ἡ MH. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν BK τῆς KΛ ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει, ἡ δὲ KΛ τῆς ΛH. καὶ ἐπεὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΠΘ δύσει ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΘP, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ ΠΘ δύσει ἡ MH ἀνατέλλει, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΘP δύσει ἡ HΛ ἀνατέλλει· καὶ ἡ MH ἄρα τῇ HΛ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν KΛ τῇ MN ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει, ἡ δὲ BK τῇ ΔN. πάλιν, ἐπεὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΠΘ ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΘP, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ ΠΘ ἀνατέλλει ἡ MH δύνει, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΘP ἀνατέλλει ἡ HΛ δύνει· ἡ ΛH ἄρα τῇ HM ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν KΛ τῇ MN ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει, ἡ δὲ BK τῇ ΔN.

DEFINITIO.

PErmutatio conſpicui hemiſphærii dicitur, quando antegrediente circumferentiæ puncto quod in ortu exiſtit, conſequens punctum oriens & percurrens totum conſpicuum hemiſphærium ad occaſum pervenit; hoc eſt quando circumferentia, quæ duobus intercipitur punctis, & antecedente & conſequente, ab hemiſphærio conſpicuo ad hemiſphærium occultum venit; & è contra, permutatio hemiſphærii occulti.

ΟΡΟΣ.

Ἐξαλλαγὴ φανερᾶς ἡμισφαιρείας ἐστίν, ὅταν τῷ προηγουμένῳ σημείῳ τῆς περιφερείας ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς ὄντος τὸ ἑπόμενον ἀνατεῖλον καὶ διελθὸν ὅλον τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἀπὸ τῆς δύσεως γένηται· τουτέστιν ὅταν ἀπὸ τοῦ ἀφανοῦς ἡμισφαιρείου εἰς τὸ ἀφανὲς ἐλθεῖν τὴν περιφέρειαν τὴν μεταξὺ τῶν δύο σημείων τοῦ ἡγουμένου καὶ τοῦ ἑπομένου· καὶ ἀνάπαλιν, ἐξαλλαγὴ ἀφανοῦς ἡμισφαιρείου.

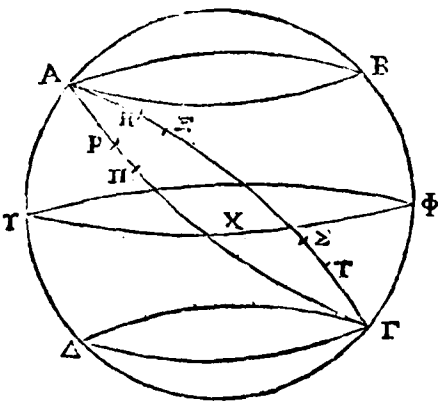
ΛΗΜΜΑ.

Τῶ τῶν ζωδίων κύκλω τῶν ἴσων ἀφιερεμένων καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῆς τροπικῆς συναφῆς ὁποτερασοῦν, ἐν ᾧ ἡ ἑτέρα δύεται ἡ ἑτέρα ἀνατέλλει, καὶ ἀνάπαλιν.

LEMMA.

Ex æqualibus zodiaci circuli circumferentiis & æque distantibus ab alterutro tropicorum contactu, quo tempore altera occidit & altera oritur; & contra.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ ΑΒ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΓΔ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος ἔστω ὁ ΑΠΓΗ, καὶ ἔστω ἴση ὁ ΠΡ τῇ ΞΗ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ΠΡ δύνει ἡ ΞΗ ἀνατέλλει.



Εἰλήφθω γὰρ τῇ ΠΡ ἴση τε καὶ ἀπεναντίον ἡ ΣΤ, καὶ μεταξὺ τῶν ΞΗ, ΣΤ ὁ ἰσημερινὸς ἔστω ΥΧΦ. καὶ ἐπεὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΠΡ δύνει ἡ ΣΤ ἀνατέλλει, ἀλλ' ἐν ᾧ ἡ ΣΤ ἀνατέλλει ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΗΞ, ἴσον γὰρ ἀπέχουσι τοῦ ἰσημερινοῦ· καὶ ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΠΡ δύνει ἡ ΗΞ ἀνατέλλει.

SIT in mundo horizon circulus ΑΒΓΔ; tropicus æstivus sit ΑΒ, hybernus autem sit ΓΔ; zodiacus circulus sit ΑΠΓΗ; & sit circumferentia ΠΡ æqualis circumferentiæ ΞΗ: dico quod quo tempore circumferentia ΠΡ occidit, & ipsa ΞΗ oritur.

Sumatur quidem circumferentiæ ΠΡ æqualis & opposita circumferentia ΣΤ; & inter circumferentias ΞΗ, ΣΤ sit circulus æquinoctialis ΥΧΦ. & quoniam [per 12. Phæn.] quo tempore ΠΡ circumferentia occidit, & ipsa ΣΤ oritur; sed [per 13. Phæn.] quo tempore circumferentia ΣΤ oritur & hoc etiam tempore circumferentia ΗΞ oritur; æqualiter enim distant ab æquinoctiali circulo: quare quo tempore ΠΡ occidit, & ipsa ΗΞ oritur.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιδ'.

Τῶ τῶν ζωδίων κύκλω αἱ ἴσαι περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσοις χρόνοις ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ἔγγιον τῆς συναφῆς θερινῆς τροπικῆς τῆς ἀπώτερον, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι θερινῆς τροπικῆς ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἡμικυκλίων, ὅταν ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ ᾖ τοῦ τε ἀρκτικοῦ καὶ θερινοῦ τροπικοῦ.

THEOREMA XIV.

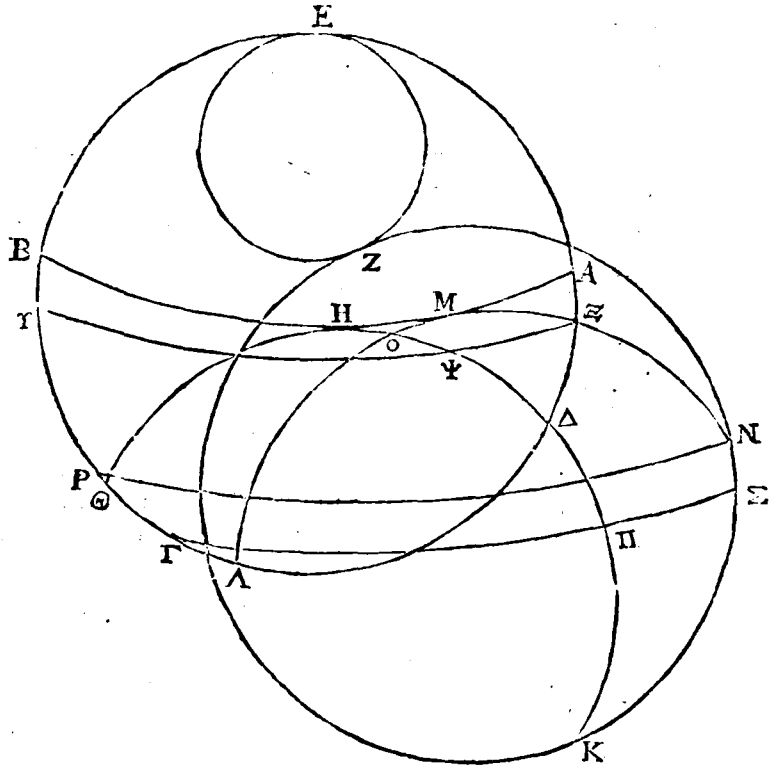
Zodiaci circuli circumferentiæ æquales temporibus æqualibus non permutant hemisphærium conspicuum: sed majori tempore illa quæ contactui æstivi tropici propinquior fuerit, quam ea quæ remotior est ab eo: in tempore vero æquali quæ à tropico æstivo æque distant in utroque semicirculo; quando polus horizontis fuerit inter arcticum circulum & æstivum tropicum situs.

Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ φανερῶν ἔστω ὁ ΕΖ, θερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΑ, καὶ ἔστω ὁ τοῦ ΑΒΔΓ πόλος μεταξὺ τοῦ ΕΖ, ΒΑ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος ποτὲ μὲν θέσιν ἐχέτω ὡς τὸν ΘΗΚ, ποτὲ δὲ ὡς τὸν ΛΜΝ, καὶ ἤχθω ἡ ΗΚ μὴ μείζων ἡμικυκλίου, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Κ σημείου μέγιστος κύκλος ὁ ΚΝΖ ἐφαπτόμενος τοῦ ΕΖ. ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τινὸς ΕΖ ἐφάπτεται, ἕτερον δὲ τούτῳ παράλληλον τέμνει τὸν ΒΑ, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΑΒΓΔ πόλος μεταξὺ τῶν ΑΒ, ΕΖ, καὶ γεγραμμένοι εἰσὶ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΘΗΚ, ΛΜΝ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΒΑ, μείζων ἐστὶν ἡ ΟΜΞ περιφέρεια τῆς ΟΔ περιφερείας. πάλιν, ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τινὸς τοῦ ΕΖ ἐφάπτεται, ἕτερον δὲ τούτῳ παράλληλον τὸν ΒΑ τέμνει, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου πόλος μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΒΑ· καὶ γεγράφθαι μέγιστος κύκλος ὁ ΖΝΚ

SIT horizon circulus ΑΒΓΔ; maximus autem eorum qui semper apparent sit circulus ΕΖ; æstivus tropicus sit ΒΑ; & sit polus circuli ΑΒΓΔ inter ΕΖ, ΒΑ; zodiacus vero circulus positionem habeat aliquando ut ΘΗΚ, interdum vero ΑΜΝ; & sumatur circumferentia ΗΚ quæ non sit major semicirculo; & per punctum Κ describatur maximus circulus ΚΝΖ tangens circulum ΕΖ. & quoniam in sphæra maximus circulus ΑΒΓΔ circulum quendam ΕΖ tangit, alterum autem ipsi parallelum ΒΑ secat; & [ex hyp.] est circuli ΑΒΓΔ polus inter ΑΒ, ΕΖ; & sunt descripti maximi circuli ΘΗΚ, ΛΜΝ tangentes circulum ΒΑ: circumferentia igitur ΟΜΞ major est circumferentia ΟΔ. rursus, quoniam in sphæra maximus circulus ΑΒΓΔ circulum quendam ΕΖ tangit, alium autem huic parallelum ΒΑ secat; & est circuli ΑΒΓΔ polus inter circulos ΕΖ, ΒΑ; & est descriptus maximus circulus

ZNK tangens circulum EZ: circuli igitur ZNK polus eſt inter circulos EZ, BA: quare ipſius alter polus eſt inter circulos æquales & parallelos ipſis EZ, BA. igitur KO major eſt quam OMN, ex quibus ipſa ΞMO major eſt ipſa OΔ: & reliqua igitur ΔK major eſt ΞN. ponatur ipſi NΞ æqualis ΔΠ, ſintque circuli paralleli NP, ΓΠΣ, in quibus puncta N, Π ferantur. & quoniam ſemicirculus à puncto E inchoans, qui ad partes E, P proficiſcitur, non concurrit cum ſemicirculo à puncto Z inchoante, qui ad partes Z, N tendit: ſimilis igitur eſt circumferentia NP ipſi ΓΣ: quare circumferentia NP major eſt ipſa ΓΠ quam ut ei ſimilis ſit: majori igitur tempore punctum N inchoans à N circumferentiam NP percurrens pervenit

ἐφαπτόμενος τοῦ EZ· καὶ ὁ τοῦ ZNK ἄρα κύκλου πόλος μεταξὺ τῶν EZ, BA ἐστιν· ὁ ἄρα ἕτερος αὐτοῦ πόλος μεταξὺ τῶν ἴσων τε καὶ ὁμοιλήλων τῶν EZ, BA ἐστιν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ KO τῆς OMN, ὧν ἡ ΞMO τῆς OΔ μείζων ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔK τῆς ΞN μείζων ἐστί. κείσθω τῇ NΞ ἴση ἡ ΔΠ, καὶ ἐχέτωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ N, Π σημεῖα ὁμοίλήλους κύκλους οἱ NP, ΓΠΣ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμπτωτόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ E ἡμικυκλίου ὡς ἐπὶ τὰ E, P μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Z ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Z, N μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ NP περιφέρεια τῇ ΓΣ περιφερείᾳ· καὶ ἡ NP ἄρα τῆς ΓΠ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ N ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ N τὴν NP περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ



ad P, quam Π inchoans à Π & circumferentiam ΠΓ percurrens pervenit ad Γ. ſed quo quidem tempore punctum N circumferentiam NP percurrens pervenit ad punctum P, circumferentia NΞ permutat hemiſphærium conſpicuum; quo vero tempore Π incipiens à puncto Π & circumferentiam ΠΓ percurrens pervenit ad punctum Γ, circumferentia ΠΔ permutat hemiſphærium conſpicuum: majori igitur tempore circumferentia ΞN permutat hemiſphærium conſpicuum quam ipſa ΔΠ. Dico quod & ΞN propior eſt contactui tropici æſtivi quam ΠΔ. deſcribatur per punctum Ξ circulus parallelus ΞΤ: æqualis igitur eſt circumferentia ΞM ipſi HΨ: quare major eſt circumferentia HΔ ipſa MΞ: circumferentia igitur ΞN propior eſt contactui tropici æſtivi quam ipſa ΠΔ circumferentia.

SIT horizon circulus ABΓΔ; maximus autem eorum qui ſemper apparent ſit circulus EZ; tropicus æſtivus ſit BHΛ; zodiacus vero poſitionem habeat ΓHΔ: dico quod & in

τὸ P φανήσεται, ἤπερ τὸ Π ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Π τὴν ΠΓ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Γ φανήσεται. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ N τὴν NP περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ P φανήσεται, ἡ NΞ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Π ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Π τὴν ΠΓ διελθὸν ἐπὶ τὸ Γ φανήσεται, ἡ ΠΔ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΞN ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΔΠ. λέγω ὅτι καὶ ἐγγίων ἐστὶν ἡ ΞN τῆς σεναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἤπερ ἡ ΠΔ. γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ Ξ παραλληλος κύκλος ὁ ΞΥ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΞM περιφέρεια τῇ HΨ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ HΔ τῆς MΞ· ἡ ΞN ἄρα ἐγγίων ἐστὶ τῆς σεναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἤπερ ἡ ΠΔ.

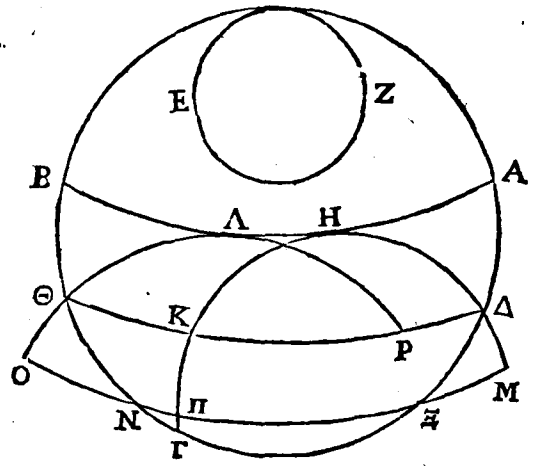
ΕΣΤΩ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ φαινερῶν ὁ EZ, θερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ BHΛ, ὁ ζωδιακὸς δὲ κύκλος θέσιν ἐχέτω τὸν ΓΗΔ· λέγω ὅτι καὶ

καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ τῷ ὑπὸ τὰ Η, Γ μέρη αἱ ἴσαι ὠνιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσοις χρόνοις ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείοσιν ἡ ἔγγιον τῆς σκιαφῆς τὸ θερινὸν τροπικὸν τῆς ἀπώτερον, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσαι ἀπέχουσι τὸ θερινὸν τροπικὸν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἡμικυκλίων.

Γεγράφθω διὰ τοῦ Δ ὠνιφάλληλος κύκλος ὁ ΔΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΗ τῇ ΗΔ. καὶ μετακεκινήσθω ὁ τῶν ζωδίων κύκλος, καὶ θέσιν ἐχέτω ὡς τὸν ΘΛΡ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΚΗ, ΗΔ ἴσαι ἀπέχουσι τῆς σκιαφοῦς τὸ θερινὸν τροπικόν· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΔΗ ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ καὶ ΚΗ δύνει, τουτέστιν ἡ ΛΘ. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΔΗ ἀνατέλλει ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Η ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α τὸν ΑΗ ὠνιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η ὠνιγένεται, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΛΘ δύνει ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Λ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὸν ΛΒ ὠνιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Β ὠνιγένεται· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Η τὸν ΑΗ διελθὸν ἐπὶ τὸ Η ὠνιγένεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Δ τὸν ΛΒ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Β ὠνιγένεται. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὸν ΔΡΚΘ ὠνιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ ὠνιγένεται· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ Η ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α τὸν ΑΗ ὠνιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η ὠνιγένεται, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν

altero ſemicirculo, qui eſt ad partes Η, Γ, circumferentiæ æquales non æqualibus temporibus permutabunt conſpicuum hemiſphærium; ſed majori tempore, quæ propior eſt contactui tropici æſtivi, quam quæ remotior eſt ab eo; æquali vero tempore in unoquoque ſemicirculo, quæ æque diſtant ab æſtivo tropico.

Deſcribatur per punctum Δ parallelus circulus ΔΘ: æqualis igitur eſt circumferentia ΚΗ ipſi ΗΔ. circumvolvatur autem zodiacus, & poſitionem habeat veluti ΘΛΡ. & quoniam circumferentiæ ΚΗ, ΗΔ æque diſtant à contactu tropici æſtivi: igitur [per lem. præm.] quo tempore ΔΗ oritur & hoc tempore ipſa ΚΗ occidit, hoc eſt circumferentia ΛΘ. ſed tempus in quo circumferentia ΔΗ oritur, tempus eſt in quo punctum Η incipiens à puncto Α & circumferentiam ΑΗ percurrens pervenit ad Η punctum; & tempus in quo circumferentia ΛΘ occidit, tempus eſt in quo punctum Λ inchoans à puncto Λ & circumferentiam ΛΒ percurrens pervenit ad punctum Β: quare quo tempore punctum Η circumferentiam ΑΗ percurrens accedit ad punctum Η, eodem tempore & punctum Λ circumferentiam ΛΒ pertranſiens pervenit ad punctum Β. commune addatur tempus in quo Δ incipiens à puncto Δ & circumferentiam ΔΡΚΘ percurrens pervenit ad punctum Θ: quare tempus, in quo punctum Η incipiens à puncto Α & circumferentiam ΑΗ percurrens accedit ad punctum Η, una cum tempore in quo Δ inci-



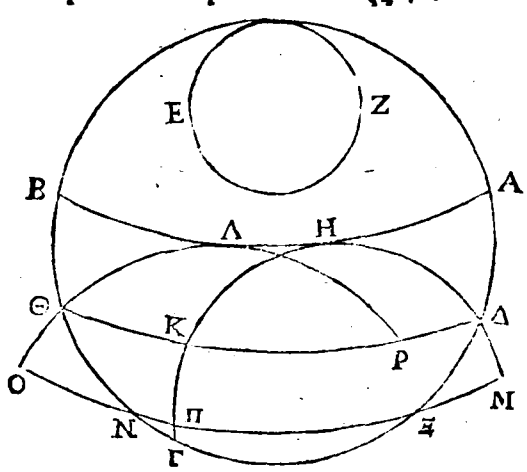
ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὸν ΔΘ ὠνιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ ὠνιγένεται, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Λ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὸν ΛΒ ὠνιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Β ὠνιγένεται, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὸν ΔΚΘ ὠνιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ ὠνιγένεται. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Η ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α τὸν ΑΗ ὠνιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὸν ΔΘ ὠνιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΗΔ ὠνιφέρεια ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Λ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὸν ΛΒ ὠνιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Β παραγίνεται, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὸν ΔΡΘ ὠνιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίνε), ὁ χρό-

piens à puncto Δ & circumferentiam ΔΘ percurrens accedit ad punctum Θ, æquale eſt tempori in quo Λ incipiens à puncto Λ & circumferentiam ΛΒ percurrens pervenit ad punctum Β, una cum tempore, in quo Δ inchoans à puncto Δ & circumferentiam ΔΚΘ percurrens accedit ad punctum Θ. verum tempus in quo punctum Η incipiens ab Α & circumferentiam ΑΗ percurrens venit ad punctum Η, una cum tempore in quo Δ inchoans à puncto Δ & circumferentiam ΔΘ pertranſiens pervenit ad punctum Θ, tempus eſt in quo circumferentia ΗΔ permutat conſpicuum hemiſphærium; & tempus in quo Λ inchoans à puncto Λ & circumferentiam ΛΒ percurrens accedit ad punctum Β, una cum tempore in quo punctum Δ incipiens à Δ & circumferentiam ΔΡΘ percurrens pervenit ad punctum Θ,

tempus

tempus eſt in quo circumferentia Λ Θ permutat conſpicuum hemiſphærium: quare quo tempore circumferentia K H permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc eodem tempore & etiam circumferentia H Δ. ſumatur punctum quoddam M, ut circumferentia H Δ ſit æqualis ipſi Δ M; & ſit M Ξ N O parallelus circulus in quo punctum M feratur: æqualis igitur eſt Δ M circumferentiæ K Π, & æqualiter diſtant ipſæ Δ M, K Π ab æſtivi tropici contactu: quare [per lem. præc.] quo tempore circumferentia Δ M oritur, hoc eodem tempore & Π K occidit, hoc eſt ipſa Θ O. ſed tempus in quo circumferentia Δ M oritur, tempus eſt in quo punctum M incipiens à puncto M & circumferentiam M Ξ percurrens pervenit ad punctum Ξ; & tempus in quo circumferentia Θ O occidit, tempus eſt in quo punctum O incipiens ab N & circumferentiam N O percurrens pervenit ad punctum O: quare tempus in quo punctum M inchoans ab M & circumferentiam M Ξ percurrens accedit ad punctum Ξ, idem eſt ac tempus in quo O inchoans à puncto N & circumferentiam N O pertranſiens accedit ad O punctum. commune addatur tempus in quo punctum Ξ incipiens ab Ξ & circumferentiam Ξ N percurrens accedit ad punctum N: quare tempus in quo M incipiens à puncto M & circumferentiam M N percurrens pervenit ad punctum N, æquale eſt tempori in quo punctum O incipiens ab ipſo Ξ & circumferentiam Ξ O percurrens pervenit ad punctum O. ſed tempus in quo M incipiens à puncto M & circumferentiam M N pertranſiens pervenit ad punctum N, tempus eſt in quo Δ M circumferentia permutat conſpicuum hemiſphærium; & tempus in quo punctum O incipiens à Ξ & circumferentiam Ξ O percurrens accedit ad punctum O, tempus eſt in quo circumferentia O Θ, hoc eſt ipſa K Π, permutat conſpicuum hemiſphærium: quare quo tempore Δ M permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc ipſo tempore & etiam circumferentia K Π. & quoniam H Δ majori tempore permutat conſpicuum hemiſphærium quam circumferentia Δ M; ſed quo tempore H Δ permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc eodem tempore & ipſa H K; quo vero tempore Δ M circumferentia permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc tempore etiam & K Π circumferentia: quare majori tempore circumferentia H K permutat conſpicuum hemiſphærium quam K Π circumferentia.

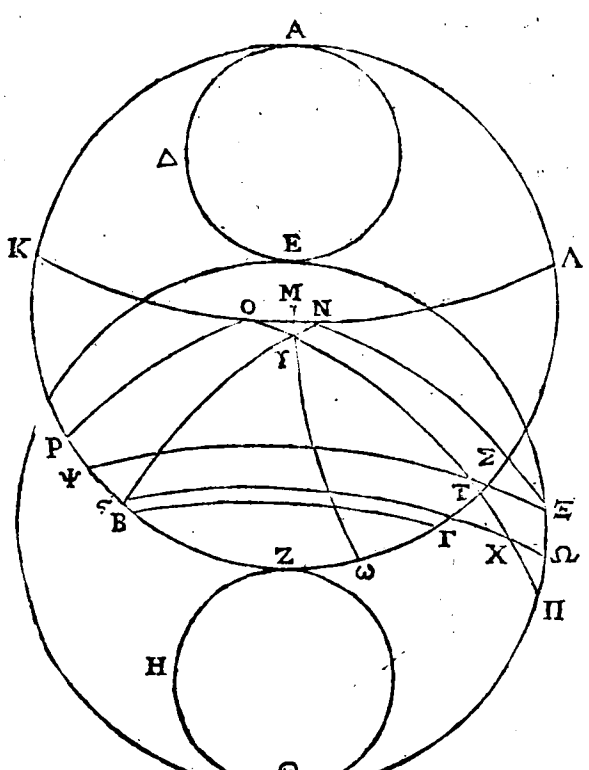
νος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ Λ Θ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ K H περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ καὶ ἡ H Δ. εἰλήφθω δή τι σημεῖον τὸ M, ὡς ἴσην εἶναι τὴν H Δ τῇ Δ M, καὶ ἔστω καθ' ὃ φέρεται τὸ M σημεῖον παράλληλος κύκλος ὁ M Ξ N O· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Δ M τῇ K Π, καὶ ἴσον ἀπέχουσιν αἱ Δ M, K Π τῆς θερινῆς τροπικῆς· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ Δ M περιφέρεια ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ ἡ Π K δύνει, τουτέστιν ἡ Θ O. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ ἡ Δ M ἀνατέλλει, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ M ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ M τὴν M Ξ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ξ παραγίνεται· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ἡ Θ O δύνει, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ τὸ O ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ N τὴν N O περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ O παραγίνεται· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ M ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ M τὴν M Ξ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ξ παραγίνεται, ὁ αὐτός ἐστι τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ O ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ N τὴν N O περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ O παραγίνεται. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ξ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ξ τὴν Ξ N περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ N παραγίνεται· ὁ ἄρα χρόνος, ἐν ᾧ τὸ M ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ M τὴν M N περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ N παραγίνεται, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ, ἐν ᾧ τὸ O ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ξ τὴν Ξ O περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ O παραγίνεται. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος, ἐν ᾧ τὸ M ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ M τὴν M N περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ N παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ Δ M περιφέρεια ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ O ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ξ τὴν Ξ O περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ O παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ O Θ περιφέρεια, τουτέστιν ἡ K Π ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ Δ M ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ καὶ ἡ K Π. ἐπεὶ δὲ πλείονι χρόνῳ ἡ H Δ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ Δ M, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ H Δ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἐν τούτῳ καὶ ἡ H K ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν ᾧ δὲ ἡ Δ M ἐν τούτῳ καὶ ἡ K Π· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ H K ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ K Π.



Λλ-

ΑΛΛΩΣ.

ΕΣΤΩ ἐν κόσμῳ ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ μέγιστος μὲν τῶν ἀεὶ φαινερῶν ὁ ΑΔΕ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ ἀφανῶν ὁ ΖΗΘ, ὁ δὲ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΚΛ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, * ὧν ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Λ, Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Κ, Β, ζωδιακοῦ δὲ θέσεις ἔστωσαν αἱ μὴ τὸ καρκίνου ἡμικυκλίου αἱ ΝΞ, ΟΠ, καὶ ἀπειλήφθω ἡ ΟΠ περιφέρεια μὴ μείζων ἡμικυκλίου οὖσα, καὶ μέγιστος κύκλος γεγράφθω διὰ τοῦ Π ἐφαπτόμενος τοῦ ΑΔΕ· ἐφάψεται ἄρα καὶ τοῦ ΖΗΘ, ἢ που δὴ διὰ τοῦ Ο σημείου ἥξει, ἢ ὑπερπεσεῖ τὸ Ο σημεῖον. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΕΘΠ, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ Ε ἡμικυκλίου ὡς ἐπὶ τὰ Ξ, Π μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Κ, Ρ μέρη, καὶ τετάσθωσαν οἱ ΞΝΒ, ΠΟΡ κύκλοι. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ ΑΒΓ, καὶ τέμνουσι δύο μέγιστοι κύκλοι ἀλλήλους οἱ ΒΝΣ, ΡΟΤΠ, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλος μεταξὺ τῶν ΑΔΕ, ΚΛ περιφερειῶν· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΣΝΥ περιφέρεια τῆς ΥΤ περιφερείας· (ἐπεὶ γὰρ τοῦ Υ τοῦ Μ πόλου ὄντος τοῦ ΑΒΓ ἡμικυκλίου μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΜΥω· ὁ ΜΥω ἄρα ὀρθὸς ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΒΓ) ἡ ΥΤ ἄρα περιφέρεια τῆς ΥΝΣ περιφερείας ἐλάσσων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΕΘΠΩ τοὺς αὐτοὺς κύκλους ἐφάπτονται τοῦ ΑΔΕ, καὶ τῷ ΑΔΕ ὑπόκειται παράλληλον ὄντα τὸν ΚΛ τέμνουσι, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΑΒΓ πόλος μεταξὺ τῶν ΑΔΕ, ΚΛ κύκλων· καὶ ὁ τοῦ ΕΘΠ ἄρα πόλος μεταξύ ἐστι τῶν ΑΔΕ, ΚΛ κύκλων· ὁ ἄρα ἕτερος αὐτοῦ πόλος ἐστὶ μεταξὺ τῶν ΗΖΘ, ΒΓ κύκλων. ἐπεὶ δὲ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΘΠ, καὶ τοῦ ΕΘΠ τέμνουσι δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΡΟΠ, ΒΝΞ, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΕΘΠ πόλος μεταξὺ τῶν ΒΓ, ΗΘΖ· μείζων ἐστὶν ἡ ΠΥ περιφέρεια τῆς ΥΝΞ περιφερείας. ὧν ἡ ΥΤ τῆς ΥΝΣ ἐλάσσων ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ΤΠ λοιπῆς τῆς ΣΞ μείζων ἐστί. κείσθω τῇ ΣΞ περιφερείᾳ ἴση περιφέρεια ἡ ΤΧ καὶ γεγράφθωσαν παράλληλοι κύκλοι καθ' ὧν φέρεται τὰ Ξ, Χ σημεῖα οἱ ΞΨ, Ως· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΨ περιφέρεια τῇ Ως περιφερείᾳ· ἡ ΞΨ ἄρα τῆς Χς μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ Ξ σημεῖον τὴν ΞΨ περιφέρειαν διαπορεύεται



ALITER.

SIT in mundo horizon circulus ABΓ, maximus autem semper-apparentium sit circulus AΔE, maximus vero semper-occultorum sit circulus ZHΘ; & tropicus æstivus sit KΛ, hybernus autem sit BΓ; & sint partes orientales quidem Λ, Γ, occidentales vero K, B; zodiaci post cancrum semicirculi positiones sint ipsæ NΞ, OΠ; sumaturque circumferentia OΠ quæ non sit major semicirculo, & per punctum Π describatur maximus circulus tangens circulum AΔE: tanget igitur etiam & circulum ZHΘ; & vel transibit per punctum O, vel per superiorem partem ipsius O. describatur, sitque ipse EΘΠ, ita ut semicirculus à puncto E inchoans, qui ad partes Ξ, Π tendat, non concurrat cum semicirculo à puncto A proficiscente, qui ad partes K, P proficiscatur; & compleantur circuli ΞNB, ΠOP. & quoniam in sphæra maximus circulus est ABΓ; & sunt duo maximi circuli BNΣ, POTΠ, qui se mutuo secant bifariam; atque [ex hyp.] est circuli ABΓ polus inter circulos AΔE, KΛ: major igitur est circumferentia ΣNT ipsa TT: (etenim per Υ & polum M semicirculi ABΓ traductus est maximus circulus MTω, & igitur MTω est ad ABΓ rectus) quare & ipsa TT circumferentia minor est ipsa TNΣ. & quoniam in sphæra duo circuli maximi ABΓ, EΘΠΩ eundem circulum AΔE tangunt, & huic AΔE parallelum alterum KΛ secant; atque est circuli ABΓ polus inter circulos AΔE, KΛ: erit & ipsius EΘΠ polus etiam inter AΔE, KΛ circulos: quare & alter polus ipsius est inter circulos HZΘ, BΓ. & quoniam in sphæra maximus circulus est EΘΠ; & ipsum EΘΠ circulum secant duo alii maximi circuli POΠ, BNΞ; & est circuli EΘΠ polus inter circulos BΓ, HΘZ: major igitur est circumferentia ΠT ipsa TNΞ. ex quibus TT minor est ipsa TNΣ: & reliqua igitur TΠ major est reliqua ΣΞ. ponatur ipsi ΣΞ æqualis circumferentia TX; & describantur circuli paralleli, qui sint ΞΨ, Ως, in quibus puncta Ξ, X ferantur: similis igitur est circumferentia ΞΨ ipsi Ως: quare & ΞΨ major est circumferentia Xς quam ut ei similis sit: majori igitur tempore punctum Ξ circumferentiam ΞΨ percurrit quam punctum

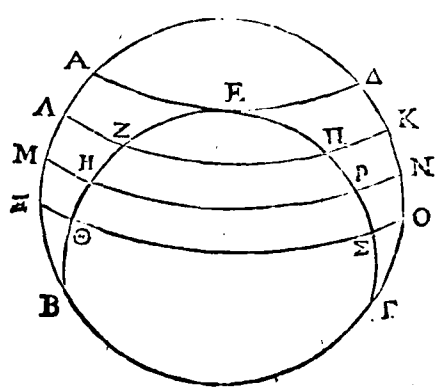
* In Cod. Bodl. καὶ ἔστω ὁ τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλος μεταξὺ τῶν ΑΔΕ, ΚΛ κύκλων, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ &c.

Χ ipſam Χς pertranſeat. verum tempus quidem in quo punctum Ξ circumferentiam ΞΨ percurrit, tempus eſt in quo circumferentia ΣΞ permutat manifeſtum hemiſphærium; tempus autem in quo punctum Χ percurrit circumferentiam Χς, tempus eſt in quo ſimiliter ipſa ΤΧ permutat manifeſtum hemiſphærium: quare majori tempore circumferentia ΣΞ permutat manifeſtum hemiſphærium quam ipſa ΤΧ. atque eſt ipſa ΣΞ propinquior contactui tropici æſtivi quam ΤΧ.

Quare majori tempore circumferentia illa permutat manifeſtum hemiſphærium, quæ quidem contactui tropici æſtivi propinquior eſt, quam quæ ab eo eſt remotior.

SIMILITER autem circumferentiæ æquales, quæ ſunt in ſemicirculo poſt capricornum, non temporibus æqualibus permutant conſpicuum hemiſphærium; ſed majori tempore quæ propior eſt tropico æſtivo, quam quæ remotior eſt ab eo: æquali vero tempore quæ æque diſtant ab alterutro contactu.

Sit in mundo horizon ΑΒΓΔ; æſtivus tropicus ſit ΑΔ; zodiacus circulus poſitionem habeat ΒΕΓ; ſit autem circumferentia ΒΕ in ſemicirculo qui eſt poſt capricornum; & circumferentia ΕΓ in ſemicirculo qui eſt poſt cancrum; & ſint partes quidem orientales verſus punctum Δ, occidentales autem verſus punctum Β; & ſumantur æquales circumferentiæ ΖΗ, ΗΘ: dico quod circumferentia ΖΗ majori tempore permutat conſpicuum hemiſphærium quam circumferentia ΗΘ.



Deſcribantur paralleli circuli ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ, in quibus puncta Ζ, Η, Θ ferantur: æqualis igitur eſt circumferentia ΖΗ ipſi ΠΡ; & circumferentia ΗΘ ipſi ΡΣ. ſed [ex conſtr.] circumferentia ΖΗ eſt æqualis circumferentiæ ΗΘ: quare & ΠΡ ipſi ΡΣ æqualis eſt. & quoniam [per lem præm.] quo tempore circumferentia ΠΡ occidit & circumferentia ΖΗ oritur; commune apponatur tempus in quo punctum Π circumferentiam ΚΛ percurrit, quod æquale eſt tempori quo Ζ punctum percurrit circumferentiam ΚΛ: tempus igitur in quo punctum Π percurrit circumferentiam ΚΛ & circumferentia ΠΡ occidit, æquale eſt tempori in quo circumferentia ΖΗ oritur & punctum Ζ circumferentiam ΚΛ pertranſit. verum tempus quidem in quo punctum Π ipſam ΚΛ percurrit & circumferentia ΠΡ occidit, tempus eſt in quo circumferentia ΠΡ permutat conſpicuum hemiſphærium; & tempus in quo ΖΗ oritur & punctum Ζ circumferentiam ΚΛ percurrit, tempus eſt in quo ipſa ΖΗ permutat conſpicuum hemiſphærium: quare circumferentiæ ΖΗ, ΠΡ æquali tempore permutant conſpicuum hemiſphærium. ſimiliter demonſtrabitur quod & ipſæ ΗΘ, ΡΣ æquali etiam tempore permutabunt conſpicuum hemiſphærium. ſed [per part. prior. hujus] ΠΡ majori tempore permutat con-

ἤπερ τὸ ΧΤ Χς. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ξ σημεῖον τὴν ΞΨ περιφέρειαν διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΣΞ περιφέρεια ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Χ σημεῖον τὴν Χς περιφέρειαν διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΤΧ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ταὐτῷ ἄρα χρόνῳ ἡ ΣΞ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΤΧ. καὶ ἔστιν ἡ ΣΞ ἐγγίον τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἤπερ ἡ ΤΧ.

Ἐν ταὐτῷ ἄρα χρόνῳ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ ἐγγίον τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ τῆς ἀπώτερον.

ΩΣΑΥΤΩΣ δὲ καὶ ὅτι τὰ μετὰ τὸν αἰγόκερων ἡμικυκλίου αἱ ἴσαι περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσοις χρόνοις ἐξαλλάσσουσι τὸ ἡμισφαίριον φανερόν, ἀλλ' ἐν ταὐτῷ ἡ ἐγγίον τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ τὸ ἀπώτερον, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ὁποτερασοῦν τῶν σημαφῶν.

Ἐστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ ΑΔ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΒΕΓ, καὶ ἔστω ἡ μὲν ΒΕ περιφέρεια ἀπὸ τοῦ μεταὶ τὸν αἰγόκερων ἡμικυκλίου, ἡ δὲ ΕΓ ἀπὸ τοῦ μετὰ τὸ καρκίνον, καὶ ἔστωσαν ἀνατολικὰ μὲν τὰ Δ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ εἰλήφθωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΖΗ, ΗΘ· λέγω ὅτι ἡ ΖΗ ἐν πλείονι χρόνῳ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΗΘ.

Γεγράφθωσαν γὰρ ἀλλήλοις κύκλοι οἱ ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ, καθ' ὧν φέρεται τὰ Ζ, Η, Θ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ περιφέρεια τῇ ΠΡ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΗΘ περιφέρεια τῇ ΡΣ. ἀλλ' ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΠΡ ἄρα τῇ ΡΣ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΠΡ διῆκε ἡ ΖΗ ἀνατέλλει, κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Π σημεῖον τὴν ΚΛ περιφέρειαν διαπορεύεται, ἴσος ὢν τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Ζ σημεῖον τὴν ΚΛ περιφέρειαν διαπορεύεται· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ Π σημεῖον τὴν ΚΛ περιφέρειαν διαπορεύεται καὶ ἡ ΠΡ διῆκε, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ ἡ ΖΗ περιφέρεια ἀνατέλλει καὶ τὸ Ζ σημεῖον τὴν ΚΛ περιφέρειαν διαπορεύεται. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Π σημεῖον τὴν ΚΛ περιφέρειαν διαπορεύεται καὶ ἡ ΠΡ διῆκε, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΠΡ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ΖΗ ἀνατέλλει καὶ τὸ Ζ σημεῖον τὴν ΚΛ περιφέρειαν διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΖΗ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· αἱ ΖΗ, ΠΡ ἄρα ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΗΘ, ΡΣ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἡ δὲ ΠΡ τῆς ΡΣ ἐν πλείονι χρόνῳ ἐξαλ-

λάττει

λάττῃ τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ϗ ἀπεδείχθησαν αἱ ΖΗ, ΠΡ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάξαι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα ἐν πλείονι χρόνῳ ἐξαλλάττῃ τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΗΘ.

Τὰ ἄρα τῶν ζωδίων κύκλων αἱ ἴσαι περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ἐγγίον τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ τῆς ἀπώτερον. ϗ συναποδέδεικται ὅτι αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι.

Zodiaci igitur circuli circumferentiæ æquales haud æquali tempore permutant conſpicuum hemiſphærium, ſed in majori tempore quæ propior eſt tropico æſtivo quam quæ remotior eſt ab eo: æquali vero tempore quæ inde æque diſtant.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Καὶ ἐν καθόλου χρὴ εἰδέναι, ὅτι, τῶν προηγουμένων σημείων ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος ὄντων, ἡ περιφέρεια οὔτε ἀνατέλλει οὔτε δύνει, τῶν δὲ ἑπομένων σημείων ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος ὄντων πᾶσα ἀνίσταται, καὶ πᾶσα ἔδυ· τὰ γὰρ ὑποηγούμενα σημεῖα καὶ πρότερα ἀνατέλλει ϗ πρότερα δύνει κατὰ τὸ δ' θεώρημα. τῆς δὲ ΠΡ περιφερείας προηγούμενον ἦν σημεῖον τὸ Π, τὸ δὲ ΗΖ προηγούμενον τὸ Η. λαβὼν δὲν τὸν μὲν ΠΡ δύνοντα, τὸν δὲ ΗΖ ἀνατέλλοντα, ἀναγκαίως τὰς ἐξαλλαγὰς αὐτῶν ζητῶν τὰς ἐπὶ τοῦ φανεροῦ ἡμισφαιρίου προσέλαβε τοῦ μὲν ΠΡ τὴν δύσιν, τοῦ δὲ ΗΖ τὴν ἀνατολήν· ὅτι γὰρ τὸ Π ἐπὶ τὸ Λ ἔρχεται, ἡ ΠΡ ὅπω δύνει, ἀλλ' ἔτι ὑπὲρ γῆς ἐστι· διὸ προσέλαβεν αὐτῆς τὴν δύσιν. τὸ γὰρ Π κατὰ τὸ Κ ἐπὶ τῆς ἀνατολῆς ὄντος, ἡ ΠΡ πᾶσα ὑπὸ γῆν ἐστι, καὶ κινουμένης τῆς σφαίρας ἄνω φέρεται πᾶσα· διὸ ἐν ᾧ τὸ Π ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Λ ἔρχεται μετὰ τῆς δύσεως τῆς ΠΡ, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΠΡ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. πάλιν, ὅτε Ζ κατὰ τὸ Κ ἐπὶ τῆς ἀνατολῆς ὄντος, ἡ ΗΖ πᾶσα προανέτειλε· διὸ προσέλαβεν αὐτῆς τὴν ἀνατολήν. γενομένου δὲ τοῦ Ζ κατὰ τὸ Λ, πᾶσα ἡ ΗΖ δύνει· διὸ ἐν ᾧ τὸ Ζ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Λ ἔρχεται μετὰ τῆς ἀνατολῆς τῆς ΗΖ, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΗΖ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἐὰν δὲ, ὡς ἔχει ἐν ἄλλῃ ὑποθέσει, τῆς μὲν ΠΡ τὴν ἀνατολήν, τῆς δὲ ΗΖ τὴν δύσιν ζητῶν, ὑπόθηται λήψει τὰ Π, Ζ σημεῖα, ἀλλὰ τὰ Ρ, Η, ϗ τὸν χρόνον ἐν ᾧ τὸ τὸ Ρ τὴν ΝΜ διήρχετο ϗ τὸ Η τὴν ΝΜ.

SCHOLIUM.

In univerſum ſcire oportet, quod præcedente circumferentiæ puncto in horizonte exiſtente, ipſa circumferentia neque ortum habuit neque occaſum, ſubſequente vero ejus puncto in horizonte poſito, tota prius ortum habuit vel occaſum; antecedentia enim puncta prius oriuntur & prius occidunt per theorema quartum. circumferentiæ itaque ΠΡ punctum præcedens erat Π; ipſius vero ΗΖ præcedens punctum Η. *auctor* igitur ſumens circumferentiam quidem ΠΡ occidentem, ipſam vero ΗΖ orientem, earumque permutationes quærens in conſpicuo hemiſphærio, neceſſario ſumpſit occaſum quidem circumferentiæ ΠΡ, ortum vero ipſius ΗΖ. nam quando punctum Π ad Λ pervenit, circumferentia ΠΡ nondum occidit, ſed adhuc ſupra terram eſt; quare ſumpſit ejus occaſum: puncto enim Π exiſtente in ortu ad Κ, tota circumferentia ΠΡ eſt infra terram, & mota ſphæra tota ſurſum fertur: quare tempus quo punctum Π à Κ ad Λ pervenit una cum tempore quo ipſa circumferentia ΠΡ occidit, eſt tempus quo circumferentia ΠΡ permutat conſpicuum hemiſphærium. rurſus, puncto Ζ exiſtente in ortu ad Κ, tota circumferentia ΗΖ prius ortum habuit; quare *auctor* ſumpſit ejus ortum. poſito autem puncto Ζ ad Λ, tota circumferentia ΗΖ occaſum habuit: quare tempus quo punctum Ζ à Κ ad Λ pervenit una cum tempore quo circumferentia ΗΖ oritur, eſt tempus quo circumferentia ΗΖ permutat conſpicuum hemiſphærium. ſi vero *quærat* (ut fit in alia hypotheſi) circumferentiæ quidem ΠΡ ortum, circumferentiæ vero ΗΖ occaſum; non amplius ſumet puncta Π, Ζ, ſed ipſa Ρ, Η, tempuſque quo punctum Ρ percurrit circumferentiam ΝΜ, & quo punctum Η percurrit ipſam ΝΜ.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'. ΕΚ ΠΕΡΙΣΣΟΥ.

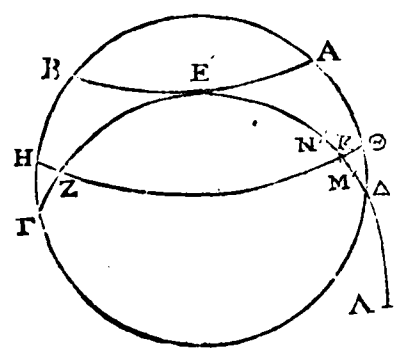
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἀπειλήφθω ἡ ΕΖ μὴ μείζων τεταρτημορίου, καὶ ἔστω καθ' ὃ φέρεται τὸ Ζ σημεῖον ὁ ΖΚΘ κύκλος· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ. κείσθω τῇ ΕΚ ἴση ἡ ΛΚ· ὅλη ἄρα ἡ ΖΕΚ ὅλῃ τῇ ΕΚΛ ἐστιν ἴση. λέγω ὅτι εἰ μὲν τεταρτημορίου ἐστὶν ἡ ΕΖ, αἱ ΖΕΚ, ΕΚΛ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· εἰ δὲ ἐλάσσων ἐστὶ τεταρ-

SCHOLIUM I. EX ABUNDANTI.

Iiſdem ſuppoſitis, aſſumatur circumferentia ΕΖ quæ non ſit major quarta zodiaci parte; & ſit ΖΚΘ parallelus circulus in quo punctum Ζ feratur: æqualis igitur eſt circumferentia ΕΖ circumferentiæ ΕΚ. ponatur ipſi ΕΚ æqualis circumferentia ΛΚ: tota igitur ΖΕΚ toti ΕΚΛ æqualis eſt. dico quod, ſi quidem circumferentia ΕΖ quarta zodiaci pars eſt, ipſæ circumferentiæ ΖΕΚ, ΕΚΛ æquali tempore permutabunt conſpicuum hemiſphærium; ſi vero circumfe-

rentia EZ est minor quarta zodiaci parte, quod circumferentia ZEK majori tempore permutabit conspicuum hemisphærium quam ipsa EKΛ.

Sit primum circumferentia EZ quarta zodiaci pars: quare & ipsa EK etiam est quarta pars zodiaci; igitur circulus HZΘ est æquinoctialis. & quoniam EK, KΛ circumferentiæ æque distant ab æquinoctiali circulo: quare [per 12.Phæn.] quo tempore circumferentia EK occidit, eodem tempore & KΛ etiam occidit. sed [per lem.præm.] quo tempore EK circumferentia occidit, hoc ipso tempore & circumferentia EZ oritur: quare quo tempore circumferentia EZ oritur, & ipsa KΛ occidit. commune adponatur tempus in quo EK permutat conspicuum hemisphærium: tempus igitur in quo circumferentia KΛ occidit una cum tempore in quo EK permutat conspicuum hemisphærium, æquale est tempori in quo ipsa EZ oritur, una cum tempore in quo EK circumferentia permutat conspicuum hemisphærium. verum tempus in quo AK occidit & ipsa KE permutat conspicuum hemisphærium, tempus est in quo circumferentia EΛ permutat conspicuum hemisphærium; & tempus in quo EZ oritur una cum tempore in quo EK permutat conspicuum hemisphærium, tempus est in quo circumferentia ZEK permutat conspicuum hemisphærium: quare circumferentiæ ZEK, EKΛ æquali tempore permutant conspicuum hemisphærium.



Sed sit circumferentia EZ minor quarta zodiaci parte: quare & ipsa EK minor est etiam quarta zodiaci parte. ponatur EM quarta zodiaci pars; & ponatur ipsi MK æqualis KN: reliqua igitur EN reliquæ MΛ est æqualis. atque est circumferentia EN propior contactui tropici æstivi quam ipsa MΛ: majori igitur tempore [per 12.Phæn.] circumferentia EN occidit, quam ipsa MΛ. eadem ratione & circumferentia NK majori quoque tempore occidit quam ipsa KM: igitur & circumferentia EK majori etiam tempore occidit quam circumferentia KΛ. sed [per lem. præm.] quo tempore circumferentia EK occidit, & ipsa EZ oritur: quare majori tempore circumferentia EZ oritur quam ipsa KΛ occidit. commune adponatur tempus, in quo circumferentia EK permutat conspicuum hemisphærium: quare majori tempore ZEK permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa EΛ circumferentia.

SCHOLIUM II. EX ABUNDANTI.

Iisdem similiter suppositis, sumatur circumferentia EZ non major quarta zodiaci parte; & sumatur punctum utcunque H, sitque ΘKHΛ circulus parallelus in quo H punctum feratur; ponatur vero circumferentiæ ZH æqualis circumferentia KM; æqualis igitur est circumferentia KEH ipsi MEZ: dico quod majori tempore KEH circumferentia permutat conspicuum hemisphærium quam MEZ.

τημορίῳ ἡ EZ, ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ZEK ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ EKΛ.

Ἔστω πρότερον τεταρτημορίου ἡ EZ· καὶ ἡ EK ἄρα τεταρτημορίς ἐστιν· ἰσημερινὸς ἄρα ἐστὶν ὁ HZΘ. καὶ ἐπεὶ αἱ EK, KΛ ἴσον ἀπέχουσι τοῦ ἰσημερινοῦ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ EK δύσει ἐν τούτῳ καὶ ὁ KΛ. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ EK δύσει ἐν τούτῳ ἡ EZ ἀνατέλλει· καὶ ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ EZ ἀνατέλλει ἡ KΛ δύσει. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος, ἐν ᾧ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ ἡ KΛ δύσει, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ, ἐν ᾧ ἡ EZ ἀνατέλλει καὶ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΛK δύσει καὶ KE ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ EΛ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ἡ EZ ἀνατέλλει μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ZEK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· αἱ ZEK, EKΛ ἄρα ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον.

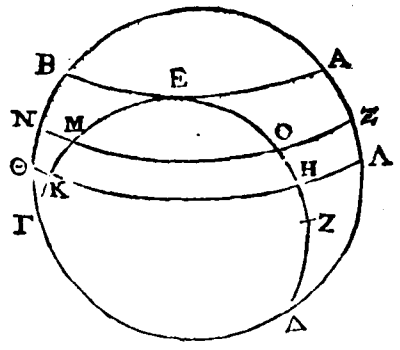
Ἀλλ' ἔστω ἡ EZ ἐλάσσων τεταρτημορίου· καὶ ἡ EK ἄρα ἐλάσσων ἐστὶ τεταρτημορίου. κείσθω τεταρτημορίου ἡ EM, καὶ κείσθω τῇ MK ἴση ἡ KN· λοιπὴ ἄρα ἡ EN λοιπῇ τῇ MΛ ἐστιν ἴση. καὶ ἡ EN ἔγγιον ἐστὶ τῆς θερινῆς τροπικῆς ἥπερ ἡ MΛ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ EN δύσει ἥπερ ἡ MΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ NK ἐν πλείονι χρόνῳ δύσει ἥπερ ἡ KM· καὶ ἡ EK ἄρα τῆς KΛ ἐν πλείονι χρόνῳ δύσει. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ EK δύσει ἡ EZ ἀνατέλλει· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ EZ ἀνατέλλει ἥπερ ἡ KΛ δύσει. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ZEK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ EΛ.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'. ΕΚ ΠΕΡΙΣΣΟΥ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἀπειλήφθω ἡ EZ μὴ μείζων τεταρτημορίου, ἐπειλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ H, καὶ ἔστω καθ' ὃ φέρεται τὸ H σημεῖον ὁμοίλιλος κύκλος ὁ ΘKHΛ, καὶ κείσθω τῇ ZH ἴση ἡ KM· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ KEH τῇ MEZ· λέγω ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ KEH περιφέρεια ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ MEZ.

Ἔστω

Ἐστω καθ' ὃ φέρεται τὸ Μ σημεῖον ὁ ΝΜΞ παράλληλος κύκλος· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΟΗ. καὶ ἐπεὶ ἔγκλιόν ἐστιν ἡ ΟΗ τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἥπερ ἡ ΗΖ· ἐν ἐλάσσονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΟΗ δύνει ἥπερ ἡ ΗΖ. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΟΗ δύῃ ἡ ΜΚ ἀνατέλλει· ἐν ἐλάσσονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΜΚ ἀνατέλλει ἥπερ ἡ ΗΖ δύῃ. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΜΕΗ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ἐλάσσονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΚΕΗ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἥπερ ἡ ΜΕΖ.

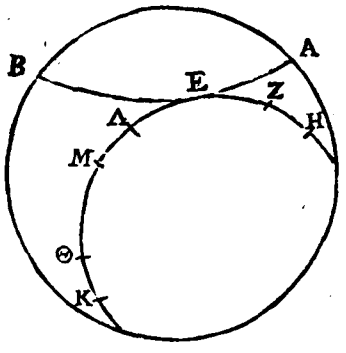


Sit N M Ξ circulus parallelus in quo punctum M feratur: æqualis igitur est circumferentia K M ipsi O H. & quoniam circumferentia O H propior est contactui tropici æstivi quam ipsa H Z, majori igitur tempore [per 12. Phæn.] O H occidit quam ipsa H Z. sed [per lem. præm.] quo tempore circumferentia O H occidit & ipsa M K oritur: quare majori tempore circumferentia M K oritur quam H Z occidit. commune adponatur tempus, in quo circumferentia M E H permutat conspicuum hemisphærium: quare majori tempore circumferentia K E H permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa M E Z.

ΣΧΟΛΙΟΝ γ'. ΕΚ ΠΕΡΙΣΣΟΥ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἀπειλήφθωσαν ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΖΗ, ΘΚ, καὶ ἔστω ἡ ΖΗ ἔγκλιον τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἥπερ ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ ἡ ΖΗ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἥπερ ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΖΗ ἔγκλιόν ἐστι τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἥπερ ἡ ΘΚ, μείζων ἐστὶν ἡ ΘΕ τῆς ΕΖ. κείσθω τῇ μὲν ΖΕ ἴση ἡ ΕΛ, τῇ δὲ ΖΗ ἴση ἡ ΛΜ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΛΜ, ΖΗ ἴσον ἀπέχουσι τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ, ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΛΜ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΖΗ. ἐν ἐλάσσονι δὲ χρόνῳ ἡ ΛΜ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἥπερ ἡ ΘΚ· ἐν ἐλάσσονι ἄρα χρόνῳ καὶ ἡ ΖΗ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἥπερ ἡ ΘΚ.



SCHOLIUM III. EX ABUNDANTI.

Iisdem suppositis, assumantur æquales & oppositæ circumferentiæ Z H, Θ K; & sit circumferentia Z H propior contactui tropici æstivi, quam ipsa Θ K: dico quod majori tempore circumferentia Z H permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa Θ K.

Quoniam enim [ex hyp.] circumferentia Z H propior est contactui tropici æstivi quam ipsa Θ K, major igitur est Θ E ipsa E Z. ponatur quidem ipsi Z E æqualis circumferentia E Λ; & circumferentiæ Z H æqualis ipsa Λ M. quoniam igitur [ex hyp.] circumferentiæ Λ M, Z H æque distant à contactu tropici æstivi; quo igitur tempore circumferentia Λ M permutat conspicuum hemisphærium [per 15. Phæn.] hoc ipso tempore & Z H. sed majori tempore circumferentia Λ M permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa Θ K: majori igitur tempore circumferentia Z H permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa Θ K.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιε'.

Τῶν τῶν ζῳδίων κύκλου τῶν ἴσων τε καὶ ἀπεναντίον περιφερειῶν, ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ ἑτέρα τὸ ἀφανές· καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα τὸ ἀφανές, ἡ ἑτέρα τὸ φανερόν.

THEOREMA XV.

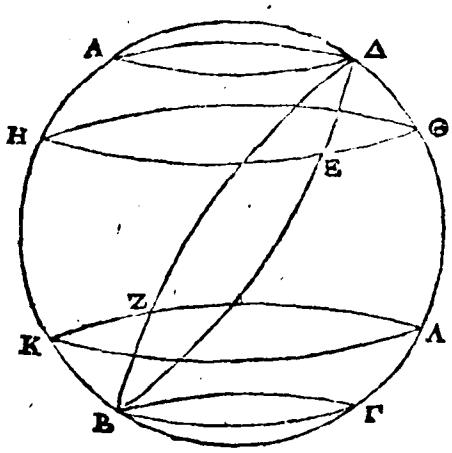
Ex æqualibus & oppositò jacentibus zodiaci circuli circumferentiis, quo tempore altera permutat conspicuum hemisphærium, altera occultum permutat: & quo tempore altera permutat occultum hemisphærium, altera conspicuum permutat.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, ὁ δὲ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΔΕΒΖ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ΔΕΒ ἡμικύκλιον τὸ μὴ ὑπὸ γῆν κατωτέρω γῆς, τὸ δὲ ΒΖΔ τὸ μετεωρότερον ὑπὲρ γῆς, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Δ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἀπειλήφθωσαν δύο ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΔΕ, ΒΖ·

SIT in mundo horizon circulus ΑΒΓΔ; æstivus tropicus sit ΑΔ, hybernus autem sit ΒΓ; zodiacus circulus positionem habeat veluti ΔΕΒΖ; sit autem semicirculus post cancrum sub terram ΔΕΒ; & semicirculus post capricornum supra terram sit ΒΖΔ; partes orientales sint versus punctum Δ, occidentales versus Β punctum; & sumantur duæ circumferentiæ ΔΕ, ΒΖ æquales & oppositæ inter se:

dico quod quo tempore circumferentia Δ E permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc ipſo & ipſa B Z circumferentia permutat occultum: & contra quo tempore Δ E permutat occultum, hoc ipſo B Z conſpicuum permutat.

Deſcribantur paralleli circuli H E Θ, K Z Λ, in quibus puncta E, Z ferantur. & quoniam [per 6. Phæn.] aſtra quæ in zodiaco per diametrum ſunt poſita, conjugate & oriuntur & occidunt: puncto igitur E occidente in puncto H, & punctum Z ipſi E per diametrum poſitum oritur in puncto Λ. ſed ipſum E percurrens circumferentiam Θ E H occidet quidem, & Z pertranſiens circumferentiam K Z Λ oritur: quare quo tempore E percurrit circumferentiam Θ E H, & Z pertranſit circumferentiam K Z Λ. ſed tempus quidem in quo E percurrit circumferentiam Θ E H, tempus eſt in quo circumferentia Δ E permutat conſpicuum hemiſphærium; ac tempus in quo punctum Z percurrit circumferentiam K Z Λ, tempus eſt in quo circumferentia Z B permutat occultum hemiſphærium: quare tempore æquali circumferentia Δ E permutat conſpicuum hemiſphærium atque ipſa Z B occultum.



Similiter demonſtrabimus quod quo tempore circumferentia Δ E permutat occultum, ipſa Z B permutat conſpicuum hemiſphærium.

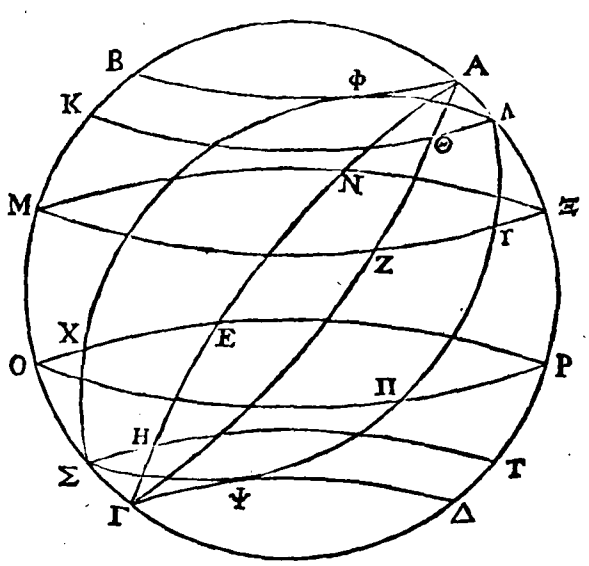
λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Δ Ε ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἐν τούτῳ ἡ Β Ζ τὸ ἀφανὲς, καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Δ Ε τὸ ἀφανὲς, ἐν τούτῳ ἡ Β Ζ τὸ φανερόν.

Γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν Η Ε Θ, Κ Ζ Λ, καθ' ὧν φέρεται τὰ Ε, Ζ σημεῖα. καὶ ἐπεὶ τῶν τῶν ζωδίων κύκλων τὰ κατὰ διάμετρον ἄρα ὄντα κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε & δύνει· τῷ Ε ἄρα σημείῳ δυνόντος κατὰ τὸ Η σημεῖον τὸ Ε τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ζ ἀνατέλλει κατὰ τὸ Λ σημεῖον. ἀλλὰ τὸ μὲν Ε τὴν Θ Ε Η διελθὸν δύνει, τὸ δὲ Ζ τὴν Κ Ζ Λ διελθὸν ἀνατέλλει· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Ε τὴν Θ Ε Η διαπορεύεται, καὶ τὸ Ζ τὴν Κ Ζ Λ. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ε τὴν Θ Ε Η διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ Δ Ε ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ζ τὴν Κ Ζ Λ διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ Ζ Β ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ ἡ Δ Ε ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον καὶ ἡ Ζ Β τὸ ἀφανές.

Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Δ Ε ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἡ Ζ Β τὸ φανερόν.

ALITER.

Sit horizon circulus A B Γ Δ; tropicus æſtivus ſit B A, hybernus autem ſit Γ Δ; zodiacus circulus poſitionem habeat veluti A B Γ Z; & ſumantur & æquales & oppoſitæ circumferentiæ E H, Z Θ: dico quod quo tempore Z Θ permutat conſpicuum hemiſphærium, ipſa E H permutat occultum.



Sint circuli paralleli K Θ Λ, M N Ξ Z, E O Π P, Σ H T, in quibus puncta Θ, Z, E, H ferantur; & circumvolvatur zodiacus circulus, & nunc quidem habeat poſitionem veluti T A Φ X Σ Ψ, interdum vero ſicuti Θ E H. & quoniam [ex hyp.] circumferentiæ Z Θ, E H ſunt æquales & oppoſitæ: circuli igitur M N Ξ, O Π P ſunt æquales. æqualium autem & parallelorum circulorum ſegmenta alternatim ſumpta æqualia invicem ſunt: ſegmentum igitur M N Ξ

ΑΛΛΩΣ.

Ἐστω ὁρίζων κύκλος ὁ Α Β Γ Δ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ Β Α, χειμερινὸς δὲ ὁ Γ Δ, ὁ ζωδιακὸς δὲ κύκλος θέσιν ἐχέτω ὡς τὸν Α Ε Γ Ζ, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ Ε Η, Ζ Θ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Ζ Θ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ Ε Η τὸ ἀφανές.

Ἐγγεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν Θ, Ζ, Ε, Η σημείων παράλληλοι κύκλοι οἱ Κ Θ Λ, Μ Ν Ξ Ζ, Ε Ο Π Ρ, Σ Η Τ, καὶ μετακεκινήσθω ὁ τῶν ζωδίων κύκλος, καὶ ὅτε μὲν θέσιν ἐχέτω τὴν Τ Λ Φ Χ Σ Ψ, ὅτε δὲ τὴν Θ Ε Η. καὶ ἐπεὶ αἱ Ζ Θ, Ε Η περιφέρειαι ἴσαι τε εἰσὶ καὶ ἀπεναντίον εἰσὶν, ἴσοι εἰσὶ καὶ οἱ Μ Ν Ξ, Ο Π Ρ κύκλοι. τὰ δὲ ἴσα τῶν παραλλήλων κύκλων τὰ ἀναλλὰξ τμήματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· τὸ ἄρα ὑπὲρ γῆς τῶν

Μ Ν Ξ Ζ

ΜΝΞΖ κύκλε τὸ ΜΝΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γῆν τῷ ΕΟΠΡ κύκλε τῷ ΟΠΡ. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΖΘ, ΕΗ ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον εἰσὶν, ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΖΘ ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΕΗ δύσει. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΖΘ ἀνατέλλει, τυτέστιν ἡ ΥΛ, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Υ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Υ τὴν ΥΞ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ξ παραγίνεται, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΕΗ δύσει, τυτέστιν ἡ ΧΣ, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Χ τὴν ΧΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται. ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ Υ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Υ τὴν ΥΞ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ξ παραγίνεται, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Χ τὴν ΧΟ περιφέρειαν διελθὸν ἀπὸ τὸ Ο παραγίνεται. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Υ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Ξ τὴν ΞΝΜ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται, ἴσος ὢν τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Ο τὴν ΟΠΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παραγίνεται· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ Υ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Υ τὴν ΥΞΝΜ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Χ τὴν ΧΟΠΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παραγίνεται. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Υ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Υ τὴν ΥΞΝΜ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΥΛ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, τυτέστιν ἡ ΘΖ· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Χ τὴν ΧΟΠΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ΧΣ ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, τυτέστιν ἡ ΕΗ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΘΖ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ καὶ ΕΗ τὸ ἀφανές.

Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΘΖ ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ ἡ ΕΗ τὸ φανερόν.

supra terram circuli ΜΝΞΖ æquale eſt ΟΠΡ ſegmento ſub terram circuli ΕΟΠΡ. rurſus, quoniam circumferentiæ ΖΘ, ΕΗ æquales & oppoſitæ ſunt: quo igitur tempore ΖΘ oritur [per 11. Phæn.] hoc ipſo tempore & ΕΗ occidit. ſed tempus in quo ΖΘ oritur, hoc eſt in quo oritur ipſa ΤΛ, tempus eſt in quo punctum Τ incipiens ab ipſo Τ & circumferentiam ΤΞ percurrens pervenit ad punctum Ξ; & tempus in quo ipſa ΕΗ occidit, hoc eſt in quo occidit circumferentia ΧΣ, tempus eſt in quo punctum Χ incipiens à puncto Χ circumferentiam ΧΟ percurrens pervenit ad punctum Ο. tempus igitur in quo punctum Τ incipiens ab ipſo Τ & circumferentiam ΤΞ percurrens pervenit ad punctum Ξ, æquale eſt tempori in quo punctum Χ incipiens ab ipſo Χ & circumferentiam ΧΟ percurrens pervenit ad punctum Ο. commune addatur tempus in quo punctum Τ incipiens ab Ξ & circumferentiam ΞΝΜ percurrens pervenit ad punctum Μ, quod quidem eſt æquale tempori in quo punctum Χ incipiens ab ipſo Ο & circumferentiam ΟΠΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ: quare tempus quidem in quo punctum Τ incipiens ab ipſo Τ & circumferentiam ΤΞΝΜ percurrens pervenit ad punctum Μ, æquale eſt tempori in quo punctum Χ incipiens ab ipſo Χ & circumferentiam ΧΟΠΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ. ſed tempus in quo punctum Τ incipiens ab ipſo Τ & circumferentiam ΤΞΝΜ percurrens pervenit ad punctum Μ, tempus eſt in quo circumferentia ΤΛ, hoc eſt ipſa ΘΖ, permutat conſpicuum hemiſphærium; & tempus in quo punctum Χ incipiens ab ipſo Χ & circumferentiam ΧΟΠΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ, tempus eſt in quo ipſa ΧΣ, hoc eſt ipſa ΕΗ, permutat occultum hemiſphærium: quare quo tempore ΘΖ permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc ipſo tempore & ipſa ΕΗ permutat occultum.

Similiter demonſtrabitur quod quo tempore ipſa ΘΖ permutat occultum hemiſphærium, hoc ipſo tempore & circumferentia ΕΗ permutat conſpicuum.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιϛ'.

Τῶν τῶν ζωδίων κύκλε αἱ ἴσαι περιφέρειαι ὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσυσι τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι χρόνῳ ἀεὶ ἡ ἔγγιον ἔ χειμερινῦ τροπικῦ ἢ ἀπώτερον, ἢ ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχυσαι ὁποτερασῦν τῶν σημαφῶν.

THEOREMA XVI.

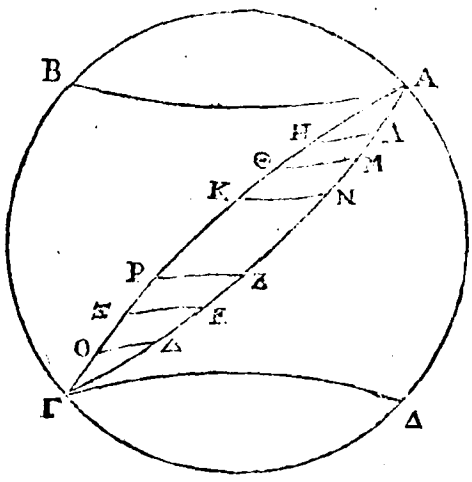
Zodiaci circuli circumferentiæ æquales tempore haud æquali permutant occultum hemiſphærium: ſed majori ſemper tempore quæ vicinior eſt tropico hyberno, quam quæ ab eo remotior eſt: æquali vero tempore quæ ab alterutro contactu æqualiter diſtant.

ΕΣτω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΒ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ἔστω ὁ ΓΔ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΑΓΕ, καὶ ἀπειλήφθωσαν αἱ ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΔΕ, ΕΖ· λέγω ὅτι αἱ ΔΕ, ΕΖ οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσυσι τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ΔΕ περιφέρεια ἢ ΕΖ, περιφερείας.

SIT in mundo horizon circulus ΑΒΓΔ; æſtivus tropicus ſit ΑΒ, hybernus autem ſit ΓΔ; circulus zodiacus poſitionem habeat ΑΓΕ; & ſumantur æquales circumferentiæ ΔΕ, ΕΖ: dico quod circumferentiæ ΔΕ, ΕΖ tempore haud æquali permutant occultum hemiſphærium; ſed majori tempore circumferentia ΔΕ quam ipſa ΕΖ.

Suman-

Sumantur enim circumferentiis Δ E, E Z æquales & oppoſitæ circumferentiæ H Θ, Θ K: circumferentiæ igitur H Θ, Θ K tempore haud æquali permutant conſpicuum hemiſphærium, ſed [per 14. Phæn.] majori tempore circumferentia H Θ quam ipſa Θ K. ſed [per 15. Phæn.] quo tempore circumferentia H Θ permutat conſpicuum hemiſphærium, ipſa Δ E permutat occultum; & quo tempore Θ K permutat conſpicuum hemiſphærium & ipſa E Z permutat occultum: circumferentiæ igitur Δ E, E Z tempore haud æquali permutant occultum hemiſphærium; ſed majori tempore Δ E quam ipſa E Z.



Dico etiam quod tempore æquali quæ æqualiter diſtant ab alterutro contactu tropico.

Sint autem circuli paralleli Δ O, E Ξ, Z P, K N, Θ M, H Λ, in quibus puncta Δ, E, Z, K, Θ, H ferantur: æquali igitur tempore H Θ, Λ M [per 14. Phæn.] permutant conſpicuum hemiſphærium. ſed [per 15. Ph.] quo tempore circumferentia Θ H permutat conſpicuum hemiſphærium, ipſa Δ E permutat occultum; & & quo tempore Δ M permutat conſpicuum hemiſphærium, circumferentia Ξ O permutat occultum: quare E Δ, O Ξ æquali tempore permutant occultum hemiſphærium.

Απειλήφθωσαν γὰρ τῶν Δ E, E Z περιφερειῶν ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ H Θ, Θ K· αἱ H Θ, Θ K ἄρα περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ H Θ ἢ Θ K. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ H Θ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ Δ E τὸ ἀφανές, ἐν ᾧ δὲ ἡ Θ K τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἐξαλλάσσει, ἡ E Z τὸ ἀφανές· αἱ Δ E, E Z ἄρα περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ Δ E τῆς E Z.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἑκατέρωσε τῶν τροπικῶν σωναφῶν.

Εστωσαν γὰρ καθ' ὧν φέρεται τὰ Δ, E, Z, K, Θ, H σημεῖα ὡσαύτως κύκλοι οἱ Δ O, E Ξ, Z P, K N, Θ M, H Λ· αἱ H Θ, Λ M ἄρα περιφέρειαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ Θ H ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ Δ E τὸ ἀφανὲς ἐξαλλάσσει, ἐν ᾧ δὲ ἡ Λ M ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ Ξ O τὸ ἀφανὲς ἐξαλλάσσει· αἱ E Δ, O Ξ ἄρα περιφέρειαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον.

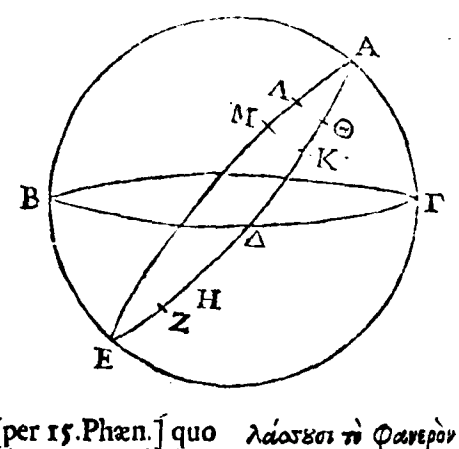
THEOREMA XVII.

Ex circumferentiis æqualibus & æqualiter diſtantibus ab æquinoctiali circulo, quæ quidem ſunt ad diverſas partes ipſius æquinoctialis, quo tempore altera permutat conſpicuum hemiſphærium, altera permutat occultum; & quo tempore altera occultum, altera permutat conſpicuum.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιζ'.

Τῶν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἰσημερινοῦ περιφερῶν ἴσων τε καὶ ἴσον ἀπεχουσῶν τοῦ ἰσημερινοῦ, ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ ἑτέρα τὸ ἀφανές· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἡ ἑτέρα τὸ φανερόν.

SIT in mundo horizon circulus A B Γ, æquinoctialis ſit B Δ Γ, zodiacus circulus poſitionem habeat A E Θ; & ad diverſas partes æquinoctialis circuli B Δ Γ ſint æquales, & æqualiter diſtantes ab ipſo æquinoctiali, circumferentiæ Θ K, Z H: dico quod quo tempore Θ K permutat conſpicuum hemiſphærium, ipſa Z H permutat occultum.



Ponatur ipſi Z H æqualis & oppoſita circumferentia M Λ: circumferentiæ igitur M Λ, Θ K [ex 14. Ph.] æquali tempore permutant conſpicuum hemiſphærium. ſed [per 15. Phæn.] quo tempore M Λ permutat conſpicuum hemiſphæ-

Εστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ A B Γ, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ἔστω ὁ B Δ Γ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω ὡς τὸν A E Θ, καὶ τοῦ B Δ Γ ἰσημερινοῦ ἐφ' ἑκάτερα ἴσαι τε καὶ ἴσον ἀπέχουσαι περιφέρειαι ἔστωσαν αἱ Θ K, Z H· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Θ K ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ Z H τὸ ἀφανές.

Κείσθω γὰρ τῇ Z H ἴση τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρεια ἡ M Λ· αἱ M Λ, Θ K ἄρα περιφέρειαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἀλλ' ἐν ᾧ χρόνῳ M Λ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ

ΖΗ τὸ ἀφανὲς ἐξαλλάσσει· καὶ ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΘΚ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ ΗΖ περιφέρεια τὸ ἀφανὲς ἐξαλλάσσει.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΘΚ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἡ ΗΖ τὸ φανερὸν ἐξαλλάσσει.

rium: & ipſa ΖΗ permutat occultum: quare quo tempore ΘΚ permutat conſpicuum hemiſphærium, & circumferentia ΗΖ permutat occultum.

Eadem ratione quo tempore ΘΚ permutat occultum hemiſphærium, & ipſa ΗΖ permutat conſpicuum.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιή'.

Τῶν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ ὑπολαμβανομένῳ ὑπὸ τε ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἴσων περιφερειῶν, αἱ πλείονι χρόνῳ ἡ ἑτέρα αὐτῶν ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ λοιπὴ τὸ ἀφανές· καὶ ἡ τυχοῦσα τῆς τυχούσης.

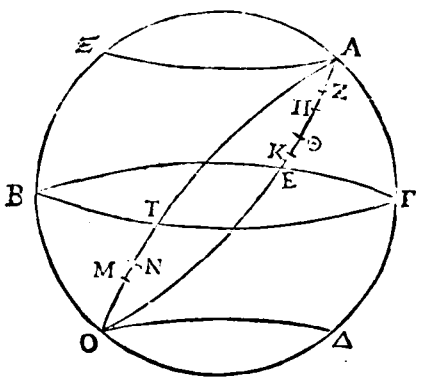
THEOREMA XVIII.

Ex æqualibus circumferentiis, quæ ſunt in ſemicirculo comprehenſo inter æquinoctialem & æſtivum tropicum, altera ex ipſis majori tempore permutat conſpicuum hemiſphærium, quam reliqua occultum; & alia utcunque ſumpta, alia utcunque ſumpta.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΞ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΔΟ, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ἔστω ὁ ΒΕΓ, ὁ δὲ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΑΕΟ, καὶ ἐν τῷ ΤΑΕ ἡμικυκλίῳ ἴσαι περιφέρειαι ἔστωσαν αἱ ΖΗ, ΘΚ, ἐγγίων δὲ ἔστω τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ΗΖ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΘΚ τὸ ἀφανές, καὶ ἡ τυχοῦσα τῆς τυχούσης.

SIT in mundo horizon circulus ΑΒΓ; æſtivus tropicus ſit ΑΞ, hybernus autem ΔΟ; circulus æquinoctialis ſit ΒΕΓ; zodiacus circulus poſitionem habeat ΑΕΟ; ſint autem in ſemicirculo ΤΑΕ æquales circumferentiæ ΖΗ, ΘΚ, quarum ipſa ΖΗ propinquior ſit tropico æſtivo: dico quod circumferentia ΗΖ majori tempore permutat conſpicuum hemiſphærium quam ipſa ΘΚ occultum; & alia utcunque ſumpta, alia utcunque ſumpta.

Κείσθω γὰρ τῇ ΘΚ περιφερείᾳ ἴση τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρεια ἡ ΜΝ· ἐγγίων ἄρα ἡ ΖΗ περιφέρεια τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ, ἤπερ ἡ ΜΝ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΖΗ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ ΜΝ τὸ φανερόν. ἀλλ' ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΜΝ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ ΘΚ τὸ ἀφανές· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΖΗ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ ΘΚ τὸ ἀφανές. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ τυχοῦσα τῆς τυχούσης ἐν πλείονι χρόνῳ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ λοιπὴ τὸ ἀφανές.



Ponatur ipſi ΘΚ æqualis & oppoſita circumferentia ΜΝ: circumferentia igitur ΖΗ propinquior eſt tropico æſtivo quam ipſa ΜΝ: quare [per 14. Phæn.] ΖΗ majori tempore permutat conſpicuum hemiſphærium quam ipſa ΜΝ conſpicuum. verum [per 17 Ph.] quo tempore circumferentia ΜΝ permutat conſpicuum hemiſphærium, & ipſa ΘΚ permutat occultum: majori igitur tempore circumferentia ΖΗ permutat conſpicuum hemiſphærium quam ΘΚ occultum. Simili modo oſtendetur, quod & alia utcunque ſumpta majori etiam tempore permutat conſpicuum hemiſphærium quam altera occultum.

Ὡσαύτως δὲ καὶ τῶν ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ τῷ ὑπολαμβανομένῳ ὑπό τε τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ χειμερινοῦ τροπικοῦ ἴσων περιφερειῶν, ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ἑτέρα αὐτῶν ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ λοιπὴ τὸ φανερόν· καὶ ἡ τυχοῦσα τῆς τυχούσης.

Hoc eodem modo, in altero ſemicirculo contento inter æquinoctialem & hybernum tropicum, poteſt demonſtrari quod, ex circumferentiis æqualibus, altera majori tempore permutat occultum hemiſphærium quam reliqua conſpicuum; & alia utcunque ſumpta, alia utcunque ſumpta.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ.

FINIS EUCLIDIS PHÆNOMENΩN.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΟΠΤΙΚΑ.

EUCLIDIS
OPTICA.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΟΠΤΙΚΑ.

EUCLIDIS

OPTICA.

ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΣ [1] τὰ κατὰ τὴν ὄψιν, ὧν θεωρίας ἐκόμιζέ τινας, συνεπιλογιζόμενος [3] ὅτι κατ' εὐθείας γραμμὰς πᾶν φῶς φέρεται· σημεῖον δὲ τούτου μέγιστον τάς τ' ἀπὸ τῶν σωμάτων ἀποῤῥιπτομένας σκιὰς, καὶ τὰς ἀπὸ τῶν θυρίδων τε καὶ ὀπῶν φερομένας αὐγὰς καλεῖν. ἕκαστον δὲ τούτων οὐκ ἂν ἐγίνετο, καθάπερ τῷ θεωρεῖται γινόμενον, εἰ μὴ αἱ ἀπὸ τοῦ ἡλίου φερόμεναι ἀκτῖνες κατά τινας εὐθείας ἐφέροντο. ὅτι τε τὸ παρ' ἡμῖν πυρὶ ἀποστελλόμενας ἔφασκεν αὐγὰς, αἰτίας εἶναι τοῦ τὰ φωτίζεσθαί τινα τῶν προσκειμένων σωμάτων, καὶ ἀποῤῥίπτειν σκιὰς, τὰς μὲν ἴσας τοῖς προσκειμένοις σώμασι, τὰς δὲ μείζονας, τὰς δὲ ἐλάττονας τῶν προσκειμένων σωμάτων. καὶ ἴσας μὲν ἀποῤῥίπτειν σκιὰς, ὅσα τοῖς φωτοῖς φωτίζοντί τε πυρὶς ἴσα ᾖ· τὰς τ' ἐσχάτας ἀκτῖνας ὅτι τούτων συμβαίνειν παραλλήλους γίνεσθαι, καὶ μὴ συναπτούσας ἑαυτὰς, μείω τιθὲν σκιὰν, μήτε μὴν ἐξαπλουμένας αὔξειν, ἀλλ' οἷόν ἐστι τὸ ὑπακουόμενον, τοιαύτην καὶ τὴν σκιᾶς συμμετρίαν φυλάττειν· ἐλάττονες δὲ αἱ τῶν σωμάτων σκιαί εἰσιν, ὅταν τὰ φωτίζοντα πυρὰ μείζονα ᾖ· τὰς γὰρ ἐσχάτας ἀκτῖνας συμπίπτειν ἑαυταῖς· διὸ δὴ καὶ μείω τὰς σκιάς. μείζους δὲ τῶν σωμάτων αἱ σκιαί εἰσιν, ὅταν τὰ φωτίζοντα πυρὰ ἐλάττονα ᾖ· τὰς γὰρ ἐσχάτας ἀκτῖνας ὅτι τούτων ἐξαπλοῦσθαι συμβαίνει, καὶ μεῖζον τὸ σκιαζόμενον μέρος ἀποτελεῖν. οὐδέποτε δ' ἂν τοῦτο συμβαίνειν, εἰ μὴ αἱ ἀπὸ τοῦ πυρὸς φερόμεναι ἀκτῖνες ἐπ' εὐθείας ἐφέροντο. ἐκφαίνεται δὲ τούτων πάντων τοῦτο ὅτι τῶν κατασκευαστῶν γινομένων θεωρεῖσθαι συμβαί-

CUM ea quæ ad adſpectum attinent demonſtraret, jucundas aliquot rationes adferebat, quibus concluderet, omnem lucem ſecundum rectas lineas ferri: hujuſque rei maximum argumentum dabat, tum umbras à corporibus projectas, tum radios per feneſtras & rimas delatos: quorum nihil fieri videremus, ut nunc fit, niſi radii à ſole miſſi in rectam lineam tenderent. dicebat etiam, radios ab igne hoc noſtro emiſſos, cauſam eſſe cur objecta quædam corpora partim illuſtrentur, partim umbras jaciant nunc æquales objectis corporibus, nunc majores, nunc minores. atque æquales quidem umbras ab iis corporibus projici dicebat, quæ æqualia eſſent ſplendidis & lucentibus ignibus: in his enim accidere aſſerebat, ut & extremi radii fierent paralleli, & neque concurrendo umbram minuerent, neque ſeſe explicando eam augerent, ſed quale eſſet objectum corpus, talem umbræ commenſum radii illi ſervarent: minores vero ſunt umbræ corporibus, cum lumina illuſtrantia majora ſunt; extremos enim radios concurrere, ob idque umbram minorem reddere contingit. majores denique ſunt umbræ objectis corporibus, cum illuſtrantia lumina minora ſunt: accidit enim in his, ut extremi radii ſeſe dilatent & opacam partem majorem faciant. quod fieri poſſe negabat, niſi radii, quos lumen projicit, in rectam lineam tenderent. ſed id omnium clariſſime ſpectari poteſt in his quæ ad id monſtrandum præcipue comparata

1 In *MS. Savil.* τὰ κατὰ τὴν Εὐκλείδου ὀπτικῶν. 2 Sc. ὁ Εὐκλείδης. 3 In *Cod. Bodl.* διότι.

ſunt. ſi enim lucernæ cuipiam, ut libet poſitæ, apponatur tabella, cui rimula per tenuem ſertulam facta ſit, ita ut rimula illa medio lucernæ reſpondeat; huic autem tabellæ, ex altera ejus parte, altera tabella prope admoveatur, in quam incidat radius per rimulam delatus; inveniemus radium illum, qui per prioris tabellæ rimulam in poſteriorem tabellam fertur, rectis omnino lineis contineri, eum quoque qui medium lucernæ & rimulam tabellæ connectit, in eadem eſſe recta linea. itaque cum omnem lucem ferri in rectam lineam evidens cuilibet & exploratum ſit, inde ſe ad aſpectus explicationem convertens, concedendum cenſuit, ut radii ab oculo manantes in rectam lineam ferrentur, ita tamen ut alii ab aliis intervallo aliquo diſtarent. ex quo fieri dicebat, ut nullum aſpectabile ſimul totum ſpectaretur, hanc rationem adferens. ſæpenumero enim acu aut alio ejuſmodi corpuſculo aliquo in terram delapſo, cum plerique illud ſtudioſius quærerent, eodem modo ſæpius fruſtra quæſiverunt, cum nihil impediret quo minus corpuſculum, quod quærebant, cernerent: & tamen paulo poſt, cum oculos in eum locum conjicerent, in quo erat illud corpuſculum, acum viderunt. ex quo conſtat, cum corpuſculum ipſum in terram delapſum non cernatur, neque locum ipſum, in quo illud collocatum erat, cerni: ideoque non omnes partes loci ſubjecti oculo ſpectantis videri. ſi enim omnes loci partes cernerentur, ipſum quoque corpuſculum, quod diſquiritur, cerneretur: atqui id non cernitur. quinetiam converſus ad eos, qui intentis oculis libros inſpiciunt, aſſeruit ne hos quidem videre poſſe omnes literas unius paginæ, eo quod ſæpe coacti literas quaſdam raro & ſparſim ſcriptas oſtendere, id non poſſent; propterea quod oculorum radii non ad ſingulas literas feruntur, nec continui & conjuncti inter ſe ſunt; ſed aliquo intervallo alii ab aliis diſtant: atque ideo pleraſque objectarum literarum non cernunt: ex quo patet, fore ut totus paginæ locus non videatur. hoc idem in aliis quæ videntur, uſu venit. quocirca quæ cernuntur, ſimul tota non cernuntur: exiſtimantur autem cerni, propter nimiam celeritatem radiorum nihil omittentium, id eſt, continue & obiter per rem ſubjectam delatorum: nec ita ſalientium, ut aliquam

ται. λύχνιν δὲ ὅπως δυνατὸν κεμφὺν εἰ περιθείη τύτῳ πλυχίον ἔχον [1] ὀπτομένῳ λεπῇ φορμίῳ, ὥστε ἡ τ ὀπτομένῳ κατὰ μέσον τ λύχνιν πίπτειν, τῷ δὲ πλυχίῳ κατὰ τὰ ἕτερα μέρη παραπλήσιον πλυχίον ἔγγιον ᾧ περιτεθεῖ ἡ αὐγὴ ἡ ἀφ' τ ὀπτομένης φερομένη, πάντως τὴν περιπίπτουσαν αὐγὴν τῷ πλυχίῳ, εὐθείας γραμμῆς περιεχομένην εὑρήσομεν, ἡ τ ὀπτιζευγνύουσαν τό, τε μέσον τ λύχνιν, ἡ τ ὀπτομένῳ τ πλυχίν κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθείαν ὖσαν. φαργὲς δ' ἐστὶν ὅτι τ, ὅπη πᾶν φῶς κατ' εὐθείαν γραμμὴν φέρεται, ἡ πᾶσι περιδηλον, μεταβαίνων ὀπὶ τ ὄψιν, ἠξίουν ἡ τὰς ἀπ' αὐτῆς ἐκχεομένας ἀκτῖνας ὁμολογεῖν, κατ' εὐθείας φέρεσθαι γραμμάς, ἡ ταύτας εἶναι [2] διαστήματα. ἡ ἀφ' τούτου μηδὲ τὰ ὁρώμενα ἅμα ὅλα ὁρᾶσθαι, ὑπολαμβάνοντι φέρειν τοιαύτην. πολλάκις δὲ βελόνης, ἤ τινος τοιούτου ἑτέρου σωματίου ἐκπεσόντος εἰς τὸ ἔδαφος, φιλοπονώτερόν τινες περισκέψασθαι τῇ ζητήσει· ἡ τ αὐτὸν τρόπον πολλάκις ἐμάτυσαν, οὐδενὸς ὀπτομένου τῷ ζητουμένῳ σωματίῳ· εἶτα μέντοι γε ὕστερον ὀπτάλλοντες τ ὄψιν τῷ τόπῳ, ἐν ᾧπερ ἦν τὸ σωμάτιον, εἶδον τ βελόνην. δῆλον ὡς ὅτε οὐκ ἐωρᾶτο τὸ ἐξερριμμένον, οὐδὲ ὁ τόπος, ἐν ᾧ ἦν, ἑωρᾶτο· ὥστε οὐκ ἀπὸ τ ὄψιν τ ζητουντος κεμφοῦ τόπον, μὴ ἅπαντα τὰ μέρη θεωρεῖσθαι· εἰ γὰρ ἐθεωρεῖτο, καὶ τὸ ζητούμενον ἂν ἑωρᾶτο· οὐκ ἑωρᾶτο δέ. ὀπί τε τῶν ἀτενιζόντων τοῖς βιβλίοις συνιζάμενος, ἔφασκε μηδὲ τούτους ἂν δύασθαι πάντα τὰ ἐν σελίδι γράμματα ὁρᾶν· πολλὰ γὰρ ἀναγκαζομένους λέξαι τ ἀσαφῶς γραφομένων γραμμάτων, μὴ δύασθαι δεῖξαι, διὰ τὸ μὴ πρὸς πάντα τὰ γράμματα τὰς ὄψεις φέρεσθαι, ἀλλ' ἐκ βραχυμάτων ταύτας ἀπάρχειν, καὶ πολλὰ τῶν καταταγμένων μὴ θεωρεῖν. ὥστε ἐκ τούτου φανερὸν ὅτι, διόπερ οὐδ' ὁ τόπος τῆς σελίδος ὅλος ὁρασθήσεται. καὶ ὀπὶ τῶν ἄλλων θεαμάτων τὸ αὐτὸ συμβαίνει. ὥστε οὐκ ὁρασθήσεται ἅμα ὅλα τὰ ὁρώμενα· δοκεῖ δ' ὁρᾶσθαι διὰ τὸ κινεῖσθαι τὰς ὄψεις ὑπερβολῇ τάχους μηδὲν ἀπολειπούσας, τοῦτ' ἔστι κατὰ συνέχειαν φερομένας ἡ μὴ ἀλλο-

μένας.

1 Al. ἐπτομένῳ. 2 In Cod. Bodl. ἀφεστήκασιν. mox in MS. Savil. τὰ ὁρώμενα μὴ ἅμα.

μένας. πρὸς δὲ τὸ τῇ ὄψει προσπίπτειν τὰ εἴδωλα ἀπὸ τῶν ὁρωμένων εἰς τὸ κινεῖσθαι αὐτῷ πρὸς τὸ καταλαβεῖν τὸ ὁρώμενον, ἔφερεν αἰτίαν τοιαύτην· ἐν γὰρ τῷ ζητουμένῳ σώματος καὶ τοῦ τὸ βιβλίον ἀτενίζοντος, ἀπορίαν τοιάνδε ἔλεγεν· εἰ ἴσως κατ' εἰδώλων ἐμπλησιν τὸ ὁρατικὸν πάθος, καὶ ἀπὸ παντὸς σώματος διηνεκῶς εἴδωλα ἀπόρρει, ἃ κινεῖ ἡμῶν τὴν αἴσθησιν, τίς ἡ αἰτία γίνεται, δι' ἣν οὐχ ὁρᾷ ὅ, τε ζητῶν, τὴν βελόνην, καὶ ὁ τὸ βιβλίον ἀτενίζων, πάντα τὰ γράμματα, πότερόν ποτε διὰ τὸ μετεωρίζεσθαι τῇ διανοίᾳ; ἀλλὰ σφόδρα ἧττον ὀλιγωροῦσι ζητοῦσι, καὶ ὁλοχερῶς οὐχ εὑρίσκουσι· πολλάκις δὲ ὁμιλοῦντες ἀλλήλοις, καὶ περισπώμενοι τῇ διανοίᾳ, εὑρίσκουσι ῥᾷττον. ἀλλ' οὐ πάντα τὰ εἴδωλα εἰσπίπτεται εἰς τὴν ὄρασιν. ἐν τίς αἰτία δ' ἀποκλείεσθαι τὰ μὴ εἰσπιπτόμενα; καὶ μὴν τὴν φύσιν ἔφασκε κατὰ τὰ ζῶα τὰ μὲν τῆς ἀκοῆς ὑποδοχὴν κατασκευάσαι, τὰ δὲ μὴ· ἀκοὴν μὲν γὰρ καὶ γεῦσιν καὶ ὄσφρησιν, κοίλα κατασκεύακεν ἐντὸς, ὡς ἔξωθεν αὐτοῖς προσπίπτειν σώματα κινήσοντα τὰς αἰσθήσεις ταύτας· ἀκοὴ μὲν γὰρ φωνὴ προσπίπτουσα, τόπον ὑπεδέξατο ἔρημον εὐρίσκειν πρὸς τὸ ἀναμένειν, καὶ μὴ κατὰ τὴν προσπτωσιν εὐθέως ἀποπαλῆσαι, τήν τ' αἴσθησιν ἀκίνητον διαφυλάττειν, καὶ τὴν ὑπερεχομένην συγχέαι φωνήν. ὁμοίως δὲ καὶ ὄσφρησιν· ὑπὲρ μὲν γὰρ γεύσεως τί δεῖ καὶ λέγειν; διὸ καὶ μάλιστά πως αὐταὶ αἱ αἰσθήσεις κοίλαι τε καὶ ἐντοσθιδεῖς κατεσκευάσθησαν πρὸς τὸ ἐμμένειν τὰ προσπίπτοντα σώματα πλείονα χρόνον. ὑπὲρ δ' ὁράσεως ἦν, εἴπερ ἔξωθεν αὐτῇ προσέπιπτε τὰ κινήσοντα αὐτὴν σώματα, καὶ μὴ αὐτὴ ἐξαπέστελλέ τι ἀφ' ἑαυτῆς, ἔδει τὴν κατασκευὴν αὐτῆς κοίλην τε καὶ εὔδετον πρὸς ὑποδοχὴν τῶν προσπιπτόντων σωμάτων εἶναι· νυνὶ δὲ θεωρεῖται τοῦτο μὴ οὕτως ἔχον, ἀλλὰ μᾶλλον σφαιροειδὴς οὖσα θεωρεῖται ἡ ὄρασις· πρὸς ἣν τὸ πιστὸν εἶναι κατὰ τὸ παρὸν, τὸ ἀκοντας εἶναι τὰς ἀκτινομβόλας καὶ κινούσας τὸ ὁρατικὸν πάθος, ἀρκούντως ἐδόκει εἰρῆσθαι. πρὸς δὲ τὸ τὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τοῖς ὄψεσι κειμένας προφερείας εὐθείας φαίνεσθαι, ἔλεγε τάδε· διότι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένη ὄψις ὑπενοῦν θεωρητὸν τοιαύ-

partem intactam prætereant. illud vero quod plerique dicunt, imaginem à re visa ad oculum fluere, qua motus oculus rem visam comprehendat, ita refellebat: nam & de corpusculo quod disquirebatur, & de eo qui intentis oculis librum inspiceret, hanc dubitationem adferebat: si visio fiat affluxu imaginum ad oculum, ab omnique corpore imagines continenter fluant, quæ nostrum sensum moveant, quî fit ut acum quærens eam non videat, aut librum attente inspiciens omnia elementa non cernat? idne ideo fit, quod mentem majoribus rebus intentam habeant? atqui nihilo secus ratiocinantur, dum rem quærunt nec plane inveniunt: & tamen sæpe dum alios alloquuntur, & mentem aliis rebus occupatam & distractam habent, citius reperiunt. at (inquiunt) non omnes imagines in visum confluunt. unde igitur fit (inquam) ut quædam non influant, sed potius excludantur? enimvero dicebat naturam in animalibus sentiendi instrumenta ita feciſſe, ut eorum quædam ad recipiendum accommodata essent, quædam non: auditum quippe gustatum & odoratum intus cava fecit, ut reciperent corpora venientia extrinsecus, quæ hos sensus moverent: vox enim ad auditum applicans, locum idoneum reperire debuit, ut in eo aliquandiu maneret, ne si statim post applicationem inde resiliret, sensum immotum redderet, vocemque delatam confunderet. eadem ratione odoratum cavum fecit natura: nam de gustatu quid dicere attinet? concavi ergo & cavernæ instar à natura facti sunt hi sensus, ut eis adhibita corpora diutius immorentur. quamobrem si in visione, corpora visum propius accedant extrinsecus, quam ut oculus aliquid ex se emittat, deberet ipse oculus cavus esse, ut ad receptionem imaginum esset commodior. id autem aliter se habere constat; globosum enim esse oculum, perspicuum est. hæc igitur in præsentia ei sufficere visa sunt, ut confirmaret radios effusos & emissos esse, qui videndi affectum moveant. porro, ut ostenderet circumferentias in eadem superficie cum visu positas, rectas lineas oculo videri, has rationes adferebat: quia visus, in eodem plano positus in quo est res spectata, talem habet

bet ſitum, ut neque ſublimior ſit quam res quæ ſpectatur, neque depreſſior: (id enim eſt eſſe in eodem plano.) ſi ergo viſus neque ſublimior neque humilior ſit quam circumferentia, quæ in eodem plano deſcribitur; radios igitur projicit non ſublimiores quidem ad has circumferentiæ partes, depreſſiores vero ad illas; ſed radios omnes per planum delatos æqualiter ad omnes circumferentiæ partes emittit; ut eadem cauſa ſit, cur & planum, in quo eſt oculus, rectæ lineæ ſpeciem habeat, & circumferentia in eodem plano deſcripta. planum enim, quod rectæ lineæ inſtar ad oculum ponitur, id eſt, quod productum ſecat centrum oculi, ipſum quidem cerni non poteſt, propterea quod nullus radiorum ab oculo emiſſorum in illud cadit: ejus vero extremum cernitur, quod eſt linea. id vero ideo dicit, quia ea linea quæ oculo objecta manet, reliquis plani partibus officiens, prohibet planum cerni. eadem vero cauſa quæ efficit ut planum quod in rectam lineam ad oculum poſitum eſt, recta linea eſſe videatur, efficit etiam ut circumferentiarum in eodem plano jacentium in quo eſt oculus, partim majores appareant, cum plures radii ad eas applicant; partim æquales, cum æquales; partim minores, cum illi veluti radiorum anguli, qui ad oculum fiunt, minores ſunt.

τὴ θέσιν, ὥστε μήτε ὑψηλοτέρα εἶναι ἧς θεωρεῖται, μήτε ταπεινοτέρα· τὸ δὲ τὸ αὐτὸ ἐπιπέδῳ κεῖσθαι, τοῦτ' ἔστιν· εἰ οὖν ὄψις τε ταπεινοτέρα ἢ τε ὑψηλοτέρα θέσιν ἡ ὄψις τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γεγραμμένης περιφερείας, οὐχὶ τοῖς μὲν μέρεσιν ὑψηλοτέρας προβάλλει ἀκτῖνας, τοῖς δὲ ταπεινοτέρας, ἀλλὰ πᾶσι τοῖς μέρεσι τὰς περιφερείας ἴσας τὰς διὰ τοῦ ἐπιπέδου φερομένας ἀκτῖνας προβάλλει, ὥστε τὴν αὐτὴν γίνεσθαι αἰσθησιν, τό τε τὸ ἐπίπεδον εὐθείας φαντασίαν ἀπολιπεῖν, καὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γεγραμμένῳ περιφερεσθαι. καὶ γὰρ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπ' εὐθείας κείμενον τῇ ὄψει, αὐτὸ μὲν ἀθεώρητόν ἐστι, διὰ τὸ μὴ προσπίπτειν αὐτῷ μηδεμίαν τῶν ἀπὸ τῆς ὄψεως ἐκπεμπομένων ἀκτίνων· τὸ δὲ πέρας αὐτοῦ θεωρεῖται, ὅπερ ἐστὶν ἡ [1] γραμμή. λέγει δέ, [2] διὰ τὸ τὸ πρὸς τῇ ὄψει μένειν γραμμήν, ἥτις τοῖς λοιποῖς τοῦ ἐπιπέδου μέρεσιν ἐπιπροσθοῦσα, ἀθεώρητον ποιεῖ τὸ ἐπίπεδον. ἡ δὲ αὐτὴ αἰτία ἡ περὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐπ' εὐθείας κειμένου τῷ ὄμματι ποιεῖ εὐθείας ἐπιδιδόναι φαντασίαν, καὶ τῶν περιφερειῶν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένων τῷ ὄμματι, φαίνεσθαι δὴ τὸ μὲν μεῖζον, ὅταν πλείονες ὄψεις ἐπιβάλλωσι, τὸ δὲ ἴσον, ὅταν ἴσαι, τὸ δὲ ἔλασσον, ὅταν ἐλάσσονες γίγνωνται τῶν ὄψεων, οἷον γωνίαι τινὲς περὶ τῷ ὄμματι.

[POSITIONES.]

1. Ponatur ergo radios ab oculo emiſſos in rectam lineam ferri, aliquoque intervallo inter ſe diſtare.

2. Item, figuram à radiis comprehenſam eſſe conum, qui verticem habeat in oculo, baſim vero in extremis rerum viſarum.

3. Item, ea cerni, ad quæ radii perveniunt.

4. Item, ea non cerni, ad quæ radii non perveniunt.

5. Item, quæ ſub majore angulo cernuntur, majora exiſtimari.

6. Item, quæ ſub minore angulo cernuntur, minora putari.

7. Item, quæ ſub æquali angulo cernuntur, æqualia exiſtimari.

[ΘΕΣΕΙΣ.]

α'. Ὑποκείσθω οὖν, τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ὄψεις κατ' εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι, διάστημά τι ποιούσας ἐπ' ἀλλήλων.

β'. Καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ὄψεων περιεχόμενον σχῆμα εἶναι κῶνον, τὴν κορυφὴν μὲν ἔχοντα πρὸς τῷ ὄμματι, τὴν δὲ βάσιν πρὸς τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμένων.

γ'. Καὶ ὁρᾶσθαι μὲν ταῦτα, πρὸς ἃ ἂν αἱ ὄψεις προσπίπτωσι.

δ'. Μὴ ὁρᾶσθαι δέ, πρὸς ἃ ἂν μὴ προσπίπτωσιν αἱ ὄψεις.

ε'. Καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεσθαι.

ϛ'. Τὰ δ' ὑπὸ ἐλάσσονος, ἐλάσσονα.

ζ'. Ἴσα δὲ τὰ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα.

1 In *MS. Savil.* περιφέρεια. 2 In *MS. Savil.* διὰ τὸν πρὸς τῇ ὄψει καμπύλον γραμμόν.

η'. Καὶ

η'. Καὶ τὰ μὴ ὑπὸ μετεωροτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα, μετεωρότερα φαίνεσθαι.

8. Item, quæ à ſublimioribus radiis videntur, ſublimiora apparere.

θ'. Τὰ δ' ὑπὸ ταπεινοτέρων, ταπεινότερα.

9. Quæ vero à depreſſioribus, depreſſiora.

ι'. Καὶ ὁμοίως τὰ μὴ ὑπὸ δεξιωτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα, δεξιώτερα φαίνεσθαι.

10. Item, quæ à dexterioribus radiis ſpectantur, dexteriora apparere.

ια'. Τὰ δ' ὑπὸ ἀριστερωτέρων, ἀριστερώτερα.

11. Quæ vero à ſiniſterioribus, ſiniſteriora.

ιβ'. Τὰ δ' ὑπὸ πλειόνων [1] γωνιῶν ὁρώμενα, ἀκριβέστερον φαίνεσθαι.

12. Item, quæ ſub pluribus angulis ſpectantur, accuratius videri.

Ταῦτα μὲν οὖν ὑποκείσθω ἡμῖν, ἐξ ὧν αἱ ἑξῆς θεωρήματα δειχθήσεται.

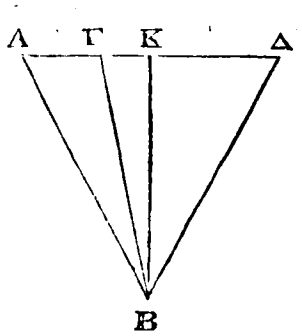
Hæc igitur à nobis poſita ſint, è quibus ſequentia theoremata demonſtrentur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Οὐδὲν τῶν ὁρωμένων ἅμα ὅλον ὁρᾶται.

PROPOSITIO I. THEOR.

Nullum aſpectabile ſimul totum cernitur.



Ἔστω γὰρ ὁρώμενόν τι τὸ ΑΔ, ὅμμα δὲ ἔστω τὸ Β, ἀφ' οὗ διεσταλμένων ὄψεις αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΒΚ, ΒΔ. οὐκοῦν ἐπεὶ ἐν διαστήματι φέρονται αἱ προσπίπτουσαι ὄψεις, οὐκ ἂν διαστείλοιεν συνεχῶς πρὸς τὸ ΑΔ· ὥστε γένοιτο ἂν καὶ κατὰ τὸ ΑΔ διαστήματα, οἷς ἃ αἱ ὄψεις οὐ προσέπιπτον· οὐκ ἄρα ἐφθήσεται ἅμα ὅλον τὸ ΑΔ.

SIT enim aſpectabile aliquod ΑΔ; oculus vero Β, à quo radii pergant ΒΑ, ΒΓ, ΒΚ, ΒΔ. quia igitur [per 1. poſit.] radii ab oculo exſilientes ita feruntur, ut aliquo intervallo alii ab aliis diſtent; non ergo continui incidunt in aſpectabile ΑΔ: ſunt igitur aliqua intervalla in ΑΔ, ad quæ radii non pervenient: quare totum ΑΔ ſimul non cernetur.

Δοκεῖ δὲ ὁρᾶσθαι ἅμα τῶν ὄψεων ταχὺ φερομένων.

Exiſtimatur autem totum ſimul cerni, propter delatorum radiorum celeritatem.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Δεῖ γὰρ τὸ ὁρώμενον ἀπόστασίν τινα ἔχειν πρὸς τὸ ὅμμα· ἔτως γὰρ ὁραθήσεται. ὡς ἂν μηδεμίαν ἀπόστασιν ἔχει, οὐκ ὁραθήσεται.

SCHOLIUM.

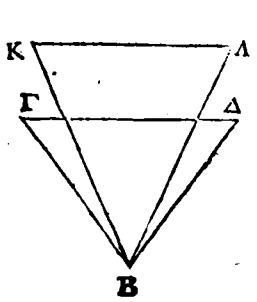
Oportet enim aſpectabile aliquam ab oculo diſtantiam habere; ſic enim videbitur. quod ſi nullam habeat diſtantiam ab oculo, non videbitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Τῶν ἴσων [2] μεγεθῶν ἐν διαστήματι [3] κειμένων τὸ ἔγγιον κείμενα ἀκριβέστερον ὁρᾶται.

PROP. II. THEOR.

Æqualium magnitudinum inæqualiter diſtantium, quæ propius poſitæ ſunt accuratius cernuntur.



Ἔστω ὄμμα μὲν τὸ Β, ὁρώμενον δὲ τὸ ΓΔ καὶ τὸ ΚΛ, χρὴ δὲ νοεῖν αὐτὰ ἴσα τε καὶ ὁμόλληλα, ἔγγιον δὲ ἔστω τὸ ΓΔ, καὶ διεσταλμέναι ὄψεις αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΚ, ΒΛ. οὐ γὰρ ἂν ἐπιμένοιμεν, ὡς αἱ ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος πρὸς τῷ ΚΛ διεστηκυῖαι ὄψεις διὰ τῶν Γ, Δ σημείων ἐλεύσονται· ἡ γὰρ ἂν περιγώνιον τὸ ΒΛΚ ἡ ΚΛ μείζων ἂν εἴη τῆς ΓΔ [4]. ὑποκείσθω δὲ καὶ ἴση· ἐκεῖνο τὸ ΓΔ ὑπὸ

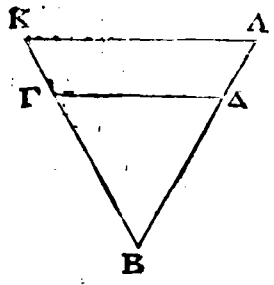
SIT oculus Β, aſpectabiles vero magnitudines ΓΔ & ΚΛ, quæ æquales & parallelæ cogitandæ ſunt; propior autem oculo ſit ΓΔ quam ΚΛ, & emittantur ab oculo radii ΒΓ, ΒΔ, ΒΚ, ΒΛ. nunquam dicemus fieri poſſe, ut radii, à Β oculo ad ΚΛ tendentes, tranſeant per Γ,Δ puncta: alioqui [ex ſchol. ſeq.] trianguli ΒΛΚ latus ΚΛ majus eſſet latere ΓΔ [trianguli ΒΔΓ.] atqui ΚΛ poſita eſt æqualis ipſi ΓΔ: quare ΓΔ

1 Forte ἀκτίνων, ut in ſecunda propoſitione πλειόνων ὄψεων: eſt enim hoc γωνιῶν ſubobſcurum. in ſeq. tertia propoſitione πλειόνων ὄψεων & μείζονος γωνίας idem valet. *Sav.* 2 Καὶ παραλλήλων, ut in demonſtratione: & quidem alioqui theorema non erit univerſaliter verum; ne ſic quidem κατὰ πάσας πτώσεις, niſi æquales ſint radii à β in rei viſæ πέρατα. *Savil.* 3 Διαστήμασιν ἀνίσοις *MS. Savil.* 4 Adjiciendum, τῷ ΒΔΓ τριγώνῳ. *Savil.*

à pluribus radiis conſpicitur quam K Λ: accuratius igitur cernetur Γ Δ quam K Λ.

SCHOLIUM.

Quod autem, ſi radii B K & B Λ tranſeant per puncta Γ & Δ, neceſſe ſit latus K Λ majus eſſe latere Γ Δ, ſic ſane oſtendetur. ſit enim ut in ſubjecto triangulo factum eſt. cum ergo in rectas parallelas K Λ, Γ Δ rectæ lineæ B K, B Λ incidant: duo igitur anguli B K Λ & B Λ K [per 29. 1.] duobus angulis B Γ Δ & B Δ Γ ſunt æquales; ideoque duo triangula æquiangula ſunt B Γ Δ & B K Λ: ergo [per 4. 6.] ut B K ad K Λ ſic B Γ ad Γ Δ; & viciſſim ut B K ad B Γ ſic K Λ ad Γ Δ. eſt autem B K major quam B Γ: ergo etiam K Λ major eſt quam Γ Δ.



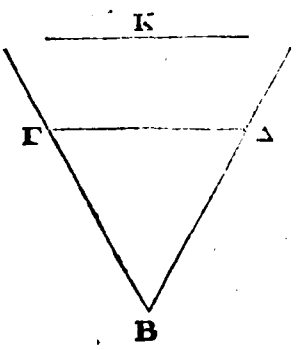
PROP. III. THEOR.

Aſpectabilium quodlibet certam habet intervalli longitudinem, qua expleta jam non cernitur.

SIT oculus B, aſpectabile vero Γ Δ: dico Γ Δ poſſe collocari in quadam diſtantia ab oculo, ex qua jam non cernetur.

Sit enim Γ Δ in intervallo quod eſt inter radios B Γ & B Δ, & ſupra illud ſit K: nullus igitur radius ex B oculo ad K perveniet. ad quod autem radii non perveniunt, illud [per 4 poſit.] non cernitur: quocirca unumquodque aſpectabilium certum habet intervalli modum, quo expleto jam non cernitur.

Oportet tamen inter aſpectabile & oculum aliquod eſſe intevallum, alioqui cerni non poſſet.



SCHOLIUM.

Id fortaſſis objiciat quiſpiam: cum non ſolum B Γ, B Δ radii tendant ad Γ Δ magnitudinem, ſed multo plures ſint inter puncta Γ, Δ, qui ad eandem magnitudinem ferantur: igitur magnitudine Γ Δ longius ab oculo ſemota, etiamſi B Γ, B Δ radii ad eam non perveniant, radii tamen intermedii ad eam pervenient. nos igitur hæc objicienti ſatisfaciemus hoc modo: quamvis Γ Δ magnitudo nonnihil ſemota ab oculo non attingatur à radiis B Γ, B Δ, ſed à radiis intermediis; tamen ſi eadem magnitudo longiſſime ſemoveatur ab oculo, ne ab intermediis quidem radiis attingetur.

πλειόνων ὄψεων ἁφᾶται ἤπερ τὸ Κ Λ· ἀπελείφθω ἄρα φανήσεται τὸ Γ Δ τοῦ Κ Λ. [1]

[2] ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οτι δὲ διαρχομένων τῶν ὄψεων Β Κ, Β Λ διὰ τῶν Δ καὶ Γ σημείων, ἡ Κ Λ μείζων ἂν εἴη τῆς Γ Δ, ἔτω πῶς δῆλον. γεγένθω γὰρ ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ τρίγωνα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὀρθαὶ ὑφ' ἃς τέμνουσιν ἀλλήλας τὰς Κ Λ, Γ Δ εὐθεῖαι ἐμπίπτουσιν αἱ Β Κ, Β Λ· αἱ μὲν ὑπὸ Β Κ Λ καὶ Β Λ Κ γωνίαι τοῖς Β Γ Δ καὶ Β Δ Γ γωνίαις ἴσαι εἰσὶ, καὶ διὰ τοῦτο ἰσογώνια ἐστὶ τρίγωνα τὰ Β Γ Δ καὶ Β Κ Λ· ὡς ἄρα ἡ Β Κ πρὸς τὴν Κ Λ ἔτως ἡ Β Γ πρὸς τὴν Γ Δ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ Β Κ πρὸς τὴν Β Γ ἔτω καὶ ἡ Κ Λ πρὸς τὴν Γ Δ. ἔστι δὲ ἡ Β Κ τῆς Β Γ μείζων· καὶ ἡ Κ Λ ἄρα τῆς Γ Δ μείζων ἔσται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἑκαστον τῶν ὁρωμένων ἔχει τι μῆκος ἀποστήματος, [3] ὃ γινομένου οὐκ ἔτι ὁρᾶται.

Ἔστω γὰρ ὅραμα μὲν τὸ Β, ὁρώμενον δὲ τὸ Γ Δ· λέγω ὅτι τὸ Γ Δ ἐν τινὶ ἀποστήματι γενόμενον οὐκ ἔτι ὁρᾶσθήσεται.

Γεγενήθω γὰρ τὸ Γ Δ ἐν τῷ μεταξὺ διαστήματι τῶν ὄψεων [4], ἐφ' οὗ τὸ Κ. [5] οὐκοῦν πρὸς τὸ Κ ἀδύνατόν ἐστι τὴν ἀπὸ τοῦ Β ὄψιν προσπεσεῖσθαι. πρὸς ὃ δέ γε αἱ ὄψεις οὐ προσπίπτουσιν, ἐκεῖνο οὐχ ὁρᾶται· ἑκάστου ἄρα τῶν ὁρωμένων ἔχει τι μῆκος ἀποστήματος, ὃ γενομένου οὐκ ἔτι ὁρᾶται. [6] Δεῖ δὲ τὸ ὁρώμενον πρὸς τὸ ὅραμα ἔχειν ἀπόστημά τι· ἐν γὰρ ἂν ἄλλως ἐφθείη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἴσως εἴποι τις ἂν, ὡς ἐπειδὴ οὐ μόναι αἱ Β Γ, Β Δ αἱ προσπίπτουσαι ἀκτῖνες πρὸς τὸ Γ Δ μέγεθος, ἀλλὰ καὶ [7] πολλαὶ μεταξὺ τῶν Γ, Δ, ὅτι ἀφιεμένου τοῦ Γ Δ μεγέθους ἐν πόρρῳ αἱ Β Γ, Β Δ ἀκτῖνες, προσπεσοῦνται αἱ μεταξὺ τοῦ μέσου προσπιπτούσαι ἀκτῖνες. λέγομεν οὖν πρὸς τὸν ὕστερον ἀποροῦντα· ὅτι εἰ καὶ πρὸς μικρὸν ἀφεστήκοτος τοῦ Γ Δ μεγέθους οὐ προσβάλλουσιν αἱ Β Γ, Β Δ ἀκτῖνες, ἀλλ' αἱ μεταξὺ τοῦ μέσου, ὅτι πολὺ ἀφεστηκότος τοῦ τοιούτου μεγέθους, οὐδ' αἱ μεταξὺ τοῦ μέσου προσπεσοῦνται. [8] δεῖ δ' ἀποπλατυνθῆναι τὸ μεταξὺ τῶν τοιούτων ὄψεων διάστημα, [9] ἀφιεμένου τοῦ μεγέθους, ὄντος [10] ὁρισμένου παντὸς μεγέθους.

1 In *MS. Savil.* ſchol. ἐπειδὴ ἴσαι ἀκτῖνες ἐπὶ τὸ Γ Δ προσπίπτουσιν ἐξώτερον ἴστανται τοῦ Κ Λ, μὴ προσπίπτουσαι αὐτοῖς, ὅτι τοῦ πλείονα ὁρᾶται τὸ Γ Δ Verba (inquit *Savil.*) ſunt mutilata, ſed hoc ſibi voluiſſe videtur, radios aliquot in Γ Δ incidere extra angulum K B Λ, atq; ita τοῦτο πλείονων ὄψεων ὁρᾶσθαι. 2 Deeſt hoc ſchol. in lib. MS. remanet προπεφαφι. 3 Al. οὗ γενομένου. 4 Oportet quidem ſubjungere proximorum. 5 Ne hoc quidem quale ſit ſatis intelligo. nam ſi hoc ſumere voluit, potuit non minus id, quod eſt demonſtrandum, ſuo ſibi jure ἀναπόδεικτον aſſumere. 6 Illa δεῖ δὲ &c. deſunt in *MS Bodl.* 7 Ἀλλαι πλείονες in *MS. Savil.* 8 Δεῖ τὸ πλατυνθῆναι. augeatur, creſcat, in longum tamen non in latum. ſi recte intelligo: fortaſſe verba ſunt adhuc mutilata, & omittit *Pena.* 9 Forſan ἀφεστηκότος. *Savil.* 10 Rectius ὁρισμένου. *Idem.*

[1] ΑΛΛΩΣ.

Εστω ὄμμα μὲν τὸ Β, ἑρώμενον δὲ τὸ ΓΔ, [2] ὑπὸ δὲ ΓΒΔ ἐλαχίστης γωνίας· λέγω ὅτι ἐν μείζονι ἀποσήματι γινόμενον τὸ ΓΔ οὐκ ὀφθήσεται.

Γεγενήσθω γὰρ, καὶ κείσθω πορρώτερον, ὡς ἐν τῷ Κ· ὀφθήσεται δὴ ἐν ὑπὸ ὀλιγωτέρων ὄψεων. [2] ἑωρᾶτο δὲ ὑπὸ ὀλιγίστων, διὰ τὸ ἐλαχίστῳ ὑποκεῖσθαι τῷ ΓΒΔ γωνίαν.

ALITER.

Sit oculus Β; aſpectabile vero ſit ΓΔ, quod cernatur ſub ΓΒΔ angulo minimo: dico cerni non poſſe ΓΔ magnitudinem, ſi longius removeatur ab oculo.

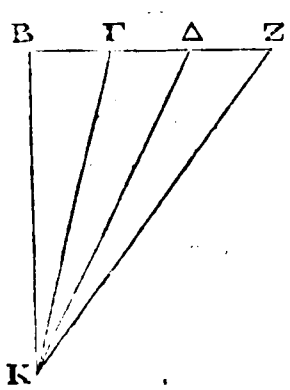
Fiat enim, & ſemoveatur longius ab oculo, ponaturque in Κ; cernetur ergo ſub pauciori-bus radiis quam antea. ſed cernebatur ſub pauciſſimis, propterea quod angulus ΓΒΔ ponitur eſſe minimus.

[3] ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Τῶν ἴσων διαστημάτων ὑπὸ τὴν αὐτῆς εὐθείας ὄντων, τὸ ἐκ πλείονος ἀποστήματος ὁρώμενα ἐλάττω φαίνεται.

PROP. IV. THEOR.

Æqualium intervallorum in eadem recta linea collocatorum, quæ è longiore diſtantia ſpectantur, minora apparent.

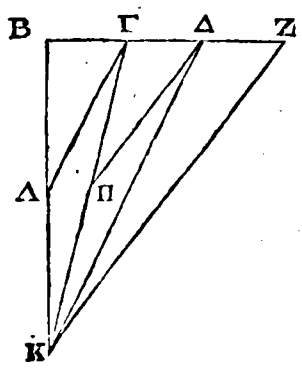


Εστω γὰρ ἴσα τὰ ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ, ὄμμα δὲ τὸ Κ, ἀφ' οὗ ἐπιπίπτουσαι ὄψεις αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΖ. [4] ἡ δὲ ΚΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῇ ΒΖ. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΚΒΖ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ, μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΚΓ γωνία τῆς ΓΚΔ γωνίας, ἡ δὲ ΓΚΔ γωνία τῆς ΔΚΖ γωνίας· μείζον ἄρα φαίνεται τὸ μὲν ΒΓ τοῦ ΓΔ, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΔΖ.

SInt enim æqualia intervalla ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ; oculus autem ſit Κ, à quo procedant radii ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΖ; ſitque ΚΒ ad rectos angulos ipſi ΒΖ. quia igitur in rectangulo triangulo ΚΒΖ æquales ſunt ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ: major [per ſchol. ſeq.] eſt ΒΚΓ quidem angulus angulo ΓΚΔ, & angulus ΓΚΔ angulo ΔΚΖ: igitur [per 5. poſit.] majus apparet ΒΓ intervallum quam ΓΔ, & ΓΔ quam ΔΖ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εστω τρίγωνον ἡ ΚΒΖ, ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, ἴσαι δ' ἔστωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΚ, ΔΚ· φημὶ ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΒΚΓ γωνία τῆς ΓΚΔ γωνίας, καὶ ἡ ΓΚΔ τῆς ΔΚΖ.



Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἡ ΓΛ παράλληλος τῇ ΔΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΒ. ἴση δ' ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΛΒ. καὶ ἐπειδὴ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Β γωνία· μείζων ἂν εἴη ἡ ΛΓ τῆς ΛΒ. ἴση δ' ἐστὶν ἡ ΛΒ τῇ ΛΚ· ἡ ἄρα ΛΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΚ· ὥστε καὶ ἡ ΛΚΓ γωνία τῆς ΛΓΚ γωνίας μείζων ἐστί. τῇ δὲ ΛΓΚ γωνίᾳ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚΔ, ἐναλλὰξ γάρ εἰσιν· ἡ ἄρα ΛΚΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΚΔ. πάλιν, ἀπὸ τοῦ Δ ἤχθω ἡ ΔΠ παράλληλος τῇ ΖΚ· φανερὸν ὅτι ἡ

SCHOLIUM.

Sit triangulum ΚΒΖ, cujus angulus qui ad Β rectus ſit; ſint autem & ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ inter ſe æquales, & connectantur ΓΚ & ΔΚ: dico angulum ΒΚΓ majorem eſſe angulo ΓΚΔ; & angulum ΓΚΔ majorem eſſe angulo ΔΚΖ.

A puncto enim Γ ducatur recta linea ΓΛ, quæ ſit parallela ipſi ΔΚ: eſt igitur [per 2. 6.] ut ΔΓ ad ΓΒ ſic ΚΛ ad ΛΒ. æqualis vero eſt ΔΓ ipſi ΓΒ: quare æqualis etiam eſt ΚΛ ipſi ΛΒ. & quia angulus ad Β rectus eſt: major igitur eſt [per 19. 1.] ΛΓ recta quam ΛΒ. ipſa autem ΛΒ æqualis eſt ipſi ΛΚ: quare ΛΓ major eſt quam ΛΚ: ideoque [per 18. 1.] angulus ΛΚΓ major eſt angulo ΛΓΚ. angulo autem ΛΓΚ æqualis eſt [per 29. 1.] angulus ΓΚΔ; ſunt enim alterni anguli: angulus ergo ΛΚΓ major eſt angulo ΓΚΔ. rurſus, à puncto Δ ducatur ΔΠ parallela ipſi ΖΚ: conſtat ergo li-

1 Deeſt in *MSS.* 2 Ex hoc loco apparet idem eſſe ὑπὸ τὴν ἐλαχίστης γωνίας ὁρᾶσθαι, & ὑπὸ ὀλιγίστων ὄψεων. *Savil.* 3 Magnam habet affinitatem cum ſeptima, & plane altera non ægre carere potuiſſemus. Illic eſt ἴσα μεγέθη, hic ἀποστήματα, non magno ſane ἀποστήμασι. *Savil.* 4 Quod ſc. minimum omnium ἀπόστημα facit: nam per 19. 1. conſtat ΚΒ minorem eſſe quam ΚΓ, & ΚΓ quam ΚΔ, & ΚΔ quam ΚΖ. ut autem demonſtrationi theorema quadraret, ipſum theorema debuit eſſe hujuſmodi: Τῶν ἴσων ἀποστημάτων ἐπὶ τὴν αὐτῆς εὐθείας ὄντων, quæ propriora ſunt perpendiculari in illam εὐθεῖαν actæ majora ſunt; quæque ab ea remotiora, minora: niſi quod *Euclides* opticus eſt neſcio quo modo minus ὀπτικὸς, in perſpectiva minus perſpicax. *Savil.*

neam ΠΔ majorem esse linea ΠΚ: quocirca angulus ΠΚΔ major est angulo ΠΔΚ. ipsi autem ΠΔΚ angulo æqualis est angulus ΔΚΖ: quare angulus ΠΚΔ major est angulo ΔΚΖ.

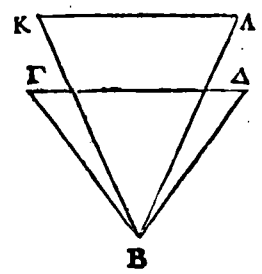
ΠΔ μείζων ἐστὶ τῆς ΠΚ· ὥςτε ἡ ΠΚΔ γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ΠΔΚ. τῇ δὲ ΠΔΚ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚΖ· μείζων ἄρα ἡ ΠΚΔ μείζων ἐστὶ τῆς ΔΚΖ.

Prop. V. Theor.

Æquales magnitudines inæqualiter distantes inæquales apparent; & perpetuo major, quæ propius ad oculum posita est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισον διεχήκοτα ἄνισα φαίνεται, καὶ μεῖζον ἀεὶ τὸ ἐγγίον τοῦ ὄμματος κείμενον.

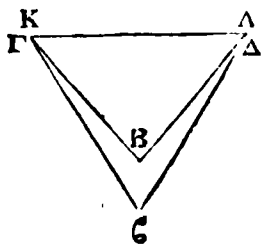


SIT ΓΔ æqualis ipsi ΚΛ, oculus autem sit Β, à quo radii procedant ΒΔ, ΒΛ, ΒΚ, ΒΓ. cum igitur ΓΔ sub majori angulo spectetur quam ΚΛ; major apparet ΓΔ [per 5. posit.] quam ΚΛ.

ΕΣτω ἴσον τὸ ΓΔ τῷ ΚΛ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Β, ἀφ' οὗ πεσσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΒΔ, ΒΛ, ΒΚ, ΒΓ. σχῆμα τὸ ΓΔ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρᾶται ἤπερ τὸ ΚΛ· μεῖζον ἄρα φαίνεται τὸ ΓΔ τοῦ ΚΛ.

Scholium.

Magnitudo ΓΔ sub majore angulo spectatur quam magnitudo ΚΛ. si enim ΓΔ & ΚΛ, altera alteri ita applicetur, ut punctum Κ cum puncto Γ, & punctum cum puncto Δ congruat: cum duæ lineæ ϹΚ & ϹΛ duabus lineis ΒΓ & ΒΔ majores sint; igitur triangulum ΒΓΔ cadet intra ϹΚΛ triangulum: quare ejus latera continebunt majorem angulum per 21. primi elementorum.



[2] ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὸ ΓΔ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρᾶται ἤπερ τὸ ΚΛ. καὶ γὰρ δὴ συμπροσμιγνύων τῶν ΓΔ, ΚΛ, ὥςτε τὸ Κ τῷ Γ, καὶ τὸ Λ τῷ Δ ἁρμόζεσθαι· [3] ἐπειδὴ αἱ ϹΚ, ϹΛ μείζονές εἰσι τῶν ΒΓ, ΒΔ· τὸ ἄρα ΒΓΔ τρίγωνον ἐντὸς τοῦ ϹΚΛ τριγώνου πεσεῖται, καὶ αἱ αὐτοῦ πλευραὶ μείζω γωνίαν περιέξουσι, διὰ τὸ εἰωθέναι πρώτην τὴν πρώτην τῶν στοιχείων.

Prop. VI. Theor.

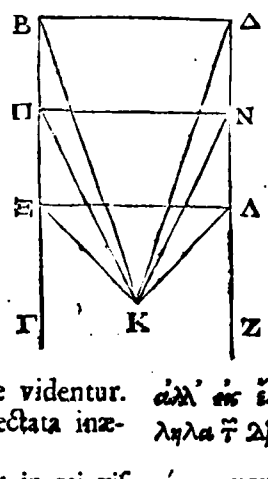
Parallela intervalla eminus spectata inæqualis latitudinis apparent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Τὰ παράλληλα τῶν διαστημάτων ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενα ἀνισοπλατῆ φαίνεται.

SIT enim ipsius ΒΓ ad ΔΖ intervallum parallelum, oculus autem sit Κ: dico has duas magnitudines ΒΓ & ΔΖ videri tamen inæqualiter inter se distare; majusque semper apparere propius intervallum remotiore.

Procedant enim radii ΚΞ, ΚΠ, ΚΒ, ΚΔ, ΚΝ, ΚΛ, connectanturque rectæ ΞΛ, ΠΝ & ΒΔ. cum igitur major sit angulus ΞΚΛ angulo ΠΚΝ; major ergo apparet recta ΞΛ [per 5. posit.] quam ΠΝ. eademque ratione ΠΝ recta major apparet quam recta ΒΔ: non ergo videntur parallela intervalla, sed semper coarctari & inæqualiter distare videntur. quare parallela intervalla eminus spectata inæ-



ΕΣτω γὰρ τὸ ΒΓ τῷ ΔΖ παράλληλον διάστημα, [4] ὄμμα δ' ἔστω τὸ Κ· λέγω ὅτι τὸ ΒΓ, ΔΖ ἀνισοπλατῆ φαίνεται, καὶ μεῖζον τὸ ἐγγίον διάστημα τοῦ πορρωτέρω.

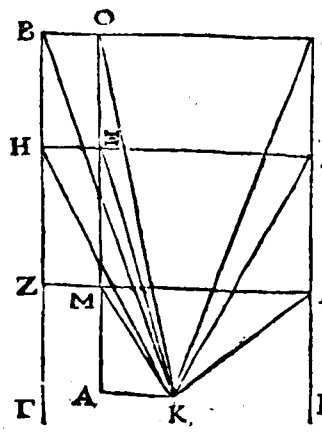
Προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΚΞ, ΚΠ, ΚΒ, ΚΔ, ΚΝ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΞΛ, ΠΝ, ΒΔ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΞΚΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΠΚΝ γωνίας, μείζων φαίνεται ἡ ΞΛ εὐθεῖα τῆς ΠΝ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΝ εὐθεῖα μείζων φαίνεται τῆς ΒΔ εὐθείας· οὐκ ἔστιν ἄρα ὀφθήσεται παράλληλα τὰ διαστήματα, ἀλλ' ἐκ ἐλάττων ἡ ἀνισοπλατῆ. καὶ ἄρα παράλληλα τὰ διαστήματα ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενα ἀνι-

1 ἡ παράλληλα. & in quæ radii à visu in rei visæ πέρατα æquales incidant; id enim ni ita fiat, nihil obstat propiorem magnitudinem minorem φαίνεσθαι, cum tamen reipsa sit æqualis: nam *Euclidis* demonstratio est plane κατὰ διόπτρας. *Savil.* 2 Deest hoc Scholion in MS. *Bodl.* 3 Hoc quidem verum est si utrumque triangulum sit isosceles τῶν ΚΒ ΒΛ, ἢ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσων ὑποκειμένων: quod quia non est, necesse, nullo modo concludit Scholiastes. Possunt enim minores esse, ut nec intra triangulum cadant, nec angulum majorem comprehendant. *Savil.* 4 προκεῖσθω ἀπόδειξις, posito Κ intra ΒΓ & ΔΖ producta, vel in altera earum. Quod si extra sit, nec ἀποστήματα majora faciunt semper minores angulos, nec etiam *inæqualia inæqualeis*. *Savil.*

ανισοπλατῆ

ὁποτερατῆ φαίνεται. ἔστω μὴν, εἰ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσται τὸ ὄμμα τῷ ὁρωμένῳ, λέγοιτο.

Εἰ δὲ μὴ ἐστι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσται τὸ ὄμμα, ἔστω. ἐπεζεύχθω γὰρ τὸ Κ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον [1] κάθετος ἡ ΚΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΛΖ ἡ ΑΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ο [2], καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ, ΚΔ, ΚΝ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΜ, ΚΞ, ΚΟ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μετεωροτέρας τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Μ ἐπέζευκται ἡ ΚΜ, κάθετος ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΖΛ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΚΞ ἐπὶ τὴν ΗΝ, ἡ δὲ ΚΟ ἐπὶ τὴν ΒΔ· ὀρθογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΚΜΛ, ΚΞΝ, ΚΟΔ τρίγωνα. [3] καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΞΝ τῇ ΜΛ ἴση, παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΜΝ· ἑκατέρα δὲ τῶν ΞΚ, ΚΝ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΜΚ, ΚΛ· μείζων ἐστὶν ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΚΛ τῆς ὑπὸ ΞΚΝ [4], ὥστε καὶ ὅλη ἡ ΖΛ ὅλης τῆς ΗΝ μείζων φαίνεται. ἀφ' ἧς δὲ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΝ τῆς ΒΔ· ἀνισοπλατῆ ἄρα φαίνεται τὰ μεγέθη.



qualis latitudinis apparent. hoc igitur modo fit demonſtratio, cum oculus eſt in eodem plano, in quo ſpectatum intervallum.

Quod ſi non ſit in eodem plano, demonſtratio ſic habet, ut ſequitur. ſit enim Κ oculus ſublimior plano illo in quo eſt intervallum; & ex Κ in ſubjectum planum ducatur perpendicularis ΚΑ; & ex Α in ΛΖ ducatur perpendicularis ΑΜ, quæ producatur verſus Ο; incidantque radii ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ, ΚΔ, ΚΝ, ΚΛ, & conjungantur ΚΜ, ΚΞ, ΚΟ. quia igitur ex Κ, puncto in ſublimi poſito, ad Μ punctum deducta eſt recta linea ΚΜ; perpendicularis ergo eſt [per ſch. 1.] ΚΜ ad ΖΛ. eodemque modo ΚΞ ad ΗΝ, & ΚΟ ad ΒΔ: triangula ergo rectangula ſunt ΚΜΛ, ΚΞΝ, ΚΟΔ. eſtque [per 34. 1.] ΞΝ ipſi ΜΛ æqualis, parallelogrammum enim eſt ΜΝ; utraque autem ipſarum ΞΚ, ΚΝ, major eſt utraque ipſarum ΜΚ, ΚΛ: major igitur [per ſchol. 2.] eſt angulus ΜΚΛ angulo ΞΚΝ: quare tota ΖΛ major apparet quam tota ΗΝ. eademque ratione tota ΗΝ major quam ΒΔ: inæqualiter ergo diſtare videntur duæ magnitudines.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

Πῶς δὲ ἡ ΚΜ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΖΛ, δείξομεν ἔτως. ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἦκται ἡ ΚΑ· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ ἔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ ΚΑ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας. ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τὴν ΛΖ κάθετος ἦκται ἡ ΜΑ, καὶ πρὸς τὴν ΑΜ ἡ ΚΑ ὀρθὴν ποιήσει γωνίαν. ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Λ ἡ ΑΛ· καὶ πρὸς ἄρα τὴν ΑΑ ἡ ΑΚ ὀρθὴν ποιήσει γωνίαν. ἐπεὶ οὖν τρίγωνόν ἐστιν ὀρθογώνιον τὸ ΚΑΜ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ΚΑΜ γωνίαν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΜ ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΑ, ΑΜ. πάλιν ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστιν ὀρθογώνιον τὸ ΑΜΛ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΜΛ γωνίαν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΜ, ΜΛ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΑ, ΑΜ, ΜΛ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΑ, ΑΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ, τρίγωνον γάρ ἐστιν ὀρθογώνιον τὸ ΚΑΜ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΚΑΜ γωνίαν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΜ, ΜΛ. καὶ, ἀφ' οὗ τὸ ὀγδοον καὶ πεντηκοστὸν τῆς πρώτης τῶν στοιχείων, ἡ ὑπὸ ΚΜΛ γωνία ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLIUM 1.

Quomodo autem ΚΜ perpendicularis ſit in ΖΛ, ſic demonſtrabimus. cum ex Κ puncto in ſublimi conſtituto in ſubjectum planum ducta ſit perpendicularis ΚΑ; ad omnes igitur rectas ipſam tangentes & in ſubjecto plano jacentes [per 3.def.11.] angulos rectos facit ΚΑ. quia ergo ΜΑ perpendicularis ducta eſt ad ΑΖ: igitur ΚΑ rectum angulum facit cum ΑΜ. ducatur linea ex Α in Λ, ſitque ΑΛ: ergo ΑΚ cum ΑΑ rectum angulum facit. cum itaque triangulum rectangulum ſit ΚΑΜ, rectum habens angulum ΚΑΜ: quadratum igitur quod fit ex ΚΜ ſubtendente rectum angulum æquale eſt [per 47.1.] quadratis quæ fiunt ex ΚΑ, ΑΜ. rurſus quia triangulum eſt rectangulum ΑΜΛ rectum habens ΑΜΛ: quadratum igitur quod fit ex ΑΛ æquale eſt quadratis quæ fiunt ex ΑΜ, ΜΛ: quadratum igitur quod fit ex ΚΛ æquale eſt eis quæ fiunt ex ΚΑ, ΑΜ, ΜΛ. ſed quadratis quæ fiunt ex ΚΑ, ΑΜ æquale eſt quadratum quod fit ex ΚΜ, triangulum enim rectangulum eſt ΚΑΜ rectum angulum habens ΚΑΜ: quadratum ergo quod fit ex ΚΛ æquale eſt quadratis quæ fiunt ex ΚΜ, ΜΛ. quocirca, per 48. primi elementorum, rectus eſt angulus ΚΜΛ. quod erat demonſtrandum.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

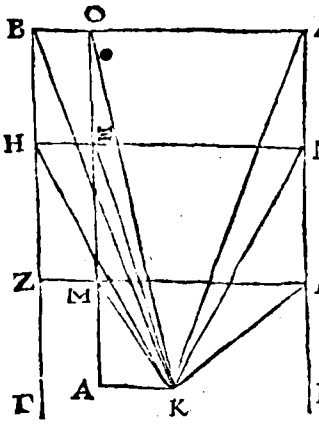
Ὅτι δὲ ἡ ὑπὸ ΜΚΛ τῆς ὑπὸ ΞΚΝ μείζων ἐστί, δείξομεν ἔτως. ἐπεὶ ὀρθογώνιόν ἐστι τρίγω-

SCHOLIUM 2.

Porro quod angulus ΜΚΛ major ſit angulo ΞΚΝ, demonſtrabimus hoc modo. quoniam triangu-

1 Περιχωρεῖ ἀποδείξεις. ſi κάθετος ΚΑ intra parallelas productas cadet; ſi extra, non eſt neceſſe, ut in præcedente caſu. *Savil.* 2 Erit igitur ad rectos τοῖς ΒΔ, ΗΝ παραλλήλους. modo intelligantur ΒΔ, ΗΝ, ΖΛ ſecus ἐφθεῖς ſecare parallelas: id quod eſt neceſſe, quia diſtantiæ ita capiuntur. *Idem.* 3 Parallelorum enim intervalla capiuntur per rectas lineas ad rectos angulos ipſis incidentes. *Idem.* 4 *Adde hæc,* Similiter demonſtratur ΜΚΖ angulus major angulo ΞΚΗ Tale quippiam vitio librariorum abeſſe puto: eſt enim neceſſarium, niſi Α punctum in alteram parallelarum cadit. *Idem.*

lum K A M est rectangulum, rectum habens angulum K A M: angulus ergo K M A [per 17.1.] acutus est; quare [per 13.1.] obtusus est K M Ξ angulus: trianguli ergo obtusanguli K Ξ M latus K Ξ subtendit angulum obtusum qui est ad M: majus igitur [per 19.1.] est K Ξ quam K M. quia ergo triangula sunt rectangula K Ξ N, K A M, rectos habentia angulos ad Ξ, M; quadratum igitur quod fit ex K N æquale est [per 47. 1.] quadratis quæ fiunt ex K Ξ, Ξ N. eadem ratione quadratum quod fit ex K A æquale est quadratis quæ fiunt ex K M, M A. quadrata autem quæ fiunt ex K Ξ, Ξ N majora sunt quadratis quæ fiunt ex K M, M A: nam [per 34.1.] Ξ N latus æquale est lateri M A, cum sit ei oppositum in parallelogrammo M N; est vero [ex mox ostensis] K Ξ recta major quam recta K M: quadratum igitur quod fit ex K N majus est quadrato quod fit ex K A: quare K N major est quam K A. ostensa vero est K Ξ major quam K M; & Ξ N æqualis ipsi M A: si ergo ipsam M A aptaverimus ipsi Ξ N, cadet K M A triangulum intra triangulum K Ξ N: ergo, per prop. 21. primi elementorum, major erit M K A angulus angulo Ξ K N. quod erat demonst.



νον τὸ Κ Α Μ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ Κ Α Μ γωνίαν, ὀξεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ Κ Μ Α· ὥστε ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ Κ Μ Ξ· ἀμβλυγωνίου ἄρα τριγώνου τοῦ Κ Ξ Μ ἡ Κ Ξ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Μ ἀμβλεῖαν γωνίαν· μείζων ἄρα ἡ Κ Ξ τῆς Κ Μ. ἐπεὶ οὖν τρίγωνά ἐστιν ὀρθογώνια τὰ Κ Ξ Ν, Κ Λ Μ ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Ξ, Μ γωνίας· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Κ Ν ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Κ Ξ, Ξ Ν. ὁμοίως δὴ τὸ ἀπὸ τῆς Κ Λ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Κ Μ, Μ Λ· καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν Κ Ξ, Ξ Ν μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν Κ Μ, Μ Λ· ἡ γὰρ Ξ Ν τῇ Μ Λ ἴση ἐστίν, ὡς ἐφαλληλογράμμου τοῦ Μ Ν ἐναντίων, ἡ δὲ Κ Ξ τῆς Κ Μ μείζων ἐστί· καὶ τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς Κ Ν τοῦ ὑπὸ τῆς Κ Λ μεῖζον· ὥστε καὶ ἡ Κ Ν τῆς Κ Λ μείζων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ Κ Ξ τῆς Κ Μ μείζων, ἴση δὲ ἡ Ξ Ν τῇ Μ Λ· ἐὰν ἄρα τὴν Μ Λ ὅπῃ τὴν Ξ Ν ἐφαρμόσωμεν, ἐντὸς πεσεῖται τὸ Κ Μ Λ τρίγωνον τοῦ Κ Ξ Ν τριγώνου· καὶ, διὸ τὸ εἰκοστὸν πρῶτον τοῦ πρώτου τῶν στοιχείων, μείζων ἔσται ἡ ὑπὸ Μ Κ Λ τῆς ὑπὸ Ξ Κ Ν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

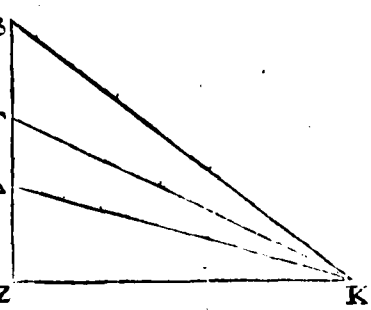
Prop. VII. Theor.

Magnitudines æquales in eadem recta linea procul à sese positæ, inæquales apparent.

Προτασις ζ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἴσα ὄντα μεγέθη, πορρωτέρω ἀλλήλων τιθέντα, ἄνισα φαίνεται.

SInt enim æquales magnitudines B Γ, Δ Z, oculus autem sit K; & ab oculo K incidant radii K B, K Γ, K Δ, K Z. sit autem rectus K Z B angulus: major ergo est [per sch. 4. opt.] angulus Z K Δ angulo Γ K B: quare [per 5. posit.] major apparebit Δ Z quam Γ B: ideoque inæquales apparent B Γ, Δ Z magnitudines.



Ἔστω γὰρ ἴσα μεγέθη τὰ Β Γ, Δ Ζ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ὄμματος πεσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ Κ Β, Κ Γ, Κ Δ, Κ Ζ. ὀρθὴ δὲ ἔστω ἡ ὑπὸ Κ Ζ Β γωνία. σκαλὴν μείζων ἐστὶν ἡ Ζ Κ Δ γωνία τῆς Γ Κ Β· ὥστε καὶ ἡ Δ Ζ μείζων φανήσεται τῆς Γ Β· ἄνισα ἄρα φαίνεται τὰ Β Γ, Δ Ζ μεγέθη.

Prop. VIII. Theor.

Æquales magnitudines, inæqualiter ab oculo distantes, non servant eandem rationem angulorum quam distantiarum.

Προτασις η'.

Τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισον διεστηκότα οὐκ ἀναλόγως τοῖς ἀποστήμασιν ὁρᾶται.

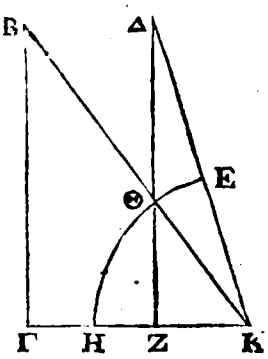
SIT B Γ magnitudo æqualis & parallela magnitudini Δ Z; sitque oculus K, à quo educantur radii K Z Γ, K Θ B, & K E Δ, quorum K Γ sit ad angulos rectos ipsi B Γ: asserо fore ut non appareat eadem ratio inter magnitudines B Γ, Δ Z quæ inter intervalla K Γ, K Z.

Ἔστω γὰρ τὸ Β Γ τῷ Δ Ζ ἴσον, καὶ κείσθω αὐτῷ παράλληλον, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Κ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πεσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ Κ Ζ Γ, Κ Θ Β, καὶ Κ Ε Δ, ὧν ἡ Κ Γ πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῇ Β Γ· φημὶ δὴ ὅτι οὐκ ἀναλόγως φανήσεται τὰ Β Γ, Δ Ζ μεγέθη τοῖς Κ Γ, Κ Ζ ἀποστήμασιν.

1 Mihi plane & theorema & demonstratio nihil videtur post 4. prop. magni adferre: omitti sane utrumque sine dispendio rei opticæ potuit. *Savil.* 2 Ut huic demonstrationi theorema congrueret, deberet esse hujusmodi: Τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ εὐθείας ἴσων ὄντων μεγεθῶν, πορρωτέρω ἀλλήλων τιθέντων, quæ à perpendiculari in illam εὐθείαν acta inæqualiter absunt ἄνισα φαίνεται. *Idem.* 3 Sed major est ratio majoris distantiæ ad minorem quam majoris τῆς ὄψεως anguli ad minorem. *Idem.* 4 ἐπ' εὐθείας scilicet τοῖς Γ, Ζ σημείοις.

Επὶ

Επεὶ γὰρ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΘΖΚ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΚΖ μείζων ἐστίν[1]· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΘΚ, κύκλος γραφόμενος ὑπερπεσεῖται τὴν ΚΖ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΕΘΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΔΘΚ τρίγωνον μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν ΘΕΚ τομέα ἤπερ τὸ ΖΘΚ τρίγωνον πρὸς τὸν ΗΘΚ τομέα· ἀναλλὰξ ἄρα τὸ ΘΔΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΘΚ τρίγωνον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΕΘΚ τομεὺς πρὸς τὸν ΗΘΚ τομέα·[2] συνῆπται ἄρα ΖΔΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΘΚ τρίγωνον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΕΗΚ τομεὺς πρὸς τὸν ΗΘΚ τομέα. ἀλλ' ὡς τὸ ΖΔΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΘΚ τρίγωνον οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ, ὡς δὲ ὁ ΗΕΚ τομεὺς πρὸς τὸν ΗΘΚ τομέα οὕτως ἡ ὑπὸ ΔΚΖ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΘΚΖ· ἡ μείζονι ἄρα λόγῳ ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἤπερ ἡ ΕΚΖ γωνία πρὸς τὴν ΘΚΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ ἡ ΚΓ ἄρα πρὸς τὴν ΖΚ ἡ μείζονι λόγῳ ἐστὶν ἤπερ ἡ ΕΚΖ γωνία πρὸς τὴν ΘΚΖ γωνίαν. ᾗ οὖν μεῖζον τὸ ΒΚΖ γωνίας τὸ ΔΖ ὁρᾶται, οὐ δὲ τὸ ΒΚΓ γωνίας τὸ ΒΓ· οὐκ ἀνάλογον ἄρα τοῖς διαστήμασι τὰ ἴσα μεγέθη ὁρᾶται.



Quia enim rectus eſt angulus ΘΖΚ; ergo [per 17.1.] angulus ΖΘΚ acutus eſt: quare [per 19. 1.] ΘΚ major eſt quam ΚΖ: ideoque ſi centro Κ, intervallo autem ΚΘ, deſcribatur circulus, cadet ultra ipſam ΚΖ, id eſt, ΚΖ erit minor ſemidiametro. deſcripta igitur ſit circuli portio, quæ ſit ΕΘΗ. & quia ΔΘΚ triangulum majorem rationem habet ad ſectorem ΘΕΚ quam ΖΘΚ triangulum ad ſectorem ΗΘΚ: viciſſim ergo ΘΔΚ triangulum ad ΖΘΚ triangulum majorem rationem habet quam ſector ΕΘΚ, ad ΗΘΚ ſectorem: ergo per compoſitionem rationis, triangulum ΖΔΚ ad triangulum ΖΘΚ majorem habet rationem quam ſector ΕΗΚ ad ΗΘΚ ſectorem. ſed [per 1. 6.] ut ΖΔΚ triangulum ad ΖΘΚ triangulum ita ΔΖ ad ΖΘ; ut autem ΗΕΚ ſector ad ΗΘΚ ſectorem ita [per cor. 33. 6.] ΔΚΖ angulus ad ΘΚΖ angulum: ergo ΔΖ ad ΖΘ majorem rationem habet quam angulus ΕΚΖ ad angulum ΘΚΖ. ut autem ΔΖ ad ΖΘ ita [per 4. 6.] ΓΚ ad ΖΚ: igitur ΚΓ ad ΖΚ majorem rationem habet quam ΕΚΖ angulus ad ΘΚΖ angulum. ſed ſub ΕΚΖ angulo cernitur magnitudo ΔΖ; ſub angulo autem ΒΚΓ cernitur magnitudo ΒΓ: non ergo in eadem ratione cernuntur æquales magnitudines, in qua ſunt intervalla.

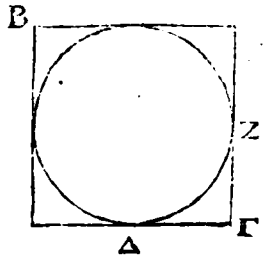
ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὰ ὀρθογώνια μεγέθη, ἐξ διαστήματος[3] ὁρώμενα, πεφερῆ φαίνεται.

PROP. IX. THEOR.

Rectangulæ magnitudines, eminus ſpectatæ, rotundæ apparent.

Ἔστω γὰρ ὀρθογώνιον τὸ ΒΓ ἐξ διαστήματος ὁρώμενον. οὐκοῦν ἐπεὶ ἕκαστον τῶν ὁρωμένων ἔχει τι μῆκος διαστήματος, ἃ γνωμένα οὐκ ἔτι ὁρᾶται·[4] ἡ μὲν Γ ἄρα γωνία οὐχ ὁρᾶται, τὰ δὲ Δ, Ζ σημεῖα μόνον φαίνεται. ὁμοίως καὶ ἐφ' ἑκάστης τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦτο συμβήσεται· ὥστε ὅλον πεφερὲς φανήσεται.



SIT ΒΓ rectangula magnitudo eminus conſpecta. cum ergo [per 3. opt.] quodlibet aſpectabilium habeat certam intervalli longitudinem, qua expleta jam non cernitur: angulus igitur, qui eſt ad Γ, non cernitur, ſed puncta tantum Δ & Ζ apparent. idem cuilibet reliquorum angulorum accidet: quare circularis apparebit tota magnitudo.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Η Γ γωνία οὐχ ὁρᾶται· τὰ γὰρ ὀρθογωνίων σχημάτων πλάτος ἔλαττον τυγχάνει πρὸς ταῖς γωνίαις ἢ ἄλλοθί που· διόπερ τὰ πλησίον τῶν γωνιῶν ἧττον ἂν ἀφαιρίζοιτο τῶν πρὸς τὰ μέσα σχήματος.

SCHOLIUM.

Angulus Γ non cernitur: figurarum enim rectangularum latitudo minor eſt circa angulos quam alibi: quocirca partes quæ magis ad angulos accedunt citius evaneſcunt & aſpectum fugiunt, quam illæ quæ medium figuræ locum occupant.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Τῶν κάτω ὄμματος κειμένων ὀπιπέδων,[5] τὰ πόρρω μετεωρότερα φαίνεται.

PROP. X. THEOR.

Planorum oculo ſubjectorum quæ remotiora ſunt ſublimiora apparent.

Ἔστω γὰρ ὄμμα τὸ Β ἄνω τοῦ ΓΚ ὀπιπέδου κείμενον, ἀφ' οὗ ὄμματος πεφαπτέτωσαν

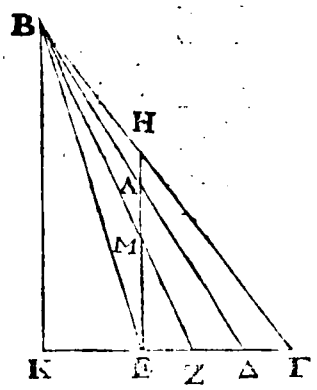
SIT oculus Β ſublimior poſitus quam ſit planum ΓΚ, & ex oculo procedant radii

1 Addit *Cod. Savil.* ἢ τῆς ΚΔ ἐλάσσων. 2 Συνῆπται ἄρα in *Cod. Savil.* Καταχρῆ prop. 8. accommodari poteſt ad ea quæ videntur ſecundum radios ἰσοσκελῆς (quomodo res perfectiſſime videntur, quippe ſecundum maximum angulum, ut ex lemmate ad quartam liquet) diviſis baſibus bifariam. 3 Satis longinquo, quantum ſufficiat nimirum ad tollendum ſenſum angulorum. *Savil.* 4 Ita ne totum quidem orthogonium: ſed à Scholiaſte nonnihil ſublevamur hac in parte. *Savil.* 5 Τὰ πόρρωτέρω à puncto caſus radii perpendicularis in ſubjectum planum. *Idem.*

ΒΓ,

ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ, ΒΕ, ΒΚ, quorum ΒΚ perpendicularis ſit ad ſubjectum planum: dico ΓΔ planum ſublimius apparere plano ΖΕ.

Quia enim radii ΒΓ, ΒΔ, ſub quibus cernitur ΓΔ planum, ſublimiores ſunt quam ΒΖ, ΒΕ, ſub quibus cernitur planum ΖΕ: ſublimius igitur apparet planum ΓΔ plano ΖΕ, & planum ΖΒ plano ΕΚ; quæ enim per radios ſublimiores ſpectantur [per 8. poſit.] ſublimiora apparent.



ἀκτῖνες αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ, ΒΕ, ΒΚ, ὧν ἡ ΒΚ κάθετος ἔστω ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· λέγω ὅτι τὸ ΓΔ τοῦ ΖΕ μετεωρότερον φαίνεται.

Ἐπεὶ αἱ ΒΓ, ΒΔ ὄψεις, ὑφ' ὧν ὁρᾶται τὸ ΓΔ ἐπίπεδον, μετεωρότεραί εἰσι τῶν ΒΖ, ΒΕ ὄψεων, ὑφ' ὧν ὁρᾶται τὸ ΖΕ· ἔχειν τὸ μὲν ΓΔ τοῦ ΖΕ μετεωρότερον φαίνεται, τὸ δὲ ΖΕ τοῦ ΕΚ· τὰ γὰρ ὑπὸ μετεωροτέρων ἀκτίνων φαινόμενα μετεωρότερα φαίνεται.

SCHOLIUM.

Quod autem radii ΒΓ, ΒΔ ſublimiores ſint radiis ΒΖ, ΒΕ, hinc liquet. ducatur enim ΕΗ recta ad planum ΚΓ: punctum igitur Η ſublimius eſt puncto Λ, & punctum Λ puncto Μ. ducitur autem radius ΒΓ per punctum Η, radius vero ΒΔ per punctum Λ, radius denique ΒΖ per punctum Μ: ergo radius ΒΓ ſublimior eſt quam ΒΔ, & ΒΔ ſublimior eſt quam ΒΖ, & ΒΖ quam ΒΕ: quare ΒΓ, ΒΔ radii ſublimiores ſunt quam radii ΒΖ, ΒΕ.

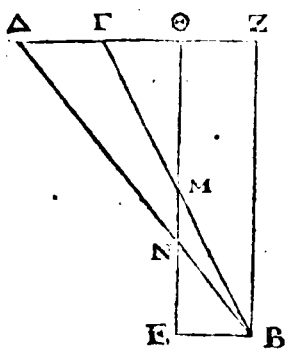
ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ αἱ ΒΓ, ΒΔ ὄψεις μετεωρότεραί εἰσι τῶν ΒΖ, ΒΕ ὄψεων, δῆλον. ἤχθω γὰρ ἡ ΕΗ πρὸς ὀρθὰς τῷ ΚΓ ἐπιπέδῳ· ἀκτὶς τὸ Η σημεῖον μετεωρότερόν ἐστι τοῦ Λ, καὶ τὸ Λ τοῦ Μ. δῆκται δὲ ἡ μὲν ΒΓ ὄψις διὰ τοῦ Η, ἡ δὲ ΒΔ διὰ τοῦ Λ, ἡ δὲ ΒΖ διὰ τοῦ Μ· ἡ ἄρα ΒΓ ὄψις μετεωροτέρα ἐστὶ τῆς ΒΔ, καὶ ἡ ΒΔ τῆς ΒΖ, καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΒΕ· αἱ ἄρα ΒΓ, ΒΔ ὄψεις μετεωρότεραί εἰσι τῶν ΒΖ, ΒΕ ὄψεων.

PROP. XI. THEOR.

Planorum oculo ſublimiorum quæ remotiora ſunt depreſſiora apparent.

SIT oculus Β depreſſior plano ΔΖ, & ab oculo Β procedant radii ΒΔ, ΒΓ, ΒΖ: quia igitur de radiis omnibus ab oculo Β ad planum ΔΖ tendentibus humillimus eſt ΒΔ, ipſe autem ΒΓ humilior ipſo ΒΖ. ſed per radios ΒΔ, ΒΓ cernitur planum ΔΓ, per radios autem ΒΓ, ΒΖ cernitur planum ΓΖ: igitur [per 9. poſit.] ΔΓ depreſſius apparet quam ΓΖ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τῶν ἄνω τοῦ ὄμματος κειμένων ἐπιπέδων τὰ πόρρω ταπεινότερα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ὄμμα τὸ Β, κάτω τοῦ ΔΖ ἐπιπέδου κείμενον, ἀφ' οὗ πεσούσαι τυγχάνουσιν ἀκτῖνες αἱ ΒΔ, ΒΓ, ΒΖ, ταπεινοτάτη τῶν ὑπὸ τοῦ Β ὄμματος πρὸς τὸ ΔΖ ἐπίπεδον πεσουσῶν ἀκτίνων ἔστω ἡ ΒΔ, ἡ δὲ ΒΓ τῆς ΒΖ ταπεινοτέρα. ἀλλὰ μὴν τῶν ΒΔ, ΒΓ ἀκτίνων τὸ ΔΓ φαίνεται, μᾶλλον δὲ τῶν ΒΓ, ΒΖ τὸ ΓΖ· τὸ ΔΓ ἄρα ταπεινότερον τοῦ ΓΖ ὁρᾶται.

SCHOLIUM.

Quod autem radiorum omnium ex Β oculo ad ΔΖ planum pergentium humillimus ſit radius ΒΔ, hunc in modum demonſtrabimus. ſit enim planum ΒΕ parallelum quidem plano ΖΔ, brevius autem ipſo ΓΖ; erigaturque ΕΘ linea, quæ recta ſit ad planum ΒΕ: igitur punctum Ν depreſſius eſt puncto Μ. tranſit autem radius quidem ΒΔ per punctum Ν, radius autem ΒΓ per punctum Μ: quare radius ΒΔ humilior eſt radio ΒΓ. eadem demonſtratio in reliquis valebit.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

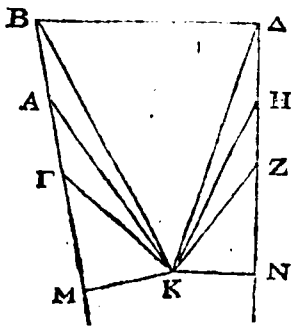
Ὅτι δὲ ἡ ΒΔ ταπεινοτάτη ἐστὶ τῶν ὑπὸ τοῦ Β ὄμματος πρὸς τὸ ΔΖ ἐπίπεδον προσπιπτουσῶν ἀκτίνων, δείξομεν ὅτως. ἔστω γὰρ ΒΕ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΖΔ ἐπιπέδῳ, ἔστω δὲ καὶ ἐλάσσων τοῦ ΓΖ, καὶ ἀνήχθω ἡ ΕΘ πρὸς ὀρθὰς τῷ ΒΕ ἐπιπέδῳ· τὸ μὲν Ν ἄρα σημεῖον ταπεινότερόν ἐστι τοῦ Μ. δῆκται δὲ ἡ μὲν ΒΔ ὄψις διὰ τοῦ Ν σημείου, ἡ δὲ ΒΓ διὰ τοῦ Μ· ἡ ἄρα ΒΔ ταπεινοτέρα ἐστὶ τῆς ΒΓ. τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἔσται ἡ ἀπόδειξις.

1 Τὰ πορρωτέρω ut ſupra, à puncto incidentiæ radii perpendicularis in ſupra poſitum planum. *Savil.* 2 In MS. *Savil.* ὧν ἡ ΒΖ κάθετος ἔστω ἐπὶ τὸ ἄνω κείμενον ἐπίπεδον, ut ſupra.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϐ'.

Τῶν εἰς τοὔμπροσθεν [1] μῆκος ἐχόντων, τὰ μὲν ἐπὶ τοῖς δεξιοῖς εἰς τὰ ἀριστερὰ δοκεῖ [2] παρῆχθαι, τὰ δ' ἐπὶ τοῖς ἀριστεροῖς εἰς τὰ δεξιά.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενα τὰ ΒΓ, ΔΖ, ὄμμα δὲ τὸ Κ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΚΓ, ΚΑ, ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ· σκοπῶ τὸ Δ παρῆχθαι δοκεῖ εἰς τ' ἀριστερὰ ὑπὲρ τὸ Η· ὁμοίως δὲ καὶ τὸ Β εἰς τὰ δεξιὰ δοκεῖ παρῆχθαι ὑπὲρ τὸ Α. ὥστε τῶν εἰς τὸμπροσθεν μήκους ἐχόντων, τὰ μὲν ἐπὶ τοῖς δεξιοῖς εἰς τὰ ἀριστερὰ δοκεῖ παρῆχθαι, τὰ δ' ἐπὶ τοῖς ἀριστεροῖς εἰς τὰ δεξιά.



PROP. XII. THEOR.

Eorum quæ in anteriorem partem longitudinem habent, dextra lævorsum & læva dextrorsum educi videntur.

SInt visæ magnitudines ΒΓ, ΔΖ; oculus vero sit Κ, à quo procedant radii ΚΓ, ΚΑ, ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ: igitur Δ magis ad lævam educi videtur quam Η: eodemque modo Β magis ad dextram educi videtur quam Α. quocirca eorum quæ in anteriorem partem longitudinem habent, dextra lævorsum & læva dextrorsum educi videntur.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οτι δὲ τὸ μὲν Δ παρῆχθαι δοκεῖ εἰς τ' ἀριστερὰ ὑπὲρ τὸ Η, καὶ τὸ Η ὑπὲρ τὸ Ζ, τὸ δὲ Β εἰς τὰ δεξιὰ μᾶλλον ἢ τὸ Α, καὶ τὸ Α μᾶλλον ἢ τὸ Γ, δῆλον. ἔστω γὰρ ἡ ΚΝ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΝ, ἡ δὲ ΚΜ ὁμοίως πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΜ· πασῶν δὴ ὄντων τῶν Κ ὄμματος πρὸς τὴν ΔΝ προσπιπτουσῶν ἀκτίνων [3] ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ΚΝ κάθετος· καὶ διὰ τοῦτο δεξιώτατον τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἡ ΚΝ δεξιωτάτη τῶν ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ ὄψεων. ἐπεὶ δὲ ἡ ΚΖ ἐγγίων πρὸς τὴν ΚΝ ὑπὲρ ἡ ΚΗ, καὶ ἡ ΚΗ, ἐγγίων πρὸς τὴν ΚΝ ὑπὲρ ἡ ΚΔ· ἡ ἄρα ΚΔ εἰς τὰ ἀριστερὰ παρῆχθαι δοκεῖ ὑπὲρ ἡ ΚΗ, καὶ ἡ ΚΗ ὑπὲρ ἡ ΚΖ· τὸ ἄρ' Δ εἰς τὰ ἀριστερὰ δοκεύειν μᾶλλον φαίνεται ἢ τὸ Η, καὶ τὸ Η ὑπὲρ τὸ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ τὸ Β εἰς τὰ δεξιὰ παρῆχθαι ἢ τὸ Α, καὶ τὸ Α ἢ τὸ Γ.

SCHOLIUM.

Quod autem Δ magis ad sinistram procumbere videatur quam Η, & Η quam Ζ; item quod Β ad dextram magis tendere videatur quam Α, & Α magis quam Γ, hinc constabit. esto enim recta ΚΝ ad angulos rectos ipsi ΔΝ, recta etiam ΚΜ ad angulos rectos ipsi ΒΜ: radiorum igitur omnium, ex oculo Κ ad ΔΝ pergentium, minimus est perpendicularis ΚΝ: quocirca maxime dextrum est punctum Ν, & ΚΝ radius magis ad dextram vergit quam ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ radii. quia autem ΚΖ propior est ipsi ΚΝ quam sit radius ΚΗ, & ΚΗ propior ipsi ΚΝ quam sit radius ΚΔ: igitur radius ΚΔ ad lævam magis vergere videtur quam radius ΚΗ, & radius ΚΗ magis quam radius ΚΖ: ergo Δ lævorsum magis nutare videtur quam Η, & Η magis quam Ζ. eodem modo ostendemus Β magis ad dextram vergere quam Α, & Α quam Γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

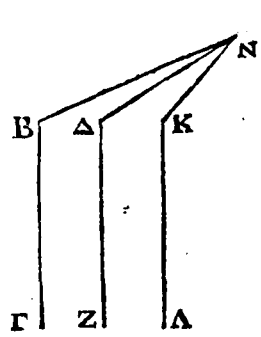
Τῶν ἴσων μεγεθῶν ὑπὸ τὸ ὄμμα [4] κειμένων [5] τὰ πόρρω κείμενα μειζονότερα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ἴσα μεγέθη τὰ ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ ὑπὸ τὸ ὄμμα τὸ Ν κείμενα, καὶ ὑπὸ τοῦ Ν ὄμματος προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΝΒ, ΝΔ, ΝΚ. σκοπῶ [6] μειζοτάτη ἐστὶν ἡ ΝΒ τῶν λοιπῶν ἀκτίνων· ὥστε καὶ τὸ Β σημεῖον. τὸ ἄρα ΒΓ τοῦ ΔΖ μειζότερον φαίνεται, τὸ δὲ ΔΖ τοῦ ΚΛ. τὰ ἄρα ἴσων μεγεθῶν ὑπὸ τὸ ὄμμα κειμένων τὰ πόρρω κείμενα μειζότερα φαίνεται.

PROP. XIII. THEOR.

Æqualium magnitudinum sub oculo positarum, quæ remotiores ab oculo sunt sublimiores apparent.

SInt æquales magnitudines ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ positæ sub oculo qui sit Ν, à quo procedant radii ΝΒ, ΝΔ, ΝΚ. horum ergo omnium maxime sublimis est radius ΝΒ: quare & punctum Β sublimius apparet; igitur ΒΓ sublimior apparet quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΚΛ. ergo æqualium magnitudinum sub oculo positarum, quæ remotiores ab oculo sunt sublimiores apparent.

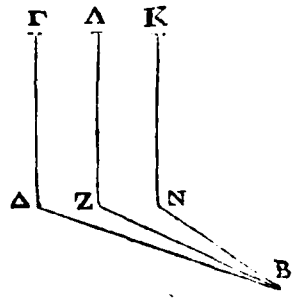


1 Antrorsum, in anteriorem partem, sc. neque ad dextram neque ad sinistram deflectendo. *Savil.* 2 Απονεύειν, tendere, procumbere. 3 Κάθετος & ἐλαχίστη est & δεξιώτατον, sed non puto δεξιώτατον quia ἐλαχίστη. *Savil.* 4 Sc. æqualiter, *i. e.* ita ut κάθετοι à punctis Β, Δ, Κ, itemque κάθετοι à punctis Γ, Ζ, Λ, in rectam ab Ν ad centrum terræ ductam ἀχθεῖσαν in iisdem punctis rectam illam fecent; alioqui non συσχήσουσι. *Savil.* 5 In quæ sc. perpendicularis ob oculo longior est. *Idem.* 6 Longissime sc. distans à perpendiculari ab oculo ad horizontem, quæ est omnino πανυποτάτη. *Idem.*

Prop. XIV. Theor.

Æqualium magnitudinum oculo ſublimiorum, quæ remotiores ſunt humiliores apparent.

SInt æquales magnitudines KN, ΛZ, ΓΔ poſitæ loco ſublimiori quam ſit B oculus, à quo pergant radii BN, BZ, BΔ; humillimus ergo eſt radius BΔ: quare & punctum Δ humillimum erit. ideoque ΓΔ humilior apparebit quam ΛZ, & ΛZ humilior videbitur quam KN.



Προτασις ιδ'.

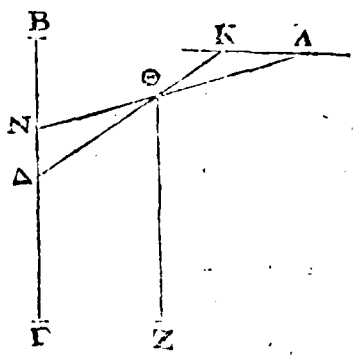
Τῶν ἴσων μεγεθῶν [1] ἄνω ὑπὸ ὄμματος κειμένων [2] τὰ πόρρω κείμενα ταπεινότερα φαίνεται.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ KN, ΛZ, ΓΔ ἄνω τοῦ ὄμματος κείμενα τοῦ B, ὑπὸ δὲ τοῦ B ὄμματος ἐκβεβλήσθωσαν ἀκτῖνες αἱ BN, BZ, BΔ· δῆλον ὅτι ταπεινοτάτη ἐστὶν ἡ BΔ· ὥστε καὶ τὸ Δ. καὶ τὸ μὲν ΓΔ ταπεινότερον φαίνεται τοῦ ΛZ, τὸ δὲ ΛZ τοῦ KN.

Prop. XV. Theor.

Magnitudinum oculo ſubjectarum, quarum altera alteram excedit, oculo quidem ad eas accedente, exceſſus quo major minorem ſuperare videtur, major apparet; recedente vero, minor.

SIT B Γ major quam Θ Z, ponaturque K oculus ſublimiore loco quam ſint B Γ, Θ Z, & per punctum Θ cadat radius KΔ. igitur B Γ excedere videtur ipſam Θ Z tota BΔ magnitudine, æqualis enim videtur Θ Z ipſi Δ Γ, cum ab eodem oculo & eodem radio KΔ cernantur. rurſus, transferatur oculus ad Λ, & per Θ punctum procedat radius ΛN. itaque rurſus B Γ major apparet quam Θ Z, tanto exceſſu quanta eſt magnitudo BN: recedente itaque oculo, major magnitudo B Γ minorem Θ Z excedere videtur minore exceſſu, quam accedente.



Προτασις ιε'.

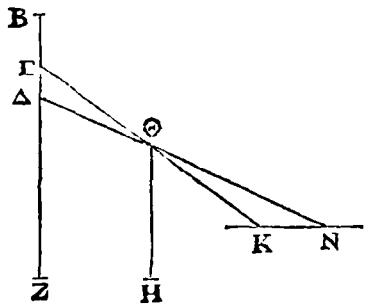
Οσα ἀλλήλων ὑπερέχει τῷ ἴσον τὸ ὄμμα [3] κειμένων, τοσούτου μὲν ὄμματος, μείζονι τὸ ὑπερφαινόμενον φαίνεται μεῖζον· ἀπόντος δὲ, ἐλάττονι μεῖζον.

Ἔστω γὰρ μεῖζον τὸ B Γ τοῦ Θ Z, ᾧ ὄμμα κείσθω τὸ K ἄνω τῶν B Γ, Θ Z, ᾧ τοσαυτάκις ἀκτὶς ἐκβεβλήσθω ἡ ΘΦ τοῦ KΔ. ἐκεῖνο τὸ B Γ τοῦ Θ Z μεῖζον φαίνεται τῷ BΔ, ἴσον γὰρ ἐφαίνετο τὸ Θ Z τῷ Δ Γ, ἐπειδὴ ἴσον τοῦ αὐτοῦ ὄμματος καὶ τὸ KΔ ἀκτῖνος ἑωράτο. πάλιν δὴ μετακείσθω τὸ ὄμμα ἐπὶ τὸ Λ, ᾧ ἐκβεβλήσθω τοσαυτάκις ἀκτὶς ἡ ΛN. ἐκεῖνο πάλιν τὸ B Γ τοῦ Θ Z μεῖζον φαίνεται τῷ BN· ἐλάττονι ἄρα φαίνεται ὑπερέχον τὸ B Γ τοῦ Θ Z, ἀπόντος τοῦ ὄμματος, ἢπερ τοσούτου.

Prop. XVI. Theor.

Magnitudinum oculo ſublimiorum, quarum altera alteram excedit, oculo ad eas accedente, exceſſus, quo major minorem ſuperat, minor videtur; recedente vero multo major.

SIT B Z major quam Θ H; ab oculo vero K in inferiore loco poſito procedat radius K Γ per punctum Θ: igitur B Z excedere videtur ipſam Θ H, tanta quantitate quanta eſt B Γ. transferatur oculus K ad N, procedatque radius N Δ per punctum Θ: ergo hic rurſus B Z excedit ipſam Θ H tota magnitudine BΔ.



Προτασις ις'.

Οσα ἀλλήλων ὑπερέχει κάτω ὑπὸ ὄμματος κειμένω, τοσούτου μὲν ὄμματος, ἐλάττονι μεῖζον τὸ ὑπερφαινόμενον φαίνεται· ἀπόντος δὲ, μεῖζονι μείζον.

Ἔστω μεῖζον τὸ B Z τοῦ Θ H, ᾧ ὑπὸ τοῦ K ὄμματος κάτω κειμένω προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ K Γ ἐπὶ τὸ Θ· ἐκεῖνο τὸ B Z τοῦ Θ H μεῖζον φαίνεται τῷ B Γ. μετακείσθω δὴ τὸ K ὄμμα ἐπὶ τὸ N, ᾧ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ N Δ ἐπὶ τὸ Θ· δῆλον πάλιν τὸ B Z τοῦ Θ H μεῖζον φαίνεται τῷ BΔ.

1 Et æque altorum, ut ſupra. *Savil.* 2 Ut ſupra. *Idem.* 3 Satis eſt minorem quantitatem eſſe oculo ſubjectam. *Idem.*

προσιόν-

προσιόντος μὴν ἄρα τοῦ ὄμματος, ἐλάττονι μείζων φαίνεται ὑπερέχων τὸ ΒΖ τοῦ ΘΗ, ἀπιόντος δὲ μείζονι.

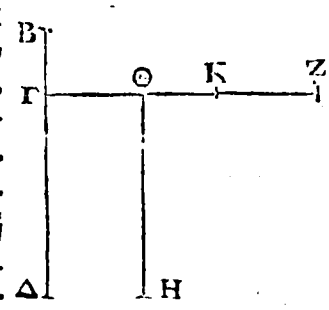
quare oculo accedente, major magnitudo ΒΖ minorem ΘΗ ſuperare videtur minori exceſſu; recedente vero oculo, majore.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Οσα ἀλλήλων ὑπερέχει, ᾧ ὄμματος [1]ἐπ' εὐθείας τῷ ἐλάσσονι μεγέθει ὄντος, προσιόντος τε καὶ ἀφισταμένου τοῦ ὄμματος, τῷ ἴσῳ ἀεὶ δόξει τὸ ὑπερφαινόμενον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν.

Prop. XVII. Theor.

Magnitudinum, quarum altera alteram excedit; oculi radio ad inferioris verticem perpendiculariter incidente, * major minorem ſemper excedere videtur æquali exceſſu, ſive oculus accedat, ſive recedat.



Υπερεχέτω γὰρ τὸ ΒΔ τοῦ ΘΗ τῷ ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθεισα ἡ ΓΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω τὸ ὄμμα ἐπὶ τὸ Ζ· ἀκτὶς οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἀκτὶς προσπιπτέτω κατὰ τὴν ΖΓ ἐπεχθήσεται. πάλιν δὲ μετακείσθω τὸ ὄμμα ἐπὶ τὸ Κ· ἀκτὶς δὴ ἡ ἀπὸ τοῦ Κ ὄμματος ἀκτὶς προσπιπτέτω κατὰ τὴν ΚΓ ἐπεχθήσεται. τῷ αὐτῷ ἄρα ὑπερέξει τὸ ΒΔ τοῦ ΘΗ, καὶ προσιόντος τοῦ ὄμματος καὶ ἀφισταμένου.

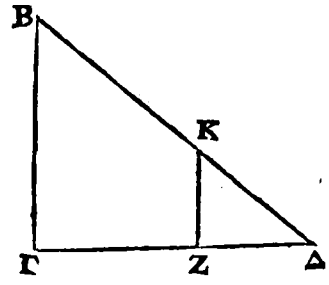
Εxcedat enim ΒΔ ipſam ΘΗ magnitudine ΒΓ; & connexa ΓΘ producatur uſque ad Ζ, in quo ſit oculus: igitur radius ex Ζ procedens ſecundum ΖΓ incidet. rurſus, transferatur oculus ad Κ. ergo ob eandem cauſam radius ex Κ oculo emiſſus feretur ſecundum ΚΓ lineam: quare ſive oculus accedat ſive recedat, eodem exceſſu perpetuo excedet major magnitudo ΒΔ ipſam minorem magnitudinem ΘΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Τὸ δοθὲν ὕψος γνῶναι πόσον ἐστίν.

Prop. XVIII. Probl.

Datam altitudinem cognoſcere quanta ſit.



Ἔστω γὰρ ὁ δεῖ ἐπιγνῶναι ὕψος πόσον ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡλίου ἀπὸ τοῦ Β, ἡ ΒΔ· ἀκτὶ οὖν σκιὰ ἔσται ἡ ΓΔ. λάβε δή τι γνώμονα μέγεθος τὸ ΚΖ, καὶ ἐναρμοσάτω [2]πρὸς τὴν Δ γωνίαν ὡσαύτως τῇ ΒΓ· ἀκτὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ οὕτω τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΚ. καὶ γνώμονος ὁ λόγος ὁ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΚ· γνώμονος ἄρα καὶ ὁ τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ. καὶ ἔστι γνώμονος ἡ ΔΓ σκιά· γνώμονος ἄρα καὶ τοῦ ΓΒ ὕψος.

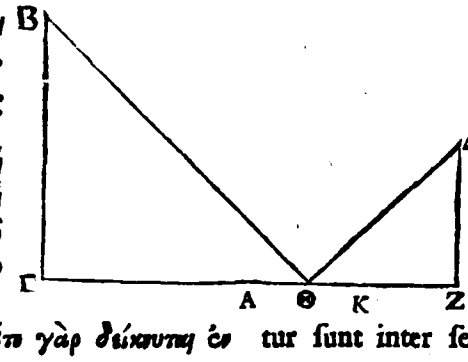
Sit altitudo ΒΓ, cujus quantitatem cognoſcere oporteat; & per punctum Β cadat ſolis radius ΒΔ: igitur umbra erit ΓΔ. ſume igitur magnitudinem aliquam cognitam, cujuſmodi ſit ΚΖ; eamque ita aptato in angulo Δ, ut ſit parallela ipſi ΒΓ: eſt itaque [per 4.6.] ut ΔΓ ad ΓΒ ita ΔΖ ad ΖΚ. eſt autem [per 1. dat.] cognita ratio ipſius ΔΖ ad ΖΚ: cognita ergo erit etiam ratio ΔΓ ad ΓΒ. ſed ΔΓ umbra cognita eſt: cognoſcetur ergo [per 2. dat.] ipſa ΓΒ altitudo.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Μὴ ὄντος ἡλίου, τὸ δοθὲν ὕψος [2]γνώμονι ἡλίου ἐστίν.

Prop. XIX. Probl.

Cognoſcere quanta ſit data altitudo, alio modo quam per ſolem.

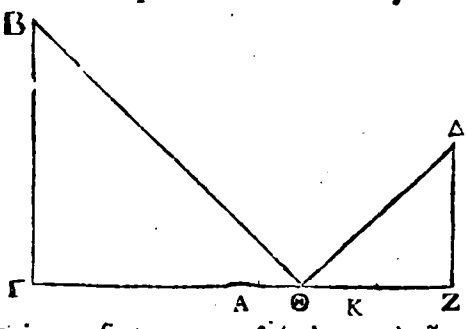


Ἔστω γὰρ ὁ δεῖ ἐπιγνῶναι ὕψος πηλίκον ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ κάτωθεν κάτοπτρον τὸ ΑΚ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΔΘ, καὶ ἀνακεκλάσθω ὡς ἡ ΘΒ ἐπὶ τὸ Β πέρας, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ὄμματος κάθετος ἤχθω ἡ ΔΖ· ἀκτὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ πρὸς τῷ Θ γωνίαι ἀλλήλαις, τοῦτο γὰρ δείκνυται ἐν

Sit ΒΓ altitudo, cujus quantitatem veſtigare oporteat; & ponatur ſpeculum ΑΚ, oculus autem ſit Δ, à quo procedat radius ΔΘ, & à puncto Θ reflectatur verſus extremum punctum Β ſecundum lineam ΘΒ; & à Δ oculo demittatur perpendicularis ΔΖ: æquales igitur ſunt inter ſe anguli ad Θ; id enim oſten-

1 Æque alto minori quantitati. *Savil.* 2 Sc. rei ὑφὸς ὁρίζοντι ſitæ. *Idem.* * Al. *ſuperexſtans.*

ſum eſt in catoptricis. angulus etiam qui ad Γ æqualis eſt angulo qui ad Z, ſunt enim ambo recti: reliquus igitur qui ad B [per 32. 1.] reliquo qui ad Δ æqualis eſt: quare [per 4. 6.] triangulus BΓΘ ſimilis eſt triangulo ΔΘZ: eſt ergo ut ΘΓ ad ΓB ita ΘZ ad ZΔ. ſed [per 1. dat.] ratio ipſius ΘZ ad ZΔ data eſt: igitur ratio etiam ipſius ΘΓ ad ΓB innoteſcet. nota autem eſt quantitas ipſius ΘΓ: ergo [per 2. dat.] nota etiam erit quantitas ipſius altitudinis ΓB.

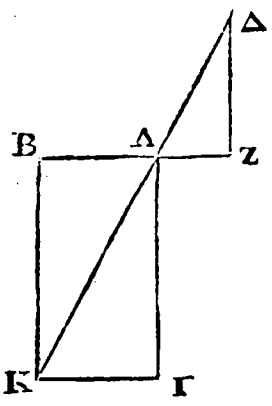


τοῖς κατοπτρικοῖς. ἀλλὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστίν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ E λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση ἐστίν· ὥστε ὅμοιον ἂν εἴη τὸ ΒΓΘ τρίγωνον τῷ ΔΘZ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΓ πρὸς ΓB οὕτως ἡ ΘZ πρὸς ZΔ. τῆς δὲ ΘZ πρὸς ZΔ λόγος δοθεὶς ἐστί· καὶ τῆς ΘΓ ἄρα πρὸς ΓB γνώσιμος ὁ λόγος ἐστί. γνώσιμος δὲ ἡ ΘΓ· γνώσιμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓB ὕψος.

Prop. XX. Probl.

Cognoſcere quanta ſit profunditas data.

SIT BK profunditas, cujus quantitatem cognoſcere oporteat; ponaturque oculus in Δ, à quo procedat radius ΔΛK in profundum; & à puncto Δ ducatur ΔZ, quæ ſit parallela ipſi BK. cum igitur in rectas parallelas BK, ΔZ recta linea ΔK incidat; alternos angulos BKΛ & ΛΔZ [per 29. 1.] æquales inter ſe facit. ſunt vero etiam & anguli ad vertice Λ inter ſe æquales: reliquus igitur angulus [per 32. 1.] reliquo æqualis eſt. ſunt igitur duo triangula æquiangula BKΛ & ΛΔZ: quare [per 4. 6.] erit ut ΛZ ad ZΔ ſic ΛB ad BK. datur autem [per 1. dat.] ratio ipſius ΛZ ad ZΔ: dabitur ergo ratio ipſius ΛB ad BK. datur vero quantitas ipſius ΛB: ergo [per 2. dat.] etiam dabitur quantitas ipſius BK.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

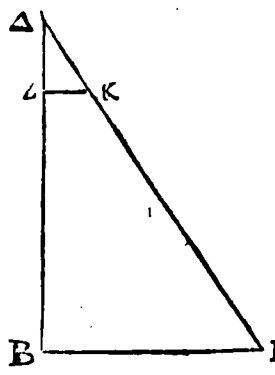
Τὸ δοθὲν βάθος ὑπογαίου πηλίκον ἐστίν.

ΕΣτω γὰρ τὸ βάθος ὃ δεῖ ὑπογραφῆναι πηλίκον ἐστὶ, τὸ BK· καὶ κείσθω ὄμμα τὸ Δ, καὶ προσπιπτέτω αὐτοῦ ἡ ΔΛK εἰς τὸ βάθος, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Δ τῷ BK ἡ ΔZ. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ BK τῇ ΔZ, καὶ ἐμπέπτωκεν ἡ ΔK· τὰς ἄρα ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ BKΛ, ΛΔZ ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ. εἰσὶ δὲ καὶ κατὰ κορυφὴν αἱ πρὸς τῷ Λ ἴσαι ἀλλήλαις· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα γωνία τῇ λοιπῇ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ BKΛ τρίγωνον τῷ ΛΔZ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛZ πρὸς ZΔ, οὕτως ἡ ΛB πρὸς BK. δοθεὶς δὲ ὁ τῆς ΛZ πρὸς ZΔ λόγος· δοθεὶς ἄρα καὶ ὁ τῆς ΛB πρὸς BK λόγος. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΛB· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ BK.

Prop. XXI. Probl.

Datæ longitudinis quantitatem cognoſcere.

SIT BΓ longitudo, cujus quantitas cognoſcenda ſit; ponaturque oculus in Δ, à quo procedant radii ΔB, ΔΓ; & à puncto Z ducatur ZK, quæ parallela ſit ipſi BΓ: eſt igitur [per 4. 6.] ut ZK ad KΔ ita BΓ ad ΓΔ. ſed [per 1. dat.] ratio ipſius ZK ad KΔ cognoſcitur: ergo etiam ratio ipſius BΓ ad ΓΔ cognoſcetur. ſed ipſius ΓΔ quantitas cognoſcitur: quare [per 2. dat.] ipſius etiam BΓ quantitas cognoſcetur.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Τὸ δοθὲν μῆκος ὑπογαίου πηλίκον ἐστίν.

ΕΣτω γὰρ ὃ δεῖ μῆκος ὑπογραφῆναι πηλίκον ἐστὶ τὸ BΓ. κείσθω δὴ ὄμμα τὸ Δ, ἀφ' οὗ διήκτωσαν αἱ ἐπὶ τὰς ΔB, ΔΓ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Z ἤχθω παρὰ τὴν BΓ ἡ ZK· σύνηθες ἐστιν ὡς ἡ ZK πρὸς KΔ οὕτως ἡ BΓ πρὸς ΓΔ. γνώσιμος δὲ ὁ τῆς ZK πρὸς KΔ λόγος· γνώσιμος ἄρα καὶ ὁ τῆς BΓ πρὸς ΓΔ λόγος. καὶ γνώσιμος ἡ ΓΔ· γνώσιμος ἄρα καὶ BΓ.

Prop. XXII. Theor.

Si in eodem plano, in quo eſt oculus,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

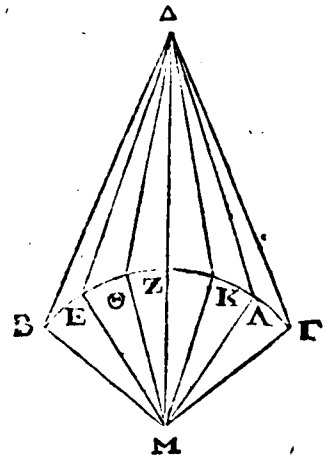
[1] Ἐὰν ὁ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ καὶ τὸ ὄμμα,

1 Vel potius, ſi oculus in plano circuli ponatur: & ſic in demonſtratione ponitur. *Savil.*

κύκλῳ

κύκλῳ περιφέρεια τεθῇ· εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ἐφ' ἑκάτερα τελευτῶσα τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας φανεῖται.

describatur circuli circumferentia; hæc videbitur esse recta linea.



Ἔστω γὰρ περιφέρεια ἡ ΒΓ, ὄμμα δὲ τὸ Δ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὂν τῇ ΒΖΓ περιφερείᾳ, ἀφ' ἧς προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΔΒ, ΔΓ, ΔΖ. [2] σκεπτέον ἐπεὶ τῶν ὁρωμένων ἐφ' ἓν ἅμα ὄψεται, [3] ἐὰν μὴ φαίνοιτο ἡ ΖΒ περιφέρεια, τὰ δὲ Ζ, Β πέρατα· δόξει ἄρα ἡ ΖΒ περιφέρεια εὐθεῖα εἶναι. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΖΓ· [4] ὅλη ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια εὐθεῖα δόξει εἶναι.

SIT enim circumferentia ΒΖΓ; oculus autem Δ in eodem plano in quo est ΒΖΓ circumferentia; & ex Δ oculo procedant radii ΔΒ, ΔΓ, ΔΖ. quia ergo [per 1. opt.] nullum aspectabile simul totum cernitur, circumferentia quidem ΖΒ non apparebit, sed ejus extrema puncta Ζ, Β: quare circumferentia ΖΒ videbitur esse recta linea. eodemque modo ΖΓ: tota igitur circumferentia ΒΓ lineæ rectæ instar videbitur.

ΑΛΛΩΣ ΕΚ ΤΩΝ ΤΟΥ ΠΑΠΠΟΥ.

Ἀπὸ τοῦ Δ ὄμματος κείσθω ἐπὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐφ' ᾧπερ ἡ ΒΖΓ περιφέρεια, προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΔΒ, ΔΕ, ΔΘ, ΔΚ, ΔΛ, ΔΓ, ἡ δὲ ΔΖ ἐκβαλλομένη διήχθω ἐπὶ τὸ Μ κέντρον, ἀφ' ἧς ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΒ, ΜΕ, ΜΘ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΓ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΔΓ γωνία τῆς ΜΔΛ γωνίας μείζων ἐστί, καὶ ἡ ΜΔΔ τῆς ΜΔΚ· ἡ ἄρα ΜΓ μείζων φαίνεται τῆς ΜΛ, καὶ ἡ ΜΛ τῆς ΜΚ, καὶ ἡ ΜΚ [5] τῆς ΜΖ· καὶ διὰ τοῦτο τὸ Ζ σημεῖον μᾶλλον πλησιάζειν φαίνεται τῷ Μ κέντρῳ ἤπερ τὸ Κ σημεῖον, καὶ τὸ Κ ἤπερ τὸ Λ, καὶ τὸ Λ ἤπερ τὸ Γ· [6] ἡ ἄρα ΖΚΛΓ περιφέρεια εὐθεῖα φαίνεται. τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον καὶ ΖΘΕΒ περιφέρεια εὐθείας φαντασίαν παρέχειν δειχθήσεται· ὥστε ὅλη ἡ περιφέρεια εὐθωθῆναι δόξει.

ALITER EX PAPPI DEMONSTRATIONIBUS.

Ab oculo Δ posito in eodem plano, in quo est circumferentia ΒΖΓ, procedant radii ΔΒ, ΔΕ, ΔΘ, ΔΚ, ΔΛ, ΔΓ; radius autem ΔΖ extensus producatur usque ad centrum Μ, à quo connectantur rectæ lineæ ΜΒ, ΜΕ, ΜΘ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΓ. angulus igitur ΜΔΓ major est angulo ΜΔΛ, & angulus ΜΔΛ major angulo ΜΔΚ; quare ΜΓ major apparet quam ΜΛ, & ΜΛ major quam ΜΚ, & ΜΚ major quam ΜΖ: ideoque punctum Ζ apparet propinquius esse ipsi Μ centro quam punctum Κ; & idem punctum Κ propinquius videtur eidem centro quam punctum Λ: & Λ quam Γ: igitur circumferentia ΖΚΛΓ recta linea esse videtur. eodemque modo ostendetur ΖΘΕΒ circumferentia rectæ lineæ speciem præ se ferre: quapropter tota circumferentia adinstar rectæ lineæ apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Σφαίρας ὁπωσοῦν ὁρωμένης ἀεὶ ἔλαττον ἀεὶ ἢ ἡμισφαιρίου ὀφθήσεται· αὐτὸ δὲ τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας ἀεὶ κύκλῳ περιεχόμενον φανήσεται.

PROP. XXIII. THEOR.

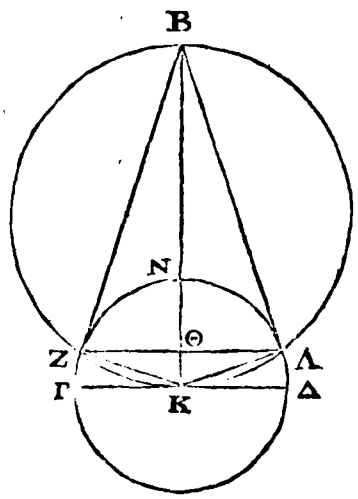
Quomodocunque sphæra unico oculo spectetur, semper minus hemisphærio de ea cernetur; ea autem sphæræ pars quæ cernitur, circulo comprehendi videtur.

Ἔστω γὰρ σφαῖρα ἧς κέντρον τὸ Κ, ὄμμα δὲ ἔξω τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΚ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Κ ἡ ΓΚΔ, καὶ ἐκβεβλήθω τὸ διὰ τῶν ΒΚ, ΓΚΔ ἐπίπεδον· ποιήσει δὴ ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον. ποιείτω δὴ τὸν ΓΔΛΝ, περὶ δὲ τὴν ΒΚ διάμετρον κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΖΒ, ΒΛ, ΛΚ, ΛΖ. ἐπεὶ οὖν ὀρθαί εἰσιν αἱ ὑπὸ ΚΖΒ, ΚΛΒ, διὰ

SIT enim sphæra cujus centrum Κ; oculus vero sit Β; & connectatur recta ΒΚ, cui per punctum Κ ad angulos rectos ducatur ΓΚΔ; & per lineam ΒΚ & ΓΚΔ sphæræ diametrum ducatur planum: faciet igitur in sphæra circulum. faciat (inquam) sitque ille circulus ΓΔΛΝΖ, & circa ΒΚ diametrum describatur circulus, & connectantur rectæ lineæ ΚΖ, ΖΒ, ΒΛ, ΛΚ, ΛΖ. cum ergo ΚΖΒ, ΚΛΒ anguli

1 Oportet tamen esse ὡς οἷμαι ἐκ διοπτρικοῦ, & sic est in 25. prop. *Savil.* 2 Schol. ἐδεῖ γὰρ ἅμα βλέπειν ὅλον, ἵνα συναθροίσῃ εἰς περιφέρειάν τινα ἐφεξῆς τὰ ὁρώμενα. *Idem.* 3 Valde credulum esse oportet, qui hujusmodi demonstrationibus velit credere: neque mehercule *Pappus* melius concludit. *Idem.* 4 At ne illud quidem necesse, etiamsi ΒΖ, ΖΓ rectæ appareant, ΒΖΓ rectam videri, cum fortasse non sunt futuræ sibi ἐπ' εὐθείας. *Idem.* 5 Non video quomodo ΜΖ posset videri, cum nullus possit in eam à Δ incidere angulus: quin potius ἐπιπεδεῖ τὸ Ζ τῷ Μ. sed quid dicam de singulis? tota demonstratio est planissimus παραλογισμός. quid enim nobis cum Μ centro, ut sit nobis semper necesse ad ipsum respicere? quod si aliud cepero, ruet egregia hæc *Pappi* demonstratio. *Idem.* 6 Ut cætera concedam, ne illud quidem necesse est, nisi Ζ σημεῖον tanto magis φαινόμενον centro πλησιάζειν ostendatur quam Κ, quanto ΔΖ minor est quam ΚΜ. nec ita quidem prorsus & ex omni parte conveniet: sed quid facias tam putidis nugis? *Idem.*

sint in semicirculis: sunt igitur [per 31.3.] recti: quare B Z, B A rectæ lineæ ipsas K Z, K Λ eductas ex K centro in unico sphæræ puncto tangent: radii ergo ex B oculo procedentes cadent secundum lineas B Z, B Λ. quia ergo omnes anguli qui sunt circa punctum Θ recti sunt, eo quod parallela est recta Γ Δ rectæ Z Λ, & æqualis est Z Θ ipsi Θ Λ: si igitur manente latere Θ B ipsum triangulum ΘBZ circumducatur, quoadusque ad illud punctum restituatur unde circumduci cœperat, fiet ut & B Z circumducta sphæricam superficiem tangat in unico puncto, nempe in Z, & circulus describatur per puncta Z, Λ. quare circulo comprehenditur ea sphæræ pars quæ cernitur; quæ sane minor est hemisphærio, quia portio Z N Λ minor est semicirculo: quod ergo ab oculo cernetur est minus hemisphærio.



τὸ ἐν ἡμικυκλίοις εἶναι καὶ ἐκ κέντρου τὰς K Z, K Λ, καθ' ἓν σημεῖον ἐφάψονται) αἱ B Z, B Λ τὴν σφαῖραν· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ B ὄμματος προσπίπτουσαι ἀκτῖνες κατὰ τὰς B Z, B Λ πεσοῦνται. καὶ ἐπεὶ ἑκάστη τῶν [2] πρὸς τῷ Θ γωνιῶν ὀρθή ἐστι, [3] διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν Γ Δ τῇ Z Λ, καὶ ἴση ἡ Z Θ τῇ Θ Λ· ἐὰν δὴ μενούσης τῆς Θ B τὸ Θ B Z τρίγωνον περιενεχθὲν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ B Z φερομένη καθ' ἓν ἐφάψεται τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας [4] κατὰ τὸ Z, καὶ κύκλος ἔσται γεγραμμένος διὰ τῶν Z, Λ σημείων· ὥστε καὶ τὸν κύκλον ἂν περιέχοιτο τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας, ὃ γε ἔλαττόν ἐστιν ἡμισφαιρίου, τὸ γὰρ Z N Λ ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ὄψεως ὁρώμενον ἔλαττόν ἐστιν ἡμισφαιρίου.

SCHOLIUM.

Quod autem, si sphæra plano secetur, communis sectio sit circulus, sumptum quidem est tanquam certum in phænomenis, demonstratum autem in sphæricis.

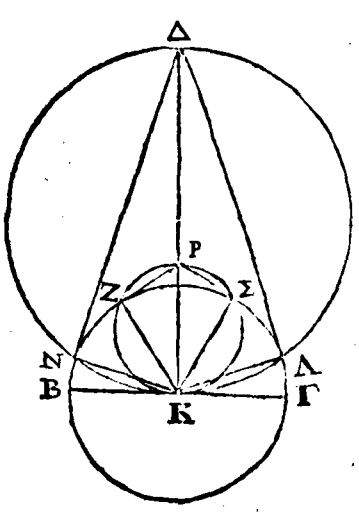
ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ ἂν σφαῖρα τμηθῇ ὑπιπέδῳ, ἡ κοινὴ τομὴ κύκλος ἐστί, προείληπται μὲν ἐν τοῖς φαινομένοις, δέδεικται δὲ ἐν τοῖς σφαιρικοῖς.

PROP. XXIV. THEOR.

Oculo propius ad sphæram accedente, minus de sphæra cernetur, quam oculo procul posito; plus tamen cerni existimabitur.

SIT sphæra cujus centrum K; & ab oculo Δ ad centrum connectatur linea recta Δ K; & per punctum K ducatur B Γ, quæ sit ad angulos rectos ipsi Δ K; & circa Δ K diametrum describatur circulus, & ducantur rectæ Δ N, N K, Δ Λ, Λ K: anguli ergo ad Λ, N recti sunt [per 31. 3.] quia sunt in semicirculis: quare rectæ lineæ Δ Λ, Δ N in uno puncto sphæram tangunt; ideoque radii qui ex Δ oculo procedunt, cadent in sphæram secundum lineas Δ Λ, Δ N. rursus, transferatur oculus ex Δ puncto in P punctum, & circa lineam P K describatur circulus, connectanturque lineæ P Z, Z K, P Σ, Σ K: lineæ igitur P Z, P Σ in uno puncto tangunt sphæram: quare radii etiam ex P oculo



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Τῷ ὄμματι προσιόντος ἔγγιον τῆς σφαίρας, τὸν ἔσται τὸ ὁρώμενον· δοξῇ δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι.

Ἔστω γὰρ σφαῖρα ἧς κέντρον τὸ K, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ὄμματος ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ κέντρον ἡ Δ K, καὶ διὰ τοῦ K πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ B Γ, [5] περὶ δὲ τὴν Δ K κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Δ N, N K, Δ Λ, Λ K· ἐκάτερα ὀρθὴ ἔσονται αἱ πρὸς τοῖς Λ, N γωνίαι, διὰ τὸ ἐν ἡμικυκλίοις εἶναι· καθ' ἓν ἄρα ἅπτονται αἱ Δ Λ, Δ N τῆς σφαίρας· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ὄμματος προσπίπτουσαι ἀκτῖνες κατὰ τὰς Δ Λ, Δ N πεσοῦνται. πάλιν δὴ μετακείσθω τὸ Δ ὄμμα ἐπὶ τὸ P, καὶ περὶ τὴν P K κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ P Z, Z K, P Σ, Σ K· εὐκάτεραι αἱ P Z, P Σ καθ' ἓν ἅπτονται τῆς σφαίρας· καὶ αἱ μὲν ἀπὸ τοῦ P ὄμματος

1 Τῷ κύκλῳ Γ Δ Λ Z, atque ideo sphæram, per 16.3 elem. *Savil.* 2 Schol. Manusc. quia K Z B, K Λ B habent; æqualia latera, imo anguli Z K Θ. Λ K Θ æquales & rectæ comprehendentes; ergo anguli ad Θ æquales & recti: αἱ μὲν ἄκροι ἀκκως (inquit ille) ἴσαι δὲ ἴσαις. 3 Unde hoc? etsi verum est & potest probari, sed Θ ἐξῆν multo facilius, quia in isosceli Z B Λ angulus ad B secatur bifariam. *Savil.* 4 In uno puncto, nempe Z: nam quod Z opinor esse ex scholio, & abest in sequentibus. *Idem.* 5 Sc. Καὶ διὰ τοῦ τὸ διὰ τοῦ B K Γ, Δ K ἐπίπεδον, &c. ut in præcedente. *Idem.*

ἀκτῖνες

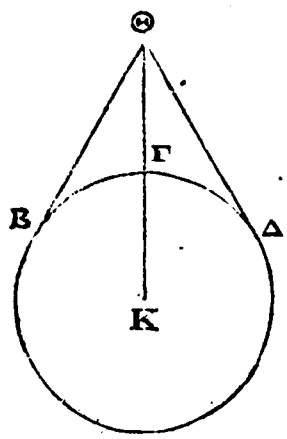
ἀκτῖνες προσπίπτουσι κατὰ τὰς P Z, P Σ περατοῦνται· ὥστε ὁρᾶται ὑπὸ μὲν τὸ P γωνίας τὸ Z Σ, ὑπὸ δὲ τὸ Δ τὸ N Z Σ Λ. μεῖζον δὲ τὸ N Z Σ Λ τοῦ Z Σ ἐστι, φαίνεται δὲ ἔλαττον· μείζων γάρ ἐστιν [1] ἡ P γωνία τῆς Δ γωνίας. τὰ δ' ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεται· μεῖζον ἄρα φαίνεται τὸ Z Σ τοῦ N Z Σ Λ· ἔστι δὲ ἔλαττον.

procedentes incident in ſphæram ſecundum rectas P Z, P Σ: ergo ſub angulo quidem P cernitur Z Σ, ſub angulo vero Δ cernitur N Z Σ Λ. eſt autem N Z Σ Λ major quam Z Σ; minor vero apparet: angulus enim P major eſt angulo Δ. quæ autem ſub majore angulo ſpectantur [per 5. poſit.] majora videntur: major igitur apparet Z Σ quam N Z Σ Λ; minor vero eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Σφαῖρα ὑπ' ὀφθαλμοῦ [2] ὁρωμένη κύκλος φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ἐν σφαίρᾳ, ἧς κέντρον τὸ K, μέγιστος κύκλος B Γ Δ, ᾧ ἀπὸ τοῦ Θ ὄμματος προσπίπτωσαν ἀκτῖνες αἱ Θ B, Θ Γ, Θ Δ· ἀκραὶ ἡ B Γ Δ περιφέρεια εὐθεῖα εἶναι δοκεῖ. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἄλλαι τῶν κύκλων περιφέρειαι ἐν τῇ σφαιρικῇ ἐπιφανείᾳ γραφομένων εὐθεῖαι φανήσονται· κύκλος ἄρα φανεῖται ἡ σφαῖρα πρὸς κορυφὴν τοῦ ὄμματος.



Prop. XXV. Theor.

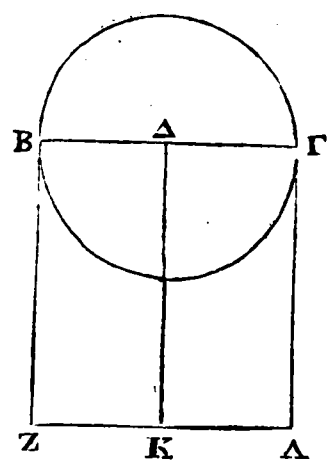
Sphæra eminus ſpectata videtur circulus.

SIT enim in ſphæra, cujus centrum K, maximus circulus B Γ Δ, ad quem ex Θ oculo procedant radii Θ B, Θ Γ, Θ Δ: ergo [per 22. opt.] B Γ Δ circumferentia videtur eſſe recta linea. ſimiliter & circumferentiæ reliquorum circulorum, in ſphæræ ſuperficie deſcriptorum, rectæ lineæ videbuntur: quare tota ſphæra, procul ab oculo diſſita, circulus exiſtimabitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Σφαῖρας διὰ τῶν δύο ὀμμάτων ὁρωμένης, ἐὰν ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἴση ᾖ τῇ εὐθείᾳ [3] τῇ διεστώσῃ ἀπὸ τῶν ὀμμάτων· ἡμισφαίριον αὐτῆς ὀφθήσεται.

Ἔστω δὴ σφαῖρα ἧς διάμετρος ἡ B Γ, καὶ ἀπὸ τῶν B, Γ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ B Z, Γ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἤχθω παρὰ τὴν B Γ ἡ Z Λ, καὶ κείσθω ἐν ὄμματι μὲν τῷ Z, τὸ δὲ ἕτερον ὄμμα τῷ Λ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ κέντρου ἤχθω παρὰ τὴν B Z ἡ Δ K. σύκλειε ἐὰν μενούσης τῆς Δ K τὸ B K παραλληλόγραμμον περιενεχθὲν, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιγραφὲν ὑπὸ τῆς B Δ χῆμα κύκλος ἔσται, ὃς γε μέσον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας· ὥστε τὸ ἡμισφαίριον τῆς σφαίρας μόνον ὀφθήσεται ὑπὸ τῶν Z, Λ ὀμμάτων.



Prop. XXVI. Theor.

Si ſphæræ ambobus oculis conſpectæ diameter æqualis fuerit rectæ lineæ, qua oculorum alter ab altero diſtat; dimidium ſphæræ cernetur.

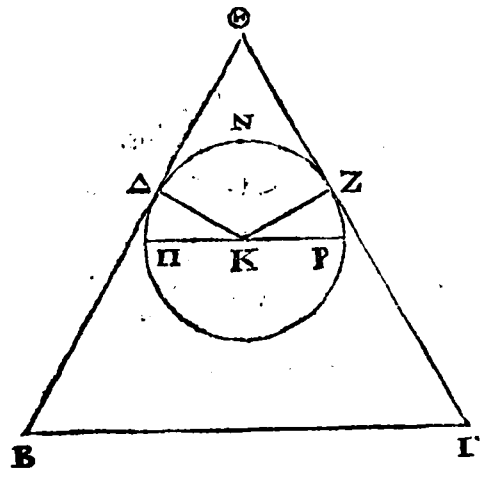
SIT ſphæra cujus diameter B Γ; & à punctis B, Γ excitentur B Z, Γ Λ rectæ; quæ ſint ad angulos rectos ipſi B Γ; & per punctum Z ducatur Z Λ quæ ſit parallela ipſi B Γ; ponaturque oculorum alter quidem in Z, alter vero in Λ; & ex Δ centro ducatur Δ K parallela ipſi B Z. ſi ergo manente Δ K latere, parallelogrammum B K circumagatur, donec in idem punctum reſtituatur unde circumagi cœperat; figura, quam deſcribet latus B Δ circumactum, erit circulus, qui per centrum ſphæræ tranſit: quare dimidia tantum ſphæræ pars cernetur à Z, Λ oculis.

1 Quia ſc. angulus Z K Σ, quo P deficit à duobus rectis, minor eſt quam angulus N K Λ, quo Δ deficit à duobus rectis. *Savil.* 2 Hinc apparet etiam in 22. prop. addendum eſſe, aut certe ſupplendum itidem, ὑπ' ὀφθαλμοῦ. *Idem.* 3 Hoc quid ſit plane neſcio. Forſan legendum τῷ διαστήματι τῶν ὀμμάτων. *Idem.*

PROP. XXVII. THEOR.

Si oculorum intervallum majus sit sphæræ diametro; sphæræ pars, quæ cernitur, major hemisphærio videbitur.

SIT enim sphæra, cujus centrum K; oculorum vero intervallum BΓ majus sphæræ diametro ΠKP; per K autem & rectam BΓ extendatur planum, quod faciat in sphæra circulum ΔNZ; & ab oculis B, Γ cadant radii BΔ, ΓZ, qui sphæram ipsam tangant in uno puncto. hi ergo radii in rectum producti alicubi concurrent, cum BΓ sit major quam sphæræ diameter ΠP. concurrant ergo in puncto Θ. quoniam autem à puncto Θ ad sphæram ΔNZ cadunt lineæ ΘZ, ΘΔ, sphæram in uno puncto tangentes: igitur ZNΔ minor est semicirculo, anguli enim ΘZK, ΘΔK recti sunt: reliquum igitur sphæræ, quod per radios BΔ, ΓZ cernitur, majus est hemisphærio.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

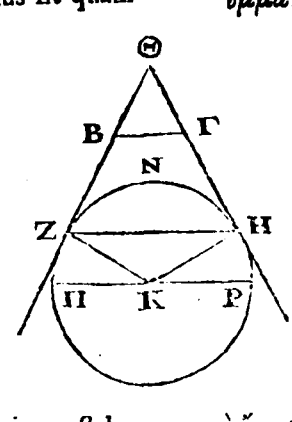
Ἐὰν τὸ τῶ ὀμμάτων διάστημα μεῖζον ᾖ τῆ διαμέτρου τῆς σφαίρας, ἡμισφαίριον μεῖζον τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας ὀφθήσετ[αι].

ΕΣτω γὰρ σφαῖρα ἧς κέντρον τὸ Κ, τὸ δὲ τῶν ὀμμάτων διάστημα τὸ ΒΓ μεῖζον ὂν τῆς ΠΚΡ διαμέτρου τῆ σφαίρας, διὰ δὲ τῶ Κ καὶ τῆ ΒΓ ἐκβεβλήθω ἐπίπεδον, καὶ ποιείτω ἐν τῆ σφαίρα κύκλον τὸν ΔΝΖ, καὶ ἐφαπτέτωσαν ἀκτῖνες καθ' ἓν σημεῖον ἁπτόμεναι αἱ ΒΔ, ΓΖ. ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐπειδὴ ἡ ΒΓ τῆ ἐν τῆ σφαίρα διαμέτρου ΠΡ μείζων ἐστί. συμπιπτέτωσαν δὴ κατὰ τὸ Θ σημεῖον. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ τοῦ Θ σημείου αἱ ΘΖ, ΘΔ καθ' ἓν ἐφάπτονται περιφερείας, ἔλασσον ἂν εἴη τὸ ΖΝΔ ἡμικύκλιον, αἱ γὰρ ΘΖΚ, ΘΔΚ γωνίαι ὀρθαί εἰσι[1]· τὸ ἄρα λοιπὸν τῆ σφαίρας μεῖζον ἡμισφαιρίου ὀφθήσεται[2] ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΓΖ.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si oculorum intervallum minus sit sphæræ diametro; sphæræ pars, quæ cernitur, minor est hemisphærio.

SIT sphæra cujus centrum K; oculorum vero intervallum BΓ, quod minus sit quam sphæræ diameter ΠKP; & per K & BΓ trajiciatur planum, quod in sphæra faciat circulum ZNH; & ex B, Γ oculis deducantur radii BZ, ΓH, qui sphæram tangant in uno puncto; concurrantque in puncto Θ: concurrent enim, cum inæquales sint BΓ oculorum interstitium, & ΠP diameter sphæræ. ergo radii à puncto Θ in sphæram cadentes minus comprehendent quam dimidium sphæræ: quare ZNH minus est hemisphærio; ideoque sphæræ pars ea, quæ ab oculis B, Γ cernitur, minor est hemisphærio.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν τὸ τῶ ὀμμάτων διάστημα ἔλασσον ᾖ τῆ διαμέτρου τῆς σφαίρας, τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας ἔλασσον ἡμισφαιρίου ὀφθήσεται.

ΕΣτω γὰρ σφαῖρα ἧς κέντρον τὸ Κ, τὸ δὲ τῶν ὀμμάτων διάστημα τὸ ΒΓ, ἔλαττον ὂν τῆς ΠΚΡ διαμέτρου τῆ σφαίρας, καὶ διὰ τῶ Κ καὶ τῆ ΒΓ ἐκβεβλήθω ἐπίπεδον, καὶ ποιείτω ἐν τῆ σφαίρα κύκλον τὸν ΖΝΗ, ἤχθωσαν δὲ ἀπὸ τῶν Β, Γ ὀμμάτων καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι αἱ ΒΖ, ΓΗ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Θ· συμπεσοῦνται γὰρ, ἐπειδήπερ ἄνισοί εἰσιν ἥ τε ΓΒ καὶ ἡ ΠΡ τῆ σφαίρας διάμετρος. ἐπεὶ οὖν αἱ ἀπὸ τοῦ Θ σημείου προσπίπτουσαι πρὸς τὴν σφαῖραν ἔλαττον ἡμισφαιρίου περιλήψονται· τὸ ἄρα ΖΝΗ ἔλασσον ἡμισφαιρίου ἐστί· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ ὀμμάτων ὁρώμενον ἔλασσον ἂν εἴη ἡμισφαιρίου.

PROP. XXIX. THEOR.

Quomodocunque cylindrus unico oculo cernatur, minus dimidia parte cylindri cernetur.

SIT K centrum circuli, qui basis sit alicujus cylindri; & ab oculo N ducatur recta linea

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

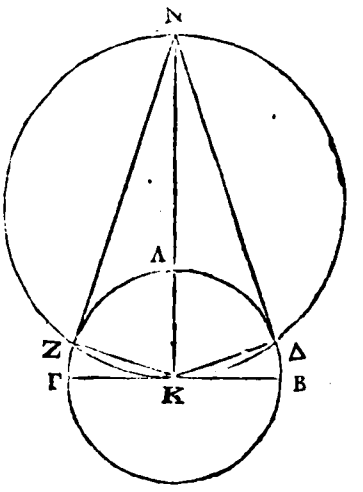
Κυλίνδρου ὁπωσοῦν ὁρωμένου ὑφ' ἑνὸς ὄμματος ἔλαττον ἡμικυλίνδρου ὀφθήσεται[3].

ΕΣτω κυλίνδρου τοῦ μὲν τῆ βάσιν κύκλου κέντρου τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ὄμματος ἤχθω

1 Ergo anguli ΔKZ, ΔΘZ duobus rectis æquales: & proinde ΔKZ minor semicirculo. *Savil.* 2 Id est, in quacunque ab oculo distantia, non situ. nam oculo supra vel infra cylindrum posito, de cylindrica superficie nihil prorsus videtur. *Idem.* 3 Hæc demonstratio supponit oculum in plano basis cylindri; vel potius id tantum respicit de cylindro, quod oculis directa ex adverso objacet. idemque in sequentibus de conis intellige. *Idem.*

ἐπὶ

ἐπὶ τὸ Κ ἡ ΝΚ, καὶ ἀπὸ τῆ Κ πρὸς ὀρθὰς αὐτῆ ἤχθω ἡ ΒΓ, περὶ δὲ τὸ ΝΚ κύκλος γεγράφθω, ⟨καὶ⟩ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΖ, ΖΚ, ΝΔ, ΔΚ. ἐχέτω ὀρθὴν αἱ πρὸς τοῖς Ζ, Δ· καθ' ἓν ἄρα ἁφάπτονται αἱ ΝΖ, ΝΔ. καὶ αἱ γε ἀπὸ τοῦ Ν ὄμματος φερόμεναι ἀκτῖνες κατὰ τὰς ΝΖ, ΝΔ πεσοῦνται· ὥστε τὸ ΖΛΔ μόνον ὀφθήσεται. ἀλλὰ τὸ ΖΛΔ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΓΛΒ ἡμικυκλίου· τὸ ἄρα ΖΛΔ ἔλασσον ἡμικυκλίου ὀφθήσεται, τοῦτ' ἔστιν ὁ κύλινδρος [1] ὁμοίως γὰρ τῇ βάσει κατὰ πᾶσαν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου [2] δείξομεν· ὥστε ὅλου τοῦ κυλίνδρου ἢ ἡμίσεως ἔλαττον φαίνεται.



ad ipſum K, quæ ſit NK; & à puncto K excitetur BΓ, quæ ſit ad angulos rectos ipſi NK: & circa NK deſcribatur circulus; connectanturque rectæ NZ, ZK, NΔ, ΔK. recti ergo ſunt [per 31. 3.] anguli ad Z, Δ: ideoque NZ, NΔ in uno puncto cylindrum tangunt. & radii ab oculo N delati cadent in cylindrum ſecundum lineas NZ, NΔ: quare ZΛΔ tantum cernetur. ſed ZΛΔ minor eſt ſemicirculo ΓΛB: igitur apparebit ZΛΔ, quæ minor eſt ſemicirculo; id eſt, minus ſemper cernetur quam dimidia cylindri pars. quod enim de cylindri baſi monſtravimus, illud idem de qualibet alia parte ſuperficiei cylindri demonſtrabimus: quare minus dimidia parte totius cylindri cernitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

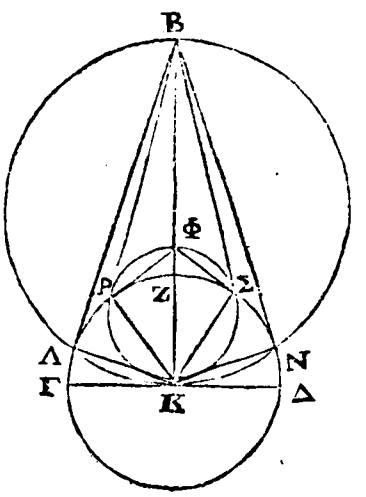
Τοῦ δὲ ὄμματος ἔγγιον τεθέντος τοῦ κυλίνδρου, ἔλασσον μὲν ἔσται τὸ θεωρούμενον ὑπὸ τῆς ὄψεως τοῦ κυλίνδρου, δόξει δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι.

Prop. XXX. Theor.

Pars cylindri quæ cernitur, oculo ad cylindrum accedente, minor eſt quam ea quæ cernitur oculo recedente; major tamen exiſtimatur.

Ἔστω γὰρ κυλίνδρου τοῦ περὶ τὸν βάσιν κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος ἐπὶ τὸ Κ κέντρον ἐπεζεύχθω ἡ ΒΚ, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ περὶ τὸ ΒΚ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΝ, ΝΚ, ΒΛ, ΛΚ. ἀπὸ δὲ τοῦ πρότερον τὸ ΑΖΝ ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, [3] καὶ ὁμοίως τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἔλαττον ἢ τὸ ἥμισυ ὀφθήσεται. καὶ περιεχθω δὴ τὸ ὄμμα, καὶ ἔστω Φ, καὶ περὶ τὸν ΦΚ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΦΡ, ΡΚ, ΚΣ, ΣΦ. ἐκεῖ αἱ ἀπὸ τοῦ Φ ἀκτῖνες περισπῶσαι κατὰ τὰς ΦΡ, ΦΣ πεσοῦνται, αἱ δ' ἀπὸ τοῦ Β κατὰ τὰς ΒΛ, ΒΝ· μεῖζον ἄρα τὸ ΝΖΛ τοῦ ΡΖΣ. δοκεῖ δὲ μεῖζον φαίνεσθαι τὸ ΡΖΣ τοῦ ΝΖΛ, μείζων γὰρ ἡ Φ γωνία τῆς Β γωνίας· ὥστε καὶ τοῦ κυλίνδρου ἔλαττον μέρος ὀφθήσεται, δοκεῖ δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι.

SIT K centrum circuli efficientis baſim alicujus cylindri, & ab oculo B ad centrum K ducatur BK; per punctum vero K ducatur ΓΔ quæ ſit ad angulos rectos ipſi BK; deſcribatur etiam circulus circa BK, & connectantur rectæ BN, NK, BΛ, ΛK. igitur ſicut in præcedente ΛZN circumferentia eſt minor ſemicirculo; & quemadmodum minus quam dimidium baſis, ita etiam minus quam dimidium cylindri ſpectabitur. jam oculus propius admoveatur, ſitque Φ, & circa ΦK deſcribatur circulus, & ducantur lineæ ΦP, PK, KΣ, ΣΦ. radii ergo ex Φ oculo procedentes ferentur ſecundum lineas ΦP, ΦΣ, radii vero ex B deducti ferentur ſecundum lineas BΛ, BN: major eſt igitur NZΛ circumferentia quam PZΣ circumferentia. & tamen aſpectus exiſtimat majorem eſſe PZΣ quam NZΛ, propterea quod angulus Φ major eſt angulo B: quare minor cylindri pars cernetur, & tamen major videbitur.

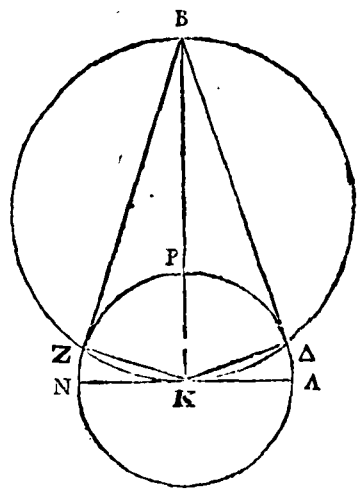


1 Debuit eſſe ἔλασσον ἡμικυλινδρίου aut hujuſmodi quippiam, niſi forte totus locus eſt ita legendus: ἔλασσον ἄρα τοῦ ἡμικυλινδρίου ὀφθήσεται. hanc enim, quam videmus hic ταυτολογίαν aures meæ non ferunt. *Savil.* 2 Δείξομεν, quid? nempe, ſemper minus ſemicirculo videri ab oculo in eodem plano poſito. quamvis non negem, κατ' ἄλλας ἰδέας, minus itidem ἡμικυλίνδρου videri ſæpiſſime; nihil tamen ad hanc demonſtrationem, cum planum per radios in cylindris & conis non circulos faciat, ſed ſæpius curvas lineas ex alio genere. *Idem.* 3 Hæc verba & illa præcedentis ὁμοίως τῇ βάσει &c. nonnihil ſuſpicionis injiciunt, voluiſſe *Euclidem* id quod de baſi tantum demonſtravit, vel (ut generalius dicam) de circulo in cujus plano eſt oculus, ad reliquam ſuperficiem cylindri trahere. *Idem.*

PROP. XXXI. THEOR.

Coni circularem baſim habentis uno tantum oculo ſpectati minus dimidia parte cernetur.

SIT conus quivis habens pro baſi circulum, cujus centrum eſt K; & ex B oculo ad centrum connectatur BK; à puncto autem K excitetur NΛ, quæ ſit ad angulos rectos ipſi BK; & circa BK deſcribatur circulus, conjunganturque rectæ BZ, ZK, BΔ, ΔK. anguli igitur ad Z, Δ, cum ſint in ſemicirculis, recti ſunt: quare in unico puncto circulum tangent duæ lineæ BΔ, BZ. radii autem ab oculo in circuli circumferentiam pergentes cadent ſecundum lineas BΔ, BZ: quod igitur cernetur, erit ZPΔ, quod minus eſt quam NPΛ. atqui NPΛ eſt ſemicirculus: ergo ZPΔ minus eſt ſemicirculo: quare coni pars quam cernit oculus minor eſt dimidia parte coni: idem enim demonſtrabimus de reliquis circulis qui in coni ſuperficie ſunt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

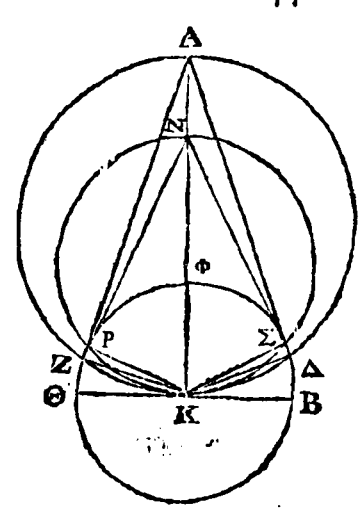
Κώνου [1] κύκλον ἔχοντος τὴν βάσιν ὑπὸ [2] ἑνὸς ὄμματος ἑωρημένου ἔλασσον ἡμικωνίου ὀφθήσεται.

ΕΣτω γὰρ κώνου βάσις κύκλος ὃ κέντρον τὸ Κ, ὃ δὲ τοῦ Β ὄμματος ἤχθω ἐπὶ τὸ κέντρον ἡ ΒΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΚ ἡ ΝΛ, περὶ δὲ τὴν ΒΚ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΚ, ΒΔ, ΔΚ. ὑκὲν ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Ζ, Δ, ὡς ἡμικύκλου γωνίαι· καθ' ἓν ἄρα ἐφάπτονται αἱ ΒΔ, ΒΖ. ϗ αἱ μὲν ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἀκτῖνες πεσοῦσαι κατὰ τὰς ΒΔ, ΒΖ πεσοῦνται· ἔσται δὴ ἐρώμενον τὸ ΖΡΔ, ἔλασσον ὂν τοῦ ΝΡΛ. ἀλλὰ τὸ ΝΡΛ ἡμικύκλιόν ἐστι· τὸ ἄρα ΖΡΔ ἔλασσόν ἐστιν ἡμικυκλίου· ὥστε ϗ τὸ ἑρώμενον τοῦ κώνου ἔλασσόν ἐστιν ἡμικωνίου· [3] ὁμοίως γὰρ ϗ ἐπὶ τῶν λοιπῶν κύκλων τὸ αὐτὸ ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ δείξομεν.

PROP. XXXII. THEOR.

Oculo per idem planum propius ad conum accedente, major coni pars cernetur quam oculo recedente; minor tamen aſpectui apparebit.

SIT baſis coni circulus, cujus centrum K; oculus autem ſit A, & ex A ad K ducatur recta AK; & à puncto K excitetur ΘB, quæ ſit ad angulos rectos ipſi AK; deſcribatur autem circulus circa ipſam AK, connectanturque AZ, ZK, AΔ, ΔK; tranferatur autem oculus ex A puncto in punctum N, & circa rectam NK deſcribatur circulus, connectanturque rectæ NP, PK, NΣ, ΣK. ergo radii ex A oculo pergentes, cadent ſecundum lineas AΔ, AZ: quare ex puncto A cernetur ZΦΔ. eadem ratione radii procedentes ex N oculo cadent in circuli circumferentiam ſecundum lineas NP, NΣ: igitur ex N puncto cernetur PΦΣ. majus autem autem eſt ZΦΔ quam PΦΣ: apparet tamen minus, propterea quod angulus ad N major eſt angulo ad A.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Τοῦ δὲ ὄμματος ἐγγὺς μεταβέντος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἔλασσον μὲν ἔσται τὸ ὑπὸ τοῦ ὄψεως περιλαμβανόμενον μέρος· δόξει δὲ μᾶλλον ὁρᾶσθαι.

ΕΣτω γὰρ κώνου βάσις κύκλος ὃ κέντρον τὸ Κ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Α, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Κ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΚ, ϗ ὡσὶ ὀρθὰς αὐτῇ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ ἡ ΘΒ, γεγράφθω δὲ περὶ τὴν ΑΚ κύκλος, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΚ, ΑΔ, ΔΚ, μετακείσθω δὲ τὸ Α ὄμμα ἐπὶ τὸ Ν, καὶ περὶ τὴν ΝΚ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΡ, ΡΚ, ΝΣ, ΣΚ. ὑκὲν αἱ ἀπὸ τοῦ Α ὄμματος ἀκτῖνες πεσοῦσαι κατὰ τὰς ΑΔ, ΑΖ πεσοῦνται· ὥστε φανεῖται τὸ ΖΦΔ. ἀπὸ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ τοῦ Ν ὄμματος ἀκτῖνες πεσοῦσαι κατὰ τὰς ΝΡ, ΝΣ πεσοῦνται· ὀφθήσεται ἄρα τὸ ΡΦΣ. μεῖζον δὲ τὸ ΖΦΔ τοῦ ΡΦΣ· φαίνεται δὲ ἔλασσον, μεῖζον γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ν γωνία τῆς πρὸς τὸ Α γωνίας.

1 Quaſi ſit alius qui baſim habeat μὴ κύκλον. *Savil* 2 Quid ſi ille unus oculus ſub baſi ſtatuatur? nihil plane videbitur. quid ſi ſupra in axi protracto? videbitur ſuperficies coni proculdubio. *Idem.* 3 Oculo, ſc. in eorum plano collocato: nam alioqui planum per ZB, BΔ non facit in coni ſuperficie circulum, ut ex rectitudine angulorum Z, Δ poſſis concludere τὸν ἐφαπτόμενον, aut ex quantitate anguli ad K quantitatem τοῦ ZPΔ γραμμῆς. *Idem.*

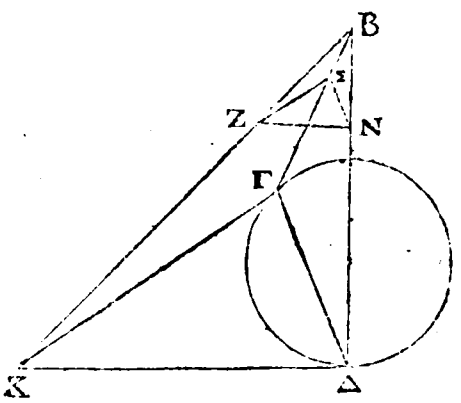
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Κώνου κύκλον ἔχοντος τὴν βάσιν, ἐὰν ἀπὸ τῶν σωμάτων τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὴν τοῦ κώνου βάσιν προσπιπτουσῶν ἀκτίνων εὐθεῖαι διαχθῶσι διὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς τοῦ κώνου πρὸς τῇ κορυφῇ αὐτοῦ, διὰ δὲ τῶν ἀχθεισῶν ἐπὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου προσπιπτουσῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ὅπου δὲ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τὸ ὄμμα τεθῇ· τὸ ὁρώμενον τοῦ κώνου ἴσον διαπαντὸς ὀφθήσεται[1].

Prop. XXXIII. Theor.

Si ad coni circularem basim ducantur ab oculo radii ipsam basim tangentes, & à punctis in quibus radii tangunt basim ducantur rectæ lineæ per coni superficiem usque ad ejus verticem; per eas vero lineas & radios ab oculo ad basim coni procedentes duo plana educantur, in quorum communi sectione oculus collocetur: coni pars spectata æqualis perpetuo videbitur.

Ἔστω γὰρ κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ ΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Β σημεῖον, ὄμμα δὲ τὸ Κ, ἀφ' οὗ προσπίπτουσαι ἀκτῖνες αἱ ΚΔ, ΚΓ, ἁπτόμεναι κατὰ τὰ Γ, Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι ἀπὸ τῶν Γ, Δ σημείων ἐπὶ τὸν κορυφὴν τοῦ κώνου αἱ ΔΒ, ΓΒ, καὶ διὰ μὲν τῶν ΓΒ, ΓΚ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω, διὰ δὲ τῶν ΔΒ, ΔΚ ὁμοίως ἕτερον ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω· συνπεσοῦνται τὰ ἐπίπεδα, αἵ τε γὰρ ΓΒ, ΔΒ συμπίπτουσι, καὶ αἱ ΓΚ, ΚΔ συμπίπτουσαι ἔσονται τὰ ἐπίπεδα, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὴ τομὴ ἡ ΒΚ· λέγω ὅτι ἄπερ ἂν ἐπὶ τῆς ΒΚ τεθῇ τὸ ὄμμα, ἴσον τοῦ κώνου τὸ ὁρώμενον φαίνεται. κείσθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΚ τὸ Ζ ὄμμα, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ζ, ᾗ μὲν τῇ ΚΔ ἡ ΖΝ, παρὰ δὲ τὴν ΚΓ ἡ ΖΣ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΖΝ, ΖΣ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας κατὰ τὰ Σ, Ν ἐφάπτονται, τὰ δὲ ἐν τῇ ΒΓΔ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ τμήματα τῶν παραλλήλων κύκλων τμήματα ὅμοιά ἐστι· τὰ ἄρα ἐν τῇ ΒΔΓ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ τμήματα ὁρώμενα ἴσα φαίνεται. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΖΣ, ΖΝ γωνία τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΚΓ, ΚΔ· ἴσον ἂν φαίνοιτο τὸ ΣΝ διάστημα τοῦ κώνου τῷ ΓΔ διαστήματι· ὥστε ὅπου ἂν τὸ ὄμμα τεθῇ ἐπὶ τῆς ΚΒ εὐθείας, ἴσον ἀεὶ φανεῖται τὸ ὁρώμενον.



SIT enim conus, cujus basis sit Γ Δ circulus, vertex autem sit punctum Β; oculus vero sit Κ, à quo procedant radii ΚΔ, ΚΓ, qui tangant [ipsum Γ Δ circulum] in punctis Γ, Δ, à quibus ad verticem coni ducantur rectæ lineæ Δ Β, Γ Β; educantur autem duo plana, alterum quidem per lineam Γ Β & radium Γ Κ, alterum autem eodem modo per lineam Δ Β & radium Δ Κ: concurrent igitur hæc duo plana, propterea quod rectæ lineæ Γ Β, Δ Β concurrunt, & radii Γ Κ, Κ Δ etiam concurrunt. concurrant igitur, seque mutuo secent duo illa plana, sitque eorum communis sectio linea Β Κ: fore affero ut ab oculo, in quolibet puncto lineæ Β Κ collocato, æqualis coni portio cernatur. sumatur enim in linea Β Κ aliquod punctum quod sit Ζ, in quo sit oculus; & per punctum Ζ ducatur recta linea Ζ Ν parallela ipsi Κ Δ; ipsi autem Κ Γ parallela Ζ Σ. igitur rectæ lineæ Ζ Ν, Ζ Σ tangunt coni superficiem in punctis Σ, Ν; sectiones enim circulorum parallelorum in coni superficie Β Γ Δ similes sunt: intervalla igitur quæ cernuntur in Β Δ Γ superficie coni æqualia apparent. cum enim angulus, quem comprehendunt radii Ζ Σ, Ζ Ν, æqualis sit ipsi angulo quem comprehendunt radii Κ Γ, Κ Δ: igitur superficiei coni intervallum Σ Ν æquale apparebit intervallo Γ Δ: quocirca ubicunque ponatur oculus in recta Κ Β, spectata coni portio semper æqualis apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἴσον δὲ ἀεὶ τοῦ ὄμματος ἀπὸ τοῦ κώνου ἀπέχοντος, μειζόνου μὲν τοῦ ὄμματος τοῦ

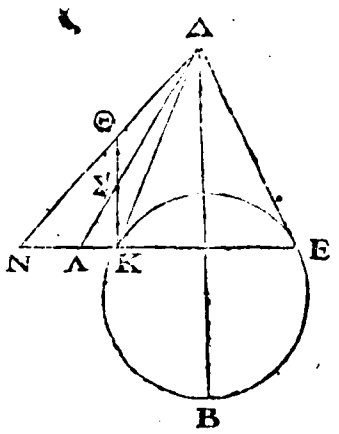
Prop. XXXIV. Theor.

Oculo moto per lineam æque distantem superficiei coni, si in sublime attolla-

1 Brevius & planius, ut puto, sic: Rectæ lineæ à coni vertice ad basis planum extra conum ductæ quacunque in parte oculus statuatur, τὸ ὁρώμενον τοῦ κώνου ἴσον ἀεὶ παντὸς ὀφθήσεται. neque mihi ulla satis justa causa apparet, cur nis ambagibus voluerit proponere. *Savil.* 2 Addit Reg. τῆς ὄψεως ἐπὶ παραλλήλου ἐπιπέδου τῷ βάσει τοῦ κώνου ἐπιπέδου ὑπαρχούσης. 3 Hoc verum quidem est, sed non probat Ζ Σ, Ζ Ν contingere conum in Σ & Ν. ac est quidem illud satis per se manifestum, cum plana Κ Β Δ, Κ Β Γ conum tangant. mihi plane usque ad ἴσον (quod tunc legendum esset ἀλλ' ἴσον) omnia παρέλκειν videntur. nam sine iis, ut puto, constat demonstratio. credo esse ex *Scholio. Idem.* 4 Hæc verba confirmant id, quod per prop. 29. annotavi, illud hic dici ὀπτικῶς in conis & cylindris, quod oculis directa ex adverso objacet. *Idem.* 5 Id est, cum est in recta linea parallela rectæ cuipiam à circumferentia basis ad verticem. *Idem.*

tur oculus, coni portio quæ cernitur minor apparet; si vero oculus deprimatur, major.

SIT coni vertex in puncto Δ, basis autem ejusdem coni sit circulus KBE, & ducatur KΘ parallela ipsi BΔ, colloceturque oculus in Θ: dico coni portionem spectatam minorem apparere oculo posito in puncto Θ quam in puncto Σ.



Connectantur enim à puncto Δ ad puncta Θ, Σ rectæ lineæ ΘΔ, ΔΣ, & producantur usque ad puncta N, Λ. igitur portiones coni, quæ cernuntur, inæquales apparent, si oculus constituatur nunc in N, nunc in Λ; & minor quidem coni portio apparet ex N, major autem ex Λ: portio autem coni quæ cernitur ex N æqualis est ei quæ cernitur ex Θ, & portio quæ cernitur ex Λ æqualis est ei quæ cernitur ex Σ, ut in præcedenti ostensum est: quare oculus positus in puncto Θ minorem coni portionem se videre existimat, quam cum collocatur in puncto Σ.

Ἔστω γὰρ κώνου κορυφὴ μὲν τὸ πρὸς τῷ Δ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΚΒΕ, καὶ ἤχθω ἡ ΚΘ παρὰ τὴν ΒΔ, καὶ κείσθω τὸ ὄμμα ἐπὶ τοῦ Θ· φημὶ δὴ ἔλασσον ὀφθήσεσθαι τοῦ κώνου τὸ ὡρισμένον, τεθέντος δὲ ὄμματος ἐπὶ τοῦ Θ σημείου ἤπερ ἐπὶ τοῦ Σ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὰ Θ, Σ σημεῖα αἱ ΘΔ, ΔΣ, καὶ [2] ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ν, Λ. ὁ κῶνος ἄρα ἐπί τε τοῦ Ν καὶ ἐπὶ τοῦ Λ σημείου τεθέντος ὄμματος, ἄνισα φαίνεται τὰ ὡρισμένα τοῦ κώνου, καὶ ἔλασσον μὲν φαίνεται τὸ πρὸς τῷ Ν, μεῖζον δὲ τὸ πρὸς τῷ Λ. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρὸς τῷ Ν τῷ πρὸς τῷ Θ, τὸ δὲ πρὸς τῷ Λ τῷ πρὸς τῷ Σ, ὡς ἐν τῷ πρὸ αὐτοῦ ἐδείχθη· τοῦ ἄρα ὄμματος πρὸς τῷ Θ σημείῳ ὄντος, ἔλασσον φαίνεται τὸ ὡρισμένον τοῦ κώνου ἤπερ πρὸς τῷ Σ.

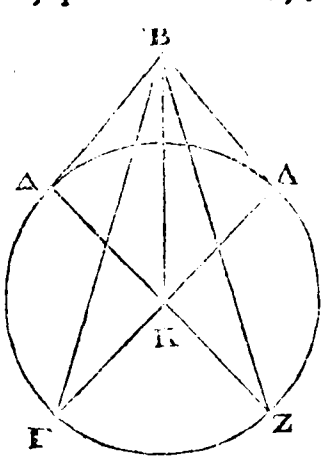
PROP. XXXV. THEOR.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε΄.

In circulo si à centro excitetur linea recta ad angulos rectos plano ipsius circuli, oculusque in ea linea constituatur; circuli diametri æquales apparebunt.

Ἐν κύκλῳ ἐὰν ἀπό τινος κέντρου πρὸς ὀρθάς τις ἀχθῇ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὅπου δὲ ταύτης τεθῇ τὸ ὄμμα· ἴσαι αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου φαίνονται.

SIT enim circulus cujus centrum K; & à puncto K erigatur recta linea KB, quæ angulos rectos faciat cum circuli plano; ponaturque oculus in puncto B, & ducantur diametri AΓ, ΔZ: dico diametrum AΓ æqualem videri diametro ΔZ.



Ducantur enim rectæ lineæ BA, BZ, BΓ, BΔ. duæ igitur rectæ BK, KZ duabus BK, KΓ sunt æquales altera alteri. angulus autem BKΓ angulo BKZ est æqualis: quare [per 4. 1.] basis BZ æqualis est basi BΓ. eademque ratione BΔ æqualis est ipsi BA: duæ igitur rectæ ΔB, BZ duabus rectis ΓB, BA sunt æquales; & ΔZ æqualis est ipsi ΓA: angulus igitur ΔBZ [per 8. 1.] æqualis est angulo ΓBA. sed [per 7. posit.] quæ sub æqualibus angulis spectantur æqualia apparent: æqualis igitur apparet ΓA diameter ipsi ΔZ diametro.

Ἔστω κύκλος, οὗ κέντρον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς ὀρθὰς ἀνήχθω τῷ ὑπιπέδῳ τοῦ κύκλου ἡ ΚΒ, τὸ δὲ ὄμμα κείσθω ἐπὶ Β, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ· φημὶ δὴ τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ ἴσην φαίνεσθαι.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ, ΒΖ, ΒΓ, ΒΔ· ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΒΚ, ΚΖ δυσὶ ταῖς ΒΚ, ΚΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΚΓ γωνία τῇ ΒΚΖ γωνίᾳ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΖ βάσις τῇ ΒΓ βάσει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΔ τῇ ΒΑ ἐστὶν ἴση· δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΖ δυσὶ ταῖς ΓΒ, ΒΑ ἴσαι εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΓΑ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ ἴση ἐστί. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴση ἄρα ἡ ΓΑ τῇ ΔΖ φαίνεται.

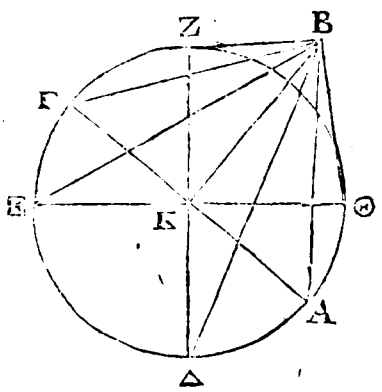
1 Sed tamen plus ὀφθήσεται. *Savil.* 2 Donec sc. concurrant cum plano basis. *Idem.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Καὶ ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀναχθεῖσα μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ὑπιπέδῳ, ἴσον δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· ἴσαι αἱ διάμετροι φανήσονται.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si vero linea ex centro excitata non sit ad angulos rectos plano circuli, æqualis tamen semidiametro; diametri æquales apparebunt.

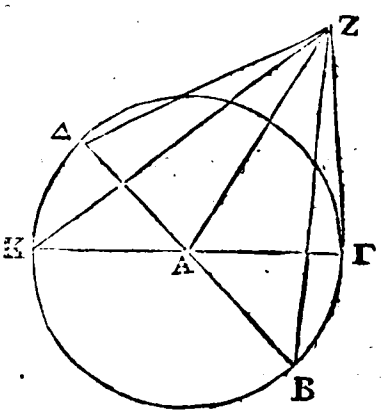


Ἔστω κύκλος οὗ κέντρον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ μὴ πρὸς ὀρθὰς ἀνήχθω τῷ ὑπιπέδῳ ἡ ΚΒ, ἴση δὲ ἔστω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ Β σημείου αἱ αὐτῇ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΔΚ, ΚΒ, ΚΖ, ὀρθὴ ἂν εἴη ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τὴν ΖΒΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθὴ ἂν εἴη· ἴσαι ἄρα ἔσονται ἀλλήλαις. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὑπούμενα ἴσα φαίνεται· ἴση ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ φαίνεται.

SIT circulus, cujus centrum K; & ex K in sublime ducatur KB, quæ non faciat angulos rectos cum plano circuli; æqualis vero sit ipsius semidiametro; & à puncto B, in quo est oculus, ducantur lineæ ut prius. cum igitur æquales inter se sint ΔK, KB, KZ, rectus erit [per 31.3.] angulus ZBΔ. eademque ratione rectus etiam erit angulus ABΓ: ideoque & æquales inter se sunt. quæ autem sub æqualibus angulis spectantur æqualia apparent: æqualis ergo apparet ΔZ diameter ipsi AΓ diametro.

[1] ΑΛΛΑ δὴ ἡ ΑΖ μήτε ἴση ἔστω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, μήτε πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ὑπιπέδῳ, ἴσας δὲ γωνίας ποιείτω [2] ταῖς ὑπὸ ΔΑΖ, ΖΑΓ καὶ ΚΑΖ, ΖΑΒ· λέγω ὅτι καὶ ἄντως αἱ διάμετροι ἴσαι φανήσονται. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΖΑ τῇ ὑπὸ ΑΖΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΑ τῇ ὑπὸ ΑΖΒ ἐστιν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΒ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστιν ἴση. ὥστε αἱ διάμετροι ἴσαι φανήσονται, τῆς ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον ἴσας περιεχούσης γωνίας μετὰ τῶν διαμέτρων, ἂν τε πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ὑπιπέδῳ, ἄν τε μή.

SED AZ neque æqualis sit semidiametro, neque cum plano circuli angulos rectos faciat, sed angulos ΔAZ, ZAΓ & KAZ, ZAB æquales faciat: dico hoc etiam modo fore ut diametri æquales appareant [oculo in Z constituto.] quia enim æqualis est ΔA ipsi AΓ, ipsa vero AZ communis est, & æquales angulos cum eis facit; ergo [per 4.1.] basis ΔZ æqualis est basi ZΓ, & angulus ΔZA angulo AZΓ. eodem modo ostendemus angulum KZA æqualem esse angulo AZB: quare totus ΔZB angulus toti KZΓ angulo est æqualis. ideoque diametri [ΔB, KΓ] æquales apparebunt, cum radius qui ab oculo tendit in centrum circuli æquales angulos facit cum diametris, sive radius ille rectus sit ad planum circuli, sive non.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

[3] Ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον προσπίπτουσα τοῦ κύκλου μήτε πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ὑπιπέδῳ, μήτε ἴση ᾖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, μήτε ἴσας γωνίας περιέχουσα μετὰ

PROP. XXXVII. THEOR.

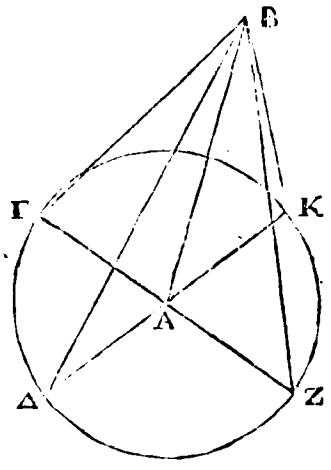
In circulo, si radius ab oculo in centrum tendens neque rectus sit ad planum circuli, neque æqualis semidiametro, nec angulos æquales contineat

1 In hac πτώσει duæ tantum diametri æquales φανίζονται, cum recta AZ non possit cum pluribus angulos ad centrum efficere æqualeis, ducta autem à Z ad planum perpendiculari, punctoque incidentiæ cum centro connexo, angulus fiet omnium minimus ex semidiametro πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀναχθεῖσαν, & propiores remotioribus majores, æquales vero πρὸς ἀναχθεῖσαν facient, qui cum ea semidiametro ad utramque partem angulos æqualeis faciunt, vel ab ea absunt æqualiter. *Savil.* 2 Neque enim cum pluribus potest. *Idem.* 3 Hæc 37. propositio vel est Scholiastæ alicujus (id quod mihi verisimillimum videtur, ita tamen ut post duo proxima theoremata reponi debeat; vel 38 & 39 lemmata dicenda sunt ad hoc theorema necessaria, vel certe, quum diserte theoremata appellet non λήμματα (ὡς ἐν τοῖς θεωρήμασιν ἀποδείκνυται) duobus sequentibus hoc theorema postponi debuit. neque enim theoremata sequentia ad præcedentium demonstrationem assumi possunt. *Idem.*

cum ſemidiametris, ſed major ſit vel minor ſemidiametro; diametri inæquales apparebunt.

τ ὀκ τῦ κέντρυ, μείζων δὲ ἡ ἐλάσσων τῆς ὀκ τῦ κέντρυ· ἄνισοι αἱ διάμετροι φανῦνται.

SIT circulus, cujus centrum A; & ab oculo B ad circuli centrum ducatur recta B A, quæ neque rectos angulos faciat cum plano circuli, neque æqualis ſit ſemidiametro circuli, nec æquales angulos contineat cum ſemidiametris: aſſero fore ut ipſius circuli diametri inæquales appareant.



Ducatur enim Γ Z diameter ad angulos rectos ipſi A B; ducatur item Δ K, quæ inæquales faciat angulos cum linea A B; & connectantur rectæ B Γ, B Δ, B K, B Z; ſitque primo B A major ſemidiametro A K: major igitur eſt angulus Γ B Z angulo K B Δ, ut in theorematis [ſubnexis] demonſtratur. quæ autem ſub majore angulo ſpectantur majora apparent: igitur diameter Γ Z major apparet diametro Δ K. quod ſi B A minor ſit quam A K, major apparebit Δ K quam Γ Z.

Ἔστω γὰρ κύκλος ὃ κέντρον τὸ A, καὶ ἀπὸ τῦ B ὄμματος ἐπὶ τὸ κέντρον τῦ κύκλυ εὐθεῖα ἤχθω ἡ B A, καὶ ἔστω μήτε πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ, μήτε ἴση τῇ ὀκ τῦ κέντρυ τῦ κύκλυ, μήτε ἴσας γωνίας περιέχουσα μετὰ τῶν ὑκ ὃ κέντρυ· λέγω ὅτι αἱ διάμετροι τῦ κύκλυ ἄνισοι φανήσονται.

Ηχθω γὰρ ἡ μὲν Γ Z διάμετρος πρὸς ὀρθὰς οὖσα τῇ A B, ἡ δὲ Δ K ἀνίσως [1] ποιοῦσα γωνίας πρὸς τῇ A B, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ B Γ, B Δ, B K, B Z, ἔστω δὲ πρότερον ἡ B A τῆς A K μείζων· ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν Γ B Z τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν K B Δ, ὡς ἐν τοῖς θεωρήμασιν ἀποδέδεικται. τῷ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα μείζονα φαίνεται· μείζων ἄρα ἡ Γ Z τῆς Δ K φαίνεται. ἐὰν δὲ ἡ B A τῆς A K ἐλάσσων ᾖ, μείζων φαίνεται ἡ Δ K τῆς Γ Z.

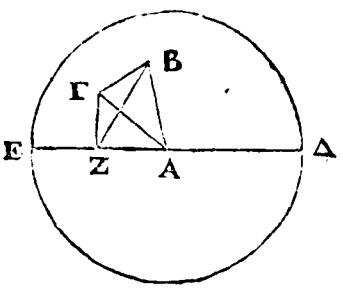
Ad horum demonſtrationem præcognita eſſe oportet quæ ſequuntur.

Προσλαμβανόμενα εἰς τάτων ἀπόδειξιν.

Si ab oculo in ſublimi poſito cadant duæ rectæ lineæ, altera ad centrum circuli, quæ perpendicularis non ſit plano circuli, altera vero quæ perpendicularis ſit circuli plano; & à puncto, in quod cadit perpendicularis, connectatur recta linea ad centrum circuli: angulus comprehenſus ſub hac linea, & ea quæ à centro ad oculum ducta eſt, minimus eſt omnium angulorum contentorum ſub linea ab oculo ad centrum ducta, & lineis per centrum ductis.

Ἐὰν ἀπὸ μετεώρυ ὄμματος πρὸς κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μὲν πρὸς τὸ κέντρον μὴ πρὸς ὀρθὰς πῷ τῷ κύκλυ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ κάθετος οὖσα πῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀπὸ τῦ σημείυ, εἰς ὃ πίπτει ἡ κάθετος, εἰς τὸ κέντρον ἀχθῇ εὐθεῖά τις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπό τε τῆς ἀπὸ τῦ σημείυ εἰς τὸ κέντρον, καὶ τῆς ἀπὸ τῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη ἐστὶ γωνιῶν ἁπασῶν περιεχομένων ὑπό τε τῆς ἀπὸ τῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον, καὶ τῶν διὰ τῦ κέντρυ διαγομένων εὐθειῶν.

SIT circulus, cujus centrum A; oculus vero ſit B, à quo perpendicularis ducta in planum circuli cadat non in A centrum, ſed extra centrum in Γ nempe, ſitque B Γ; & à puncto Γ ad punctum A connectatur recta Γ A, item ex puncto A in punctum B ducatur A B: dico angulorum omnium, qui fieri poſſunt ex concurſu lineæ B A cum alia qualibet linea tranſeunte per punctum A, minimum eſſe angulum Γ A B. ducatur enim per punctum A recta linea Δ A E; & à puncto Γ in Δ E ducatur perpendicularis Γ Z, quæ ſit in



Ἔστω κύκλος ὃ κέντρον τὸ A, ὄμμα δὲ τὸ B, ἀφ' ὃ ἡ ἐπὶ τὸ κύκλυ κάθετος ἀγομένη μὴ πιπτέτω ἐπὶ τὸ κέντρον τὸ A, ἀλλὰ ἐκτὸς, καὶ ἔστω ἡ B Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἀπὸ τῦ Γ ἐπὶ τὸ A ἡ Γ A, ἐπὶ δὲ ἀπὸ τῦ A ἐπὶ τὸ B ἡ A B· λέγω ὅτι πασῶν διὰ τῦ A διαγομένων εὐθειῶν, καὶ πασῶν πρὸς τῇ B A γωνίας, ἐλαχίστη ἐστὶν ὑπὸ τῶν Γ A B. διήχθω γὰρ εὐθεῖα ἡ Δ A E, καὶ ἤχθω ἀπὸ τῦ Γ ἐπὶ τὴν Δ E κάθετος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἡ Γ Z, καὶ ἐπε-

1 Nam ſi & ipſa æquales angulos faceret, B A eſſet κάθετος ad planum circuli, per 4. 11. *Savil.*

ζεύχθω

ζεύχθω ἡ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΖ ἄρα ἐπὶ τὸ ΔΕ κάθετος ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΖΑ, ἡ ὑπὸ ΑΓΖ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ὀρθῆς· μείζων ἄρα ἡ ΑΓ πλευρὰ τῆς ΑΖ· ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΑΓ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ γωνία ἴση ἐστὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΖΑ εἰσὶν ὀρθαί, καὶ εἰσὶν αἱ ΓΑ, ΑΖ ἄνισοι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΖΑΒ τῆς ὑπὸ τῶν ΓΑΒ ἐστὶ μείζων. ὁμοίως δὲ δείξεται ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Α διαγομένων εὐθειῶν, καὶ πασῶν πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ γωνίας, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ὑπὸ τὴν ΓΑΒ.

eodem plano, in quo ΔΕ; connectaturque recta ΒΖ: igitur [per lem. 1.] ΒΖ perpendicularis eſt in lineam ΔΕ. cum ergo angulus ΓΖΑ rectus ſit, angulus igitur ΑΓΖ [per 17. 1.] minor eſt recto: majus ergo [per 19. 1.] eſt latus ΑΓ latere ΑΖ: quare [per 8. 5.] recta ΒΑ ad ΑΖ majorem rationem habet quam ad ΑΓ. ſed duo anguli ΑΓΒ, ΒΖΑ recti ſunt, & ΓΑ, ΑΖ rectæ lineæ inæquales ſunt: ergo [per lem. 2.] reliquus angulus ΖΑΒ reliquo angulo ΓΑΒ eſt major. eodem modo oſtendemus omnium angulorum, qui fiunt ex concurſu lineæ ΑΒ cum lineis trajectis per punctum Α, minimum eſſe angulum ΓΑΒ.

ΛΗΜΜΑ α'.

Οτι δὲ ἡ ΖΒ τῇ ΔΕ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ ἡ ΒΓ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΒΓ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐν δὲ τῶν διὰ τῆς ΒΓ ἐκβαλλομένων ἐπιπέδων ἐστὶ τὸ ΒΓΖ τρίγωνον· καὶ τὸ ΒΓΖ ἄρα τρίγωνον τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν δύο ἐπίπεδα, τό τε τοῦ ΕΔ κύκλου καὶ τὸ τοῦ ΒΓΖ τριγώνου, τέμνουσιν ἄλληλα, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν τῇ ΓΖ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΔΕ, ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, κάθετος γὰρ ἦκται ἡ ΓΖ ἐπὶ τὴν ΕΔ· καὶ ἡ ΕΔ ἄρα τῷ τοῦ ΒΓΖ τριγώνου ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΓΖΒ τριγώνου ἐπιπέδῳ, ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· ἡ ΔΕ ἄρα τῇ ΖΒ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΖΒ τῇ ΕΔ διαμέτρῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς.

LEMMA I.

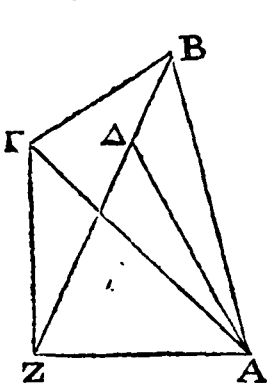
Quod autem recta ΖΒ ad angulos rectos ſit ipſi ΔΕ, oſtendemus hoc modo.

Quia enim ΒΓ eſt ad rectos angulos plano circuli: ergo [per 18. 11.] plana omnia trajecta per lineam ΒΓ angulos rectos faciunt cum plano circuli. ſed triangulum ΒΓΖ eſt unum de planis trajectis per lineam ΒΓ; ergo triangulum ΒΓΖ ad angulos rectos inſiſtit plano circuli. cum ergo duo plana, planum nempe circuli ΕΔ & planum trianguli ΒΓΖ ſe mutuo ſecent, & ad ipſorum communem ſectionem, quæ eſt ΓΖ, ipſa ΔΕ angulos rectos faciat cum plano circuli: (ducta enim eſt ΓΖ perpendicularis in ipſam ΕΔ) igitur recta ΕΔ angulos rectos facit cum plano ipſius trianguli ΒΓΖ: quare [per 3. def. 11.] ad omnes lineas à quibus tangitur, poſitas in eodem plano trianguli ΓΖΒ, angulos rectos facit: ideoque ΔΕ ad ipſam ΖΒ angulos rectos facit: converſim igitur ΖΒ eſt ad angulos rectos ipſi ΕΔ diametro circuli.

ΛΗΜΜΑ β'.

Επι δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ΖΑΒ γωνία τῆς ΓΑΒ γωνίας μείζων ἐστίν.

Ἐσω γὰρ δύο τρίγωνα τὰ ΒΓΑ, ΒΖΑ ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ γωνίας· καὶ ἡ ΒΑ πρὸς ΖΑ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ πρὸς τὴν ΓΑ· λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΑΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΓΑΒ γωνίας.



Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΖΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΓΑ· καὶ ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ· ὥστε ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒ τὴν ΑΔ· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα τά ΒΓΑ, ΔΖΑ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΔ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΓΑΒ.

Εκ δὴ τούτων δείξομεν ὅτι

LEMMA II.

Præterea oſtendemus angulum ΖΑΒ majorem eſſe angulo ΓΑΒ.

Sint duo triangula ΒΓΑ, ΒΖΑ, qui rectos habeant angulos poſitos ad Γ, Ζ; habeat autem ΒΑ majorem rationem ad ΖΑ, quam ad ΓΑ: dico angulum ΖΑΒ majorem eſſe angulo ΓΑΒ.

Cum enim ΒΑ ad ΖΑ majorem rationem habeat quam ad ΓΑ: converſim [1] igitur ΖΑ ad ΑΒ minorem rationem habet quam ΓΑ ad ΑΒ: quare ΓΑ ad ΑΒ majorem rationem habet quam ΖΑ ad ΑΒ. fiat ergo ut ΓΑ ad ΑΒ ita ΖΑ ad minorem quam ΑΒ, nempe ΑΔ; æquiangula ergo ſunt [per 7. 6.] triangula ΒΓΑ, ΔΖΑ: quare angulus ΓΑΒ æqualis eſt angulo ΖΑΔ: ideoque angulus ΖΑΒ major eſt angulo ΓΑΒ.

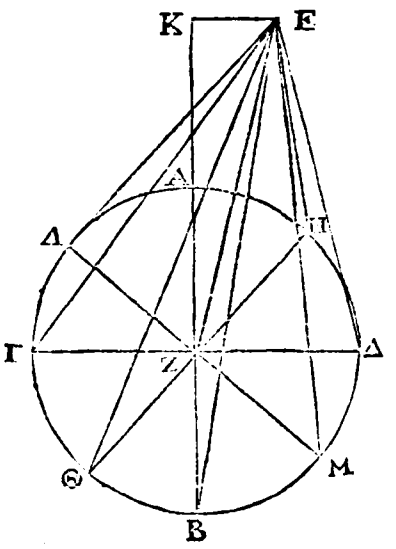
Ex his igitur oſtendemus quod

1 Hæc & hiſce ſimilia demonſtrantur à Pappo in Lib. 7. *Collect. Math.*

Prop. XXXVIII. Theor.

In circulo, ſi radius ab oculo in centrum tendens, & inæquales angulos comprehendens cum diverſis diametris, non ſit rectus ad planum circuli, ſed ſit major ſemidiametro: diametri inæquales apparebunt; & ea major videbitur, ad quam radius ab oculo ad centrum tendens eſt perpendicularis.

SIT circulus ABΓΔ, ducanturque duæ diametri AB, ΓΔ ſe mutuo ſecantes ad angulos rectos; ſit vero oculus E, à quo ad centrum connexa recta linea EZ faciat rectos quidem angulos cum ΓΔ, quoſvis autem alios cum ipſa AB; ſit autem ipſa EZ major ſemidiametro circuli. quia ergo ΓΔ ad angulos rectos eſt utrique ipſarum AB, EZ: omnia igitur plana trajecta per lineam ΓΔ [per 4. & 18.11.] ad angu-

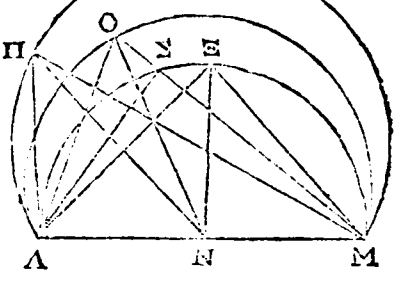


los rectos erunt plano trajecto per lineas EZ, AB. itaque ex E puncto ad planum ſubjectum ducatur perpendicularis: cadet ergo in communem ipſorum planorum ſectionem, quæ eſt AB. cadat ergo, ſitque EK; ducaturque diameter HΘ; ſumaturque linea ΛM æqualis diametro circuli, quæ bifariam ſecetur in puncto N; à quo excitetur linea ſublimis NΞ, quæ ſit ad ad angulos rectos ipſi ΛM; ſit vero linea NΞ æqualis ipſi EZ: deſcriptum igitur ſegmentum circuli tranſiens per puncta Λ,Ξ,M majus eſt ſemicirculo, propterea quod linea NΞ major eſt utravis duarum linearum ΛN, MN. ſit ergo illud circuli ſegmentum ΛΞM, & connectantur lineæ ΞΛ, ΞM: angulus ergo in puncto Ξ poſitus, qui ſub lineis ΛΞ & MΞ continetur, æqualis eſt angulo poſito in puncto E, qui continetur ſub lineis connexis à puncto E ad puncta Γ, Δ. rurſus, angulo contento ſub EZ, ZH, id

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον συνεστάθῃ, καὶ ἀνίσους γωνίας περιέχουσα μετὰ διαφόρων διαμέτρων, μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, μείζων δὲ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ἄνισοι αἱ διάμετροι φανήσονται, καὶ μείζων, ἐφ' ἣν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον ἐστὶ κάθετος.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ διήχθωσαν δύο διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ τέμνουσαι ἀλλήλας πρὸς ὀρθάς, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Ε, ἀφ' οὗ ἡ ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη ἡ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς μὲν ἔστω τῇ ΓΔ, πρὸς δὲ τὴν ΑΒ τυχόντα γωνίαν περιεχέτω, καὶ ἔστω ἡ ΕΖ ἐκατέρας [2] τῶν ἐκ τοῦ κέντρου μείζων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΕΖ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΓΔ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα



τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἤχθω οὖν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος· ἐπὶ τὴν κοινὴν ἄρα τομὴν πίπτει τῶν ἐπιπέδων, [3] τὴν ΑΒ. πιπτέτω οὖν, καὶ ἔστω ἡ ΕΚ, καὶ διήχθω διάμετρος ἡ ΗΘ, καὶ κείσθω τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου ἴση ἡ ΛΜ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἀνήχθω ἀπὸ τοῦ Ν τῇ ΛΜ πρὸς ὀρθὰς μετέωρος εὐθεῖα ἡ ΝΞ, καὶ ἔστω ἡ ΝΞ τῇ ΕΖ ἴση· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΛΜ γραφόμενον τμῆμα καὶ ἐρχόμενον διὰ τοῦ Ξ μεῖζον ἔσται τοῦ ἡμικυκλίου, ἐπειδήπερ ἡ ΝΞ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΛΝ, ΜΝ. ἔστω τὸ ΛΞΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞΛ, ΞΜ· [4] ἡ ἄρα πρὸς τῷ Ξ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΞΜ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Ε σημείῳ, τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ἐπιζευγνυσῶν τὸ Ε καὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα. ἔτι κείσθω τῇ [5] ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ ἴση

1 Ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον συνεστάθῃ, μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, περιέχῃ δὲ ἀνίσους γωνίας μετὰ διαφόρων διαμέτρων, καὶ μείζων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ &c. ſic enim multo proponitur aptius. *Savil.* 2 Malo τὴν. *Idem.* 3 Extenſam, ſi opus eſt. *Idem.* 4 Quia duo ſunt triangula NΞM, ΖΕΔ, itemque ΛΞN, ΓΕΖ. quæ duo latera duobus lateribus habeant æqualia, & angulum comprehenſum angulo æqualem. *Idem.* 5 Qui ſc. rectus non eſt; tum enim EZ eſſet erecta ad planum contra hypotheſin. *Idem.*

ἡ ὑπὸ τ ΑΝ, ΝΟ, καὶ ἀφῃρήσθω ἴση τῇ ΕΖ ἡ ΝΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΟ, ΜΟ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΟΜ τρίγωνον τμῆμα κύκλου· ἔσται δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Ο σημείῳ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τ ΛΟ, ΟΜ, ἴση τῇ ὑπὸ τ ΗΕΘ. ἔπι κείσθω τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖΑ [1] ἴση ἡ ὑπὸ τῶν ΛΝΠ, καὶ ἀφῃρήσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΝΠ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΠ, ΠΜ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΠΜ τρίγωνον τμῆμα κύκλου· ἔσται δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Π σημείῳ ἴση τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τ ΑΕ, ΕΒ γωνίᾳ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ξ τῆς πρὸς τῷ Ο γωνίας, ἡ μὲν γὰρ πρὸς τῷ Ξ ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Σ γωνίᾳ, ἀμφότερα γὰρ ἐν τῷ ἐκτὸς εἰσι τμήματι, ἡ δὲ πρὸς τῷ Σ μείζων ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ Ο γωνίας, τριγώνου γὰρ τοῦ ΛΣΟ ἐκτός ἐστι· καὶ ἡ πρὸς τῷ Ξ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ Ο. καὶ ἔστιν ἡ πρὸς τῷ Ξ ἴση τῇ ὑπὸ ΓΕΔ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ο τῇ ὑπὸ ΗΕΘ· μείζων ἄρα φανήσεται καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΗΘ. πάλιν ἡ μὲν πρὸς τῷ Ο γωνία τῇ ὑπὸ ΗΕΘ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Π τῇ ὑπὸ ΑΕΒ, μείζων ἢ ἡ Ο [2] γωνία τῆς Π· μείζων ἄρα φανήσεται ἡ ΗΘ τῆς ΑΒ εὐθείας.

est angulo ΕΖΝ, æqualis conſtituatur ad punctum Ν angulo ΑΝΟ, contentus ſub lineis ΑΝ, ΝΟ, auferaturque ΝΟ æqualis ipſi ΕΖ, connectanturque rectæ ΛΟ, ΜΟ, & [per 5.4.] circa triangulum ΛΟΜ deſcribatur circuli ſegmentum: angulus igitur poſitus in puncto Ο, contentus ſub lineis ΛΟ, ΟΜ, æqualis erit angulo ΗΕΘ. rurſus, ad punctum Ν ponatur angulus ΑΝΠ æqualis angulo ΕΖΑ, abſcindaturque ΝΠ æqualis ipſi ΕΖ, & connectantur rectæ ΛΠ, ΠΜ, & circa triangulum ΛΠΜ deſcribatur circuli ſegmentum: erit ergo angulus ΛΠΜ æqualis angulo contento ſub rectis lineis ΑΕ, ΕΒ. quia ergo angulus ΛΞΜ major eſt angulo ΛΟΜ (angulus enim ΛΞΜ [per 21.3.] æqualis eſt angulo ΛΣΜ, eo quod ambo ſunt in eodem circuli ſegmento) angulus autem ΑΣΜ [per 16.1.] major eſt angulo ΛΟΜ; (eſt enim exterior angulus trianguli ΛΣΟ:) angulus igitur ΛΞΜ major eſt angulo ΛΟΜ. angulus vero ΛΞΜ æqualis eſt angulo ΓΕΔ, & angulus ΛΟΜ æqualis eſt ipſi ΗΕΘ: [major igitur eſt angulus ΓΕΔ angulo ΗΕΘ;] ideoq; [per 5. poſit.] diameter ΓΔ apparebit major diametro ΗΘ. rurſus, angulus ΛΟΜ æqualis eſt angulo ΗΕΘ, angulus autem ΑΠΜ angulo ΑΕΒ; major vero eſt angulus ΛΟΜ angulo ΑΠΜ: quare ΗΘ diameter major apparebit diametro ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϑ'.

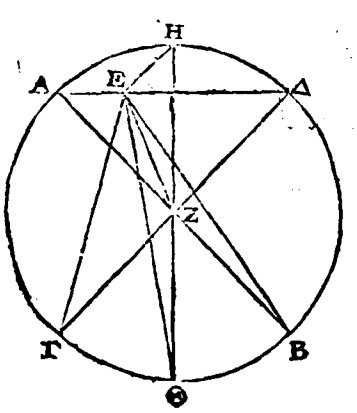
Μὴ ἔσω δὲ μείζων ἡ ὄμματος ὅθι τὸ κέντρον ὅθι διάγουσα τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἀλλ' ἐλάσσων, ἔσται δὲ πρὸς τὰς διαμέτρους τοὐναντίον· ἡ γὰρ τότε μείζων τῶν διαμέτρων, νῦν ἐλάττων φανήσεται· ἡ δὲ ἐλάττων, μείζων.

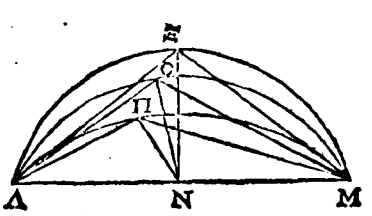
PROP. XXXIX. THEOR.

Quod ſi ab oculo ad centrum connexa recta linea non fuerit major ſemidiametro, ſed minor; contrarium diametris eveniet: quæ enim antea major videbatur, nunc minor apparebit; & quæ minor, major.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ διήχθωσαν δύο διάμετροι τέμνουσαι ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς

SIT circulus ΑΒΓΔ, in quo ducantur duæ diametri ſe mutuo ſecantes ad angulos rectos,





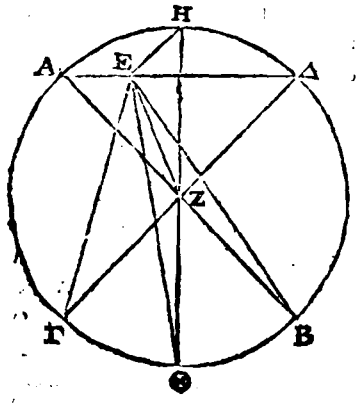
αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἐπὶ δὲ τῆς διήχθω ἡ ΗΘ, ὄμμα δὲ τὸ Ε, ἀφ' οὗ ἡ ἐπὶ τὸ Ζ κέντρον ζευχθεῖσα ἔστω ἡ ΕΖ, ἐλάσσων ἔστω ἑκατέρας [3] τῶν ἐκ τοῦ κέντρου,

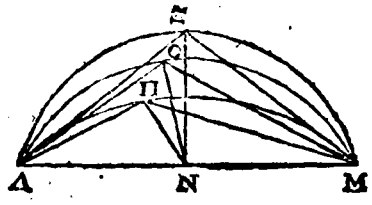
quæ ſint ΑΒ, ΓΔ; & alia quævis præterea diameter ſit vero oculus Ε, à quo ad centrum connexa recta linea ΕΖ minor ſit ſemidiametro, faciatque

1 Qui angulus (per lemma præcedens) minimus eſt omnium ab ΕΖ cum ſemidiametris factorum, atque ideo ΝΠ modo cadit intra ΝΟ. *Savil.* 2 Punctum Ο cadere extra circulum ΛΞΜ ita conſtat; quia ΞΝ ſecat ΔΜ bifariam & ad rectos, eſt igitur ΞΝ ἐλαχίστη diameter circuli, & quia ΛΞΜ eſt major ſemicirculo in ΞΝ eſt centrum circuli, quare [per 7.3.] ΝΞ longiſſima eſt omnium rectarum ab Ν ad circuli circumferentiam: cadit ergo Ο extra ΛΞΜ. ſimiliter demonſtratur punctum Π cadere extra circulum ΛΟΜ, quia, cum angulus ΛΝΠ minor ſit angulo ΛΝΟ, recta ΝΠ remotior eſt ab ΝΞ (ſi educatur ad circumferentiam ΛΟΜ) maxima. *Idem.* 3 Malo τῆς, ut ſupra. *Idem.*

ZB rectos angulos cum ΓΔ diametro, & ponatur ΛΜ recta æqualis diametro circuli, feceturque bifariam in puncto N, & à puncto N erigatur ad angulos rectos linea NΞ quæ ſit æqualis lineæ EZ, & [per 5. 4.] circa puncta Λ, Ξ, Μ deſcribatur circuli ſegmentum ΛΞΜ: erit igitur hoc ſegmentum minus ſemicirculo, quandoquidem NΞ minor eſt ſemidiametro. ſit ergo illud ſegmentum ΛΞΜ, & con-

πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω τῇ ΓΔ ἡ ΕΖ, καὶ κείσθω τῇ ἐκ κύκλου διαμέτρῳ ἴση ἡ ΛΜ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἀνήχθω ἀπὸ τοῦ Ν πρὸς ὀρθὰς ἡ ΝΞ ἴση τῇ ΕΖ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΜΞ τὸ Ξ σημεῖον τμῆμα κύκλου τὸ ΛΞΜ· ἔσται δὴ ἐλάσσων ἡμικυκλίου, ἐπειδήπερ ἡ ΝΞ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ἔστω τὸ ΛΞΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν





nectantur rectæ ΞΛ, ΞΜ; angulus igitur in puncto Ξ poſitus, qui continetur ſub lineis ΛΞ, ΞΜ, æqualis eſt angulo poſito in puncto E, qui continetur ſub rectis lineis ΓΕ, ΕΔ. rurſus, ad punctum N conſtituatur angulus ΑΝΟ æqualis angulo ΕΖΗ, abſcindaturque ΝΟ æqualis ipſi ΕΖ, connectanturque rectæ ΛΟ, ΜΟ, & circa lineam ΛΜ per punctum Ο deſcribatur circuli ſegmentum ΛΟΜ: angulus igitur in puncto Ο poſitus, qui continetur ſub lineis ΛΟ, ΜΟ, æqualis eſt angulo ad punctum Β poſito & contento ſub lineis ΘΕ & ΕΗ. denique, ad punctum Ν ponatur angulus ΛΝΠ æqualis ΛΖΕ, abſcindaturque ΝΠ æqualis ipſi ΕΖ, connectanturque rectæ ΛΠ, ΠΜ, & circa triangulum ΛΠΜ deſcribatur circuli ſegmentum ΛΠΜ: erit ergo angulus in puncto Π poſitus, ſub lineis ΛΠ, ΠΜ contentus, æqualis angulo poſito in Ε puncto & ſub lineis ΑΕ, ΕΒ contento. cum ergo angulus ΛΞΜ minor ſit angulo ΛΟΜ, angulus autem ΛΟΜ æqualis ſit angulo ΘΕΗ, & angulus ΛΞΜ æqualis ſit angulo ΓΕΔ: minor igitur [per 6. poſit.] apparebit ΓΔ diameter diametro ΗΘ. rurſus, quia angulus ΘΕΗ minor eſt angulo ΑΕΒ: minor ergo apparebit diameter ΗΘ diametro ΑΒ.

αἱ ΞΛ, ΞΜ· ἡ ἄρα πρὸς τῷ Ξ σημείῳ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΞ, ΞΜ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Ε, περιεχομένῃ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΕΔ. ἐπὶ κείσθω τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ ἴση ἡ ὑπὸ τῶν ΛΝ, ΝΟ, καὶ ἀφῃρήσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΝΟ[1], καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΟ, ΜΟ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΜ καὶ τὸ Ο σημεῖον τὸ ΛΟΜ τμῆμα κύκλου. ἡ δὴ πρὸς τῷ Ο σημείῳ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΜΟ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Ε, τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ. ἐπὶ κείσθω τῇ ὑπὸ ΑΖ, ΖΕ ἴση ἡ ὑπὸ τῶν ΛΝ, ΝΠ, καὶ ἀφῃρήσθω ἡ ΝΠ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΠ, ΠΜ, καὶ περιγεγράφθω περὶ ΛΠΜ τρίγωνον τμῆμα κύκλου τὸ ΛΠΜ· ἔσται δὴ ἡ πρὸς τῷ Π σημείῳ γωνία, περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΠ, ΠΜ, ἴση τῇ πρὸς τῷ Ε γωνίᾳ· περιεχομένη δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ. ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Ξ τῆς πρὸς τῷ Ο γωνίας, ἴση δὲ ἡ μὲν πρὸς τῷ Ο τῇ πρὸς τῷ Ε, περιεχομένη δὲ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ξ τῇ πρὸς τῷ Ε περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΓΕΔ· ἐλάσσων ἄρα φανήσεται ἡ ΓΔ τῆς ΗΘ. πάλιν, ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ε περιεχομένη δὲ ὑπὸ τῶν ΘΕΗ, τῆς πρὸς τῷ Ε περιεχομένης δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ· ἐλάσσων ἄρα φανήσεται καὶ ἡ ΗΘ τῆς ΑΒ.

Prop. XL. Theor.

Curruum rotæ nunc circulares nunc oblongæ apparebunt.

SIT rota, cujus diametri ſunt ΔΖ, ΒΓ. cum ergo radius, ab oculo ad centrum rotæ tendens, fuerit vel rectus ad rotæ planum vel æqualis ſemidiametro, diametri ipſius æquales apparebunt, ut in theor. præc. demonſtratum eſt.

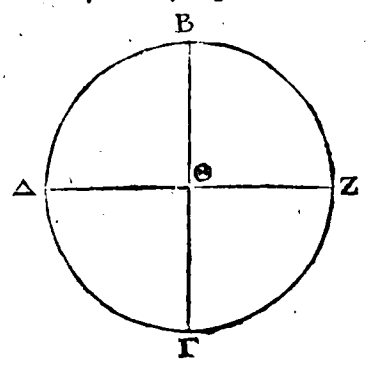
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Τῶν ἁρμάτων οἱ τροχοὶ ὅτε μὲν κυκλοειδεῖς, ὅτε δὲ παρεσπασμένοι φανήσονται.

Ἔστω γὰρ τροχὸς, οὗ διάμετροι αἱ ΔΖ, ΒΓ. ἀκὴν ὅταν μὲν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος εἰς τὸ κέντρον εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ, ᾖ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἴσαι αἱ διάμετροι φανήσονται, ὡς ἐν [2] τῷ πρὸ αὐτοῦ θεωρήματι ἀπεδείχθη.

1 Punctum Ο non cadere intra ΑΞΝ conſtat ex eo, quod ΝΞ minima ſit omnium ab Ν puncto ad circumferentiam ΑΞΜ ductarum. *Savil.* 2 In theor. 36 & 37. quod qua ratione vocavit τὸ πρὸ αὐτοῦ? niſi hoc è *Scholio*, ut etiam fortaſſe totum theorema. *Idem.*

ὥςε ὁ τροχὸς ὁ τῦ ἅρματος κυκλοειδὴς φαίνεται τέτων ὑπαρχόντων. Φερομένου δὲ τῦ ἅρματος, καὶ τῦ ἀπὸ τῦ ὄμματος ἰούσης εἰς τὸ κέντρον ἀκτῖνος, μήτε πρὸς ὀρθὰς ἴσης τῷ τῦ τροχῦ ἐπιπέδῳ, μήτε ἴσης τῇ ἐκ τῦ κέντρου αὐτῦ, ἄνισοι αἱ διάμετροι φανῶνται ὁμοίως, διὰ τὸ πρὸ αὐτῦ δεδειχθέν· ὥςε παραλληλόγραμμος φαίνοιτο ὁ τροχός.



quare eo modo ſpectata rota currus circularis apparebit. curru vero inordinate & celeriter delato, ſi oculi radius tendens ad centrum neque rectus ſit ad rotæ planum, neque æqualis ſemidiametro rotæ, inæquales apparebunt ejus diametri, per præcedens theorema: quare oblonga apparebit rota.

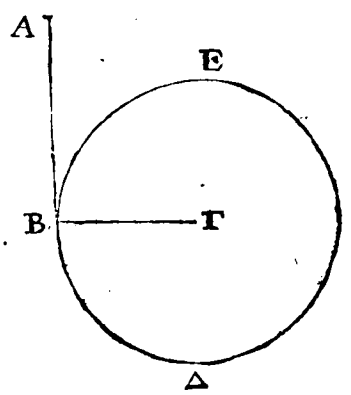
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐὰν μέγεθός τι πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ μετέωρον, πεφῇ δὲ τὸ ὄμμα ἔπί τι σημεῖον τῦ ἐπιπέδυ, καὶ μεθιζῆται τὸ ὁρώμενον ἐπὶ κύκλυ περιφερείας· ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φανήσεται.

PROP. XLI. THEOR.

Si magnitudo quævis recta ſit ad ſubjectum planum, ponaturque oculus in puncto aliquo plani illius, circa quod tanquam circa circuli centrum ſeſe verſet ſpectata magnitudo; ea ſemper æqualis apparebit.

Ἔστω ὁρώμενόν τι μέγεθος τὸ AB μετεωρότερον τῦ ὑπιπέδυ, ὄμμα δὲ ἔςω τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓB, καὶ κέντρῳ τῷ Γ διαςήματι δὲ τῷ ΓB κύκλος γεγράφθω ὁ BΔE· λέγω ὅτι ἐὰν ὑπὸ τὴν τῦ κύκλυ περιφερείας μεθιζῆται τὸ AB, ἀπὸ τῦ Γ ὄμματος ἴσος ἀεὶ ὀφθήσεται.



SIT ſpectata magnitudo AB ſublimior ſubjecto plano, [cui ad angulos rectos inſiſtat;] oculus autem ſit Γ, & connectatur recta ΓB; & centro Γ intervallo autem ΓB deſcribatur circulus BΔE: fore aſſero, ut, ſi magnitudo AB vectetur in circuli circumferentia, æqualis perpetuo appareat ipſi Γ oculo.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ AB ὀρθή ἐςι, καὶ πᾶσα πρὸς τὴν BΓ ὀρθὴν γωνίαν· πᾶσαι ἄρα αἱ ἀπὸ τῦ κέντρυ τῦ Γ πρὸς τὸ AB μέγεθος πεσοῦσαι ἀλλήλαις ἴσας γωνίας ποιῦσιν· ἴσον ἄρα τὸ ὁρώμενον ὀφθήσεται.

Quia enim AB magnitudo recta eſt ad planum, facitque angulum rectum cum linea BΓ jacente in plano circuli: quare omnes lineæ, quæ à centro Γ in ipſam AB magnitudinem incident, angulos inter ſe æquales facient; ideoque [per 7. poſit.] ſpectata magnitudo ejuſdem quantitatis perpetuo apparebit.

ΟΜΟΙΩΣ δὴ κἂν ἀπὸ τῦ Γ κέντρυ μετέωρος ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ ὄμμα πεφῇ ἔπὶ τὸ διάλληλόν τι ὂν τῷ ὁρωμένῳ μεγέθει, καὶ μετακινῆται τὸ μέγεθος, ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φαίνεται.

EODEM modo ſi ex centro Γ ſublimis ducatur recta linea, quæ parallela ſit ſpectatæ magnitudini, & in ejus culmine ſtatuatur oculus; magnitudo, vectata in circuli circumferentia perpetuo ſibi æqualis apparebit.

[1] ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁμοίως δὲ κἂν ἀπὸ τῦ κέντρυ πρὸς ὀρθὰς ἀναςαθῇ εὐθεῖα, ἔπὶ δὲ ταύτης ὄμμα μεταπεφῇ, καὶ μετακινεῖται τὸ ὁρώμενον μέγεθος κατὰ τὴν κύκλυ περιφέρειαν διάλληλον ὂν τῇ εὐθείᾳ, ἐφ' ἧς τὸ ὄμμα· ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον ὀφθήσεται.

SCHOLIUM.

Similiter ſi ex centro ad planum circuli erigatur perpendicularis recta, in qua collocetur oculus; circumferatur autem in peripheria circuli ſpectata magnitudo, parallela exiſtens rectæ in qua eſt oculus: ſpectata magnitudo ſemper æqualis apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν δὲ τὸ ὁρώμενον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μεθιζῆται δὲ τὸ ὄμμα ἔπὶ κύκλυ περιφερείας, κέντρον ἔχοντος τὸ σημεῖον

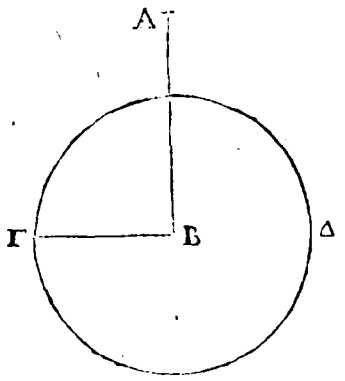
PROP. XLII. THEOR.

Si ſpectata magnitudo recta ſit ad ſubjectum planum; oculus autem vectetur in circumferentia circuli, cujus centrum ſit punctum illud in quo

[1] Ex MSS. ſed eodem redit cum ſubnexis ipſi propoſitioni.

erecta magnitudo tangit planum: ſpectata magnitudo ſemper æqualis apparebit.

καθ' ὃ συμβάλλει) τὸ μέγεθος τῷ ἐπιπέδῳ. ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φανήσει).



SIT ſpectata magnitudo AB, quæ & ſublimis ſit & angulos rectos faciat cum ſubjecto plano; oculus vero ſit Γ; & centro B intervallo autem BΓ deſcribatur circulus ΓΔ: fore aſſero, ut, ſi Γ oculus in circumferentia vectetur, ipſa AB magnitudo æqualis perpetuo appareat.

Id autem hinc perſpicuum eſt. omnes enim radii ex puncto Γ ad AB magnitudinem tendentes æquales angulos continent, quia angulus in puncto B rectus eſt; quare [per 7. poſit.] ſpectata magnitudo ſibi ipſi æqualis perpetuo apparebit.

ΕΣτω ὁρώμενον μὲν τὸ ΑΒ μεῖζον ὄν, καὶ πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Γ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΔ· λέγω ὅτι ἐὰν τὸ Γ μεθιστῆται ἐπὶ κύκλου περιφερείας, ἴσον ἀεὶ τὸ ΑΒ φανήσει).

Τοῦτο δὲ φανερόν ἐστι. πᾶσαι γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου πρὸς τὸ ΑΒ συνιστάμεναι ἀκτῖνες πρὸς ἴσας γωνίας προσπίπτουσιν, ἐπειδήπερ ἡ πρὸς τῷ Β ὀρθή ἐστιν· ἴσον ἄρα τὸ ὁρώμενον φανήσεται.

PROP. XLIII. THEOR.

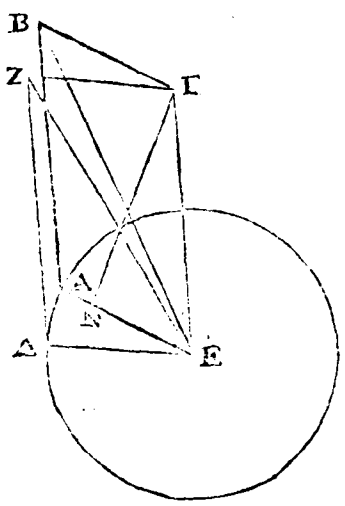
Si oculo poſito in centro circuli, magnitudo, quæ ad circuli planum recta non ſit, in circuli circumferentia vectetur; ſemper inæqualis apparebit.

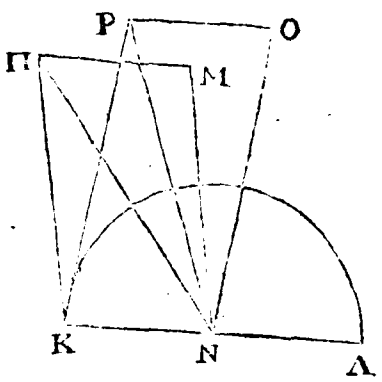
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Ἐὰν δὲ τὸ ὁρώμενον μέγεθος μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μεθιστῆται δὲ τὸ ὁρώμενον ἐπὶ κύκλου περιφερείας, ἄνισον ἀεὶ ὀφθήσει).

SIT circulus AΔ, in cujus circumferentia ſumatur punctum Δ, à quo ſublimis erigatur recta linea ΔZ, quæ ad circuli planum ad angulos rectos non ſit; ponaturque oculus in E centro: fore dico, ut, ſi ΔZ in circuli circumferentia tranſponatur, nunc major nunc minor appareat.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀνεστάτω μὴ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ εὐθεῖα ἡ ΔΖ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Ε· λέγω ὅτι ἡ ΔΖ ἐὰν ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας μεθιστῆται, ποτὲ μὲν μείζων φανήσεται ποτὲ δὲ ἐλάσσων.





Ipſa ΔZ aut major eſt ſemidiametro, aut æqualis, aut minor. Sit primo major ſemidiametro; ducaturque ex E centro recta linea EΓ parallela & æqualis ipſi ΔZ; & à puncto Γ in ſubjectum planum ducatur perpendicularis ΓN, quæ plano occurrat in puncto N; connectaturque recta EN, quæ producatur & circumferentiæ occurrat in puncto A; & ex

Ητοι δὲ ἡ ΔΖ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἴση, ἢ ἐλάσσων. Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ε κέντρου τῇ ΔΖ παράλληλος ἡ ΕΓ, καὶ ἔστω ἴση τῇ ΔΖ ἡ ΕΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΓΝ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ὑπιπέδῳ κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΝ ἐκβεβλήσθω καὶ συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Α, καὶ

1 Sc. ſibi ſemper παραλλήλως, quod neceſſario fit cum alius nullus adeſt motus. *Savil.*

ἤχθω

ἤχθω διὰ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΔΖ ἴση· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ πασῶν τῶν ἐπὶ τοῦ κύκλου περιφερείας μεθιεμένων εὐθειῶν ἐλάσσων φαίνεται. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΓΖ, ΕΖ, ΒΓ, ΕΒ. ἔχομεν δὲ ἐν τῷ παρακειμένῳ τῷ ἑβδόμῳ καὶ τριακοστῷ θεωρήματι, ὅτι πασῶν τῶν διὰ τοῦ Ε σημείου ἀγομένων εὐθειῶν, καὶ ποιουσῶν πρὸς τῇ ΕΓ γωνίας, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΑ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΕ τῇ ΑΒ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἴση· καὶ ἡ ΕΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ δεῖ δεῖξαι ὅτι ἔλασσον φαίνεται τὸ ΑΒ τοῦ ΔΖ, δῆλον ὅτι πρότερον δεῖ δεῖξαι ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΕΑ γωνία ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΖΕΔ γωνίας. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὅτι πασῶν τῶν διὰ τοῦ Ε σημείου διαγομένων εὐθειῶν καὶ ποιουσῶν πρὸς τῇ ΓΕ γωνίας, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΑ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ ἡ ὑπὸ ΓΕΑ. σκείσθω δὴ τῷ μὲν κύκλου ΑΔ ἡμικυκλίῳ ἴσον τὸ ΚΑΛ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ν, καὶ κείσθω τῇ ὑπὸ ΓΕΑ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΚΝΜ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΕΔ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΝΟ, καὶ κείσθω τῇ ΔΖ ἑκατέρα τῶν ΜΝ, ΟΝ ἴση, καὶ διὰ μὲν τοῦ Μ τῇ ΚΝ ἴση καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΠ, [1] καὶ ἔστιν ἴσον τε καὶ ὅμοιον τῷ ΒΕ. πάλιν διὰ τοῦ Ο τῇ ΚΝ ἴση καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΟΡ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΡΚ· τὸ ΡΝ ἄρα παραλληλόγραμμον ἴσον τε καὶ ὁμοίον ἐστὶ τῷ ΖΕ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ διαγώνιοι αἱ ΡΝ, ΠΝ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΚΝΠ γωνία τῆς ὑπὸ ΚΝΡ γωνίας ἐλάσσων ἐστί. [2] καὶ ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΚΝΠ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΚΝΡ ἴση τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ μέγεθος τοῦ ΔΖ μεγέθους ἔλασσον ἀφθήσεται.

[3] Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΒΑ τῆς ΖΔ ἐλάσσων [4] ἐστί, τῆς ΖΔ ἴσης τε καὶ ἐλάσσονος τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ὑπαρχούσης. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ΔΖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση, καὶ κατασκευασθέντων πάντα τὰ αὐτὰ τοῖς πρό-

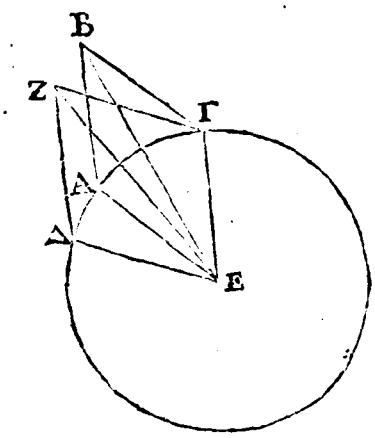
A puncto ducatur AB parallela ipſi ΕΓ; ſit autem AB æqualis ipſi ΔΖ: dico omnium rectarum linearum in circuli circumferentia circumlatarum minimam apparere ipſam AB. connectantur enim rectæ ΓΖ, ΕΖ, ΒΓ, ΕΒ. habemus jam oſtenſum in ſubnexis theoremati triceſimo ſeptimo, omnium linearum trajectarum per punctum Ε & angulos facientium cum linea ΕΓ, lineas ΓΕ, & ΕΑ minimum angulum continere, qui eſt ΓΕΑ. cum ergo ΓΕ parallela ſit & æqualis ipſi AB: igitur [per 33. 1.] ΕΑ ipſi ΓΒ æqualis & parallela eſt; parallelogrammum ergo eſt ΕΒ; eademque ratione parallelogrammum etiam eſt ΖΕ. quia vero demonſtrandum eſt AB minorem apparere quam ΔΖ, non dubium eſt quin prius demonſtrandum ſit angulum ΒΕΑ minorem eſſe angulo ΖΕΔ, [quod hoc modo fiet.] cum enim demonſtratum ſit [in ſubnexis ad 37.opt.] omnium linearum trajectarum per punctum Ε & facientium angulos cum linea ΓΕ, lineas ΓΕ, ΕΑ omnium minimum angulum continere nempe ΓΕΑ: ergo angulus ΓΕΑ minor eſt angulo ΓΕΔ. ponatur jam ΚΑΛ ſegmentum æquale ſemicirculo circuli ΑΔ, ſumaturq; ejus centrum Ν; & ponatur angulus ΚΝΜ æqualis angulo ΓΕΑ; angulus autem ΚΝΟ angulo ΓΕΔ; ſitque utraque ipſarum ΜΝ, ΟΝ æqualis ipſi ΔΖ; & per punctum Μ ducatur recta ΜΠ æqualis & parallela ipſi ΚΝ, connectaturque recta ΠΚ: parallelogrammum ergo eſt ΝΠ æquale & ſimile ipſi ΒΕ parallelogrammo. rurſus, per punctum Ο ducatur recta ΟΡ æqualis & parallela ipſi ΚΝ, connectaturque recta ΡΚ: igitur parallelogrammum ΡΝ æquale & ſimile eſt parallelogrammo ΖΕ. ducantur diametri ΡΝ, ΠΝ: ergo angulus ΚΝΠ minor eſt angulo ΚΝΡ. eſt autem angulus ΚΝΠ æqualis angulo ΑΕΒ; angulus autem ΚΝΡ æqualis angulo ΔΕΖ: minor ergo eſt angulus ΑΕΒ angulo ΔΕΖ: quare [per 6. poſit.] magnitudo AB apparebit minor magnitudine ΔΖ.

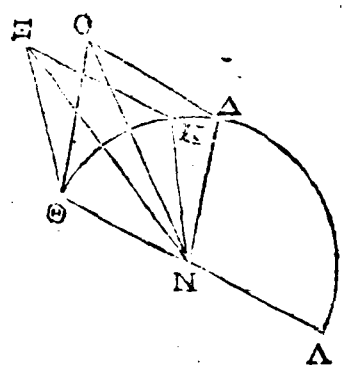
Eodem modo oſtendemus ΒΑ minorem eſſe quam ΖΔ, ſi ipſa ΖΔ ponatur æqualis vel minor ſemidiametro. Enimvero ſit ΔΖ æqualis ſemidiametro, conſtruanturque reliqua omnia ut in

1 Habet enim δύο ἐπιπέδους ΚΝ, ΝΜ duas ΑΕ, ΕΓ æquales, & angulum ΚΝΜ æqualem angulo ΑΕΓ. *Savil.* 2 Nam ΠΚ, ΚΝ æquales ΒΑ, ΑΕ, & anguli quoque comprehenſi: ergo per quartam primi. *Idem.* 3 Sed totum hoc eſt ex Scholio, aut, quod magis credo, cætera omnia ex hac demonſtratione. *Idem.* 4 Lege ἐφθήσεται. *Idem.*

præcedentibus factum eſt, ponatur item ſemicirculus Θ Δ Λ qui æqualis ſit ſemicirculo circuli Λ Δ, ſumaturque centrum ejus quod ſit N. quia ergo Δ Z æqualis poſita eſt ſe midiametro circuli; igitur Δ Z æqualis eſt ipſi Θ N. ponatur angulus Θ N K æqualis angulo Γ E Λ, ducaturque K Ξ parallela [& æqualis] ipſi Θ N, connectaturque recta Ξ Θ, ponatur etiam

τερον, καὶ κέιδθω τῷ τῦ κύκλου Λ Δ ἡμικυκλίῳ ἴσον ἡμικύκλιον τὸ Θ Δ Δ, καὶ εἰλήφθω αὐτῦ κέντρον τὸ N. καὶ ἐπεὶ ἡ Δ Z ἴση ὑπόκειται τῇ ἐκ τῦ κέντρου τῦ κύκλου, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Δ Z τῇ Θ N. καὶ κέιδθω τῇ μὲν ὑπὸ τ̃ Γ E Λ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ τῶν Θ N K, καὶ ἤχθω τῇ Θ N ᾠδ̓ήλληλος ἡ K Ξ, καὶ τῇ Θ N ἀφηρήθω ἴση ἡ K Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ξ Θ, τῇ



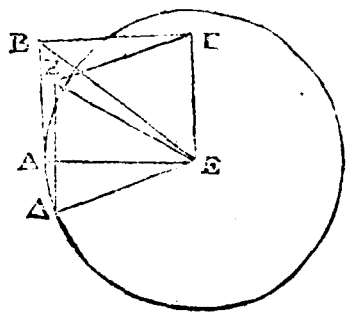


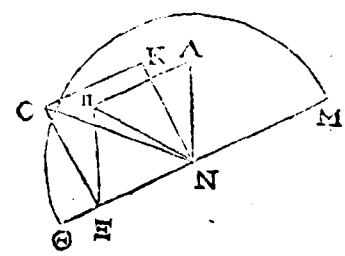
angulus Θ N Δ æqualis angulo Γ E Δ, ducatur autem Δ O [æqualis &] parallela ipſi Θ N, ducaturque recta O Θ: parallelogramma ergo ſunt Θ Δ, Θ K ſimilia æqualiaque parallelogrammis E Z, E B; quare angulus quidem Θ N Δ æqualis eſt Γ E Δ angulo; angulus autem Θ N K æqualis eſt angulo Γ E Λ. minor autem eſt angulus Γ E Λ angulo Γ E Δ: minor eſt igitur Θ N K angulus angulo Θ N Δ. connectantur parallelogrammorum diametri Ξ N, O N: minor igitur eſt Θ N Ξ angulus angulo Θ N O. æqualis autem eſt angulus quidem Θ N Ξ angulo Λ E B, angulus vero Θ N O angulo Δ E Z; minor igitur eſt Λ E B angulus angulo Δ E Z; quare magnitudo A B apparebit minor magnitudine Δ Z. quod erat demonſtrandum.

Sed enim ſit Δ Z minor ſemidiametro circuli, reliqua vero conſtruantur ut antea, ponaturque

δὲ ὑπὸ τ̃ Γ E Δ ἴση κέιδθω ἡ ὑπὸ τῶν Θ N Δ, καὶ τῇ Θ N ᾠδ̓ήλληλος ἤχθω ἡ Δ O, καὶ ἴση τῇ Θ N ἀφηρήθω ἡ Δ O, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ O Θ· ᾠδ̓ηλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τ̃ Θ Δ, Θ K, καὶ ἔστιν ἴσα τε καὶ ὅμοια τοῖς E Z, E B· ὥστε καὶ ἡ μὲν ὑπὸ Θ N Δ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ Γ E Δ, ἡ δὲ ὑπὸ Θ N K γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ Γ E Λ. ἐλάσσων ἢ ἡ ὑπὸ Γ E Λ τ̃ ὑπὸ Γ E Δ· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Θ N K τ̃ Θ N Δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ διαγώνιοι αἱ Ξ N, O N· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Θ N Ξ τῆς ὑπὸ Θ N O. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ Θ N Ξ τῇ ὑπὸ Λ E B, ἡ δὲ ὑπὸ Θ N O τῇ ὑπὸ Δ E Z· ἐλάσσων ἄρα καὶ ὑπὸ Λ E B τ̃ ὑπὸ Δ E Z· ἐλάσσον ἄρα ἀφθήσεται τὸ A B μέγεθος τ̃ Δ Z μεγέθους. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Αλλὰ δὴ ἔστω ἡ Δ Z ἐλάσσων τ̃ ὀκ τ̃ κέντρε τ̃ κύκλε, καὶ κατασκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρόσθεν,





Θ M æqualis ſemicirculo circuli A Δ, ſumaturque circuli centrum N, & ex Θ N ſecetur N Ξ æqualis ipſi Δ Z, conſtituaturque angulus Θ N K æqualis angulo Γ E A, angulus autem Θ N Λ æqualis angulo Γ E Δ, ſitque utraque ipſarum N K, N Λ ſigillatim æqualis ipſi Δ Z, & per punctum K ducatur K O parallela & æqualis ipſi N Ξ, connectaturque O Ξ, per punctum autem Λ ducatur

Ϲ κέιδθω τ̃ κύκλου Λ Δ ἡμικυκλίῳ ἴσον τὸ Θ M, καὶ λήφθω τὸ κέντρον τ̃ κύκλε τὸ N, καὶ ἀφηρήθω ἀπὸ τ̃ Θ N τῇ Δ Z ἴση ἡ N Ξ, καὶ κέιδθω τῇ μὲν ὑπὸ Γ E A γωνία ἴση ἡ Θ N K, τῇ δὲ ὑπὸ Γ E Δ ἴση ἡ ὑπὸ Θ N Λ, καὶ ἑκατέρα τ̃ N K, N Λ τῇ Δ Z, καὶ ἤχθω διὰ μὲν τ̃ K τῇ N Ξ ἴση Ϲ παράλληλος ἡ K O, Ϲ ἐπεζεύχθω ἡ O Ξ, διὰ δὲ Λ τῇ

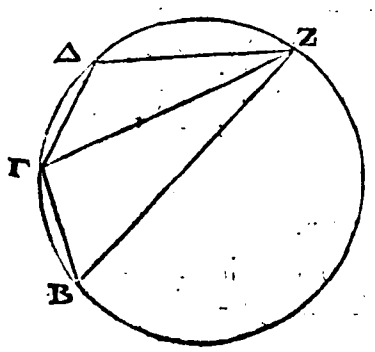
Ξ N

ΞΝ παράλληλος ἡ ΑΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΞ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΚΞ, ΞΑ. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΚΞ τῷ ΕΒ ἴσον τε καὶ ὅμοιον, τὸ δὲ ΞΛ τῷ ΕΖ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΘΝΚ ἴση τῇ ὑπὸ ΓΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΘΝΛ τῇ ὑπὸ ΓΕΔ. μείζων δὲ ἡ ὑπὸ ΓΕΔ τῆς ὑπὸ ΓΕΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΘΝΛ τῆς ὑπὸ ΘΝΚ. ἐπεζεύχθωσαν ΝΟ, ΝΠ· καὶ ἡ ὑπὸ ΞΝΟ ἄρα τῆς ὑπὸ ΞΝΠ ἐλάσσων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΞΝΟ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΞΝΠ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ. καὶ βλέπεται ὑπὸ μὲν τῆς ΑΕΒ τὸ ΑΒ μέγεθος, ὑπὸ δὲ τῆς ΔΕΖ τὸ ΔΖ· ἔλασσον ἄρα ὀφθήσεται τὸ ΑΒ μέγεθος τοῦ ΔΖ μεγέθους. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Ἐστι τις τόπος, ἐν ᾧ ὄμματος μένοντος, ἓν δὲ ὁρωμένου μεθισταμένου, ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φαίνεται.

ΕΣτω γὰρ ὁρώμενον μέγεθος τὸ ΒΓ, ὄμμα δὲ τὸ Ζ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν αἰκτῖνες αἱ ΖΒ, ΖΓ, καὶ περιειλήφθω τὸ ΖΒΓ τρίγωνον κύκλῳ τῷ ΔΒΖ· λέγω ὅτι τὸ ΒΓ, μεθισταμένου αὐτοῦ ἐπὶ τὴν τοῦ περιφέροντος κύκλου περιφέρειαν, ἴσον ἀεὶ φαντασθήσεται.



Μεταφερέσθω γὰρ τὸ ΒΓ ἐπὶ τὴν ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ. ὀρθὴν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ περιφερείᾳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΖΒ γωνία τῇ ΓΖΔ γωνίᾳ. τὰς δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴσον ἄρα φαίνεται τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ.

PROP. XLIV. THEOR.

Est aliquis locus, ubi, manente oculo, res spectata, à loco in locum delata, æqualis semper apparet.

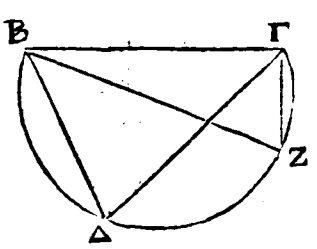
SIT spectata magnitudo ΒΓ, oculus autem Ζ, à quo procedant radii ΖΒ, ΖΓ, efficientes triangulum ΖΒΓ, circa quem [per 5. 4.] describatur circulus ΔΒΖ: dico magnitudinem ΒΓ translatam in quemlibet locum circumferentiæ circuli, ejusdem quantitatis semper apparere.

Transferatur enim ΒΓ magnitudo in ΓΔ, & connectatur recta ΔΖ. æqualis igitur est [per 28.3.] circumferentia ΒΓ circumferentiæ ΓΔ; ideoque [per 27.3.] æqualis est angulus ΓΖΒ angulo ΓΖΔ. quæ autem sub æqualibus angulis cernuntur [per 7.posit.] æqualia apparent: æqualis ergo apparet ΒΓ ipsi ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Ἐστι τις τόπος, ἐν ᾧ ὄμματος μεθισταμένου, ἓν δὲ ὁρωμένου μένοντος, ἀεὶ ἴσον τὸ ὁρώμενον φαίνεται.

ΕΣτω γὰρ ὁρώμενον μὲν τὸ ΒΓ, ὄμμα δὲ τὸ Ζ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν αἰκτῖνες αἱ ΖΒ, ΖΓ, καὶ περιειλήφθω τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τμήματι κύκλου τῷ ΒΔΖΓ, καὶ μεταφερέσθω τὸ Ζ ὄμμα ἐπὶ τὸ Δ, καὶ μεταπιπτέτωσαν αἰκτῖνες αἱ ΔΒ, ΔΓ· ὀρθὴν ἴση ἡ ΒΔΓ γωνία τῇ ΒΖΓ, ἐν τῷ αὐτῷ γὰρ τμήματί εἰσι. τὰς δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴσον ἄρα τὸ ΒΓ ἀεὶ παντὸς φαίνεται, μεθισταμένου τοῦ ὄμματος ἐπὶ τὴν ΒΔΓ περιφερείας.



PROP. XLV. THEOR.

Est aliquis locus, ubi, aspectabili manente, oculo vero translato, aspectabile semper æquale apparet.

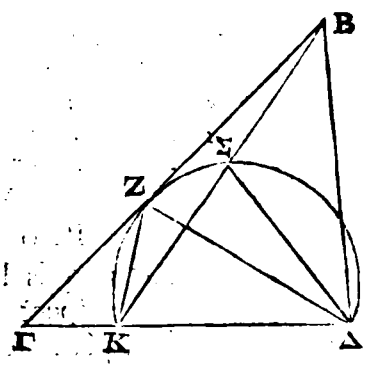
SIT enim spectata magnitudo ΒΓ, oculus autem Ζ, à quo procedant radii ΖΒ, ΖΓ; & circa triangulum ΒΖΓ describatur [per 5.4.] circuli segmentum ΒΔΖΓ, transferaturque oculus à puncto Ζ in punctum Δ, ex quo ducantur radii ΔΒ, ΔΓ: æqualis igitur est [per 21.3.] angulus ΒΔΓ angulo ΒΖΓ, cum sint in eodem segmento circuli. quæ autem sub æqualibus angulis conspiciuntur [per 7. posit.] æqualia apparent: quare magnitudo ΒΓ ejusdem quantitatis perpetuo apparebit, oculo per ΒΔΓ circumferentiam vectato.

1 Quomodo erunt parallelogramma ΚΞ, ΛΞ τῆς ΒΕ, ΖΕ ἴσα & ὅμοια; cum tamen ΞΝ minor sit facta quam ΑΚ & ΝΚ æqualis τῇ ΔΖ vel ΒΑ. *Savil.*

Prop. XLVI. Theor.

Eſt aliquis locus, ad quem ſi oculus tranſferatur, rem aſpectabilem immotam, nunc majorem, nunc minorem exiſtimabit.

SIT ſpectata magnitudo ΚΔ, recta vero linea ΒΓ, quæ concurrat cum recta ΚΔ producta ad punctum Γ, & [per 13. 6.] ſumatur inter ipſas ΔΓ, ΓΚ media proportionalis ΓΖ, & connectantur rectæ ΖΚ, ΖΔ; deinde [per 33. 3.] circa datam rectam lineam ΚΔ deſcribatur ſegmentum circuli, quod capiat angulum ΚΖΔ: igitur [per 37. 3. & 16. 6.] recta ΒΖΓ tanget ſegmenti circumferentiam, cum ΔΓ ſe habeat ad ΓΖ ut ΓΖ ad ΓΚ. ponatur ergo oculus in puncto Β, à quo ducantur radii ΒΔ, ΒΚ, & connectatur recta ΣΔ: æqualis igitur eſt [per 21. 3.] angulus ΚΖΔ angulo ΚΣΔ; ſunt enim in eodem ſegmento. eſt autem [per 16. 1.] angulus ΚΣΔ major angulo ΚΒΔ: quare angulus etiam ΚΖΔ angulo ΚΒΔ major eſt: oculo igitur ſpectanti è puncto Ζ [per 5. poſit.] major apparebit magnitudo ΚΔ quam ex puncto Β.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

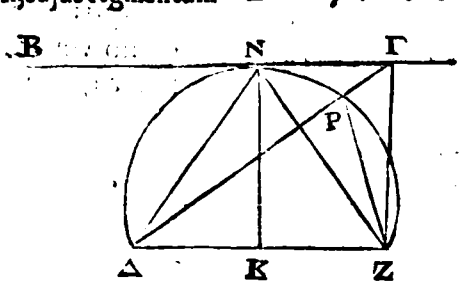
Ἐπὶ τὸς τόπος, ὃν, ὃ ὄμματος μεθίσαμβύω, ὃ δὲ ὁρωμβύω μέιοντος, ἄνισον τὸ ὁρώμενον φανεῖται.

Ἔστω γὰρ ὁρώμβυον τὸ ΚΔ, εὐθεῖα δὲ ἡ ΒΓ συμπίπτουσα τῇ ΚΔ ἐκβαλλομβύῃ, καὶ εἰλήφθω τὰ ΔΓ καὶ τὰ ΓΚ μέσα ἀνάλογον ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΚ καὶ ΖΔ, ὥϛε δὲ τὸ ΚΔ τμῆμα γεγράφθω [1] ὀξεῖαν ἔχον τὸν ΚΖΔ γωνίαν· ἐφάψεται δὴ τὰ ΒΓ εὐθεῖας, ἐπείπερ ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΖ ὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὸν ΓΚ. κείσθω ἂν τὸ ὄμμα ἐπὶ τᾶ Β σημείυ, καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΒΔ, ΒΚ, ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΣΔ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΖΔ γωνία τῆ ΚΣΔ γωνίᾳ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι. καὶ ἔστιν ἡ ΚΣΔ τῆς ΚΒΔ γωνίας μείζων· καὶ ἡ ΚΖΔ ἄρα γωνία τῆς ΚΒΔ μείζων ἐστί· τᾶ ἄρα ὄμματος ἐπὶ τᾶ Ζ ὄντος, μείζων φανεῖται τὸ ΚΔ ἤπερ ἐπὶ τᾶ Β.

Prop. XLVII. Theor.

Idem accidet ſi linea, per quam tranſit oculus, parallela ſit ſpectatæ magnitudini.

SIT enim ΒΓ linea parallela ſpectatæ magnitudini ΔΖ, ſecetur autem bifariam ipſa ΔΖ in puncto Κ, à quo excitetur ΚΝ, ponatur autem oculus ad Ν, & connectantur rectæ ΝΔ, ΝΖ, circa autem rectam ΔΖ [per 33. 3.] deſcribatur ſegmentum circuli capiens angulum ΔΝΖ. quia ergo linea ΚΝ eſt diameter ejus circuli, cujus ſegmentum eſt ΔΝΖ, ab extremitate vero ipſius ΚΝ, nempe à puncto Ν, ducta eſt recta ΒΓ ad angulos rectos ipſi ΚΝ; igitur, [per 16. 3.] ipſa ΒΓ tangit circumferentiam ipſius ſegmenti ΔΝΖ. transferatur vero oculus in punctum Γ, à quo procedant radii ΓΖ, ΓΔ, & connectatur recta ΡΖ. æqualis igitur eſt [per 21. 3.] angulus ΔΝΖ angulo ΔΡΖ. angulus autem ΔΡΖ [per 16. 1.] major eſt angulo ΔΓΖ: major igitur eſt angulus ΔΝΖ angulo ΔΓΖ. quæ autem ſub majore angulo ſpectantur [per 5. poſit.] majora apparent: major igitur apparebit ipſa ΔΖ magnitudo, oculo collocato in puncto Ν, quam in puncto Γ. oculo



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

Τὸ δὲ αὐτὸ συμβήσετ), καὶ ἂν παράλληλος ᾖ γραμμὴ τῷ ὁρωμβύῳ μεγέθει, ἐφ' ἧς τὸ ὄμμα μεθίσατ).

Ἔστω γὰρ παράλληλος ἡ ΒΓ τῷ ὁρωμβύῳ τῷ ΔΖ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΔΖ κατὰ τὸ Κ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἀνήχθω ἡ ΚΝ, κείσθω ἂν τὸ ὄμμα ἐπὶ τᾶ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΔ, ΝΖ, περὶ δὲ τὴν ΔΖ τμῆμα γεγράφθω, ὃ δέξεται τὴν ΔΝΖ γωνίαν. ἐπεὶ ἂν ὀξυγώνιός ἐστιν ἡ ΚΝ [2], καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἦκ) ἡ ΚΝ [3] τῇ ΒΓ· ἡ ΒΓ ἄρα ἐφάπτεται τᾶ ΔΝΖ τμήματος. μετακείσθω δὴ τὸ ὄμμα ἐπὶ τὸ Γ, καὶ [4] ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΓΖ, ΓΔ, ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΡΖ. ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΝΖ γωνία τῇ ΔΡΖ γωνίᾳ. ἡ δὲ ΔΡΖ τᾶ ΔΓΖ γωνίας μείζων ἐστί· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΔΝΖ τῆς ΔΓΖ. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμβυα μείζονα φαίνεται· μείζον ἄρα φανεῖται τὸ ΔΖ, τᾶ ὄμματος ἐπὶ τᾶ Ν κειμβύου, ἤπερ ἐπὶ τᾶ Γ. τᾶ

1 Et quid ita ὀξεῖαν? atqui nec ΚΖΔ eſt neceſſario ὀξεῖα, neque anguli quantitas ad conficiendum problema quicquam conducit, & abeſt in ſequente. *Savil.* 2 Quia ſc. τὸ ΔΖ δίχα ἐστὶ τμημ. *Idem.* 3 Malim τῇ ΚΝ ἡ ΒΓ. *Idem.* 4 Hoc verbum in hac quidem re ſuſpectum; & tamen ſic utitur in præcedente, τῷ συμπεσεῖσθαι, niſi forte radiorum ἐκβολὰ intelligat *Idem.*

ἄρα

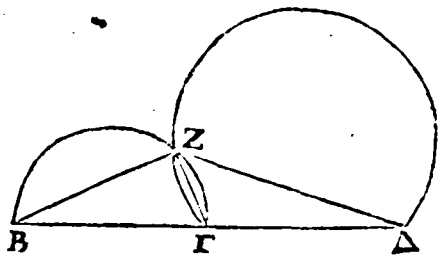
ἄρα ὄμματος ἐπὶ τῆς ΒΓ μεθισαμένου, ωθ᾽ ἑλλήλαις ἴσης τῇ ΔΖ, ἄνισον φαίνεται τὸ ὁρώμενον.

igitur, discurrenti per ΒΓ, parallelam ΔΖ, ipsa ΔΖ nunc major nunc minor apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

Ἐστί τις τόπος κοινὸς, ἐν ᾧ τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ἴση ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, καὶ περὶ μὲν τὴν ΒΓ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΖΓ, περὶ δὲ τὴν ΓΔ τμῆμα μεῖζον [1] ἡμικυκλίου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ· ἐκεῖν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ἐν τῷ μείζονι τμήματι. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεται· τῷ ἄρα ὄμματι τεθειμένῳ ἐπὶ τοῦ Ζ μείζων ἂν φαίνοιτο ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ. ἴση δὲ καὶ ἴση.



Ἐστιν ἄρα τόπος κοινὸς, ἐν ᾧ τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισα φαίνεται.

PROP. XLVIII. THEOR.

Est aliquis locus communis, unde æquales magnitudines inæquales apparent.

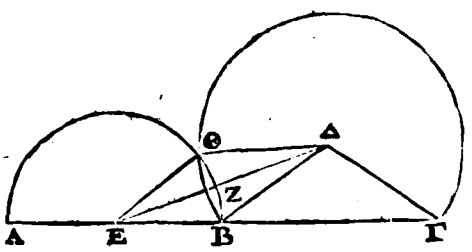
SIT enim ΒΓ magnitudo æqualis ipsi ΓΔ, & circa ipsam ΒΓ describatur semicirculus ΒΖΓ, circa autem ipsam ΓΔ describatur segmentum ΓΖΔ quod sit majus semicirculo, connectanturque rectæ ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ; ergo [per 31.3.] angulus ΓΖΒ in semicirculo positus major est angulo ΓΖΔ qui est in majori segmento. quæ autem sub majori angulo spectantur [per 5. posit.] majora apparent: quare oculo collocato in puncto Ζ, major apparet ΒΓ quam ΓΔ. atqui positæ sunt æquales.

Est ergo aliquis locus communis, unde spectatæ æquales magnitudines inæquales apparent.

[2] ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ δύναται τμηθῆναι τὸ ἡμικύκλιον ὑπὸ τοῦ μείζονος τμήματος καὶ πῇ, ἔτως εἰναι δῆλον.

Ἐκκείσθω ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, περιγεγράφθω ἡμικύκλιον περὶ τὰ Α, Β, ΑΘΒ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΓ, καὶ τῷ Β σημείῳ, γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΔ, πρὸς δὲ τῷ Γ ἴση ἡ ΒΓΔ, καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ κέντρον τοῦ ΑΘΒ, ὃ ἐστὶ τὸ Ε, ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΖ πρεφερὴς ἴση ἡ ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ΔΘ, ΘΕ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΘΕ τῇ ΕΒ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ, αἱ γωνίαι ἴσαι περιέχουσιν. ἐπεὶ ὦν ἡ ΘΖ πρεφερὴς τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση· ἴση ἄρα ἡ ΘΔ τῇ ΔΒ. ἡ δὲ ΔΒ τῇ ΔΓ· ὥστε ὁ κέντρῳ Δ διαστήματι δὲ τῷ ΔΘ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὸ ἡμικύκλιον, ὃ διὰ τοῦ Β καὶ Γ ἐλεύσεται.



SCHOLIUM.

Quod vero semicirculus secet segmentum semicirculo majus, & ubinam illud secet, sic patebit.

Sint rectæ ΑΒ, ΒΓ æquales sibi invicem, circumscribatur semicirculus circa Α, Β puncta, sc. ipse ΑΘΒ; & constituatur ad rectam ΒΓ, punctumque in ipsa Β, angulus acutus ΓΒΔ, & huic ad Δ æqualis angulus ΒΓΔ, & concurrant in Δ puncto, & à puncto Δ ad centrum circuli ΑΘΒ, sc. punctum Ε, jungatur ΔΕ, & arcui ΒΖ ponatur æqualis arcus ΖΘ, & jungantur ΔΘ, ΘΕ. quoniam igitur recta ΘΕ æqualis est ipsi ΕΒ, recta vero ΕΔ communis, & [per 27.3.] æquales continent angulos, quia arcus ΘΖ arcui ΖΒ est æqualis: ergo [per 4. 1.] ΘΔ æqualis est ΔΒ. sed [per 6.1.] ΔΒ æqualis ΔΓ. & ideo circulus centro Δ distantia ΔΘ descriptus intersecat semicirculum, & per puncta Β & Γ transit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Ἐστί τις τόπος κοινὸς, ἀφ᾽ οὗ ἄνισα μεγέθη ἴσα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ μείζων ἡ ΒΓ [3] τῆς ΓΔ, καὶ πρὸς μὴ τὴν ΒΓ μεῖζον ἡμικυκλίου [3] τμῆμα γεγράφθω, πρὸς δὲ τὴν ΓΔ ὅμοιον τῷ πρὸς τὴν ΒΖΓ,

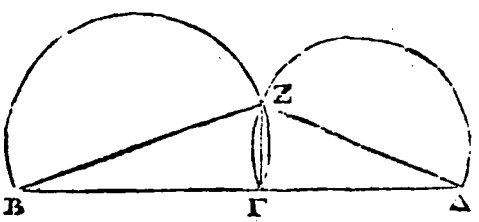
PROP. XLIX. THEOR.

Est aliquis locus communis, unde inæquales magnitudines æquales apparent.

SIT enim ΒΓ major quam ΓΔ, & circa ΒΓ describatur circuli segmentum quod sit majus semicirculo, & circa ΓΔ describatur [per 33.3.] circuli segmentum simile ipsi ΒΖΓ,

1 Nam si τμῆμα sit minus ἡμικυκλίου, nunquam se intersecabunt τὸ τμήματα, & sic in sequentibus. *Savil.* 2 Reperitur in MS. *Saviliano.* 3 Ut sc. fiat intersectio. *Savil.*

id eſt, quod angulum comprehendat, æqualem angulo BZΓ; connectantur autem rectæ ZB, ZΓ, ZΔ. cum igitur [per 11. def 3.] anguli, qui ſunt in ſimilibus ſegmentis, ſint inter ſe æquales: æquales ergo ſunt inter ſe anguli in ſimilibus ſegmentis BZΓ, ΓZΔ deſcripti. quæ autem ſub æqualibus angulis cernuntur [per 7. poſit.] æqualia apparent: quare, oculo collocato in puncto Z, æqualis apparet magnitudo BΓ ipſi ΓΔ; eſt autem major.



Igitur locus aliquis communis, unde ſpectatæ inæquales magnitudines æquales apparent.

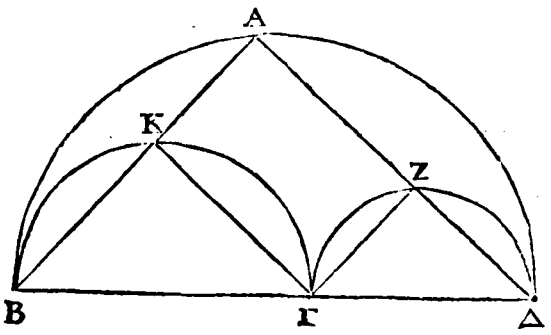
τοῦτ' ἔστι δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ τῷ BZΓ, ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ ZB, ZΓ, ZΔ. ὀρθὴν ἄρα ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ τοῖς ὁμοίοις τμήμασι γωνίαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ τοῖς BZΓ, ΓZΔ τμήμασι γωνίαι ἀλλήλαις. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· τῷ ἄρα ὄμματος σημείῳ ὄντι τῷ Z σημείῳ, ἴση ἂν φαίνοιτο ἡ BΓ τῇ ΓΔ· ἔστι δὲ μείζων.

Ἐστι τὰς ἄρα τόπος κοινὸς, ἀφ' οὗ τὰ ἄνισα μεγέθη ἴσα φαίνεται.

Prop. L. Theor.

Sunt quædam loca, è quibus ſpectata una magnitudo, ex duabus inæqualibus inter ſe additis compoſita, utrique inæqualium æqualis apparet.

SInt duæ magnitudines inæquales, major quidem BΓ, minor vero ΓΔ; & circa BΓ, ΓΔ deſcribantur ſemicirculi & etiam circa totam BΔ. angulus igitur qui eſt in BAΔ ſemicirculo æqualis eſt angulo qui eſt in BKΓ; uterque enim [per 31.3.] rectus eſt: æqualis ergo apparet BΓ ipſi BΔ. ſimiliter & BΔ ipſi ΓΔ æqualis apparet, oculis poſitis in ſemicirculis BAΔ, BKΓ, ΓZΔ.



Sunt ergo loca quædam, unde ſpectata una magnitudo, è duabus inæqualibus inter ſe additis compoſita, utrique inæqualium apparet æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Εἰσί τινες τόποι, ἐν οἷς τὰ ἄνισα μεγέθη δύο, εἰς ταὐτὸ συντιθέντα, ἴσα ἑκατέρῳ τῶν ἀνίσων φαίνεται.

Ἐστω γὰρ μείζων ἡ BΓ τῆς ΓΔ, καὶ γεγράφθω περὶ μὲν τὴν BΓ ἡμικύκλια, περὶ δὲ ἄλλην τινὰ τὴν BΔ. ὀρθὴν ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ τῷ BAΔ ἡμικυκλίῳ γωνία τῇ ὑπὸ τῷ BKΓ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· ἴση ἄρα φαίνεται ἡ BΓ τῇ BΔ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ BΔ τῇ ΓΔ, τῶν ὀμμάτων ὄντι τῶν BAΔ, BKΓ, ΓZΔ ἡμικυκλίων κεκμένων.

Εἰσί τινες ἄρα τόποι, ἐν οἷς τὰ ἄνισα μεγέθη δύο, εἰς ταὐτὸ συντιθέντα, ἴσα ἑκατέρῳ τῶν ἀνίσων φαίνεται.

Prop. LI. Probl.

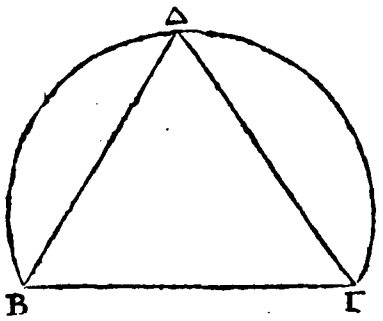
Invenire loca, ex quibus eadem magnitudo appareat dimidio aut quarta parte minor, & omnino in data ratione ſecundum quam ſecatur angulus.

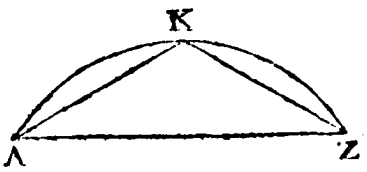
SIT enim recta linea AZ, & circa AZ deſcribatur pro arbitrio ſegmentum circuli, in quo

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Εὑρεῖν τόπους, ἀφ' ὧν τὸ ἴσον μέγεθος ἥμισυ φαινόμενον, ἢ τέταρτον μέρος, ἢ καθόλου ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ, ἐν ᾧ ἡ γωνία τέμνεται.

Ἐστω γὰρ εὐθεῖα ἡ AZ, καὶ περὶ τὴν AZ γεγράφθω τμῆμα κύκλου τυχὸν, καὶ ἐγ-





inſcribatur angulus K; ipſi autem AZ æqualis ſit BΓ, & circa BΓ [per 33.3.] deſcribatur

γεγράφθω ἐν αὐτῷ γωνία ἡ K, τῇ δὲ AZ ἴση ἔστω ἡ BΓ, καὶ περὶ τὴν BΓ περιγεγράφθω τμῆμα

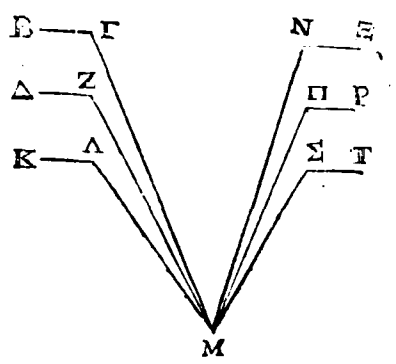
1 Supponit enim hujus Theor. demonſtratio τὸ ἴσον μεῖζον in directum eſſe. *Savil.*

τμῆμα, ὁ δέξεται τὴν τῆς Κ γωνίας ἡμισείαν. ἐλάττων ἡ Κ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς Δ γωνίας· διπλασία ἄρα φαίνεται ἡ ΛΖ τῆς ΒΓ, τῶν ὀμμάτων ἐπὶ τῶν ΛΚΖ, ΒΔΓ περιφερειῶν κειμένων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϚ'.

Τῶν ἴσῳ τάχει φερομένων καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων, [1] πλησίον ὂν τὸ ὄμμα τὸ [2] πλάγιον προηγεῖσθαι δόξει· [3] παραλλαξάντων δέ, [4] τὸ μὲν προηγούμενον ἐπακολουθῆσαι, τὸ δὲ ἐπακολουθοῦν προηγῆσθαι δόξει.

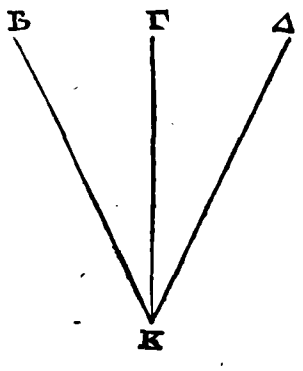
Φερέσθω γὰρ ἰσοταχῶς τὰ ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Μ ὄμματος προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΜΓ, ΜΖ, ΜΛ· ἐλάττων μεταφορὰ ἐστὶ καὶ δεξιωτέρα τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἀκτίνων προσπιπτουσῶν ἡ ΜΓ· τὸ ἄρα ΒΓ δόξει προηγεῖσθαι. παραλλαξάντων δὲ τῶν ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ, καὶ ἐπὶ τῶν ΝΞ, ΠΡ, ΣΤ γενομένων, προσπίπτουσαι ἀκτῖνες αἱ ΜΝ, ΜΠ, ΜΣ. ἐλάττων πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἀκτίνων προσπιπτουσῶν, δεξιωτέρα ἐστὶν ἡ ΜΣ, ἀριστερὰ δὲ μᾶλλον ἡ ΜΝ· ὥστε καὶ τὸ μὲν ΣΤ προηγεῖσθαι δόξει, ἐπακολουθεῖν δὲ τὸ ΝΞ. τὸ μὲν ἄρα ΒΓ προηγούμενον ἐπὶ τοῦ ΝΞ γενόμενον δόξει ἐπακολουθεῖν, τὸ δὲ ΛΚ ἐπακολουθοῦν ἐπὶ ΣΤ γενόμενον δόξει προηγεῖσθαι.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Ἐὰν, πηῶν φερομένων πλειόνων ἀνίσῳ τάχει, συμπαραφέρηται ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἡ τὸ ὄμμα· τὰ μὲν τῷ ὄμματι ἰσοταχῶς φερόμενα ἑστάναι δόξει· τὰ δὲ βραδύτερον, εἰς τἀναντίον φέρεσθαι· τὰ δὲ θᾶττον, εἰς τὰ προηγούμενα.

Φερέσθω γὰρ ἀνίσῳ τάχει τὰ Β, Γ, Δ, καὶ βραδύτατα μὲν φερέσθω τὸ Β, τὸ δὲ Γ ἰσοταχῶς τῷ Κ ὄμματι, τὸ δὲ Δ θᾶττον τοῦ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ ὄμματος προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ. ἐλάττων τοῦ ὄμματος συμπαραφερομένη τοῖς Β, Γ, Δ, τὸ μὲν Γ τῷ Κ ὄμματι ἰσοταχῶς φερό-



etiam circuli segmentum capiens angulum dimidio minorem quam sit angulus K. angulus ergo K duplus est anguli Δ; quare ΛΖ magnitudo duplo major videtur magnitudine ΒΓ, cum oculi collocantur in ΛΚΖ & ΒΔΓ circumferentiis.

Prop. LII. Theor.

Æquali celeritate delatorum & in eadem recta linea positorum prope oculum, ultimum reliqua omnia præcedere videbitur: facto autem transitu in contrarias partes, quod antea præcedebat, subsequi existimabitur; quod autem subsequebatur, præcedere videbitur.

Ferantur enim eadem celeritate ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ, & ex Μ oculo procedant radii ΜΓ, ΜΖ, ΜΛ: radius igitur ΜΓ est dexterrimus & sublimissimus radiorum ab oculo procedentium; quare ΒΓ videbitur præcedere. migratione vero facta in contrarias partes, si nempe ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ mutentur ad partes ΝΞ, ΠΡ, ΣΤ, procedant radii ΜΝ, ΜΠ, ΜΞ. omnibus ergo radiis reliquis ab oculo emissis dexterior est ΜΣ, sinisterior autem est ipse ΜΝ: igitur ipsa magnitudo ΣΤ reliquas præcedere videbitur, ipsa vero ΝΞ subsequi. quare ΒΓ magnitudo, quæ antea præcedebat, postquam translata fuerit in ΝΞ, subsequi videbitur; magnitudo autem ΛΚ, quæ antea subsequi videbatur, præcedere existimabitur, cum translata fuerit in ΣΤ.

Prop. LIII. Theor.

Inæquali celeritate delatorum eo versum quo fertur oculus, ea quidem, quæ æque velociter feruntur atque oculus, quiescere videntur: quæ vero tardius, in contrariam partem moveri: quæ autem celerius, in præcedentia ferri apparent.

Magnitudines enim Β, Γ, Δ moveantur velocitate inæquali, & Β quidem tardissime feratur, Γ autem æque celeriter atque Κ oculus, ac Δ denique celerius feratur quam Γ; ab ipso autem Κ oculo procedant radii ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ. si ergo oculus ad easdem partes feratur ad quas tendunt Β, Γ, Δ magnitudines, ipsa quidem Γ magnitudo, quæ æque celeriter fertur atque oculus Κ,

1 Quid hoc? intelligit proculdubio ea quæ in transversum ad oculos moventur, ut à dextra in sinistram aut è contra. *Savil.* 2 Ne hoc quidem quid sit intelligo, nisi τῷ προσωτάτῳ voluit intelligi. *Idem.* 3 Cum nempe mutaverint situm à sinistra in dextram, aut è contrario, *i.e.* præterierint perpendicularem ab oculo in rectas ductam, quas magnitudines motu suo describunt. *Idem.* 4 Magis congruunt προηγούμενον & ἐπακολουθῆσαι, aut certe προηγεῖσθαι δόξαν. *Idem.*

ſtare & quieſcere putabitur; B autem relinqui & retro ferri exiſtimabitur: denique Δ, cum velocius moveatur quam Γ, in præcedentia ferri videbitur; removebitur enim magis ac magis ab ipſa Γ magnitudine.

μθνον ἐστάναι δόξει, τὸ δὲ Β ὑπολειπόμθνον εἰς τἀναντίον δόξει φέρεσθαι. τὸ δὲ Δ, ἐπεὶ ἧττον τῆ Γ φέρεται, δόξει εἰς τἄμπροσθεν φέρεσθαι, πλέον γὰρ ἀπὸ τῆ Γ ἀποχήσεται.

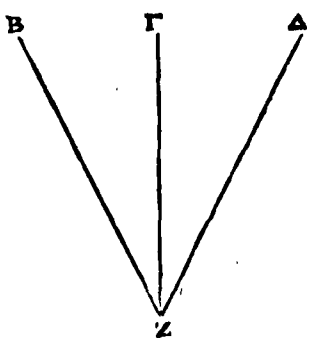
Prop. LIV. Theor.

Si magnitudines aliquæ ad eandem partem ferantur, una vero quieſcat; ea quæ quieſcit, in contrariam partem moveri videbitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

Ἐὰν πινῶν φερομένων [1] διαφέρηταί τι μὴ φερόμενον, δόξει τὸ μὴ φερόμενον εἰς τἀναντίον φέρεσθαι.

FErantur enim B, Δ magnitudines, Γ vero magnitudo immota maneat, & ab oculo Z procedant radii Z B, Z Γ, Z Δ. ſi ergo B, Δ magnitudines ferantur (exempli gratia) dextrorſum, B quidem propius accedet ad Γ; at vero Δ longius inde diſtabit: quare Γ in contrarias partes ferri videbitur.



Φερέσθω γὰρ τὰ Β, Δ, μενέτω δὲ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τῆ Ζ ὄμματος διεσταλμένωσαν ἀκτῖνες αἱ Ζ Β, Ζ Γ, Ζ Δ. ὁπόταν τὸ μὲν Β φερόμθνον ἔγγιον ἦ τῆ Γ, τὸ δὲ Δ ἀποχωροῦν πορρώτερον· ὥστε δόξει τὸ Γ εἰς τἀναντίον φέρεσθαι.

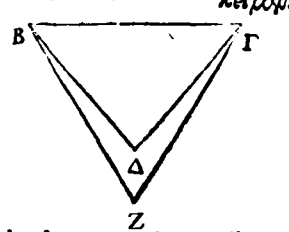
Prop. LV. Theor.

Oculo ad rem viſam accedenti res viſa augeri videtur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

Τῆ ὄμματος ἐγγίον τῆ ὁρωμένη γενομένης, [2] δόξει τὸ ὁρώμενον μείζον φαίνεσθαι.

OCulo enim in Z poſito, cernatur magnitudo B Γ per radios Z B, Z Γ, & accedat oculus propius ad magnitudinem B Γ, colloceturque in Δ, cernatque magnitudinem B Γ per radios Δ B, Δ Γ: ergo [per 21. 1.] major eſt angulus Δ angulo Z. quæ autem ſub majori angulo cernuntur [per 5 poſit.] majora apparent: oculo igitur in Δ collocato auctior apparebit magnitudo B Γ, quam ſi collocetur in Z.



Ὁράσθω γὰρ τὸ ΒΓ τῆ ὄμματος ἴσον τῆ Ζ κειμένω ὑπὸ τῶν Ζ Β, Ζ Γ ἀκτίνων, καὶ μετακείσθω τὸ ὄμμα ἔγγιον τῆ ΒΓ, καὶ ἔστω ἐπὶ τῆ Δ, καὶ ὁράσθω τὸ αὐτὸ ὑπὸ τῶν Δ Β, ΔΓ ἀκτίνων· ὁπόταν μείζων ἡ Δ γωνία τῆ Ζ γωνίας. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονα γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεται· δόξει ἄρα ἡυξῆσθαι τὸ ΒΓ τῆ ὄμματος ἐπὶ τῆ Δ ὄντος, ἢπερ ἐπὶ τῆ Ζ.

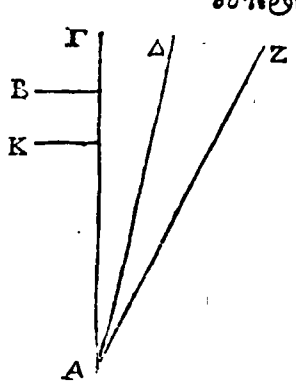
Prop. LVI. Theor.

Æquali celeritate delatorum, quæ longius diſtant tardius ferri videntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ'.

Τῶν ἴσῳ τάχει φερομένων, τὰ πόρρω δοκεῖ βραδύτερον φέρεσθαι.

FErantur enim eadem celeritate B, K magnitudines ad partes Z, ducanturque ab A oculo radii A Γ, A Δ, A Z. igitur radii ab A oculo ad K magnitudinem tendentes, minores ſunt, quam illi qui tendunt ad B magnitudinem: quare K minus intervallum percurret, videbiturque citius ferri, quia citius perveniet ad radium A Z.



Φερέσθω γὰρ ἰσοταχῶς τὰ Β, Κ ὡς ἐπὶ τὰ Ζ μέρη, καὶ ἀπὸ τῆ Α ὄμματος ἀκτῖνες ἤχθωσαν αἱ Α Γ, [3] Α Δ, Α Ζ. ὁπόταν τὸ Κ ἐλάσσονας ἔχει τὰς ἀπὸ τῆ ὄμματος ἀκτῖνας ἠγμένας, ἢπερ τὸ Β· ἔλαττον ἄρα διάστημα διελεύσεται, καὶ ὕστερον φανήσεται τὸ Α Ζ ὄψιν, δόξει ταχύτερον φέρεσθαι.

ALITER.

Duo puncta A, B æquali celeritate ferantur

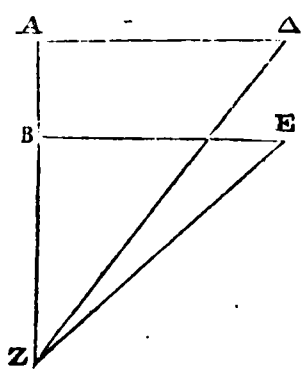
ΑΛΛΩΣ.

Φερέσθω δύο σημεῖα τὰ Α, Β ἐπὶ εὐθείας

1 Τί δὲ τῶν; interpres ſic: ad eandem partem ferantur, una vero quieſcat. *Sevil.* 2 Nempe, ſi radii ab oculo ἰσοταχῶς accidérint. *Idem.* 3 Quorſum duceretur? *Idem.*

λων

λων εὐθειῶν τῶν Α Δ, Β Ε ὁμαλῶς καὶ ἴσως· καὶ ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ [1] διελεύσεται. ἔσωσαν ἂν ἴσαι αἱ Α Δ, Β Ε, καὶ ωεφαιπτέτωσαν ἀκτῖνες ἀπὸ τοῦ Ζ ὄμματος αἱ Ζ Α, Ζ Δ, Ζ Ε. ἐπεὶ ἂν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ Β Ζ Δ γωνία τῆς ὑπὸ Β Ζ Ε· ἔλαττον ἄρα τὸ Α Δ διάστημα τοῦ Β Ε φανήσεται· ὥστε δόξει τὸ Α βραδύτερον φέρεσθαι τοῦ Β.



per rectas parallelas Α Δ, Β Ε: æquali ergo tempore pertranſibunt. ſint itaque æquales Α Δ, Β Ε, & ex Ζ oculo procedant radii Ζ Α, Ζ Δ, Ζ Ε. quia vero angulus Β Ζ Δ minor eſt angulo Β Ζ Ε: minus ergo [per 6 poſit.] apparebit intervallum Α Δ inter vallo Β Ε; quare Α tardius ferri videbitur quam Β.

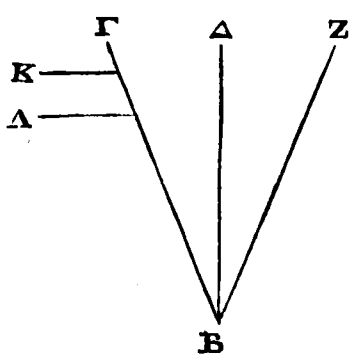
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζ'.

Τῷ ὄμματος ωροσφερομένῳ, τὰ πόρρω τῶν ὁρωμένων καταλείπεσθαι δόξει [2].

PROP. LVII. THEOR.

Oculo prætermoto, res ſpectatæ procul poſitæ relinqui videntur.

Ἔστω γὰρ ὄμμα τὸ Β, ἀφ' οὗ ἤχθωσαν ἀκτῖνες αἱ Β Γ, Β Δ, Β Ζ, ὁρώμενα δὲ τὰ Κ, Λ. σὺν τῷ ὄμματι ωροσφερομένῃ ωρὸς τῆς Γ μέρεσι, ἧττον παρελεύσονται αἱ ὄψεις τοῦ Κ ἤπερ τὸ Λ· δόξει ἄρα τὸ Κ ὑπολείπεσθαι, τὸ δὲ Λ εἰς τἀναντίον φέρεσθαι, τοῦτ' ἔστιν ὡς ἐπὶ τὰ ωρὸς τῷ Ζ μέρη. [3]



SIT oculus Β, à quo ducantur radii Β Γ, Β Δ, Β Ζ, res vero ſpectatæ ſint Κ, Λ. oculo igitur prætermoto, radii ab oculo Β verſus Γ protenſi citius percurrent Κ magnitudinem quam ipſam Λ: quare Κ relinqui exiſtimabitur, Λ vero in contrarium tendere, hoc eſt verſus partes quæ ſunt ad Ζ.

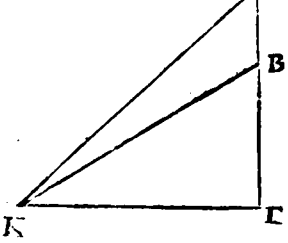
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νη'.

Τὰ αὐξανόμενα τῶν μεγεθῶν ἔγγιον δοκεῖ τῷ ὄμματι ωροσάγεσθαι.

PROP. LVIII. THEOR.

Magnitudines auctæ prōpius ad oculum accedere exiſtimantur.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενον τὸ Γ Β ἴσον τῶν Κ Β, Κ Γ ἀκτίνων, ᾧ ἠυξήσθω τὸ Γ Β τῷ Β Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ὄμματος ωεφαιπτέτω ἀκτὶς ἡ Κ Δ· σὺν μείζων ἡ ὑπὸ Δ Κ Γ γωνία τῆς ὑπὸ Β Κ Γ γωνίας. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεται· μεῖζον ἄρα φαίνεται τὸ Γ Δ τοῦ Γ Β, [4] καὶ ἐὰν τὰ μείζονα ὁρώμενα τῷ ὄμματι [5] ἐπαυξάνεσθαι δοκῇ· καὶ τὰ αὐξανόμενα ἄρα τῶν μεγεθῶν δόξει ωροσάγεσθαι τῷ ὄμματι [6].



SIT magnitudo Γ Β, quæ conſpiciatur per radios Κ Β, Κ Γ; augeatur ipſa Γ Β tanta magnitudine quanta eſt Β Δ; ab oculo vero Κ procedat radius Κ Δ: major ergo eſt Δ Κ Γ angulus angulo Β Κ Γ. quæ autem ſub majori angulo ſpectantur majora apparent: major igitur apparet Γ Δ quam Γ Β. quod ſi quæ majora viſui apparent quam prius, aucta eſſe putantur: igitur auctæ magnitudines ad oculum acceſſiſſe videbuntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

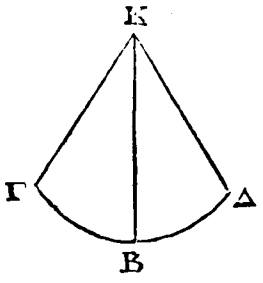
[7] Ὅσα μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιφανείᾳ κεῖται μὴ ωαράλληλα κείμενα, τὰ ἄκρων μὴ καταλληλα [8] κειμένων, μηδὲ τὰ μέσων ἐπ' εὐθείας ὄντων· τὸ ὅλον σχῆμα ὅτε μὲν κοῖλον ὅτε δὲ κυρτὸν ποιεῖ.

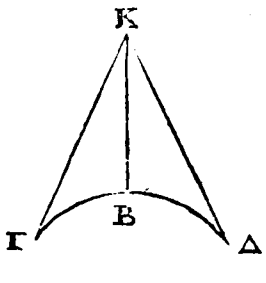
PROP. LIX. THEOR.

Quæ neque æqualiter ab oculo abſunt, neque extrema extremis & media mediis parallela habent, neque in recta linea ſunt; totam figuram faciunt nunc cavam nunc convexam.

1 Sc. ἴσας εὐθείας. *Savil.* 2 Adde, καὶ τὰ ἔγγιον εἰς τἀναντίον φέρεσθαι. ſic enim eſt concluſio. *Idem.* 3 Amplius, neque enim liquet. *Idem.* 4 In MS. ſic legitur τὰ μείζονα ἑαυτῶν εἰόμενα τῇ ὄμματος ωροσόντος, ἐπαυξάνεσθαι δοκῶσι, καὶ τὰ αὐξανόμενα &c. *Idem.* 5 Ne hic quidem quicquam ὑγιές, niſi pro ἐπαυξάνεσθαι, legamus ωροσίνεσθαι, ωροσάγεσθαι, aut tale quippiam ex 55. propoſitione; ſed plane nihil eſt, nec quicquam explico. *Idem.* 6 Addend. ἔγγιον ἄρα δόξει εἶναι τὸ Γ Δ ἤπερ τὸ Β Γ. *Idem.* 7 Ne hic quidem quicquam explico. *Idem.* 8 Καμφθὲν τὸ μέσον, μηδὲ ἐπ' εὐθ. *Idem.*

CErnantur enim B, Γ, Δ ab oculo posito in K, à quo procedant radii KB, KΓ, KΔ. tota igitur figura ΓBΔ cava esse videtur. alio modo ponatur ipsa res spectata, [ut in 2. fig.] ita ut punctum B propius oculo sit quam Γ aut Δ. ipsa igitur ΔBΓ figura convexa esse existimabitur.





Ὁράσθω γὰρ τὰ B, Γ, Δ τῷ ὄμματος ἐπὶ τῷ K κειμένῳ, καὶ ἐπιπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ KB, KΓ, KΔ. ἐκεῖνο τὸ ὅλον σχῆμα κοῖλον δόξειεν εἶναι. μετακείσθω δὴ πάλιν τὸ ὁρώμενον, καὶ ἔγγιον κείσθω τοῦ ὄμματος· ἐκεῖνο τὸ ΔBΓ δόξει κυρτὸν εἶναι.

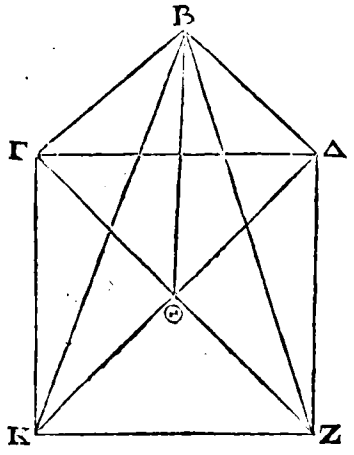
Prop. LX. Theor.

Si ab intersectione diametrorum quadrati excitetur linea ad planum quadrati normalis, & in ea ponatur oculus; quadrati diametri & latera æqualia apparebunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

Τετραγώνου ὑπάρχοντος, ἐὰν ἀπὸ τῆς συναφῆς τῶν διαμέτρων πρὸς ὀρθάς τις ἀναχθῇ τῷ μὲν τετραγώνῳ ὑπιπέδῳ, ὑπὸ δὲ αὐτῆς τεθῇ τὸ ὄμμα· αἵ τε πλευραὶ τοῦ τετραγώνου καὶ αἱ διάμετροι ἴσαι φανοῦνται.

SIT quadratum ΓZ, ducantur vero diametri ΓZ, KΔ quæ se intersecent in puncto Θ, à quo excitetur ΘB ad ipsius quadrati planum normalis, ponaturque oculus in B, à quo procedant radii BK, BΔ, BΓ, BZ: duæ igitur rectæ ΘZ, ΘB æquales sunt duabus ΘΓ, ΘB. sunt vero etiam anguli ab ipsis lineis contenti inter se æquales, anguli nimirum positi ad punctum Θ: æqualis ergo [per 4. 1.] est basis ZB basi BΓ. eademque ratione basis KB basi BΔ æqualis est. duæ ergo rectæ ZB, BΓ duabus rectis KB, BΔ æquales sunt utraque utrique, diametri quoque ipsæ æquales sunt: quare [per 8. 1.] anguli etiam qui sunt ad B æquales erunt. quæ autem sub æqualibus angulis cernuntur [per 7. posit.] æqualia apparent: æquales igitur apparent diametri inter se, & latera quoque inter se æqualia.



Ἔστω γὰρ τετράγωνον τὸ ΓZ, καὶ διάμετροι ἤχθωσαν αἱ ΓZ, KΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω τῷ ὑπιπέδῳ ἡ ΘB, τὸ δὲ ὄμμα κείσθω ἐπὶ τοῦ B, καὶ ἐπιπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ BK, BΔ, BΓ, BZ· ἐκεῖναι δύο αἱ ΘZ, ΘB δυσὶ ταῖς ΘΓ, ΘB ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ γωνίαι αἱ περιεχόμεναι ὑπ' αὐτῶν ἴσαι, τουτέστιν αἱ πρὸς τῷ Θ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ZB βάσις τῇ BΓ βάσει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ KB τῇ BΔ ἴση ἐστί. δύο δὴ αἱ ZB, BΓ δυσὶ ταῖς KB, BΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καί εἰσιν αἱ διάμετροι ἴσαι· ὥστε καὶ αἱ πρὸς τῷ B γωνίαι ἴσαι ἔσονται. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴσαι ἄρα φανοῦνται αἵ τε διάμετροι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου.

Prop. LXI. Theor.

Quod si radius ab oculo in diametrorum intersectionem ductus neque rectus sit ad planum quadrati, neque æqualis alterutri semidiametrorum quadrati, neque æquales angulos contineat cum ipsis semidiametris; inæquales apparebunt diametri.

IDem enim quod in circulis, hic etiam evenire demonstrabimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξα'.

Τῆς δὲ ἀπὸ τοῦ ὄμματος ὑπὶ τινὶ συναφεῖ τῶν διαμέτρων, μὴ πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῷ μὲν τετραγώνῳ ὑπιπέδῳ, μήτε ἴσης ἑκατέρᾳ τῶν ἀπὸ τῆς συναφῆς πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραγώνου ἀγομένων, μήτε ἴσας γωνίας περιεχούσης μετ' αὐτῶν· αἱ διάμετροι ἄνισοι φανοῦνται.

OMοίως γὰρ δείξομεν τὸ συμβαῖνον, καθάπερ καὶ ἐν τοῖς κύκλοις [3].

1 Latera lateribus & diametri diametris. *Savil.* 2 Sc. τῶν διαμέτρων. *Idem.* 3 Theor. 37. 38. 39. 4 In MS. Τέλος εἴληφε τὰ περὶ τῶν ὀπτικῶν Εὐκλείδου.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΟΠΤΙΚΩΝ.

FINIS EUCLIDIS OPTICORUM.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΑ.

EUCLIDIS

CATOPTRICA.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΑ.

EUCLIDIS

CATOPTRICA.

ΘΕΣΕΙΣ.

α'. ΟΨΙΝ ἴσας εὐθείας ὑποκείσθω, ἧς τὰ μέσα πάντα τοῖς ἄκροις ὀπτροειδεῖ.

β'. Τὰ ὁρώμενα ἅπαντα κατ' εὐθείας ὁρᾶσθαι.

γ'. Ενὸς ἑνὸς σημείου ἐπιπέδῳ, ᾧ μὴ κειμένῳ πρός ὕψος, ὁ αὐτὸς ὀφθαλμὸς ὅσι τῷ ἐπιπέδῳ, τοῦτον ἀναλογεῖ, ὃν ἡ μεταξὺ ὄψις [1] ἐν ᾗ μὴ κειμένου εὐθεῖα πρὸς πλὴν μεταξὺ ἐνόπτρου καὶ τοῦ πρὸς ὀρθὰς ὕψους, οὕτω τὸ ᾗ μὴ κειμένου ὕψος πρὸς τὸ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ ὕψος.

[ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ.]

α'. Ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις ἐν τόπῳ καταληφθέντος, ἐφ' ὃν ἡ [2] κάθετος πίπτει ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου, οὐκέτι ὁρᾶται τὸ ὁρώμενον.

β'. Καὶ ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις καταληφθέντος τοῦ τόπου, δι' οὗ ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου εἰς τὸ κέντρον [3] ἄγεται τῆς σφαίρας, οὐκέτι ὁρᾶται τὸ ὁρώμενον.

γ'. Τὸ δ' αὐτὸ καὶ ἐν τοῖς κοίλοις συμβαίνει.

δ'. Ἐὰν εἰς ἀγγεῖον ἐμβληθῇ τι, καὶ λάβῃ ἀπόστημα, ὡς μηκέτι ὁρᾶσθαι, τοῦ αὐτοῦ ἀποστήματος ὄντος, ἐὰν ὕδωρ ἐγχυθῇ, ὀφθήσεται τὸ ἐμβληθέν.

POSITIONES.

1. PONAMUS radium esse rectam lineam, cujus media omnia extremis officiant.

2. Omne aspectabile secundum rectam lineam cerni.

3. Si speculum collocetur in plano, cui ad rectos angulos altitudo aliqua erecta sit, quam rationem habet linea interjecta inter spectatorem & speculum ad lineam interjectam inter speculum & erectam altitudinem, eandem rationem habere spectatoris altitudinem ad altitudinem insistentem ad rectos angulos ei plano, in quo est speculum.

[PHÆNOMENA.]

1. In planis speculis occupato eo speculi loco, in quem cadit perpendicularis ducta à re aspectabili ad speculum, res aspectabilis non cernitur.

2. Item, in convexis speculis occupato eo loco, per quem à re aspectabili ad centrum sphæræ linea recta ducetur, res aspectabilis non cernitur.

3. Idemque in concavis speculis fit.

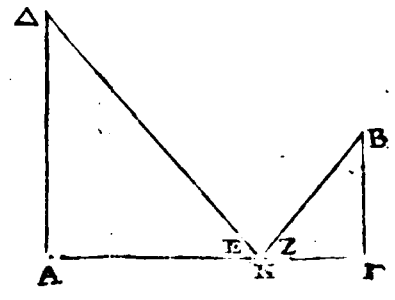
4. Si res aliqua in vas injiciatur, & ab oculo removeatur vas ipsum, quoad res in fundo vasis posita cerni non possit; ea videbitur ab eadem remotione, si aqua in vas infundatur.

1 Id est, σημεῖον in plano speculi, in quod perpendicularis ab oculo cadit, ut oculo posito in B, rectam ΓΚ accipere oportet, sc. inter speculum ad K & Γ casum perpendicularis interceptam. *Savil.* 2 Sc. ad planum speculi. *Idem.* 3 Sc. εὐθεῖα. *Idem.*

Propositio I. Theor.

A ſpeculis planis, convexis, & cavis, radii ad æquales angulos reflectuntur.

SIT oculus quidem B; planum autem ſpeculum AΓ, radius vero BK ab oculo feratur, qui reflectatur ad punctum Δ: dico angulum E æqualem eſſe angulo Z.



Ducantur enim BΓ, ΔA perpendiculares ad ſpeculum. eſt igitur [per 3. poſit.] ut BΓ ad ΓK ſic ΔA ad AK; id enim in definitionibus poſitum eſt: quare [per 6. 6.] triangulum BΓK ſimile eſt triangulo ΔAK; ideoque angulus E æquale eſt angulo Z, triangula enim ſimilia [per 1. def. 6.] æquiangula etiam ſunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

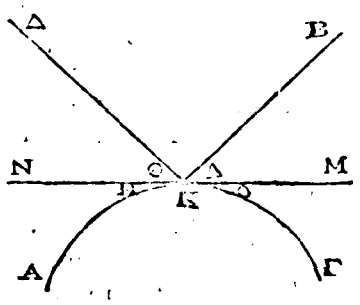
Απὸ τῶν ἐπιπέδων ἐνόπτρων, καὶ κυρτῶν, καὶ κοίλων, αἱ ὄψεις ἐν ἴσαις γωνίαις ἀνακλῶνται.

ΕΣτω ὄμμα τὸ B, ἔνοπτρον ἐπίπεδον τὸ AΓ, ὄψις δὲ ἀπὸ τοῦ ὄμματος φερέσθω ἡ BK, καὶ ἀνακλάσθω ἐπὶ τὸ Δ· φημὶ δὴ τὴν E γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ Z.

ΗΧθωσαν κάθετοι ἐπὶ τὸ ἔνοπτρον αἱ BΓ, ΔA. ἐκεῖν ἐστιν ὡς ἡ BΓ πρὸς ΓK οὕτως ἡ ΔA πρὸς AK, τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ὅροις ὑπέκειτο· ὅμοιον ἄρα τὸ BΓK τρίγωνον τῷ ΔAK τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ E γωνία τῇ Z, τὰ γὰρ ὅμοια ἰσογώνια ἐστιν.

IN CONVEXO SPECULO.

Sit convexum ſpeculum AKΓ, radius autem BK, qui reflectatur ad punctum Δ: dico angulum reflectionis EΘ æqualem eſſe angulo incidentiæ OA. ſi enim applicem planum ſpeculum NM [ita ut tangat ſpeculum convexum in puncto K;] igitur Θ æqualis erit Λ. ſed E æqualis eſt O, tangit enim MN: to-igitur EΘ æqualis eſt toti AO.

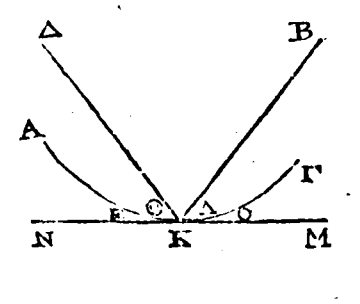


ΕΝ ΤΩ ΚΥΡΤΩ ΕΝΟΠΤΡΩ.

Εστω δὴ κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ AKΓ, ὄψις δὲ ἡ BK, ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ EΘ γωνία τῇ OΛ γωνίᾳ. παρείθηκα ἐπίπεδον ἔνοπτρον τὸ NM· [1] ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Θ γωνία τῇ Λ. [2] ἀλλὰ καὶ ἡ E τῇ O, ἐφάπτεται γὰρ ἡ MN· ὅλη ἄρα ἡ EΘ ὅλῃ τῇ AO ἴση ἐστίν.

IN CONCAVO SPECULO.

Sit rurſus ſpeculum cavum AKΓ, radius autem BK qui reflectatur ad Δ: dico angulum Θ æqualem eſſe angulo Λ. appoſito enim plano ſpeculo MN, æqualis eſt angulus ΘE angulo AO. ſed & angulus E æqualis eſt angulo O: quare reliquus Θ reliquo Λ æqualis erit.



ΕΝ ΤΩ ΚΟΙΛΩ ΕΝΟΠΤΡΩ.

Εστω δὴ πάλιν κοῖλον τὸ AKΓ, ὄψις δὲ ἡ BK ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ Θ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Λ. ὡφθωθέντος γὰρ ἐπιπέδου ἐνόπτρου, ἴση γέγονται ἡ ΘE γωνία τῇ AO. [3] ἴση δὲ καὶ ἡ E τῇ O· λοιπὴ ἄρα ἡ Θ τῇ Λ ἴση ἔσται.

Prop. II. Theor.

Si radius, in qualecunque ſpeculum cadens, æquales faciat angulos; ipſe in ſeipſum reflectetur.

SIT planum ſpeculum AKΓ; oculus autem B, à quo radius procedat BK, æquales angulos

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Πρὸς ὁποῖον ἂν τὶ ἐνόπτρων προσπέσῃ ὄψις [4] ἴσας ποιοῦσα γωνίας, αὐτὴ δι' ἑαυτῆς ἀνακλασθήσεται.

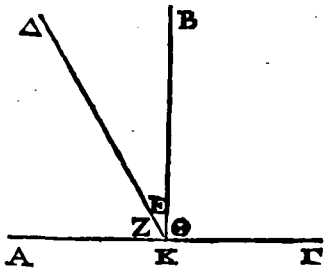
ΕΣτω ἔνοπτρον ἐπίπεδον τὸ AKΓ, ὄμμα δὲ τὸ B, ὄψις δὲ ἡ BK πρὸς αὐτὸ προσπιπτωκέτω, ἴσας

1 Per primam partem hujus. *Serv.* 2 Quia ſemicirculus à K verſus Γ ἰφαπτόμενος ſemicirculo verſus A; & KM ſuper KN, quia anguli ſunt recti: ergo per 8. axioma æquales ſunt E, O. *Idem.* 3 Ut ſupra. *Idem.* 4 In omneis angulos ad punctum προσπτώσεως; alioquin non ſequitur concluſio. *Idem.*

ποιοῦσα

πείσει γωνίας [1] τῷ ΕΖ τῇ Θ· λέγω ὅτι ἀνακλωμένη ἡ ΒΚ ἐφ' ἑαυτὸν ἥξει, τοῦτ' ἔστιν ἐπὶ τὸ Β.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἡκέτω ἐπὶ τὸ Δ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὄψεις ἐν ἴσαις ἀνακλῶνται γωνίαις, ἴση ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Θ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΕΖ γωνία τῇ Θ ἴση· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα γωνία τῇ Ζ γωνίᾳ ἴσαι ἄρα, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἡ ἄρα ΒΚ δι' αὐτῆς ἀνακλασθήσεται.



faciens cum ſpeculo, angulum nempe ΕΖ æqualem angulo Θ: fore aſſero ut radius ΒΚ ſeſe reflectens in ſeipſum redeat, hoc eſt ad Β.

Non enim, ſed reflectatur, ſi poſſit, in punctum Δ. quia igitur [per 1. catoptr.] radii ad æquales angulos reflectuntur, æqualis eſt angulus Ζ angulo Θ. oſtenſus vero eſt angulus ΕΖ æqualis angulo Θ: igitur angulus ΕΖ angulo Ζ æqualis erit, major minori; quod fieri nequit: igitur radius ΒΚ in ſeipſum reflectetur.

Η δ' αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόσειεν ἐπὶ τῶν κυρτῶν καὶ τῶν κοίλων ἐνόπτρων.

Eadem demonſtratio congruet ſpeculis tum convexis tum cavis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Πρὸς ὁποῖον ἂν τῶν ἐνόπτρων προσπίπτουσα ὄψις ἀνίσους ποιῇ γωνίας· οὔτε δι' ἑαυτῆς ἀνακλασθήσεται, οὔτε ἐπὶ τὰ ἐλάσσονος γωνίας.

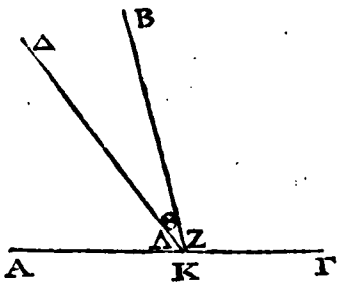
PROP. III. THEOR.

Radius in qualecunque ſpeculum cadens, angulosque inæquales faciens, neque in ſeipſum reflectetur, neque verſus minorem angulum.

Ἔστω ἐπίπεδον ἔνοπτρον τὸ ΑΚΓ, ὄψις δὲ ἡ ΒΚ προσπιπτέτω, μείζονα ποιοῦσα γωνίαν τῇ Ζ τῆς ΘΛ· λέγω ὅτι ἡ ΒΚ ἀνακλωμένη, οὔτε δι' ἑαυτῆς ἀνακλασθήσεται, οὔτε ἐπὶ τὴν ΘΛ γωνίαν.

Εἰ μὲν γὰρ ἥξει ἐπὶ τὸ ΒΚ, ἡ Ζ γωνία τῇ ΘΛ ἴση, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ μείζων.

Εἰ δὲ ἐπὶ τὸ Δ, ἴση ἔσται ἡ Ζ γωνία τῇ Λ, ἔστι δὲ μείζων· ἡ ἄρα ΒΚ ἀνακλασθήσεται ἐπὶ τὴν μείζονα γωνίαν τὴν Ζ. δυνατὸν γὰρ ἐστὶ τὸ μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσον ἀφαιρεθῆναι.



SIT planum ſpeculum ΑΚΓ, radius autem ΒΚ in ſpeculum incidat, faciatque angulum Ζ majorem angulo ΘΛ: fore aſſero ut ΒΚ radius reflectens, neque in ſeipſum reflectatur, neque ad angulum ΘΛ.

Si enim redeat in ſeipſum, in ΒΚ; æqualis erit angulus Ζ angulo ΘΛ, quod eſt abſurdum; poſitus enim eſt major.

Si ΒΚ reflectatur ad Δ, æqualis erit Ζ angulus angulo Λ; eſt autem major: quare radius ΒΚ reflectetur verſus majorem angulum, qui eſt ad Ζ: poterit enim à majore angulo auferri angulus æqualis minori.

Εστι δὲ ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἐπὶ τῶν κυρτῶν καὶ κοίλων.

Eadem demonſtratio valebit in convexis & cavis ſpeculis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

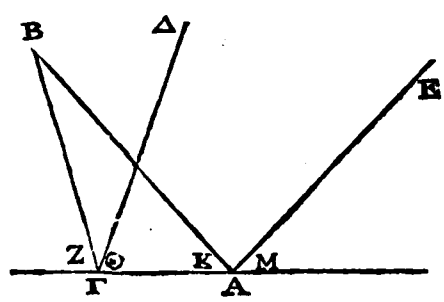
Αἱ ὄψεις ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἐνόπτρων ἢ κυρτῶν ἀνακλώμεναι, οὔτε συμπεσοῦνται ἀλλήλαις [2], οὔτε παράλληλοι ἔσονται.

PROP. IV. THEOR.

Radii à planis convexiſque ſpeculis reflexi neque mutuo concurrent, neque erunt paralleli.

Ἔστω πάλιν ἐπίπεδον ἔνοπτρον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ ΒΓΔ, ΒΑΕ· λέγω ὅτι αἱ ΓΔ, ΑΕ, οὔτε παράλληλοί εἰσιν, οὔτε συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Δ, Ε [3].

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Θ, ἡ δὲ Κ τῇ Μ, μείζων



SIT rurſus planum ſpeculum ΑΓ, oculus autem Β, radii vero reflexi ΒΓΔ, ΒΑΕ: dico duos hos radios reflexos ΓΔ, ΑΕ neque parallelos eſſe, neque productos ad partes Δ, Ε poſſe concurrere.

Quia enim [per 1. catop.] æqualis eſt angulus Ζ angulo Θ, & angulus Κ angulo Μ; ma-

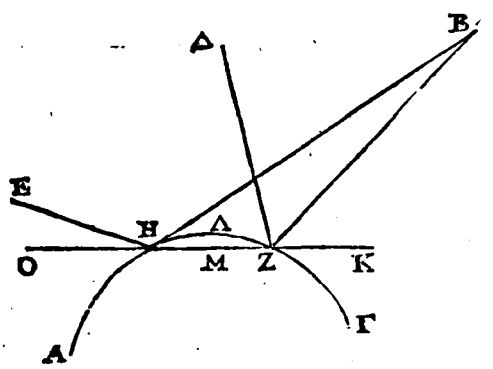
1 Non ſolum ΕΖ, Θ ſed omnes omnino angulos ad Κ oportet eſſe æqualeis; in planis ſc. ſpeculis rectos, in κοίλοις acutos æqualeis; in δὲ κυρτοῖς obtuſos. *Savil.* 2 Sc. ἐπὶ τὰ τὴν ἀνακλάσεως μέρη. *Idem.* 3 Sc. μέρη.

jor autem eſt [per 16.1.] angulus Z angulo K, propterea quod eſt externus angulus in triangulo BAΓ: major igitur eſt angulus Θ angulo M: quare radii reflexi ΓΔ, AE neque paralleli inter ſe ſunt, neque concurrent ad partes E,Δ.

ζων δὲ ἡ Z τῆς K, ἴσῃ τὸ ἐκτὸς ἑνὶ ἐν τῷ BAΓ τριγώνῳ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ Θ τῆς M· οὐκ ἄρα ὡζάλληλός ἡ ΓΔ τῇ AE ἐστιν, ἀλλὰ συμπίπτουσιν ὅπῃ τὰ E,Δ.

IN CONVEXO SPECULO,

Sit rurſus convexum ſpeculum AHZΓ, oculus autem B, radii autem reflexi BZΔ, BHE: dico radios reflexos ZΔ, HE neque parallelos eſſe, nec poſſe concurrere ad partes E,Δ.



Connectatur enim recta HZ, & producatur utrinque. quia igitur angulus BZΓ æqualis eſt angulo ΔZΛ, eo quod [per 1. catop.] radii ad æquales angulos reflectuntur; major igitur eſt angulus ΔZM angulo BZK. & [per 16.1.] angulus BZK major eſt angulo BHM, & angulus BHM major eſt angulo EHA; angulus enim BHA [per 1. catop.] æqualis eſt angulo EHA: major igitur eſt ΔZM angulus angulo EHA. multo igitur major eſt angulus ΔZM angulo EHO: igitur radii ZΔ, HE neque concurrent, neque paralleli erunt.

ΕΝ ΤΩ ΚΥΡΤΩ ΕΝΟΠΤΡΩ.

Ἐστω πάλιν κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ AHZΓ, ὄμμα δὲ τὸ B, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ BZΔ, BHE· λέγω ὅτι αἱ ZΔ, HE, ὅτι ὡζάλληλοί εἰσιν, ὅτι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ E, Δ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ HZ εὐθεῖα, καὶ ἐκβεβλήθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BZΓ τῇ ΔZΛ, ἴσὴ τὸ ἐν ἴσαις ἀνακλᾶσθαι γωνίαις· ἔστιν ἄρα μείζων ἡ ΔZM τῆς BZK. ἡ δὲ BZK τῆς BHM ἐστὶ μείζων, ἡ δὲ BHM τῆς EHA μείζων, αὐτὴ γὰρ ἡ BHA ἴση ἐστὶ τῇ EHA· μείζων ἄρα ἡ ΔZM τῆς EHA. πολλῷ ἄρα ἡ ΔZM τῆς EHO μείζων ἐστίν· οὐκ ἄρα συμπεσοῦνται αἱ ZΔ, HE εὐθεῖαι, οὐδὲ ὡζάλληλοί εἰσιν. 1

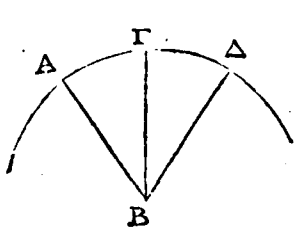
PROP. V. THEOR.

In cavis ſpeculis ſi oculum colloces aut in centro, aut in circumferentia, aut intra circumferentiam, id eſt inter centrum & circumferentiam; radii reflexi concurrent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις ἐὰν ὀπὶ τῆς περιφερείας, ἢ ἐντὸς τῆς περιφερείας ᾖς ὄμμα, τοῦτ' ἔστι μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς περιφερείας· αἱ ὄψεις ἀνακλώμεναι συμπεσοῦνται.

SIT cavum ſpeculum AΓΔ; centrum autem ſphæræ, cujus portio eſt ipſum ſpeculum concavum, ſit B, & ponatur oculus in B; ab eoque ad circumferentiam ducantur radii BA, BΓ, BΔ: æquales igitur ſunt anguli poſiti ad puncta A, Γ, Δ; ſunt enim anguli ſemicirculorum: radii igitur BA, BΓ, BΔ ab oculo ad ſpeculum miſſi in ſeipſos reflectentur; id enim [ad prop. 2 catop.] oſtenſum eſt: quare concurrent in puncto B.



Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ AΓΔ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ B, καὶ κείσθω τὸ ὄμμα ἐπὶ τὸ B, καὶ προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ B ὄψεις πρὸς τὴν περιφέρειαν αἱ BA, BΓ, BΔ· ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς σημείοις τοῖς A, Γ, Δ γωνίαι· ἡμικυκλίων γάρ εἰσιν· αἱ ἄρα ὄψεις ἀνακλώμεναι δι' ἑαυτῶν ἀνακλασθήσονται αἱ BA, BΓ, BΔ, τοῦτο γὰρ δέδεικται· ὥστε συμπεσοῦνται κατὰ τὸ B.

OCULUS IN CIRCUMFERENTIA.

Sit cavum ſpeculum AΓΘB, oculus autem ſit B, colloceturque in ipſius ſpeculi circumferentia, & ab oculo B profiliant radii BΓ, BA, qui reflectantur ad puncta Δ, E. quia ſegmentum AΓB,

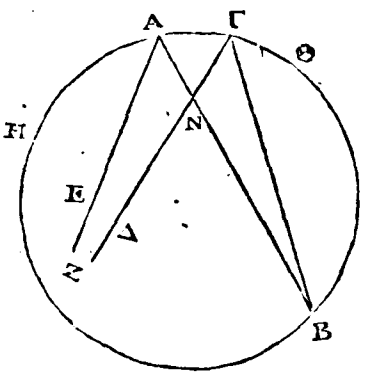
ΟΜΜΑ ΕΝ ΤΗ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ.

Ἐστω πάλιν κοῖλον ἔνοπτρον τὸ AΓΘB, ὄμμα δὲ τὸ B, κείσθω δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ, καὶ ἀπὸ τοῦ B προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ BΓ, BA ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Δ, E σημεῖα. 2 ἐπεὶ μείζων

1 Hæc verba puto eſſe delenda, ut etiam illa quæ ſunt in fine demonſtrationis. *Savil.* 2 Demonſtratio hujus theorematis, ut vere dicam, nihil habet ſolidi; & ſequentis theorematis multo minus. ſed hic quidem ὡσχωρεῖ aliquo more, nempe ſi BΘΓ major ſit quam AΓ, totaque BΘAΓ non major ſemicirculo. *Idem.*

τὸ

τὸ ΑΓΒ τμῆμα τοῦ ΒΘΓ τμήματος, μείζων ἡ ΒΑΓ γωνία τῆς ΒΓΘ γωνίας, καὶ ἡ ΕΑΗ (λέγω τὸ πρῶτον) ἄρα τῆς ΔΓΑ μείζων· αἱ ἄρα ΒΑΓ, ΕΑΗ τῶν ΒΓΘ, ΔΓΑ μείζους εἰσί· [1] λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΑΕ τῆς ΔΓΒ ἐλάττων, πολλῷ μᾶλλον ἄρα τῆς ΔΝΒ· συμπεσοῦνται ἄρα αἱ ΓΔ, ΑΕ κατὰ τὸ Ζ. [2] ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἐκτὸς τῆς περιφερείας πίπτῃ τὸ ὄμμα, ὡς ἐπὶ ἧς ἐξῆς θεωρήματος.



majus est segmento ΒΘΓ: major igitur est ΒΑΓ angulus angulo ΒΓΘ: quare angulus ΕΑΗ (per 1. catop.) major est angulo ΔΓΑ. duo igitur anguli ΒΑΓ, ΕΑΗ majores sunt duobus angulis ΒΓΘ, ΔΓΑ: quare reliquus angulus ΒΑΕ reliquo angulo ΔΓΒ minor est; ac multo etiam minor ipso ΔΝΒ: igitur radii reflexi ΓΔ, ΑΕ concurrent ad partes Ζ. idem ostendetur oculo posito extra circumferentiam, ut in sequenti theoremate.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

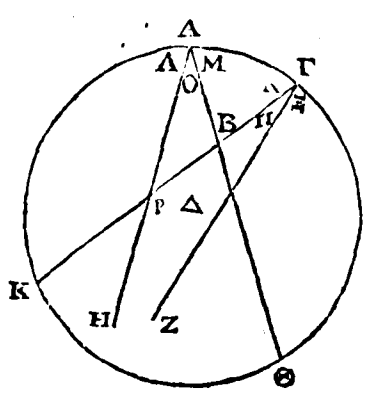
Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνδέχεσθαι, ἐὰν ἀνὰ μέσον τοῦ κέντρου καὶ τῆς περιφερείας ᾖ τὸ ὄμμα· [3] ὅτε μὲν συμπεσοῦνται αἱ ὄψεις ἀνακλώμεναι, ὅτε δὲ οὐ συμπεσοῦνται.

[4] Ἔστω ἔνοπτρον κοῖλον τὸ ΑΓ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Δ, ὄμμα δὲ κείσθω τὸ Β μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς περιφερείας, ὄψεις δὲ αἱ ΒΑ, ΒΓ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Η, Ζ, ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ὄψεις ἕως τοῦ ἐσόπτρου αἱ ΑΘ, ΓΚ. ἡ ΑΘ δὴ τῇ ΓΚ ἢ μείζων ἐστίν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ ὄψις τῇ ΓΚ ὄψει, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΓΘ περιφέρεια τῇ ΓΑΚ περιφερείᾳ· ὥστε καὶ ἡ Μ γωνία τῇ Ξ· αἱ γὰρ τῶν ἴσων περιφερειῶν γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· καὶ αἱ Μ, Λ γωνίαι ἄρα τῇσι Ν, Ξ εἰσιν ἴσαι, διὰ τὴν ἀνάκλασιν· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ Ο τῇ Π ἴση ἐστί· μείζων ἄρα ἡ Ρ τῆς Ο. ἐπεὶ γὰρ ἡ Ρ γωνία τῆς Π γωνίας μείζων ἐστί, διὰ τὸ ἐκτὸς εἶναι, ἡ δὲ Π τῇ Ο ἴση· καὶ ἡ Ρ ἄρα τῆς Ο μείζων ἐστί. [5] κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΡΣ· συμπεσοῦνται ἄρα αἱ ΓΖ, ΑΗ ὡς ἐπὶ τὰ Η, Ζ. Τὸ δ' αὐτὸ ἕξει, κἂν μείζων ἡ ΑΘ ὄψις τῆς ΓΚ. μείζονες γὰρ ἔσονται αἱ Λ, Μ γωνίαι τῶν Ν, Ξ, ἡ δὲ Π τῆς Ο μείζων ἔσται, καὶ ἡ Ρ τῆς Ο· ἐὰν δὲ ἡ ΑΘ εὐθεῖα ἐλάσσων ᾖ τῆς ΓΚ, διὰ τὰ αὐτὰ μείζων ἔσται ἡ Ο γωνία τῆς Π. ἔστι δὲ καὶ ἡ Ρ τῆς Π μείζων· οὐδὲν ἄρα κωλύει ἴσην εἶναι τὴν Ρ τῇ Ο, ἢ ἐλάσσονα τῆς Ο, καὶ μὴ συμπίπτειν τῇ ΓΖ τὴν ΑΗ. [6] Φανερὸν δὲ ὅτι

Prop. VI. Theor.

In cavis speculis si inter centrum & circumferentiam colloces oculum; radii reflexi interdum concurrent, interdum non concurrent.

SIT cavum speculum ΑΓ, cujus centrum Δ; oculus autem ponatur in puncto Β inter centrum & circumferentiam; radii vero sint ΒΑ, ΒΓ, qui reflectantur ad puncta Η, Ζ; ipsi autem radii ad speculum usque protrahantur, qui sint ΑΘ, ΓΚ. radius ΑΘ aut major est, aut æqualis, aut minor radio ΓΚ. Si igitur radius ΑΘ æqualis sit radio ΓΚ, æqualis etiam est [per 28.3.] circumferentia ΑΓΘ ipsi ΓΑΚ: quare angulus Μ æqualis erit angulo Ξ; æqualium enim segmentorum anguli sunt inter se æquales. duo item anguli Μ, Λ æquales erunt duobus angulis Ν, Ξ propter æqualitatem angulorum reflectionis & incidentiæ: quocirca reliquus angulus Ο æqualis erit reliquo augulo Π: igitur Ρ angulus major erit angulo Ο. quia enim angulus Ρ major est angulo Π (est enim Ρ exterior angulus in triangulo ΒΓΡ) angulus autem Π æqualis est angulo Ο: igitur angulus Ρ major erit angulo Ο. addatur communis angulus ΒΡΖ: concurrent igitur radii reflexi ΓΖ, ΑΗ versus partes Η, Ζ. Idemque eveniet, si radius ΑΘ major sit radio ΓΚ. duo enim anguli Λ, Μ majores erunt duobus angulis Ν, Ξ: ideoque major erit angulus Π angulo Ο, & angulus Ρ eodem angulo Ο. Quod si radius ΑΘ minor sit radio ΓΚ, eadem ratione major erit Ο angulus angulo Π. est autem angulus Ρ major angulo Π: nihil ergo prohibet quin angulus Ρ æqualis esse possit angulo Ο, vel eo minor, quod si fiat, radii ΓΖ, ΑΗ non concurrent. sive au-



1 Nam tres anguli ad Γ & Λ duobus ἡμικυκλίου angulis sunt æquales. *Savil.* 2 Sunt, ὡς ἴσωται, ex *Scholio*. *Idem.* 3 Hoc quidem vere, sed demonstratio est pessima. *Idem.* 4 Nihil est solidi. cur enim concurrant si ΑΘ sit μείζων; non item si ΓΚ, cum utraque sit accepta ὡς ἔτυχε. *Idem.* 5 Sed tamen collecta est conclusio ac si ΖΡΘ major esset angulo Π quia externus, quo quid ineptius? nam ita demum non concurrunt ΑΗ, ΒΖ. *Idem.* 6 Jam φανερὸν nullo modo φανερὸν, nisi quod est φανερῶς falsum, etiamsi præcedentia non essent ἀσυλλόγιστα. *Idem.*

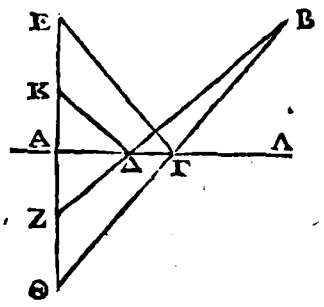
tem

tem ΑΓΘ circumferentia major ſit quam circumferentia ΓΑΚ, ſive ei æqualis; patet concurſum radiorum reflexorum fieri neque in circumferentia, neque extra, ſed intra tantum.

PROP. VII. THEOR.

Altitudines & profunditates in planis ſpeculis everſæ apparent.

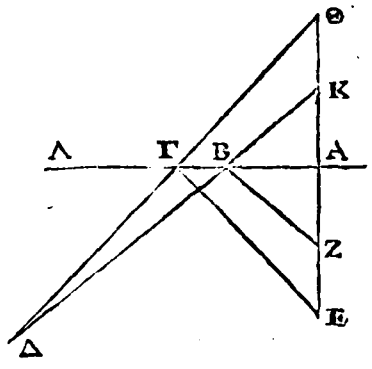
SIT altitudo ΑΒ, planum autem ſpeculum ΑΛ, oculus vero Β, à quo miſſi radii ΒΓ, ΒΔ reflectantur ad Ε, Κ. ſi igitur radii ΒΔ, ΒΓ in rectum producantur; Ε quidem, quod ſurſum eſt, deorſum apparebit in Θ; item Κ, quod deorſum eſt, apparebit ſurſum in Ζ: quare everſa apparebunt.



ALITER.

Quomodo profunditas apparet.

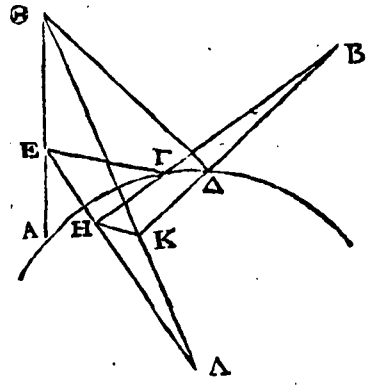
Sit rurſum profunditas ΕΑ, planumque ſpeculum ΑΓ, oculus autem Δ, radii denique ab oculo exeuntes ΔΓ, ΔΒ, qui reflectantur ad Ε, Ζ. ſimiliter atque prius, productis radiis uſque ad puncta Θ, Κ; punctum quidem Ε, quod imum eſt, ſupremum apparebit in puncto Θ; punctum autem Ζ, quod ſupremum eſt, imum apparebit in Κ.



PROP. VIII. THEOR.

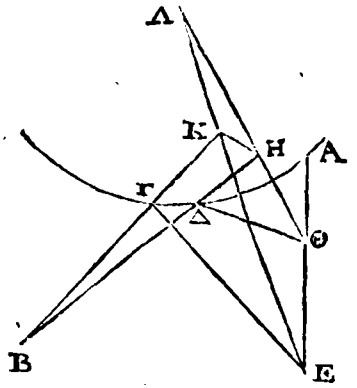
Altitudines & profunditates in convexis ſpeculis everſæ apparent.

SIT altitudo ΑΘ, ſpeculumque convexum ΑΓΔ, radii autem ΒΓ, ΒΔ, qui reflectantur ad Ε & Θ. oſtenſum antea eſt [per 4. opt.] radios reflexos ΓΕ, ΔΘ non poſſe concurrere verſus partes Ε, Θ. reliqua ut in planis ſpeculis.



PROFUNDITAS.

Sit rurſus profunditas ΑΕ, convexum autem ſpeculum ſit ΑΔΓ, ſitque oculus Β; radii autem reflexi ad puncta Ε, Θ, ſint ΕΓ, ΒΔΘ. reliqua ut in planis ſpeculis.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Τὰ ὕψη καὶ τὰ βάθη ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἑνόπτρων ἀνεστραμμένα φαίνεται.

ΕΣτω ὕψος μὲν τὸ ΑΕ, ἔνοπτρον δὲ ἐπίπεδον τὸ ΑΛ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Κ. ὥστε φαίνεται ἐκβληθεισῶν τῶν ὄψεων ἐπ' εὐθείας, τὸ μὲν Ε τὸ ἄνω ἐπὶ τοῦ Θ κάτω ὄντος, τὸ δὲ Κ κάτω ὂν ἐπὶ τοῦ Ζ τοῦ ἄνω ὄντος· ὥστε ἀνεστραμμένα ἐστὶ τῇ φαντασίᾳ.

ΑΛΑΩΣ.

Ὡς βάθος φαίνεται.

Ἐστω πάλιν βάθος μὲν τὸ ΕΑ, ἔνοπτρον δὲ ἐπίπεδον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Δ, ὄψις δὲ αἱ ΔΓ, ΔΒ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Ζ. ὁμοίως τῶν ὄψεων ἐκβληθεισῶν ἐπὶ τὰ Θ, Κ φανήσεται τὸ μὲν Ε κάτω ὂν ἐπὶ τοῦ Θ ἄνω ὄντος, τὸ δὲ Ζ ἄνω ὂν ἐπὶ τοῦ Κ κάτω ὄντος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Τὰ ὕψη καὶ τὰ βάθη ἀπὸ τῶν κυρτῶν ἑνόπτρων ἀνεστραμμένα φαίνεται.

ΕΣτω ὕψος τὸ ΑΘ, ἔνοπτρον δὲ κυρτὸν τὸ ΑΓΔ, ὄψεις δὲ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Θ. δέδεικται ὅτι ἃ συμπίπτουσι. τὰ δὲ λοιπὰ ὁμοίως τοῖς ἐπιπέδοις.

ΒΑΘΟΣ.

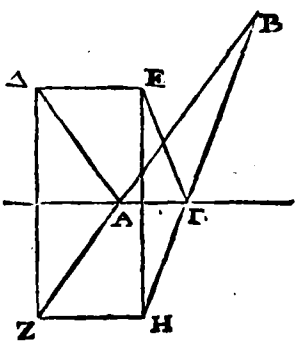
Ἐστω πάλιν βάθος τὸ ΑΕ, ἔνοπτρον δὲ κυρτὸν ΑΔΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β· ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Θ, ΒΓΕ, ΒΔΘ. τὰ δὲ λοιπὰ καθάπερ ἐπὶ τοῖς ἐπιπέδοις.

1 Theorema hoc & quinque ſequentia pendent manifeſtiſſime ex 16, 17 & 18 ſequentibus; neque niſi iis, aut demonſtratis, aut ſumptis, conſtare poſſunt. *Savil.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὰ πλάγια μήκη ἐπὶ τῶν ὀπτέδων ἐνόπτρων, ὡς τῇ ἀληθείᾳ ἔχει οὕτω καὶ φαίνεται.

ΕΣτω ὄμμα τὸ Β, πλάγιον δὲ μῆκος τὸ ΔΕ, ἔνοπτρον δὲ τὸ ΑΓ· ὀκτὼ ἀνακλασθεισῶν τῶν ὄψεων φαίνεται τὸ μὲν Δ ἐπὶ τὸ Ζ, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Η, καὶ ἔστιν οὕτω τῇ φαντασίᾳ, καθάπερ καὶ τῇ ἀληθείᾳ ἔχει· τὸ ἔγγιον, ἔγγιον, τὸ ἀπώτερον, ἀπώτερον.



PROP. IX. THEOR.

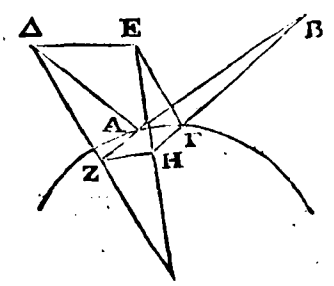
Obliquæ longitudines in planis ſpeculis, ut re ipſa ſe habent ita apparent.

SIT oculus Β; longitudo vero oblique poſita ſit Δ Ε, planum autem ſpeculum Α Γ: igitur per radios reflexos cernitur punctum quidem Δ in puncto Ζ, punctum vero Ε in puncto Η, apparentque in eodem ſitu, in quo re vera ſunt; id nempe quod propius eſt, propius apparet; quod autem remotius, remotius.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Τὰ πλάγια μήκη ἐπὶ τῶν κυρτῶν ἐνόπτρων, καθάπερ ἐστὶν ἀληθῶς καὶ φαίνεται.

ΕΣτω μῆκος τὸ ΕΔ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ἔνοπτρον δὲ κυρτὸν τὸ ΑΓ, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Δ. τὰ δὲ ἄλλα, τὰ αὐτά.



PROP. X. THEOR.

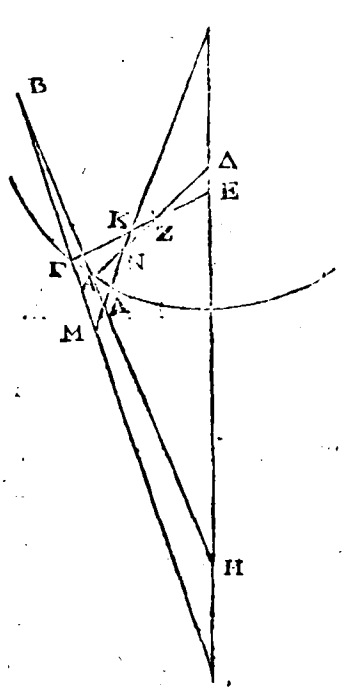
Obliquæ longitudines in convexis ſpeculis, in eodem ſitu apparent in quo revera ſunt.

SIT obliqua longitudo ΕΔ, oculus autem Β, ſitque convexum ſpeculum Α Γ, radii autem Β Γ, Β Α reflectantur ad puncta Ε, Δ. reliqua ut in præcedenti.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τὰ ὕψη καὶ τὰ βάθη ἐπὶ τῶν κοίλων ἐνόπτρων, ὅσα μέν ἐστιν ἐντὸς τῆς συμπτώσεως τῶν ὄψεων, ἀνεστραμμένα φαίνεται, καθάπερ καὶ τοῖς ἐπιπέδοις καὶ κυρτοῖς ἐνόπτροις· ὅσα δὲ ἐστὶν ἐκτὸς τῆς συμπτώσεως, καθάπερ ἐστὶν καὶ φαίνεται.

ΕΣτω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ ΒΑ, ΒΓ, σύμπτωσις δὲ αὐτῶν ἐπὶ τὸ Ζ, ὕψη δὲ τὰ τε ΚΝ καὶ τὸ ΔΕ· καὶ τὸ μὲν ΚΝ ἐντὸς τῆς τοῦ Ζ συμπτώσεως, τὸ δὲ ΔΕ ἐκτὸς τῆς συμπτώσεως. ὀκτὼ ἀνακλασθεισῶν, καθάπερ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις καὶ κυρτοῖς ἐνόπτροις, φαίνεται τὸ μὲν Κ ἐπὶ τὸ Μ, τὸ δὲ Ν ἐπὶ τὸ Α· ὥστε ἀνεστραμμένα φαίνεται. πάλιν ἐπὶ τὸ ἐκτὸς τῆς συμπτώσεως ὕψος φαίνεται· τὸ μὲν Δ ἐπὶ τὸ Η, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Θ, ὡς ἔχει οὕτως φαίνεται.



PROP. XI. THEOR.

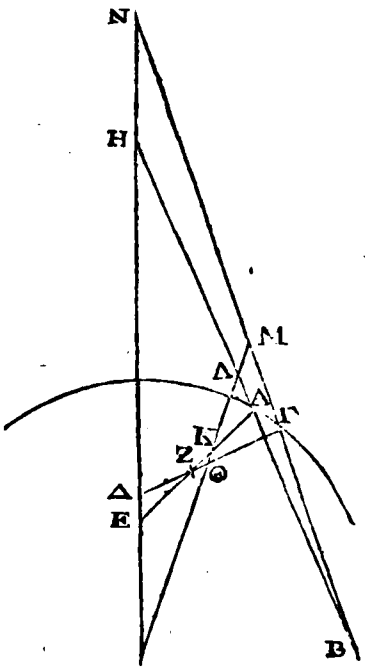
In cavis ſpeculis ſublimitates & profunditates, quæ ſunt intra concurſum radiorum, everſæ apparent, ut in planis ſpeculis; quæ autem ſunt extra concurſum, apparent ut re ipſa ſe habent.

SIT cavum ſpeculum Α Γ, oculus autem Β; radii vero reflexi Β Α, Β Γ, qui concurrant in puncto Ζ, ſint autem ſublimitates duæ Κ Ν, Δ Ε; quarum Κ Ν quidem ſit intra concurſum Ζ, ſublimitas autem Δ Ε ſit extrà concurſum. productis igitur radiis, quemadmodum in planis & convexis ſpeculis, apparet punctum quidem Κ in puncto Μ, punctum autem Ν in puncto Α: everſa igitur apparent. contra vero fit in Δ Ε ſublimitate, quæ eſt extra concurſum; apparet enim punctum Δ in puncto Η, punctum vero Ε in puncto Θ, eo nimirum modo quo ſe habent.

PRO-

PROFUNDITAS.

Sint rurſus profunditates duæ Δ E, K Θ, cavum autem ſpeculum A Γ, oculus vero B; radii denique reflexi B Γ Δ, B A E, qui concurrant in puncto Z. ſi igitur radii producantur, apparebunt puncta K, Θ everſa, punctum quidem K in puncto A, punctum vero Θ in puncto M, quemadmodum in planis & convexis ſpeculis. contra vero puncta Δ, E apparebunt eo modo quo ſe habent: punctum quidem inferius E, in puncto H; punctum autem ſuperius Δ, in puncto N.



ΒΑΘΟΣ.

Πάλιν βάθος μὲν τὸ Δ Ε καὶ Κ Θ, ἔσοπτρον δὲ κοῖλον τὸ Α Γ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Ζ αἱ Β Γ Δ, Β Α Ε. ἐπεὶ οὖν ἐκβληθεισῶν τῶν ὄψεων, ὁμοίως τὰ μὲν Κ, Θ φαίνεται ἀνεστραμμένα, τὸ μὲν Κ κατὰ τὸ Λ, τὸ δὲ Θ κατὰ τὸ Μ, καθάπερ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις καὶ κυρτοῖς ἐνόπτροις· τὰ δὲ Δ, Ε, καθάπερ ἐστὶ τὸ μὲν Ε κάτω κατὰ τὸ Η, τὸ δὲ Δ ἄνω κατὰ τὸ Ν.

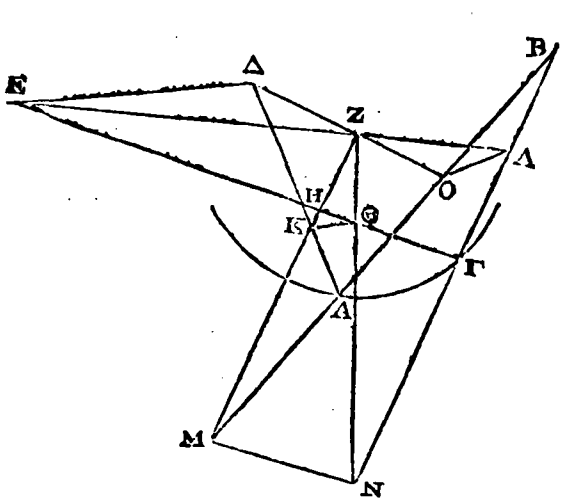
PROP. XII. THEOR.

In cavis ſpeculis obliquæ longitudines, intra concurſum radiorum poſitæ, apparent ut ſunt; quæ autem extra concurſum ſunt, everſæ apparent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϚ'.

Τὰ πλάγια μήκη ἐπὶ τῶν κοίλων ἐνόπτρων, ὅσα μὲν ἐντὸς τῆς συμπτώσεως κεῖται τῶν ὄψεων, καθάπερ ἐστὶν, οὕτω καὶ φαίνεται· ὅσα δὲ ἐκτὸς, ἀνεστραμμένα.

SInt obliquæ longitudines Β Δ, Θ Κ, cavum autem ſpeculum Α Γ, oculus vero Β; ſintque radii reflexi Β Α Δ, Β Γ Ε, qui concurrant in puncto Η, & obliqua quidem longitudo Θ Κ ſit intra concurſum Η; Δ Ε vero ſit extra eundem. puncta igitur Θ, Κ in ſuo naturali ſitu cernuntur, quemadmodum in planis & convexis ſpeculis; puncta vero Ε, Δ everſa apparent; punctum enim Δ apparet in puncto Ο, punctum autem Ε in puncto Λ.



Ἔστω γὰρ μήκη μὲν πλάγια τὰ Ε Δ, Θ Κ, κοῖλον δὲ ἔσοπτρον τὸ Α Γ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Η, αἱ Β Α Δ, Β Γ Ε, καὶ τὸ μὲν Θ Κ πλάγιον μῆκος ἔστω ἐντὸς τῆς συμπτώσεως τῆς Η, τὸ δὲ Δ Ε ἐκτός. ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν Θ, Κ κατὰ φύσιν φαίνεται, καθάπερ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις καὶ κυρτοῖς ἐνόπτροις, τὰ δὲ Ε, Δ ἀνεστραμμένα· τὸ μὲν γὰρ Δ ἐπὶ τοῦ Ο φαίνεται, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τοῦ Λ.

PROP. XIII. THEOR.

Res eadem cerni poteſt per plura ſpecula plana.

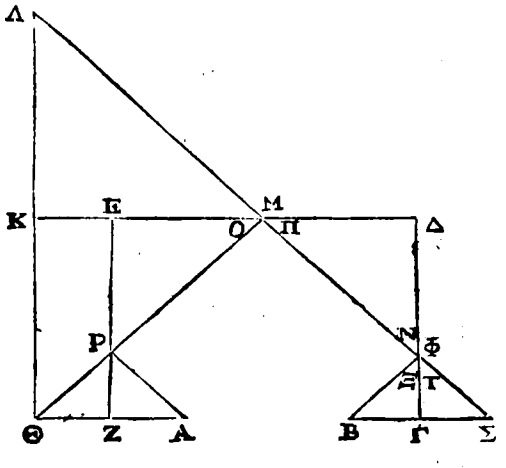
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Δυνατόν ἐστι διὰ πλειόνων ἐνόπτρων ἐπιπέδων ἰδεῖν τὸ αὐτό.

SIT aſpectabile Α, oculus vero Β, ſint autem tria ſpecula Γ Δ, Δ Ε, Ε Ζ; ducatur perpendicularis à puncto Β in Γ Δ ſpeculum, quæ ſit Β Γ, & ipſi Β Γ ponatur æqualis Γ Σ; rurſuſque à pun-

Ἔστω ὁ δεῖ ὀφθῆναι τὸ Α, ὄμμα δὲ τὸ Β, ἔσοπτρα δὲ τρία τὰ Γ Δ, Δ Ε, Ε Ζ, ἤχθω δὲ κάθετος ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Γ Δ ἔσοπτρον ἡ Β Γ, ἴση δὲ ἡ Β Γ τῇ Γ Σ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ

Α ἐπὶ τὸ ΕΖ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ ΔΕ ἐνόπτρου κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ, καὶ ἔστω τῇ ΘΚ ἴση ἡ ΚΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Σ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΜΣ, διὰ δὲ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ Θ ἡ ΜΡΘ, ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΑΡ, ΒΦ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΣ, καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τὸ Γ γωνίαι· δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΦ τῶν ΣΓ, ΓΦ ἴσην ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΦ ὀρθὴ ἴση γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΣΓΦ ὀρθῇ ἴση ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν πρὸς τὸ Β γωνία τῇ πρὸς τὸ Σ, ἡ δὲ Ξ τῇ Τ. ἀλλ' ἡ Τ τῇ Ν ἐστιν ἴση, καὶ ἡ Ν ἄρα γωνία τῇ Ξ· ἡ ἄρα ΒΞ ὄψις ἀνακλασθήσεται ἐπὶ τὸ Μ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΚΛ, καὶ ὀρθὴ δὲ αἱ πρὸς τὸ Κ· ἴση ἐστὶν ἡ Ο γωνία τῇ Π· ἀνακλᾶται ἄρα ἡ αὐτῇ ὄψις ἡ ΒΦΜ ἐπὶ τὸ Ρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τὸ Α, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΖΡΑ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΡΜ, ὁμοίως τοῖς λοιποῖς δοπεδείξομεν· ἑρᾷ ἄρα ἡ δοθεῖσα ὄψις τοῦ Β ὄμματος ὄψις τὸ Α διὰ τῶν τριῶν ἐνόπτρων ἐπιπέδων τῶν ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ.



cto A ad ſpeculum EZ ducatur perpendicularis AZ, cui æqualis ſit ZΘ; & à puncto Θ ducatur ΘK perpendicularis ad ſpeculum ΔE; ſitque KΛ æqualis ipſi ΘK, & connectatur à puncto A in punctum Σ recta linea AMΣ; & à puncto M in punctum Θ recta linea MPΘ; connectantur denique rectæ AP, BΦ. quia igitur recta BΓ æqualis eſt rectæ ΓΣ, recti autem ſunt anguli ad punctum Γ poſiti; duæ igitur BΓ, ΓΦ duabus ΣΓ, ΓΦ ſunt æquales, utraque utrique; rectus item angulus BΓΦ æqualis eſt recto ΣΓΦ; & igitur [per 4. 1.] reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera ſubtendunt; angulus nempe B angulo Σ, & angulus Ξ angulo T. ſed [per 15. 1.] angulus T æqualis eſt N, ſunt enim ad verticem: angulus igitur N æqualis eſt Ξ, quo fit [per 1. catop.] ut radius BΞ reflectatur verſus M. rurſus, quia æqualis eſt recta ΘK rectæ KΛ, recti vero ſunt anguli ad K; æqualis ergo eſt angulus O angulo Π: idem igitur radius BΦM reflectitur ad punctum P. eademque ratione idem radius reflectitur à puncto P ad punctum A, eo quod angulus ZPA æqualis eſt angulo EPM, quod ut in reliquis oſtendi poteſt: radius igitur emiſſus ex B oculo videt punctum A per tria plana ſpecula ΓΔ, ΔE, EZ.

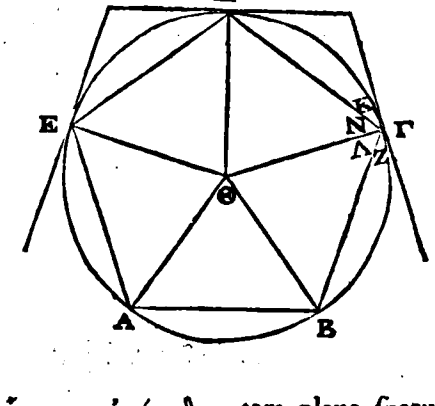
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἔστι δὲ καὶ δι' ἴσων ἂν τις ὀπτάξῃ ἐνόπτρων ἐπιπέδων, ἰδεῖν τὸ αὐτό· δεῖ δὲ κατὰ τὸ ἀριθμὸν τῶν ἐνόπτρων πολυγώνιον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συνίστασθαι, δυσὶ πλείοσιν ἔχον πλευρὰς τῶν ἐνόπτρων.

PROP. XIV. THEOR.

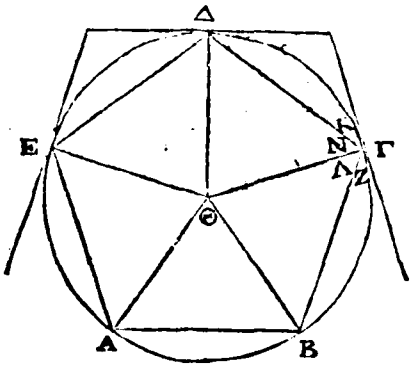
Fieri poteſt ut eadem res ſpectetur per quotlibet plana ſpecula: oportet autem deſcribere polygonum æquilaterum & æquiangulum, quod duobus lateribus excedat numerum ſpeculorum.

Ἔστω γὰρ ὁ μὲν ὀφθήσεται δεῖ τὸ Α, ὄμμα δὲ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τῆς ΑΒ ἀναγεγράφθω πολυγώνιον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον δύο πλευρὰς πλείους ἔχον τῶν ἐνόπτρων, καὶ ἔστω τὸ ΑΒΔ πολυγώνιον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καθ' ὃν γραφομένου περὶ τὸ πολύγωνον τὸ Θ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΓ, ΘΕ, ΘΔ, ΘΒ, ΘΑ ἐπὶ τὰς γωνίας, καὶ προσκείσθωσαν ἔνοπτρα ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς τοῖς ἐπιζευγνυμέναις. ἐπεὶ οὖν ἴση



SIT aſpectabile A, oculus vero B; connectaturque recta AB, & ab AB deſcribatur polygonia figura æquilatera & æquiangula, cui ſint duo latera plura quam ſpecula, ſitque ea figura polygonia ABΔ; ſumaturque centrum circuli deſcripti circa ipſam, ſitque illud Θ, ex quo connectantur rectæ ΘΓ, ΘE, ΘΔ, ΘB, ΘA à centro ad ſingulos angulos; apponantur autem plana ſpecula eo modo ut angulos rectos faciant cum lineis à centro ductis. quia igi-

tur Z A angulus æqualis eſt angulo K N, uterque enim rectus eſt; ex quibus angulus N angulo A eſt æqualis: reliquus igitur Z reliquo K eſt æqualis: quare reflectio radii B Γ fiet in Δ; reflectiones enim [per 1. catop.] fiunt ad æquales angulos. eodem modo oſtendentur anguli ad Δ, E puncta inter ſe æquales: quare radius emiſſus à B, poſtquam in ſingula ſpecula inciderit, inde ſeſe reflectens perveniet ad punctum A.

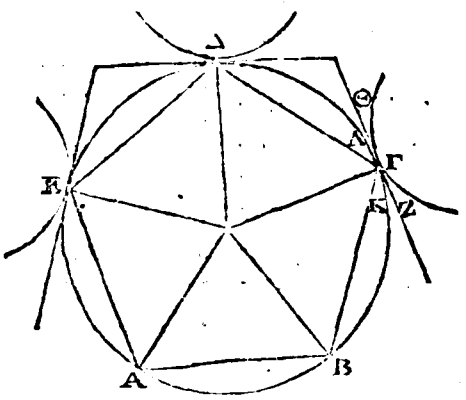


ἐστὶν ἡ Z Λ γωνία τῇ KN, ἐρθὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα, ὧν ἡ N τῇ Λ ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ Z τῇ K ἴση ἐστί· ὥστε ἡ ἀνάκλασις τῆς BΓ ὄψεως ἐπὶ τὸ Δ ἥξει, διὰ γὰρ ἴσων γωνιῶν αἱ ἀνακλάσεις γίνονται. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ἐπὶ τοῖς Δ, E σημείοις γωνίαι ἴσαι αἱ ἐπὶ τοῖς ἐνόπτροις· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ B ὄψις ἀνακλωμένη, κατ' ἐπαφὴν πρὸς πάντα τὰ ἔνοπτρα, ἥξει ἐπὶ τὸ A.

PROP. XV. THEOR.

Fieri etiam poteſt ut eadem res ſpectetur per quotlibet ſpecula convexa vel concava.

SIT aſpectabile A, oculus autem B, deſcribaturque, velut in præcedente, polygonia figura æquilatera & æquiangula A B Γ Δ E, & in punctis Γ, Δ, E ponantur ſpecula ad incidentias radiorum. æqualis ergo eſt angulus Z angulo Θ, & angulus K angulo Λ: totus ergo angulus K Z toti angulo Θ Λ eſt æqualis: radius ergo B Γ reflectetur à convexo ſpeculo Γ ad convexum ſpeculum Δ, & à Δ ad E, & ab E ad A aſpectabile. unde liquet fieri poſſe ut res eadem cernatur per quotlibet ſpecula; ſive convexa, ſive cava, ſive miſta.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

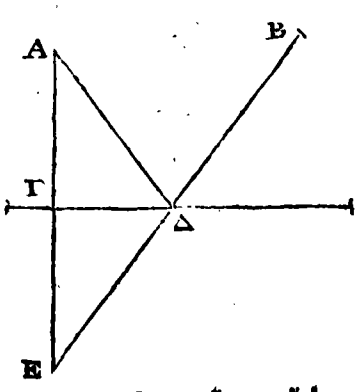
Ἐστι δὲ καὶ διὰ κυρτῶν ἐνόπτρων καὶ διὰ κοίλων ἰδεῖν τὸ αὐτό.

Ἔστω γὰρ ὁ δεῖ ἰδεῖν τὸ A, ὄμμα δὲ τὸ B, καὶ ὁμοίως ἀναγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ABΓΔE, καὶ πρὸς τοῖς Γ, Δ, E σημείοις ἔστω ἔνοπτρα κατὰ τὰς ἁφὰς τῶν ὄψεων. ὅτι μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Z τῇ Θ, ἡ δὲ K τῇ Λ· ὅλη ἄρα ἡ KZ ἴση ἐστὶ τῇ ΘΛ· ἀνακλασθήσεται ἄρα ἡ ὄψις ἀπὸ τοῦ κυρτοῦ ἐνόπτρου τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ E, καὶ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ A. φανερὸν δή, ὅτι κυρτῶν ἢ κοίλων ὄντων ἁπάντων καὶ ἀναμὶξ μιγέντων, ἐστὶν ἰδεῖν τὸ αὐτό.

PROP. XVI. THEOR.

Aſpectabile quodlibet in planis ſpeculis cernitur in perpendiculari ducta ab aſpectabili in ſpeculum.

SIT ſpeculum planum Γ Δ, oculus autem B, ſitque aſpectabile A, & ab aſpectabili in ipſum ſpeculum ducatur perpendicularis A Γ. quia igitur in phænomenis poſitum eſt, punctum A cerni non poſſe occupato loco in quo eſt Γ: igitur punctum A videbitur in aliquo puncto lineæ A Γ productæ in directum. videbitur autem in radio B Δ in directum producto: videbitur ergo in puncto E: eſt enim poſitum, rectum id eſſe cujus extremis media officiunt: quare A E, B E rectæ ſunt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

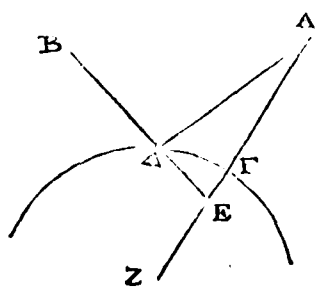
Ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις ἕκαστον τῶν ὁρωμένων κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου κάθετον ὁρᾶται.

Ἔστω ἔνοπτρον ἐπίπεδον τὸ Γ Δ, ὄμμα δὲ τὸ B, ὁρώμενον δὲ τὸ A, καὶ ἔστω κάθετος ἡ ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου ἐπὶ τὸ ἔνοπτρον ἡ A Γ. ὅτι μὲν οὖν ἐπὶ τοῦ ὑπάρχοντος ἐν τοῖς φαινομένοις, ὅτι καταλαμβανόντος τοῦ τόπου τοῦ Γ, οὐχ ὁρᾶται τὸ A· τὸ A ἄρα ὀφθήσεται ἐπ' εὐθείας τῇ A Γ. ἀλλὰ δὴ καὶ ἐπ' εὐθείας τῇ B Δ ὄψει· κατὰ τὸ E ἄρα· ὑπάρχειν γὰρ ἀνάγκη τι εὐθὺ ὃ τὸ μέσον τοῖς ἄκροις ἀποτιθέν· ὥστε εὐθεῖαι ἔσονται ἡ A E καὶ ἡ B E.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Εν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις ἔχασι τῶν ὁρωμένων κατὰ τινὰ ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀγομένην εὐθεῖαν ὁρᾷ.

Ἔστω κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ ΓΔ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψις ἡ ΒΔ ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Α, καὶ ὁρᾷτω τὸ Α, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ, καὶ ἐκβεβλήθω ἡ ΒΔ ὄψις ἐπὶ τὸ Ε. ὅτι μὲν οὖν ἐπεὶ ὑπέκειτο ἐν τοῖς φαινομένοις, ὅτι, καταλειφθέντος τοῦ Γ, τὸ Α οὐχ ὁρᾶται· ὀφθήσεται ἄρα ἐπ' εὐθείας τῆς ΑΓ κατὰ τὴν συμβολὴν τῆς ΒΔ ὄψεως καὶ τῆς ΑΓ ἐπὶ τοῦ Ε, καθάπερ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων.



Prop. XVII. Theor.

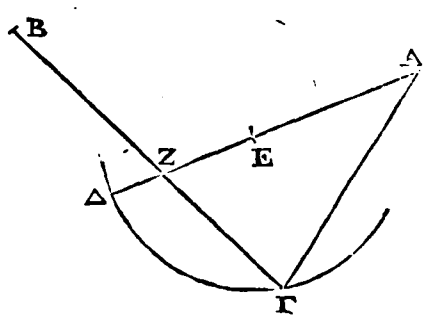
In convexis ſpeculis quodlibet aſpectabilium cernitur in linea recta ducta ab aſpectabili ad centrum ejus ſphæræ, cujus portio eſt ipſum convexum ſpeculum.

SIT convexum ſpeculum ΓΔ, oculus autem Β; radius ΒΔ, qui reflectatur ad Α; ſit vero Ζ centrum ſphæræ, connectaturque recta ΑΖ, & producatur radius ΒΔ uſque ad Ε. quia igitur in phænomenis poſitum eſt Α non cerni occupato loco Γ: igitur cernetur in linea ΑΓ producta in rectum; in eo videlicet loco in quo radius ΒΔ productus concurrit cum ΑΓ, nempe in puncto Ε, veluti in planis ſpeculis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Εν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις ἔχασι τὰ ὁρωμένων κατὰ τινὰ ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀγομένην εὐθεῖαν ὁρᾶται.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΓΔ, ὄψις δὲ ἀνακλωμένη ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Α ὁρώμενον, τῆς δὲ σφαίρας κέντρον ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Ε ἐπεζεύχθω εὐθεῖα, καὶ ἐκβεβλήσθω. ὅτι μὲν οὖν ἐπεὶ ὑπέκειτο ἐν τοῖς φαινομένοις, ὅτι, καταλειφθέντος τοῦ τόπου τοῦ Δ, τὸ Α οὐχ ὁρᾶται, ὥστε φαίνεται ἐπ' εὐθείας τῆς ΑΕ· ὀφθήσεται ἄρα κατὰ τὴν συμβολὴν τῆς ΑΔ εὐθείας καὶ τῆς ΒΓ ὄψεως κατὰ τὸ Ζ.



Prop. XVIII. Theor.

In cavis ſpeculis aſpectabilium quodlibet cernitur in recta linea ducta ab aſpectabili ad centrum ſphæræ, cujus portio eſt ipſum ſpeculum.

SIT cavum ſpeculum ΓΔ, radius vero ab oculo emiſſus ΒΓ, qui reflectatur ad aſpectabile Α; ſit autem Ε centrum ſphæræ, cujus portio eſt ipſum ΓΔ ſpeculum; connectaturque recta ΑΕ, & producatur in rectum. quia igitur in phænomenis poſitum eſt ipſum Α non cerni occupato loco Δ: igitur imago ipſius Α aſpectabilis cernetur in ipſa ΑΕ linea recta in continuum producta: cernetur ergo in Ζ, in concurſu nempe ipſius ΑΔ rectæ cum radio ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Εν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις τὰ δεξιὰ, ἀριστερὰ φαίνεται, καὶ τὰ ἀριστερὰ, δεξιά· καὶ τὸ ἀπόσημα τὸ ἀπὸ τοῦ ἐνόπτρου ἴσον ἐστίν.

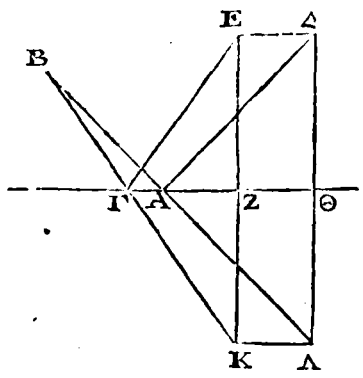
Ἔστω ἐπίπεδον ἔνοπτρον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ αἱ ΒΑ, ΒΓ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Δ, ὁρώμενον δὲ ἔστω τὸ ΕΔ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Δ ἐπὶ τὸ ἔνοπτρον κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΔΘ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· ἐκβεβλήσθωσαν δὲ καὶ αἱ ΒΓ, ΒΑ ὄψεις,

Prop. XIX. Theor.

In planis ſpeculis dextra apparent ſiniſtra, & ſiniſtra dextra; itemque imago æqualis apparet aſpectabili; imago etiam & aſpectabile æqualiter diſtant à ſpeculo.

SIT planum ſpeculum ΑΓ, oculus autem Β; radii vero ΒΑ, ΒΓ, qui reflectantur ad Ε, Δ; aſpectabile vero ſit ΕΔ, & ab Ε, Δ ad ſpeculum ducantur perpendiculares ΕΖ, ΔΘ & producantur; producantur etiam radii ΒΓ, ΒΑ,

& concurrant cum perpendicularibus in punctis K, Λ, connectaturque recta Λ K. apparet igitur E quidem in K, ipsum autem Δ in Λ: id enim antea ostensum est [ad 16. catopt.] sinistra igitur dextra apparent, & dextra sinistra. Et quia angulus K Γ Z æqualis est angulo Z Γ E, & recti sunt anguli ad Z: æqualis igitur [per 26. 1.] est recta Z K rectæ Z E. eademque ratione æqualis Δ Θ rectæ Θ Λ: quare intervallum, quo E Δ distat à speculo, æquale est intervallo quo imago K Λ distat ab eodem. Item E Δ aspectabile æquale est ipsi K Λ imagini, eo quod E Z æqualis est ipsi Z K, & Δ Θ ipsi Θ Λ, earum vero utrique communis & ad angulos rectos ipsa Θ Z Γ.



καὶ συμπιπτέτωσαν ταῖς καθέτοις κατὰ τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Λ Κ. φανερὸν οὖν φαίνεται τὸ μὲν Ε ὄμμα τὸ Κ, τὸ δὲ Δ ὄμμα τὸ Λ, τοῦτο γὰρ ἐδείχθη· τὰ ἄρα ἀριστερὰ, δεξιὰ φαίνεται, καὶ τὰ δεξιὰ, ἀριστερά. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΚΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τὸ Ζ· ἴση ἄρα ἂν εἴη καὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΛ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπόστημα, ᾧ ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ἐσόπτρου τὸ ΕΔ, τῷ ᾧ ἀπέχει τὸ εἴδωλον τὸ ΚΛ. Καὶ ἴσον τὸ ὁρώμενον τὸ ΕΔ τῷ εἰδώλῳ τῷ ΚΛ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΕΖ τῇ ΖΚ, τὴν δὲ ΔΘ τῇ ΘΛ, κοινὴν δὲ τὴν πρὸς ὀρθὰς τὴν ΘΖΓ.

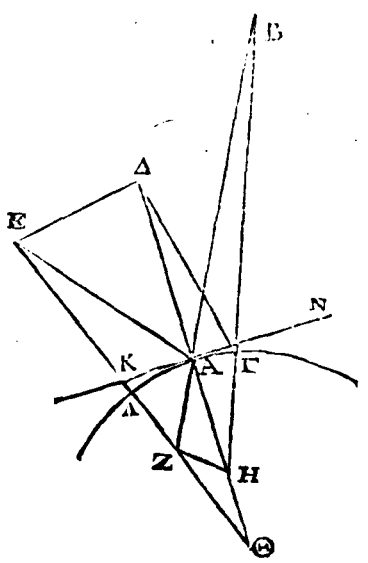
Prop. XX. Theor.

In convexis speculis sinistra apparent dextra, & dextra sinistra; & imago propius abest à speculo, quam aspectabile.

SIT convexum speculum Α Α Γ; centrum autem sphæræ, cujus portio est ipsum Α Α Γ speculum, sit Θ; sitque oculus B; radii autem sint B A, B Γ, qui reflectantur ad Δ, E, sitque aspectabile Δ E; ex centro autem Θ ad Δ, E ducantur rectæ Θ Δ, Θ E, producanturque B A, B Γ radii usque ad puncta Z, H; connectaturque recta Z H, quæ [per 17 catop.] erit imago. igitur Δ apparet in H, & E in Z: quare dextra apparent sinistra, & sinistra dextra.

Dico præterea majorem esse E A quam Λ Z.

Per punctum enim A ducatur recta linea K A N, quæ tangat circulum in puncto A. quia ergo B A, A E æquales faciunt angulos cum circuli circumferentia, propter reflectionem; recta autem K A N circulum tangit: igitur linea K A N bifariam dividit angulum E A Z. & obtusus [per 16. 1. & 18. 3.] est angulus K: major est igitur E K quam K Z: ergo multo major est E A quam A Z: minus ergo distat imago Z H à speculo quam E Δ aspectabile.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐσόπτροις τὰ ἀριστερὰ, δεξιὰ φαίνεται, καὶ τὰ δεξιὰ, ἀριστερά· καὶ τὸ ἀπόστημα ἀπὸ τοῦ ἐσόπτρου τὸ εἴδωλον ἔλασσον ἔχει.

Ἔστω ἔσοπτρον κυρτὸν τὸ Λ Α Γ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ Θ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ αἱ Β Α, Β Γ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὸ Δ, Ε, ὁρώμενον δὲ τὸ Δ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ κέντρου ἤχθωσαν ἐπὶ τὰ Δ, Ε αἱ Θ Δ, Θ Ε, καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ὄψεις ἐπὶ τὰ Ζ, Η, καὶ ἐπεζεύχθω τὸ Ζ Η εἴδωλον. φανερὸν τὸ μὲν Δ φαίνεται ἐπὶ τοῦ Η, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Ζ· τὰ ἄρα δεξιὰ, ἀριστερὰ φαίνεται, καὶ τὰ ἀριστερὰ, δεξιά.

Λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ Ε Α τῆς Λ Ζ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ἡ Κ Α Ν. ἐπεὶ οὖν αἱ Β Α, Α Ε πρὸς τὴν περιφέρειαν ἴσας γωνίας ποιοῦσι διὰ τὸ ἀνάκλασιν, ἐφάπτεται δὲ ἡ Κ Α Ν· δίχα ἂν εἴη τετμημένη ἡ ὑπὸ τῶν Ε Α Ζ γωνία. καὶ ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ Κ γωνία· [1] μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Κ τῆς Κ Ζ· πολλῷ μᾶλλον ἡ Ε Α τῆς Α Ζ· ἔλασσον ἄρα ἀπέχει τὸ εἴδωλον τὸ Ζ Η ἀπὸ τοῦ ἐσόπτρου.

Prop. XXI. Theor.

In convexis speculis imagines sunt minores aspectabilibus.

SIT convexum speculum Α Ο Γ, oculus B; radii autem B A, B Γ, qui reflectantur ad

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

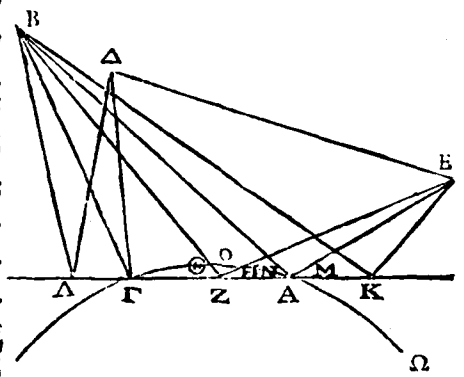
Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐσόπτροις τὸ εἴδωλον ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὁρωμένου.

Ἔστω γὰρ κυρτὸν ἔσοπτρον τὸ Α Ο Γ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ Β Α, Β Γ ἐπὶ

1 Quia enim A K E major est quam A K Z, & anguli ad A æquales; K E A minor erit quam A Z K; quare E A major quam A Z, & per 3. 6. E K quam K Z major. *Savil.*

τὰ

τὰ Δ, Ε· ὀφθῆν ἀπὸ τῆς κυρτῆς τῆς ἐνόπτρου θεωρεῖται τὸ ΕΔ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἤχθω διὰ κέντρου ἐπίπεδον ἐνόπτρου ἐπίπεδον τὸ ΑΓ, ἀπτόμενον τῶν ὄψεων κατὰ τὰ Α, Γ. ὀφθῆν ἡ ὄψις, μᾶλλον ἰδεῖν τὸ Ε ἀπὸ τῆς ἐπιπέδου ἐνόπτρου· οὐκ ἔστιν ἡ ΒΑΕ· ἀ γὰρ ποιεῖ γωνίας ἴσας πρὸς τῷ ἐπιπέδῳ ἐνόπτρῳ, ἀπὸ μιᾶ κλασθήσεται μεταξὺ τῶν Α, Γ. κεκλάσθω γὰρ, εἰ δυνατὸν, καὶ ἔστω ἡ ΒΖ ὄψις· ἴση ἄρα ἡ Η γωνία τῇ Θ γωνίᾳ, ἀφὸ τοῦ ἀναπλασιον. ἡ δὲ Θ μείζων τῆς Ν, ἡ δὲ Μ τῆς Η· ὥστε καὶ Μ τῆς Ν μείζων ἐστὶν, ὅπερ ἀδύνατον· αὕτη γὰρ ἡ Ν μείζων τῆς Μ ἐστι, ἴση [1] γὰρ ἐστιν ὅλη τῇ πρὸς τῇ περιφερείᾳ· ἐκτὸς ἄρα ἀνακλασθήσεται τῆς Α. κεκλάσθω γὰρ, καὶ ἔστω ἡ ΒΚΕ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΒΑΔ πεσεῖται ἐκτός· τὸ ἄρα ΕΔ ὑπὸ μείζονος γωνίας θεωρεῖται ἀπὸ τῆς ἐπιπέδου ἐνόπτρου τῆς περιεχομένης ὑπὸ ΚΒΑ ἤπερ ἀπὸ τῆς κυρτῆς. ὅτι δὲ ἐδείχθη φαινόμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐνόπτρῳ· φανερὸν ἔν ὅτι ἀπὸ τῆς κυρτῆς ἐνόπτρου τὸ εἴδωλον ἔλασσον φαίνεται τῆς ὁρωμένης.



puncta Δ, Ε: igitur aſpectabile ΕΔ cernitur à ſpeculo convexo ſub angulo ΑΒΓ. apponatur huic convexo ſpeculo planum ſpeculum, quod ſit ΑΓ: tangatque ipſos ΒΑ, ΒΓ radios in punctis Α, Γ. radius igitur, qui reflexus à plano ſpeculo viſurus ſit punctum Ε, non eſt ΒΑΕ; non enim facit æquales angulos cum plano ſpeculo, neque reflectetur ad Ε ab aliquo puncto poſito inter Α, Γ. reflectatur enim, ſi fieri poſſit, ſitque radius ΒΖ: æqualis ergo eſt [per 1. catop.] Η angulus angulo Θ, propter reflectionem. angulus autem Θ [per 16. 1.] major eſt Ν, & angulus Μ angulo Η: quare Μ major erit quam Ν, quod eſt abſurdum; idem enim Ν major eſt Μ, æqualis enim eſt toti angulo ad circumferentiam. ergo radius reflexus reflectetur ab aliquo puncto extra Α. reflectatur ergo, ſitque ΒΚΕ. eodem modo ΒΑΔ, radius à ſpeculo plano reflexus ad Δ, cadet extra ΑΓ: igitur ipſius ΕΔ imago à ſpeculo plano cernitur ſub angulo ΚΒΑ, qui major eſt quam angulus ΑΒΓ, ſub quo cernitur à convexo ſpeculo. oſtenſum autem eſt [ad 19. catop.] imaginem æqualem aſpectabili apparere in ſpeculo plano: conſtat ergo in convexis ſpeculis imaginem apparere minorem aſpectabili.

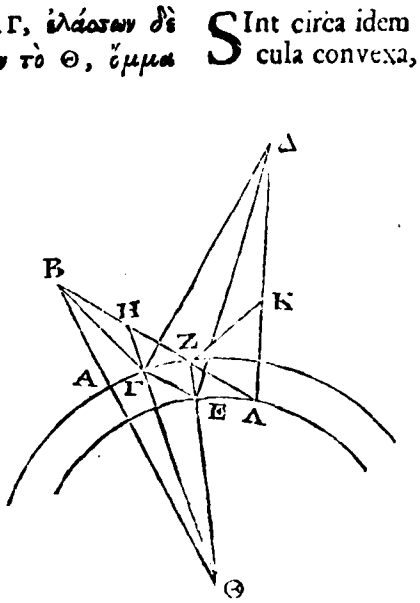
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϚ'.

Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις ἀπὸ τῶν ἐλαττόνων σφαιρικῶν ἐνόπτρων ἐλάττονα φαίνεται τὰ εἴδωλα.

Prop. XXII. Theor.

In convexis ſpeculis minoribus minores imagines apparent.

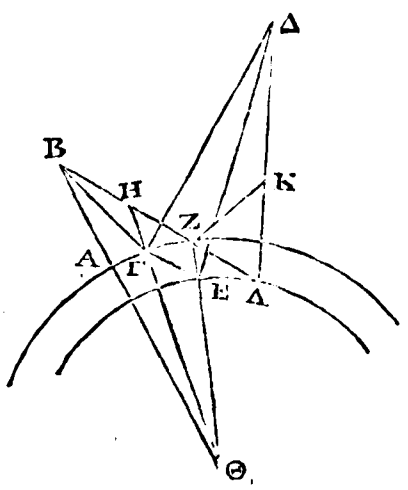
Ἔστω σφαῖρα μείζων μὲν ἡ ΑΓ, ἐλάττων δὲ ἡ ΕΔ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Θ, ὄμμα δὲ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΑΘ, καὶ ἀπὸ τῆς σφαίρας ἀνακεκλάσθω ὄψις ἡ ΒΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ἀνακλασθησομένη ὄψις ἀπὸ τῆς ἐλάττονος σφαίρας ἐπὶ τὸ Δ, οὐκ ἀφὴ τῆς Γ πεσεῖται, οὐδὲ ἐκτὸς τῆς Γ. πιπτέτω γὰρ πρότερον, εἰ δυνατὸν, ἀφὴ τῆς Γ, καὶ ἀνακεκλάσθω ἀπὸ τῆς ἐλάττονος σφαίρας ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἔστω ἡ ΒΕΔ· καὶ ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. δίχα δὴ τετμήσθω ἡ ΘΓΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ γωνίαν, ἀφὴ τὸ τῷ ΒΓΔ ἴσας ποιεῖν γωνίας πρὸς τῇ Γ περιφερείᾳ, ἀφὴ τὸ ἀναπλασιον. ἀφὴ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Ε διεζευγνυμένη καὶ ἐκβληθεῖσα δίχα τετμήσθω τῷ ὑπὸ ΒΕΔ. τετμήσθω,



SInt circa idem centrum Θ duo ſphærica ſpecula convexa, quorum ΑΓ ſit majus, ΕΛ vero ſit minus; ſitque oculus Β, connectaturque recta ΒΑΘ; & ex Γ puncto ſphærici ſpeculi reflectatur radius ΒΓΔ ad Δ aſpectabile: dico fieri non poſſe ut radius, qui à minore ſpeculo ſphærico reflectetur ad Δ, cadat in idem minus ſpeculum per Γ punctum majoris ſpeculi, vel per aliud punctum poſitum extra Γ, id eſt, contentum inter Γ & Ζ. ſi enim id fieri poteſt, cadat prius per Γ punctum, & reflectatur à minore ſpeculo ſphærico ad Δ, ſitque ΒΕΔ; connectaturque recta ΘΓ, & producatur uſque ad Η. igitur recta ΘΓΗ bifariam ſecabit angulum ΒΓΔ, eo quod [per 1. catop.] ΒΓΔ æquales facit angulos ad Γ punctum circumferentiæ, propter reflectionem. eademque ratione connexa recta linea ex Θ in Ε & producta bifariam ſecabit angulum ΒΕΔ. ſecet,

1 Quin potius ΒΑΟ, qui minor eſt quam Ν, major eſt quam Μ. ἴση γὰρ ἐστιν ὅλη τῇ πρὸς τῇ περιφερείᾳ ſc. γωνίᾳ ΕΑΩ per primam hujus. *Savil.*

ſitque ΘEZ. quia igitur [per 16. 1.] angulus BΓΔ major eſt BEΔ, & illius dimidium dimidio hujus majus eſt: major ergo eſt angulus BΓH angulo BEZ. eſt vero etiam [per 15. & 16. 1.] minor, quod eſt abſurdum: fieri ergo non poteſt ut radius, ad minus ſpeculum reflexus in Δ, tranſeat per punctum Γ. his poſitis, cadat extra punctum Γ radius BA in minus ſpeculum, à quo reflectatur ad Δ; ſecetque majus ſpeculum in Z; radius autem à Z reflexus ſc. BZK minime concurret cum ΓΔ, id enim [ad 4. catop.] oſtenſum eſt. concurrat igitur cum ΛΔ in K: radius igitur BZK reflexus à majore ſpeculo cernit punctum K, ipſe item radius BAK reflexus à minore ſpeculo cernit idem punctum K. id autem fieri non poſſe ſupra oſtenſum eſt: radius igitur, qui ab oculo emiſſus in minus ſpeculum reflectitur in punctum Δ, cadet per aliquod punctum poſitum inter Γ, A. eodem modo oſtendetur idem in altera etiam parte fieri: igitur angulus B, ſub quo cernitur Δ aſpectabile, minor fit à minore ſpeculo quam à majore: quare [per 6. poſit. opt.] imago rei aſpectabilis minor apparebit in minore ſpeculo.

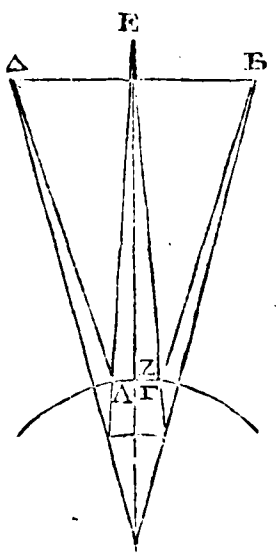


καὶ ἔσω ἡ ΘEZ. ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν BΓΔ τῆς ὑπὸ BEΔ, ἡ δὲ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ BΓH τῆς ὑπὸ BEZ. ἔστι δὲ καὶ ἐλάσσων, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἥξει ἀφὸ τοῦ Γ ἀνακλωμένη ὄψις ἐπὶ τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ὑπικείσθω δὲ πάλιν τὰ αὐτὰ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς σφαίρας ἀνακλωμένη ὄψις ἡ BAΔ ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ Γ, καὶ μενέτω· ἡ BA τὴν μείζονα σφαῖραν κατὰ τὸ Z, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Z ἀνακλωμένη ὄψις ἡ BZK ἐ συμπεσεῖται τῇ ΓΔ, τοῦτο γὰρ δέδεικται· τῇ ἄρα ΛΔ συμπεσεῖται κατὰ τὸ K. ἡ ἄρα BZK ὄψις ἀνακλωμένη ἀπὸ τοῦ μείζονος ἐνόπτρου ὁρᾷ τὸ K. καὶ ἡ αὐτὴ ἡ BAK ἀνακλωμένη ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐνόπτρου ὁρᾷ τὸ αὐτὸ K. τοῦτο δὲ ἐπάνω ἐδείχθη ἀδύνατον· μεταξὺ ἄρα πεσεῖται τῶν Γ, A ἡ ἀνακλωμένη ὄψις ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐνόπτρου ἐπὶ τὸ Δ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ αὐτοῦ πώματος ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἄρα θεωρεῖται γωνίας τῆς πρὸς τῷ B γιγνομένης, ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐνόπτρου ἧπερ ἀπὸ τοῦ μείζονος· ἔλασσον ἄρα φαίνεται τὸ εἴδωλον ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐνόπτρου.

PROP. XXIII. THEOR.

In convexis ſpeculis aſpectabilium imagines apparent convexæ.

SIT convexum ſpeculum AΓ, oculus autem E, à quo emittantur radii EA, EΓ, qui reflectantur ad Δ, B; radius autem ZE reflectatur in ſeipſum ad E. radiorum igitur longiſſimi ſunt, qui ad remotiſſimas partes tendunt; qui autem ad medium rei aſpectabilis tendunt, ſunt breviſſimi, ut radius EZ: igitur E propius videtur à ſpeculo diſtare; puncta vero B & Δ longius: itaque tota imago convexa apparet.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις τὰ εἴδωλα κυρτὰ φαίνεται.

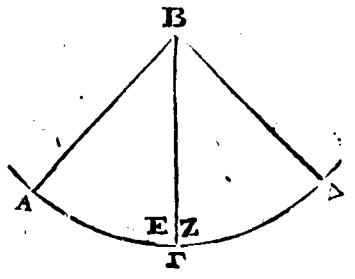
ἜΣτω κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ AΓ, ὄμμα δὲ τὸ E, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ EA, EΓ ἐπὶ τὰ Δ, B, ἡ δὲ ZE ἀνακλωμένη δι' ἑαυτῆς ἐπὶ τὸ E. τῶν δὴ ὄψεων μείζους μέν εἰσι τῶν μήκει αἱ πρώτως, ἐλάττους δὲ αἱ κατὰ μέσον, ὥσπερ ἡ EZ· φαίνεται ἄρα τοῦ ἐνόπτρου ἔγγιον μᾶλλον τὸ E, πρώτως δὲ τὸ B καὶ τὸ Δ· ὥστε ὅλον κυρτὸν φαίνεται.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ὅπου ὁ κέντρον τὸ ὄμμα τεθῇ, ταὐτὸ μόνον φαίνεται τὸ ὄμμα.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΔ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, ὄψεις δὲ αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ. ἐκεῖνη ἴση ἡ Ε γωνία τῇ Ζ· ἤξει ἄρα ἡ ἀνακλωμένη ΒΓ ὄψις ἐπὶ τὸ Β. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαί· αὐτὸ ἄρα μόνον ὁρᾶται τὸ Β.



PROP. XXIV. THEOR.

In cavis ſpeculis, ſi oculus ponatur in centro ſpeculi, ſeipſum tantum cernet.

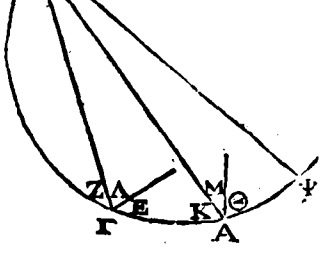
SIT concavum ſpeculum ΑΓΔ, ejus vero centrum Β; radii autem ab oculo in ſpeculum miſſi ſint ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ. igitur angulus Ε æqualis eſt angulo Ζ: quare radius ΒΓ reflectetur ad Β. idem facient reliqui radii: quare ipſe Β oculus ſeipſum tantum cernet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ὅπου ἡ περιφερείας ᾖς τὸ ὄμμα, ἢ ἔξω τῆς περιφερείας· οὐ φαίνεται τὸ ὄμμα.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΒ, καὶ τὸ ὄμμα κείσθω ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τὸ Β, ὄψεις δὲ προσπιπτέτωσαν αἱ ΒΑ, ΒΓ, καὶ ἀνακεκλάσθωσαν. ἐκεῖνη μείζων ἐστὶν ἡ μὴ ΜΘ γωνία τῆς Κ [1], ἡ δὲ ΕΛ τῆς Ζ· ὥστε οὐκ ἀνακλασθήσονται αἱ ΒΑ, ΒΓ ὄψεις ἐπὶ τὸ Β ὄμμα. εἰς τὸ ὄμμα δὲ εἰ ἀνακλῶντο, ἴσαι αἱ γωνίαι πρὸς τοῖς Α, Γ ἐγίγνοντο.

Δειχθήσεται δὲ καὶ ἐκτὸς τῆς περιφερείας γένηται τὸ ὄμμα, τὰ αὐτὰ συμβαίνοντα, τοῦτ' ἔστι τὸ μὴ ὁρᾶσθαι τὸ ὄμμα, διὰ τὸ τὰς ἀνακλάσεις μὴ γινέσθαι ἐπ' αὐτό.



PROP. XXV. THEOR.

In cavis ſpeculis, ſi oculum colloces in circumferentia aut extra circumferentiam; ipſe oculus non apparebit.

SIT concavum ſpeculum ΑΓΒ, & oculus Β ſtatuatur in ipſius circumferentia, ab eoque emittantur in ſpeculum radii ΒΑ, ΒΓ, & reflectantur. ergo angulus ΜΘ major eſt angulo Κ, & angulus ΕΛ major Ζ: igitur radii ΒΑ, ΒΓ non reflectentur ad Β oculum. ſi enim reflecterentur ad oculum, æquales eſſent anguli quos radii faciunt cum circumferentia ad puncta Α, Γ.

QUOD ſi oculus ponatur extra ſpeculi circumferentiam, idem ei accidere demonſtrabitur; nempe oculum non cerni, eo quod reflectiones ad ipſum non fiant.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν σκαλὸν διάμετρον τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἀναγαγῇς, καὶ εἰς τὸ ἕτερον μέρος ᾖς τὸ ὄμμα· οὐδὲν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ μέρει, ἐν ᾧ τὸ ὄμμα ἐστὶν, ὀφθήσεται· τοῦτ' ἔστιν, οὔτε τῶν ἐντὸς τῆς διαμέτρου, οὔτε τῶν ἐκτὸς τῆς διαμέτρου, οὔτε τῶν ἐπὶ τῆς διαμέτρου.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΔ, διάμετρος δὲ ἔστω τῆς σφαίρας ἡ ΑΔ, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Ζ ἡ

PROP. XXVI. THEOR.

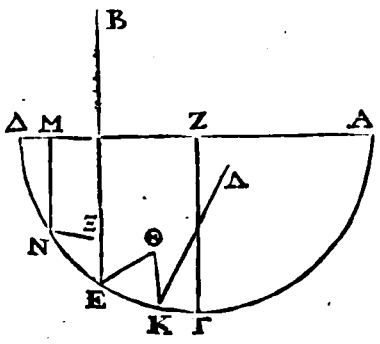
In ſpeculis concavis, ſi à centro ad circumferentiam excites rectam lineam quæ angulos rectos faciat cum ejuſdem ſphærici ſpeculi producta diametro, & oculum ſtatuas ad alterutram partem; oculus nil cernet eorum quæ ſunt in ea parte in qua ipſe eſt: hoc eſt, nihil eorum cernet quæ ſunt vel intra diametrum, vel extra diametrum, vel in ipſa diametro.

SIT concavum ſpeculum ΑΓΔ; diameter vero ſphæræ, cujus portio eſt ipſum ſpeculum, ſit ΑΔ, in qua ſit centrum Ζ, à quo exci-

[1] Et quid ita? quaſi vero, poſita Β ſemidiametro, non ſint anguli ad Ψ futuri æquales, ut ſit neceſſarium omnino τὰς ὄψεις in ſe ἀνακλᾶσθαι. *Savil.*

tetur

tetur recta ZΓ ad angulos rectos ipſi AΔ; ſitque oculus B extra diametrum, & radius BE. igitur BE radius ſeſe reflectens, nec ad B nec ad Z ſe reflectet; reflectitur enim ad æquales angulos: ſe igitur reflectet ut EΘ. ſimiliter ſi oculus ſtatuatur intra diametrum ad Θ, aut in ipſa diametro ad M, radii ΘK, MN ſe reflectent ut KΛ, NΞ: nihil igitur cernitur eorum quæ ſunt ad eandem ſemidiametri partem ad quam eſt oculus, neque eorum quæ ſunt in ipſa diametro, neque eorum quæ ſunt extra diametrum, neque eorum quæ ſunt intra.

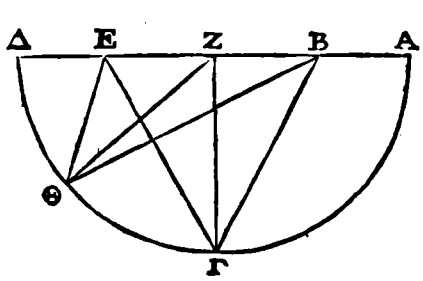


ΖΓ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Β ἐκτὸς τῆ Διαμέτρου, ὄψις δὲ ἡ ΒΕ. ἀκὴν ἡ ΒΕ ἀνακλωμένη οὐκ ἥξει ἐπὶ τὸ Β ὅτι ἐπὶ τὸ Ζ, ἐπεὶ γὰρ ἴσης γωνίας ἀνακλᾶται· ἥξει ἄρα ὡς ἡ ΕΘ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἐντὸς ἐμπέσῃ τὸ ὄμμα ὅπερ τὸ Θ, ἢ ἐπὶ τῆς Διαμέτρου ὅπερ τὸ Μ, ἀνακλώμεναι αἱ ὄψεις αἱ ΘΚ, ΜΝ ἥξουσιν ὡς αἱ ΚΛ, ΝΞ· οὐκ ἄρα ὁρᾶται οὐδὲν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ μέρει ὅπερ ἐστὶ τὸ ὄμμα, οὔτε τῶν ἐπὶ τῆς Διαμέτρου, οὔτε τῶν ἐκτὸς τῆς Διαμέτρου, οὔτε τῶν ἐντός.

Prop. XXVII. Theor.

In concavis ſpeculis, ſi oculi ita conſtituantur in diametro ut uterque à centro æqualiter diſtet, neuter oculorum cernetur.

SIT concavum ſpeculum AΓΔ, ejuſque diameter AΔ, centrum autem Z, à quo excitetur ZΓ ad angulos rectos ipſi AΔ; ſint vero oculi B, E æqualiter diſtantes à centro Z, ſitque radius BΓ: is ergo ſe reflectens veniet ad E; reflectitur enim ſecundum æquales angulos. nullus autem alius reflectetur ad E, ex. gr. BΘ. nam, ſi fieri poteſt, reflectatur ad E, connectanturque ΘE, ΘZ: igitur [per 1. catop.] angulus BΘE bifariam ſecatur à ZΘ. ſunt ergo in eadem ratione [per 3. 6.] ut BΘ ad ΘE ſic BZ ad ZE, quod fieri nequit; BΘ enim major eſt [per 7. 3.] quam ΘE, ipſa autem BZ [ex hyp.] æqualis eſt ipſi ZE: nullus igitur radius emiſſus à B reflectetur ad E, præter BΓ: unus igitur radius ad utrumque oculorum B, E reflectetur. & non cernetur E, quia BΓ productus non concurret cum BΔ ad partes Γ, Δ; imagines autem aſpectabilium [per 18. catop.] apparent in ſolo concurſu radii ab oculo emiſſi cum recta ab aſpectabili per centrum ſpeculi: nec vero EΓ concurret cum EA, ad partes Γ, A; in concavis enim ſpeculis aſpectabilium imagines viſuntur in recta ab aſpectabili ad centrum ipſius ſphæræ ducta.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ὑπὸ τῆς Διαμέτρου τεθῇ τὰ ὄμματα ἴσον ἀπέχοντα τοῦ κέντρου· οὐδὲν ἕτερον τῶν ὀμμάτων ὀφθήσεται.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΔ, Διάμετρος δὲ ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ζ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἡ ΖΓ, ὄμματα δὲ τὰ Β, Ε ἴσον ἀπέχοντα τοῦ κέντρου, ὄψις δὲ ἡ ΒΓ· οὐκοῦν ἀνακλωμένη ἥξει ὅπερ τὸ Ε, ἐπεὶ ἴσης γὰρ γωνίας ἀνακλᾶται. ἄλλη δὲ οὐδεμία ἥξει, ὡς ἡ ΒΘ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΕ, ΘΖ· δίχα ἄρα τμηθήσεται ἡ ὑπὸ ΒΘΕ ὑπὸ τῆς ΖΘ, καὶ ἀνάλογον ἔσται ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΕ, ὅπερ ἀδύνατον, ἡ μὲν γὰρ ΒΘ μείζων ἐστὶ τῆς ΘΕ, ἡ δὲ ΒΖ ἴση τῇ ΖΕ· οὐδεμία ἄρα ἥξει ἀνακλωμένη ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ε· μία ἄρα ὄψις ἀνακλαθήσεται ἐφ' ἑκατέρῳ τῶν Β, Ε ὀμμάτων. καὶ οὐκ ὀφθήσεται τὸ Ε, οὐ γὰρ συμπεσεῖται ἡ ΒΓ ἐκβαλλομένη τῇ ΒΔ ἐπὶ τὰ Γ, Δ μέρη, ἐφαίνετο δὲ ἕκαστον κατὰ τὸ συμβολεῖον μόνον τῶν ὁρωμένων· οὐδὲ ἡ ΕΓ οὐ μὴ συμπεσῇ τῇ ΕΑ ἐπὶ τὰ Γ, Α μέρη, ἐν γὰρ τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις ἕκαστον τῶν ὁρωμένων κατὰ τὸ ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν ὁρᾶται.

Prop. XXVIII. Theor.

In cavis ſpeculis, ſi ſemidiametrum bifariam ſeces, & à puncto ſectionis lineam ad angulos rectos utrinque ducas, oculos autem ita colloces ut æqualiter di-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

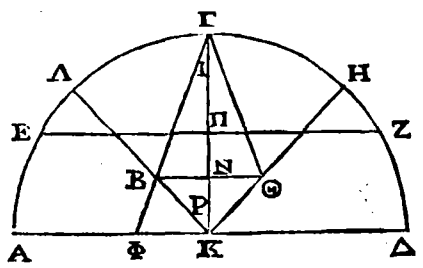
Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν τοῦ ὑπὸ τῆς κέντρου δίχα τεμνόντος, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀγαγόντος, ἐπὶ τὰ ὄμματα ἴσον ἀπέχοντα τῆς

ὑπὸ

ἐκ τῦ κέντρυ, ϑῆς δὲ ἡ ἀνὰ μέσον τῆς διαμέτρυ καὶ τῆς πρὸς ὀρθὰς, ἢ ἐπ' αὐτῆς τῆς πρὸς ὀρθὰς· ὁσδέτερον τ' ὀμμάτων φαίνεται.

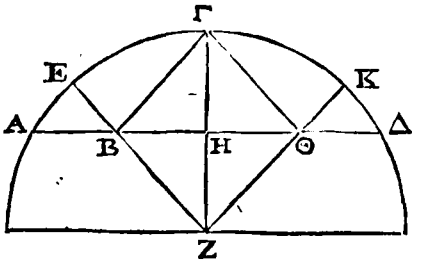
ſtent ab excitata ſemidiametro: neuter oculorum cernetur, ſive hi ſint inter diametrum & lineam ad angulos rectos, ſive in recta quæ angulos rectos facit cum ſemidiametro.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ Α Γ Δ, διάμετρος δὲ ἡ Α Δ, κέντρον δὲ τὸ Κ, καὶ ἡ πρὸς ὀρθὰς ἡ Κ Γ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Π, πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἔστω ἡ Ε Π Ζ, καὶ ὄμματα τὰ Β, Θ μεταξὺ κείσθω τῆς Α Δ καὶ τῆς Ε Ζ ἐν παραλλήλοις τῇς Ε Ζ, Β Θ ἴσον ἀπέχοντα τῆς Κ Γ, ὄψις δὲ ἔστω ἡ Β Γ ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Θ· ἴσος ἄρα ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ περιφερείᾳ, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν Ζ Ε τῇ Β Θ, καὶ ἴσην τὴν Β Ν τῇ Ν Θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Κ Β, Κ Θ, καὶ ἐκβεβλήθωσαν, ἐκβεβλήθω δὲ καὶ ἡ Γ Β ἐπὶ τὸ Φ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ Β Γ τῆς Β Κ, μείζων ἐστὶν ἡ Ρ γωνία τῆς Ι· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ Γ Β Θ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ Θ Β Κ, τουτέστι τῆς ὑπὸ Β Θ Κ· οὐκ ἄρα συμπεσοῦνται ἡ Β Γ τῇ Κ Θ· οὐκ ἄρα ὀφθήσεται τὸ Θ, κατὰ γὰρ τὴν συμβολὴν φαίνεται τῶν Β Γ, Κ Θ.



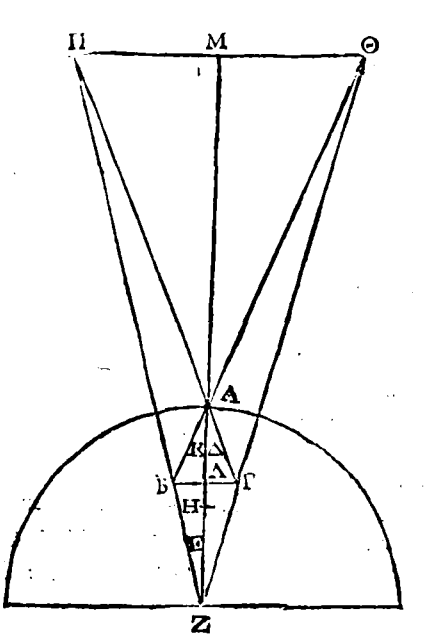
SIT concavum ſpeculum Α Γ Δ, cujus diameter quidem Α Δ, centrum autem Κ, à quo ad angulos rectos excitetur ſemidiameter Κ Γ, quæ bifariam ſecetur in puncto Π, per quod ducatur linea Ε Π Ζ, quæ ad angulos rectos ſit ipſi Γ Κ; ſint autem oculi Β, Θ, collocati inter diametrum Α Δ & lineam Ε Ζ, cui ſit parallela linea Β Θ; ipſique Β, Θ oculi æqualiter diſtent à ſemidiametro Κ Γ; eſto denique radius Β Γ, qui reflectatur à puncto Γ ad Θ: angulos igitur æquales facit ad circumferentiam, eo quod linea Ζ Ε parallela eſt ad lineam Β Θ, & linea Β Ν æqualis ipſi Ν Θ. connectantur Κ Β, Κ Θ, & producantur ad Α, Η, producatur etiam Γ Β uſque ad Φ. quia ergo major eſt Β Γ quam Β Κ, major eſt [per 18. 1.] angulus Ρ quam Ι; quocirca angulus Γ Β Θ major eſt [per 32. 1.] angulo Θ Β Κ, id eſt, angulo Β Θ Κ: non igitur concurrent Β Γ, Κ Θ: ergo Θ non cernetur; deberet enim cerni in concurſu rectarum Β Γ, Κ Θ.

Ἐστω πάλιν τὰ αὐτὰ τῇ ἐπάνω, τὰ δὲ Β, Θ ὄμματα ἔστωσαν ἐπὶ τῆς δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τετμημένης τὴν ἐκ τῦ κέντρυ, ἐπὶ τῆς Α Δ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ μὲν Β Γ τῇ Β Ζ, ἡ δὲ Γ Θ τῇ Ζ Θ, κοινὸς ἂν εἴη ἡ Β Γ τῇ Ζ Θ· οὐκ ἄρα συμπεσοῦνται ἡ Β Γ ὄψις τῇ ἐκ τῦ κέντρυ ἐπὶ τὸ ὁρώμενον, τουτέστι τῇ Ζ Θ, ἐπὶ τὰ Θ, Γ μέρη· ὥστε οὐ φαίνεται τὸ Θ ὄμμα, κατὰ γὰρ τὴν συμβολὴν οὐ φαίνεται τῶν Β Γ, Ζ Θ.



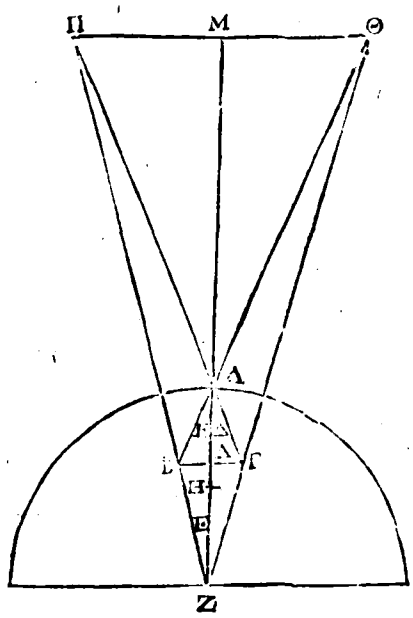
Iiſdem manentibus, oculi autem Β, Θ collocentur in linea quæ ſemidiametrum ſecat bifariam & ad angulos rectos, id eſt in linea Α Δ. quia igitur Β Γ æqualis eſt ipſi Β Ζ, & Γ Θ ipſi Ζ Θ: parallela ergo [per 8. & 27. 1.] eſt Β Γ ipſi Ζ Θ: quare radius Β Γ non concurret cum linea ducta à centro ad aſpectabile, id eſt cum linea Ζ Θ, verſus partes Θ, Γ: quare Θ oculus non cernetur: ſi enim cerneretur, deberet cerni in concurſu linearum Β Γ, Ζ Θ.

Ἐστω πάλιν τὰ αὐτὰ, ἡ δὲ διχοτομίας ἀνωτέρω κείσθω τὰ ὄμματα τὰ Β, Γ ἴσον ἀπέχοντα τῆς ἐκ τῦ κέντρυ τῆς Ζ Α· φημὶ δὴ φαίνεσθαι τὰ Β, Γ, καὶ τὰ δεξιὰ, ἀριστερὰ, καὶ τὰ ἀριστερὰ, δεξιὰ, καὶ τὸ εἴδωλον μεῖζον τῦ προσώπυ, καὶ τὸ διάστημα ἀπὸ τῦ ἐσόπτρου ἔχον μεῖζον τὸ εἴδωλον. ἔστω γὰρ ἡ Β Α ὄψις ἀνακλωμένη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὰ Β, Γ αἱ Ζ Β, Ζ Γ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ Β Α. ἐπεὶ οὖν διχοτομία



Iiſdem manentibus, oculi Β, Γ collocentur loco ſuperiore quam ſit punctum illud in quo ſemidiameter bifariam ſecta eſt; diſtentque æqualiter ab ipſa Ζ Α ſemidiametro: dico fore ut Β, Γ appareant, & dextra videantur ſiniſtra, & ſiniſtra dextra, & faciei imago appareat major facie, & longius à ſpeculo diſtet quam facies ipſa. ſit enim Β Α radius, qui reflectatur ad Γ; & à centro Ζ ad puncta Β, Γ connectantur rectæ Ζ Β, Ζ Γ, producaturque Β Α. quia igitur Ζ Α ſemidiameter bifariam ſecta eſt

in H: major ergo eſt B Z quam B A; ideoque [per 18. 1.] major eſt K angulus angulo E. æqualis autem eſt [per 1.catop.] K ipſi Δ: major igitur eſt Δ quam E: quare lineæ Z B, Γ A productæ tandem concurrent. concurrant in puncto Π. eadem ratione lineæ B A, Z Γ productæ concurrent in puncto Θ: ergo [per 18.catop.] Γ apparebit in Θ, & B in Π; & dextra apparebunt ſiniſtra, & ſiniſtra dextra. quinetiam imago quæ eſt Θ Π major apparebit quam facies quæ eſt B Γ; parallelæ enim ſunt. imago ergo major apparet quam facies, & magis diſtat à ſpeculo; major enim eſt M A quam A Λ.

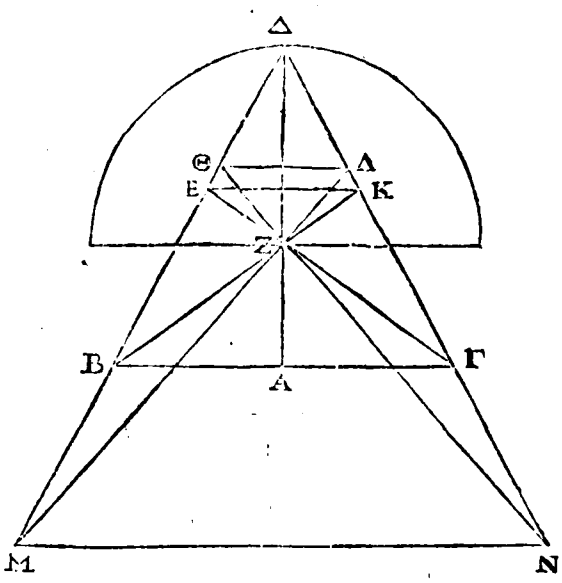


ἐσὶ τὸ H, μείζων ἐσὶν ἡ B Z τῆς B A, καὶ ἡ K γωνία τῆς E. ἴση δὲ ἡ K τῇ Δ· μείζων ἄρα καὶ ἡ Δ τῆς E· συμπιπτέτωσαν ἄρα αἱ Z B, Γ A ἐκβληθεῖσαι. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Π. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ B A, Z Γ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ· ὀφθήσεται ἄρα τὸ μὲν Γ ὑπὸ τὸ Θ, τὸ δὲ B ὑπὸ τὸ Π, καὶ φαίνεται τὰ μὲν δεξιὰ, ἀριστερὰ, τὰ δὲ ἀριστερὰ, δεξιά. ἀλλὰ μὴν καὶ μείζων ἡ Θ Π τῆς B Γ· παράλληλοι γάρ εἰσι. τὸ ἄρα εἴδωλον φαίνεται μεῖζον, ἢ μεῖζον ἀπέχον τοῦ ἐνόπτρου, μείζων γὰρ ἡ M A τῆς A Λ.

PROP. XXIX. THEOR.

Sin autem oculi extra diametrum ponantur; dextra apparebunt dextra, & ſiniſtra ſiniſtra; & imago apparebit minor ipſa facie, & inter faciem & ſpeculum.

SInt enim oculi B, Γ, centrum autem ſpeculi ſit Z, per quod ducatur A Z Δ ad angulos rectos ipſi diametro; & per punctum A ducatur B A Γ ad angulos rectos ipſi A Z Δ, ſitque A Γ æqualis ipſi B A; radius autem B Δ reflectatur ad Γ, & per centrum ducantur B Z K, Γ Z E, & connectantur puncta E, K recta E K: igitur [per 18.catoptric.] B apparet in K; Γ vero apparet in E: quare dextra dextra, & ſiniſtra apparent ſiniſtra, & imago E K minor apparet ipſa B Γ facie; parallela namque eſt E K ipſi B Γ: apparetque ipſa imago in loco interjecto inter faciem & ſpeculum.



Si facies retrahatur à ſpeculo, imago adhuc minor videbitur.

Sit enim M N facies eadem quæ erat in B Γ, ſed remotior à ſpeculo quam eſſet B Γ, habeatque eundem ſitum ad ſpeculum: ergo recta linea ducta à puncto M ad Z centrum & producta cadet ſupra K, ut in Λ; linea autem ducta à N ad Z & producta cadet ſupra E, ut ad Θ: imago igitur ipſius M N eſt ipſa Θ Λ; & minor eſt Θ Λ quam E K & propior ad ſpeculum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν δὲ ἔξω τῆ διαμέτρυ πεθῆ ὄμματα· τὰ δεξιὰ φαίνεται δεξιὰ, καὶ τὰ ἀριστερὰ, ἀριστερὰ, καὶ τὸ εἴδωλον ἔλασσον τοῦ πρόσωπυ, καὶ ἐν τῷ μετὰ μέσον τοῦ τε ἐνόπτρυ καὶ τοῦ πρόσωπυ.

ΕΣτω γὰρ ὄμματα τὰ B, Γ, κέντρον δὲ τὸ Z ἐνόπτρυ, καὶ τῇ διαμέτρῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω ἡ A Z Δ, καὶ πάντη πρὸς ὀρθὰς ἡ B Γ, καὶ ἴση τῇ B A ἔστω ἡ A Γ, καὶ ὄψις ἡ B Δ ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ κέντρυ αἱ B Z K, Γ Z E, καὶ ἀπὸ τῶν E, K ἡ E K ἐπεζεύχθω· σκιὰν τὸ μὲν B ὑπὸ τὸ K φαίνεται, τὸ δὲ Γ ὑπὸ τὸ E· τὰ ἄρα δεξιὰ, δεξιὰ, καὶ τὰ ἀριστερὰ, ἀριστερὰ φαίνεται, καὶ τὸ E K εἴδωλον ἔλασσον τοῦ B Γ προσώπυ, παράλληλος γάρ ἐσιν ἡ E K τῇ B Γ· καὶ ἀνὰ μέσον τοῦ ἐνόπτρυ καὶ τοῦ προσώπυ φαίνεται τὸ εἴδωλον.

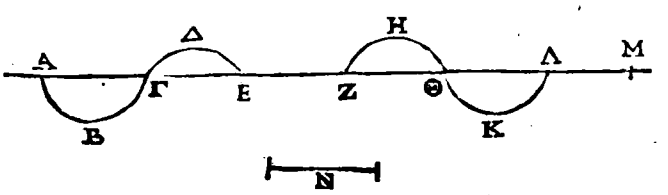
ΑΝΑΓΟΜΕΝΟΥ δὲ τοῦ προσώπυ, ἔτι ἔλασσον φαίνεται τὸ εἴδωλον.

Ἔστω γὰρ τὸ M N πρόσωπον τὸ αὐτὸ τῷ B Γ, ἀφεσηκὸς ἀπὸ τοῦ B Γ κείμενον ὁμοίως· σκιὰν ἀπὸ τοῦ M ὑπὸ τὸ Z κέντρον ὑπιζευχθεῖσα καὶ ἐκβληθεῖσα ἀνώτερον πεσεῖται τοῦ K ὡς τὸ Λ, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ N ἐπὶ τὸ Z ἀνώτερον τοῦ E ἕως τοῦ Θ· φαίνεται ἄρα τὸ M N ὡς τὸ Θ Λ· καὶ ἔστιν ἔλασσον τὸ Θ Λ τοῦ E K καὶ ἔγγιον τοῦ ἐνόπτρυ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Δυνατόν ἐστιν ἔνοπτρον κατασκευασθῆναι, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ φαίνεσθαι πλείω πρόσωπα· τὰ μὲν μείζονα, τὰ δὲ ἐλάττονα· καὶ τὰ μὲν ἔγγιον, τὰ δὲ πορρώτερον· καὶ τὰ μὲν δεξιὰ, δεξιά· τὰ δὲ ἀριστερὰ, ἀριστερά.

Ἔστω γὰρ ἐπίπεδον τὸ ΑΜ· οὗτον ἐν τούτῳ γένοιτο ἂν κυρτὰ μὲν ἔνοπτρα, οἷα τὰ ΑΒΓ, ΘΚΛ, κοῖλα δὲ, οἷα τὰ ΓΔΕ, ΖΗΘ, ἐπίπεδα δὲ, οἷα ΕΖ, ΛΜ. πεφύτω δὴ τῷ προσώπῳ ὅπερ τὸ Ν, φαίνεται ἀπὸ μὲν τῶν ἐπιπέδων ἴσα τὰ εἴδωλα καὶ ἴσον ἀπέχοντα· ἀπὸ δὲ τῶν κυρτῶν ἐλάττονα καὶ ἔλαττον ἀπέχοντα· ἀπὸ δὲ τῶν κοίλων παντοδαπῶς, καθάπερ δέδεικται.



PROP. XXX. THEOR.

Speculum ejuſmodi conſtrui poteſt, ut in eo plures façies appareant; quædam majores, quædam minores; quædam propiores, quædam remotiores; & earum dextræ partes à dextris, & ſiniſtræ à ſiniſtris appareant.

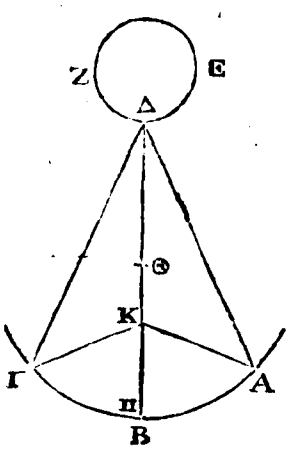
SIT enim planum ΑΜ: ergo in eo eſſe poſſunt ſpecula convexa quidem, qualia ſunt ΑΒΓ, ΘΚΛ; cava autem, qualia ſunt ΓΔΕ, ΖΗΘ; plana vero, qualia ſunt ΕΖ, ΑΜ. facie igitur poſita in loco Ν, parebunt ejus imagines æquales quidem, & æqualiter à ſpeculo diſtantes [per 19 catop.] in planis; in convexis autem [per 20. & 21. catop.] minores & minus diſtantes; at in cavis omnifariam, ut oſtenſum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐκ τῶν κοίλων ἐνόπτρων πρὸς τὸν ἥλιον πεφύτων πῦρ ἐξάπτεται.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΒΓ, ἥλιος δὲ ὁ ΕΖ, κέντρον δὲ τοῦ κατόπτρου τὸ Θ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Δ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἐπὶ τὸ Θ κέντρον ἡ ΔΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, προσπιπτωκέτω δὲ ἡ ΔΓ ἀκτὶς, καὶ ἀνακεκλάσθω ἐπὶ τὸ Κ· ἀνακλασθήσεται δὴ ἐπάνω τοῦ Θ κέντρου, ἡ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ ἡ Π ἐλάττων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ λοιπῆς τῆς ὑπὸ ΒΓΔ. ἔστω ἡ ΑΒ περιφέρεια ἴση τῇ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἄλλη τις ἀκτὶς προσπιπτέτω ἡ ΔΑ· φανερὸν δὴ ὅτι ἀνακλωμένη ἡ ΔΑ ἀκτὶς πεσεῖται ἐπὶ τὸ Κ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ περιφέρειαν τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Δ προσπίπτουσαι πρὸς τὸ ἔνοπτρον ἴσας [1] ὑπολαμβάνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ συμπεσοῦνται τῇ ΒΘ ἀνώτερον τοῦ Θ.

Ἔστω πάλιν κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΒΓ, ἥλιος δὲ ὁ ΔΕΖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Ε λαβὸν τοῦ Θ κέντρου ἔστω ἡ ΕΘΒ, καὶ ἀπ' ἄλλων λαβὸν τῶν Δ, Ζ αἱ ΔΘΓ, ΖΘΑ. ἐκὼν προσδιδείχαμεν ὅτι αἱ ἀπὸ τοῦ Ε ἀκτῖνες συμπεσοῦνται εἰς ἑαυτὰς λαβὸν



PROP. XXXI. THEOR.

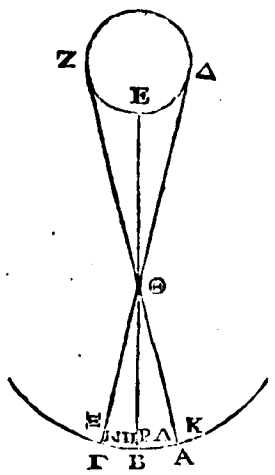
A concavis ſpeculis ſoli oppoſitis ignis accenditur.

SIT cavum ſpeculum ΑΒΓ, ſol autem ΕΖ, centrum vero ſpeculi ſit Θ; & ab aliquo ſolis puncto, Δ videlicet, ad centrum Θ connexa ΔΘ producatur uſque ad Β; radius autem ΔΓ cadat & reflectatur ad Κ: reflectetur ergo ſupra centrum Θ; angulus enim Π ad circumferentiam minor eſt angulo ΒΓΔ ad circumferentiam. ſit ergo circumferentia ΑΒ æqualis ΒΓ, & à puncto Δ cadat aliquis alius radius ΔΑ. conſtat ergo fore ut radius ΔΑ ſe reflectens cadat in Κ; eo quod circumferentia ΑΒ æqualis eſt ΒΓ. eodem modo oſtendetur fore, ut omnes radii à puncto Δ in ſpeculum cadentes, & æquales circumferentias comprehendentes, concurrant cum ΒΘ in puncto ſuperiore quam Θ.

Sit rurſus ſpeculum cavum ΑΒΓ, ſol autem ΔΕΖ; & ab ejus aliquo puncto Ε ducatur recta linea ΕΘΒ per centrum Θ, & ab aliis punctis Δ, Ζ ducantur radii ΔΘΓ, ΖΘΑ. itaque demonſtravimus quod radii à puncto Ε in ſeipſos reflectantur, propter angulos Π, Ρ

1 Sc. περιφερείας, utrinque à Β puncto. *Savil.*

inter ſe æquales; eſt enim ΕΒ diameter. & Z Θ Α in ſeipſum recurret, propter angulos Κ, Λ inter ſe æquales; & Δ Θ Γ redibit in ſeipſum, propter angulos Ν, Ξ inter ſe æquales. quod vero omnes iſti in ſeipſos reflectantur, patet: quia enim per centrum tranſeunt, dividunt ſpeculum in ſemicirculos; ſemicirculorum autem anguli æquales ſunt: radii vero omnes reflectuntur ad æquales angulos; ergo in ſeipſos recurrunt: omnes igitur à ſole per centrum, miſſi à punctis quibuſlibet, in centrum concurrent. his igitur radiis incaleſcentibus, congeretur ignis circa centrum: quare ſtupa ibi poſita incendetur.



γωνίας ἴσας ἴσαις, διάμετροι γάρ εἰσιν. αἱ δὲ ἀπὸ τοῦ Ζ διὰ τῶν Κ, Λ γωνίας, αἱ δὲ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ ΓΔ διὰ τῶν Ν, Ξ γωνίας ἴσας ἴσαις. ὅτι δὲ πᾶσαι αὐταὶ εἰς ἑαυτὰς ἀνακλῶνται, δῆλον· ἐπεὶ γὰρ τοῦ κέντρου ἴσαι ἡμικύκλια ποιοῦσιν, αἱ δὲ τῶν ἡμικυκλίων γωνίαι ἴσαι εἰσίν· αἱ δὲ ἴσων ἄρα γωνιῶν αἱ ἀνακλάσεις γίνονται, εἰς ἑαυτὰς ἄρα ἀνακλῶνται· πᾶσαι ἄρα συμπεσοῦνται ἀπὸ πάντων τῶν σημείων ἐπὶ τὰς διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἐν τῷ κέντρῳ ἁπτόμενοι. τούτων δὲ τῶν ἀκτίνων ἐνθερμαινομένων, δεῖ τὸ κέντρον πῦρ ἀθροίζειν· ὥστε ἐνταῦθα συμπεσὸν πυθὲν ἐξαφθήσεται.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΩΝ.

FINIS EUCLIDIS CATOPTRICORUM.

ΕΥ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ,

ΩΣ ΟΙΟΝΤΑΙ ΤΙΝΕΣ,

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΝ

ΒΙΒΛΟΣ.

EUCLIDIS,

UT QUIDAM ARBITRANTUR,

DE DIVISIONIBUS

LIBER.

VEL UT ALII VOLUNT,

MACHOMÈTI BAGDEDINI

LIBER

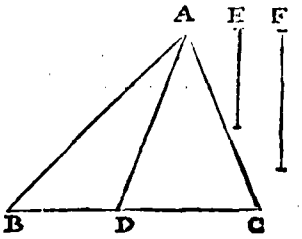
DE DIVISIONIBUS

SUPERFICIERUM.

EUCLIDIS
DE
DIVISIONIBUS
LIBER.

Propositio I. Problema.

Per lineam protractam ab angulo trianguli, illum triangulum ſecundum proportionem datam dividere.

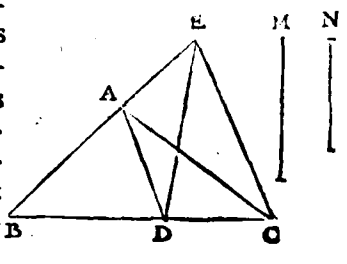


SIT triangulus A B C, & oporteat per lineam deſcendentem ab angulo A dividere triangulum A B C ſecundum proportionem E ad F. dividam enim lineam B C in puncto D ſecundum proportionem E ad F, per doctrinam decimæ ſexti; & protracta linea A D, propoſitum patet per primam ſexti.

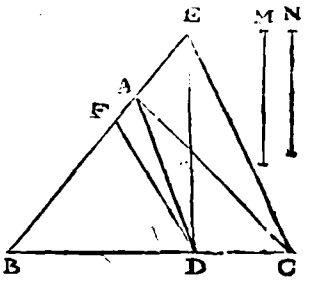
Prop. II. Probl.

Per lineam ductam à puncto, in latere dati trianguli aſſignato, dictum triangulum ſecundum proportionem datam dividere.

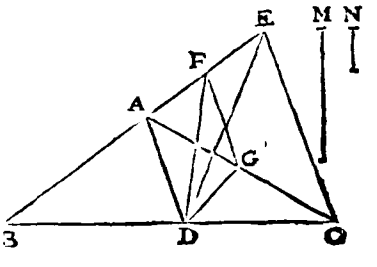
SIT triangulus A B C, in cujus latere B C ſignetur punctum D, à quo ducere oporteat lineam dividentem triangulum ſecundum proportionem M ad N; & jungatur D A. ab illo igitur extremo lateris B C, verſus quod voluero habere conſequens in relatione diviſionis, quod (gratia exempli) ſit punctum C, erigam lineam æquidiſtantem lineæ D A donec concurrat in E puncto cum linea B A ulterius protracta. quod autem concurrent, patet per 29. & 17. primi. erit igitur proportio M ad N aut æqualis proportioni B A ad A E, aut major, aut minor. ſit primo æqualis. erit igitur per primam ſexti, proportio B A D trianguli ad A D E triangulum, ſicut proportio M ad N. ſed per 37. primi, triangulus A D E eſt æqualis triangulo A D C: igitur per 7. quinti, proportio trianguli A B D ad triangulum A D C eſt ſicut proportio M ad N. quod fuit probandum.



Sit autem ſecundo, proportio M ad N minor proportione B A lineæ ad A E lineam. itaque dividam B E lineam ſecundum proportionem M ad N: cadet igitur diviſio inter B & A per 8. quinti. cadat in puncto F, & protrahatur linea D F, quam dico dividere triangulum ſecundum proportionem M ad N. *Probatio.* ducta enim linea D E, erit per 37. primi, triangulus A D E æqualis triangulo A D C. poſito igitur triangulo A F D communi; erit triangulus F D E æqualis figuræ quadrilateræ A F D C. cum igitur ex 1. ſexti, proportio trianguli B F D ad triangulum F E D ſit ſicut B F ad F E, & per conſequens ſicut M ad N: proportio trianguli B F D ad figuram quadrilateram A F D C eſt ſicut proportio M ad N. patet igitur propoſitum.



Sit tertio, proportio M ad N major proportione B A ad A E. dividatur igitur B E in puncto F, quod erit inter A & E, ſecundum proportionem M ad N, & ducatur F G æquidiſtanter lineæ C E donec concurrat cum linea A C ad punctum G; deinde jungatur linea G D: dico lineam G D dividere triangulum ſecundum proportionem datam. ducantur enim lineæ D F & D E. eſt igitur triangulus A D E æqualis triangulo A D C, per 37. primi; & per eandem, triangulus A D F æqualis eſt triangulo A D G: duo igitur reſidui, ſcilicet triangulus F D E & triangulus G D C, ſunt æquales. poſito etiam triangulo A B D communi duobus triangulis A F D & A G D æqualibus; erit triangulus B F D æqualis quadrilateræ figuræ B A G D: igitur triangulus F B D ad triangulum F D E eſt ſicut



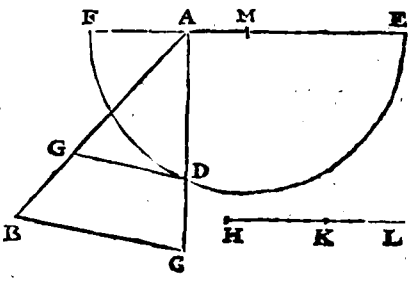
figura

figura quadrilatera B A G D ad triangulum G C D: triangulus vero F B D ad triangulum F D E eſt ſicut M ad N, per hypotheſim & primam ſexti: igitur proportio figuræ quadrilateræ B A G D ad triangulum G D C eſt ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.

Prop. III. Probl.

Per lineam æquidiſtantem aſſignato lateri noti trianguli, [1] illum triangulum ſecundum proportionem datam dividere.

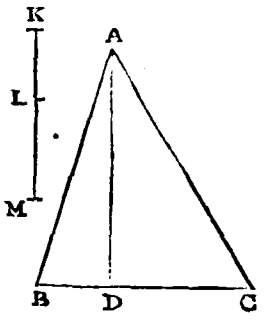
SIT proportio data H K ad K L; & triangulus A B C, quem ſecundum proportionem datam volo dividere per lineam æquidiſtantem lateri ejus B C. ab angulo enim A, verſus quem volo habere antecedens in proportione quærenda, protraham lineam A E orthogonaliter ſuper lineam A C, & ſibi æqualem; & protrahatur linea E A ſecundum rectitudinem uſque ad F, donec ſit proportio E A ad A F ſicut H L ad H K, & poſito centro in medio puncto lineæ F E, quod ſit M, deſcribatur ſemicirculus F D E, ſecundum quantitatem lineæ M E: qui quidem ſemicirculus ſecabit lineam A C ſuper punctum D; propter hoc quod linea A D minor eſt quam linea A E, & linea A E æqualis eſt lineæ A C ducta igitur linea D G æquidiſtanter lineæ B C: dico quod proportio trianguli A G D ad ſuperficiem G B C D eſt ſicut proportio H K ad K L. *Probatio.* Proportio enim trianguli A B C ad triangulum A G D eſt ſicut A C ad A D proportio duplicata, per 19. ſexti. ſed A C & A E ſunt æquales: igitur proportio A B C trianguli ad A G D triangulum eſt ſicut proportio A E ad A D duplicata. proportio autem A E ad A D duplicata eſt ſicut A E ad A F, per 31. tertii & 8. ſexti: igitur proportio trianguli A B C ad triangulum A G D eſt ſicut proportio E A ad A F. proportio vero E A ad A F eſt ſicut H L ad H K: igitur proportio A B C ad A G D eſt ſicut L H ad H K: igitur diviſim proportio ſuperficiei G B C D ad triangulum A G D eſt ſicut L K ad K H: igitur è contra A G D ad G B C D eſt ſicut proportio H K ad K L. quod fuit probandum.



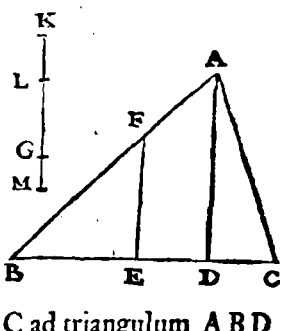
Prop. IV. Probl.

Per lineam æquidiſtantem perpendiculari [2], ab angulo trianguli ſuper baſim protractæ, illum triangulum ſecundum proportionem datam dividere.

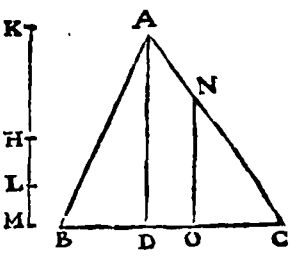
SIT proportio data K L ad L M; ſecundum illam volo dividere triangulum A B C per lineam æquidiſtantem perpendiculari A D. dividam enim lineam K M ſecundum proportionem B D lineæ ad lineam D C. & ſit primo (gratia exempli) quod illa diviſio cadat in puncto L. eſt igitur proportio K L ad L M ſicut B D ad D C, & per conſequens, ſicut trianguli A B D ad triangulum A D C, per primam ſexti: igitur linea A D dividit triangulum ſecundum proportionem datam.



Sit autem ſecundo, proportio K G ad G M ſicut proportio B D ad D C; ita quod G ſit inter L & M. deinde dividam triangulum A B D, juxta præmiſſam, per lineam æquidiſtantem lateri A D ſecundum proportionem K L ad L G; & ſit linea ſic dividens triangulum F E: dico igitur quod proportio trianguli F B E ad ſuperficiem A F E C eſt ſicut proportio K L ad L M. *Probatio.* nam proportio trianguli A D C ad triangulum A B D eſt ſicut proportio M G ad G K: igitur conjunctim, per 18. quinti, proportio trianguli A B C ad triangulum A B D eſt ſicut proportio M K ad K G. proportio autem trianguli A B D ad triangulum F B E [3] eſt ſicut proportio K G ad K L: igitur, ſecundum æquam proportionalitatem per 22. quinti, erit proportio trianguli A B C ad triangulum F B E ſicut proportio M K ad K L: igitur diviſim, proportio ſuperficiei A F E C ad triangulum F B E eſt ſicut proportio M L ad K L: igitur è contra, proportio K L ad L M eſt ſicut trianguli F B E ad ſuperficiem A F E C. quod fuit probandum.



Sit tertio, proportio K H ad H M ſicut B D ad D C, ita quod H ſit inter K & L. deinde dividam, per præmiſſam, triangulum A D C ſecundum proportionem H L ad L M per lineam N O æquidiſtantem lateri A D: dico igitur quod proportio ſuperficiei N A B O ad triangulum N O C eſt ſicut proportio K L ad L M. *Probatio.* Proportio namque trianguli A B D ad triangulum A D C eſt ſicut K H



1 Vel, ab illo triangulo portionem aſſignatam auferre: ſic enim utitur in ſequenti *Savil.* 2 Nihil eſt neque in κατασκευῇ, nec in demonſtratione, ubi hæc perpendicularitas requiratur. ſatis erat ſimpliciter dixiſſe, rectæ lineæ baſim ὡς ἔτυχε ſecari. deinde, in perpendicularibus quidem extra triangulum cadentibus non valde congruit demonſtratio, niſi mutatis prius mutandis. *Idem.* 3 Nam ſupra F A D E ad E F B eſt ut G L ad K L: ergo conjunctim A B D ad F B E ut K G ad K L.

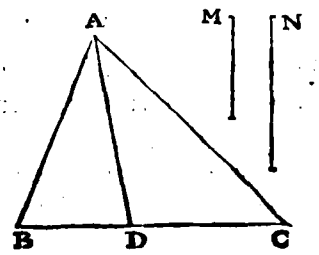
ad

ad HM, per primam ſexti & 11. quinti. igitur conjunctim, per 18. quinti, proportio trianguli ABC ad triangulum ADC eſt ſicut proportio KM ad HM: proportio autem trianguli ADC ad triangulum NOC [1] eſt ſicut proportio HM ad LM. igitur ſecundum æquam proportionalitatem, proportio trianguli ABC ad triangulum NOC eſt ſicut KM ad LM. igitur diviſim, proportio ſuperficiei NABO ad triangulum NOC eſt ſicut proportio KL ad LM. quod fuit propoſitum.

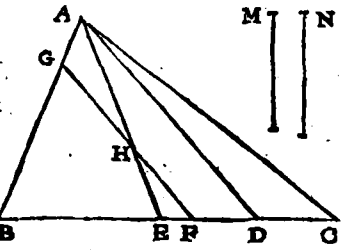
Prop. V. Probl.

Triangulum notum, per lineam æquidiſtantem lineæ ab angulo ejus ductæ, quæ [2] nec æquidiſtet alicui laterum ejus, neque alicui perpendicularium ejus, ſecundum proportionem datam dividere.

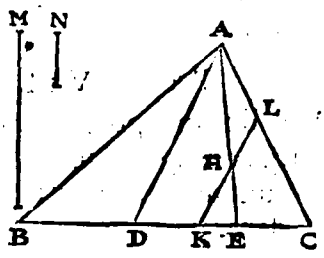
HÆC concluſio probari poteſt ſicut præmiſſa. poteſt etiam & aliter ſic probari. ſit proportio data M ad N: & ſit triangulus ABC, quem volo dividere ſecundum proportionem M ad N, per lineam æquidiſtantem lineæ AD, quæ deſcendat ab angulo A; nec ſit perpendicularis, nec æquidiſtans alicui laterum trianguli. dividam igitur lineam BC ſecundum proportionem M ad N & cadat primo (gratia exempli) diviſio in puncto D. linea igitur AD, per primam ſexti, dividit triangulum ſecundum proportionem M ad N datam.



Cadat ſecundo diviſio inter B & D in puncto E; ita quod ſit proportio BE ad EC ſicut M ad N. tunc ponam lineam BF mediam proportionaliter inter lineas BD & BE: & protracta linea FG æquidiſtanter lineæ AD, dico quod illa dividit triangulum ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Protraham enim lineam AE. proportio igitur trianguli ABD ad triangulum GBF eſt ſicut proportio BD ad BE. ſed ſecundum proportionem BD ad BE eſt proportio trianguli ABD ad triangulum ABE. igitur eadem eſt proportio trianguli ABD ad triangulum GBF, & ad triangulum ABE. igitur trianguli GBF & ABE ſunt æquales. poſito igitur H in ſectione linearum AE, GF, patet quod trianguli AGH & EFH ſunt æquales; quibus addita ſuperficie AHFC, erit triangulus AEC æqualis ſuperficiei AGFC. eadem igitur eſt proportio trianguli ABE ad triangulum AEC ſicut trianguli BFG ad ſuperficiem AGFC. ſed proportio trianguli ABE ad triangulum AEC eſt ſicut proportio M ad N data. igitur liquet propoſitum.



Cadat tertio diviſio inter D & C in puncto E, ita quod ſit proportio BE ad EC ſicut M ad N. ponam igitur lineam CK mediam proportionalem inter DC & EC. tunc protracta linea KL æquidiſtanter lineæ AD, dico quod illa dividit triangulum ſecundum quod proponitur. nam, ut prius, proportio trianguli ADC ad triangulum LKC eſt ſicut proportio DC ad KC duplicata; & per conſequens, eſt ſicut proportio DC ad EC. & ſecundum eandem proportionem eſt proportio trianguli ADC ad triangulum AEC: igitur trianguli LKC & AEC ſunt æquales, quare & trianguli AHL & KHE etiam ſunt æquales. ſuperficies igitur LABK æqualis eſt triangulo ABE. igitur eadem eſt proportio ſuperficiei LABK ad triangulum LKC, quæ eſt trianguli ABE ad triangulum AEC. illa vero proportio eſt ſicut M ad N. igitur patet propoſitum.

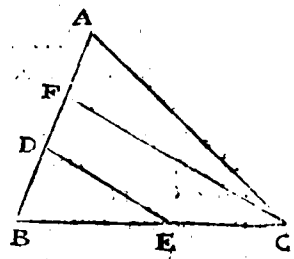


Nota, quod hoc modo probari poteſt præmiſſa concluſio: & eſt hæc probatio facilior quam præmiſſæ. [3]

Prop. VI. Probl.

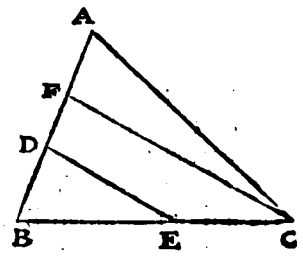
Triangulum notum, per lineam æquidiſtantem cuicunque lineæ in eo protractæ, ſive ab angulo protrahatur, ſive non, ſecundum proportionem datam dividere.

SI enim linea ſignata ſit æquidiſtans [4] alicui lateri trianguli, habebitur intentum per tertiam hujus. ſi etiam dicta linea ab aliquo angulo deſcendat, habebitur propoſitum per præmiſſam. quod ſi aſſignata linea neque deſcendat ab angulo aliquo trianguli, neque alicui ejus lateri fuerit æquidiſtans, ut in triangulo ABC aſſignetur linea DE, quæ non ſit æquidiſtans lineæ AC, ſed concurreret cum ea ex parte C ſi utraque ulterius protraheretur; tunc ab angulo, ex parte



1 Per conjunctam ut in priore parte. *Savil.* 2 Nam ſi æquidiſtans ponatur tertio lateri (nequeenim poteſt eſſe alicui alteri æquidiſtans, niſi per æquidiſtantiam etiam coincidentiam intelligamus) cadit ea κτῶσις in 3. hujus. ſed totum eſt frigidum: nam quod ſequitur *neque alicui perpendicularium ejus* melius eſſet *neque ſuper baſim perpendicularis ſit*, & etiam eſt in ἄκρον totum problema melius hoc modo proponeretur: *Triangulum datum per lineam æquidiſtantem lineæ ab angulo ejus ad baſim ductæ quomodocunque, ſecundum proportionem datam dividere.* Idem. 3 Deeſt illa κτῶσις in qua AD non ſecat lineam BC, ſed extra cadit; quam tamen ſupplere non eſt difficile. *Idem.* 4 Vel coincidat. *Idem.*

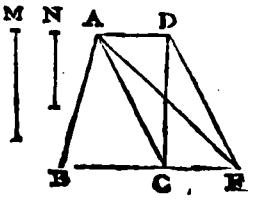
cujus eſſet concurſus, ut ab angulo C, protrahatur linea CF in triangulo æquidiſtanter lineæ aſſignatæ, ſcilicet lineæ DE: & tunc per præmiſſam dividatur triangulus per lineam æquidiſtantem lineæ CF ſecundum proportionem datam. patet per 30. primi, quod ille tunc dividitur per lineam æquidiſtantem lineæ DE; & ſic liquet propoſitum, quantumcunque extranee linea protrahatur.



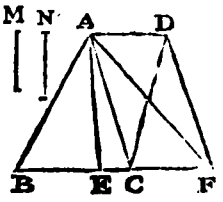
Prop. VII. Probl.

Per lineam protractam ab angulo noti quadranguli, illum quadrangulum ſecundum proportionem datam dividere.

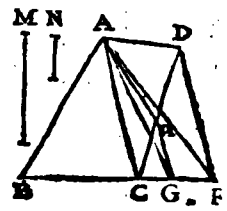
SIT proportio data M ad N: & ſit quadrangulus ABCD; à cujus angulo A volo protrahere lineam dividentem quadrangulum ſecundum proportionem M ad N. protraham enim diametrum AC; & à puncto D protraham lineam DF æquidiſtantem lineæ AC, donec concurrat cum linea BC in puncto F: deinde dividam lineam BF ſecundum proportionem M ad N; & cadat primo diviſio in puncto C: ita quod eadem ſit proportio BC ad CF quæ eſt M ad N. dico igitur quod linea AC dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Nam triangulus ADC æqualis eſt triangulo AFC, per 37. primi. ſed proportio trianguli ABC ad triangulum ACF eſt ſicut proportio M ad N, per primam ſexti. igitur proportio trianguli ABC ad triangulum ACD eſt ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.



Secundo, cadat diviſio in E puncto inter B & C; ita quod ſit proportio BE ad EF ſicut M ad N. tunc protracta linea AE, dico quod proportio trianguli ABE ad ſuperficiem AECD eſt ſicut proportio M ad N. *Probatio.* Protraham enim lineam AF. erit ergo triangulus ADC æqualis triangulo AFC, per 37. primi. poſito igitur triangulo AEC communi utrique, erit ſuperficies AECD æqualis triangulo AEF. igitur eadem eſt proportio trianguli ABE ad ſuperficiem AECD, & ad triangulum AEF. cum igitur, per primam ſexti, proportio ABE trianguli ad AEF triangulum ſit ſicut M ad N; patet quod proportio ABE trianguli ad AECD ſuperficiem eſt ſicut M ad N. quod fuit probandum.



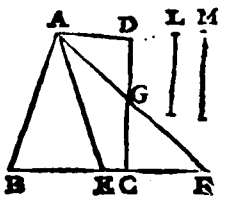
Cadat tertio diviſio inter C & F in puncto G; ita quod ſit proportio BG ad GF ſicut M ad N. tunc protraham lineam GH æquidiſtanter lineæ DF, quouſque concurrat cum linea DC in puncto H: deinde protracta linea AH, dico quod proportio ſuperficiei ABCH ad triangulum ADH eſt ſicut proportio M ad N. *Probatio.* Producam enim lineam AG. erit igitur triangulus AHC æqualis triangulo AGC. ſed & totus triangulus ADC æqualis eſt toti triangulo AFC. ergo triangulus ADH reſiduus æqualis eſt triangulo AFG reſiduo. poſito igitur triangulo ABC communi duobus triangulis ACH & ACG æqualibus; erit ſuperficies ABCH æqualis triangulo ABG. erit igitur proportio ſuperficiei ABCH ad triangulum ADH ſicut trianguli ABG ad triangulum AGF. ſed proportio trianguli ABG ad triangulum AGF eſt ſicut proportio M ad N. igitur liquet propoſitum.



Prop. VIII. Probl.

Quadrangulum notum duorum æquidiſtantium laterum, per lineam ductam à puncto in altero æquidiſtantium laterum aſſignato, ſecundum proportionem datam dividere.

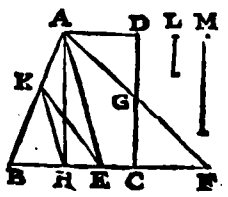
SIT quadrangulus notus ABCD: & punctum aſſignatum in latere BC æquidiſtante lateri AD ſit E. tunc volo protrahere lineam ab E puncto, dividentem quadrangulum ſecundum proportionem L ad M. protrahatur enim BC ulterius ſecundum rectitudinem uſque ad F: ita quod linea CF ſit æqualis lineæ AD; & ducatur linea AF, ſecans lineam DC in puncto G. ſunt igitur trianguli ADG & GCF ſimiles, & latera AD & CF æqualia. igitur illi trianguli ſunt æquales. addito igitur ABCG communi utrique, patet quod quadrangulus ABCD æqualis eſt triangulo ABF. *Iſtud memoriæ commenda.* Deinde dividam lineam BF ſecundum proportionem L ad M. & cadat diviſio primo in puncto E, ita quod proportio BE ad EF ſit ſicut L ad M. tunc protracta linea EA, dico quod illa dividet quadrangulum ſecundum quod proponitur. nam propter æqualitatem triangulorum ADG & CGF, ſuperficies AECD æqualis eſt triangulo AEF. igitur eadem eſt proportio trianguli ABE ad ſuperficiem AECD, & ad triangulum AEF: proportio vero ABE ad AEF eſt ſicut proportio L ad M. igitur proportio ABE ad reſiduum quadranguli eſt ſicut proportio L ad M. quod eſt propoſitum.



Cadat ſecundo diviſio inter B & E in puncto H, ita quod ſit proportio BH ad HF ſicut L

ad

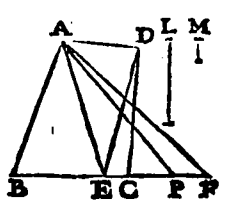
ad M. tunc protraham lineam HK æquidistanter lineæ AE; & secet lineam AB in puncto K: deinde protracta linea KE, dico quod illa divi-



dit quadrangulum, secundum quod proponitur. protraham enim lineam AH. & quia lineæ AE, KH sunt æquidistantes; erunt trianguli KAH, & KEH æquales. igitur addito KBH utrique, erit triangulus ABH æqualis triangulo KBE. sed & triangulus AKE æqualis est triangulo AHE. igitur addito AECD communi utrique; erit superficies AKECD æqualis quadrangulo AHCD. quadrangulus vero AHCD æqualis est triangulo AHF, ut supra ostensum est. igitur eadem est proportio trianguli KBE ad superficiem AKECD sicut trianguli ABH ad triangulum AHF: & per consequens sicut L ad M. quod fuit probandum.

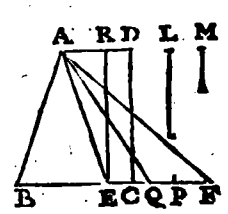
Tertio, cadat divisio inter E & F; facta figura, resecabo de linea E-F lineam EP æqualem lineæ DA, deinde secabo lineam BF secundum proportionem L ad M.

Et cadat divisio primo in puncto P; ita quod sit proportio BP ad PF sicut L ad M. tunc protraham lineam ED, quam dico dividere quadrangulum secundum formam propositam. *Probatio.* Producam enim lineam PA: & quia linea EP est æqualis lineæ AD, & æquidistans ei, erit triangulus ADE æ-



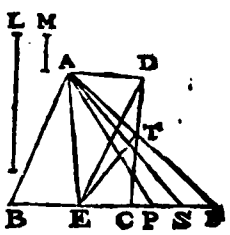
qualis triangulo APE. posito igitur triangulo ABE communi, erit quadrangulus ABED æqualis triangulo ABP: & per consequens residuus triangulus DEC erit æqualis triangulo residuo APF; propter id quod supra probatum est: scilicet quod quadrangulus ABCD æqualis est triangulo ABF. liquet igitur quod eadem est proportio quadranguli ABED ad triangulum DEC sicut trianguli ABP ad triangulum APF, per 7. quinti. sed proportio trianguli ABP ad triangulum APF est sicut L ad M. igitur proportio ABED ad DEC est sicut L ad M. quod fuit probandum.

Secundo, cadat divisio inter E & P in puncto Q: ita quod sit proportio BQ ad QF sicut L ad M: deinde secabo ex linea AD [1] lineam AR æqualem lineæ EQ. tunc protracta linea ER, dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. protraham enim lineam AQ. & quia lineæ AR & EQ sunt æquales & æquidistantes,



erunt [per 38.1.] trianguli ARE & AQE æquales: quibus addito triangulo ABE communi, erit quadrangulus ABER æqualis triangulo ABQ. sed probatum est superius, quod totus quadrangulus ABCD æqualis est toti triangulo ABF. igitur quadrangulus RECD residuus æqualis est triangulo AQF residuo. igitur eadem est proportio quadranguli ABER ad quadrangulum RECD sicut trianguli ABQ ad triangulum AQF: & per consequens sicut L ad M. quod fuit propositum.

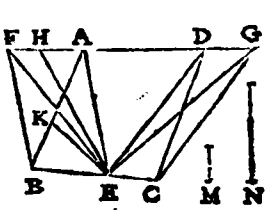
Tertio, cadat divisio inter P & F in puncto S: ita quod sit proportio BS ad SF sicut L ad M: dividam autem lineam DC secundum proportionem PS ad SF, in puncto T: & protraham lineam ET. dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur: producam enim lineam AS. quia igitur lineæ AD & EP sunt æquales & æquidistantes; erunt trianguli ADE & APE æquales, & per consequens addito triangulo ABE communi, quadrangulus ABED æqualis est triangulo ABP. sed & totus quadrangulus ABCD æqualis est toti triangulo ABF. igitur triangulus DEC æqualis est triangulo PAF. sed & proportio trianguli DET ad triangulum TEC est sicut proportio trianguli PAS ad triangulum SAF. [2] igitur triangulus DET æqualis est triangulo PAS: & triangulus TEC æqualis est triangulo SAF. jam vero probatum fuit quod quadrangulus ABED æqualis est triangulo ABP. igitur addito triangulo DET ad primum, & triangulo PAS sibi æquali ad secundum; erit pentagonus ABETD æqualis triangulo ABS. jam vero probatum fuit quod trianguli TEC & SAF sunt æquales. igitur eadem est proportio pentagoni ABETD ad triangulum TEC sicut trianguli ABS ad triangulum ASF; & per consequens sicut L ad M. quod fuit propositum.



PROP. IX. PROBL.

Quemlibet notum quadrangulum, per lineam ductam à puncto in uno laterum non æquidistantium assignato, secundum proportionem datam dividere.

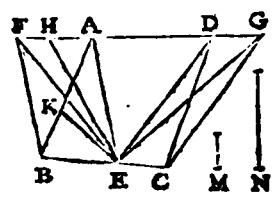
SIT quadrangulus ABCD, cujus duo latera AD, BC non æquidistent. illum igitur quadrangulum volo dividere secundum proportionem M ad N notam, per lineam ductam ab E puncto dato super lineam BC. producam enim duas lineas EA, ED: & extendam DA ex utraque parte secundum rectitudinem, donec linea BF concurreret cum ea in puncto F, æqui-



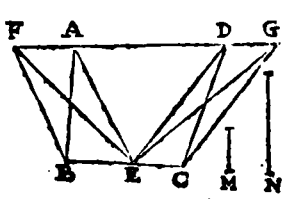
1 Quæ æqualis est τῇ EP. *Savil.* 2 Si duo tota æqualia dividantur in partes eandem inter se rationem habentes, erunt partes ὁμώνυμοι inter se æquales. *Idem.*

distanter lineæ AE: & CG concurreret cum ea in puncto G, æquidistanter lineæ ED. deinde dividam lineam FG secundum proportionem M ad N.

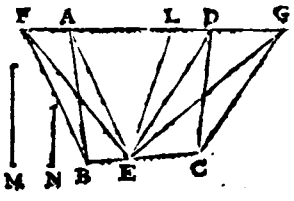
Et primo, cadat divisio inter F & A in puncto H, ita quod sit proportio FH ad HG sicut M ad N; dividam etiam lineam BA secundum proportionem FH ad HA: & cadat divisio in puncto K: ita quod sit proportio BK ad KA sicut FH ad HA. tunc ducta linea KE, dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. protraham enim duas lineas EF, EG. erit igitur triangulus AFE æqualis triangulo ABE, per 37. primi; & triangulus DGE æqualis triangulo DCE. addito igitur utrique triangulo AED, erit triangulus FEG æqualis quadrangulo ABCD propositō. *Hoc memoriæ commenda.* Et quia triangulus AFE est æqualis triangulo ABE; & eadem proportio FH ad HA sicut BK ad KA. igitur, per primam sexti, triangulus EHF æqualis [1] est triangulo EKB. igitur & residuum residuo æquale. triangulus igitur HEG residuus æqualis est pentagono AKECD. eadem igitur est proportio trianguli EKB ad pentagonum AKECD sicut trianguli EHF ad triangulum EGH; hoc est, sicut lineæ FH ad lineam HG, & per consequens sicut M ad N. quod fuit probandum.



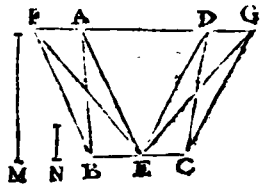
Secundo, cadat divisio in puncto A, ita quod sit proportio FA ad AG sicut M ad N. tunc protracta linea EA, dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. nam triangulus AFE æqualis est triangulo ABE. igitur triangulus AEG residuus æqualis est [2] quadrangulo AECD residuo. eadem ergo est proportio trianguli ABE ad quadrangulum AECD sicut trianguli AFE ad triangulum AEG; hoc est, sicut FA ad lineam AG, & per consequens sicut M ad N. quod fuit probandum.



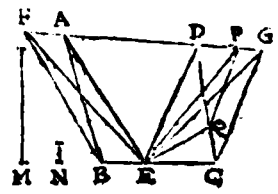
Tertio, cadat divisio inter A & D in puncto L, ita quod sit proportio FL ad LG sicut proportio M ad N. tunc dico quod linea EL dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. cum enim trianguli AFE & ABE sint æquales, addito utrique triangulo LAE, erit triangulus LFE æqualis quadrangulo ABEL. igitur triangulus LEG residuus æqualis est [3] quadrangulo LECD residuo. igitur eadem est proportio quadranguli ABEL ad quadrangulum LECD sicut trianguli LFE ad triangulum LEG: & per consequens sicut proportio M ad N. quod fuit probandum.



Quarto, cadat divisio in puncto D: quia tunc triangulus DGE & DCE sunt æquales, erit triangulus DFE residuus æqualis quadrangulo DABE residuo. igitur eadem est proportio quadranguli ABED ad triangulum DEC sicut trianguli DFE ad triangulum DEG; hoc est, sicut lineæ FD ad lineam DG, & per consequens sicut M ad N. linea igitur DE dividit quadrangulum, secundum quod proponitur.



Quinto, cadat divisio in puncto P inter D & G; ita quod proportio FP ad PG sit sicut M ad N. tunc protraham lineam PQ æquidistantem lineæ CG, donec concurrat cum linea CD in puncto Q. protracta igitur linea EQ, dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. protraham enim lineam PE. erit igitur triangulus DEP æqualis triangulo DEQ, per 37. primi. posito igitur triangulo AED communi, erit triangulus AEP æqualis quadrangulo AEQD. duo etiam triangulo AFE & ABE sunt æquales. igitur triangulus FEP æqualis est pentagono ABEQD. erit igitur triangulus PEG residuus æqualis triangulo QEC residuo: igitur eadem est proportio pentagoni ABEQD ad triangulum QEC sicut trianguli FEP ad triangulum PEG; hoc est, sicut lineæ FP ad lineam PG: & per consequens sicut M ad N. quod fuit propositum.



PROP. X. PROBL.

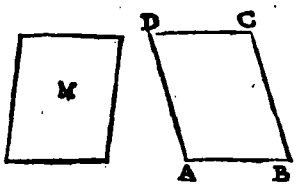
Proposita linea nota, duabusque lineis à terminis ejus protractis, angulos qualescunque cum ea ex eadem parte causantibus, superficiem propositæ superficiei [4] notæ æqualem, super lineam notam propositam designare, ita quod dicta superficies [5] inter lineam illam notam, & lineam sibi æquidistantem, atque inter dictas duas ex una parte, vel ex altera notæ lineæ protractas lineas, includatur.

VErbi gratia sit linea AB nota: & duæ lineæ AD, BC secundum libitum sumptæ. volo super lineam AB constituere superficiem æqualem superficiei M notæ, inclusam inter li-

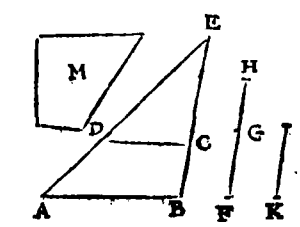
1 Nam tota AFE, ABE æqualia sunt: & partes FHE, HEA rationem habent quam BEK, KEA, per 1. 6. ut in præcedente. *Savil.* 2 Nam triangulus FEG æqualis est quadrangulo ABCD, eodem argumento quo supra. *Idem.* 3 Nam FEG, ABCD sunt æqualia, ut supra. *Idem.* 4 Rectilineæ. *Idem.* 5 Id est, claudatur his quatuor rectis lineis, linea proposita, duabus protractis, & linea propositæ æquidistante. *Idem.*

neas

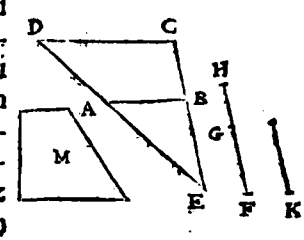
neas A D, B C, & inter A B, & lineam ſibi æquidiſtantem. duo igitur anguli D A B & C B A aut ſunt æquales duobus rectis, aut majores, aut minores. ſint primo æquales duobus rectis. erit igitur [per 28. 1.] linea A D æquidiſtans lineæ B C. faciam igitur, per 44. 1, ſuper lineam A B ſuperficiem æquidiſtantium laterum, cujus anguli ſint æquales angulis D A B, C B A, & ipſa ſuperficies ſit æqualis ſuperficiei M: & patet propoſitum.



Sint ſecundo, duo anguli DAB & CBA minores duobus rectis. concurrent igitur [per 11. ax.] duæ lineæ A D, B C ex parte C D. concurrant autem in puncto E. niſi igitur triangulus E A B fuerit major ſuperficie M; ex parte D C non poteſt talis ſuperficies conſtitui, qualem voluimus: ſed tunc ex parte alia fieri oportebit. ſit igitur triangulus E A B major ſuperficie M: & ſit [1] proportio trianguli E A B ad ſuperficiem M ſicut linea F H ad lineam F G: & ſit linea K media proportionalis inter F H & G H. deinde ſecabo ex linea E B lineam E C, quæ ſe habeat ad lineam E B ſicut linea K ad lineam F H. tunc protracta C D æquidiſtanter lineæ B A, dico quod ſuperficies A B C D eſt æqualis ſuperficiei M. *Probatio.* Nam proportio trianguli B A E ad triangulum C D E eſt, per 19. ſexti, ſicut proportio B E ad C E duplicata. igitur & ſicut proportio F H ad K duplicata: & per conſequens proportio trianguli B A E ad triangulum C D E eſt ſicut proportio F H ad G H. igitur everſim, proportio trianguli B A E ad quadrangulum B A D C eſt ſicut proportio F H ad F G. ſed quæ eſt proportio F H ad F G, eadem eſt trianguli B A E ad ſuperficiem M. igitur eadem eſt proportio trianguli B A E ad ſuperficiem M, & ad quadrangulum B A D C. quare ſuperficies M & quadrangulus B A D C ſunt æquales. & hoc eſt quod voluimus.



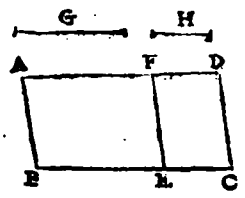
Sint tertio, duo anguli D A B & C B A majores duobus rectis. concurrent igitur ex parte A B. ſitque in puncto E. ponam igitur proportionem G H ad G F ſecundum proportionem trianguli A B E ad ſuperficiem M: ſitque linea K media proportionalis inter F H & G H: & ponam proportionem E C ad E B ſecundum proportionem F H ad K. tunc protracta C D æquidiſtanter lineæ A B, dico quod ſuperficies M æqualis eſt quadrangulo A B C D. *Probatio.* Proportio enim trianguli C D E ad triangulum B A E eſt (ut ſupra oſtenſum eſt) ſicut proportio F H ad G H. igitur everſim, proportio C D E trianguli ad quadrangulum C D A B eſt ſicut proportio F H ad F G. igitur disjunctim, proportio A B E trianguli ad quadrangulum A B C D eſt ſicut proportio G H ad G F: & per conſequens ſicut proportio ejuſdem trianguli A B E ad ſuperficiem M. igitur quadrangulus A B C D & M ſuperficies ſunt æquales. & hoc voluimus demonſtrare.



Prop. XI. Probl.

Quadrangulum æquidiſtantium laterum, per lineam uni ſuorum laterum æquidiſtantem, ſecundum proportionem datam dividere.

SIT quadrangulus æquidiſtantium laterum A B C D: quem volo dividere ſecundum proportionem G ad H, per lineam æquidiſtantem lateri ejus A B. dividam enim lineam B C in puncto E ſecundum proportionem G ad H: & protraham lineam E F æquidiſtantem lineæ A B: & habetur propoſitum.

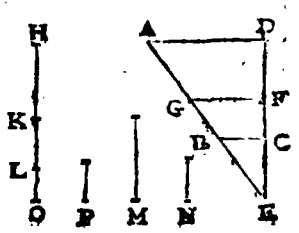


Nam per primam ſexti, eadem eſt proportio quadranguli A B E F ad quadrangulum F E C D ſicut lineæ B E ad lineam E C: & per conſequens ſicut G ad H. quod fuit propoſitum.

Prop. XII. Probl.

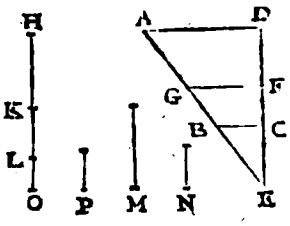
Quadrangulum duorum tantum æquidiſtantium laterum, per lineam æquidiſtantibus ejus lateribus æquidiſtantem, ſecundum proportionem datam dividere.

SIT quadrangulus A B C D, cujus tantum duo latera A D & B C æquidiſtent. illum igitur quadrangulum volo dividere ſecundum proportionem M ad N, per lineam æquidiſtantem lateribus ejus A D & B C: latera enim ejus A B & D C concurrent neceſſario. ſitque in puncto E: & ponam proportionem H O ad L O ſecundum proportionem trianguli D A E ad triangulum C B E. convertendo igitur & dividendo, erit proportio trianguli C B E ad quadrangulum D A B C ſicut L O ad L H. dividam autem lineam H L in puncto K ſecundum proportionem M ad N; ita quod ſit proportio H K ad K L ſicut M ad N. & ſit linea P media proportionalis inter lineas K O & O L: & ponam proportionem F E ad C E ſecundum proportionem K O ad P. deinde protraham li-



[1] Etiam hic opus eſt alio problemate. *Datis duabus figuris planis rectilineis, & linea recta, rectam lineam reperire quarto loco proportionalem.* rectilineas dico; nam ſi figuræ proponantur circulares aut ex mixtarum genere, næ problema iſtuc multo erit ἀλογώτερον eo quod ab auctore proponitur. *Savil.*

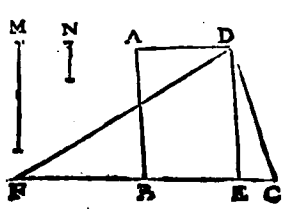
neam F G æquidiſtantem lineæ D A. dico igitur quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Nam proportio trianguli F G E ad triangulum C B E eſt ſicut F E ad C E proportio duplicata. igitur & ſicut K O ad P proportio duplicata: & per conſequens proportio trianguli F G E ad triangulum C B E eſt ſicut proportio K O ad L O. igitur diviſim proportio quadranguli F G B C ad triangulum C B E eſt ſicut proportio K L ad L O. proportio vero trianguli C B E ad quadrangulum A B C D (ut ſupra oſtenſum eſt) eſt ſicut proportio L O ad L H. igitur per æquam proportionalitatem, proportio quadranguli F G B C ad quadrangulum A B C D eſt ſicut proportio K L ad L H. igitur disjunctim, proportio quadranguli F G B C ad quadrangulum A G F D eſt ſicut proportio K L ad K H. igitur è contra, proportio A G F D ad G B C F eſt ſicut H K ad K L; & per conſequens ſicut M ad N. quod fuit propoſitum.



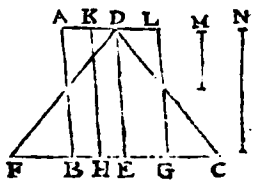
Prop. XIII. Probl.

Quadrangulum duorum tantum æquidiſtantium laterum, per lineam æquidiſtantem uni ſuorum laterum non æquidiſtantium, ſecundum proportionem datam dividere.

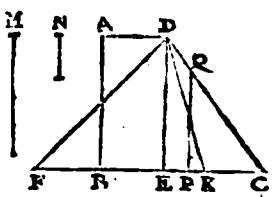
SInt quadranguli A B C D duo tantum latera A D, B C æquidiſtantia. illum igitur quadrangulum volo dividere ſecundum proportionem M ad N, per lineam æquidiſtantem lateri ejus A B. ab altero igitur angulorum C vel D, protraham lineam intra quadrangulum æquidiſtantem lineæ A B: & ſit, gratia exempli, linea D E. deinde protraham E B ſecundum rectitudinem uſque ad F, donec B F ſit æqualis B E, & dividam lineam F C ſecundum proportionem M ad N. & primo cadat diviſio in puncto E; ita quod ſit proportio F E ad E C ſicut M ad N. dico igitur quod linea D E dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Protraham lineam D F. eſt igitur proportio trianguli F D E ad triangulum E D C ſicut proportio F E ad E C; igitur & ſicut proportio M ad N. ſed per 1. ſexti, & 41. primi, quadrangulus A B E D æqualis eſt triangulo F D E. igitur proportio quadranguli A B E D ad triangulum D E C eſt ſicut M ad N. quod fuit propoſitum.



Secundo, cadat diviſio inter F & E; ita quod major ſit proportio F E ad E C quam ſit proportio M ad N. diviſa igitur E C linea per æqualia in puncto G; erit major proportio B E ad E G quam M ad N, propter hoc quod linea B E eſt medietas lineæ F E, & linea E G eſt medietas lineæ E C. diviſa igitur linea B G ſecundum proportionem M ad N, cadet diviſio inter B & E: ſitque in puncto H; ita quod eadem ſit proportio B H ad H G ſicut M ad N. tunc protracta linea H K æquidiſtanter lineæ B A, dico quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. protraham enim A D lineam ſecundum rectitudinem uſque ad L; quouſque concurrat cum linea G L æquidiſtanter lineæ D E. quia igitur linea E C eſt dupla lineæ E G, erit parallelogrammum D E G L æquale triangulo D E C. addito igitur utrique quadrangulo K H E D, erit quadrangulus K H G L æqualis quadrangulo K H C D. igitur eadem eſt proportio quadranguli A B H K ad quadrangulum K H G L, & ad quadrangulum K H C D. proportio vero quadranguli A B H K ad quadrangulum K H G L eſt ſicut proportio B H ad H G: & per conſequens ſicut M ad N. igitur proportio quadranguli A B H K ad quadrangulum K H C D eſt ſicut proportio M ad N. quod eſt propoſitum.



Tertio cadat diviſio inter E & C, in puncto R, ita quod ſit proportio F R ad R C ſicut M ad N. tunc protraham lineam D R; & per 3. hujus, dividam triangulum D E C ſecundum proportionem trianguli D E R ad triangulum D R C, per lineam P Q æquidiſtantem lateri ejus D E; ita quod ſit quadrangulus D E P Q æqualis triangulo D E R: & etiam triangulus Q P C æqualis triangulo D R C. dico igitur quod linea P Q dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. proportio enim trianguli F D R ad triangulum R D C eſt ſicut proportio M ad N. ſed quadrangulus A B E D æqualis eſt triangulo F D E: & quadrangulus D E P Q æqualis eſt triangulo D E R. igitur pentagonus A B P Q D eſt æqualis triangulo F D R. ſed & triangulus D R C æqualis eſt triangulo Q P C. igitur proportio pentagoni A B P Q D ad triangulum Q P C eſt ſicut proportio trianguli F D R ad triangulum D R C: & per conſequens ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.



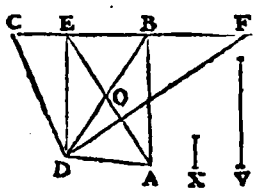
Conſimiliter operaremur per lineam æquidiſtantem lateri ejus D C, & patet totum quod propoſuimus.

Prop. XIV. Probl.

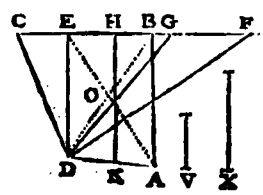
Quadrangulum nulla habentem æquidiſtantia latera, per lineam uni ſuorum laterum æquidiſtantem, ſecundum proportionem datam dividere.

VErbi gratia quadranguli A B C D nulla ſint æquidiſtantia latera: illum tamen volo dividere ſecundum proportionem V ad X, per lineam

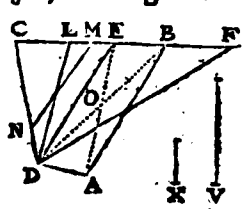
lineam æquidiſtantem lateri ejus AB. protraham enim ab altero angulorum C vel D lineam æquidiſtantem lineæ AB, tranſeuntem intra quadrangulum: & ſit (gratia exempli) linea DE, & protraham duas lineas EA, BD ſecantes ſe in puncto O: & extendam lineam CB ſecundum rectitudinem uſque ad F, donec ſit proportio FB ad BE ſicut proportio AO ad OE, & protraham lineam FD. deinde dividam lineam FC ſecundum proportionem V ad X. & primo, cadat diviſio in puncto E; ita quod ſit proportio FE ad EC ſicut proportio V ad X. dico igitur quod linea DE dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Nam proportio trianguli ADO ad triangulum ODE eſt ſicut proportio AO ad OE: & etiam proportio trianguli ABO ad triangulum OBE eſt ſicut proportio AO ad OE. igitur aggregando, proportio trianguli BAD ad triangulum BED eſt ſicut proportio AO ad OE: & per conſequens ſicut proportio FB ad BE. & ſecundum eandem proportionem eſt triangulus FDB ad triangulum BED. igitur [per 9.5.] triangulus BAD æqualis eſt triangulo FBD. addito igitur BDE triangulo communi utrique, erit triangulus FDE æqualis quadrangulo ABED. ſed proportio trianguli FDE ad triangulum EDC eſt ſicut proportio FE ad EC: & per conſequens ſicut proportio V ad X. igitur proportio quadranguli ABED ad triangulum EDC eſt ſicut proportio V ad X. quod fuit propoſitum.



Secundo, cadat diviſio inter F & E (ſive intra quadrangulum, ſive extra, non eſt cura): ſitque in puncto G: ita quod ſit proportio FG ad GC ſicut proportio V ad X; & protraham lineam GD. erit igitur proportio trianguli FGD ad triangulum GDC ſicut V ad X. adjungam igitur, per 10. hujus, ad lineam AB ſuperficiem æqualem triangulo FDG; quam contineant duo anguli ABC & BAD, ſeparando eam per lineam HK æquidiſtantem lineæ AB. dico igitur quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. tranſibit enim intra quadrangulum ABED; propter hoc quod [1] triangulus FDE eſt æqualis quadrangulo ABED; & triangulus FDG minor eſt triangulo FDE. cum igitur triangulus FDE ſit æqualis quadrangulo ABED, & triangulus FDG ſit æqualis quadrangulo ABHK: oportet quod triangulus GDE ſit æqualis quadrangulo KHED. poſito igitur triangulo EDC communi, erit triangulus GDC æqualis quadrangulo KHCD. eadem igitur eſt proportio quadranguli ABHK ad quadrangulum KHCD ſicut trianguli FGD ad triangulum GDC: & per conſequens ſicut proportio V ad X. quod fuit propoſitum.



Tertio, cadat diviſio inter E & C in puncto L: ita quod ſit proportio FL ad LC ſicut V ad X. erit igitur proportio trianguli FDL ad triangulum LDC ſicut proportio V ad X. deinde ſecabo, per tertiam hujus, ex triangulo DEC triangulum ſimilem ei, æqualem vero triangulo LDC, per lineam MN æquidiſtantem lineæ ED. dico igitur quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. triangulus enim FDE æqualis eſt quadrangulo ABED; & triangulus EDL æqualis eſt quadrangulo DEMN: propter hoc quod trianguli MNC & LDC ſunt æquales. igitur pentagonus ABMND æqualis eſt triangulo FDL. igitur eadem eſt proportio pentagoni ABMND ad triangulum MNC ſicut trianguli FDL ad triangulum LDC: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

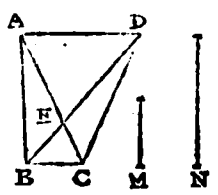


Sicut autem dividitur quadrangulus ſecundum proportionem datam per lineam æquidiſtantem lateri ejus AB, ita poteſt dividi per lineam æquidiſtantem alteri ejus lateri cuicunque; & patet propoſitum.

PROP. XV. PROBL.

Quemlibet quadrangulum, per lineam æquidiſtantem uni diametrorum ejus, ſecundum proportionem datam dividere.

VErbi gratia quadrangulum ABCD volo dividere ſecundum proportionem M ad N, per lineam æquidiſtantem diametro ejus AC. protraham enim diametrum BD ſecantem AC in puncto E: & dividam lineam BD ſecundum proportionem M ad N. primo igitur cadat diviſio in puncto E; ita quod eadem ſit proportio BE ad ED ſicut M ad N. dico igitur quod diameter AC dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. nam proportio trianguli ABE ad triangulum AED eſt ſicut proportio BE ad ED. ſimiliter proportio trianguli BEC ad triangulum EDC eſt ſicut proportio BE ad ED. igitur conjungendo, erit proportio trianguli ABC ad triangulum ADC ſicut proportio BE ad ED: & per conſequens ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.

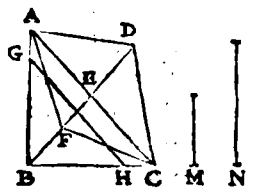


Secundo, cadat diviſio inter B & E in puncto F: ita quod eadem ſit proportio BF ad FD quæ eſt M ad N. tunc protraham duas lineas FA, FC; & erit proportio duorum triangulorum ABF, CBF conjunctim ad quadrangulum

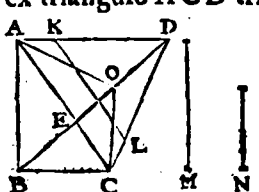
1 Eodem argumento quo in ſuperiori πρώτον: nam ut AO ad OE, id eſt FB ad BE, id eſt FDB ad BDE, ſic BAD ad BDE: quare FDB æquale BAD; & communi addito BDE, erit FDE æquale BADE. *Savil.*

AFCD

AFCD ſicut proportio BF ad FD. ex triangulo igitur ABC ſecabo, per tertiam hujus, triangulum GBH ſibi ſimilem, & æqualem duobus triangulis ABF, CBF conjunctim, per lineam GH æquidiſtantem lineæ AC: illam igitur lineam dico dividere quadrangulum, ſecundum quod proponitur. quia enim triangulus GBH eſt æqualis ſuperficiei ABCF, erit triangulus AFC æqualis quadrangulo AGHC. addito igitur ADC communi, erit quadrangulus AFCD æqualis pentagono AGHCD. proportio igitur trianguli GBH ad pentagonum AGHCD eſt ſicut proportio ſuperficiei ABCF ad quadrangulum AFCD: & per conſequens ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.



Tertio, cadat diviſio inter E & D in puncto O: ita quod ſit proportio BO ad OD ſicut M ad N. tunc protraham duas lineas OA, OC. erit igitur proportio quadranguli ABCO ad ſuperficiem AOCD ſicut proportio BO ad OD; & per conſequens ſicut M ad N. ſecabo igitur, per tertiam hujus, ex triangulo ACD triangulum KLD ſibi ſimilem, & æqualem ſuperficiei AOCD, per lineam KL æquidiſtantem lineæ AC. dico igitur quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. triangulus enim AOC æqualis eſt quadrangulo ACLK. igitur quadrangulus ABCO æqualis eſt pentagono ABCLK, & triangulus KLD æqualis ſuperficiei AOCD. igitur proportio pentagoni ABCLK ad triangulum KLD eſt ſicut proportio quadranguli ABCO ad ſuperficiem AOCD; & per conſequens ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.

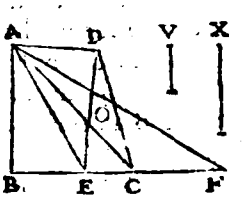


Conſimiliter faciemus, ut dividatur quadrangulus ABCD ſecundum proportionem datam, per lineam æquidiſtantem diametro ejus BD. & patet propoſitum.

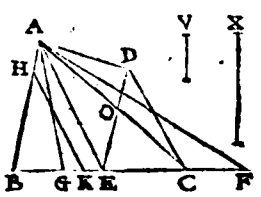
Prop. XVI. Probl.

Quemlibet quadrangulum, per lineam æquidiſtantem lineæ in quadrangulo aſſignatæ, quæ nec æquidiſtet alicui laterum ejus, neque alicui diametrorum ejus, ſecundum proportionem datam dividere.

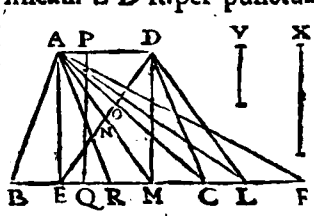
UT verbi gratia quadrangulum ABCD volo dividere ſecundum proportionem V ad X, per lineam æquidiſtantem lineæ AE. protraham enim duas diametros AC, ED ſecantes ſe ſuper punctum O: deinde producam lineam BC ſecundum rectitudinem uſque ad F, donec ſit proportio EC ad CF ſicut proportio EO ad OD: & protraham lineam AF. tunc dividam lineam BF ſecundum proportionem V ad X: & primo, cadat diviſio in E puncto; ita quod ſit proportio BE ad EF ſicut V ad X. dico igitur quod linea AE dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. nam proportio trianguli AEC ad triangulum ACD eſt ſicut proportio EO ad OD. igitur eſt ſicut proportio EC ad CF, & per conſequens ſicut proportio trianguli AEC ad triangulum ACF. igitur trianguli ACF & ACD ſunt æquales. totus igitur quadrangulus AECD eſt æqualis toti triangulo AEF. eadem igitur eſt proportio trianguli ABE ad quadrangulum AECD ſicut ad triangulum AEF. ſed proportio ABE trianguli ad triangulum AEF eſt ſicut proportio V ad X. igitur proportio trianguli ABE ad quadrangulum AECD eſt ſicut proportio V ad X. quod fuit propoſitum.



Secundo, cadat diviſio inter B & E in puncto G: ita quod eadem ſit proportio BG ad GF ſicut V ad X. tunc protraham lineam AG: & ſecabo, per tertiam hujus, de triangulo ABE triangulum HBK ſibi ſimilem & æqualem triangulo ABG, per lineam HK æquidiſtantem lineæ AE. tunc illam dico dividere quadrangulum, ſecundum quod proponitur. erit enim quadrangulus AHKE reſiduus de triangulo ABE æqualis triangulo AGE reſiduo de eodem ABE. ſed & quadrangulus AECD [1] æqualis eſt triangulo AEF. igitur pentagonus AHKCD æqualis eſt triangulo AGF. igitur eadem eſt proportio trianguli HBK ad pentagonum AHKCD ſicut trianguli ABG ad triangulum AGF; hoc eſt, ſicut BG ad GF, & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.



Tertio, cadat diviſio inter E & F. quia igitur AE non eſt æquidiſtans lineæ CD, protraham ab altero duorum angulorum DC lineam intra quadrangulum æquidiſtantem lineæ AE: quæ (gratia exempli) ſit linea DM: & protraham lineam AM ſecantem lineam ED ſuper punctum N. deinde faciam proportionem LM ad ME ſecundum proportionem DN ad NE. hoc autem ſtatim fieri poteſt, protrahendo lineam DL æquidiſtantem lineæ AM. cadet igitur L citra F; eo quod linea DF, ſi protraheretur, eſſet [2] æquidiſtans lineæ AC, ſi illa protraheretur. tunc protraham lineam AL. erit igitur triangulus AEL æqualis quadrangulo AEMD. dividatur igitur linea BF ſecundum proportionem V ad X: & nunc cadat diviſio inter E & L



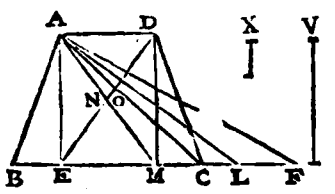
1 Eodem argumento quo in ſuperiori πτώτη. *Savil.* ηγτωση. *Idem.*

2 Per 2. ſexti; quia eſt ut EO ad OD ſic EC ad CF, per

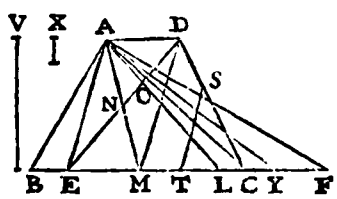
in

in puncto R, ita quod eadem ſit proportio B R ad R F ſicut V ad X. deinde, per decimam hujus, protraham lineam P Q æquidiſtantem lineæ A E, ſic quod ſuperficies A E Q P ſit æqualis triangulo A E R. & quia triangulus A E L eſt major triangulo A E R: & triangulus A E L eſt æqualis quadrangulo A E M D; erit propter hoc quadrangulus A E Q P minor quadrangulo A E M D [1]. dico igitur quod linea P Q dividit quadrangulum A B C D, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Quadrangulus enim A E C D eſt æqualis triangulo A E F: & quadrangulus A E Q P eſt æqualis triangulo A E R. igitur quadrangulus P Q C D reſiduus eſt æqualis triangulo A R F reſiduo. ſimiliter quia quadrangulus A E Q P eſt æqualis triangulo A E R: poſito triangulo A B E communi; erit quadrangulus A B Q P æqualis triangulo A B R. igitur eadem eſt proportio quadranguli A B Q P ad quadrangulum P Q C D ſicut trianguli A B R ad triangulum A R F. igitur & ſicut B R ad R F: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

Quarto, cadat diviſio in puncto L, ita quod eadem ſit proportio B L ad L F ſicut V ad X. tunc dico quod linea D M dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. nam triangulus A E F eſt æqualis quadrangulo A E C D: & triangulus A E L eſt æqualis quadrangulo A E M D. igitur triangulus A L F reſiduus eſt æqualis triangulo D M C reſiduo. ſimiliter, quia quadrangulus A E M D eſt æqualis triangulo A E L; poſito triangulo A B E communi, erit quadrangulus A B M D æqualis triangulo A B L. eadem igitur eſt proportio quadranguli A B M D ad triangulum D M C ſicut trianguli A B L ad triangulum A L F: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.



Quinto, cadat diviſio inter L & F in puncto Y; ita quod eadem ſit proportio B Y ad Y F ſicut V ad X: & protraham lineam A Y. quia igitur triangulus D M C [2] æqualis eſt triangulo A L F; & triangulus A L F major eſt triangulo A Y F: erit triangulus D M C major triangulo A Y F. igitur ex triangulo D M C ſe parabo, per tertiam hujus, triangulum S T C ſibi ſimilem, & æqualem triangulo A Y F, per lineam S T æquidiſtantem lineæ D M. dico igitur quod linea S T dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. quia enim triangulus D M C eſt æqualis triangulo A L F; & etiam triangulus S T C eſt æqualis triangulo A Y F: erit quadrangulus D M T S reſiduus æqualis triangulo A L Y reſiduo. cum igitur quadrangulus A B M D [3] ſit æqualis triangulo A B L; erit pentagonus A B T S D æqualis triangulo A B Y. eadem igitur eſt proportio pentagoni A B T S D ad triangulum S T C ſicut trianguli A B Y ad triangulum A Y F. igitur & ſicut B Y ad Y F: & per conſequens ſicut V ad X. & hoc eſt quod voluimus demonſtrare.

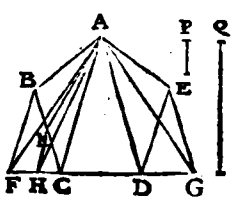


Et eſt notandum quod ſicut dividitur quadrangulus per lineam æquidiſtantem lineæ ductæ ab angulo ejus, quæ nec æquidiſtet ejus lateribus, nec ejus diametris: ita poteſt dividi per lineam æquidiſtantem lineæ non ductæ ab angulo aſſignato, ut protrahendo lineam ab aliquo angulo quadranguli cadentem intra quadrangulum, & æquidiſtantem lineæ aſſignatæ: & tunc operabimur, ſicut jam docuimus.

PROP. XVII. PROBL.

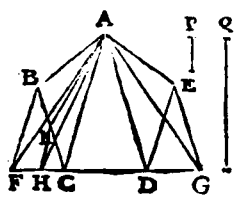
Pentagonum quemlibet notum per, lineam à quolibet angulo ejus ductam, ſecundum proportionem datam dividere.

VErbi gratia pentagonum A B C D E volo dividere ſecundum proportionem P ad Q, per lineam ductam ab angulo ejus A. protraham duas lineas A C, A D: & ab angulo B protraham lineam B F æquidiſtantem lineæ A C, donec concurrat cum linea D C ulterius protracta in puncto F. ſimiliter ab angulo E protraham lineam E G æquidiſtantem lineæ A D, donec concurrat cum linea C D ulterius protracta in puncto G. tunc protractis lineis A F, A G; erit triangulus A F G æqualis pentagono A B C D E: propter hoc quod triangulus A B C eſt æqualis triangulo A F C, & triangulus A E D eſt æqualis triangulo A G D; addito A C D communi utriſque, patet quod diximus. dividam igitur lineam F G ſecundum proportionem P ad Q. & cadat primo diviſio inter F & C in puncto H: ita quod ſit proportio F H ad H G ſicut proportio P ad Q. protraham igitur H K æquidiſtanter lineæ B F, donec tetigerit lineam B C in puncto K. eſt igitur eadem proportio B K ad K C ſicut F H ad H C, per ſecundam ſexti. deinde protracta linea A K: dico illam dividere pentagonum, ſecundum quod proponitur. protraham enim lineam A H. quia igitur triangulus A E D eſt æqualis triangulo A G D; addito A C D communi, erit quadrangulus A C D E æqualis triangulo A C G. ſimiliter, quia triangulus A K C eſt æqualis triangulo A H C, propter æquidiſtantiam linearum K H & A C: erit pentagonus A K C D E æqualis triangulo A H G. item, quia eadem eſt proportio B C ad B K ſicut F C ad F H; erit eadem proportio trianguli A B C ad triangulum A B K ſicut trianguli



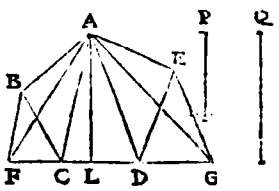
1 Cadetque P Q citra D M. *Savil.* 2 Ut in præcedenti πτόσιν. 3 Ut in præcedenti πτόσιν.

AFC ad triangulum AFH. igitur permutatim, eadem eſt proportio trianguli ABC ad triangulum AFC ſicut trianguli ABK ad triangulum AFH. cum igitur trianguli ABC & AFC ſint æquales; erunt trianguli ABK & AFH æquales. eadem igitur eſt proportio trianguli ABK ad pentagonum AKCDE ſicut trianguli AFH ad triangulum AHG. igitur & ſicut FH ad HG: & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.



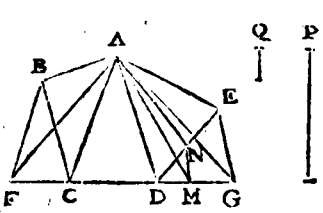
Secundo, cadat diviſio in puncto C; ita quod eadem ſit proportio FC ad CG ſicut P ad Q. tunc dico quod linea AC dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. nam ut oſtenſum eſt ſupra, quadrangulus ACDE eſt æqualis triangulo ACG, & triangulus ABC æqualis eſt triangulo AFC. igitur eadem eſt proportio trianguli ABC ad quadrangulum ACDE ſicut trianguli AFC ad triangulum ACG. igitur ſicut FC ad CG: & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.

Tertio, cadat diviſio in puncto L inter C & D: ita quod ſit proportio FL ad LG ſicut P ad Q. protraham igitur lineam AL; quam dico dividere pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim triangulus ABC eſt æqualis triangulo AFC; poſito ACL communi, erit quadrangulus ABCL æqualis triangulo AFL. ſimiliter, poſito triangulo ALD cum utriſque triangulis AED, AGD; erit quadrangulus ALDE æqualis triangulo ALG. igitur eadem eſt proportio quadranguli ABCL ad quadrangulum ALDE ſicut trianguli AFL ad triangulum ALG. igitur ſicut FL ad LG; & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.



Quarto, cadat diviſio in puncto D. tunc dico quod linea AD dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur: & patet probatio, ſicut patuit quando cecidit diviſio in puncto C.

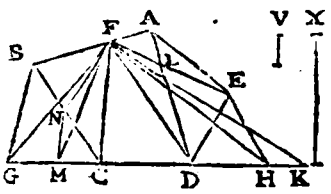
Quinto, cadat diviſio inter D & G in puncto M; ita quod eadem ſit proportio FM ad MG ſicut P ad Q tunc erigam lineam MN æquidiſtanter lineæ GE, quouſque tetigerit lineam DE in puncto N: & protraham lineam AN; quam dico dividere pentagonum, ſecundum quod proponitur. protracta enim linea AM, arguitur, ut prius in primo caſu [1], quod triangulus AEN eſt æqualis triangulo AGM: & quod pentagonus ABCDN eſt æqualis triangulo AFM. igitur eadem eſt proportio pentagoni ABCDN ad triangulum ANE ſicut trianguli AFM ad triangulum AMG. igitur & ſicut proportio FM ad MG: & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.



PROP. XVIII. PROBL.

Per lineam ductam à puncto, in latere noti pentagoni aſſignato, dictum pentagonum ſecundum proportionem notam dividere.

VErbi gratia, pentagonum ABCDE volo dividere ſecundum proportionem V ad X, per lineam ductam à puncto F aſſignato in in latere ejus AB. protraham lineam BG æquidiſtanter lineæ FC, & lineam EH æquidiſtanter lineæ FD, donec concurrant cum linea CD, ulterius ex utraque parte protracta, in punctis G & H. & protraham lineam AD ſecantem lineam FE in puncto L: deinde extendam lineam DH uſque ad K, donec ſit proportio DH ad HK ſicut DL ad LA. hoc autem fiet, imaginando lineam AK protrahi æquidiſtanter lineæ LH. tunc protraham lineas FG, FH, FK. dividam igitur lineam GK ſecundum proportionem V ad X. & cadat diviſio primo inter G & C in puncto M: ita quod eadem ſit proportio GM ad MK ſicut V ad X. deinde dividam lineam BC in puncto N per lineam MN æquidiſtantem lineæ BG; eritque proportio BN ad NC ſicut proportio GM ad MC. tunc protracta linea FN; dico quod illa dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Nam [2] proportio trianguli FDE ad triangulum FAE eſt ſicut proportio DL ad LA. igitur & ſicut proportio DH ad HK, quæ eſt ſicut proportio trianguli DFH ad triangulum HFK. igitur proportio trianguli FDE ad triangulum FAE eſt ſicut proportio trianguli DFH ad triangulum HFK. igitur permutatim, proportio trianguli DFE ad triangulum DFH eſt ſicut proportio trianguli FAE ad triangulum FHK. ſed trianguli DEH & DFE ſunt æquales; propter æquidiſtantiam linearum FD & EH. igitur trianguli FAE & FHK ſunt æquales. quadrangulus igitur FDEA æqualis eſt triangulo FDK. addito igitur FCD communi; erit pentagonus FCDEA æqualis triangulo FCK. *Hoc memoriæ commendemus* [3]. ex alia parte

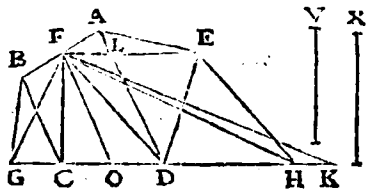


[1] Ubi demonſtratum fuit ABK æquale eſſe triangulo AHF: hæc enim illis reſpondent in figura 1. πτώσεως. *Savil.* [2] Per primam ſexti, FDL eſt ad FLA ut DL ad LA; & DEL eſt ad LEA ut DL ad LA: quare aggregando FDE eſt ad FAE ut DL ad LA, ut ſupra aliquoties. τὸ κεφάλαιον eſt. *Omne quadrilaterum dividitur per diametrum in duo triangula proportionem eandem habentia, quam alterius diametri ſegmenta inter ſe eodem ordine ſumpta.* Idem. [3] Pertinet enim communiter ad omnes πτώσεις. pro-

protraham lineam F M. quia igitur triangulus F B C eſt æqualis triangulo F G C; & eadem eſt proportio B N ad N C ſicut G M ad M C: [1] erit triangulus F B N æqualis triangulo F G M; & triangulus F N C æqualis triangulo F M C. congregando igitur, patet quod hexagonus F N C D E A eſt æqualis triangulo M F K; & trianguli F B N & F G M ſunt æquales. igitur eadem eſt proportio trianguli F B N ad hexagonum F N C D E A ſicut trianguli F G M ad triangulum F M K. igitur & ſicut lineæ G M ad lineam M K: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

Secundo, cadat diviſio in puncto C; ita quod eadem ſit proportio G C ad C K ſicut V ad X. dico igitur quod linea F C dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. jam enim oſtenſum fuit quod pentagonus F C D E A eſt æqualis triangulo F C K, & quod etiam triangulus F B C æqualis eſt triangulo F G C. igitur eadem eſt proportio trianguli F B C ad pentagonum F C D E A ſicut trianguli F G C ad triangulum F C K. igitur & ſicut lineæ G C ad C K: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

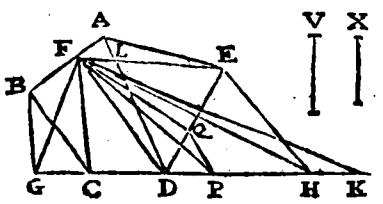
Tertio, cadat diviſio inter C & D in puncto O: ita quod eadem ſit proportio G O ad O K ſicut V ad X. dico igitur quod linea F O dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. addito communi triangulo F O D ad quadrangulum F D E A, & ad triangulum ſibi æqualem F D K; erit pentagonus F O D E A æqualis triangulo F O K. conſimiliter, addito



triangulo F C O communi ad duos æquales triangulos F B C & F G C; erit quadrangulus F B C O æqualis triangulo F G O. igitur eadem eſt proportio quadranguli F B C O ad pentagonum F O D E A ſicut trianguli F G O ad triangulum F O K: igitur & ſicut G O ad O K: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

Quarto, cadat diviſio in puncto D; ita quod eadem ſit proportio G D ad D K ſicut V ad X. dico igitur quod linea F D dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. addito enim triangulo F C D communi ad æquales triangulos F B C & F G C, patet probatio.

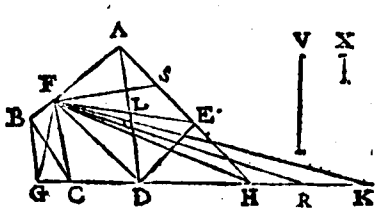
Quinto, cadat diviſio inter D & H in puncto P; ita quod eadem ſit proportio G P ad P K ſicut V ad X. tunc dividam lineam D E in puncto Q, per lineam P Q æquidiſtantem lineæ E H. erit igitur eadem proportio D Q ad Q E ſicut D P ad P H. protracta igitur linea F Q; dico quod illa dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. totus enim quadrangulus F D E A eſt æqualis toti triangulo F D K. ſed & triangulus F D Q [3] eſt æqualis triangulo F D P. igitur quadrangulus F Q E A reliduus æqualis eſt triangulo F P K reſiduo. quadrangulus etiam F B C D æqualis eſt triangulo F G D. addito igitur triangulo F D Q ad quadrangulum F B



C D; & triangulo F D P, æquali triangulo F D Q, addito ad triangulum F G D: patet quod pentagonus F B C D Q æqualis eſt triangulo F G P. eadem igitur eſt proportio pentagoni F B C D Q ad quadrangulum F Q E A ſicut trianguli F G P ad triangulum F P K: & per conſequens ſicut proportio V ad X. quod fuit propoſitum.

Sexto, cadat diviſio in puncto H, dico igitur quod linea F E dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim quadrangulus F B C D [4] eſt æqualis triangulo F G D, & ut ſupradictum eſt [5], triangulus A F E æqualis eſt triangulo F H K, atque triangulus F D E æqualis triangulo F D H. igitur pentagonus F B C D E æqualis eſt triangulo F G H. igitur eadem eſt proportio pentagoni F B C D E ad triangulum F A E ſicut trianguli F G H ad triangulum F H K. igitur & ſicut G H ad H K: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

Septimo, cadat diviſio inter H & K in puncto R: ita quod eadem ſit proportio G R ad R K ſicut V ad X. tunc dividam lineam E A in puncto S, ita quod eadem ſit proportio E S ad S A ſicut H R ad R K. dico igitur quod linea F S dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim triangulus A F E eſt æqualis triangulo F H K; & proportio E S ad S A eſt ſicut proportio H R ad R K: erit triangulus F E S æqualis triangulo F H R, & etiam triangulus F S A æqualis triangulo F R K. ſed & pentagonus F B C D E [6] eſt æqualis triangulo F G H. igitur hexagonus F B C D E S eſt æqualis triangulo F G R. igitur eadem eſt pro-



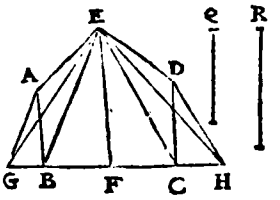
portio hexagoni F B C D E S ad triangulum F S A ſicut trianguli F G R ad triangulum F R K. igitur & ſicut lineæ G R ad lineam R K: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

1 Nam tota æqualia dividuntur in parteis eandem inter ſe rationem habenteis: partes itaque ὁμόλογοι æquales erunt. *Savil.* 2 Ut probatum eſt in prima πτώσει. 3 Quia F D, Q P æquidiſtant. 4 Ut in quarta πτώσει. 5 In quarta πτώσει. 6 Ut in prima πτώσει.

Prop. XIX. Probl.

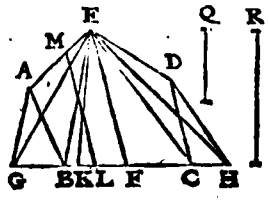
Pentagonum duorum æquidiſtantium laterum, per lineam æquidiſtantem æquidiſtantibus ejus lateribus, ſecundum proportionem datam dividere.

VErbi gratia, pentagonum ABCDE volo dividere ſecundum proportionem Q ad R, per lineam æquidiſtantem lateri ejus AB; quod quidem latus, aut æquidiſtat lateri CD, aut lateri DE. æquidiſtet igitur, primo, lateri CD. tunc protraham lineam EF æquidiſtantem lateri AB: & producam lineas EB & EC: deinde protraham lineam AG æquidiſtantem lineæ EB, & lineam DH æquidiſtantem lineæ EC, quouſque concurrant cum linea BC, ulterius ex utraque parte protracta, in punctis G & H: deinde dividam lineam GH



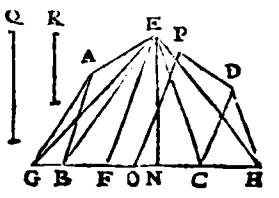
ſecundum proportionem Q ad R. & primo cadat diviſio in puncto F. dico igitur quod linea EF dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Quia enim linea AG æquidiſtat lineæ EB; protracta linea EG, erit triangulus EAB æqualis triangulo EGB. addito igitur triangulo EBF communi, erit triangulus EGF æqualis quadrangulo EABF. item, quia DH linea æquidiſtat lineæ EC; protracta linea EH, erit triangulus EDC æqualis triangulo EHC. addito igitur triangulo EFC communi, erit triangulus EFH æqualis quadrangulo EFCD. & prius fuit triangulus EGF æqualis quadrangulo ABFE. igitur eadem eſt proportio quadranguli ABFE ad quadrangulum EFCD ſicut trianguli EGF ad triangulum EFH. igitur & ſicut lineæ GF ad FH: & per conſequens ſicut Q ad R. quod fuit propoſitum.

Secundo, cadat diviſio inter G & F in puncto K; ut ſit proportio GK ad KH ſicut Q ad R: tunc protraham lineam EK. quia igitur triangulus EGK eſt minor triangulo EGF; & triangulus EGF [1] æqualis eſt quadrangulo ABFE: erit triangulus EGK minor quadrangulo ABFE. adjungam igitur lineæ AB, per decimam hujus, ſuperficiem ABLM æqualem triangulo EGK per lineam LM æquidiſtantem lineæ AB. dico igitur quod linea LM dividit pentagonum, ſecundum



quod proponitur. nam triangulus EGK eſt æqualis quadrangulo ABLM; & totus triangulus EGH [2] eſt æqualis toti pentagono ABCDE. igitur triangulus EKH reſiduus eſt æqualis pentagono MLCDE reſiduo. igitur eadem eſt proportio quadranguli ABLM ad pentagonum MLCDE ſicut trianguli EGK ad triangulum EHK: & per conſequens ſicut Q ad R. quod fuit propoſitum.

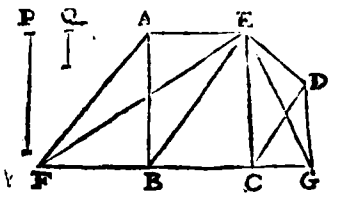
Tertio, cadat diviſio inter F & H in puncto N: & protrahatur linea EN. erit igitur triangulus EHN minor quadrangulo EFCD; eo quod eſt minor triangulo EHF ſibi æquali: ideo, per decimam hujus, adjungam lineæ DC ſuperficiem POCD æqualem triangulo EHN per lineam OP æquidiſtantem lineæ CD. dico igitur quod linea OP dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim quadrangulus POCD eſt æqualis triangulo ENH: & totus triangulus EGH æqualis eſt toti pentagono ABCDE; erit pentagonus ABOPE reſiduus æqualis triangulo EGN reſiduo. igitur eadem eſt proportio pentagoni ABOPE ad quadrangulum POCD ſicut trianguli EGN ad triangulum ENH: & per conſequens ſicut Q ad R. quod fuit propoſitum. Conſimiliter autem ſicut dividitur pentagonus ABCDE habens duo latera AB, CD æquidiſtantia, facta ratiocinatione ſuper lineam BC oppoſitam angulo E inter duo latera æquidiſtantia intercepto: ita poſitis duobus ejus lateribus AB, DE æquidiſtantibus, dividetur per lineam æquidiſtantem lineæ AB, facta ratiocinatione ſuper latus ejus EA oppoſitum angulo ejus C inter duo ejus latera AB, DE æquidiſtantia intercepto: & patet propoſitum utrobique.



Prop. XX. Probl.

Pentagonum, cujus unum laterum ejus uni ejus diametro æquidiſtat, per lineam æquidiſtantem illi lateri & illi diametro, ſecundum proportionem datam dividere.

VErbi gratia, pentagonum ABCDF volo dividere ſecundum proportionem P ad Q, per lineam æquidiſtantem lateri ejus AB; quod quidem latus æquidiſtat diametro ejus CE. protraham enim lineam EB; & producam lineam AF æquidiſtantem lineæ EB, & lineam DG æquidiſtantem lineæ EC, donec concurrant cum linea BC, protracta ex utraque parte ulterius, ad puncta F & G: deinde protractis lineis EF & EG, erit triangulus EFG



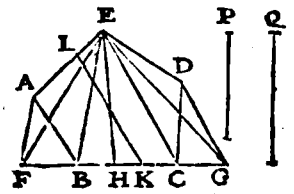
æqualis pentagono ABCDE propoſito: ut patet per modum arguendi in præmiſſa [3]. dividam igitur lineam FG ſecundum proportionem P ad Q. cadat igitur diviſio vel in C, vel ante C, vel poſt C. & primo cadat in puncto C: ita quod eadem ſit proportio FC ad CG ſicut P

1 Ut in prima πόρισ. 2 Ut in principio prop. 17. demonſtratum eſt. 3 In principio prop. 17.

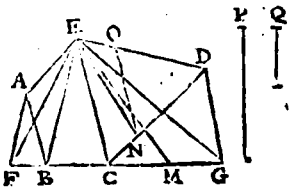
ad

ad Q. dico igitur quod linea E C dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quadrangulus enim A B C E eſt æqualis triangulo E F C; propter hoc quod triangulus E C D reſiduus eſt æqualis triangulo E C G reſiduo; & totus pentagonus æqualis toti triangulo. igitur eadem eſt proportio quadranguli A B C E ad triangulum E C D ſicut trianguli E F C ad triangulum E C G. igitur & ſicut F C ad C G; & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.

Secundo, cadat diviſio inter F & C in puncto H: ita quod ſit proportio F H ad H G ſicut P ad Q. quia igitur quadrangulus A B C E æqualis eſt triangulo E F C, & triangulus E F H minor eſt triangulo E F C; erit triangulus E F H minor quadrangulo A B C E. adjungam igitur lineæ A B, per decimam hujus, quadrangulum A B K L æqualem triangulo E F H, per lineam K L æquidiſtantem lineæ A B. illam igitur lineam K L dico dividere pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim ille totus pentagonus eſt æqualis toti triangulo E F G: & quadrangulus A B K L æqualis eſt triangulo E F H; erit pentagonus L K C D E reſiduus æqualis triangulo E H G reſiduo. eadem igitur eſt proportio quadranguli A B K L ad pentagonum L K C D E ſicut trianguli E F H ad triangulum E H G. igitur & ſicut F H ad H G: & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.



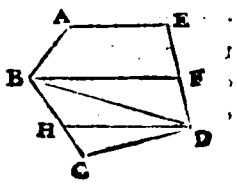
Tertio, cadat diviſio inter C & G in puncto M; ita quod eadem ſit proportio F M ad M G ſicut P ad Q. quia igitur triangulus E D C eſt æqualis triangulo E G C: & triangulus E M C minor eſt triangulo E G C; erit propter hoc triangulus E M C minor triangulo E D C. adjungam igitur lineæ E C quadrangulum E C N O æqualem triangulo E M C, per lineam N O æquidiſtantem lineæ E C, ſecundum doctrinam decimæ hujus: vel quod idem eſt, ſeparabo, per tertiam hujus, triangulum D O N à triangulo D E C ſibi ſimilem, & æqualem triangulo E G M. dico igitur quod linea N O dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim totus pentagonus A B C D E eſt æqualis toti triangulo E F G: & triangulus O N D æqualis eſt triangulo E M G; erit hexagonus A B C N O E reſiduus æqualis triangulo E F M reſiduo. eadem igitur eſt proportio hexagoni A B C N O E ad triangulum O N D ſicut trianguli E F M ad triangulum E M G. igitur & ſicut F M ad M G: & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.

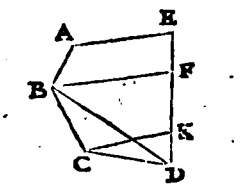


PROP. XXI. THEOR.

Quocunque latere pentagoni aſſignato, quod nec alicui ejus lateri, nec alicui ejus diametro æquidiſtet; protrahi poſſunt intra pentagonum, ab aliquibus duobus trium angulorum dicto lateri nullatenus conjunctorum, duæ lineæ æquidiſtantes illi lateri prætaxato.

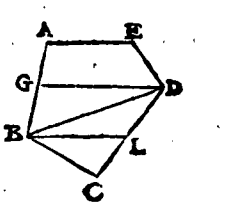
VErbi gratia, eſto quod in pentagono A B C D E latus ejus A E neque ſit æquidiſtans alicui lateri ejus, neque ejus diametro B D. tunc dico quod ab aliquibus duobus trium angulorum B, C, D protrahi poſſunt duæ lineæ intra pentagonum, quarum utraque ſit æquidiſtans lateri A E. ex quo enim A E & B D non ſunt æquidiſtantes, illæ ulterius protractæ aut concurrerent ex parte A B, aut ex parte E D. ſi ex parte A B; tunc linea B F protracta à puncto B, æquidiſtanter lineæ A E, neceſſario caderet ſuper latus E D, ſicut in utraque ſuperiorum figurarum [1]: ſi autem concurrerent ex parte E D, tunc linea D G à puncto D protracta, æquidiſtanter lineæ A E, neceſſario cadet ſuper latus A B; ſicut in utraque inferiorum figurarum [2].

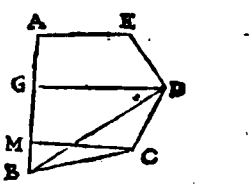




Item ſi A E & B D concurrerent ex parte A B, ſicut in utraque ſuperiorum figurarum; tunc linea B F, ex quo non eſt æquidiſtans lineæ C D, aut concurrent cum ea ex parte F D, aut ex parte B C; ſi ex parte F D, ſicut in prima ſuperiorum; tunc à puncto D protrahi poteſt D H æquidiſtanter lineæ A E, cadens in latere B C. ſi vero concurrerent B F & C D ex parte B C, ſicut in ſecunda ſuperiorum; tunc à puncto C protrahi poteſt C K æquidiſtanter lineæ A E, cadens in latere E D. habemus igitur B F & D H æquidiſtantes lineæ A E, in prima figurarum ſuperiorum. & habemus B F & C K æquidiſtantes eidem lineæ, in ſecunda figurarum ſuperiorum.

Si autem A E, B D concurrerent ex parte E D, ſicut in utraque inferiorum figurarum; tunc linea D G, ex quo non eſt æquidiſtans lineæ B C, aut concurret cum ea ex parte G B, aut ex parte D C. ſi ex parte G B, ſicut in prima inferiorum figurarum; tunc à puncto B protrahi poteſt B L æquidiſtanter lineæ A E, & cadet in latere C D: ſi vero G D & B C concurrent ex parte C D, ſicut in ſecunda inferiorum figurarum; tunc à puncto C protrahi poteſt C M æquidiſtanter lineæ A E, cadens in latere A B.





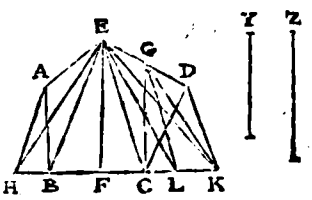
1 Primarum duarum hujus prop. 2 Ultimarum duarum hujus prop.

habemus igitur DG & BL in prima figurarum inferiorum: & DG & CM in ſecunda figurarum inferiorum, æquidiſtanter lineæ AE, & cadentes intra pentagonum. patet igitur totum quod oſtendere volebamus.

PROP. XXII. PROBL.

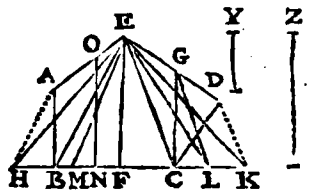
Pentagonum per lineam æquidiſtantem uni ejus lateri aſſignato, quod quidem latus nullo ejus alteri lateri, nec alicui ejus diametro ſit æquidiſtans, ſecundum proportionem datam dividere.

SIT pentagoni ABCDE latus AB, neque æquidiſtans diametro EC, neque alteri laterum ED, CD. illum igitur volo dividere ſecundum proportionem Y ad Z, per lineam æquidiſtantem lateri ejus AB. à duobus enim trium angulorum ejus C, D, E protraham [1] duas lineas intra pentagonum æquidiſtantes lateri ejus AB. aut igitur illæ duæ lineæ deſcendentes ſic ab angulis cadent ſuper idem latus, vel ſuper latera oppoſita. cadant igitur primo ſuper latera oppoſita: & ſint EF, CG; ita quod F ſit in latere BC, & punctum G ſit in latere ED. ratiocinabor autem ſuper latus, in quod cadit parallelus propinquior lineæ AB, videlicet ſuper latus BC. protraham igitur lineas EB & EC; deinde protraham lineam AH æquidiſtanter lineæ EB; & lineam DK æquidiſtanter lineæ EC, donec concurrant cum linea BC, ulterius ex utraque parte protracta, in punctis H & K: & protraham lineas EH & EK. quia igitur triangulus EAB eſt æqualis triangulo EHB: & triangulus EDC æqualis eſt triangulo EKC; addito triangulo EBC communi, erit pentagonus ABCDE æqualis triangulo EHK. *Quod eſt memoriæ commendandum* [2]. Protraham etiam lineam GL æquidiſtanter lineæ EC: & producam lineam EL: tunc dividam lineam HK ſecundum proportionem Y ad Z. aut igitur cadet diviſio in puncto F, vel in puncto L, vel inter H & F, vel inter F & L, vel inter L & K. cadat igitur primo in puncto F; ita quod eadem ſit proportio HF ad FK ſicut Y ad Z. dico igitur quod linea EF dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quadrangulus enim EABF æqualis eſt triangulo EHF, & quadrangulus EDCF æqualis eſt triangulo EKF. igitur eſt proportio quadranguli EABF ad quadrangulum EDCF ſicut trianguli EHF ad triangulum EKF. igitur & ſicut HF ad FK: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

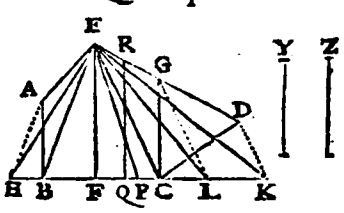


Secundo, cadat diviſio in puncto L. dico igitur quod linea CG dividit pentagonum prout proponitur. quia enim lineæ EC & GL ſunt æquidiſtantes, erunt trianguli EGC & ELC æquales. ſed totales trianguli EDC & LKC ſunt æquales. igitur & triangulus GCD æqualis eſt triangulo ELK. quadrangulus etiam ABCE æqualis eſt triangulo EHC. igitur pentagonus ABCGE æqualis eſt triangulo EHL. eadem igitur eſt proportio pentagoni ABCGE ad triangulum GCD ſicut trianguli EHL ad triangulum ELK. igitur ſicut HL ad LK: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

Tertio, cadat diviſio inter H & F in puncto M: & protrahatur linea EM. quia igitur triangulus EHF [3] eſt æqualis quadrangulo EABF: & triangulus EHM minor eſt triangulo EHF; erit propter hoc triangulus EHM minor quadrangulo EABF. adjungam igitur, per decimam hujus, lineæ AB ſuperficiem ABNO æqualem triangulo EHM, per lineam NO æquidiſtantem lineæ AB. dico igitur lineam NO dividere pentagonum, ſecundum quod proponitur. pentagonus enim ABCDE [4] æqualis eſt triangulo EHK: & quadrangulus ABNO æqualis eſt triangulo EHM. igitur pentagonus ONCDE reſiduus æqualis eſt triangulo EMK reſiduo. igitur eadem eſt proportio quadranguli ABNO ad pentagonum ONCDE ſicut trianguli EHM ad triangulum EMK. igitur & ſicut HM ad MK; & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.



Quarto, cadat diviſio inter F & L in puncto P: & protrahatur linea EP. quia igitur triangulus EFL æqualis eſt quadrangulo EFCG: & triangulus EFP minor eſt triangulo EFL; erit triangulus EFP minor quadrangulo EFCG. adjungam igitur lineæ EF, per decimam hujus, quadrangulum EFQR æqualem triangulo EFP, per lineam QR æquidiſtantem lineæ EF. dico igitur quod linea QR dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. eſt enim triangulus EHP æqualis pentagono ABQRE: & totus pentagonus ABCDE æqualis eſt toti triangulo EHK. igitur quadrangulus RQCD reſiduus æqualis eſt triangulo EPK. igitur eadem eſt proportio pentagoni ABQRE ad quadrangulum RQCD ſicut trianguli EHP ad triangulum EPK. igitur ſicut HP ad PK: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

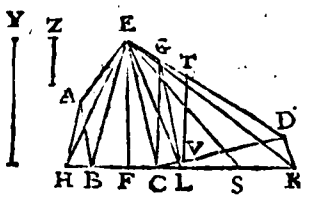


Quinto, cadat diviſio inter L & K in puncto S. quia igitur propter æquidiſtantiam linearum EC & GD, trianguli EGC & ELC ſunt

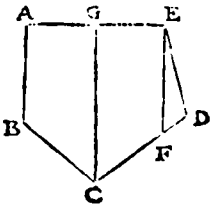
[1] Per præcedentem. [2] Nam pertinet ad omneis πτώσεις. [3] Ut in prima πτώσει. [4] patet per prop. 17. hujus.

æquales

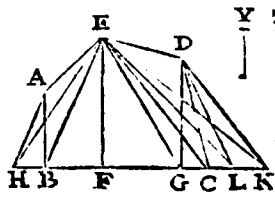
æquales: atque totales trianguli E D C & E K C etiam æquales; erunt propter hoc trianguli G D C, E K L reſidui æquales. ſed protracta linea E S, triangulus E K S minor eſt triangulo E K L. igitur triangulus E K S minor eſt triangulo G D C. per tertiam igitur hujus, reſecabo de triangulo G D C triangulum T D V ſibi ſimilem, & æqualem triangulo E K S, per lineam T V æquidiſtantem lineæ G C. dico igitur quod linea T V dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. totus enim pentagonus A B C D E æqualis eſt toti triangulo E H K, & triangulus T D V æqualis triangulo E K S. igitur hexagonus A B C V T E reliduus æqualis eſt triangulo E H S reſiduo. igitur eadem eſt proportio hexagoni A B C V T E ad triangulum T D V ſicut trianguli E H S ad triangulum E K S. igitur & ſicut H S ad S K: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.



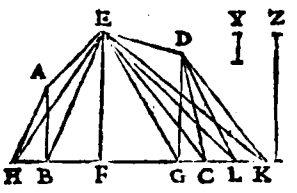
Si autem duæ lineæ E F & C G, quæ ſunt æquidiſtantes lineæ A B, ceciderint ſic, quod linea E F ceciderit ſuper latus C D: & linea C G ſuper latus A E; tunc erigemus angulum C: & ratiocinabimur ſuper lineam A E, ſicut fecimus ſuper lineam B C; & deveniemus ad noſtrum propoſitum, ſicut prius.



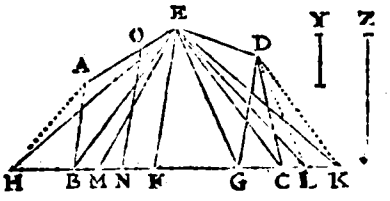
Si autem duæ lineæ, quæ protractæ ſunt æquidiſtanter lineæ A B, cadant ſuper unum & idem latus, tunc ratiocinabimur ſuper illud latus. ut verbi gratia, ſit quod in pentagono A B C D E duæ lineæ E F & D G protractæ æquidiſtanter lineæ A B cadant ſuper latus B C: tunc protraham A H æquidiſtantem lineæ E B, & lineam D K æquidiſtantem lineæ E C, protraham etiam lineam E G, & lineam ſibi æquidiſtantem D L: & producam lineas E H, E L & E K. patet igitur ex præmiſſis, quod triangulus E H K eſt æqualis pentagono A B C D E, & quod triangulus E H L eſt æqualis pentagono A B G D E; & ita relinquitur quod triangulus D G C æqualis eſt triangulo E L K. *Hæc autem ſunt memoriæ commendanda.* dividam igitur lineam H K ſecundum proportionem Y ad Z: & cadet diviſio vel in F, vel in L, vel inter illa, aut inter illa & extrema. cadat igitur primo diviſio in puncto F. itaque ſit proportio H F ad F K ſicut Y ad Z. dico igitur quod linea E F dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. nam quadrangulus A B F E eſt æqualis triangulo E H F, & quadrangulus E F C D eſt æqualis triangulo E F K. igitur eadem eſt proportio quadranguli A B F E ad quadrangulum E F C D ſicut trianguli E H F ad triangulum E F K: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.



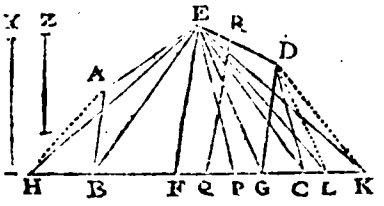
Secundo, cadat diviſio in puncto L. dico igitur quod linea D G dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim triangulus E G D eſt æqualis triangulo E G L: & quadrangulus A B G E æqualis triangulo E H G; erit pentagonus A B G D E æqualis triangulo E H L. ſed & triangulus D G C [1] æqualis eſt triangulo E L K. igitur eadem eſt proportio pentagoni A B G D E ad triangulum D G C ſicut trianguli E H L ad triangulum E L K. igitur & ſicut H L ad L K: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.



Tertio, cadat diviſio in puncto M inter H & F. protracta linea E M; fiat quadrangulus A B N O, per decimam hujus, æqualis triangulo E H M, per lineam N O æquidiſtantem lineæ A B. patet igitur, ſicut & ſupra, quod proportio quadranguli A B N O ad pentagonum O N C D E eſt ſicut proportio trianguli E H M ad triangulum E M K: & per conſequens ſicut Y ad Z. linea igitur O N dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur.



Quarto, cadat diviſio inter F & L in puncto P. tunc protracta linea E P; fiat quadrangulus E F Q R, per decimam hujus, æqualis triangulo E F P. pentagonus igitur A B Q R E eſt æqualis triangulo E H P. eadem igitur eſt proportio pentagoni A B Q R E ad quadrangulum R Q C D ſicut trianguli E H P ad triangulum E P K. igitur & ſicut H P ad P K: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

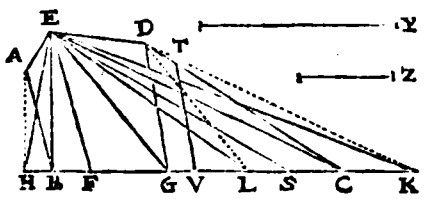


Quinto, cadat diviſio in puncto S inter L & K; ita quod eadem ſit proportio H S ad S K, ſicut Y ad Z. quia igitur, ut ſuperius [3] dictum

1 Ut ſupra memoriæ mandatum eſt. 2 Eſt enim A B F E quadrangulus æqualis triangulo H E F, & proinde major triangulo H B M. 3 In prima πτόσις ſecundæ partis.

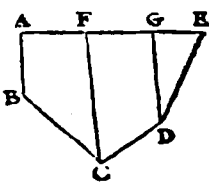
eſt,

eſt, triangulus D G C æqualis eſt triangulo E L K; erit triangulus E S K minor triangulo D G C. ſecabo igitur, per tertiam hujus, ex triangulo D G C triangulum T V C ſibi ſimilem, &



æqualem triangulo E S K, per lineam T V æquidiſtantem lineæ D G. dico igitur quod linea T V dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim triangulus T V C æqualis eſt triangulo E S K, & totus pentagonus A B C D E æqualis toti triangulo E H K; erit propter hoc, hexagonus A B V T D E æqualis toti triangulo E H S. eadem igitur eſt proportio hexagoni A B V T D E ad triangulum T V C ſicut trianguli E H S ad triangulum E S K: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

Si autem duæ lineæ, quæ protractæ fuerint æquidiſtanter lineæ A B, cadant ſuper latus A E, ſecundum quod cadunt lineæ C F, D G: tunc erigemus angulum C; & ratiocinabimur ſuper lineam A E, ſicut fecimus ſuper lineam B C: & deveniemus ad noſtrum propoſitum, ſicut prius. patet igitur quod voluimus demonſtrare.



FINIS LIBRI EUCLIDIS DE DIVISIONIBUS.

EU-

EUCLIDIS

DE

LEVI ET PONDEROSO

FRAGMENTUM.

DEFINITIONES.

1. ÆQUA magnitudine corpora ſunt, quæ loca replent æqua.

2. Diverſa magnitudine corpora ſunt, quæ loca replent non æqua.

3. Grandiora magnitudine dicuntur corpora, quæ loco ſunt ampliore.

4. Æqua potentia corpora ſunt, quorum, & tempore & aere aquave media æqualibus, & per æqualia intervalla, æquales ſunt motus.

5. Diverſa potentia corpora ſunt, quorum, tempore diverſo, motus ſunt æquales.

6. Diverſorum potentia corporum majus id potentia dicitur, quod movendo temporis inſumpſit minus: minus autem potentia, quod temporis amplius.

7. Generis ejuſdem corpora ſunt, quæ, cum æqua magnitudine ſint, etiam ſunt potentia.

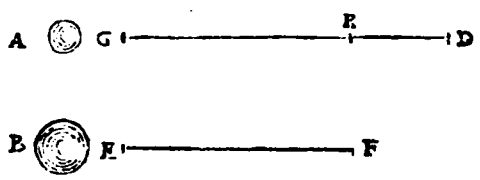
8. Diverſa genere corpora ſunt, quæ cum æqua magnitudine ſint, potentia non ſunt; per idem licet medium moveantur.

9. Diverſorum genere corporum, potentius id dicitur, quod eſt ſolidius.

THEOREMA I.

Diverſorum potentia corporum, quod ſpatium amplius movetur, habet amplius potentiæ.

SInt A & B corpora duo, ſint GD & EF ſpatia duo, GD majus per quod A, EF minus per quod B movetur. reſecabo à

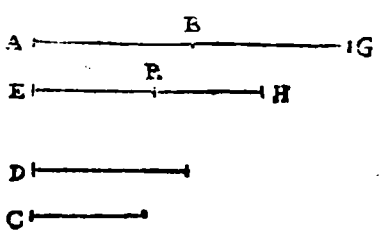


ſpatio GD, GR ſpatium, ſic ut ſit EF ſpatio ſpatium GR æquale. cætera ſponte patent.

THEOR. II.

Eorundem genere corporum, ſi ipſa inter ſe erunt multiplicia, erunt æque ipſorum potentiæ multiplices.

SIT corpus AG, eodem genere corpori D duplum; dico etiam potentia duplum eſſe. Sit enim AG quidem corporis potentia EH, D vero C: & AG juxta multiplicis exceſſum in AB & BG dividatur, ſic ut utriuſque po-

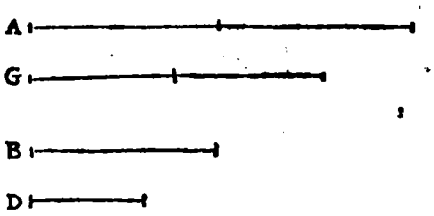


tentia, ipſius D corporis potentiæ, quæ erat C, æqualis fiat. rurſus, ut AG corpus in partes AB, BG corpori D æquas diviſimus, ſic EH potentiam in partes ER & RH, æquas C potentiæ dividamus. liquidum eſt EH potentiam duplam potentiæ C evadere.

THEOR. III.

Eorundem genere corporum, proportio & magnitudine & potentia eſt eadem.

SIT A corpus corporis eodem genere B duplum; dico ut A corpus ad B corpus eſt,



ſic corporis A potentia G ad corporis B potentiam D eſſe.

Patet, ſi ut corpora ſic potentias æque utrinque multipliciter dividamus.

THEOR. IV.

Quæ corpora æqua potentia ejuſdem generis corpori ſunt, ejuſdem ſunt inter ſe generis.

ABlatis enim æqualibus illi tertio, erunt ipſorum virtutes æquales, quia potentiæ tertii æquales.

THEOR. V.

Quorum corporum & magnitudo & potentia proportio una eſt, ipſa generis ejuſdem erunt.

SIT ut A corpus ad corpus B, ſic corporis A potentia ad corporis B potentiam D; dico A, B corpora generis ejuſdem eſſe.

Statuamus enim A corpus æquale corpori cujus potentia ſit R. erunt igitur ut B ad A ſic R ad potentiam ipſius A, quæ eſt G. reliqua patent.

FINIS OPERUM EUCLIDIS.

Errata, quæ in opus longum & difficile irrepsisse comperimus, sic emendentur.

PAG. 26. v. 48. pro ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως lege ἐπὶ τὴν ἴσην βάσιν. p. 49. v. 5. pro κύκλε lege κύκλον. p. 149. v. 4. dele ἴσην. v. 29. pro ΘΘ ἑαυτῦ lege ΘΘ ἑαυτοῦ. p. 150. v. 30. pro Γ Γ Z lege ἑλάσσονα Γ Γ Z. p. 152. v. 15. dele ΘΘ πρὸς, & v. 16. pro ἴσωσαν ΘΘ πρὸς lege ἴσωσαν ΘΘ πρὸς αἱ A, B Γ πρῶτοι. p. 159. v. 13. pro δ ἑξαπλάσιον lege πενπλάσιον. v. 37. pro Γ E, Z lege Γ E, Z. p. 161. v. 30. pro A, B ἑλάσσονι lege A, B ἑλάσσονος ἑλάσσονι. p. 173. v. 19. pro ἕτερον lege ἑκάτερον. p. 177. v. 30. dele ἐξῆς. p. 194. v. 40. pro ἀνάλογον lege ἐξῆς ἀνάλογον. p. 209. v. 13. pro ὑπ' αὐτῶν lege ἀπ' αὐτῶν. p. 261. v. 36. dele μήκει. p. 262. v. 22, & 23. pro Γ lege Γ p. 337. v. 2. pro τὸ lege τῷ. p. 354. v. 41. pro ὑφεστῶσι lege ὑφεστῶσαι. p. 370. v. 3. pro παρεμπίπτων lege παρεμπιπτόντων. p. 401. v. 10. pro ΘΘ πολλαπλάσιον lege ΘΘ πολλαπλάσιος. p. 403. v. 48. pro B A, Δ Γ μετὰ lege B A, A Γ μετὰ, &c. v. 52. pro B A, A Γ ἴσον lege A B, B Γ ἴσον. p. 454. v. 17. pro ὑλὴν lege ὕλιον. p. 455. v. 1. pro γεγωνιόμβρια lege γωνιόμβρια, & v. 19. pro ὃν lege ὃν. p. 457. v. 28. pro δεδομένην lege δεδομένου. p. 458. v. 22. pro ἀλλὰ lege ἄλλο, & v. 25. pro μεθημαπκαῖς lege μαθημαπκαῖς.